



Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 6, 2007

УДК 530.182

ДИСКРЕТНЫЕ БРИЗЕРЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ МОНОАТОМНЫХ ЦЕПОЧКАХ

П.П. Гончаров, Г.С. Джелаухова, Г.М. Чечин

Проведено сравнительное исследование устойчивости симметричных и антисимметричных дискретных бризеров в моноатомной цепочке с потенциалом, представляющим собой однородную функцию четвертой степени. Показано, что изменения характера устойчивости этих двух динамических объектов (известных в литературе под названием мод Сиверса–Такено и Пейджа, соответственно) происходят при одном и том же значении силы межчастичного взаимодействия по отношению к силе локального взаимодействия частиц с узлами решетки. Предложен новый метод (метод «парной синхронизации») построения точных дискретных бризеров в нелинейных гамильтоновых решетках, имеющих ясный физический смысл. Техника его применения продемонстрирована на примере цепочки линейно связанных осцилляторов Дуффинга. Кратко обсуждается концепция квазibriзеров, возникающих при малых возмущениях точных бризерных решений.

Введение

Дискретные бризеры представляют собой локализованные в пространстве и периодические во времени колебания нелинейных однородных (без примесей) гамильтоновых решеток [1, 2]. Со времени их открытия в 1988 году [3] исследованию этих динамических объектов было посвящено огромное количество теоретических, вычислительных и экспериментальных работ (см., например, обзорные статьи [1, 2, 4, 5] и содержащиеся в них ссылки на оригинальные работы).

Принято считать, что дискретные бризеры могут играть существенную роль в динамических процессах, протекающих во многих физических и биофизических системах. В качестве примера можно сослаться на некоторые квазиодномерные кристаллы типа PtCl, антиферромагнетики, массивы контактов Джозефсона, волоконные световоды, различные микромеханические системы, биополимеры и т.д. Полные ссылки на соответствующие работы можно найти в [4, 6, 7].

Сама по себе возможность существования дискретных бризеров не является слишком очевидной. Действительно, в силу пространственной локализации, частицы, участвующие в бризерном колебании, имеют существенно *различные амплитуды*. С другой стороны, для нелинейной динамики типичным является то, что частицы, колеблющиеся с различными амплитудами, имеют *разные частоты* (подробное обсуждение этого вопроса имеется в работе [8]), в то время как, по определению, дискретный бризер является *периодическим* динамическим объектом¹. Тем не менее в ряде теоретических работ [9, 10] были даны строгие математические доказательства существования дискретных бризеров в нескольких достаточно широких классах динамических моделей. Более того, были развиты и специальные вычислительные схемы построения бризерных решений со сколь угодно высокой степенью точности [5, 11].

Тем не менее, существование локализованных в пространстве и в то же время периодических во времени решений является, с нашей точки зрения, весьма исключительным явлением [8]. Действительно, для построения таких решений в многомерном пространстве всех возможных начальных условий необходимо попасть *точно* на некоторое, чаще всего *одномерное*, многообразие, что не представляется возможным ни в одном физическом эксперименте.

В работе [8] нами был проанализирован ряд динамических объектов, обычно трактуемых в литературе как дискретные бризеры, и выяснено, что на самом деле различные частицы цепочки имеют при этом близкие, но все-таки *различные*, частоты колебаний, причем такое различие заведомо превышает возможные вычислительные ошибки. В связи с этим в [8] было введено понятие «квазибризеров» – локализованных в пространстве, но не строго периодических, динамических объектов. В этой же работе нами было исследовано существование и устойчивость бризеров и квазибризеров в цепочке типа K_4 , для которой можно получить ряд точных аналитических результатов. Однако в [8] был исследован лишь один из возможных видов дискретных бризеров («симметричный» бризер), который в литературе часто называют модой Сиверса–Такено. В настоящей работе для цепочки K_4 проведено исследование существования и устойчивости «антисимметричного» бризера (моды Пейджа). Получены диаграммы, из которых видна зависимость устойчивости бризеров обоих вышеуказанных типов от силы межчастичного взаимодействия по отношению к силе взаимодействия частиц с узлами решетки.

Дискретные бризеры на решетке с однородным потенциалом, каковой является цепочка K_4 -типа, представляют собой локализованные моды Розенберга [12]. В более общем случае, когда потенциал не является однородной функцией и моды Розенберга, вообще говоря, не существуют, *точные* дискретные бризеры все-таки могут существовать.

В настоящей работе нами развит достаточно общий метод численного построения бризерных решений с любой степенью точности, который существенным образом отличается от известных методов [5, 10, 11] и является, с нашей точки зрения, более простым и физически более прозрачным. В то же время этот метод проливает вполне определенный свет на физическую причину возможности существования дискретных бризеров. Этот вопрос будет рассмотрен в отдельной статье.

¹В ряде работ встречается более вольное толкование термина «дискретные бризеры». Этим термином иногда называют локализованные в пространстве динамические объекты, которые при детальном исследовании оказываются лишь приближенно периодическими [8].

1. Простейшие дискретные бризеры в цепочке типа K_4

1.1. Модель. Будем рассматривать *продольные* колебания в цепочке, состоящей из N одинаковых частиц (атомов), расположенных в состоянии равновесия на равных расстояниях друг от друга. Обозначим через $x_n(t)$ смещение n -ой частицы из своего равновесного положения в момент времени t .

Потенциальная энергия U цепочки типа K_4 определяется формулой

$$U(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{\alpha}{4} \sum_n x_n^4 + \frac{\beta}{4} \sum_n (x_n - x_{n-1})^4, \quad (1)$$

в силу чего соответствующие динамические уравнения $\ddot{x} = -\partial U/\partial x_n$ ($n = 1..N$) имеют следующий явный вид:

$$\ddot{x}_n + \alpha x_n^3 + \beta[(x_{n+1} - x_n)^3 - (x_n - x_{n-1})^3] = 0. \quad (2)$$

Не вдаваясь в обсуждение возможных физических реализаций рассматриваемой модели, заметим, что ее можно формально трактовать как механическую систему грузиков, связанных нелинейными пружинками² как с равноотстоящими друг от друга узлами некоторой одномерной решетки, так и со своими ближайшими соседями. Заметим, что на обсуждаемую модель (2) можно смотреть и как на систему нелинейных осцилляторов, связанных нелинейными потенциальными силами.

Разумеется, в зависимости от конкретной задачи, рассматриваемой нами, модели (2) можно придать и другой физической смысл. В дальнейшем мы будем рассматривать систему (2) (и аналогичную ей систему (20)) как некоторую абстрактную динамическую модель. Тем не менее, результаты вычислений удобно интерпретировать в терминах смещений $x_i(t)$ частиц некоторой «моноатомной» цепочки.

Потенциальная энергия (1) представляет собой однородную функцию 4-й степени, что и определяет название рассматриваемой нами цепочки. Первая сумма в правой части формулы (1) (перед ней стоит множитель α) описывает связь каждой частицы с тем узлом цепочки, в котором она находится в положении равновесия, а вторая сумма (с множителем β) описывает взаимодействие частиц со своими ближайшими соседями. В соответствии с принятой в зарубежной литературе терминологией, будем называть первую сумму *онсайтовой* (on-site) частью, а вторую – *интерсайтовой* (inter-site) частью потенциальной энергии³. Очевидно, что отношение $\tilde{\beta} = \beta/\alpha$ характеризует интенсивность интерсайтового взаимодействия по отношению к онсайтовому взаимодействию.

