

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СИНХРОНИЗАЦИИ ГАРМОНИЧЕСКИМ И ИМПУЛЬСНЫМ СИГНАЛОМ НА ПРИМЕРЕ СИСТЕМЫ ЛОРЕНЦА

*Ю.С. Айдарова, А.П. Кузнецов, Л.В. Тюрюкина*

Численно и аналитически исследована синхронизация внешним периодическим воздействием в системе Лоренца. Детально исследовано изменение картины синхронизации при изменении параметра, отвечающего за возникновение в автономной системе хаотического аттрактора.

### Введение

Явление синхронизации является объектом пристального интереса исследователей в различных областях естествознания [1–8]. К настоящему времени достаточно хорошо изучено явление «классической» синхронизации, которая состоит в том, что на автоколебательную систему с устойчивым предельным циклом воздействуют внешним периодическим (обычно гармоническим) сигналом [1, 3, 6, 9–11]. Для этого случая известны фазовые соотношения, зависимость области синхронизации от частоты воздействия и т.д. В настоящее время, однако, наибольший интерес представляет синхронизация систем, демонстрирующих сложную, в том числе хаотическую, динамику [12–14]. Оказалось, что концепция синхронизации также может быть применима и к определенному классу хаотических систем, для которых основная частота легко может быть определена из спектра [6, 14–16]. Сложнее дело обстоит с системами с плохо определенной фазой, на которые воздействует сила большой амплитуды. Синхронизация в таких системах практически не поддается аналитическому исследованию. Примером такой системы может служить система Лоренца, являющаяся одной из «эталонных» моделей нелинейной динамики и одной из первых диссипативных систем с аттракторами, описываемых с помощью дифференциальных уравнений, в которой были обнаружены режимы динамического хаоса [1, 17–19]. Исследованию синхронизации в системе Лоренца посвящено довольно значительное число работ (см., например, [15, 19–21]), однако в них, в основном, рассматривалась синхронизация хаотического аттрактора внешним гармоническим воздействием.

В данной работе проводится сравнительное исследование синхронизации в системе Лоренца под внешним воздействием гармоническим сигналом и периодической последовательностью коротких импульсов, моделируемых последовательно-

стью  $\delta$ -функций, а для гармонического воздействия проводится также сопоставление численных и аналитических результатов. Кроме этого, исследуется изменение картины синхронизации при изменении управляющего параметра соответствующей автономной системы, отвечающего за наличие бифуркаций и возникновение в ней хаотического аттрактора. Расчеты проводились в существенно более широких диапазонах по параметрам, что позволило выявить области синхронизации на плоскости (частота внешнего воздействия – амплитуда внешнего воздействия), которые ранее не рассматривались. Исследование режимов синхронизации осуществлялось через анализ карт динамических режимов [17], который позволяет с помощью компьютерного эксперимента получить существенную информацию об устройстве пространства параметров.

### 1. Синхронизация в системе Лоренца, находящейся под гармоническим воздействием

Начнем рассмотрение с наиболее традиционного случая – воздействия на систему Лоренца внешним гармоническим сигналом, которое добавляется в уравнение для динамической переменной  $z$ , чтобы не нарушить симметрию системы относительно замены переменных  $x \rightarrow -y, y \rightarrow -x$ . В этом случае неавтономная система Лоренца выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= Rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy + \varepsilon \cos(\omega t).\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь  $x, y, z$  – динамические переменные;  $\sigma, b$  – параметры системы;  $R$  – управляющий параметр;  $\varepsilon$  – амплитуда внешнего воздействия и  $\omega$  – его частота.

Исследуем картину синхронизации, возникающую в такой системе при изменении управляющего параметра. С этой целью для системы (1) построим карты динамических режимов на плоскости параметров  $(\omega - \varepsilon)$ . Отметим, что при изменении параметра  $R$  в автономной системе Лоренца происходят качественные изменения фазового пространства, в результате которых возникает хаотический аттрактор. В неавтономной системе (1) зафиксируем параметры  $\sigma$  и  $b$ , а параметр  $R$  будем увеличивать, чтобы проследить изменение картины синхронизации. На рис. 1 представлены карты рассчитанных динамических режимов и их увеличенные фрагменты для нескольких значений параметра  $R$ , отвечающих качественно различным режимам в соответствующей автономной системе Лоренца. На этих и всех последующих картах оттенками серого цвета обозначены области существования режимов различных периодов – чем темнее цвет, тем больше период режима. Белым цветом обозначены хаотические и квазипериодические режимы, а также режимы больших периодов – более 16. При определении периода режима использовалось стробоскопическое сечение, которое выбиралось через период внешнего воздействия.

Рассмотрим динамику неавтономной системы Лоренца подробнее. Так, при малых значениях управляющего параметра  $R = 0.7$ , когда в фазовом пространстве автономной системы есть единственная устойчивая неподвижная точка, в неавтономной системе наблюдается обширная область «синхронизации», отвечающая режиму периода 1, а также достаточно большая область режима периода 2 (рис. 1, а).

