

БИФУРКАЦИИ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ГАЗОВОЙ ЗАЛЕЖИ И ПОДЗЕМНОГО ХРАНИЛИЩА ГАЗА

В.А. Черных

Разработка газовой залежи и эксплуатация подземного хранилища газа впервые исследуются как динамические системы с использованием понятий нелинейной динамики. Впервые построены бифуркационные диаграммы для нелинейных динамических моделей газовой залежи и подземного хранилища газа. Исследованы условия устойчивости процессов разработки газовой залежи и функционирования подземного хранилища газа.

Введение

Разработка залежи представляет собой процесс отбора газа из порового пространства продуктивного пласта, как это показано на рис. 1 на примере нижележащей залежи. Отборы газа из скважин определяются их добывными возможностями и сравнительно мало изменяются в течение года. В то же время потребление газа характеризуется значительной сезонной неравномерностью, зимой потребление газа иногда в несколько раз больше, чем летом. В связи с этим часть летних отборов газа закачивается обратно в высокопроницаемые пласты, как это показано на рис. 1 на примере вышележащей залежи, и затем отбирается в зимний период. Эти пласты являются вдоль трассы газопровода вдали от газовой залежи и называются подземными хранилищами газа. Необходимо отметить, что и в процессе разработки также возможны ситуации, когда в часть скважин производится закачка газа, например, для поддержания пластового давления в газоконденсатной залежи, как это показано на рис. 1. Принципиальная разница между разработкой газовой залежи и эксплуатацией подземного хранилища газа состоит также в том, что в первом случае из залежи отбирается ежегодно 3–5% от начальных запасов, а из хранилища в течение зимы более 50% запасов, которые затем восполняются в летний период. Эти особенности эксплуатации подземного хранилища газа предъявляют повышенные требования к устойчивости его работы. Соответствующие оценки можно получить на основе динамической модели залежи и подземного хранилища. Качественный анализ поведения залежи можно провести с использованием бифуркационных диаграмм. Динамической моделью газовой залежи или подземного хранилища газа будем называть математическую модель эволюции (изменения) средневзвешенного по объему пор плотности газа во времени.

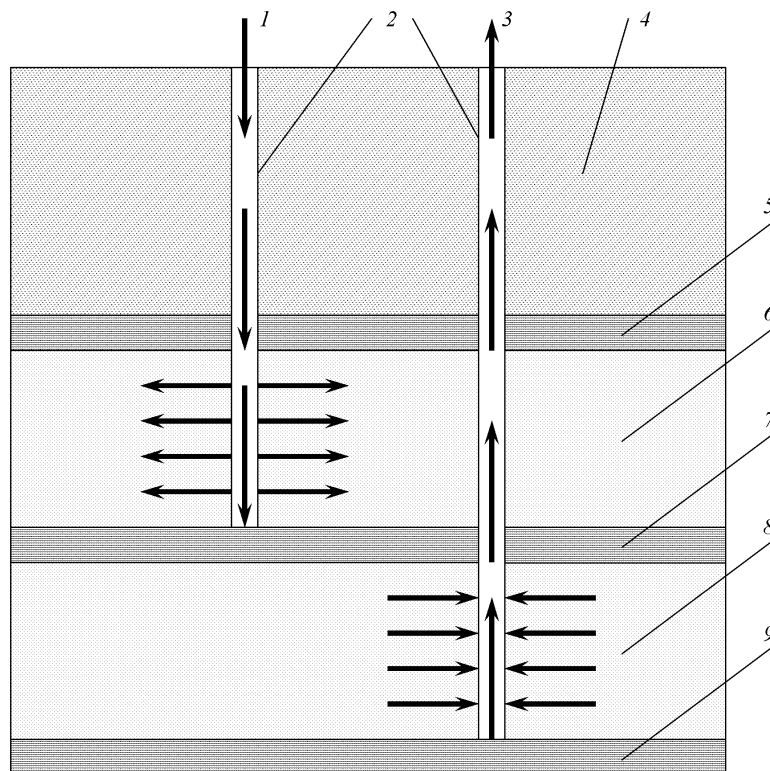


Рис. 1. Схема эксплуатации газовой залежи или подземного хранилища газа: 1 – закачка газа; 2 – скважины; 3 – отбор газа; 4 – массив вышележащих пород; 5, 7, 9 – низкопроницаемые пласты; 6 – вышележащая газовая залежь или подземное хранилище газа; 8 – нижележащая газовая залежь

Состояние газовой залежи определяется набором величин, называемых координатами (динамическими параметрами) системы, а именно: средневзвешенной по объему пор $V_{\text{пор}}$ плотностью газа $\rho(t)$ и скоростью ее изменения по времени $d\rho/dt$, которая называется также фазовой скоростью.

