Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 5, 2007 УДК 517.9

ВЛИЯНИЕ ЗАДЕРЖКИ В КАНАЛЕ СВЯЗИ НА РЕЖИМЫ ПОЛНОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

В.В. Астахов, Е.И. Неходцева, С.В. Астахов, А.В. Шабунин

Изучается влияние задержки в канале связи на режимы полной синхронизации хаоса во взаимодействующих системах с дискретным временем. Рассмотрено поведение системы в зависимости от величины коэффициента связи и времени задержки. Установлено, что связь с задержкой по времени препятствует появлению полной синхронизации хаоса, но допускает существование синхронизации периодических и квазипериодических колебаний.

Введение

Исследование явления синхронизации хаоса является актуальной проблемой, имеющей большое фундаментальное и прикладное значение. Для взаимодействующих хаотических систем выделяют следующие виды синхронизации: полную, фазовую, обобщенную синхронизацию, а также синхронизацию с задержкой. Возможность реализации грубых, устойчивых режимов синхронизации хаоса существенным образом зависит от типа и величины связи. Часто для многих задач естествознания является принципиальным учет времени задержки в каналах связи. Установлено, что задержка при взаимодействии систем существенным образом влияет на их динамику [1–3]. Задержка может индуцировать подавление колебаний во взаимодействующих идентичных осцилляторах [1, 2] или вызывать бистабильность между синхронными и несинхронными состояниями [3]. Задержка в цепочке локально связанных осцилляторов может приводить к уменьшению областей существования сложных хаотических пространственно-временных состояний [4]. При изучении динамики ансамблей систем с задержкой в каналах связи используются как осцилляторы или генераторы, описываемые дифференциальными уравнениями, так и различные отображения с дискретным временем [5].

В настоящей работе показано, что задержка в канале связи между двумя взаимодействующими системами с дискретным временем разрушает режим полной синхронизации хаоса, но допускает существование синхронизации периодических и квазипериодических колебаний.

1. Исследуемая система

Рассмотрим систему двух связанных кубических отображений с запаздывающей связью в следующем виде:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) + \varepsilon\left[f(y_{n-k}) - f(x_n)\right], \\ y_{n+1} &= f(y_n) + \varepsilon\left[f(x_{n-k}) - f(y_n)\right], \\ f(x) &= (a-1)\,x - ax^3. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь x_n, y_n – динамические переменные первой и второй подсистемы, a – управляющий параметр парциальной системы, ε – коэффициент связи, индексы n и k характеризуют дискретное время и интервал задержки, соответственно.

Каждое из отображений (1) в интервале значений a от 2 до 3.6 представляет собой нелинейную бистабильную систему с дискретным временем, которая при увеличении параметра a демонстрирует усложнение колебательных режимов и переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. В закритической области наблюдается каскад бифуркаций слияния лент хаотического аттрактора и объединение двух симметричных хаотических множеств в один аттрактор.

Поведение системы (1) в случае $k = 0$, когда взаимодействие между подсистемами происходит без задержки, детально исследовано и описано в работах [6, 7]. В частности, показано, что существуют интервалы значений коэффициента связи, где наблюдается явление полной синхронизации хаоса. Формирование синхронного хаотического аттрактора происходит через каскад бифуркаций удвоения периода симметричных орбит. При выходе из области синхронизации происходит формирование фазовой мультистабильности. Потеря синхронизации и формирование мультистабильности происходит в результате последовательности бифуркаций на базе седловых периодических орбит, встроенных в синхронный хаотический аттрактор. Следует отметить, что в данном случае ($k = 0$) система связанных отображений хорошо описывает перечисленные явления в двух диссипативно связанных, синфазно возбуждаемых гармонической силой осцилляторах Дуффинга [8]. В радиофизической интерпретации это соответствует двум резистивно связанным нелинейным колебательным контурам при синфазном гармоническом воздействии, где сопротивление связи соответствует коэффициенту ε, а амплитуда гармонического сигнала – параметру a системы (1).

2. Влияние задержки на режимы синхронизации хаоса

Динамика системы (1) является довольно сложной и разнообразной. В данной работе будем исследовать режимы полной синхронизации, то есть такие режимы, когда в каждый момент времени состояния парциальных систем полностью совпадают. Это условие задает в фазовом пространстве системы инвариантное, симметричное подпространство $I : x_{n-j} = y_{n-j}$ $(j = 0, ..., k)$, которому принадлежат синхронные движения. Исследования будем проводить в зависисмости от времени задержки k и коэффициента связи ε при фиксированном значении параметра $a = 3.34$, что соответствует хаотическому режиму индивидуальной системы.

