



ВЫЧИСЛЕНИЕ СПЕКТРА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ РАДИОФИЗИЧЕСКОЙ ПРИРОДЫ*

А.А. Балякин, Е.В. Блохина

Описана численная схема расчета спектра показателей Ляпунова для ряда распределенных систем радиофизической природы, основанная на модификации метода Бенеттина. Приведены результаты численного моделирования различных моделей распределенных систем (модель автогенератора с запаздывающей обратной связью, гиротрон с нефиксированной структурой поля и кольцевой нелинейный резонатор, заполненный средой с модуляционной неустойчивостью). Обсуждаются характерные особенности, возникающие при вычислении спектра показателей Ляпунова в распределенных системах. Приводятся примеры расчета ляпуновских спектров в различных режимах. Анализируются размерности хаотических аттракторов, вычисленные по формуле Каплана–Йорке.

Введение

Одним из подходов к изучению систем радиофизической и электронно-волновой природы является разработка модели и постановка численного эксперимента. На настоящий момент существует ряд работ, в которых проводится подробное исследование таких систем в широком диапазоне изменения управляющих параметров. В ходе экспериментов и в численных расчетах надежно установлено, что при определенном выборе параметров в этих устройствах могут реализоваться многочастотные и хаотические колебания (см., например, [1–4], и цитируемую там литературу). Ранее подобные режимы считались паразитными, но в последнее время обсуждаются возможности их практического применения, что увеличивает интерес к их исследованию.

С момента обнаружения многочастотной и хаотической автомодуляции в лампе обратной волны (ЛОВ), режимы сложной динамики обнаружены и изучаются практически во всех электронных СВЧ-генераторах и усилителях [5–10]. Для исследования распределенных систем электронно-волновой природы (таких как лампа обратной волны, гиротроны, генераторы с запаздывающей обратной связью на основе ламп бегущей волны и клистронов), а также других систем радиофизики

*По материалам доклада на Школе «ХАОС–2007», Саратов, 9–14.10.2007.

(распределенные нелинейные резонаторы, заполненные средами с различными видами нелинейности) оказалось продуктивным привлечение идей и методов нелинейной динамики. Поэтому для наглядного представления результатов обычно используют построение временных реализаций, спектров, фазовых портретов, бифуркационных диаграмм. Анализ спектра показателей Ляпунова следует также считать полезным в контексте исследования сигналов сложной природы, поскольку он позволяет выявить более глубокую информацию о природе наблюдаемых режимов.

Одно из основных свойств динамического хаоса заключается в присутствии экспоненциальной неустойчивости фазовых траекторий [1–4]. Для количественной характеристики этой неустойчивости используются показатели Ляпунова для аттрактора рассматриваемой системы. В случае системы с N -мерным фазовым пространством имеется спектр из N показателей Ляпунова, среди которых положительные и отрицательные определяют, соответственно, экспоненциальный рост или затухание малых возмущений вблизи принадлежащих аттрактору типичных траекторий. Для хаотических аттракторов характерно присутствие одного или более положительных показателей. Анализ спектра показателей Ляпунова широко применяется для исследования сложной динамики в системах обыкновенных дифференциальных уравнений и в моделях с дискретным временем (отображениях), где к настоящему времени разработан детальный и достаточно простой алгоритм расчета (см., например, монографии [1–3] и содержащуюся в них библиографию). Однако системы, о которых идет речь в настоящей работе, являются распределенными (бесконечномерными), расчет спектра показателей Ляпунова для них по-прежнему представляет собой трудоемкую и нетривиальную задачу. Сложности заключаются как в больших затратах компьютерного времени (для расчета N показателей необходимо численно решать $N + 1$ систему исходных уравнений с последующей перенормировкой переменных), так и с заданием вектора возмущений в гильбертовом пространстве и подбором параметров численной схемы, обеспечивающих наилучшую сходимость результатов.

К настоящему времени известно несколько работ, использующих показатели Ляпунова в контексте исследования нелинейной динамики электронно-волновых устройств. Исторически первой была работа [11], где рассматривались хаотические автоколебания в лампе обратной волны. Было показано в численных расчетах и в эксперименте, что хаос в этой электронно-волновой системе ассоциируется с присутствием неустойчивости динамики по отношению к малым возмущениям начальных условий. Получены оценки старшего показателя Ляпунова. В работе [12] была исследована другая распределенная система: диод Пирса — модель системы, содержащей электронный пучок с виртуальным катодом. В настоящее время приборы с виртуальным катодом активно используются для генерации микроволнового излучения высокой мощности. В [12] было обнаружено существование различных типов хаотического поведения в диоде Пирса: так называемых «слабого» и «развитого» хаоса, то есть сильно нерегулярной динамики, характеризующейся резким возрастанием значения старшего показателя Ляпунова¹.

¹Отметим, что термин «развитый хаос» не является устоявшимся. В некоторых работах он выступает синонимом термина «гиперхаос», то есть под ним понимают такой режим, который характеризуется более чем одним положительным показателем Ляпунова. Однако в работе [12] рассчитывался только

Кроме того, в ряде работ приводились результаты расчета спектров показателей Ляпунова для систем с запаздыванием (см., например, [13, 14]). Однако в них в основном изучался вопрос о поведении показателей при больших значениях времени запаздывания. Было установлено, что число положительных показателей в целом растет с ростом этого параметра и может достигать 8-10, хотя энтропия Колмогорова (сумма положительных показателей) остается приблизительно постоянной.