В рамках нелинейной динамики под бифуркацией понимается структурная перестройка фазового портрета динамической системы, происходящая при определенных значениях ее внешних параметров. Физическая сущность бифуркации динамической системы состоит в том, что система переходит от одного режима функционирования к другому. Это означает, что предшествующий режим потерял устойчивость и система начинает работать в новом устойчивом режиме, который может принципиально отличаться от предшествующего. Таким образом, исследование бифуркации сводится к изучению устойчивости динамической системы. Устойчивость динамической системы (в данном случае газовой залежи) определяется тем, как будет изменяться с течением времени плотность газа, если начальные условия или физические параметры системы претерпят некоторые малые изменения (возмущения).

1. Одномерные нелинейные динамические модели газовой залежи

Во многих случаях поведение газовой залежи как динамической системы может быть описано обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка относительно одной искомой функции. Такие динамические системы будем считать

одномерными по аналогии с механическими системами.

$$\frac{d\rho}{dt} = F(\rho), \quad (1)$$

где ρ – осредненная по газонасыщенному объему пласта плотность газа. Для невозможного состояния газовой залежи это уравнение имеет вид

$$\frac{d\rho^0}{dt} = F(\rho^0). \quad (2)$$

Вычитая (2) из (1), получаем уравнение динамики возмущения системы

$$\frac{d\Delta\rho}{dt} = F(\rho) - F(\rho^0), \quad (3)$$

где $\rho = \rho^0 + \Delta\rho$ – плотность газа при возмущенном состоянии системы, $\Delta\rho = \rho - \rho^0$ – возмущение плотности газа.

Разложим функцию $F(\rho)$ в ряд Тейлора

$$F(\rho) = F(\rho^0) + \Delta\rho \cdot F'(\rho^0) + \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2 F''(\rho^0) + \dots, \quad (4)$$

где F', F'' – производные функции $F(\rho)$ по ρ в точке ρ^0 . После подстановки (4) в (3) находим

$$\frac{d\Delta\rho}{dt} = \Delta\rho \cdot F'(\rho^0) + \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2 F''(\rho^0) + \dots \quad (5)$$

В силу малости возмущения $\Delta\rho$ уравнение (5) можно представить в виде

$$\frac{d\Delta\rho}{dt} \approx F'(\rho^0) \cdot \Delta\rho. \quad (6)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\Delta\rho = \exp [F'(\rho^0) \cdot t].$$

Если $[F'(\rho^0) \cdot t] < 0$, то возмущение плотности газа с течением времени уменьшается, и следовательно, динамическая система в этой точке является устойчивой. Если же $[F'(\rho^0) \cdot t] > 0$, то возмущение $\Delta\rho$ с течением времени будет расти и состояние системы будет неустойчивым. Таким образом, устойчивость системы полностью зависит от знака функции $[F'(\rho^0) \cdot t]$.

*Рассмотрим устойчивость процессов функционирования подземного хранилища газа, если одни скважины работают с постоянным темпом закачки, другие – с темпом закачки, пропорциональным пластовому давлению, а третьи – с темпом, пропорциональным абсолютно свободному дебиту. Динамическая модель такой системы имеет вид**

$$\frac{d\rho}{dt} = F(\rho) = \alpha_* \rho^2 + c_* \rho + \tilde{q}, \quad (7)$$

где $\tilde{q} = q_*/V_{\text{пор}} = \text{const}$, q_* – темп закачки газа, $\alpha_* = \text{const} > 0$, $c_* = \text{const} > 0$. Аналитическое решение этого уравнения имеет вид:

*Здесь и далее см. Черных В.А. Нелинейная динамика газовой залежи. М.: ВНИИГАЗ. 2002. 203 с.

при $4\alpha_*\tilde{q} > c_*^2$

$$\frac{2}{\sqrt{4\alpha_*\tilde{q} - c_*^2}} \left(\arctg \frac{2\alpha_*\rho_0 + c_*}{\sqrt{4\alpha_*\tilde{q} - c_*^2}} - \arctg \frac{2\alpha_*\rho + c_*}{\sqrt{4\alpha_*\tilde{q} - c_*^2}} \right) = t,$$

при $c_*^2 > 4\alpha_*\tilde{q}$

$$\frac{1}{\sqrt{c_*^2 - 4\alpha_*\tilde{q}}} \left[\ln \left| \frac{2\alpha_*\rho_0 + c_* - \sqrt{c_*^2 - 4\alpha_*\tilde{q}}}{2\alpha_*\rho_0 + c_* + \sqrt{c_*^2 - 4\alpha_*\tilde{q}}} \right| - \ln \left| \frac{2\alpha_*\rho + c_* - \sqrt{c_*^2 - 4\alpha_*\tilde{q}}}{2\alpha_*\rho + c_* + \sqrt{c_*^2 - 4\alpha_*\tilde{q}}} \right| \right] = t,$$

при $t = 0, \rho = \rho_0$.

Решение получено в неявной форме и его неудобно использовать для анализа поведения системы, поэтому обратимся к методам нелинейной динамики.