На рис. 1 на плоскости параметров $(k - \varepsilon)$ построена карта режимов в области значений ε от 0 до 0.5 и k от 0 до 6. При взаимодействии без задержки $(k = 0)$ в симметричном подпространстве $I : x_n = y_n$ полного фазового пространства системы существует синхронное хаотическое двухленточное множество $2A$, фазовый портрет которого представлен на рис. 2, a. Оно является хаотическим седлом (притягивающим внутри I и отталкивающим в трансверсальном к I направлении) в интервале значений коэффициента связи от 0 до 0.098, и превращается в синхронный хаотический аттрактор при значениях параметра $\varepsilon > 0.098$. На рис. 1 интервалы существования различных видов движений в симметричном подпространстве без учета трансверсальной устойчивости показаны штриховыми линиями. Интервалы существования трансверсально устойчивых движений (синхронных аттракторов) изображены сплошными линиями.

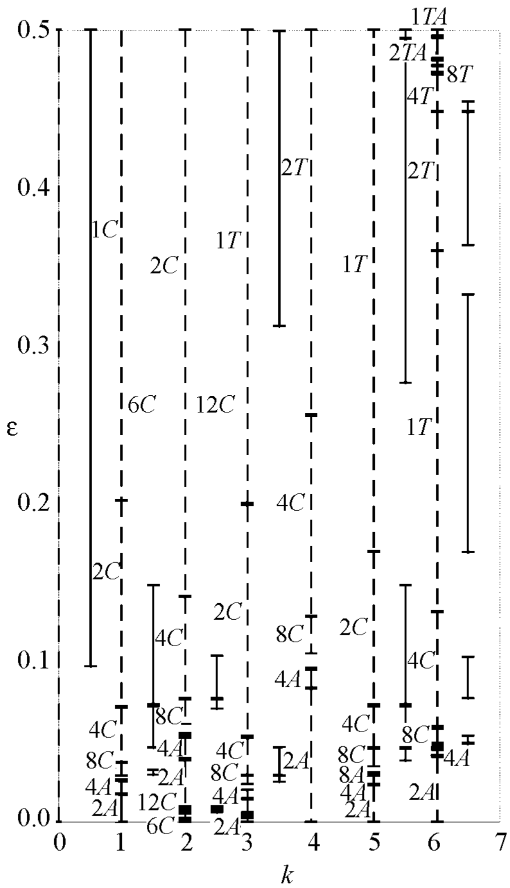


Рис. 1. Карта синхронных движений на плоскости управляющих параметров $k - \varepsilon$. Штрихами показаны области существования седловых синхронных предельных множеств, отрезками сплошных линий – области существования синхронных аттракторов (C – периодическая орбита, T – замкнутая инвариантная кривая, A – хаотическое предельное множество)

При введении задержки поведение системы меняется существенным образом, причем происходят изменения не только трансверсальной устойчивости синхронных движений, но меняется и сам характер движений в симметричном подпространстве, что не наблюдается при связях без задержки. В отсутствие связи $(\varepsilon = 0)$ в симметричном подпространстве существует хаотическое множество $2A$. Для времени задержки $k = 1$ с увеличением коэффициента связи ε в симметричном подпространстве наблюдается обратный каскад бифуркаций удвоения периода, который завершается циклом периода один $(1C)$. Однако большинство циклов данного каскада являются неустойчивыми по отношению к несимметричным возмущениям, то есть в трансверсальном направлении к синхронному многообразию. Трансверсально неустойчивыми являются также и хаотические предельные множества. Из рис. 1 видно, что существуют небольшие интервалы значений коэффициента связи, в которых при данной задержке наблюдаются устойчивые режимы полной синхронизации периодических движений, соответствующих устойчивым циклам $2C$, $4C$, $8C$. Интервал существования устойчивого синхронного цикла периода восемь окружен интервалами неустойчивости синхронных движений. Примеры характерных синхронных движений представлены на рис. 2.