При $n = 1$ и $n = N$ в уравнениях (2) возникают «несуществующие» переменные $x_0(t)$ и $x_{N+1}(t)$, которые мы доопределяем с помощью периодических граничных условий

$$x_{N+1} = x_1, \quad x_0 = x_N.$$

Из формулы (2) очевидно, что в нашей модели учитывается взаимодействие каждой частицы лишь с двумя ее ближайшими соседями.

²Предполагается, что модуль упругой силы F пропорционален третьей степени деформации пружины Δx : $[F(\Delta x) \sim (\Delta x)^3]$.

³В отечественной литературе в первом случае обычно говорят об энергии отдельных осцилляторов, а во втором случае – об энергии взаимодействия между ними.

Разные аспекты бризерной динамики в модели (2) при $\alpha = 0$ рассматривались в работах [10, 11, 13, 14]. В работе [8] нами была получена практически точная форма «симметричного» (см. далее) дискретного бризера и изучена зависимость его устойчивости от силы интерсайтового взаимодействия, а также проведен анализ поведения *квазибризеров* – динамических объектов близких к точным дискретным бризерам. В настоящей работе мы будем использовать развитые в [8] методы для анализа в цепочке K_4 бризеров и квазибризеров другого типа.

1.2. Нелинейные нормальные моды Розенберга. Мы будем строить решения системы (2), используя концепцию нелинейных нормальных мод Розенберга (ННМ)⁴, введенную в [12]. ННМ представляют собой такие периодические режимы N -частичной нелинейной механической системы, при которых смещения $x_n(t)$ всех ее частиц из своих положений равновесия в любой момент времени пропорциональны (с постоянными коэффициентами k_n) смещению одной произвольно выбранной (например, первой) частицы

$$x_n(t) = k_n x_1(t), \quad n = 1..N. \quad (3)$$

Подставляя соотношения (3) в динамические уравнения (2), получим набор дифференциальных уравнений относительно одной и той же «ведущей» переменной $x_1(t)$. Требуя, чтобы все эти уравнения были эквивалентны друг другу, получим одно дифференциальное уравнение для переменной $x_1(t)$, которое будем называть «ведущим» уравнением, и систему $N - 1$ нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов пропорциональности k_n ($n = 2..N$)

$$\alpha k_n^3 + \beta[(k_{n+1} - k_n)^3 - (k_n - k_{n-1})^3] = k_n \{ \alpha + \beta[(k_2 - 1)^3 - (1 - k_N)^3] \}. \quad (4)$$

Здесь учтено, что $k_1 = 1$ в силу соотношения (3). Ведущее дифференциальное уравнение при этом имеет вид

$$\ddot{x}_1 + x_1^3 \{ \alpha + \beta[(k_2 - 1)^3 - (1 - k_N)^3] \} = 0. \quad (5)$$

Возможность существования в произвольных нелинейных механических системах динамических режимов, описываемых нелинейными нормальными модами, отнюдь не очевидна. Для большинства таких систем ННМ вообще не существуют, а если они есть, то их число может быть как меньше, так и больше общего числа степеней свободы рассматриваемой системы. Розенбергом были выделены некоторые классы механических систем, для которых ННМ заведомо существуют. Наиболее важным является класс гамильтоновых систем, у которых потенциальная энергия представляет собой *однородную* функцию всех своих аргументов (рассматриваемая нами цепочка типа K_4 относится именно к этому типу систем). Подробное изложение теории мод Розенберга можно найти в книгах [15, 16].

Среди ННМ в нелинейных гамильтоновых решетках могут быть как делокализованные, так и локализованные в пространстве моды. По определению, последние есть ничто иное, как дискретные бризеры. Обратное утверждение не верно: дискретные бризеры могут существовать и в тех случаях, когда нелинейных нормальных мод не существует.

⁴Сам Розенберг называет их «similar nonlinear normal modes».

Заметим в заключение, что «буши мод» введенные в [17] для систем с дискретной симметрией и исследованные в целом ряде последующих работ (см., например, [18–20]) определяют *квазипериодические* динамические режимы, поскольку для m -мерного буша мы имеем m ведущих дифференциальных уравнений⁵. В этом смысле *одномерные буши* представляют собой симметрично обусловленные нелинейные нормальные моды Розенберга.

1.3. Пространственные профили дискретных бризеров. В силу формулы (3) бризерное колебание можно представить в форме

$$\mathbf{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_N(t)\} = \{k_1, k_2, k_3, \dots, k_N\} \cdot x_1(t). \quad (6)$$

Вектор $\mathbf{k} = \{k_1, k_2, k_3, \dots, k_N\}$ будем называть пространственным профилем данного бризера. Временная зависимость бризерного решения определяется ведущим уравнением (5), которое можно переписать в виде

$$\ddot{x}_1 + p^2 x_1^3 = 0, \quad (7)$$

где $p = p(\mathbf{k})$. Предполагая, что амплитуда колебаний первой частицы есть A_1 (будем называть ее амплитудой бризера), получим при начальных условиях

$$x_1(0) = A_1, \quad \dot{x}_1(0) = 0 \quad (8)$$

решение этого уравнения, выраженное через эллиптическую функцию Якоби $\operatorname{cn}(\tau, 1/\sqrt{2})$,

$$x_1(t) = A_1 \operatorname{cn}\left(\omega t, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad (9)$$

где частота колебаний ω является линейной функцией амплитуды бризера A_1 [8, 13]

$$\omega = pA_1. \quad (10)$$

Система уравнений (4) имеет много разных решений, среди которых есть как делокализованные, так и локализованные, которые и являются дискретными бризерами.

В работе [8] нами были детально изучены «симметричные» бризеры, с пространственным профилем вида $\mathbf{k} = \{\dots, \gamma_3, \gamma_2, \gamma_1, 1, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots\}$, где γ_i суть некоторые постоянные величины (в качестве ведущей здесь выбрана центральная частица бризера). Заметим, что говоря о симметричности этого бризера относительно своего центра, мы имеем в виду, что смещения частиц отложены не вдоль цепочки, а в перпендикулярном направлении (рис. 1). В настоящей работе будут исследованы «антисимметричные» бризеры с профилем вида $\mathbf{k} = \{\dots, -\gamma_3, -\gamma_2, -\gamma_1, -1, 1, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots\}$ и будет проведен сравнительный анализ устойчивости симметричных и антисимметричных бризеров по отношению к силе интерсайтового взаимодействия. Напомним,

⁵Буши мод суть инвариантные многообразия исходной динамической системы, разложенные по базисным векторам неприводимых представлений группы ее симметрии. Теория этих динамических объектов подробно обсуждается в работе [18] для общего случая и в работах [19, 21] для цепочек Ферми–Пасты–Улама.