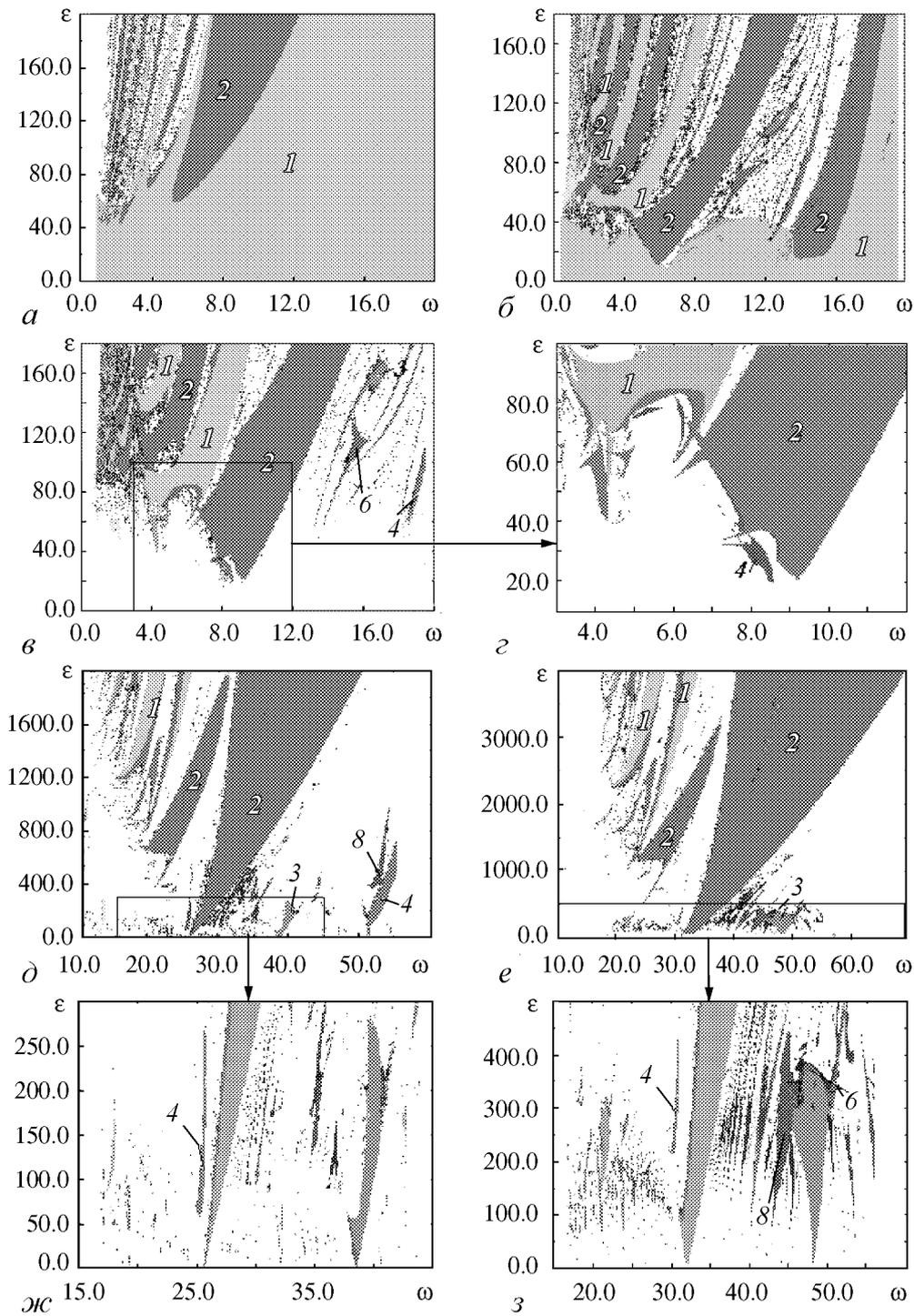


Рис. 1. Карты динамических режимов (*а, б, в, д, е*) и их увеличенные фрагменты (*г, ж, з*) для системы Лоренца под внешним гармоническим воздействием для  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  и различных значений параметра  $R$ : *а* – 0.7; *б* – 15; *в, г* – 28; *д, ж* – 222; *е, з* – 345. Цифрами на картах обозначены периоды режимов

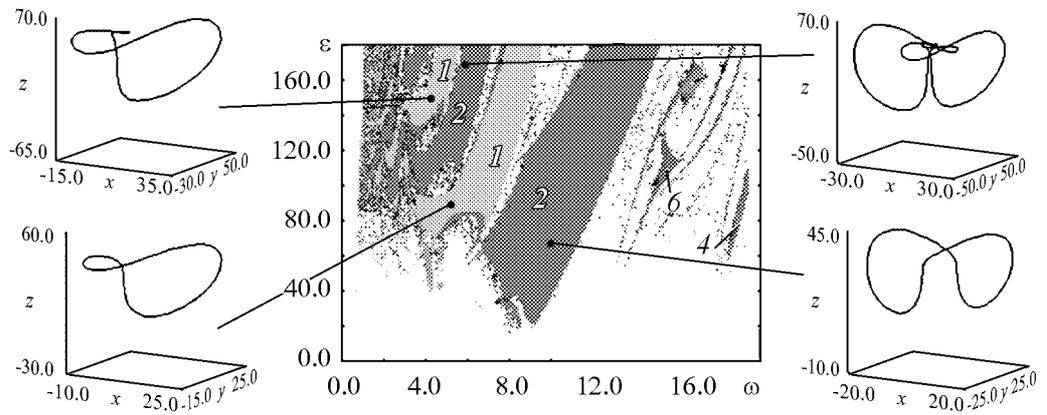


Рис. 2. Карта динамических режимов и аттракторы неавтономной системы Лоренца (1),  $R = 28$ ,  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$