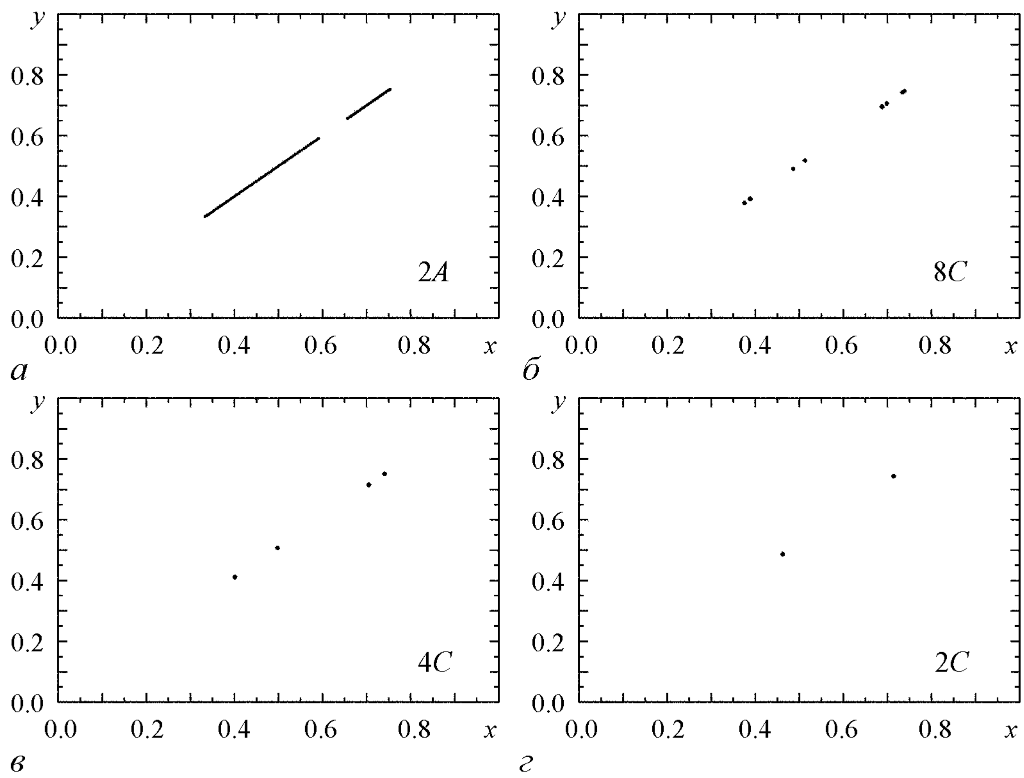


Рис. 2. Характерные синхронные режимы в системе (1): $2A$ – синхронное хаотическое множество (*а*), $8C, 4C, 2C$ – синхронные орбиты периода 8, 4, 2, соответственно (*б*,*в*,*г*)

Для времени задержки $k = 2$ поведение системы остается почти таким же, как и при $k = 1$. Различие состоит в том, что в симметричном подпространстве обратная последовательность бифуркаций удвоения периода завершается не циклом периода 1, а циклом периода 2. В области существования хаотического множества наблюдаются окна устойчивости периодических орбит ($6C$ и $12C$). Здесь также возможны устойчивые режимы синхронизации периодических движений, но их интервалы устойчивости по параметру ε меньше, чем при $k = 1$. Области существования устойчивых синхронных режимов разделены областями существования неустойчивых синхронных режимов.

При дальнейшем увеличении задержки $(k = 3,\ 4,\ 5,\ 6)$, поведение системы меняется существенным образом. Во-первых, при величине задержки связи $k = 4$ устойчивых режимов синхронизации не наблюдается во всем исследуемом интервале значений коэффициента связи. Во-вторых, при значениях $k = 3,\ 5,\ 6$ помимо устойчивых режимов синхронизации периодических движений наблюдаются устойчивые режимы полной синхронизации квазипериодических колебаний (рис. 3, *а*–*в*). В симметричном подпространстве полного фазового пространства связанных систем с дискретным временем рождается устойчивая инвариантная замкнутая кривая. При увеличении коэффициента связи ε наблюдается каскад бифуркаций удвоения инвариантной замкнутой кривой $(1T,\ 2T,\ 4T,\ 8T)$ и формирование синхронного хаоти-

