



**ОСОБЕННОСТИ синхронизации в системе
НЕИДЕНТИЧНЫХ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ
ВАН ДЕР ПОЛЯ И ВАН ДЕР ПОЛЯ – ДУФФИНГА.
ШИРОКОПОЛОСНАЯ синхронизация**

А.П. Кузнецов, В.И. Паксютов, Ю.П. Роман

Обсуждаются особенности динамики диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля, неидентичных по параметру, ответственному за бифуркацию Андронова – Хопфа. Указана возможность режима синхронизации в такой системе, которому отвечает бесконечно длинная полоса, разделяющая области гибели колебаний и квазипериодических режимов. Обсуждаются особенности бифуркационной картины для различных значений управляющих параметров и для дополнительной нелинейности, введенной по типу осциллятора Дуффинга. Обсуждение сопоставляется с анализом укороченных уравнений.

Введение

Система связанных осцилляторов ван дер Поля является базовой моделью теории колебаний и привлекает внимание исследователей как с точки зрения развития теории синхронизации, так и с точки зрения возможных приложений (см., например, монографию [1], работы [2–12] и цитированную там литературу). Большинство работ на эту тему, однако, ограничиваются случаем идентичных параметров осцилляторов, управляющих бифуркацией Андронова – Хопфа. Определенное исключение составляет недавняя работа [12]. Однако в ней авторы ограничились предположением о малости параметра, отвечающего за неидентичность осцилляторов, и квазигармоническим приближением. Также не была учтена неизохронность осцилляторов, но именно неизохронность приводит к нормальной форме бифуркации Андронова – Хопфа, и ее учет представляется важным с точки зрения обобщения результатов [1]. В тоже время компьютерные эксперименты с исходной дифференциальной системой в случае, когда управляющие параметры могут заметно отличаться, выявляют интересные особенности динамики [11]. В настоящей работе исследуется устройство плоскости параметров (частотная расстройка – величина связи) для неидентичных по управляющему параметру связанных осцилляторов ван дер Поля и ван дер Поля – Дуффинга.

Исходная дифференциальная система, описывающая взаимодействие осцилляторов указанного типа, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - (\lambda_1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x + \beta x^3 + \mu \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \right) &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} - (\lambda_2 - y^2) \frac{dy}{dt} + (1 + \delta)y + \beta y^3 + \mu \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь λ_1 и λ_2 – параметры, характеризующие степень превышения над порогом бифуркации Андронова – Хопфа в автономных осцилляторах; δ – частотная расстройка автономного второго осциллятора относительно первого; μ – коэффициент связи. Параметр β отвечает введению в уравнение ван дер Поля нелинейности по типу осциллятора Дуффинга. В рамках квазигармонического приближения он отвечает за нелинейность в фазовом уравнении и, соответственно, за неизохронность [1, 13]. В полной системе уравнений (1) неизохронность возможна и за счет не малых значений параметров λ_1 и λ_2 . Однако для удобства будем и в этом случае называть параметр β параметром фазовой нелинейности или неизохронности.

Будем исследовать осцилляторы с диссипативной связью. Одним из интересных эффектов в такой системе является так называемый эффект «гибели колебаний», который состоит в том, что достаточно сильная связь приводит к ситуации, когда устойчивым становится тривиальное состояние равновесия и колебания затухают [1, 2]. Обсудим проявления этого эффекта в неидентичных по управляющим параметрам осцилляторах.

Скажем несколько слов об использованной нормировке. В литературе более принятым является вариант, когда автономная система ван дер Поля выглядит следующим образом:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \lambda(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (2)$$

В этом случае, однако, в квазигармоническом приближении осциллятор движется по орбите фиксированного, единичного радиуса. А в рамках нормировки, использованной в (1), – по орбите радиуса $\sqrt{\lambda}$. Таким образом, в системе (2), фактически, исчезает бифуркация Андронова – Хопфа рождения предельного цикла, реализующаяся с ростом λ . Кроме того, исчезает удобная интерпретация для неидентичных систем, когда радиусы орбит естественным образом связаны с управляющими параметрами по закону корня квадратного. Поэтому будем использовать нормировку, примененную в системе (1).

1. Устройство плоскости параметров частотная расстройка – величина связи для неидентичных подсистем. Возможность широкополосной синхронизации

Представим, прежде всего, результаты компьютерного исследования системы (1). Эффективным инструментом такого исследования может служить метод карт динамических режимов, подробно описанный в работах [13, 14]. В его рамках на плоскости параметров (частотная расстройка δ – величина связи μ) черным и оттенками серого цвета будем обозначать период колебаний системы свя-

занных осцилляторов. Белый цвет соответствует хаотическим либо квазипериодическим движениям. Периоды циклов вычислялись с использованием метода сечений Пуанкаре. Для этого определялось количество точек пересечения аттрактора с выбранной в качестве сечения Пуанкаре секущей поверхностью, которое принималось за период колебательного процесса. При этом учитывались траектории, пересекающие эту секущую только в одном направлении. Исследуемая система характеризуется четырехмерным фазовым пространством (x, \dot{x}, y, \dot{y}) . Поэтому в качестве сечений Пуанкаре будет выступать трехмерная гиперповерхность, заданная некоторым дополнительным условием, например, равенством нулю скорости второго осциллятора $\dot{y} = 0$. В этом случае определялось число точек n пересечений траектории и секущей. Поскольку мы имеем все же систему двух связанных осцилляторов, для повышения информативности метода оказалось полезным построить еще одно сечение, отвечающее гиперповерхности $\dot{x} = 0$, и определить число m ее пересечений с траекторией. На картах цвет выбран в соответствии с периодом n .

