Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 5, 2007 УДК 517.9

ДИАГНОСТИКА ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ ХАОСА ПРИ ПОМОЩИ ФУНКЦИИ КОГЕРЕНТНОСТИ

А.В. Шабунин, В.В. Астахов

Трудности описания фазовой синхронизации хаоса связаны с неоднозначностью определения мгновенной фазы, а также с ограниченностью ее области применения режимом когерентного хаоса. В данной работе показано, что для диагностики и количественного анализа этого явления может быть использована функция когерентности, которая не имеет подобных ограничений.

Введение

Хаотическая синхронизация, то есть взаимное подстраивание колебаний в связанных хаотических осцилляторах, проявляется разными способами, что позволяет говорить о разных типах синхронизации. Так, при сильной диффузионной связи хаотические осцилляторы стремятся к полной согласованности колебаний, выражающейся либо в их идентичности (так называемая «полная синхронизация хаоса» [1, 2]), либо в некоторой детерминированной взаимосвязи между ними («обобщенная синхронизация» [2, 5], «синхронизация с задержкой» [6]). При слабой связи наблюдается согласованность базовых временных масштабов колебаний, что может быть описано на языке спектров как захват базовой частоты в спектре одного из осцилляторов близкой базовой частотой в спектре второго («частотная синхронизация» [3]), или в терминах временной динамики как захват мгновенной фазы колебаний фазой второго осциллятора («фазовая синхронизация» [4]). Для фазовой синхронизации можно ввести формальное определение в виде неравенства

$$\lim_{t\to\infty} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| < M, \qquad (1)$$

где φ_1, φ_2 – мгновенные фазы первого и второго осцилляторов, а M – некоторая положительная константа. Формула (1) означает, что разность фаз двух осцилляторов остается ограниченной во времени, то есть средние «периоды» колебаний одинаковы. Слабым местом указанного определения является само понятие мгновенной фазы $\varphi(t)$ в применении к хаотическим колебаниям. Если в случае периодических колебаний, когда аттрактор одномерен, фаза однозначно характеризует установившееся состояние системы (что собственно и является основанием для использования термина «фаза» как синонима термина «состояние»), то уже при квазипериодических колебаниях можно говорить о нескольких независимых фазах (например, фаза несущей и фаза огибающей). Что касается хаотических колебаний, то, хотя формальное введение мгновенной фазы тем или иным способом возможно, ее физическая интерпретация остается неясной. Поэтому на сегодняшний день концепция мгновенной фазы хорошо работает лишь для «слабого», то есть когерентного, хаоса, который близок к периодическим колебаниям, и не работает для развитого хаоса, при котором спектр не содержит выраженных пиков. Кроме того, условие (1) автоматически выполняется, если рассматриваемые осцилляторы имеют равные характерные периоды колебаний, а значит, оно не может служить критерием синхронизации для идентичных осцилляторов. В 1985 году А. Пиковский [7] предложил рассматривать явление фазовой синхронизации хаоса с точки зрения подавления диффузии текущей фазы, что может быть диагностировано как переход от непрерывного спектра, характерного для осцилляторов с непрерывным временем, к линейчатому спектру, подобному спектру в отображениях последования. Однако этот способ пригоден только для вынужденной синхронизации под действием периодической силы. В работе [8] для диагностирования фазовой синхронизации предлагается исследовать захват фаз вейвлет-спектров колебаний подсистем. Вейвлет-анализ хаотических колебаний – новый многообещающий инструмент исследователя. Однако к настоящему времени он не столь хорошо разработан, как традиционный спектральный анализ, и его результаты менее наглядны и привычны для радиофизики. В настоящей работе для диагностики фазовой синхронизации предлагается использовать функцию когерентности как альтернативу мгновенной фазы. Ее преимуществом являются ясная физическая интепретация, однозначность и корректность определения вне зависимости от рассматриваемых колебательных режимов, простые и хорошо разработанные алгоритмы расчета. Кроме того, она позволяет исследовать явление фазовой синхронизации как в системах с расстройкой, так и в идентичных осцилляторах.