В работе [15] было проведено вычисление нескольких показателей Ляпунова для модели лампы обратной волны и дана оценка размерности аттракторов, отвечающих хаотическим режимам. Установлено, что в зависимости от величины тока пучка в системе могут реализоваться хаотические режимы с одним положительным показателем («слабый» хаос) и с несколькими положительными показателями (развитый хаос или гиперхаос). В статье [16] обсуждалась хаотическая динамика в генераторе на основе лампы бегущей волны и была приведена оценка нескольких показателей Ляпунова. В работах [17–19] исследовался гиротрон с нефиксированной структурой поля. Было обнаружено, что развитые хаотические режимы, как правило, характеризуются более чем одним положительным показателем Ляпунова, то есть являются гиперхаотическими. Интересной особенностью является то, что возникающий в модели гиротрона развитый хаотический аттрактор имеет аномально высокую размерность вложения (20–40). Такое необычное поведение связано с существованием большого числа высокодобротных собственных мод резонатора, слабо взаимодействующих с электронным пучком. Их наличие приводит к появлению соответствующего количества малых по абсолютной величине показателей Ляпунова, и в результате размерность аттрактора, вычисленная по показателям Ляпунова с помощью формулы Каплана–Йорке [1], оказывается существенно больше, чем размерность исследованных систем, имеющих низкую собственную добротность электродинамической структуры, например, диода Пирса [12] или ЛОВ [15].

Для распределенной системы количество показателей Ляпунова в спектре, формально говоря, должно быть бесконечно большим. С практической точки зрения, значимым является их ограниченное подмножество – это набор расположенных в порядке убывания показателей в количестве, позволяющем определить размерность соответствующего аттрактора по известной формуле Каплана–Йорке (так называемая ляпуновская размерность) [1, 3]. Она задает число переменных, необходимых для достаточно полного описания рассматриваемой системы. Этот подход находит всё большее практическое применение при исследовании реальных систем. В эксперименте набор данных в общем случае неограничен и размерность пространства вложения, вычисленная по методу ложных соседей, необычайно велика. Однако, как показывает практика, значение ляпуновской размерности, рассчитанное по формуле Каплана–Йорке, оказывается на несколько порядков меньше. В частности, этот подход хорошо зарекомендовал себя при составлении долгосрочных прогнозов погоды [20]: найденная величина получается сравнительно небольшой, что позволяет ускорить расчеты без потери требуемой точности.

старший показатель Ляпунова и под развитым хаосом в ней понимался сильно нерегулярный режим. Мы в нашей работе используем аналогичное определение.

Таким образом, расчет спектра показателей Ляпунова является важным инструментом анализа хаотических колебаний в распределенных системах, позволяющим выявить детали динамического поведения. Настоящая работа посвящена расчету спектра показателей Ляпунова для ряда моделей распределенных автоколебательных систем. Обсуждаются результаты для различных типов распределенных систем: системы, распределенные в пространстве (описываемые уравнениями в частных производных), системы с запаздывающей обратной связью (как сосредоточенные в пространстве, так и распределенные по координате). Подобные системы играют важную роль во многих областях физики: радиофизике, нелинейной оптике, биофизике и т.д. [4,21]. Отметим, что некоторые предварительные результаты, относящиеся к расчету спектра показателей Ляпунова в распределенных автоколебательных системах с запаздывающей обратной связью, были представлены в работе [22].

1. Алгоритм вычисления спектра показателей Ляпунова

Как отмечалось во Введении, можно выделить различные типы распределенных систем, связанные с их физическими особенностями. Распределенность систем может иметь следующий характер.

1. Первый тип – распределенность «во времени» (но одновременно сосредоточенность в пространстве). Пример такой системы – модель генератора с запаздывающей обратной связью или однорезонаторного клистрона, представляющая собой обыкновенное дифференциальное уравнение (с производной по времени)², но с начальным условием, заданным в виде функции на отрезке времени $f(t) : \{t \in [0, \tau]\}$.

2. Второй тип – распределенность «по координате». Классический пример этой системы в СВЧ-электронике – устройство с длительным взаимодействием электронного пучка с электромагнитным полем $F(x, t)$ (в одномерном случае) в замедляющей системе, волноводе (ЛЮВ, ЛБВ, гиротрон). Такой прибор будет описываться уравнением в частных производных, а начальное условие – задаваться в виде функции на отрезке $F_0(x) : \{x \in [0, L]\}$, где L – длина системы.

3. Третий тип – представляет собой объединение первых двух: система будет описываться уравнением в частных производных, отражающим распределенность в пространстве, но при этом будет присутствовать еще петля запаздывающей обратной связи, добавляющая распределенность во времени.

Мы акцентируем внимание именно на таком делении распределенных систем, чтобы подчеркнуть их различную физическую природу, но, в то же время, отмечаем, что математический подход и описанный далее алгоритм являются универсальными и применимы ко всем распределенным системам.