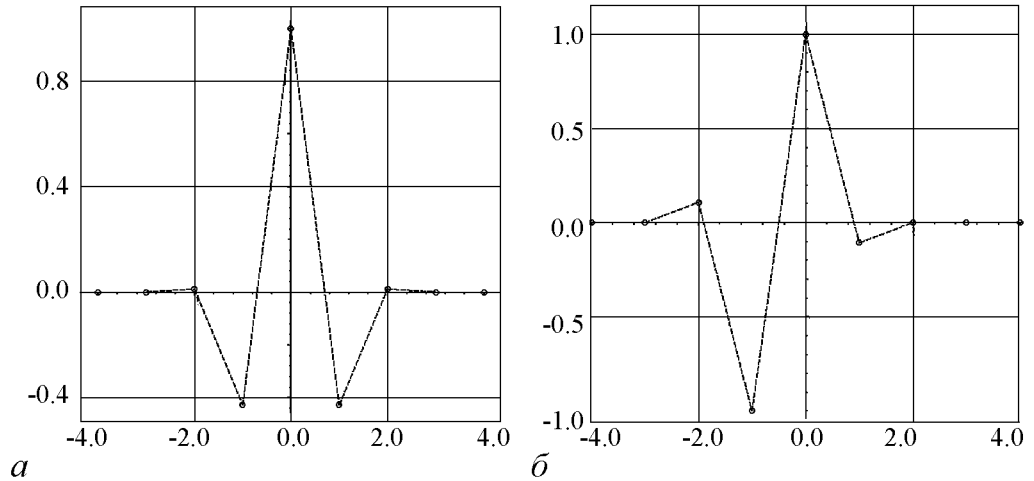


Рис. 1. Пространственные профили бризеров: симметричного (а) и антисимметричного (б)

что бризеры первого типа часто называют модами Сиверса–Такено, а бризеры второго типа – модами Пейджа. Заметим, что среди решений системы (4) можно найти и много других («мультибризерных») решений, однако, вышеуказанные бризеры являются наиболее простыми и именно они чаще всего рассматриваются в литературе по дискретным бризерам.

Поскольку система уравнений (4) является алгебраической, ее решения могут быть получены с высокой степенью точности с помощью различных итерационных методов. Мы использовали для ее решения стандартные возможности математического пакета MAPLE. При этом находились профили для серии цепочек с последовательным увеличением числа образующих их частиц. Рассмотрим эту процедуру в случае построения симметричного бризера для цепочки K_4 без онсайтовой части потенциала ($\alpha = 0$). Начальное приближение для построения такого бризера можно получить, исходя из рассмотрения цепочки из $N = 3$ частиц (с периодическими граничными условиями). Тогда вектор \mathbf{k} , определяющий бризер, имеет вид $\mathbf{k}_3 = (-1/2, 1, -1/2)$, причем в рассматриваемом нами сейчас случае ($\alpha = 0$) он задает точный профиль. Этот вектор далее используется в качестве начального приближения для построения профиля \mathbf{k}_5 цепочки из $N = 5$ частиц. Полученный вектор \mathbf{k}_5 служит начальным приближением при построении \mathbf{k}_7 в случае цепочки из $N = 7$ частиц и т.д. Совершенно аналогично реализуется процедура построения антисимметричного бризера для цепочки с произвольным N , исходя из начального профиля $\mathbf{k}_4 = (0, -1, 1, 0)$ для цепочки из 4 частиц.

Заметим, что наши результаты для случая $\alpha = 0$ (отсутствие онсайтового потенциала) полностью согласуются с формой дискретных бризеров, полученных другим методом (но также с очень высокой степенью точности) в работе [11].

Описанным выше методом можно получить пространственные профили дискретных бризеров и в случае произвольных значений α и β в формуле (1). В табл. 1, 2 приведены результаты, соответствующие случаю $\alpha = 1$, $\beta = 0.3$.

Отметим два существенных момента, связанные с формой исследуемых бризеров.

Таблица 1

Пространственные профили для симметричных бризеров
в цепочке K_4 с $N = 5, 9, 15$ частицами при $\tilde{\beta} = 0.3$

	$N = 5$	$N = 9$	$N = 15$
k_{-7}			*
k_{-6}			*
k_{-5}			*
k_{-4}		*	*
k_{-3}		$-0.6040174714 \cdot 10^{-8}$	$-0.6040174714 \cdot 10^{-8}$
k_{-2}	0.0035993414	0.0035993477	0.0035993477
k_{-1}	-0.2992883116	-0.2992883120	-0.2992883120
k_0	1	1	1
k_1	-0.2992883116	-0.2992883120	-0.2992883120
k_2	0.0035993414	0.0035993477	0.0035993477
k_3		$-0.6040174714 \cdot 10^{-8}$	$-0.6040174714 \cdot 10^{-8}$
k_4		*	*
k_5			*
k_6			*
k_7			*

Таблица 2

Пространственные профили для антисимметричных бризеров
в цепочке K_4 с $N = 4, 6, 10$ частицами при $\alpha = 1, \beta = 0.3$

	$N = 4$	$N = 6$	$N = 10$
k_{-5}			*
k_{-4}			$0.1150827549 \cdot 10^{-10}$
k_{-3}		$-0.4795767441 \cdot 10^{-3}$	$-0.4795766628 \cdot 10^{-3}$
k_{-2}	0.1715728752	0.1657879024	0.1657879024
k_{-1}	-1	-1	-1
k_0	1	1	1
k_1	-0.1715728752	-0.1657879024	-0.1657879024
k_2		$0.4795767441 \cdot 10^{-3}$	$0.4795766628 \cdot 10^{-3}$
k_3			$-0.1150827549 \cdot 10^{-10}$
k_4			*

Во-первых, полученные бризерные решения оказываются столь *сильно локализованными*, что уже на расстоянии 4 узлов решетки от центра бризера амплитуды колебаний частиц становятся ничтожно малыми (они не превышают 10^{-20} и в табл. 1, 2 обозначены звездочками). В работах [10, 14] столь сильная локализация называется «суперэкспоненциальной».

Во-вторых, сравнивая симметричные бризерные профили из табл. 1, построенные для цепочек с $N = 9$ и $N = 15$ частицами, приходим к выводу, что дальнейшее увеличение количества частиц цепочки практически никак не сказывается на профиле соответствующего бризерного решения. В результате профиль, полученный для $N = 9$ (а для большинства разумных целей даже для $N = 7$) можно считать практически точным профилем и для *бесконечной цепочки* ($N = \infty$). Аналогичный вывод можно сделать и для случая антисимметричного бризера (см. табл. 2).

1.4. Устойчивость дискретных бризеров в цепочке K_4 . В соответствии со стандартным рецептом линейного анализа устойчивости периодического динамического режима, каковым в нашем случае является точное бризерное решение

$$\mathbf{x}_b(t) = \{k_1, k_2, k_3, \dots, k_N\} \cdot x_1(t), \quad (11)$$

введем бесконечно малое его возмущение

$$\boldsymbol{\delta}(t) = \{\delta_1(t), \delta_2(t), \delta_3(t), \dots, \delta_N(t)\} \quad (12)$$

и положим $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_b(t) + \boldsymbol{\delta}(t)$.

Подставляя это выражение для вектора $\mathbf{x}(t)$ в исходную систему нелинейных динамических уравнений (2) и линеаризуя ее по возмущению $\boldsymbol{\delta}(t)$, получим систему линейных дифференциальных уравнений с периодически зависящими от времени коэффициентами

$$\ddot{\boldsymbol{\delta}}(t) = -3x_1^2(t)B\boldsymbol{\delta}(t), \quad (13)$$

где B есть некоторая *симметричная* $N \times N$ матрица. Явный вид матриц B для цепочек K_4 , состоящих из $N = 3$ и $N = 5$ частиц, в случае исследования устойчивости симметричного бризера приведен в работе [8].