(В альтернативном случае языки синхронизации в области $\delta > 0$ оказались бы окрашенными в один черный цвет.) При этом внутри наиболее характерных языков указано своего рода число вращения m/n , показывающее периоды m и n , вычисленные с помощью обоих способов выбора сечений.

На рис. 1 показана полученная таким образом карта динамических режимов на плоскости частотная расстройка – величина связи для идентичных осцилляторов ван дер Поля (1). На ней видны следующие характерные области:

- основной язык синхронизации, которому отвечает отношение частот осцилляторов $1/1$;
- область квазипериодических режимов со встроенной системой высших языков синхронизации, из которых наиболее характерен язык с числом вращения $1/3$;
- область эффекта «гибели колебаний», которой отвечает устойчивость состояния равновесия в начале координат.

Различие значений управляющих параметров λ_1 и λ_2 связанных осцилляторов ван дер Поля приводит к изменению устройства плоскости этих параметров. На рис. 2 представлена карта динамических режимов для неидентичных подсистем, когда $\lambda_1 = 1.25$, $\lambda_2 = 1$. При этом неидентичность существенна, но не очень велика. На рис. 2 показаны также фазовые портреты, построенные попарно на плоскостях (x, \dot{x}) и (y, \dot{y}) для нескольких выделенных точек плоскости параметров.

Сравнивая карты режимов на рис. 1 и 2, можно видеть, что они в одном моменте существенно отличаются. Граница между областями гибели колебаний и квазипериодических режимов на рис. 2 является не линией, а представляет собой полосу конечной ширины по коэффициенту связи $\lambda_1 > \mu > \lambda_2$, безгранично простирающуюся в область возрастающей частотной расстройки. Наличие синхронизации системы при сколь угодно больших значениях расстройки собственных частот осцилляторов можно назвать «широкополосной синхронизацией».

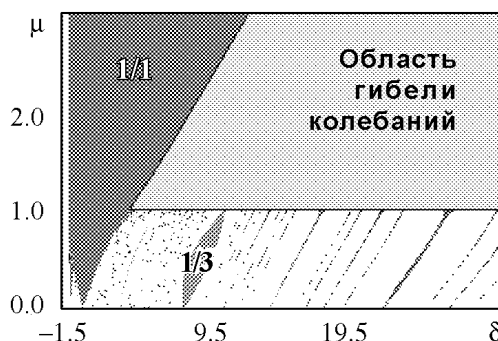


Рис. 1. Карта динамических режимов системы (1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\beta = 0$

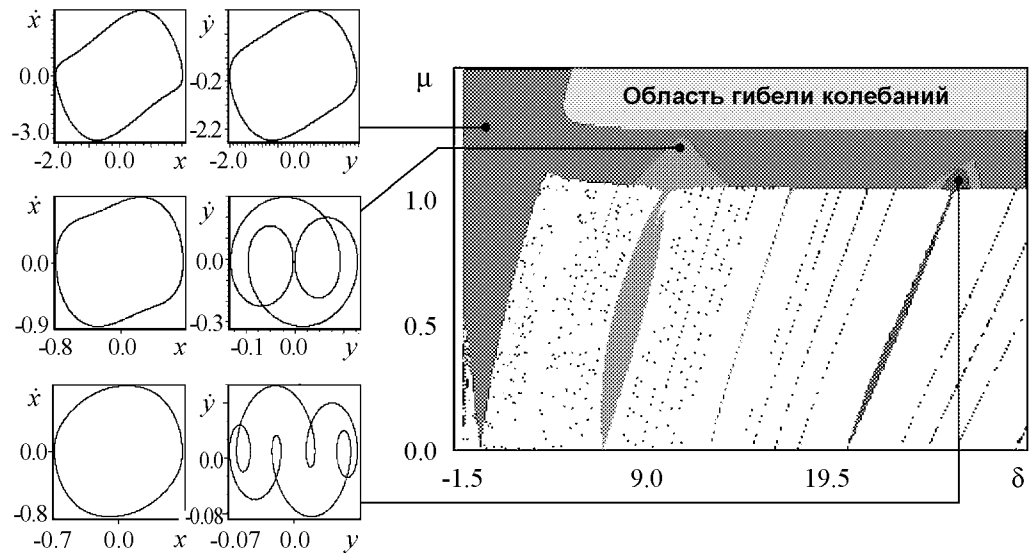


Рис. 2. Карта динамических режимов системы (1) при $\lambda_1 = 1.25$, $\lambda_2 = 1$, $\beta = 0$ и фазовые портреты в характерных областях плоскости параметров

Если двигаться внутри этой полосы, увеличивая собственную частоту второго осциллятора, то можно наблюдать синхронные режимы, отличающиеся на фазовых портретах числом «оборотов» фазовой траектории второго осциллятора, что демонстрируют приведенные на рис. 2 фазовые портреты. Соответствующие области на карте выглядят как «размытые» вершины языков синхронизации (что лучше заметно, в первую очередь, для характерного языка синхронизации $1/3$).