Определение точек равновесия системы. Устойчивость системы характеризуется ее поведением в точках равновесия. Из условия стационарности $F(\rho) = 0$ системы (7) находим аналитические выражения для этих точек

$$\rho_{1,2}^* = \frac{1}{2\alpha_*} \left[-c_* \pm \sqrt{c_*^2 - 4\alpha_*\tilde{q}} \right]. \quad (8)$$

Нетрудно видеть, что при $c_*^2 > 4\alpha_*\tilde{q}$ система имеет две точки равновесия, а при $c_*^2 < 4\alpha_*\tilde{q}$ — ни одной. Режим функционирования системы в точке равновесия определяется знаком функции $F'(\rho)$ в этой точке.

В первой точке равновесия системы ρ_1^* имеем

$$F'(\rho_1^*) = 2\alpha_*\rho_1^* + c_* = +\sqrt{c_*^2 - 4\alpha_*\tilde{q}} > 0,$$

то есть в первой точке равновесия система неустойчива.

Во второй точке равновесия ρ_2^* имеет место неравенство

$$F'(\rho_2^*) = 2\alpha_*\rho_2^* + c_* = -\sqrt{c_*^2 - 4\alpha_*\tilde{q}} < 0,$$

и следовательно, система в этой точке устойчива.

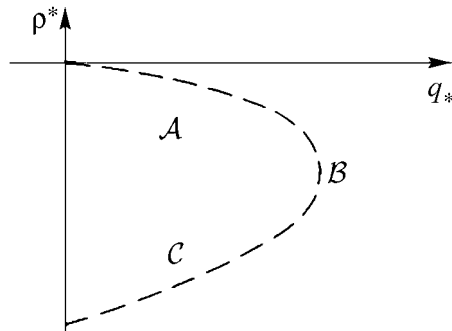


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма для уравнения (8)

Бифуркационная диаграмма этой системы, то есть геометрическое представление зависимости ρ^* от q_* , приведена на рис. 2. Здесь кривые \mathcal{A} и \mathcal{C} являются геометрическим местом точек равновесия системы ρ_1^* и ρ_2^* , соответственно. В точке \mathcal{B} эти кривые сливаются, и вместо двух состояний равновесия имеет место только одно. С увеличением \tilde{q} стационарные состояния исчезают вовсе. В то же время при уменьшении \tilde{q} имеет место раздвоение (бифуркация) пути эволюции системы, и раз-

витие возможно как по кривой \mathcal{A} , так и по кривой \mathcal{C} . Однако в рассматриваемом случае точки равновесия системы располагаются в области отрицательных значений плотности газа, что физически нереально. Следовательно, динамическая система (7) не имеет стационарных точек в области реальных значений плотности газа.

Случай, когда все типы скважин являются добывающими. Динамическая модель такой системы имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt} = F(\rho) = -\alpha_*\rho^2 - c_*\rho - \tilde{q}, \quad (9)$$

где \tilde{q} – абсолютное значение приведенного темпа отбора газа. Из условия стационарности системы $F(\rho) = 0$ следует, что система имеет два стационарных состояния (см. (8)). Для определения режима функционирования системы в точке равновесия находим выражение для функции $F'(\rho)$ в этой точке.

$$F'(\rho^*) = -2\alpha_*\rho^* - c_*. \quad (10)$$

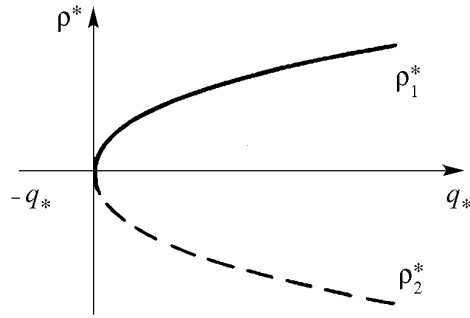
Из уравнений (8) и (9) следует, что

$$F'(\rho_1^*) = -2\alpha_*\rho_1^* - c_* = +\sqrt{c_*^2 - 4\alpha_*\tilde{q}} > 0,$$

$$F'(\rho_2^*) = -2\alpha_*\rho_2^* - c_* = -\sqrt{c_*^2 - 4\alpha_*\tilde{q}} < 0.$$

Видно, что система неустойчива в точке ρ_1^* и устойчива в точке ρ_2^* . Бифуркационная диаграмма рассматриваемой системы совпадает с предшествующей.