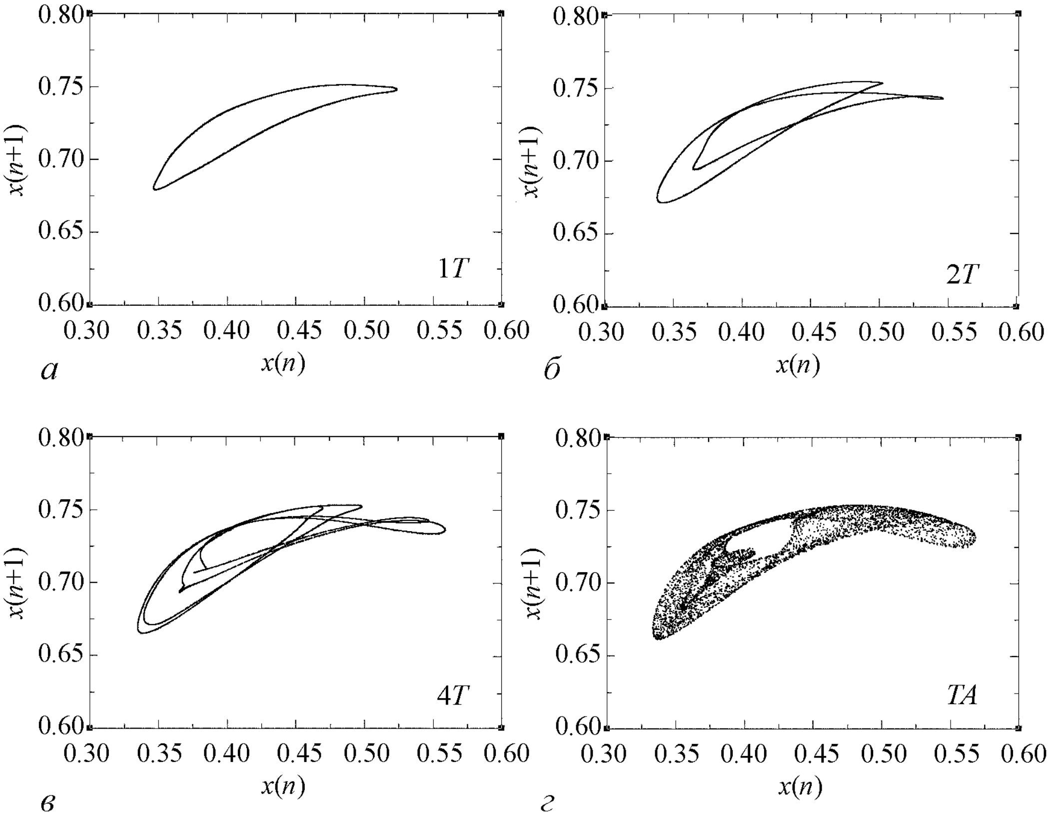


Рис. 3. Бифуркации удвоения инвариантной замкнутой кривой (*а*–*в*) и синхронное хаотическое множество (*г*), сформированное в симметричном подпространстве I при разрушении квазипериодических движений

ческого множества $2TA$ и $1TA$ (см. на рис. 1 сечение $k = 6$ и фазовые портреты на рис. 3). Однако, как видно из карты режимов, при этом происходит потеря устойчивости синхронных движений. Образовавшееся синхронное хаотическое множество становится трансверсально неустойчивым. Устойчивого режима полной синхронизации хаоса не наблюдается.

Заключение

Таким образом, проведенные исследования показывают, что задержка в канале связи существенным образом влияет на режимы полной синхронизации во взаимодействующих кубических отображениях. Введение задержки устраняет устойчивые режимы полной синхронизации хаоса. При связи с задержкой существуют устойчивые режимы полной синхронизации периодических колебаний и квазипериодических движений. Взаимодействие с задержкой в системе двух кубических отображений приводит к более сложной картине бифуркационных переходов для синхронных движений в симметричном подпространстве. При изменении коэффициента связи не только происходят бифуркации удвоения периодических колебаний, но и появляются квазипериодические движения, наблюдаются бифуркации удвоения инвариантной замкнутой кривой и формирование синхронного тор-аттрактора. При движении по параметру интервалы устойчивости режимов синхронизации чередуются с интервалами неустойчивости синхронных движений.