На рис. 3 приведены карты динамических режимов системы связанных осцилляторов ван дер Поля – Дуффинга, когда управляющий параметр первой системы возрастает ($\lambda_1 = 2$, $\lambda_1 = 2.5$), а второй – остается фиксированным ($\lambda_2 = 1$, см. рис. 2). В отличие от рис. 2, осцилляторы уже существенно неидентичны. Как видно из рис. 3, при увеличении разницы в управляющих параметрах помимо расширения самой «полосы» синхронизации по оси величины связи μ , происходит существенное расширение областей кратной синхронизации внутри нее. При этом области кратной синхронизации постепенно заполняют собой большую часть полосы широкополосной синхронизации. Таким образом, замечательная особенность задачи – сохранение фиксированного числа вращения в очень широком диапазоне частот, превышающем в разы (и более) ширину соответствующих языков для идентичных подсистем.

В случае заметно отличающихся по параметрам λ_1 и λ_2 осцилляторов можно дать простое объяснение появления широкополосной синхронизации. Оно существенно опирается на неидентичность осцилляторов. Действительно, если μ превышает и λ_1 , и λ_2 , то оба осциллятора находятся за порогом эффекта «гибели колебаний». В диапазоне же $\lambda_1 > \mu > \lambda_2$ существенно диссипативным оказывается только второй осциллятор. При этом можно считать, что первый осциллятор является «ведущим» и, фактически, возбуждает второй. В этом плане весьма характерны разные масштабы по осям координат для первого и второго осцилляторов на фазовых портретах рис. 2.

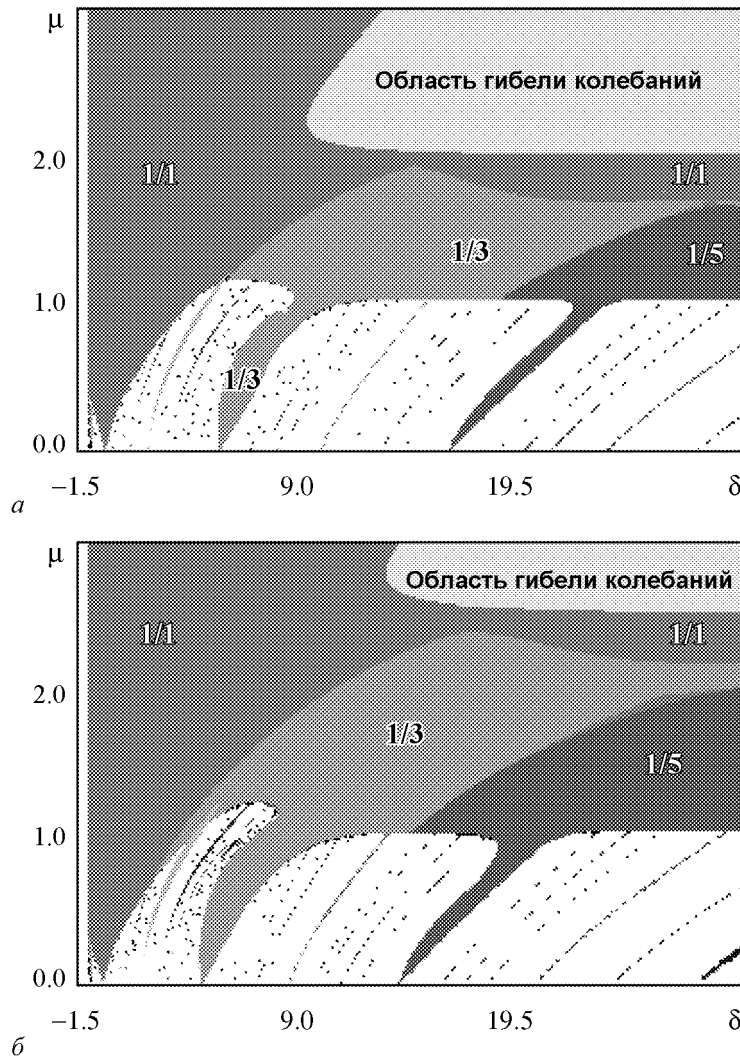


Рис. 3. Карты динамических режимов системы (1), построенные для значений параметров $\lambda_2 = 1$, $\beta = 0$ при $\lambda_1 = 2$ (а) и $\lambda_1 = 2.5$ (б)

Для обсуждения вопроса взаимного влияния связанных осцилляторов ван дер Поля в интересующей нас области параметров рассмотрим систему (1) с «выключенным» воздействием второго осциллятора на первый

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - (\lambda_1 - \mu - x^2) \frac{dx}{dt} + x &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} - (\lambda_2 - \mu - y^2) \frac{dy}{dt} + (1 + \delta)y &= \mu \frac{dx}{dt}. \end{aligned} \quad (3)$$

На рис. 4 приводится карта динамических режимов системы (3) для $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. Сравнивая полученную карту с картой для случая взаимного воздействия осцилляторов (см. рис. 3, а), можно видеть, что образование полосы широкополосной синхронизации происходит за счет воздействия первого осциллятора, находящегося за порогом бифуркации Андронова – Хопфа, на второй, колебания которого без этого воздействия затухали бы. Размеры и устройство области широкополосной синхро-