1. Диагностика и измерение синхронизации на основе функции когерентности

Взаимная когерентность σ_{xy} двух колебательных процессов $x(t)$ и $y(t)$ определяется как:

$$\sigma_{xy}(\omega) = \left| \frac{C_{xy}(\omega)}{\sqrt{P_x(\omega) P_y(\omega)}} \right|,$$

где $C_{xy}(\omega) = \left\langle F_x(\omega) F_y^*(\omega) \right\rangle$ – взаимный спектр, $P_i(\omega) = \langle F_i(\omega) F_i^*(\omega) \rangle$ – собственный спектр мощности на частоте ω, $F_i(\omega)$ – преобразование Фурье от сигнала $i(t)$. Функция когерентности принимает значения в интервале $[0;1]$, при этом $\sigma_{xy} = 0$ на тех частотах, для которых фурье-фазы ($\theta(\omega) = \mathrm{Arg}(F(\omega))$) двух сигналов принимают независимое друг от друга значение ($\Delta\theta$ равномерно распределено в интервале $[-\pi;\pi]$), и $\sigma_{xy} = 1$, если фазы полностью захвачены ($\rho(\Delta\theta) = \delta(\Delta\theta - \Delta\theta_0)$, ρ – плотность вероятности, δ – дельта функция). Усреднив σ_{xy} по всем частотам с учетом вклада каждой составляющей спектра в общую мощность сигнала и нормировав на полную мощность колебаний, можно получить суммарную количественную характеристику когерентности колебаний на всех частотах

$$S_{xy} = \frac{\displaystyle\int_0^\infty \left(P_x(\omega) + P_y(\omega)\right) \sigma_{xy}(\omega) d\omega}{\displaystyle\int_0^\infty (P_x(\omega) + P_y(\omega)) d\omega}. \tag{2}$$

Из (2) легко видеть, что $S_{xy} \in [0;1]$, причем $S_{xy} = 1$ тогда и только тогда, когда колебания полностью когерентны на всех частотах, и $S_{xy} = 0$, если когерентность полностью отсутствует. Величина S_{xy} определяет относительную мощность когерентных колебаний в общей мощности сигналов. Она может служить количественной мерой хаотической синхронизации, в частности, как было показано в работах [9, 10], может характеризовать процесс постепенного разрушения полной синхронизации хаоса. В настоящей работе величина S_{xy} использована для анализа фазовой синхронизации в связанных осцилляторах.

2. Анализ фазовой синхронизации в связанных осцилляторах Resслера

Рассмотрим два связанных осциллятора Ресслера как классическую систему, демонстрирующую явление фазовой синхронизации

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -y_1 - z_1,\\
\dot{y}_1 &= x_1 + 0.2y_1,\\
\dot{z}_1 &= 0.2 + z_1(x_1 - c),\\
\dot{x}_2 &= -(1+\Delta)y_2 - z_2 + \gamma(x_1 - x_2),\\
\dot{y}_2 &= (1+\Delta)x_2 + 0.2y_2,\\
\dot{z}_2 &= 0.2 + z_2(x_2 - c),
\end{aligned}
\tag{3}
$$

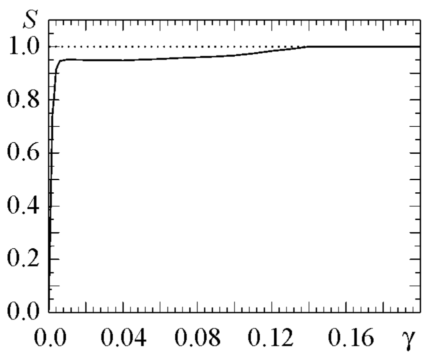

Рис. 1. Зависимость степени когерентности колебаний от связи

где Δ характеризует расстройку между подсистемами по собственной частоте, γ – коэффициент связи, параметр c управляет колебаниями в одиночном осцилляторе. При изменении c каждый из осцилляторов демонстрирует переход от периодических колебаний к хаотическим через каскад бифуркаций удвоения периода. Выберем $c = 4.6$, соответствующее режиму одноленточного хаотического аттрактора с ярко выраженным пиком в спектре (когерентный хаос). Рассмотрим сначала случай идентичных осцилляторов ($\Delta = 0$). При сильной связи ($\gamma > 0.14$) система демонстрирует полную синхронизацию хаоса, когда $x_1(t) = x_2(t)$, $y_1(t) = y_2(t)$, $z_1(t) = z_2(t)$. Уменьшение связи от $\gamma = 0.14$ к $\gamma = 0$ ведет к постепенной десинхронизации колебаний. Рассмотрим этот процесс с точки зрения степени синхронизации (2). На рис. 1 приведена зависимость степени синхронизации колебаний от связи. Видно, что с уменьшением связи S монотонно уменьшается от 1 для полностью синхронных колебаний ($\gamma > 0.14$) до 0 для полностью несинхронных ($\gamma = 0$). При этом данная зависимость разбивается на два участка с разным поведением: область $0.005 < \gamma < 0.14$ относительно медленного изменения степени когерентности при ее общем высоком уровне ($S > 0.95$) и область $0 < \gamma < 0.005$ резкого падения суммарной когерентности практически до нуля. Для того чтобы разобраться, в чем причина такого различия, рассмотрим поведение функции когерентности для значений параметра связи из первой и второй области (рис. 2). Из рисунков видно, что основные отличия заключаются в значении когерентности на базовых частотах спектра. В первом интервале значений связи когерентность на основной частоте ω_0 и всех ее гармониках строго равна единице, оставаясь достаточно малой на остальных частотах спектра. Во втором случае когерентность на базовой частоте и гармониках начинает разрушаться. Таким образом, можно говорить о том, что в интервале значений связи $0.005 < \gamma < 0.14$ реализуется фазовая синхронизация хаотических колебаний, понимая под этим захват «фурье-фаз» базовых частот в спектрах колебаний осцилляторов. Будет ли при этом наблюдаться фазовая синхронизация в ее «классическом» понимании? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо рассмотреть осцилляторы с расстройкой по собственным частотам ($\Delta \neq 0$). Выберем значения коэффициента связи из указанных выше областей и рассмотрим, как степень синхронизации колебаний зависит от расстройки осцилляторов Δ. Для того чтобы определить области значений параметров, в которых наблюдается захват мгновенных фаз, будем также наблюдать за значениями средних характерных «периодов» колебаний