Случай, когда нагнетательные скважины работают с постоянным темпом закачки $\tilde{q} = \text{const} > 0$, а добывающие скважины – с дебитом, составляющим заданную постоянную долю от абсолютно свободного дебита. Эта ситуация имеет место при *sucling*-процессе, когда газ, добытый из залежи, закачивается обратно после его обработки. Динамическая модель такого процесса имеет вид



$$\frac{d\rho}{dt} = F(\rho) = \tilde{q} - \alpha_*\rho^2, \quad \tilde{q} > 0, \alpha_* > 0. \quad (11)$$

Рис. 3. Бифуркационная диаграмма для уравнения (11)

Так же, как в предыдущем случае, найдем точки стационарности системы и исследуем их устойчивость. Из условия стационарности $d\rho/dt = F(\rho) = 0$ получаем

$$\rho_{1,2}^* = \pm\sqrt{(\tilde{q}/\alpha_*)}. \quad (12)$$

После подстановки (11) и (12) в (6) находим уравнение динамики возмущения системы. В частности, для точки равновесия системы ρ_1^* имеем

$$\frac{d\Delta\rho}{dt} = \lambda\Delta\rho, \quad \lambda = -2\sqrt{\alpha_*\tilde{q}}. \quad (13)$$

Решение этого уравнения имеет вид $\Delta\rho = \exp(\lambda t)$. Поскольку для первой точки равновесия $\lambda < 0$, то возмущение плотности газа $\Delta\rho$, вызванное малыми отклонениями внешних параметров системы, экспоненциально уменьшается во времени. Следовательно, этот режим функционирования системы является устойчивым в точке ρ_1^* . Для второй точки равновесия $\lambda > 0$, и возмущение $\Delta\rho$ с течением времени экспоненциально возрастает, что свидетельствует о неустойчивости системы в точке ρ_2^* .

Бифуркационная диаграмма системы построена в соответствии с формулой (11) и представлена на рис. 3. Видно, что для каждого $\tilde{q} > 0$ имеют место две точки равновесия ρ_1^* и ρ_2^* , в которых $d\rho/dt = 0$. Для каждого $\tilde{q} < 0$ такие точки отсутствуют. При переходе параметра \tilde{q} через бифуркационное значение $\tilde{q} = 0$ справа налево устойчивое состояние равновесия внезапно исчезает, а при переходе слева направо появляются одно устойчивое и одно неустойчивое состояния равновесия. Значение $\tilde{q} = 0$ соответствует бифуркации рождения двух состояний равновесия с ростом \tilde{q} или их гибели при уменьшении \tilde{q} . Для газовой залежи физически реальной является только первая точка равновесия ρ_1^* .

Случай, когда на части добывающих скважин дебит устанавливается пропорционально абсолютно свободному дебиту, а на других скважинах – пропорционально плотности газа ρ . Динамическая модель эволюции газовой залежи в этом случае принимает вид*

$$\frac{d\rho}{dt} = F(\rho) = -\alpha_*\rho^2 - c_*\rho + \tilde{q}, \quad \alpha_* > 0, \quad c_* > 0, \quad \tilde{q} > 0. \quad (14)$$

Точки равновесия системы определяются из условия стационарности $F(\rho) = 0$

$$\rho_{1,2}^* = \frac{1}{2\alpha_*} \left(-c_* \pm \sqrt{c_*^2 + 4\alpha_*\tilde{q}} \right). \quad (15)$$

В первой из этих точек система устойчива, поскольку

$$F'(\rho_1^*) = -2\alpha_*\rho_1^* - c_* = -\sqrt{c_*^2 + 4\alpha_*\tilde{q}} < 0.$$

Во второй точке система неустойчива, поскольку

$$F'(\rho_2^*) = -2\alpha_*\rho_2^* - c_* = +\sqrt{c_*^2 + 4\alpha_*\tilde{q}} > 0.$$

Бифуркационные диаграммы для моделей (15) и (11) аналогичны.

Если темп закачки для части нагнетательных скважин устанавливается пропорционально абсолютно свободному дебиту, то динамическая модель такой системы принимает вид

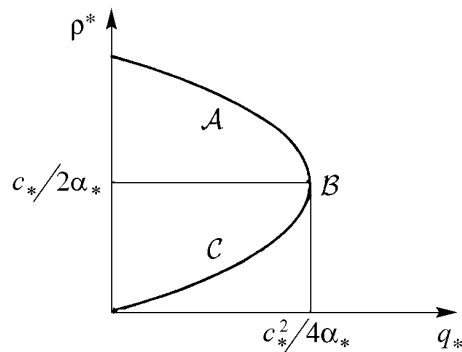


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма для уравнения (16)

$$\frac{d\rho}{dt} = F(\rho) = \alpha_*\rho^2 - c_*\rho + \tilde{q}, \quad (16)$$

$$\alpha_* > 0, \quad c_* > 0, \quad \tilde{q} > 0.$$

Находим точки равновесия системы из условия стационарности $F(\rho) = 0$ в виде

$$\rho_{1,2}^* = \frac{1}{2\alpha_*} \left(c_* \pm \sqrt{c_*^2 - 4\alpha_*\tilde{q}} \right). \quad (17)$$

В первой из этих точек система неустойчива, поскольку

$$F'(\rho_1^*) = 2\alpha_*\rho_1^* - c_* = +\sqrt{c_*^2 - 4\alpha_*\tilde{q}} > 0.$$