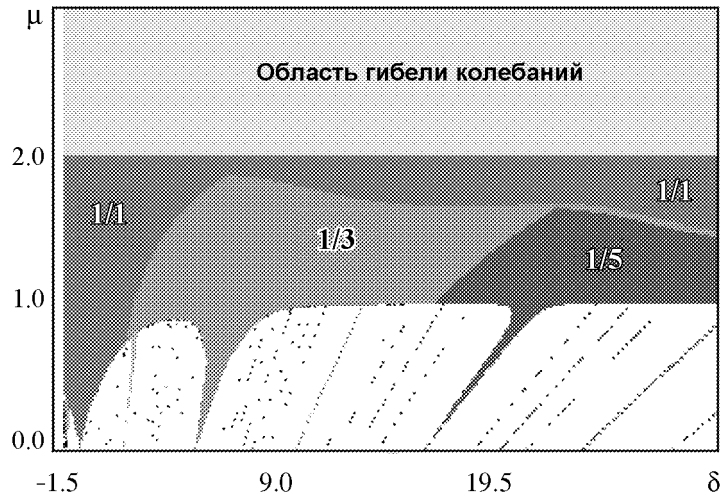


Рис. 4. Карта динамических режимов системы (3), отвечающая «выключенному» воздействию второго осциллятора на первый при $\lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = 2$

низации на рис. 3, а и рис. 4 аналогичны. Отличие состоит том, что без взаимного воздействия осцилляторов гибель колебаний наблюдается в любой точке пространства параметров, в которой $\lambda_1 < \mu$ и $\lambda_2 < \mu$. Это имеет простое объяснение: в отсутствие влияния второго осциллятора на первый, первый осциллятор оказывается до порога бифуркации Андронова – Хопфа, имеющей место при $\lambda_1 - \mu = 0$, и его колебания угасают. Второй осциллятор также находится до порога бифуркации Андронова – Хопфа, поскольку $\mu > \lambda_1 > \lambda_2$, и в отсутствие возбуждения со стороны первого осциллятора его колебания также угасают.

Проведенное обсуждение, однако, справедливо лишь при заметно отличающихся λ_1 и λ_2 . Если же эти параметры близки, то оно в чистом виде не применимо.

2. Анализ широкополосной синхронизации с помощью укороченных уравнений

Интересно выяснить, какие элементы описанной картины можно выявить методом медленно меняющихся амплитуд. Для этого, как обычно [1, 13], положим

$$x = \frac{1}{2}(ae^{it} + a^*e^{-it}), \quad y = \frac{1}{2}(be^{it} + b^*e^{-it}) \quad (4)$$

при стандартном дополнительном условии

$$\frac{1}{2}(\dot{a}e^{it} + \dot{a}^*e^{-it}) = 0, \quad \frac{1}{2}(\dot{b}e^{it} + \dot{b}^*e^{-it}) = 0. \quad (5)$$

После проведенного усреднения получаем уравнения для комплексных амплитуд

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\lambda_1 a}{2} - \frac{|a|^2 a}{8} + \frac{3i\beta|a|^2 a}{8} - \frac{\mu}{2}(a - b), \\ \frac{db}{dt} &= \frac{\lambda_2 b}{2} - \frac{|b|^2 b}{8} + \frac{3i\beta|b|^2 b}{8} - \frac{\mu}{2}(b - a) + \frac{idb}{2}. \end{aligned} \quad (6)$$

С заменой переменных: $\tau = \frac{t}{2}$, $z = \frac{a}{2}$, $\omega = \frac{b}{2}$, уравнения (6) приобретают вид

$$\begin{aligned}\frac{dz}{d\tau} &= \lambda_1 z - |z|^2 z + 3i\beta|z|^2 z + \mu(\omega - z), \\ \frac{d\omega}{d\tau} &= \lambda_2 \omega - |\omega|^2 \omega + 3i\beta|\omega|^2 \omega + \mu(z - \omega) + i\delta\omega.\end{aligned}\quad (7)$$

Полагая $z(t) = R(t) \exp(i\varphi_1)$ и $\omega(t) = r(t) \exp(i\varphi_2)$, приходим к уравнениям для амплитуд осцилляторов R , r и их фаз φ_1 и φ_2

$$\begin{aligned}\frac{dR}{d\tau} &= R(\lambda_1 - \mu) - R^3 + \mu r \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \frac{dr}{d\tau} &= r(\lambda_2 - \mu) - r^3 + \mu R \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \\ \frac{d\varphi_1}{d\tau} &= 3\beta R^2 + \frac{r}{R} \mu \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \frac{d\varphi_2}{d\tau} &= 3\beta r^2 + \frac{R}{r} \mu \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - \delta.\end{aligned}\quad (8)$$

В уравнения для амплитуд входит лишь разность фаз осцилляторов. Поэтому можно вычесть из первого уравнения для фазы второе уравнение и получить следующие укороченные уравнения, содержащие относительную фазу осцилляторов $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$:

$$\begin{aligned}\frac{dR}{d\tau} &= R(\lambda_1 - \mu) - R^3 + \mu r \cos \psi, \\ \frac{dr}{d\tau} &= r(\lambda_2 - \mu) - r^3 + \mu R \cos \psi, \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= \delta + 3\beta(R^2 - r^2) - \mu\left(\frac{r}{R} + \frac{R}{r}\right) \sin \psi.\end{aligned}\quad (9)$$

Мы получили систему уравнений, аналогичную [1, 2], но с учетом возможной неидентичности системы по управляющим параметрам. Заметим, что при выводе укороченных уравнений была использована близость частоты колебаний к собственной, но нигде явным образом не использована малость разницы параметров λ_1 и λ_2 . Таким образом, при обсуждении можем считать их существенно отличающимися.