Для вычисления спектра показателей Ляпунова был использован алгоритм Бенеттина [1, 3], адаптированный к распределенной электронно-волновой системе (см. [15]). Для получения N показателей производится численное решение $N + 1$ комплектов систем уравнений с соответствующими граничными и начальными усло-

²В общем виде дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом можно записать следующим образом $A'(t) = f(t, A(t), A(t - \tau))$.

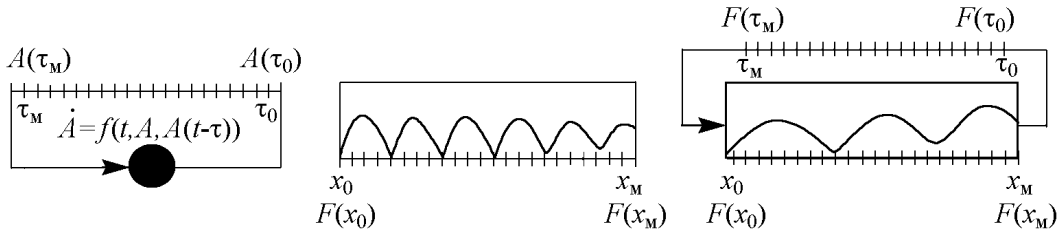


Рис. 1. Схематическое изображение систем, иллюстрирующих разные типы распределенности: *a* – автоколебательная система с запаздывающей обратной связью, *b* – модель СВЧ-устройства с длительным взаимодействием электронного пучка с полем, *в* – кольцевой нелинейный резонатор

виями. Пусть состояние исходной физической (с номером $n = 0$) системы в некоторый момент времени определяется комплексной функцией $F(x, t)$, а в остальных системах функциями $F_n(x, t) = F(x, t) + \varepsilon \tilde{F}_n(x, t)$, где $\tilde{F}_n(x, t)$ по норме равно 1, а ε – малая величина. Для выделенных выше трех типов систем функции $F_n(x, t)$ формируются следующим образом.

1. Для системы первого типа при численном моделировании временной интервал запаздывания искусственно разбивается на M отрезков. Как правило, расстояние между точками разбиения принимается за шаг дискретизации по времени $dt = \tau/M$. Функция, определяющая состояние системы, есть вектор с размерностью M , составленный из значений динамической переменной $x(t)$ в дискретные моменты времени в петле обратной связи, то есть $F(x, t) = (A(\tau_0) \dots A(\tau_M))$ (рис. 1, *a*).

2. Для системы второго типа производится дискретизация по координате, то есть длина системы L разбивается на M отрезков длины $d\xi = L/M$. Тогда $F(x, t)$ представляет собой вектор, компоненты которого есть значения поля $F(x, t)$ в текущий момент времени в соответствующих точках, то есть $F(x, t) = (F(x_0) \dots F(x_M))$ (рис. 1, *b*).

3. Состояние системы третьего типа описывается вектором $F(x, t) = (F(x_0), \dots, F(x_{M_1}), F(t_0), \dots, F(t_{M_2}))$, в котором компоненты $F(x_k)$, $k = 0, \dots, M_1$ представляют собой распределение поля вдоль координаты, а компоненты $F(t_k)$, $k = 0, \dots, M_2$ есть значения поля в петле обратной связи (см. п. 1). Таким образом, для системы третьего типа векторы, описывающие состояние системы, формируются из объединения векторов, описанных в пп. 1 и 2 (рис. 1, *в*).

Решая отдельно $N + 1$ комплектов нестационарных уравнений с начальными условиями, заданными в момент времени t , на следующем шаге по времени $t_1 = t + \Delta t$ получим новый набор функций, определяющих, как «отклонилось» решение n -ой системы от решения исходной системы

$$\tilde{F}_n(x, t_1) = \frac{F_n(x, t_1) - F(x, t_1)}{\varepsilon}. \quad (1)$$

При этом время Δt выбирается небольшим, чтобы возмущение по модулю оставалось малым. Затем проводится ортогонализация по методу Грама–Шмидта и перенормировка получившихся векторов возмущений [15]. Далее, продолжаем вычисления на следующем шаге алгоритма длительностью Δt , считая, что теперь системы

описываются новыми комплексными функциями

$$F_n(x, t_1) \leftarrow F(x, t_1) + \varepsilon \tilde{F}_n^0(x, t_1), \quad (2)$$

где $\tilde{F}_n^0(x, t)$ – набор ортогональных возмущений, полученных в ходе процедуры Грама–Шмидта, норма которых равна единице. Вся процедура повторяется многократно, на протяжении большого числа шагов. В ходе вычислений каждый раз подсчитываются N величин S_n , представляющих собой накапливающиеся суммы и показывающих, на сколько изменяется норма каждого n -го возмущения за K шагов алгоритма. По этим суммам оцениваются показатели Ляпунова Λ_n

$$S_n = \sum_{i=1}^K \ln \|\tilde{F}_n(x, t = i \cdot \Delta\tau)\|, \quad \Lambda_n = S_n / (K\Delta\tau). \quad (3)$$

Для получения более точной оценки можно аппроксимировать график временной зависимости накапливающейся суммы прямой линией, применяя метод наименьших квадратов; при этом величина Λ_n получается как угловой коэффициент данной прямой.