Специфическая структура системы (13) позволяет ее *полностью расщепить*, то есть разбить на N независимых друг от друга уравнений, если с помощью соответствующего ортогонального преобразования S привести симметричную матрицу B к диагональному виду. Действительно, положив $\boldsymbol{\delta}(t) = S\tilde{\boldsymbol{\delta}}(t)$, где матрица S не зависит от времени, получим для компонент $\tilde{\delta}_j(t)$ нового инфинитезимального вектора $\tilde{\boldsymbol{\delta}}(t)$ уравнения

$$\ddot{\tilde{\delta}}_j + 3x_1^2(t)\lambda_j\tilde{\delta}_j = 0, \quad j = 1..N. \quad (14)$$

Здесь λ_j суть собственные значения матрицы B .

Заметим, что осуществить процедуру полного расщепления линеаризованной вблизи некоторого периодического режима системы на независимые уравнения в общем случае невозможно. Тем не менее, в ряде случаев можно добиться весьма существенного ее упрощения, используя теорию неприводимых представлений групп симметрии [20].

Уравнения (14) можно представить в виде⁶ [8]

$$z_j'' + \Lambda_j x^2(\tau) \cdot z_j(\tau) = 0, \quad (15)$$

где $z_j(\tau) = \tilde{\delta}_j(\tau/(pA_1))$, $x(\tau) = \text{cn}(\tau, 1/\sqrt{2})$, $\Lambda_j = 3\lambda_j/p^2$, $\tau = pA_1 t$ (величина A_1 определяется начальным условием (8)).

Таким образом, исследование устойчивости наших бризерных решений сводится к исследованию устойчивости *нулевого решения* некоторого «базового» уравнения

$$z'' + \Lambda \text{cn}^2\left(\tau, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) z(\tau) = 0 \quad (16)$$

⁶Здесь и далее штрихом обозначено дифференцирование по новому временному аргументу τ , в отличие от точки, соответствующей дифференцированию по t .

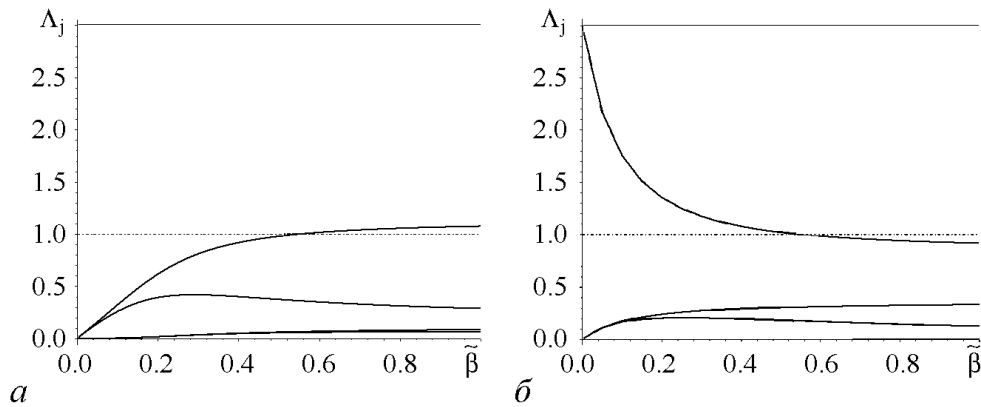


Рис. 2. Зависимость значений параметра Λ от относительной силы интерсайтового взаимодействия ($\tilde{\beta}$) для симметричного (а) и антисимметричного бримеров (б) в цепочке K_4

при разных значениях параметра Λ , которые непосредственным образом связаны с собственными значениями матрицы B линеаризованной системы (13).

Как показано в работе [8], для решений уравнения (16) можно получить некоторые *строгие* математические результаты, поскольку оно представляет собой уравнение Ляме в форме Якоби [22]. Значения $\Lambda = (1/2)n(n + 1)$, где n – натуральное число, отвечают границам, разделяющим области устойчивого и неустойчивого движений. На этих границах решения уравнений (16) являются периодическими функциями Ляме. Более того, оказывается, что при

$$0 < \Lambda \leq 1 \text{ и } 3 \leq \Lambda \leq 6 \quad (17)$$

движение является устойчивым, а при

$$1 < \Lambda < 3 \text{ и } 6 < \Lambda < 10, \quad (18)$$

наоборот – неустойчивым. Эти свойства уравнения Ляме (16) позволяют достаточно просто судить об устойчивости бримерных решений по собственным значениям λ_j матрицы B линеаризованной системы уравнений (13), поскольку, каждому значению λ_j отвечает вполне определенное значение параметра Λ из уравнения (16).

С другой стороны, элементы матрицы B существенным образом зависят от параметра $\tilde{\beta} = \beta/\alpha$, который определяет относительную силу интерсайтовой части потенциальной энергии по отношению к ее онсайтовой части (см. формулу (1)). Поэтому собственные значения $\lambda_j = \lambda_j(\tilde{\beta})$ матрицы B являются функциями параметра $\tilde{\beta}$ и их приходится определять каким-либо численным методом⁷ для каждого значения $\tilde{\beta}$.

В табл. 3 приведены значения $\Lambda_j(\tilde{\beta})$ при $\tilde{\beta} = 0.3$ для цепочек типа K_4 с различным количеством частиц для случая рассматриваемых нами *антисимметричных* бримеров, профили которых определяются данными из табл. 2. Эта таблица соответствует табл. VIII из работы [8], где приведены аналогичные данные для *симметричных* бримеров.

На рис. 2 показаны графики функций $\Lambda_j(\tilde{\beta})$ для симметричного и антисимметричного бримеров. Все $\Lambda_j(\tilde{\beta})$, соответствующие собственным значениям $\lambda_j(\tilde{\beta})$

⁷Мы использовали для этого стандартные процедуры пакета MAPLE.

Таблица 3

Значения параметра Λ из уравнения (16) для собственных значений λ_j матрицы B в случае антисимметричного бризера для цепочки K_4 с различным числом частиц N при $\tilde{\beta} = 0.3$

$N = 4$	$N = 6$
$\Lambda_1 = 3$	$\Lambda_1 = 3$
$\Lambda_2 = 1.174380299$	$\Lambda_2 = 1.174158240$
$\Lambda_3 = 0.2903225809$	$\Lambda_3 = 0.2706091431$
$\Lambda_4 = 0.2032288097$	$\Lambda_4 = 0.2054306666$
	$\Lambda_5 = 0.2705947721 \cdot 10^{-2}$
	$\Lambda_6 = 0.2699701623 \cdot 10^{-2}$
$N = 8$	$N = 9$
$\Lambda_1 = 3$	$\Lambda_1 = 3$
$\Lambda_2 = 1.174158240$	$\Lambda_2 = 1.174158240$
$\Lambda_3 = 0.2706091431$	$\Lambda_3 = 0.2706091431$
$\Lambda_4 = 0.2054306666$	$\Lambda_4 = 0.2054306666$
$\Lambda_5 = 0.2705931835 \cdot 10^{-2}$	$\Lambda_5 = 0.2705931835 \cdot 10^{-2}$
$\Lambda_6 = 0.2699703891 \cdot 10^{-2}$	$\Lambda_6 = 0.2699703891 \cdot 10^{-2}$
$\Lambda_7 = 0.2269482819 \cdot 10^{-8}$	$\Lambda_7 = 0.2269482817 \cdot 10^{-8}$
$\Lambda_8 = 0.2269482814 \cdot 10^{-8}$	$\Lambda_8 = 0.2269482782 \cdot 10^{-8}$
	$\Lambda_9 \sim 10^{-26}$
	$\Lambda_{10} \sim 10^{-26}$

матрицы B , для всех возможных N находятся в интервале $0 < \Lambda_j(\tilde{\beta}) \leq 3$. Согласно (17)-(18), этот интервал состоит из первой зоны устойчивости уравнения Ляме ($0 < \Lambda \leq 1$) и первой зоны неустойчивости ($1 < \Lambda < 3$).