Во второй точке система устойчива, поскольку

$$F'(\rho_2^*) = 2\alpha_*\rho_2^* - c_* = -\sqrt{c_*^2 - 4\alpha_*\tilde{q}} < 0.$$

Бифуркационная диаграмма для динамической модели (16) представлена на рис. 4. Нетрудно видеть, что при $\tilde{q} > c_*^2/(4\alpha_*)$ стационарные состояния системы отсутствуют. При $\tilde{q} = c_*^2/(4\alpha_*)$ в точке \mathcal{B} имеется одно стационарное состояние, а при $\tilde{q} < c_*^2/(4\alpha_*)$ – два стационарных состояния. Кривая \mathcal{A} представляет собой неустойчивую, а \mathcal{C} – устойчивую ветвь функции $\rho^*(\tilde{q})$.

2. Двумерные нелинейные динамические модели газовой залежи

Рассмотрим теперь уравнения динамики газовой залежи, описывающие две взаимодействующие между собой зоны дренирования. Динамическая модель такой залежи имеет вид*

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = F(\bar{\rho}, \bar{\bar{\rho}}), \quad \frac{d\bar{\bar{\rho}}}{dt} = \Phi(\bar{\rho}, \bar{\bar{\rho}}). \quad (18)$$

Здесь $\bar{\rho}$ относится к 1-й зоне, а $\bar{\bar{\rho}}$ – к 2-й зоне дренирования.

Уравнения (18) выражают собой закон сохранения массы, в соответствии с которым изменение общей массы газа должно быть равно результирующей закачке и отбору газа из скважин. Входящие в уравнения (18) функции $F(\bar{\rho}, \bar{\bar{\rho}})$ и $\Phi(\bar{\rho}, \bar{\bar{\rho}})$ определяют зависимость темпов закачки и отбора газа от внешних параметров системы, а также от плотности газа в обеих зонах дренирования.

Функции $F(\bar{\rho}, \bar{\bar{\rho}})$ и $\Phi(\bar{\rho}, \bar{\bar{\rho}})$ в общем случае являются нелинейными и поэтому для исследования устойчивости системы в окрестности точки равновесия $(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)$ разложим их в ряд Тейлора вблизи этой точки

$$\begin{aligned} F(\bar{\rho}, \bar{\bar{\rho}}) &= F(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*) + \frac{\partial F(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\rho}} \Delta \bar{\rho} + \frac{\partial F(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\bar{\rho}}} \Delta \bar{\bar{\rho}}, \\ \Phi(\bar{\rho}, \bar{\bar{\rho}}) &= \Phi(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*) + \frac{\partial \Phi(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\rho}} \Delta \bar{\rho} + \frac{\partial \Phi(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\bar{\rho}}} \Delta \bar{\bar{\rho}}, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\partial F(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)/\partial \bar{\rho}$ есть значение производной $\partial F(\bar{\rho}, \bar{\bar{\rho}})/\partial \bar{\rho}$ в точке $(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)$ и т.д., $\Delta \bar{\rho} = \bar{\rho} - \bar{\rho}^*$, $\Delta \bar{\bar{\rho}} = \bar{\bar{\rho}} - \bar{\bar{\rho}}^*$. После подстановки (19) в (18) получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\rho}^*}{dt} + \frac{d\Delta \bar{\rho}}{dt} &= F(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*) + \frac{\partial F(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\rho}} \Delta \bar{\rho} + \frac{\partial F(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\bar{\rho}}} \Delta \bar{\bar{\rho}}, \\ \frac{d\bar{\bar{\rho}}^*}{dt} + \frac{d\Delta \bar{\bar{\rho}}}{dt} &= \Phi(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*) + \frac{\partial \Phi(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\rho}} \Delta \bar{\rho} + \frac{\partial \Phi(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\bar{\rho}}} \Delta \bar{\bar{\rho}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Поскольку уравнения (18) имеют силу и в точке стационарности (равновесия) системы, то из (20) получаем линейную систему для возмущения в окрестности точки равновесия

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta \bar{\rho}}{dt} &= \frac{\partial F(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\rho}} \Delta \bar{\rho} + \frac{\partial F(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\bar{\rho}}} \Delta \bar{\bar{\rho}}, \\ \frac{d\Delta \bar{\bar{\rho}}}{dt} &= \frac{\partial \Phi(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\rho}} \Delta \bar{\rho} + \frac{\partial \Phi(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\bar{\rho}}} \Delta \bar{\bar{\rho}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Решение системы уравнений (21) ищем в виде

$$\Delta \bar{\rho} = c_1 e^{\lambda t}, \quad \Delta \bar{\bar{\rho}} = c_2 e^{\lambda t}, \quad c_1, c_2, \lambda - \text{const.} \quad (22)$$