Если известно достаточное количество показателей Ляпунова, то можно оценить ляпуновскую размерность аттрактора по формуле Каплана–Йорке [1]

$$D = m + \frac{\sum_{i=1}^m \Lambda_i}{|\Lambda_{m+1}|}, \quad (4)$$

где m – такое число, что $\sigma_m = \sum_{i=1}^m \Lambda_i > 0$, но уже $\sigma_{m+1} = \sum_{i=1}^{m+1} \Lambda_i < 0$. Как известно из многочисленных примеров, обсуждавшихся в литературе по нелинейной динамике, величина, вычисленная по формуле (4), обычно дает хорошую оценку фрактальной размерности аттрактора хаотического режима.

2. Сложная динамика автогенератора с кубической нелинейностью и однорезонаторного клистрона

Рассмотрим вначале наиболее простую распределенную систему первого типа, описывающую динамику автогенератора с запаздывающей обратной связью. Подобные системы составляют обширный класс приборов микроволновой электроники. Хорошо известно, что такие системы способны генерировать сложные, в том числе хаотические, колебания [4, 23]. Общий вид уравнения, описывающего динамику данной системы, имеет вид

$$\dot{A} + \gamma A = \alpha e^{i\psi} f(A(t-1)), \quad (5)$$

где комплексная переменная A имеет смысл медленно меняющейся амплитуды колебаний; α и γ – параметры, характеризующие неравновесность и диссипацию;

ψ – набег фазы в цепи обратной связи; точка отвечает дифференцированию по времени. Правая часть (5) зависит от значений амплитуды в запаздывающий момент времени. Отметим, что нормировкой переменных всегда можно добиться того, что время запаздывания равно единице. Напомним, что для корректного решения задачи Коши для (5) необходимо задать начальное распределение $A(t)$ на интервале длительностью 1, то есть использовать распределенное описание [24].

При выборе кубично-нелинейной функции вида

$$f = (1 - |A(t - 1)|^2) A(t - 1)$$

уравнение (5) приближенно описывает, например, динамику триодного генератора Ван дер Поля с линией задержки в анодной цепи в случае, когда анодно-сеточная характеристика лампы аппроксимируется кубическим полиномом. Эта модель была подробно исследована в [23, 25].

В случае, когда

$$f = J_1(|A(t - 1)|) \frac{A(t - 1)}{|A(t - 1)|},$$

где J_1 – функция Бесселя 1-го рода первого порядка, получается система, названная в [25, 26] моделью «однорезонаторного» клистрона (поскольку генераторы на базе двух- и многорезонаторных клистронов с запаздывающей обратной связью описываются системами из соответствующего числа подобных уравнений).

Отметим, что в рассматриваемой системе всегда присутствуют два нулевых показателя Ляпунова, которые в стационарном режиме вырождаются в один нулевой показатель (подробнее см. раздел 5). Это связано с существованием в системе симметрии по отношению к двум произвольным малым сдвигам по времени и по аргументу комплексной величины A [15, 22]. Ниже приведены основные результаты расчета спектра показателей Ляпунова для указанных систем, представленные в работе [22].

Для модели генератора с кубичной нелинейностью в стационарных режимах имеется один нулевой показатель Ляпунова (так как в этом случае оба сдвига – по времени и фазе – оказываются эквивалентными), в периодических автомодуляционных режимах все показатели (не считая двух нулевых) отрицательны, в квазипериодических появляется третий нулевой показатель, а в режиме хаотических колебаний, возникших в результате последовательности бифуркаций удвоения периода, спектр содержит один положительный и два нулевых показателя. Как оказалось, для аттрактора, образовавшегося в результате объединения хаотических аттракторов на базе различных мод, имеется два положительных показателя, и следовательно, в этом случае можно говорить о режиме гиперхаоса. В отличие от модели генератора с кубичной нелинейностью модель «однорезонаторного» клистрона имеет еще один механизм образования развитого хаоса [25, 26]. Для нее характерна мультистабильность стационарных состояний, соответствующих одной и той же собственной моде колебаний. В этом случае имеется только один положительный показатель, то есть соответствующие режимы не являются гиперхаотическими. Однако величина положительного показателя при переходе в режим развитого хаоса резко возрастает

Таблица 1

Старшие пять показателей Ляпунова в типичных режимах динамики автогенератора с кубичной нелинейностью

n	Периодическая автомодуляция	Квазипериодическая автомодуляция	Хаос	Гиперхаос
1	0.00	0.00	0.08	0.29
2	0.00	0.00	0.00	0.14
3	-0.02	0.00	0.00	0.01
4	-0.89	-0.08	-0.91	-0.01
5	-1.11	-1.41	-0.94	-0.52

Таблица 2

Старшие пять показателей Ляпунова в различных режимах хаотической динамики модели «однорезонаторного» клистрона

n	Хаотическая динамика на базе одного положения равновесия $\gamma = 0.1, \alpha = 5.1, \psi = 0.0$	Хаотическая динамика на базе двух положений равновесия $\gamma = 0.1, \alpha = 7.6, \psi = 0.0$
1	0.08	0.37
2	0.00	0.00
3	0.00	0.00
4	-1.09	-0.63
5	-1.35	-1.34

(примерно в пять раз). На основании этих результатов в [22] был сделан вывод, что режимами гиперхаоса в рассмотренных моделях распределенных автоколебательных систем с запаздывающей обратной связью являются только принципиально много-модовые хаотические колебания, для которых, по терминологии работ [27, 28], не сохраняется фазовый топологический инвариант.