Проведем теперь с помощью укороченных уравнений (9) аналитическую оценку нижней границы области широкополосной синхронизации. Обратимся к стационарной системе (9)

$$\begin{aligned}0 &= R(\lambda_1 - \mu) - R^3 + \mu r \cos \psi, \\ 0 &= r(\lambda_2 - \mu) - r^3 + \mu R \cos \psi, \\ \delta &= 3\beta(R^2 - r^2) - \mu\left(\frac{r}{R} + \frac{R}{r}\right) \sin \psi.\end{aligned}\quad (10)$$

Предположим, что на границе области синхронизации слагаемые $\mu R \cos \psi$ и $\mu r \cos \psi$ малы. Тогда для установившихся амплитуд предельных циклов осцилляторов имеем оценки

$$R \approx \sqrt{\lambda_1 - \mu}, \quad r \approx \sqrt{\lambda_2 - \mu}.\quad (11)$$

Поскольку подкоренные выражения должны быть неотрицательными, необходимо выполнение условий $(\lambda_1 \geq \mu)$ и $(\lambda_2 \geq \mu)$. Подставим оценки (11) в третье уравнение (10). Тогда получим

$$\delta = 3\beta((\sqrt{\lambda_1 - \mu})^2 - (\sqrt{\lambda_2 - \mu})^2) - \mu\left(\frac{\sqrt{\lambda_2 - \mu}}{\sqrt{\lambda_1 - \mu}} + \frac{\sqrt{\lambda_1 - \mu}}{\sqrt{\lambda_2 - \mu}}\right) \sin \psi. \quad (12)$$

Этому уравнению, как разновидности известного стационарного уравнения Адлера [1, 13], отвечает граница области синхронизации при условии $\sin \psi = 1$. Но тогда $\cos \psi = 0$, и наше предположение о малости отброшенных членов в первых двух уравнениях (10) оправдано.

Рассмотрим случай отсутствия фазовой нелинейности. Тогда из (12) следует

$$\delta = \pm \mu \left(\frac{\sqrt{\lambda_2 - \mu}}{\sqrt{\lambda_1 - \mu}} + \frac{\sqrt{\lambda_1 - \mu}}{\sqrt{\lambda_2 - \mu}} \right). \quad (13)$$

Функция $\delta(\mu)$, заданная соотношением (13), определяет границу области синхронизации, которая, в соответствии с рис. 2 и 3, должна превращаться в нижнюю границу бесконечной полосы синхронизации. Обозначим эту ветвь $\delta_+(\mu)$. Обсудим асимптотические свойства $\delta_+(\mu)$. Пусть $\lambda_1 > \lambda_2$. Если параметр связи приближается по величине к значению управляющего параметра второго осциллятора, то $(\lambda_2 - \mu) \rightarrow 0$. Это означает, что $\sqrt{(\lambda_2 - \mu)/(\lambda_1 - \mu)} \ll \sqrt{(\lambda_1 - \mu)/(\lambda_2 - \mu)}$, а функция $\delta(\mu)$ стремится к бесконечности, то есть $\lim_{\mu \rightarrow \lambda_2} \delta_+(\mu) = \infty$. Если обратиться к графику обратной функции $\mu = \mu(\delta)$, то для нее, таким образом, должно быть $\mu \rightarrow \lambda_2$ при $\delta \rightarrow \infty$. Это и означает, что на плоскости частотная расстройка – величина связи граница области синхронизации простирается сколь угодно далеко в область больших расстроек.

Функция $\delta(\mu)$, заданная соотношением (13), определяет нижнюю границу бесконечно длинной полосы синхронизации. Верхняя граница этой полосы является границей области гибели колебаний, когда становится устойчивой тривиальная неподвижная точка в начале координат. Для аналитической оценки этой границы воспользуемся полученными ранее укороченными уравнениями для системы связанных осцилляторов ван дер Поля – Дуффинга (7). Проведем линеаризацию системы (7) в окрестности начала координат

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &= \lambda_1 z + \mu(\omega - z), \\ \frac{d\omega}{d\tau} &= \lambda_2 \omega - \mu(z - \omega) + i\delta\omega. \end{aligned} \quad (14)$$

Для исследования устойчивости нулевого положения равновесия полученной линейной системы положим, что

$$z \sim \sin e^{(\eta+i\varepsilon)t}, \quad \omega \sim \sin e^{(\eta+i\varepsilon)t}, \quad (15)$$

где η, ε – действительные числа. Для реализации режима гибели колебаний необходимо выполнение условия $\eta < 0$. Соответственно на границе области гибели колебаний $\eta = 0$. Тогда

$$z \sim \sin e^{i\varepsilon t}, \quad \omega \sim \sin e^{i\varepsilon t}. \quad (16)$$

Подставляя (16) в систему (14), получим соотношение

$$\begin{aligned} (i\varepsilon - \lambda_1 + \mu)(i\varepsilon - \lambda_2 + \mu - i\delta) &= \mu^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \varepsilon^2 + \varepsilon(-\delta + i(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\mu)) + (\mu(\lambda_1 + \lambda_2) - \lambda_1\lambda_2 + i\delta(\mu - \lambda_1)) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \alpha_x &= -\delta, \quad \alpha_y = \lambda_1 + \lambda_2 - 2\mu, \\ \beta_x &= \mu(\lambda_1 + \lambda_2) - \lambda_1\lambda_2, \quad \beta_y = \delta(\mu - \lambda_1). \end{aligned} \quad (18)$$