После подстановки (22) в (21) находим

$$\begin{aligned} c_1 \left(\frac{\partial F(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\rho}} - \lambda \right) + c_2 \frac{\partial F(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\bar{\rho}}} &= 0, \\ c_1 \frac{\partial \Phi(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\rho}} + c_2 \left(\frac{\partial \Phi(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\bar{\rho}}} - \lambda \right) &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Система уравнений (23) имеет тривиальное нулевое решение $c_1 = c_2 = 0$. Нетривиальное решение получаем, если определитель системы равен нулю, то есть

$$\left(\frac{\partial F(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\rho}} - \lambda \right) \left(\frac{\partial \Phi(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\bar{\rho}}} - \lambda \right) - \frac{\partial F(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\bar{\rho}}} \frac{\partial \Phi(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\rho}} = 0. \quad (24)$$

Из уравнения (24) получаем характеристическое уравнение для параметра λ

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \lambda \left(\frac{\partial F(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\rho}} + \frac{\partial \Phi(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\bar{\rho}}} \right) + \frac{\partial F(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\rho}} \frac{\partial \Phi(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\bar{\rho}}} - \\ - \frac{\partial F(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\bar{\rho}}} \frac{\partial \Phi(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\rho}} = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Нетрудно видеть, что устойчивость нелинейной динамической системы в точке равновесия полностью определяется параметром λ , который получается из линеаризованной системы уравнений (24). Так же, как и для линейных динамических систем, здесь имеются следующие варианты:

- если действительные части параметра $\lambda_{1,2}$ меньше нуля, то точка стационарности системы асимптотически устойчива;
- если хотя бы в одном из параметров $\lambda_{1,2}$ действительная часть больше нуля, то точка равновесия динамической системы неустойчива;
- если параметры $\lambda_{1,2}$ чисто мнимые, то точка равновесия нейтрально устойчива;
- если действительная часть одного из параметров $\lambda_{1,2}$ равна нулю, а другая отрицательна, то точка равновесия системы также нейтрально устойчива.

Уравнение (25) позволяет классифицировать точки равновесия нелинейной динамической системы в зависимости от параметров $\lambda_{1,2}$. Запишем для этого уравнение (25) в виде

$$\lambda^2 - A\lambda + B = 0,$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial F(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\rho}} + \frac{\partial \Phi(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\bar{\rho}}}, \\ B &= \frac{\partial F(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\rho}} \frac{\partial \Phi(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\bar{\rho}}} - \frac{\partial F(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\bar{\rho}}} \frac{\partial \Phi(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\rho}}. \end{aligned}$$

Корни этого уравнения имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(A \pm \sqrt{A^2 - 4B} \right).$$

В зависимости от параметров $\lambda_{1,2}$ различают следующие типы точек стационарности динамической системы.

1. Узел, если параметры $\lambda_{1,2}$ действительны и одного знака: $\lambda_{1,2} < 0$ – устойчивый узел, $\lambda_{1,2} > 0$ – неустойчивый узел.
2. Седло, если $\lambda_{1,2}$ действительные и разных знаков.
3. Фокус, если $\lambda_{1,2} = a \pm bi$: $a < 0$ – устойчивый фокус, $a > 0$ – неустойчивый фокус.

Использованный выше метод исследования устойчивости системы называется первым методом Ляпунова и основан на том, что локальные фазовые портреты нелинейной и линейной систем топологически эквивалентны в точке равновесия при линейном приближении функций $F(\bar{\rho}, \bar{\rho})$ и $\Phi(\bar{\rho}, \bar{\rho})$ в соответствии с уравнением (19).

Решающее значение при построении фазового портрета системы имеет конкретный вид функций $F(\bar{\rho}, \bar{\rho})$ и $\Phi(\bar{\rho}, \bar{\rho})$. При достаточной гладкости эти функции могут быть разложены в ряд Тейлора в окрестности произвольной точки ξ, η в виде

$$\begin{aligned}
f(\bar{\rho}, \bar{\rho}) &= f(\xi, \eta) + (\bar{\rho} - \xi) \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \bar{\rho}} + (\bar{\rho} - \eta) \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \bar{\rho}} + \\
&+ \frac{1}{2} \left[(\bar{\rho} - \xi)^2 \frac{\partial^2 f(\xi, \eta)}{\partial \bar{\rho}^2} + 2(\bar{\rho} - \xi)(\bar{\rho} - \eta) \frac{\partial^2 f(\xi, \eta)}{\partial \bar{\rho} \partial \bar{\rho}} + (\bar{\rho} - \eta)^2 \frac{\partial^2 f(\xi, \eta)}{\partial \bar{\rho}^2} \right] + \\
&+ \frac{1}{3 \cdot 2} \left[(\bar{\rho} - \xi)^3 \frac{\partial^3 f(\xi, \eta)}{\partial \bar{\rho}^3} + 3(\bar{\rho} - \xi)^2(\bar{\rho} - \eta) \frac{\partial^3 f(\xi, \eta)}{\partial \bar{\rho}^2 \partial \bar{\rho}} + 3(\bar{\rho} - \xi)(\bar{\rho} - \eta)^2 \frac{\partial^3 f(\xi, \eta)}{\partial \bar{\rho} \partial \bar{\rho}^2} + \right. \\
&\quad \left. + (\bar{\rho} - \eta)^3 \frac{\partial^3 f(\xi, \eta)}{\partial \bar{\rho}^3} \right] + \dots
\end{aligned} \tag{26}$$