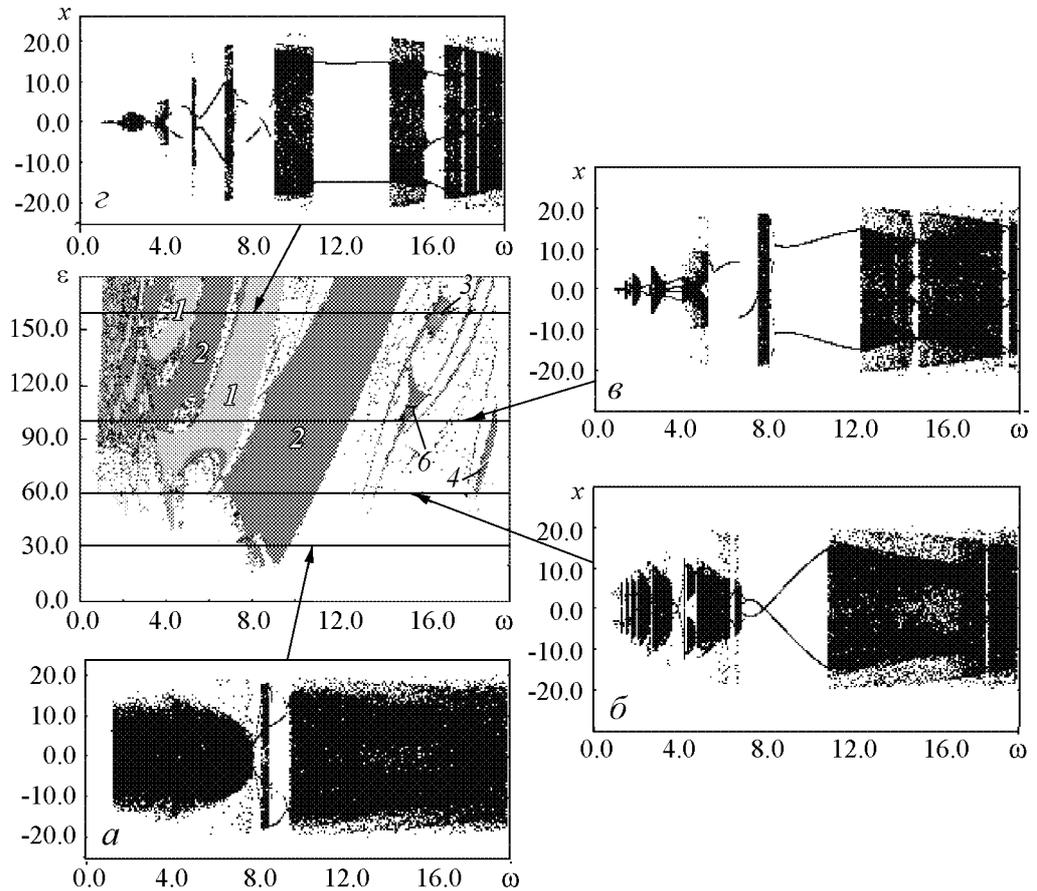


Рис. 3. Карта динамических режимов и бифуркационные деревья для системы Лоренца под гармоническим воздействием при  $R = 28$ ,  $b = 8/3$ ,  $\sigma = 10$ . Деревья построены вдоль линий  $\epsilon = \text{const}$ :  $a - 30$ ;  $б - 60$ ;  $в - 100$ ;  $г - 160$

При увеличении управляющего параметра  $R = 15$ , карта динамических режимов существенно меняется (рис. 1, б): область режима периода 1 стала меньше, а области остальных режимов – значительно больше, их внутреннее устройство стало сложнее. Теперь картина синхронизации обладает ярко выраженной периодической структурой. Так, области режимов периодов 1, 2 и т.д. образуют почти вертикальные полосы, которые неоднократно повторяются, становясь все более узкими при движении по карте в область малых значений частоты внешнего воздействия. *При дальнейшем увеличении  $R$  в автономной системе Лоренца возникает странный хаотический аттрактор.* Как следствие, в неавтономной системе происходит существенное изменение карты динамических режимов (рис. 1, в): вместо области режима периода 1, являвшейся «фоном» на предыдущих картах, появилась область квазипериодики (белый фон); исчезла область синхронизации периода 2 в окрестности частоты  $\omega \approx 14$ , а все остальные языки опять сместились вправо. Однако периодичность языков синхронизации на карте динамических режимов и в данном случае сохраняется. *При очень больших значениях управляющего параметра  $R = 345$  и  $222$  в автономной системе Лоренца реализуются устойчивые предельные циклы периода 1 и 2, соответственно.* Картина синхронизации в неавтономной системе в этом случае имеет более типичный вид (рис. 1, д, е): на картах хорошо видны языки синхронизации различных периодов, касающиеся своими остриями оси  $\varepsilon = 0$  (рис. 1, ж, з). Отметим, что картина областей синхронизации на плоскости параметров продолжает сохранять свою периодическую структуру.

Сравним картины синхронизации, имеющей место в неавтономной системе Лоренца (1) при небольших и очень больших значениях параметра  $R$ . Так, при всех значениях управляющего параметра (кроме  $R = 0.7$ ) на картах динамических режимов отчетливо виден основной язык синхронизации. Структура языков синхронизации для разных значений параметра  $R$  сходна: имеется чередование областей синхронизации с периодом внешней силы и с удвоенным периодом внешней силы. На базе этих областей происходят бифуркации удвоения периода. Такое сходство вида карт динамических режимов можно объяснить большой величиной амплитуды внешнего воздействия, которая «подавляет» собственную динамику системы так, что вид областей синхронизации почти от нее не зависит. Кроме того, полная синхронизация хаотической динамики имеет порог по амплитуде внешнего воздействия (см. рис. 1, в). В работе [18] была высказана гипотеза, что величина амплитудного порога синхронизации связана с метрической энтропией и может служить некоторой мерой хаоса – чем более «развит хаос», тем выше порог.

Для более детальной иллюстрации динамики неавтономной системы были построены аттракторы внутри различных областей синхронизации (рис. 2) и бифуркационные деревья для разных значений амплитуды внешней силы  $\varepsilon$  (рис. 3).

## **2. Аналитическое исследование областей сложной динамики системы Лоренца под гармоническим воздействием**

Теперь проведем аналитическое исследование неавтономной системы Лоренца (1). Для обнаружения области сложной динамики системы, в фазовом пространстве которой может возникать гомоклиническая петля, можно использовать метод Мельникова [17]. Метод Мельникова основан на аналитическом вычислении по теории возмущений расстояния  $\Delta$  между сепаратрисами исследуемой системы. Знакопере-

менность  $\Delta$  означает, что движение в данной области является хаотическим.