Итак, устойчивость рассматриваемых нами дискретных бризеров зависит от попадания параметров $\Lambda_j(\tilde{\beta})$, которые, в свою очередь, определяются собственными значениями $\lambda_j(\tilde{\beta})$ матрицы B линеаризованной системы (13), в те или иные области устойчивого движения базового уравнения (16). Рассмотрим в связи с этим табл. 3. Из приведенных в ней данных видно, что одно значение параметра Λ , а именно, $\Lambda_1 = 3$, при любом числе частиц в цепочке попадает *точно* на границу между первой зоной неустойчивости и второй зоной устойчивости. Этому значению Λ_1 отвечает периодическое решение, которому соответствует собственный вектор V_1 матрицы B , пропорциональный *самому бризерному профилю*. Это значит, что инфинитезимальное возмущение, пропорциональное V_1 , может только слегка изменить (увеличить или уменьшить) амплитуду рассматриваемого бризера, но никак не связано с проблемой его устойчивости. Иными словами, устойчивость дискретного бризера зависит только от возмущений в трансверсальном к вектору V_1 подпространстве всех возможных смещений частиц.

Далее, все значения параметра Λ (см. табл. 3) оказываются положительными величинами, и при увеличении числа частиц N в цепочке первые собственные значения λ_j остаются практически неизменными, но к ним лишь добавляются положительные собственные значения все более маленькой величины.

Для *симметричного* бризера на рис. 2, *a* изображены значения параметра Λ для всех собственных значений $\lambda_j(\tilde{\beta})$ матрицы B , которые имеют сколько-нибудь существенные величины ($\Lambda_2 \div \Lambda_5$), как функции параметра $\tilde{\beta}$ относительной силы

интерсайтового взаимодействия. Из этого рисунка видно, что *только одно* значение параметра Λ , именно, Λ_2 , имеет тенденцию к росту при увеличении $\tilde{\beta}$, причем, оно достигает границы первой зоны устойчивости ($\Lambda = 1$) при $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}_c = 0.554\dots$. Выход $\Lambda_2(\tilde{\beta})$ в зону неустойчивого движения при $\tilde{\beta} > \tilde{\beta}_c$ означает *потерю устойчивости* рассматриваемого бризера.

На рис. 2, б показано поведение $\Lambda_j(\tilde{\beta})$ для *антисимметричного* бризера в зависимости от параметра $\tilde{\beta}$. Сравнение рис. 2, а и 2, б выявляет очень интересную закономерность. Действительно, если симметричный бризер был *устойчивым* при малых значениях $\tilde{\beta}$, то антисимметричный бризер, наоборот, является при этом *неустойчивым*, поскольку для него параметр Λ_2 вплоть до того же самого критического значения $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}_c = 0.554\dots$ лежит в первой зоне неустойчивости ($1 < \Lambda < 3$) базового уравнения (все остальные значения Λ_j лежат в первой зоне устойчивости). При $\tilde{\beta} > \tilde{\beta}_c$ антисимметричный бризер становится устойчивым, в то время как симметричный бризер свою устойчивость теряет. Наиболее интригующим является тот факт, что происходит это явление *изменения характера устойчивости* для обоих бризеров *при одном и том же* значении параметра $\tilde{\beta}$, именно, при $\tilde{\beta}_c = 0.554\dots$

Таким образом, симметричный бризер является устойчивым при малых значениях параметра $\tilde{\beta}$, то есть в случае малости интерсайтового взаимодействия по отношению к онсайтовому, в то время как для антисимметричного бризера дело обстоит как раз наоборот – он является устойчивым динамическим объектом лишь в случае, если интерсайтовое взаимодействие больше онсайтового (точнее, при условии $\tilde{\beta} > \tilde{\beta}_c = 0.554\dots$).

2. Дискретные бризеры для других динамических моделей

2.1. Дискретные бризеры и нелинейные нормальные моды. При рассмотрении цепочки K_4 мы имеем дело с дискретными бризерами, которые представляют собой моды Розенберга (6). Динамика каждой частицы описывается *одной и той же* временной функцией $\mu(t) = x_1(t)$ и, стало быть, все они имеют одинаковые частоты колебаний. Очевидно, такой вид бризера не является самым общим. Действительно, если рассматривать бризер как периодический во времени динамический объект, то вектор $\mathbf{x}(t)$, определяющий колебания всех частиц цепочки, принимает, в отличие от (6), вид

$$\mathbf{x}(t) = \{k_1\mu_1(t), k_2\mu_2(t), \dots, k_N\mu_N(t)\}, \quad (19)$$

где все функции $\mu_i(t)$ могут быть *разными*, но при этом они должны иметь *равные* или *соразмерные* периоды.

В случае решеток с *однородным* потенциалом любой степени дискретные бризеры в форме нелинейных нормальных мод, для которых $\mu_1(t) = \mu_2(t) = \dots = \mu_N(t) = \mu(t)$, заведомо существуют в силу теории Розенберга [12]. Для решеток с потенциалом более общего вида существование мод Розенберга (по крайней мере, локализованных) обычно оказывается невозможным. Тем не менее, точные бризерные решения могут существовать и в этом случае. Строгие математические доказательства этого факта для случая слабо связанных нелинейных осцилляторов можно найти в работах [9, 10]. Эти доказательства, однако, носят довольно формальный

характер и не проливают свет на вопрос о том, как может реализоваться бризерное решение, при котором все частицы должны колебаться с одинаковой частотой, несмотря на то, что амплитуды этих колебаний существенно различны в силу пространственной локализации бризера.

Как уже отмечалось во введении, существуют и вычислительные схемы для построения бризерных решений с высокой степенью точности [5, 10, 11]. С нашей точки зрения, эти схемы не являются достаточно простыми и наглядными, в силу чего в настоящей работе предлагается некоторый, как нам представляется, более простой метод построения дискретных бризеров типа (19). Более того, предлагаемый метод приводит к очень прозрачной *физической интерпретации* возможности существования дискретных бризеров как периодических динамических объектов, несмотря на их пространственную локализацию (этот вопрос будет рассмотрен в отдельной публикации). Ниже излагается основная идея вышеупомянутого метода построения дискретных бризеров и приводятся примеры его применения.