В соответствии с этой формулой получим разложения функций $F(\bar{\rho}, \bar{\rho})$ и $\Phi(\bar{\rho}, \bar{\rho})$ в ряд Маклорена.

$$\begin{aligned}
F(\bar{\rho}, \bar{\rho}) &= a_{00} + a_{10}\bar{\rho} + a_{01}\bar{\rho} + a_{20}\bar{\rho}^2 + a_{11}\bar{\rho}\bar{\rho} + a_{30}\bar{\rho}^3 + a_{21}\bar{\rho}^2\bar{\rho} + \\
&\quad + a_{12}\bar{\rho}\bar{\rho}^2 + a_{03}\bar{\rho}^3 + \dots,
\end{aligned} \tag{27}$$

где

$$\begin{aligned}
a_{00} &= F(0, 0), \quad a_{10} = \frac{\partial F(0, 0)}{\partial \bar{\rho}}, \quad a_{01} = \frac{\partial F(0, 0)}{\partial \bar{\rho}}, \quad a_{20} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(0, 0)}{\partial \bar{\rho}^2}, \\
a_{11} &= \frac{\partial^2 F(0, 0)}{\partial \bar{\rho} \partial \bar{\rho}}, \quad a_{02} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(0, 0)}{\partial \bar{\rho}^2}, \quad a_{30} = \frac{1}{3 \cdot 2} \frac{\partial^3 F(0, 0)}{\partial \bar{\rho}^3}, \\
a_{21} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F(0, 0)}{\partial \bar{\rho}^2 \partial \bar{\rho}}, \quad a_{12} = \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F(0, 0)}{\partial \bar{\rho} \partial \bar{\rho}^2}, \quad a_{03} = \frac{1}{3 \cdot 2} \frac{\partial^3 F(0, 0)}{\partial \bar{\rho}^3}.
\end{aligned}$$

$$\Phi(\bar{\rho}, \bar{\rho}) = b_{00} + b_{10}\bar{\rho} + b_{01}\bar{\rho} + b_{20}\bar{\rho}^2 + b_{11}\bar{\rho}\bar{\rho} + b_{30}\bar{\rho}^3 + b_{21}\bar{\rho}^2\bar{\rho} + b_{12}\bar{\rho}\bar{\rho}^2 + b_{03}\bar{\rho}^3 + \dots, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} b_{00} &= \Phi(0, 0), & b_{10} &= \frac{\partial \Phi(0, 0)}{\partial \bar{\rho}}, & b_{01} &= \frac{\partial \Phi(0, 0)}{\partial \bar{\rho}}, & b_{20} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi(0, 0)}{\partial \bar{\rho}^2}, \\ b_{11} &= \frac{\partial^2 \Phi(0, 0)}{\partial \bar{\rho} \partial \bar{\rho}}, & b_{02} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi(0, 0)}{\partial \bar{\rho}^2}, & b_{30} &= \frac{1}{3 \cdot 2} \frac{\partial^3 \Phi(0, 0)}{\partial \bar{\rho}^3}, \\ b_{21} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \Phi(0, 0)}{\partial \bar{\rho}^2 \partial \bar{\rho}}, & b_{12} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \Phi(0, 0)}{\partial \bar{\rho} \partial \bar{\rho}^2}, & b_{03} &= \frac{1}{3 \cdot 2} \frac{\partial^3 \Phi(0, 0)}{\partial \bar{\rho}^3}. \end{aligned}$$

Все рассмотренные ранее динамические модели представляют собой частные случаи системы уравнений (18), (27), (28). Метод расчета точек бифуркации этой системы покажем на примере функций

$$F(\bar{\rho}, \bar{\rho}) = a_{00} + a_{10}\bar{\rho} + a_{11}\bar{\rho}\bar{\rho}, \quad (29)$$

$$\Phi(\bar{\rho}, \bar{\rho}) = b_{00} + b_{01}\bar{\rho} + b_{11}\bar{\rho}\bar{\rho}.$$

Уравнения (29) соответствуют случаю, когда в зонах дренирования одни скважины работают с постоянным дебитом или темпом закачки газа ($a_{00} = q_{*1}$, $b_{00} = q_{*2}$, $q_* = \text{const}$ – приведенный массовый темп отбора или закачки газа), а другие – с темпом отбора или закачки газа, пропорциональным пластовому давлению (плотности) газа ($a_{10}\bar{\rho}$, $b_{01}\bar{\rho}$); третьи члены ($a_{11}\bar{\rho}\bar{\rho}$, $b_{11}\bar{\rho}\bar{\rho}$) отражают влияние перетоков между зонами дренирования.