Иллюстрацией описанной выше динамики служит рис. 2, значения параметров указаны в подписи к рисунку. В первой колонке представлены зависимости модуля амплитуды от времени $|A(t)|$, во второй колонке – спектры сигнала и в последней – графики накапливающихся сумм от времени. Графики иллюстрируют различные типы динамики в зависимости от управляющих параметров α и γ : периодическая автомодуляция (*a*), квазипериодическая автомодуляция (*b*), хаотические колебания (*в*) и режим гиперхаоса (*г*). Значения показателей Ляпунова для обсуждавшихся режимов приведены в табл. 1.

В табл. 2 приведены значения пяти старших показателей Ляпунова для модели однорезонаторного клистрона для двух разных типов хаотических колебаний. Видно, что в случае развитых хаотических режимов, сформировавшихся в результате объединения аттракторов на базе различных состояний равновесия, имеется только один положительный показатель, то есть они не являются гиперхаотическими. Однако величина положительного показателя при переходе в режим развитого хаоса резко возрастает (примерно в пять раз). Аналогичная картина наблюдалась для диода Пирса в работе [12].

Рассчитаем по формуле (4) размерности хаотических аттракторов. Для автоге-

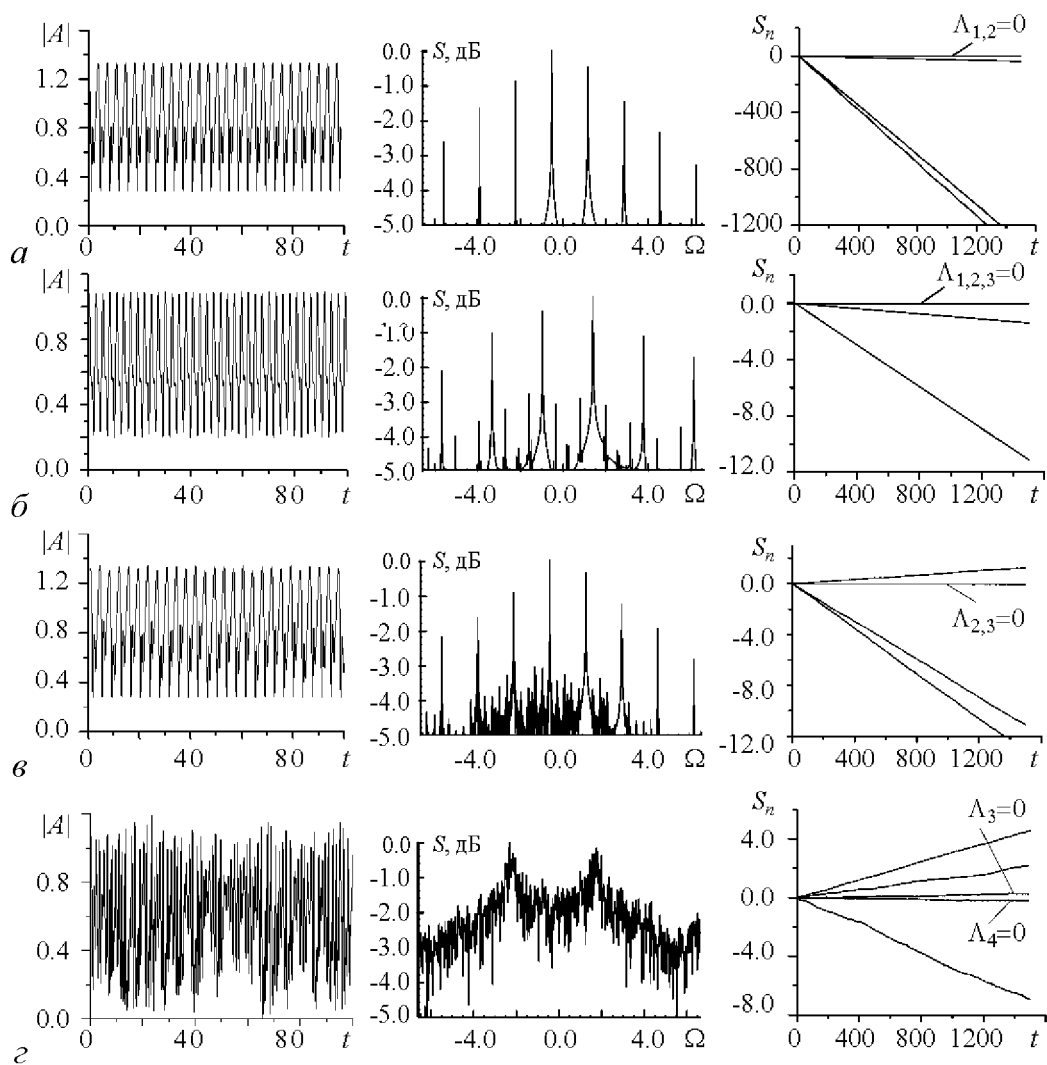


Рис. 2. Зависимость выходного сигнала от времени (первая колонка), спектр сигнала (вторая колонка) и зависимость накапливающихся сумм для старших пяти показателей Ляпунова от времени для типичных режимов динамики автогенератора с кубической нелинейностью: *a* – периодическая автомодуляция, $\gamma = 0.3$, $\alpha = 2.35$, $\psi = 0.1\pi$; *б* – квазипериодическая автомодуляция, $\gamma = 0.3$, $\alpha = 3.77$, $\psi = 0.9\pi$; *в* – хаос, $\gamma = 0.3$, $\alpha = 2.38$, $\psi = 0.1\pi$; *г* – гиперхаос, $\gamma = 1.0$, $\alpha = 5.68$, $\psi = 0.9\pi$