Тогда

$$\varepsilon^2 + \varepsilon(\alpha_x + i\alpha_y) + (\beta_x + i\beta_y) = 0, \quad (19)$$

где $\alpha_x, \alpha_y, \beta_x, \beta_y$ – действительные числа. Поэтому можно разделить уравнение (19) на действительную и мнимую части: $\varepsilon^2 + \varepsilon\alpha_x + \beta_x = 0$ и $\alpha_y + \beta_y = 0$. Откуда следует, что

$$\varepsilon = -\frac{\beta_y}{\alpha_y}, \quad \frac{\beta_y^2}{\alpha_y^2} - \frac{\beta_y\alpha_x}{\alpha_y} + \beta_x = 0. \quad (20)$$

Подставляя (18) в (20), после некоторых преобразований получаем соотношение, задающее границу области гибели колебаний и, соответственно, верхнюю границу полосы синхронизации

$$\delta^2 = \frac{(\mu(\lambda_1 + \lambda_2) - \lambda_1\lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\mu)^2}{(\lambda_1 - \mu)(\lambda_2 - \mu)}. \quad (21)$$

В частном случае, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, соотношение (21) принимает вид

$$\delta^2 = 4\lambda(2\mu - \lambda), \quad (22)$$

и область гибели колебаний будет определяться известными [1, 2] неравенствами

$$\lambda < \mu < \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{\delta^2}{4\lambda}\right). \quad (23)$$

Исследуя поведение функции $\delta(\mu)$, заданной соотношением (21), отметим ее асимптотические свойства

$$\lim_{\mu \rightarrow \lambda_1} \delta(\mu) = \infty, \quad (24)$$

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \delta(\mu) = 2\sqrt{\mu(\lambda_1 + \lambda_2)}. \quad (25)$$

Графики функций $\delta(\mu)$, заданных соотношениями (13) и (21), представлены на рис. 5. Внутри области, окрашенной в серый цвет, существует неподвижная точка уравнения Адлера, и соответственно возможна синхронизация осцилляторов. Видим, что имеется бесконечно длинная по оси расстройки собственных частот полоса в области значений параметра связи $\lambda_2 < \mu < \lambda_1$. Таким образом, проведенный анализ также позволяет продемонстрировать наличие бесконечной по частотной расстройке полосы синхронизации. Следует, однако, заметить, что он не позволяет диагностировать режимы кратной синхронизации, и, следовательно, речь идет лишь о синхронизации типа 1/1. Как мы видели выше, для исходной дифференциальной системы с ростом разности управляющих параметров бесконечная полоса синхронизации сохраняется, но режимы типа 1/3, 1/5, ... «вытесняют» режим типа 1/1.

3. Широкополосная синхронизация в системе с фазовой нелинейностью

Рассмотрим теперь случай, когда в системе присутствует фазовая нелинейность. Интересен вопрос, каким образом фазовая нелинейность влияет на область широкополосной синхронизации и общее устройство плоскости параметров (расстройка собственных частот – сила связи). Нижнюю границу полосы синхронизации можно определить из уравнения (12), используя тот факт, что оно является стационарным уравнением Адлера. Эта граница задается соотношением

$$\delta = \pm \mu \left(\frac{\sqrt{\lambda_2 - \mu}}{\sqrt{\lambda_1 - \mu}} + \frac{\sqrt{\lambda_1 - \mu}}{\sqrt{\lambda_2 - \mu}} \right) + 3\beta \left((\sqrt{\lambda_1 - \mu})^2 - (\sqrt{\lambda_2 - \mu})^2 \right). \quad (26)$$

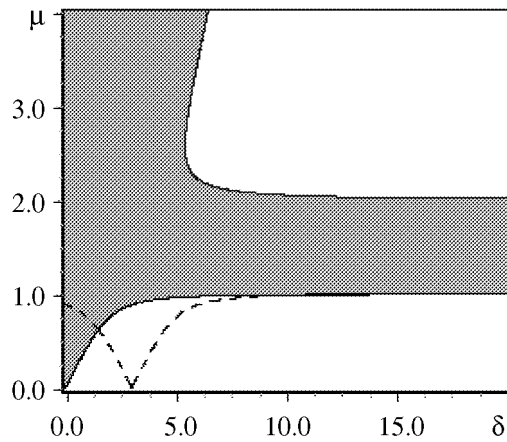


Рис. 5. Область синхронизации 1/1 (выделена серым цветом), построенная аналитически для случая связанных осцилляторов ван дер Поля. Значения параметров $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\beta = 0$. Пунктир – граница области синхронизации при наличии фазовой нелинейности $\beta = 1$

ван дер Поля – Дуффинга для различающихся значений λ_1 и λ_2 при наличии фазовой нелинейности в системе. Видно, что язык синхронизации при увеличении параметра такой нелинейности β сдвигается вправо вдоль оси расстройки собственных частот, как и предсказывает анализ уравнения Адлера. Однако можно видеть, что фазовая нелинейность сильно влияет на области кратной синхронизации. Внутри полосы синхронизации они несколько уменьшаются в размерах, меняют форму, а их частотный порог сильно сдвигается в область больших расстроек (вправо).