Рассмотрим систему, невозмущенная динамика которой описывается гамильтонианом  $H(p, x)$ . Внешнее периодическое воздействие, диссипацию и т.д. будем рассматривать как малое возмущение

$$\dot{x} = H_p + \varepsilon_1 f(x, p, t), \quad \dot{p} = -H_x + \varepsilon_1 g(x, p, t), \quad (2)$$

где  $\varepsilon_1$  – малый параметр,  $f$  и  $g$  периодические функции времени. Тогда расстояние по Мельникову между устойчивой и неустойчивой возмущенными сепаратрисами будет определяться интегралом

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} (H_x(X, P)f(X, P, t) + H_p(X, P)g(X, P, t))dt, \quad (3)$$

где  $X(t), P(t)$  – решение невозмущенных уравнений, отвечающее движению по петле сепаратрисы из седла в седло. Сдвигом начала отсчета времени на произвольную константу  $\theta$  можно получить однопараметрическое семейство таких решений. При подстановке этих решений вида  $X(t + \theta), P(t + \theta)$  в формулу (3) получаем функцию  $\Delta(\theta)$ .

Критерий Мельникова формулируется так: если функция  $\Delta(\theta)$  знакопеременная, то это свидетельствует о наличии трансверсального пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий неподвижной точки в возмущенной системе и служит признаком присутствия гомоклинической структуры, а также связанной с ней сложной динамики (бесконечное счетное множество периодических орбит, континуум неперiodических траекторий) [19].

Метод Мельникова применим в основном для систем, близких к гамильтоновым, при наличии диссипации и периодической внешней силы. Чтобы применить метод Мельникова к неавтономной системе Лоренца, воспользуемся тем, что систему Лоренца можно представить как нелинейный диссипативный осциллятор с инерционным возбуждением. В работе [22] было показано, что в этом случае метод Мельникова может быть эффективно применен к системе Лоренца. Таким образом, используя замену переменных [17]

$$z = \frac{u + x^2}{2\sigma}, \quad (4)$$

получим систему Лоренца в виде неавтономного нелинейного диссипативного осциллятора. Тогда для  $u$  имеем

$$\dot{u} = -bu + (2\sigma + b)x^2. \quad (5)$$

Теперь добавим внешнее воздействие

$$\dot{u} = -bu + (2\sigma + b)x^2 + 2\sigma\varepsilon \cos(\omega t) \quad (6)$$

и запишем неавтономную систему Лоренца в виде

$$\ddot{x} + (\sigma + 1)\dot{x} - \sigma(r - 1)x + \frac{x^3}{2} + \frac{xu}{2} = 0. \quad (7)$$

Перепишем уравнение (6) в виде системы двух дифференциальных уравнений более низкого порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = p, \\ \dot{p} = \sigma(r-1)x - \frac{x^3}{2} - (\sigma+1)p - \frac{xu}{2}, \end{cases} \quad (8)$$

тогда гамильтониан системы (7) примет вид

$$H(x, p) = \frac{\dot{X}^2}{2} - \frac{\sigma(r-1)X^2}{2} + \frac{X^4}{8}. \quad (9)$$

Найдем решение невозмущенной системы, отвечающее движению по сепаратрисе. Для этого выпишем интеграл энергии

$$\frac{\dot{X}^2}{2} - \frac{\sigma(r-1)X^2}{2} + \frac{X^4}{8} = C. \quad (10)$$

Константу  $C$  выберем равной 0, чтобы равенство (9) удовлетворялось в точке седла  $\dot{X} = 0, X = 0$ . Из (9) находим

$$X = \frac{2\sqrt{\sigma(r-1)}}{\text{ch}(\sqrt{\sigma(r-1)}(t+\theta))}, \quad P = \frac{2(\sigma(r-1)) \text{sh}(\sqrt{\sigma(r-1)}(t+\theta))}{\text{ch}(\sqrt{\sigma(r-1)}(t+\theta))^2}. \quad (11)$$

Теперь запишем выражение для мельниковского расстояния с учетом уравнений (8)

$$\Delta(\theta) = -(\sigma+1) \int_{-\infty}^{\infty} P^2 dt - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} PXU dt. \quad (12)$$

После некоторых математических вычислений, можно получить критерий Мельникова

$$\begin{aligned} \varepsilon > \frac{-(\omega^2 + b^2) \text{sh}\left(\frac{\pi\omega}{2\sqrt{\sigma(r-1)}}\right)}{4\sigma\pi q\omega^2\sqrt{\omega^2 + b^2}} \left( 2(\sigma+1) \int_{-\infty}^{\infty} P^2 dt - b(2\sigma-b) \left\{ (\sigma(r-1))^{3/2} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \left[ 2\sigma \cos\left(\frac{\pi b}{2\sqrt{\sigma(r-1)}}\right)^2 - 2\sigma(r-1) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - b^2 \Psi\left(1, \frac{b}{2\sqrt{\sigma(r-1)}}\right) \left( \cos\left(\frac{\pi b}{2\sqrt{\sigma(r-1)}}\right)^2 - 1 \right) \right] \right\} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

На рис. 4 изображены области сложной динамики для системы Лоренца (1) для различных значений параметра  $R$ , совмещенные с картами динамических режимов. Строгого соответствия между аналитическими и численными результатами не наблюдается. Это объясняется, прежде всего, тем, что возмущение  $g(x, p, t)$  не было малым, как это требуется при выводе критерия Мельникова. Однако, тем не менее, численные и аналитические результаты находятся в достаточно хорошем соответствии, особенно для относительно малых значений параметра  $R$ .