Будем по-прежнему рассматривать моноатомные цепочки и для простоты изложения ограничимся построением только *моночастотных* бризеров, понимая под этим термином такие локализованные в пространстве динамические объекты, все частицы которых совершают колебания с *одинаковой частотой*. Таким образом, все временные функции $\mu_j(t)$ ($j = 1..N$) в формуле (19) имеют *одинаковые периоды*.

Начнем с демонстрации готового результата для цепочки линейно связанных друг с другом жестких осцилляторов Дуффинга (связь предполагается диффузионной). Динамические уравнения для такой механической модели имеют вид

$$\ddot{x}_i + x_i + x_i^3 = \gamma(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}), \quad i = 1..N. \quad (20)$$

Как и ранее, предполагается наличие периодических граничных условий

$$x_{N+1} = x_1, \quad x_0 = x_N. \quad (21)$$

Постоянная γ в уравнениях (20) определяет величину связи между соседними осцилляторами.

Как и в случае модели (2), можно считать, что уравнения (20) описывают динамику системы одинаковых грузиков (частиц), связанных друг с другом и с узлами некоторой одномерной решетки нелинейными пружинами. Получаемые решения будем трактовать именно в терминах смещений частиц такой «моноатомной» цепочки.

На рис. 3, *а* изображено полученное бризерное решение для цепочки из $N = 9$ частиц при $\gamma = 0.3$. Из этого рисунка видна временная зависимость отклонений $x_i(t)$ нескольких центральных частиц симметричного бризера, амплитуды которых имеют существенную величину. Поскольку эти амплитуды экспоненциально убывают по мере удаления частицы от центра бризера и не все $x_i(t)$ видны на рис. 3, *а*, на рис. 3, *б* приводим в логарифмическом масштабе для симметричных бризеров зависимость амплитуд колебаний A_i отдельных частиц цепочки от номера частицы i при нескольких значениях параметра γ . Из этих рисунков хорошо видна одинаковость периодов колебаний всех частиц цепочки и пространственная локализация бризера, определяемая быстрым убыванием амплитуд колебаний периферийных частиц.

Рассмотрим теперь метод построения моночастотных бризеров для нелинейных цепочек с произвольным видом потенциальной энергии.

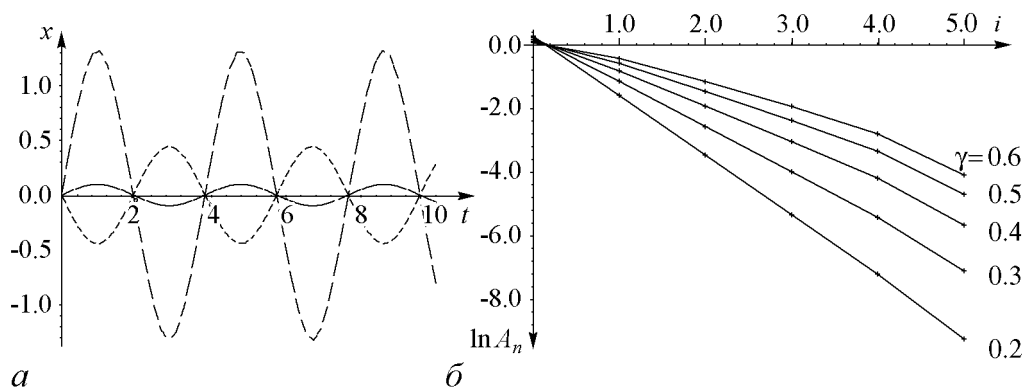


Рис. 3. Дискретный бризер для модели (20)–(21): *a* – временная эволюция бризера при $\gamma = 0.3$; *b* – зависимость амплитуды колебаний от номера частицы

В большинстве работ по численному моделированию дискретный бризер определяют заданием его профиля в начальный момент времени при нулевом значении кинетической энергии, то есть решают задачу Коши вида $x_i(0) = k_i$, $\dot{x}_i(0) = 0$, $i = 1..N$. Заметим, что мы поступали именно так, обсуждая процедуру построения нелинейных нормальных мод для цепочки K_4 . Однако далее будем рассматривать другую задачу Коши, полагая

$$x_i(0) = 0, \quad \dot{x}_i(0) = \alpha_i, \quad i = 1..N, \quad (22)$$

где α_i – начальные скорости частиц цепочки. Таким образом, предполагаем, что в начальный момент времени все частицы цепочки находятся в своих положениях равновесия, но им сообщаются скорости α_i , которые и подлежат определению из условия возникновения при этом некоторого моночастотного бризера. Из моночастотности бризерного решения следует, что все частицы цепочки имеют одинаковый период колебаний T и, следовательно, при $t = T$ выполняются условия

$$x_i(T) = x_i(0) = 0, \quad i = 1..N, \quad (23)$$

то есть снова все частицы должны одновременно проходить через свои положения равновесия.

Проиллюстрируем наш метод на примере построения симметричного бризерного решения для системы (20), предполагая, что центр бризера приходится на первую частицу ($n = 1$).

Выбрав некоторое «разумное» значение параметра α_1 , который определяет начальную скорость первой частицы $\dot{x}_1(0) = \alpha_1$, и полагая скорости всех других частиц равными нулю $\dot{x}_i(0) = 0$ при $i \neq 1$, построим решение системы (20) вплоть до того момента времени t , при котором вырисовывается, по крайней мере, один полный период функции $x_1(t)$. В результате получим картину типа изображенной на рис. 4, *a*, где приведены графики функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$, соответствующие колебаниям первой и второй частиц бризера⁸.

⁸На самом деле, двум ближайшим к центру симметричного бризера частицам.

Варьируя начальную скорость $\dot{x}_2(0) = \alpha_2$ второй частицы, стремимся *синхронизировать* ее движение с движением первой частицы, то есть стремимся к *совпадению периодов* их колебаний, не обращая пока что внимания на периоды колебаний других частиц цепочки. При этом требуем, чтобы $|\alpha_2| < |\alpha_1|$ (или даже $|\alpha_2| \ll |\alpha_1|$), поскольку амплитуды колебаний частиц по мере удаления от центра бризера должны *убывать*, что является необходимым условием для пространственной локализации искомого решения. Разумеется, при изменении α_2 несколько изменятся и период колебаний первой частицы, а стало быть, и точка пересечения графика $x_1(t)$ с осью абсцисс. Тем не менее, при достаточно малой константе связи γ в уравнениях (20) можно ожидать, что, в силу пространственной локализации бризера ($|x_1(t)| > |x_2(t)|$), «обратное» влияние переменной $x_2(t)$ на переменную $x_1(t)$ будет меньше, чем «прямое» воздействие $x_1(t)$ на $x_2(t)$. В результате оказывается возможным создать некоторую сходящуюся *итерационную* процедуру синхронизации движения двух первых частиц бризера, которую будем называть $S[1, 2]$ процедурой. Она может быть построена на основе, например, метода дихотомии для совмещения ближайших к $t = 0$ точек пересечения функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$ с осью абсцисс (см. точки A и B на рис. 4, *a*). Сами же эти точки пересечения можно находить методом касательных Ньютона или любыми другими известными численными методами. На каждом итерационном цикле процедуры $S[1, 2]$ приходится численно решать (например, методом Рунге–Кутты) систему дифференциальных уравнений (20) на *достаточно малых* временных интервалах.