нератора с кубической нелинейностью в режиме хаоса $D = 3.09$, в режиме гиперхаоса $D = 4.83$. Для модели однорезонаторного клистрона $D = 3.07$ (хаотическая динамика на базе одного положения равновесия) и $D = 3.59$ (хаотическая динамика на базе двух положений равновесия). Видно, что получающееся значение ляпуновской размерности оказывается невелико, что связано, прежде всего, с тем, что хаотические режимы возникают на базе одной или двух (в режиме гиперхаоса) мод. Следует, впрочем, ожидать, что для многомодовых режимов размерность D должна серьезно вырасти.

3. Сложная динамика в гиротроне с нефиксированной структурой поля

Рассмотрим пример распределенной системы второго типа (модель гиротрона с нефиксированной структурой поля в одномерном случае). Ее динамика описывается дифференциальным уравнением в частных производных. Будем рассматривать нестационарные режимы колебаний на основе численного решения системы уравнений [29]

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - i \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{I_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\varphi) d\varphi_0, \quad (6)$$

$$\frac{dp}{dx} + ip(|p|^2 + \Delta - 1) = iF, \quad p|_{x=0} = e^{i\varphi_0}, \quad \varphi_0 \in [0, 2\pi].$$

Здесь функция $F(x, t)$ описывает мгновенное продольное распределение комплексной амплитуды высокочастотного поля, p – поперечный импульс электронов, Δ – параметр рассинхронизма циклотронной частоты и критической частоты рабочей моды волновода, I_0 – параметр тока пучка. Нормировка переменных и параметров соответствуют принятой в работе [29]. Уравнения взаимодействия дополняются начальными условиями для поля $F(x, 0) = F_0(x)$. Будем полагать, что во входном сечении задано граничное условие полного отражения, то есть поле здесь равно нулю: $F(0, t) = 0$. На коллекторном конце имеется рупор с малым углом раскрытия. Постановка задачи с учетом граничного условия на правом конце системы и выбор параметров описана подробно в [17, 19], а вывод граничного условия приведен в [30]. Как показало численное моделирование, проведенное для уравнений (6) в работах [17, 19], точное граничное условие может быть заменено на приближенное, более простое в обращении при построении численной схемы. Далее для краткости граничное условие для рупора будем обозначать граничным условием \mathcal{A} , а приближенное условие – условием \mathcal{B} .

Карта режимов на плоскости основных параметров системы (Δ, I_0) получена в [19, 31], в этой работе найдены значения параметров, при которых наблюдаются различные типы колебаний – стационарные колебания, автомодуляция, хаотические режимы. В этих работах было показано, что в гиротроне существуют два механизма перехода от стационарной генерации к автомодуляции, с ними связаны два сценария перехода к хаотическим колебаниям. При $\Delta \approx 0.0$ (и увеличении тока пучка I_0) реализуется последовательность бифуркаций удвоения периода. Как было показано в [17], хаотические колебания, возникающие по такому сценарию являются неразвитыми, то есть характеризуются одним положительным показателем Ляпунова. При $\Delta \approx 1.0$ хаотические режимы возникают после разрушения квазипериодического движения, и при увеличении I_0 хаотические колебания становятся развитыми и характеризуются несколькими положительными показателями (режим гиперхаоса).

Для вычисления спектра показателей Ляпунова был использован алгоритм Беннеттина, описанный в разделе 1. Заметим, что в данной системе у аттракторов присутствуют два нулевых показателя, которые связаны с инвариантностью уравнений