$$\langle T_x \rangle = \lim_{\tau \to \infty} \frac{\tau}{M},$$

где τ – время наблюдения за процессом $x(t)$, M – число переходов переменной x от положительных значений к отрицательным. Такое определение характерного периода, как интервала между двумя последовательными пересечениями траекторией секущей Пуанкаре ($x = 0$) можно связать с определением для мгновенной фазы, как

$$\varphi(t) = \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} + 2\pi n,$$

где n – число пересечений секущей, t_n – время n-го пересечения. Данное определение для фазы представляет ее линейную интерполяцию и, как показывают исследования (см., например, [11]), в случае когерентного хаоса приводит к тем же качественным результатом, что и использование преобразования Гильберта. На рис. 3, *а* построена зависимость среднего периода колебаний во втором осцилляторе $\langle T_2 \rangle$ от расстройки Δ при трех характерных значениях параметра связи. Видно, что в первом случае, который соответствует области высокого уровня синхронизации, существует широкая зона захвата среднего периода колебаний, где он не меняется ($-0.007 < \Delta < 0.065$) и в точности равен среднему периоду колебаний в первом осцилляторе (обозначен штриховой линией). В этой зоне неравенство (1) будет выполнено, а следовательно, будет наблюдаться захват мгновенных фаз колебаний. Во втором случае, соответствующем граничному значению связи, зона захвата существует, но она становится очень узкой, стягиваясь к значению $\Delta = 0$. Наконец, при

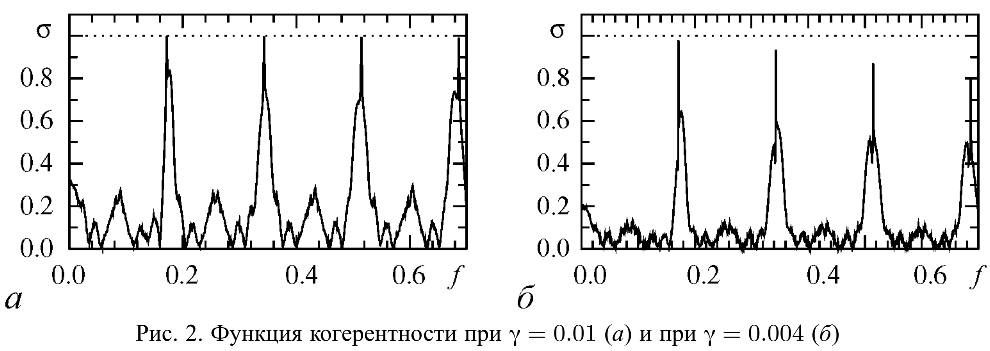

Рис. 2. Функция когерентности при $\gamma = 0.01$ (*а*) и при $\gamma = 0.004$ (*б*)