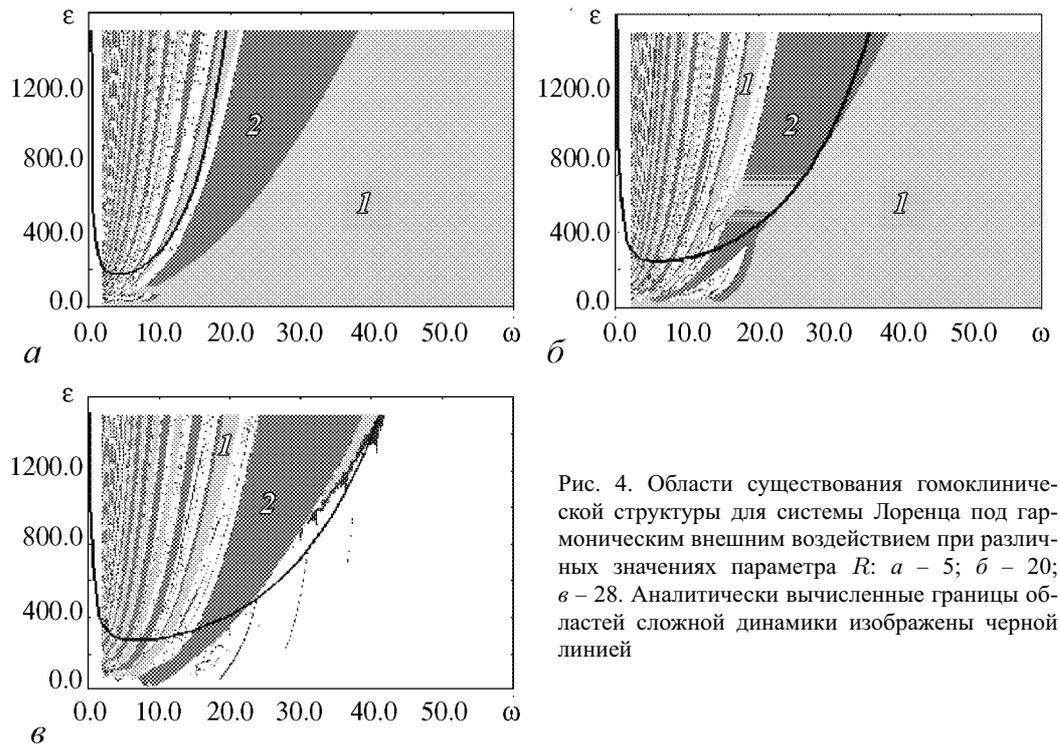


Рис. 4. Области существования гомоклинической структуры для системы Лоренца под гармоническим внешним воздействием при различных значениях параметра  $R$ :  $a - 5$ ;  $б - 20$ ;  $в - 28$ . Аналитически вычисленные границы областей сложной динамики изображены черной линией

### 3. Синхронизация системы Лоренца, находящейся под импульсным воздействием

В заключение рассмотрим систему Лоренца, находящуюся под воздействием периодической последовательности коротких импульсов, которые можно представить в виде периодической последовательности  $\delta$ -функций. В этом случае неавтономная система Лоренца описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \sigma(y - x), \\
 \dot{y} &= Rx - y - xz, \\
 \dot{z} &= -bz + xy + \varepsilon \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Здесь  $\varepsilon$  и  $T$  - амплитуда и период внешнего воздействия. Соответственно частота такого воздействия будет  $\omega = 2\pi/T$ . Отметим, что импульсное воздействие, также как и гармоническое, добавляется в уравнение для динамической переменной  $z$ . Это в дальнейшем позволит провести сопоставление карт динамических режимов для моделей с гармоническим и импульсным воздействием. Как и в предыдущем случае исследуем картину синхронизации, возникающую в рассматриваемой системе.

На рис. 5 представлены карты динамических режимов и их увеличенные фрагменты на плоскости  $(\omega - \varepsilon)$  для системы (14).

*В случае, когда в автономной системе Лоренца имеется один регулярный аттрактор (малые значения  $R$ ), сложных режимов не наблюдается. После бифуркации вилки, которую претерпевает неподвижная точка в начале координат при*