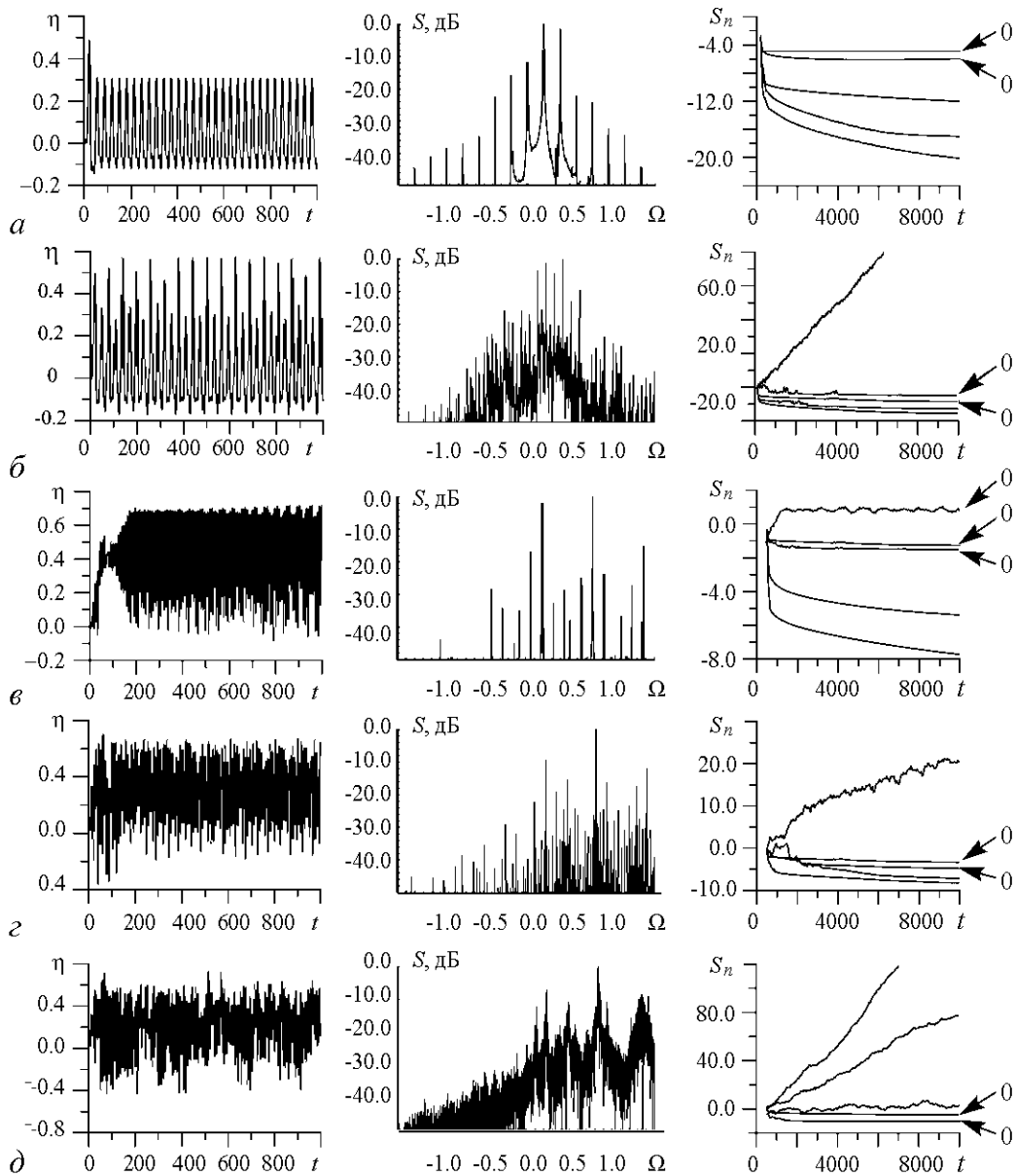


Рис. 3. Зависимость электронного КПД η от времени, спектр выходного сигнала и графики накапливающихся сумм S_n от времени в модели гиротрона при следующих параметрах: *a* – периодическая автомодуляция, $\Delta = 0.0$, $I_0 = 0.028$; *б* – хаотические колебания, $\Delta = 0.0$, $I_0 = 0.038$; *в* – квазипериодическая автомодуляция, $\Delta = 1.0$, $I_0 = 0.05$; *г* – хаотические колебания, $\Delta = 1.0$, $I_0 = 0.12$; *д* – гиперхаос, $\Delta = 1.0$, $I_0 = 0.15$

(б) к малым сдвигам по фазе и времени, аналогично генератору ван дер Поля (см. разделы 2 и 5).

Рис. 3 иллюстрирует результаты, полученные при численном решении уравнений (6) с приближенными граничными условиями \mathcal{B} . Первая колонка показывает зависимость от времени электронного КПД η , вычисленного по поперечным импульсам электронов p на коллекторном конце лампы по формуле

$\eta_{\perp} = 1 - 1/(2\pi) \int_0^{2\pi} |p|^2 d\varphi_0$. Вторая колонка иллюстрирует спектр, полученный посредством фурье-анализа комплексной амплитуды поля выходного сигнала. В третьей колонке представлены накапливающиеся суммы $S_n(t)$, соответствующие первым пяти показателям. Показаны следующие типы колебаний: режим автомодуляции (а); неразвитые хаотические колебания, возникшие после бифуркаций удвоения периода (б); квазипериодическая автомодуляция (в); неразвитые хаотические колебания, возникшие после разрушения квазипериодического движения (з); гиперхаос (д). Те зависимости $S_n(t)$, которые нарастают с течением времени, соответствуют положительным характеристическим показателям. Суммы, ассоциирующиеся с нулевыми показателями, отмечены на рисунке значком «0». Заметим, что в случае квазипериодической автомодуляции (в) нулевого показателя три.

На рис. 4 приведены кривые зависимости сумм σ_n первых нескольких показателей Ляпунова, занумерованных в порядке убывания, от числа членов суммы. Точка пересечения каждого графика с осью абсцисс дает оценку ляпуновской размерности аттрактора по формуле Каплана–Йорке (4).