Очевидно, что после окончания процедуры $S[1, 2]$ колебания других частиц цепочки оказываются, вообще говоря, несинхронизированными с колебаниями первых двух частиц. Это хорошо видно по расхождению точек B и C на рис. 4, *б*, где изображены графики функций $x_2(t)$ и $x_3(t)$ после завершения процедуры $S[1, 2]$. Применим теперь к системе (20) процедуру $S[2, 3]$, полностью аналогичную процедуре $S[1, 2]$, для синхронизации второй и третьей частицы (при этом не заботимся об их синхронизации ни с первой частицей, ни со всеми другими). Продолжая такого рода *парную* синхронизацию, то есть применяя процедуры $S[3, 4]$, $S[4, 5]$ и т.д. вплоть до тех номеров частиц, амплитуды колебаний которых оказываются менее наперед заданной малой величины ε , закончим первый *большой итерационный цикл* синхронизации колебаний частиц искомого бризера.

Поскольку в результате проведения этого цикла колебания первых частиц бризера становятся слегка рассинхронизованными, начнем следующий большой итера-

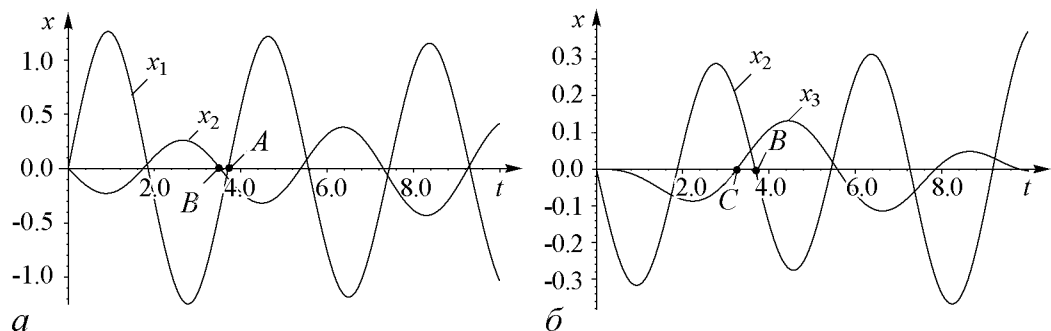


Рис. 4. К методу парной синхронизации для построения симметричного бризера в цепочке связанных осцилляторов Дуффинга

ционный цикл синхронизации, то есть вновь синхронизируем попарно колебания частиц 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4 и т.д. Повторяем большие итерационные циклы до *сходимости* всего процесса синхронизации с *заданной степенью точности*.

Вышеописанную вычислительную схему назовем методом *парной синхронизации*. Заметим, что она представляет собой реализацию некоторого варианта хорошо известной в численном анализе идеи *релаксации* при решении различных систем уравнений.

Наш опыт показывает, что метод парной синхронизации сходится в достаточно широком диапазоне значений γ системы (20).

В заключение заметим, что метод парной синхронизации можно успешно использовать для построения точных бризерных решений в решеточных моделях гораздо более общего вида, нежели рассмотренные в качестве примера модели монокристаллических цепочек. Этот вопрос будет обсужден в последующих публикациях.

2.2. Квазибризеры. Из предыдущих разделов настоящей работы ясно, что дискретный бризер, как строго периодический во времени объект, получается при численном моделировании лишь в случае *идеальной настройки* начальных условий задачи Коши на некоторое многообразие малой размерности в многомерном пространстве всех возможных начальных значений координат отдельных частиц и их скоростей. Такую точную настройку трудно осуществить даже при проведении вычислительного эксперимента, что хорошо видно из процедуры реализации метода парной синхронизации частот колебаний частиц бризера (см. раздел 2.1). Тем более это практически невозможно сделать при постановке любых физических экспериментов (особенно в тех случаях, когда бризероподобные объекты возникают спонтанно [7, 23, 24]).

В связи с этим, в работе [8] была выдвинута концепция квазибризеров, как некоторых локализованных в пространстве, но не строго периодических во времени динамических объектов. При этом был сформулирован определенный *критерий близости* квазибризера к соответствующему ему точному бризеру, основанный на вычислении среднеквадратичного отклонения $\eta(t_k)$ частот колебаний отдельных частиц бризера, найденных на некотором интервале в окрестности момента t_k , и вычислении среднеквадратичного отклонения σ_j частот колебаний выделенной j -й частицы бризера на различных временных интервалах (для частиц квазибризера имеет место некоторый временной дрейф частоты колебаний)⁹.

Следует заметить, что практически все обсуждаемые в литературе динамические объекты, которые принято называть дискретными бризерами, на самом деле, являются лишь квазибризерами с большей или меньшей величиной среднеквадратичных отклонений $\eta(t)$ и σ_j частот колебаний отдельных частиц решетки. Эта идея была нами проиллюстрирована в работе [8] на примере бризеров Джеймса [25] в цепочке типа $K_2 - K_3 - K_4$.

⁹Смысл, который мы вкладываем в настоящей работе в понятие «частота», лучше всего объяснить, указав процедуру вычисления этой величины. Рассматривая колебания i -й частицы, находим последовательные нули функции $x_i(t)$ и в качестве «периода» колебаний $T(t_k)$ выбираем временной интервал между ближайшими нулями функции $x_i(t)$ одинаковой четности. «Частота» колебаний при этом определяется по формуле $\omega(t_k) = 2\pi/T(t_k)$. В случае идеального бризера период $T(t_k)$ является постоянной величиной, не зависящей от момента времени t_k , в окрестности которого вычисляются нули функции $x_i(t)$. В случае же квазибризеров величины $T(t_k)$, вычисленные в окрестности разных моментов t_k , будут различными, то есть введенный выше период $T(t_k)$ и соответствующая ему частота $\omega(t_k)$ изменяются при изменении t_k .

Заклучение

В настоящей работе получены строгие результаты исследования устойчивости дискретных бризеров (локализованных в пространстве и периодических во времени динамических объектов) для нелинейной моноатомной цепочки с однородным потенциалом четвертой степени. При этом показано различие в характере устойчивости симметричных бризеров (мод Сиверса–Такено) и антисимметричных бризеров (мод Пейджа) в зависимости от силы межчастичного взаимодействия по отношению к локальному взаимодействию частиц с узлами решетки. Изменение характера устойчивости этих двух дискретных бризеров происходит при одном и том же значении параметра $\tilde{\beta}$ ($\tilde{\beta} = 0.554\dots$), который характеризует относительную силу межчастичного взаимодействия.

В работе также предложен новый метод построения дискретных бризеров – метод «парной синхронизации», **техника применения** которого продемонстрирована на примере модели, представляющей собой цепочку линейно связанных осцилляторов Дуффинга.

Наконец, кратко рассмотрена концепция квазибризеров, с неизбежностью возникающих при малых возмущениях точных бризерных решений и являющихся более релевантными динамическими объектами при обсуждении экспериментальных данных (более подробно эта концепция была проанализирована в работе авторов [8]).

Авторы выражают свою благодарность В.П. Сахненко за постоянную дружескую поддержку и обсуждение результатов работы, а также С. Флаху за ценные дискуссии и за гостеприимство во время пребывания авторов в институте Макса Планка физики сложных систем (Дрезден, Германия) в декабре 2006 г. Благодарим фонд некоммерческих программ «Династия» за финансовую поддержку.