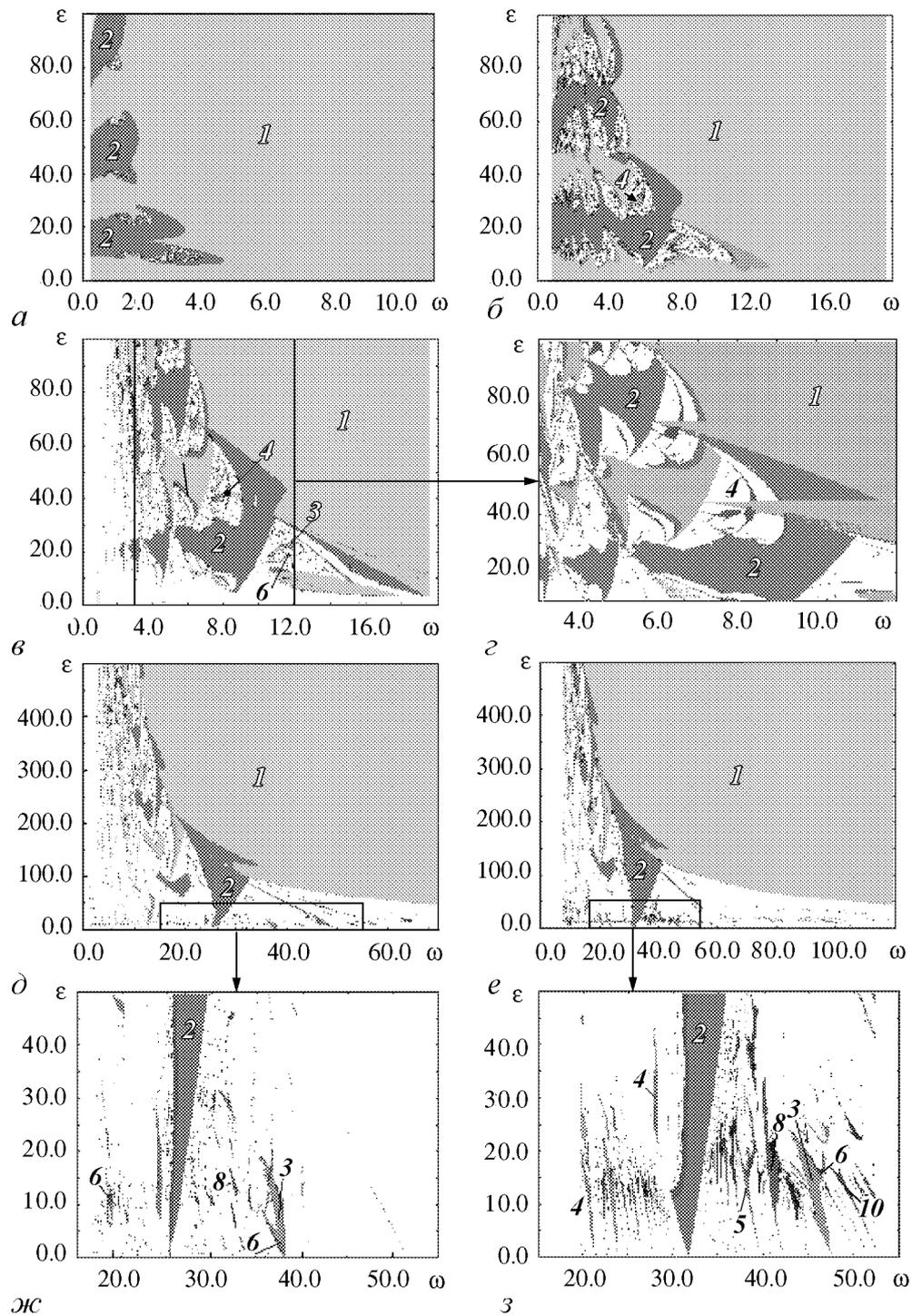


Рис. 5. Карты динамических режимов (а, б, в, д, е) и их увеличенные фрагменты (з, ж, з) для системы Лоренца под внешним воздействием в виде периодической последовательности  $\delta$ -функций для  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  и различных значений параметра  $R$ : а - 5; б - 15; в, з - 28; д, ж - 222; е, з - 345. Цифрами на картах обозначены периоды режимов

переходе параметра  $R$  через 1, в автономной системе возникают две устойчивые неподвижные точки. В неавтономной системе Лоренца при небольших значениях управляющего параметра  $R = 5$  также нет сложных режимов (рис. 5, а). Большую часть плоскости параметров занимает область режима периода 1, отвечающая тому, что траектория в фазовом пространстве неавтономной системы во время автономной эволюции приходит в одну из неподвижных точек, а импульс выбрасывает ее из неподвижной точки. И лишь в области малых значений частоты  $\omega$  наблюдаются небольшие структуры режимов удвоенного периода и хаоса. Причем эти области чередуются вдоль оси амплитуды внешнего воздействия, в то время как при гармоническом воздействии режимы чередуются вдоль частотной оси (см. рис. 1).

При увеличении значения управляющего параметра  $R = 15$  в автономной системе происходят качественные изменения устройства фазового пространства, а в неавтономной системе – области режимов удвоенного периода и хаоса увеличиваются в размере и сдвигаются в область больших частот  $\omega$  (рис. 5, б). При этом области хаотической динамики становятся более выраженными, а внутри них наблюдается структура типа crossroad area. Особенно это характерно для структур, возникающих при небольших значениях амплитуды внешнего воздействия. Если и дальше увеличивать параметр  $R$  (переходя к значениям, при которых в автономной системе Лоренца существует хаотический аттрактор), то на карте динамических режимов можно различить две большие области, характеризующиеся существенно разной динамикой (рис. 5, в, г). Первая область располагается в правой верхней части карты, где неавтономная система демонстрирует лишь режим периода 1. Вторая область – в левой части карты, где наблюдаются разнообразные области синхронизации различных периодов и достаточно большая область квазипериодических режимов. Причем, так же как и раньше, они характеризуются ярко выраженной периодичностью. Отметим также, что при воздействии на хаотический аттрактор последовательностью импульсов, как и при гармоническом воздействии, появляется порог синхронизации по амплитуде воздействия (см. рис. 5, в)

Характерное для карты динамических режимов неавтономной системы Лоренца (13) разбиение на две части, сохраняется и при больших значениях параметра  $R$ , например, при  $R = 222$  и  $345$  (рис. 5, д, е), когда в автономной системе имеют место устойчивые предельные циклы периода 2 и 1, соответственно. В этом случае при небольших значениях амплитуды внешнего воздействия  $\epsilon$  наблюдаются квазипериодические режимы (при больших значениях амплитуды – лишь режим периода 1) и разнообразные языки синхронизации, которые выглядят так же, как и при гармоническом воздействии (рис. 5, ж, з).