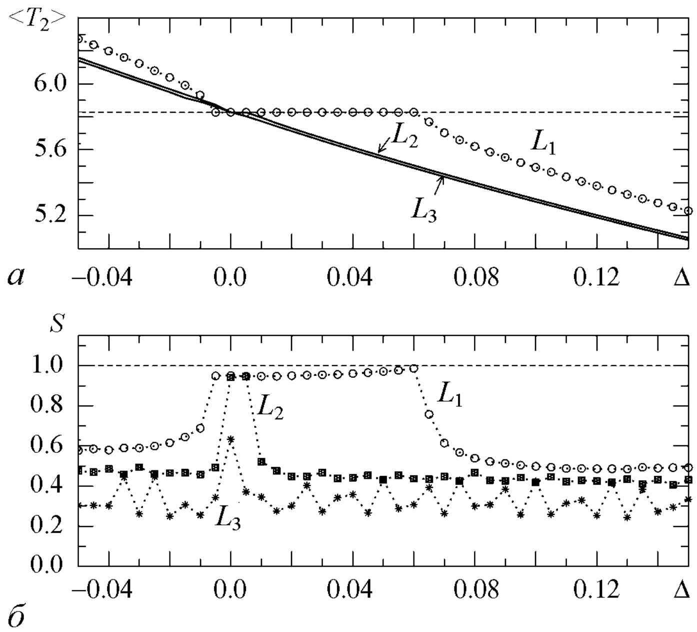

Рис. 3. *а* – график зависимости среднего периода колебаний во втором осцилляторе от величины расстройки Δ при разных значениях параметра связи: $\gamma = 0.05$ (линия L_1), $\gamma = 0.005$ (L_2), $\gamma = 0.001$ (L_3); *б* – зависимость уровня синхронизации от расстройки для тех же значений γ

значении связи из области низкого уровня синхронизации, зона захвата отсутствует. Существует лишь точка $\Delta = 0$, в которой средние периоды совпадают. Таким образом, при тех значениях связи, где существует фазовая синхронизация в смысле захвата фурье-фаз, существует также и фазовая синхронизация в традиционном смысле захвата мгновенных фаз колебаний. Если построить для сравнения зависимость уровня когерентности S в системе от расстройки при тех же параметрах связи (рис. 3, *б*), то налицо полное совпадение между зонами захвата среднего периода и зонами высокого ($S > 0.95$) уровня когерентности. Причем в области захвата степень синхронизации для разных значений связи практически не отличается (см. линии L_1 и L_2). При выходе из фазовой синхронизации уровень когерентности резко уменьшается и выходит на некоторое «стационарное» значение, соответствующее своему значению параметра связи.

Выводы

Таким образом, в случае когерентного хаоса наличие фазовой синхронизации можно диагностировать по поведению функции когерентности. Режиму захвата мгновенной фазы соответствует высокий уровень суммарной когерентности S, приближающийся к своему максимальному значению $S = 1$. При этом на базовой частоте спектра и всех ее гармониках наблюдается полная когерентность колебаний. Разрушение фазовой синхронизации начинается с уменьшения когерентности на частотах, кратных базовой частоте спектра, завершаясь потерей когерентности на основной частоте. Применение функции когерентности как критерия фазовой синхронизации позволяет рассматривать это явление и в том случае, когда у исследователя нет доступа к управляющим параметрам системы, то есть когда он не может отслеживать захват среднего периода колебаний при увеличении отстройки одного осциллятора от другого. Данный метод также может быть перенесен на колебательные режимы с развитым хаосом, когда понятие мгновенной фазы и среднего периода становятся бессодержательными.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (программа «Развитие научного потенциала высшей школы»).

Библиографический список

1. *Fujisaka H., Yamada T.* Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems // Progr. Theor. Phys. 1983. Vol. 69. P. 32.
2. *Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И.* Стохастическая синхронизация в диссипативных системах // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. С. 1050.
3. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E., Safonova M.A.* Synchronization of chaos // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1992. Vol. 2, № 3. P. 633.
4. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76. P. 1804.
5. *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M.* Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53. P. 4528.
6. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 4193.
7. *Пиковский А.С.* Фазовая синхронизация стохастических автоколебательных систем внешним периодическим сигналом // Радиотехника и электроника. 1985. Т. 85. С. 1970.
8. *Короновский А.А., Куровская М.К., Храмов А.Е.* О соотношении фазовой синхронизации хаотических осцилляторов и синхронизации временных масштабов // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31, вып. 19. С.76.
9. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Николаев В.В., Шабунин А.В.* Исследование хаотической синхронизации в системе симметрично связанных генераторов // Радиотехника и электроника. 2000. Т. 45, № 2. С. 196.
10. *Shabunin A., Astakhov V., Kurths J.* Quantitative analysis of chaotic synchronization by means of coherence // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72. P. 016218.
11. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Strelkova G.I.* Instantaneous phase method in studing chaotic and stochastic oscillations and its limitations // Fluctuations and Noise Letters. 2004. Vol. 4, № 1. P. L219.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию 02.04.2007
После доработки 18.06.2007

DIAGNOSTICS OF PHASE SYNCHRONIZATION BY MEANS OF COHERENCE

A.V. Shabunin, V.V. Astakhov

Problems in describing chaotic phase synchronization are connected with ambiguity of definition of istantaneous phase as well as with limiting of its applicability by the coherent chaos regime. We demonstrate that this phenomenon can be analysed by means of function of mutual coherence which has not these restrictions.