В системе связанных отображений с задержкой (1) проведено детальное исследование устойчивых и трансверсально неустойчивых регулярных и хаотических синхронных движений, построены их области существования на плоскости управляющих параметров, исследованы переходы между ними. Однако ряд важных и интересных вопросов остались открытыми. Например, не выявлены причины, приводящие к трансверсальной неустойчивости и регулярных, и хаотических синхронных движений при некоторых величинах задержки в канале связи, чем обусловлено чередование интервалов устойчивости с интервалами трансверсальной неустойчивости синхронных движений. Выявление механизма этих эффектов требует детального бифуркационного анализа седловых периодических орбит, расположенных как внутри, так и в окрестности синхронного симметричного подпространства и отвечающих за трансверсальную устойчивость синхронных движений. Эта задача не ставилась в рамках данной работы, и ее решение планируется провести в дальнейшем.

Данная работа была частично поддержана Министерством образования и науки РФ в рамках программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2006-2008 годы)».

Библиографический список

1. *Raddy D.V.R., Sen A., Johnston G.L.* Time delay induced death in coupled limit cycle oscillators // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 80. P. 5109.
2. *Raddy D.V.R., Sen A., Johnston G.L.* Experimental evidence of time-delay-induced death in coupled limit-cycle oscillators // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 85. P. 3381.
3. *Yeung M.K.S., Strogatz S.H.* Time delay in the Kuramoto model of coupled oscillators // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 82. P. 648.
4. *Chung T.-H., Kim S.* Spatio-temporal dynamics in locally coupled Ginzburg-Landau oscillator chain with time delay // CP501. Stochastic Dynamics and Pattern Formation in Biological and Complex Systems / Edited by S. Kim, K.J. Lee, W. Sung. P. 67.
5. *Jiang Y.* Globally coupled maps with time delay interactions // Physics Letters A. 2000. Vol. 267. P. 342.
6. *Astakhov V., Shabunin A., Klimshin A., Anishchenko V.* In-phase and anti-phase complete chaotic synchronization in symmetrically coupled discrete maps // Discrete Dynamics in Nature and Society. 2002. Vol. 7. P. 215.
7. *Астахов В.В., Шабунин А.В., Анищенко В.С.* Механизмы разрушения хаотической синхронизации в системе связанных кубических отображений // Изв. вузов: Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7. № 2,3. С. 3.
8. *Коблянский С.А.* // В сборнике «Нелинейные дни для молодых в Саратове. 2007» (в печати).

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию *29.03.2007*
После доработки *29.06.2007*

INFLUENCE OF TIME DELAY COUPLING ON THE COMPLETE SYNCHRONIZATION OF CHAOS IN CHAOTIC SYSTEMS WITH DISCRETE TIME

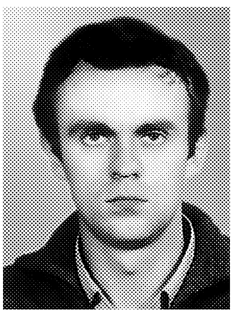
V.V. Astakhov, E.I. Nekhodtseva, S.V. Astakhov, A.V. Shabunin

In the work the influence of time delay of coupling on the complete synchronization of chaos in an interacting systems with discrete time is studied. The system's behavior is considered in dependence on coupling coefficient value and delay time value. It is established that coupling with time delay prevents appearance of the complete synchronization of chaos, however it allows the synchronization of periodic and quasi-periodic oscillations.

Астахов Владимир Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1980). Доктор физико-математических наук (1999), профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов – теория колебаний и динамический хаос, синхронизация и управление хаосом. Имеет более 80 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.
E-mail: astakhov@chaos.ssu.runnet.ru

Неходцева Екатерина Игоревна родилась в Саратове (1986). В настоящее время является студенткой факультета нелинейных процессов Саратовского Государственного университета. Область научных интересов: динамика связанных хаотических систем с задержкой в канале связи.

Астахов Сергей Владимирович родился в Саратове (1984). Окончил физический факультет Саратовского университета по специальности радиофизика и электроника (2006). В настоящее время работает инженером на кафедре радиофизики и нелинейной динамики. Область научных интересов: хаос в сосредоточенных и распределенных системах, статистические характеристики хаоса, динамика систем с задержкой.



Шабунин Алексей Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1990). Доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ, кандидат физико-математических наук (1998). Научные интересы – нелинейная динамика, теория колебаний, синхронизация и управление хаосом. Автор более 40 научных публикаций.
E-mail:alexey@chaos.ssu.runnet.ru