На рис. 6, б приведены фазовые портреты в различных точках плоскости параметров. Фазовые портреты построены попарно на плоскостях (x, \dot{x}) слева и (y, \dot{y}) справа для каждой точки плоскости параметров. Двигаясь вдоль полосы синхронизации (см. центральный рисунок), можно проследить, как режим синхронизации типа 1/1 сменяется режимом 1/3. Это происходит за счет появления новых «петель» у аттрактора. Приведенные фазовые портреты демонстрируют, что образование таких петель на боковой левой и верхней границах области типа 1/3 происходит по-разному.

График функции $\delta(\mu)$, заданной соотношением (26), представлен на рис. 5 штриховой линией. При этом верхняя граница полосы синхронизации, изображенная на рис. 5, по-прежнему определяется соотношением (21), поскольку оно отвечает линеаризованной системе и справедливо в независимости от присутствия или отсутствия фазовой нелинейности. Можно видеть, что наличие фазовой нелинейности приводит к смещению языка синхронизации вдоль оси расстройки собственных частот и не влияет на область широкополосной синхронизации в случае больших расстроек.

На рис. 6 изображены полученные в результате компьютерных экспериментов карты динамических режимов системы связанных осцилляторов ван дер Поля – Дуффинга для различающихся значений λ_1 и λ_2 при наличии фазовой нелинейности в системе.

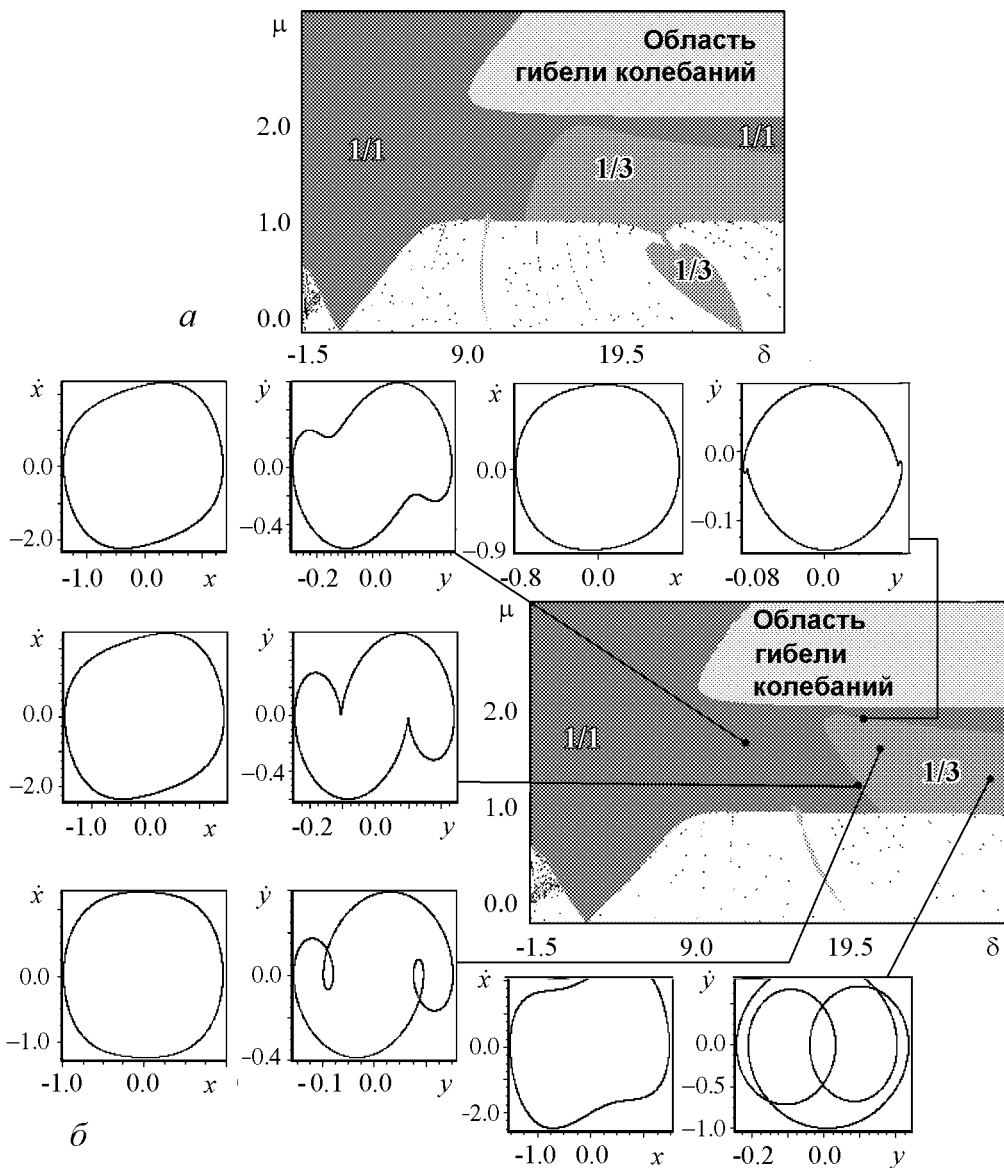


Рис. 6. Карты динамических режимов системы (1) для $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ при $\beta = 0.5$ (а) и $\beta = 1$ (б), а также фазовые портреты системы