В отличие от случая гармонического воздействия при импульсном воздействии на картах динамических режимов имеется обширная область синхронизации с периодом 1 (с периодом внешней силы), которая возникает при больших частотах и больших амплитудах внешнего воздействия (см. рис. 5). Это может быть обусловлено тем, что траектория попадает на двумерное устойчивое многообразие точки  $O(0, 0, 0)$ , по которому она очень медленно спускается к ней. Например, это может происходить так: при запуске траектории в начальный момент времени из точки, расположенной вблизи нуля (начальные условия всегда выбирались следующим образом:  $x_0 = 0.01$ ,  $y_0 = 0.01$ ,  $z_0 = 0$ ), импульс выбрасывает ее вверх вдоль оси  $z$  так, что она не сходит с устойчивого многообразия точки  $O$ . После действия импульса, траектория начинает медленно спускаться по многообразию вниз, по направлению к этой точке. В случае частых импульсов она не успевает значительно отклониться от

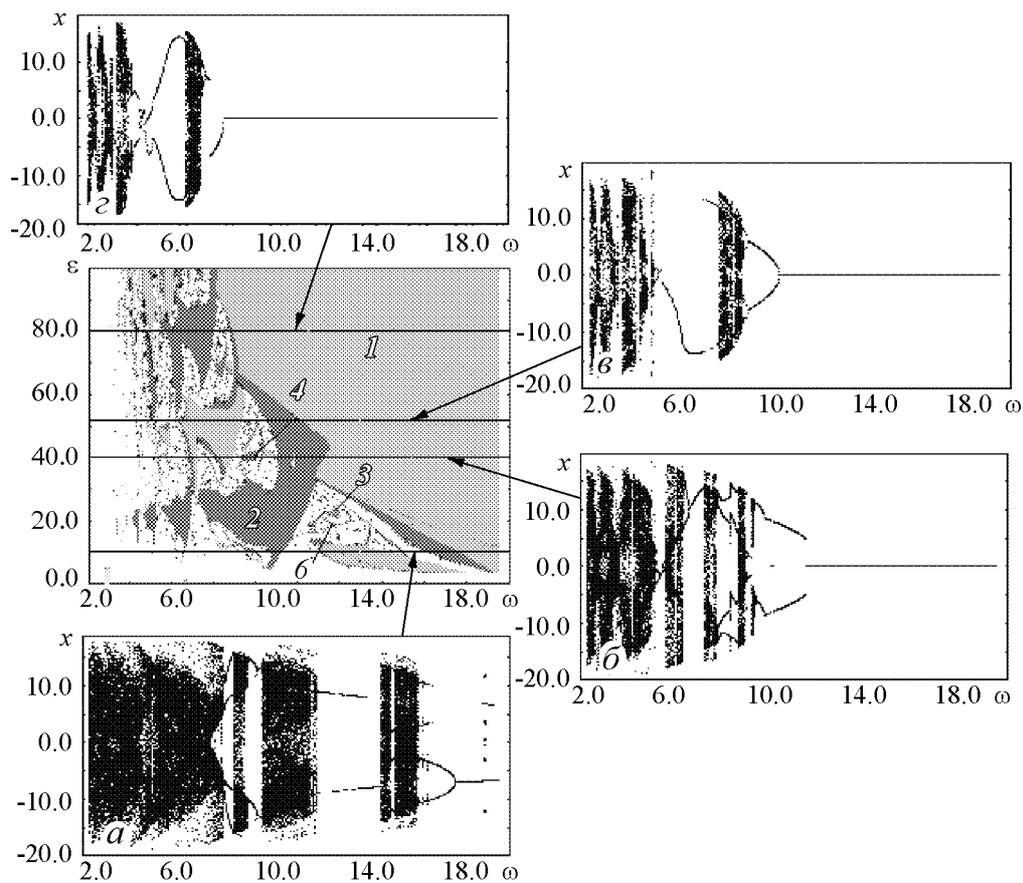


Рис. 6. Карта динамических режимов и бифуркационные деревья для системы Лоренца под импульсным воздействием при  $R = 28$ ,  $b = 8/3$ ,  $\sigma = 10$ . Деревья построены вдоль линий  $\varepsilon = \text{const}$ :  $a - 10$ ;  $б - 40$ ;  $в - 52$ ;  $г - 80$

устойчивого многообразия до следующего импульса, который выбрасывает ее вновь вверх, и т. д.

Для более детальной иллюстрации динамики неавтономной системы Лоренца (14) были построены бифуркационные деревья вдоль линий  $\varepsilon = \text{const}$  для различных значений амплитуды  $\varepsilon$  (рис. 6). Хорошо видно, что независимо от величины амплитуды импульсного воздействия  $\varepsilon$  на всех бифуркационных деревьях наблюдаются области квазипериодических режимов, чередующиеся с областями режимов различных периодов, внутри которых имеет место переход к хаосу через последовательность удвоения периода.

### Выводы

В настоящей работе проведено исследование синхронизации в неавтономной системе Лоренца. В качестве внешнего воздействия были выбраны гармонический сигнал и периодическая последовательность  $\delta$ -функций. Для обоих типов внешнего воздействия построены карты динамических режимов на плоскости параметров (частота воздействия – амплитуда внешнего воздействия). Карты построены для нескольких значений управляющего параметра системы Лоренца, отвечающих раз-

личным типам устройства фазового пространства соответствующей автономной системы. Показано, что картина синхронизации в неавтономной системе Лоренца характеризуется рядом закономерностей. С помощью метода Мельникова произведена аналитическая оценка условия возникновения сложной динамики.