Настоящая работа выполнена в рамках гранта К-07-Т-25 Южного Федерального Университета.

Библиографический список

1. Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: existence, linear stability and quantization // Physica D. 1997. Vol. 103. P. 201.
2. Flach S. and Willis C. R. Discrete breathers // Phys. Rep. 1998. Vol. 295. P. 181.
3. Sievers A.J., Takeno S. Intrinsic localized modes in anharmonic crystals // Phys. Lett. 1988. Vol. 61. P. 970.
4. Aubry S. Discrete breathers: localization and transfer of energy in discrete Hamiltonian nonlinear systems // Physica D. 2006. Vol. 216. P. 1.
5. Flach S. Computational studies of discrete breathers // Energy Localization and Transfer / Eds. T. Dauxois, A. Litvak-Hinenzon, R. MacKay and A. Spanoudaki. World Scientific, 2004. P. 1.
6. Tsironis G.P. If «discrete breathers» is the answer, what is the question? // Chaos. 2003. Vol. 13. P. 657.
7. Sato M., Hubbard B.E., Sievers A.T. Nonlinear energy localization and its manipulation in micromechanical oscillator arrays // Rev. Mod. Phys. 2006. Vol. 78. P. 13.
8. Chechin G.M., Dzhelauhova G.S., and Mehonoshina E.A. Quasibreathers as a gene-

- ralization of the concept of discrete breathers // *Phys. Rev. E*. 2006. Vol. 74. P. 36608.
9. *MacKay R.S. and Aubry S.* Proof of existence of breathers for time-reversible or Hamiltonian networks of weakly coupled oscillators // *Nonlinearity*. 1994. Vol. 7. P. 1623.
 10. *Flach S.* Conditions on the existence of localized excitations in nonlinear discrete systems // *Phys. Rev. E*. 1994. Vol. 50. P. 3134.
 11. *Marin J.L. and Aubry S.* Breathers in nonlinear lattices: numerical calculation from the anticontinuous limit // *Nonlinearity*. 1996. Vol. 9. P. 1501.
 12. *Rosenberg R.M.* On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom // *Adv. Appl. Mech.* 1966. Vol. 9. P. 155.
 13. *Kivshar Yu.S.* Intrinsic localized modes as solitons with a compact support // *Phys. Rev. E*. 1993. Vol. 48. P. R43.
 14. *Gorbach A.V. and Flach S.* Compactlike discrete breathers in systems with nonlinear and nonlocal dispersive terms // *Phys. Rev. E*. 2005. Vol. 72. P. 56607.
 15. *Маневич Л.Н., Михлин Ю.В., Пилипчук В.Н.* Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем. М.: Наука, 1989. 216 с.
 16. *Vakakis A.F., Manevich L.I., Mikhlin Yu.V., Pilipchuk V.K., Zevin A.A.* Normal modes and localization in nonlinear systems. New York: Wiley, 1996.
 17. *Сахненко В.П., Чечин Г.М.* Симметричные правила отбора в нелинейной динамике атомных систем // *ДАН*. 1993. Т. 330. С. 308.
 18. *Chechin G.M. and Sakhnenko V.P.* Interactions between normal modes in nonlinear dynamical systems with discrete symmetry. Exact results // *Physica D*. 1998. Vol. 117. P. 43.
 19. *Chechin G.M., Ryabov D.S., Zhukov K.G.* Stability of low dimensional bushes of vibrational modes in the Fermi–Pasta–Ulam chains // *Physica D*. 2005. Vol. 203. P. 121.
 20. *Chechin G.M., Zhukov K.G.* Stability analysis of dynamical regimes in nonlinear systems with discrete symmetries // *Phys. Rev. E*. 2006. Vol. 73. P. 36216.
 21. *Chechin G.M., Novikova N.V., Abramenko A.A.* Bushes of vibrational modes for Fermi–Pasta–Ulam chains // *Physica D*. 2002. Vol. 166. P. 208.
 22. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. В 2-х частях. Ч. 2: Трансцендентные функции. Пер. с англ. М.: 1963. 516 с.
 23. *Rosler T., Page J.B.* Optical creation of vibrational intrinsic localized modes in anharmonic lattices with realistic interatomic potentials // *Phys. Rev. B*. 2000. Vol. 62. P. 11460.
 24. *Cretegny T., Dauxois T., Ruffo S., Torcini A.* Localization and equipartition of energy in the b-FPU chain: Chaotic breathers // *Physica D*. 1998. Vol. 121. P. 109.
 25. *James G.* Existence of breathers on FPU lattices // *C.R. Acad. Sci. Paris*. 2001. Т. 332, Ser. 1. P. 581.

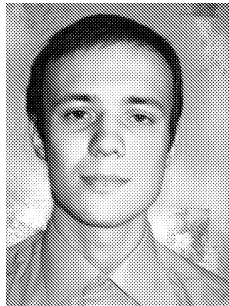
*Южный федеральный университет,
физический факультет и НИИ физики,
Ростов-на-Дону*

*Поступила в редакцию 20.06.2007
После доработки 31.10.2007*

DISCRETE BREATHERS AND QUASIBREATHERS IN NONLINEAR MONOATOMIC CHAINS

P.P. Goncharov, G.S. Dzhelauhova, G.M. Chechin

We study the stability of the symmetric and antisymmetric discrete breathers in the monoatomic chain described by potential energy which is a uniform function of the fourth order. It is shown that the change of the stability properties of these two dynamical objects (known as Sievers-Takeno and Page modes, respectively) takes place at the same strength of the inter-site interactions with respect to the on-site interactions. We also present a new method (the «pair synchronization» method) for the discrete breather construction in the arbitrary nonlinear Hamiltonian lattices. This method possesses an explicit physical sense. Its application technique is demonstrated with the chain of linear coupled Duffing oscillators. The concept of quasibreathers which represent the dynamical objects corresponded to small deviations from the exact breather solutions is briefly discussed.



Гончаров Пётр Петрович – родился в Донецке Ростовской области в 1986 году. В настоящее время – студент 4 курса физического факультета Южного федерального университета. Специализируется на кафедре теоретической и вычислительной физики. Область научных интересов – нелинейная динамика и вычислительная физика.
E-mail: petro_zzz@rambler.ru



Джелаухова Галина Сергеевна – родилась в Ростове-на-Дону в 1985 году. Студентка 1 курса магистратуры физического факультета Южного федерального университета. Стипендиат Фонда некоммерческих программ «Династия». Область научных интересов – нелинейная динамика, теоретико-групповые методы в физике, вычислительная физика.
E-mail: djel@rambler.ru



Чечин Георгий Михайлович – родился в Новочеркасске (1937), окончил РГУ (1960), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и вычислительной физики Южного федерального университета. Научный руководитель студенческой лаборатории нелинейной кристаллофизики при НИИ физики РГУ. Соросовский доцент. Читает лекции по численным методам, вычислительной и нелинейной физике. Область научных интересов – теоретико-групповые методы в физике, теория фазовых переходов, нелинейная динамика и вычислительная физика. Автор около 100 научных публикаций.
E-mail: chechin@phys.rsu.ru