Заключение

Таким образом, диссипативно связанные неидентичные по управляющим параметрам осцилляторы ван дер Поля демонстрируют интересные особенности синхронизации. На плоскости параметров (частотная расстройка – величина связи) граница между областями гибели колебаний и квазипериодическими режимами из линии превращается в полосу конечной ширины по константе связи, простирающуюся в область очень больших расстроек. При небольшой неидентичности этой полосе отвечает, в основном, синхронизация с числом вращения $1/1$. Представлены, однако, и режимы типов $1/3$, $1/5$ и т.д., аттракторы которых содержат соответствующее число «петель», а области реализации на плоскости параметров выглядят как «размытые»

вершины соответствующих языков синхронизации. С ростом неидентичности отвечающие этим режимам области существенно расширяются, заполняя, фактически, всю полосу. В этом случае реализуется режим колебаний, когда один осциллятор заметно доминирует над другим. При учете фазовой нелинейности, введенной по типу осциллятора Дуффинга, области кратной синхронизации уменьшаются в размерах, их частотный порог смещается в сторону больших расстройек.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-02-16773).

Библиографический список

1. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация: фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003, 508 с.
2. Aronson D.G., Ermentrout G.B., Kopell N. Amplitude response of coupled oscillators // *Physica D*. 1990. Vol. 41. P. 403.
3. Rand R., Holmes P.J. Bifurcation of periodic motions in two weakly coupled van der Pol oscillators // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 1980. Vol. 15. P. 387.
4. Storti D.W., Rand R.H. Dynamics of two strongly coupled van der Pol oscillators // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 1982. Vol. 17(3). P. 143.
5. Chakraborty T., Rand R.H. The transition from phase locking to drift in a system of two weakly coupled van der Pol oscillators // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 1988. Vol. 23, № 5/6. P. 369.
6. Poliashenko M., McKay S.R., Smith C.W. Chaos and nonisochronism in weakly coupled nonlinear oscillators // *Phys. Rev. A*. 1991. Vol. 44. P. 3452.
7. Poliashenko M., McKay S.R., Smith C.W. Hysteresis of synchronous – asynchronous regimes in a system of two coupled oscillators // *Phys. Rev. A*. 1991. Vol. 43. P. 5638.
8. Pastor I., Perez-Garcia V.M., Encinas-Sanz F., Guerra J.M. Ordered and chaotic behavior of two coupled van der Pol oscillators // *Phys. Rev. E*. 1993. Vol. 48. P. 171.
9. Camacho E., Rand R.H., Howland H. Dynamics of two van der Pol oscillators coupled via a bath // *Int. J. of Solids and Structures*. 2004. Vol. 41. P. 2133.
10. Кузнецов А.П., Паксютов В.И. О динамике двух связанных осцилляторов ван дер Поля – Дуффинга с диссипативной связью // *Изв. вузов. ПНД*. 2003. Т. 11, № 6.
11. Кузнецов А.П., Паксютов В.И. Особенности устройства пространства параметров двух неидентичных связанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга // *Изв. вузов. ПНД*. 2005. Т. 13, № 4. С. 3.
12. Ivanchenko M.V., Osipov G.V., Shalfeev V.D., Kurths J. Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators // *Physica D*. 2004. Vol. 189, № 1-2. P. 8.
13. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. Сер. Современная теория колебаний и волн. 2-е изд. М.: Физматлит, 2006.
14. Кузнецов С.П. Динамический хаос. Сер. Современная теория колебаний и волн. 2-е изд. перераб. и доп. М.: Физматлит, 2006, 356 с.

*Саратовский филиал Института
радиотехники и электроники РАН*

*Поступила в редакцию 01.03.2007
После доработки 28.05.2007*

**PROPERTIES OF SYNCHRONIZATION IN THE SYSTEM
OF NONIDENTICAL COUPLED VAN DER POL
AND VAN DER POL – DUFFING OSCILLATORS.
BROADBAND SYNCHRONIZATION**

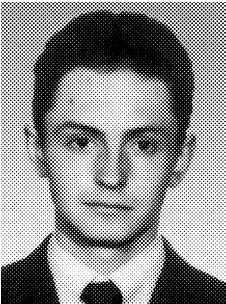
A.P. Kuznetsov, V.I. Paksyutov, Yu.P. Roman

The particular properties of dynamics are discussed for the dissipatively coupled van der Pol oscillators, nonidentical in values of parameters controlling the Hopf bifurcation. The opportunity of a special synchronization regime in an infinitively long band between oscillation death and quasiperiodicity areas is shown for such system. The features of the bifurcation picture are observed for different values of the control parameters and for the case of additional Duffing type nonlinearity. In discussion a comparison with closed equation analysis is made.

Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и школьной научной лаборатории. Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и лица прикладных наук СГУ, 10 учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002). E-mail: alkuz@sgu.ru; www.sgtn.d.narod.ru



Паксютов Владимир Игоревич – родился в Саратове (1982). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского в 2004 году. Аспирант кафедры динамических систем факультета нелинейных процессов СГУ. Занимается научной работой по направлению: динамические режимы и синхронизация в автоколебательных системах различной природы. С 2000 года – постоянный участник ежегодной научной школы-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых», принял участие в нескольких международных конференциях. Имеет 14 научных публикаций.



Роман Юлия Павловна – родилась в 1987 году. Окончила с отличием Лицей прикладных наук города Саратова (2004). В настоящее время студентка 3 курса факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского. Имеет 5 научных публикаций. E-mail: yuliaro@mail.ru