*Работа поддержана грантами РФФИ № 06-02-16773 и CRDF BRHE REC-006 № Y2-P-06-13.*

### **Библиографический список**

1. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
2. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991.
3. *Ott E.* Chaos in dynamical systems. Cambridge university press, 1993.
4. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
5. *Winfree A.T.* The Geometry of Biological Time. Springer Berlin, 1980.
6. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
7. *Mosekilde E., Maistrenko Yu., Postnov D.* Chaotic synchronization: applications to living systems. Singapore: World Scientific. 2002.
8. *Kuramoto Y.* Chemical oscillations, waves and turbulence. Berlin: Springer-Verlag. 1984.
9. *Caldas I.L., Tasson H.* Limit cycles of periodically forced oscillations // Phys. Lett., 1989. Vol. A135. P. 264.
10. *Steeb W.H., Kunick A.* Chaos in limit-cycle systems with external periodic excitation // Int. J of Nonlinear Mechanics. 1987. № 22. P. 349.
11. *Glass L., Sun J.* Periodic forcing of a limit-cycle oscillator: Fixed points, Arnold tongues, and the global organization of bifurcations // Phys. Rev. 1994. Vol. 50, № 6. P. 5077.
12. *Pecora L. and Carroll T.* Synchronization in chaotic systems // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64. P. 821.
13. *Dykman G., Landa P. and Neimark Y.* Synchronizing the chaotic oscillations by external force // Chaos, Solitons and Fractals. 1992. Vol. 1. P. 339.
14. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E. and Safonova M.A.* Synchronization of chaos // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1992. Vol. 2. P. 633.
15. *Anishchenko V.S., Silchenko A.N. and Khovanov I.A.* Synchronization of switching processes in coupled Lorenz systems // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 57. P. 316.
16. *Rosenblum M., Pikovsky A. and Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76. P. 1804.
17. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001.
18. *E. Lorenz.* Deterministic Nonperiodic Flow // Journal of Atmospheric Sciences. 1963. Vol. 20. P. 130.
19. *Park E.-H., Zaks M.A., Kurths J.* Phase synchronization in the forced Lorenz system // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 60. P. 6627.

20. Кузнецов Ю.И., Ланда П.С. и др. Связь между амплитудным порогом синхронизации и энтропией в стохастических автоколебательных системах // Доклады Академии наук СССР. 1985. Т. 281, № 2. с. 291.
21. Ланда П.С., Рендель Ю.С., Шер В.А. Синхронизация колебаний в системе Лоренца // Известия вузов: Радиофизика. 1989. Т. 32, № 9. С. 1172.
22. Афанасьев В.В., Польский И.С. и др. Применение метода Мельникова для оценки эффективности влияния внешних воздействий на сложные нелинейные системы со странными аттракторами // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23, № 23.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 24.01.2007  
После доработки 05.06.2007

### THE COMPARATIVE ANALYSIS OF SYNCHRONIZATION BY A HARMONIOUS AND PULSE FORCE BY THE EXAMPLE OF LORENTZ SYSTEM

*Yu.S. Aidarova, A.P. Kuznetsov, L.V. Turukina*

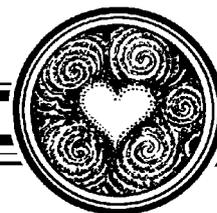
The synchronization by external periodic force of Lorenz system is under both numeric and analytical investigation in this paper. Properly studied the changes in synchronization caused by alteration of parameter value, which is responsible for arising of chaotic attractor in autonomous system.



*Айдарова Юлия Сериковна* – родилась в 1983 году в Саратове, окончила Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского (2006). В данное время является аспирантом кафедры динамических систем на факультете нелинейных процессов. Является соавтором нескольких научных статей.



*Тюрюкина Людмила Владимировна* – родилась в 1977 году. Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, ассистент базовой кафедры динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов – динамический хаос, критические явления на пороге хаоса, сложная динамика нелинейных осцилляторов и автоколебательных систем с внешним периодическим воздействием в контексте сопоставления различных подходов к их описанию, синхронизация короткими импульсами и управление неустойчивыми режимами посредством коротких импульсов. Автор 26 научных публикаций, в том числе 7 статей в российских и зарубежных журналах. Лауреат стипендии Президента РФ для студентов и аспирантов. В 2001 и 2002 годах получила персональные гранты РФФИ для молодых исследователей. Принимает участие в работе международных научных коллективов.  
E-mail: ludmila@forpost.ru



**ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ  
КВАНТОВЫХ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ В СИСТЕМЕ  
С ТРЕНИЕМ, КВАДРАТИЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ  
И НЕПРОНИЦАЕМЫМИ СТЕНКАМИ**

*А.Л. Санин, А.А. Смирновский*

В рамках уравнения Шредингера – Ланжевена – Костина исследована одномерная диссипативная система с квадратичным потенциалом, распределенным между стенками ямы, и подверженная импульсной накачке. Численное моделирование распространения квантовых волновых пакетов, динамических средних, частотного отклика, отображения Пуанкаре демонстрирует установившийся колебательный режим движения пакетов. Проводится сравнение с классическими аналогами.

**Введение**

Исследование квантовых динамических закономерностей имеет фундаментальное значение для развития физики, химии и нанотехнологий. Современные достижения лазерной импульсной фемто- и аттосекундной техники позволяют проводить экспериментальные исследования динамики микрочастицы на разных пространственных масштабах. Поэтому возрос интерес к теоретическим исследованиям процессов локализации и фрагментации квантовых волновых пакетов, когерентных колебаний, дифракции и туннелирования в простых модельных системах. В большинстве работ эти системы рассматривались как изолированные от окружающей среды. Для описания изолированных систем используются различные формы уравнений движения, например, нестационарное уравнение Шредингера, квантовое уравнение Гамильтона – Якоби. Влияние окружающей среды на динамику микрочастицы может быть учтено различными способами. Один из них состоит в использовании метода матрицы плотности. Однако, если не требуется полного описания системы, окружающей среды и взаимодействия между ними, то можно перейти к упрощенному, более краткому описанию. Оно состоит в том, чтобы ввести в уравнение квантовой динамики для рассматриваемой системы один или несколько параметров, характеризующих окружающую среду. Так появилось уравнение Гейзенберга – Ланжевена для оператора импульса [1], которое послужило основой для формулировки уравнения Шредингера – Ланжевена – Костина (ШЛК) [2]. Уравнение ШЛК содержит слагаемое, включающее коэффициент трения. Так как оно предназначалось для описания квантового