Как и прежде, точки $(\bar{\rho}^*, \bar{\rho}^*)$ равновесия (стационарности) системы определяем из уравнений $F(\bar{\rho}, \bar{\rho}) = 0$ и $\Phi(\bar{\rho}, \bar{\rho}) = 0$, то есть

$$q_{*1} + a_{10}\bar{\rho}^* + a_{11}\bar{\rho}^*\bar{\rho}^* = 0, \quad (30)$$

$$q_{*2} + b_{01}\bar{\rho}^* + b_{11}\bar{\rho}^*\bar{\rho}^* = 0. \quad (31)$$

Исключая из этих уравнений функцию $\bar{\rho}^*$, находим

$$\bar{\rho}^{*2} + A\bar{\rho}^* + B = 0, \quad (32)$$

где $A = 1/(a_{10}b_{11})(a_{10}b_{01} + b_{11}q_{*1} - a_{11}q_{*2})$, $B = (b_{01}q_{*1})/(a_{10}b_{11})$. После исключения произведения $\bar{\rho}^*\bar{\rho}^*$ из уравнений (30) и (31) получаем выражение для $\bar{\rho}^*$

$$\bar{\rho}^* = \frac{1}{b_{01}a_{11}} (b_{11}q_{*1} - a_{11}q_{*2} + b_{11}a_{10}\bar{\rho}^*). \quad (33)$$

Корни уравнения (32) определяют точки стационарности системы относительно функции $\bar{\rho}$

$$\bar{\rho}_{1,2}^* = \frac{1}{2} \left(-A \pm \sqrt{A^2 - 4B} \right). \quad (34)$$

После подстановки (34) в (33) находим точки стационарности для функции $\bar{\rho}$

$$\bar{\rho}_{1,2}^* = \frac{1}{b_{01}a_{11}} (b_{11}q_{*1} - a_{11}q_{*2} + b_{11}a_{10}\bar{\rho}_{1,2}^*). \quad (35)$$

Уравнения (34) и (35) определяют бифуркацию системы (29), то есть зависимость координат стационарной точки системы $(\bar{\rho}^*, \bar{p}^*)$ от q_{*1}, q_{*2} и других параметров системы. Нетрудно видеть, что при $A^2 < 4B$ точки равновесия отсутствуют. Точка $A^2 = 4B$ является точкой бифуркации, в которой возникают два состояния стационарности, устойчивое и неустойчивое. Анализ устойчивости в точках равновесия проводится аналогично предыдущему.

Заключение

Полученные выше результаты необходимо использовать при выборе систем разработки газовых месторождений и эксплуатации подземных хранилищ газа, поскольку они позволяют прогнозировать, а следовательно, и предотвращать нарушения устойчивости режимов разработки и эксплуатации промышленных объектов.

*Институт проблем нефти и газа РАН
Москва*

*Поступила в редакцию
После доработки*

*07.04.2007
06.09.2007*

BIFURCATIONS IN NONLINEAR DYNAMIC MODELS OF A GAS POOL AND AN UNDERGROUND GAS STORAGE FACILITY

V.A. Chernykh

The development of a gas pool and operation of an underground gas storage facility are studied as dynamic systems with use of concepts and terms of nonlinear dynamics. For the first time bifurcation diagrams have been constructed for nonlinear dynamic models of a gas pool and an underground gas storage facility. Stability conditions of the processes of the gas pool development and of the underground gas storage facility functioning have been studied.



Черных Виктор Александрович – родился в Воронеже (1937), окончил Куйбышевский индустриальный институт (1961). После окончания института работал в Татарском нефтяном научно-исследовательском институте (ТатНИИ, Бугульма), затем во Всесоюзном научно-исследовательском институте природных газов (ВНИИГАЗ, Москва), в настоящее время работает в Институте проблем нефти и газа РАН (Москва). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук во ВНИИГАЗе (1967) и доктора технических наук (2000) по специальности «Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений». Автор монографий: «Упругость и прочность цилиндрических тел» М.: Высшая школа, 1975. 526 с.; «Гидрогазодинамика горизонтальных газовых скважин» М.: ВНИИГАЗ, 2000. 189 с.; «Гидрогеомеханика нефтегазодобычи» М.: ВНИИГАЗ, 2001. 249 с.; «Нелинейная динамика газовой залежи» М.: ВНИИГАЗ, 2002. 203 с. Научные интересы: теория упругости, нелинейная динамика процессов разработки нефтяных и газовых месторождений, синергетика процессов добычи нефти и газа, фрактальная механика процессов фильтрации, приложения дробного исчисления к задачам разработки нефтяных и газовых месторождений. Опубликовал более 150 работ по направлениям указанным выше. E-mail: vict@gazsvyz.ru