Рассмотрим результаты оценки размерности для различных режимов. В случае граничных условий \mathcal{A} для «слабого» хаоса размерность D получается равной примерно 16.4, а в режиме гиперхаоса 30.6. Для граничных условий \mathcal{B} размерности еще выше, соответственно, $D \approx 26.6$ (слабый хаос) и $D \approx 40.7$ (гиперхаос).

Для сравнения можно отметить, что оценки размерностей аттракторов для режимов слабого и развитого хаоса в лампе обратной волны [15] составили 3.5 и 6.4. Для ЛБВ с запаздывающей обратной связью авторы работы [16] оценили значение хаотического аттрактора как $2 < D < 3$. Таким образом, размерности аттракторов хаотических режимов в исследуемой системе оказываются существенно выше, чем размерности, полученные для других электронно-волновых систем. Заметим,

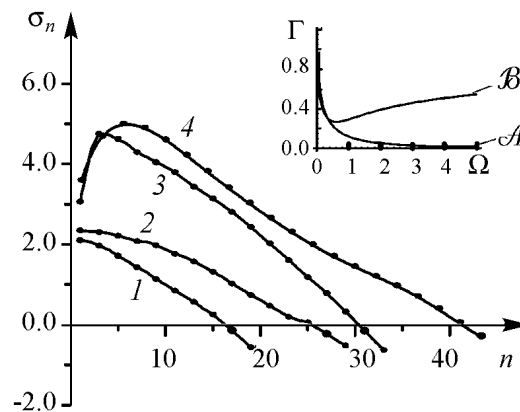


Рис. 4. Зависимости сумм показателей σ_n от их числа для различных режимов: 1, 2 – неразвитый хаос ($\Delta = 0.0$, $I_0 = 0.0365$ для граничных условий \mathcal{A} и $\Delta = 0.0$, $I_0 = 0.038$ для граничных условий \mathcal{B} соответственно), 3, 4 – гиперхаос ($\Delta = 1.0$, $I_0 = 0.11$ для граничных условий \mathcal{A} и $\Delta = 1.0$, $I_0 = 0.15$ для граничных условий \mathcal{B}). На врезке показана зависимость модуля коэффициента отражения от частоты для граничных условий рупора \mathcal{A} и приближенных граничных условий \mathcal{B} , взятые из работы [18]

что возможность существования хаотических аттракторов обсуждалась ранее в [13]. В ней на примере уравнения Мэки–Гласса было показано, что, увеличивая параметр задержки, можно было наблюдать хаотические аттракторы, характеризующиеся двадцатью положительными показателями, и, как следует из формулы (4), обладающие высокой размерностью. В отличие от работы [13], в нашем случае высокая размерность определяется не наличием очень большого числа положительных показателей Ляпунова, а присутствием большого числа малых по абсолютной величине отрицательных показателей Ляпунова.

Подробное обсуждение и объяснение этого явления проведено в [17, 19]. Здесь заметим, что взаимодействие вблизи границы полосы пропускания приводит к появлению значительного числа высокодобротных мод системы, что, в свою очередь, обуславливает аномально высокое значение ляпуновской размерности хаотических аттракторов в гиротроне. Следует ожидать, что аналогичные явления можно будет обнаружить при исследовании других микроволновых электронных приборов, работающих вблизи границы полосы пропускания (релятивистских оротронов, при самовозбуждении ЛБВ ЦСР и т.д.).

4. Динамика кольцевого нелинейного резонатора

Рассмотрим систему, в которой имеется как распределение по координате, так и по времени (см. рис. 1, в). В качестве модели выберем резонатор, содержащий нелинейную среду с модуляционной неустойчивостью. Данную систему можно описать при помощи нелинейного уравнения Шредингера

$$i \left(\frac{\partial A}{\partial t} + v_g \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\omega_0''}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \beta |A|^2 A = 0 \quad (7)$$

с запаздывающим граничным условием

$$A(0, t) = A_0 \exp(i\omega t) + R \cdot A(L, t - \tau). \quad (8)$$

Здесь A – медленно меняющаяся комплексная амплитуда волны, v_g – групповая скорость, ω_0'' – параметр дисперсии, β – параметр нелинейности, $R = \rho \exp(i\psi)$ – комплексный коэффициент обратной связи, τ – время запаздывания, L – протяженность нелинейной среды, A_0 и ω – амплитуда и частота входного сигнала, соответственно. Все переменные считаются безразмерными.

Эта система была подробно изучена Икедой с соавторами (см., например, [32] и цитированную там литературу), которые рассматривали динамику светового пучка в оптическом резонаторе, содержащем нелинейный диэлектрик. Влияние эффектов модуляционной неустойчивости на динамику данной системы было учтено в работе [33]. В ней был проведен теоретический анализ режимов стационарных одночастотных колебаний и определены условия их устойчивости, а также выполнено численное моделирование автомодуляции и переходов к хаосу. Было обнаружено, что по мере увеличения амплитуды входного сигнала A_0 либо глубины обратной связи ρ стационарный режим теряет устойчивость, и в системе возникает периодическая автомодуляция. Она обусловлена возбуждением пары сателлитов с частотами, близкими к частотам, на которых инкремент модуляционной неустойчивости максимален. С увеличением надкритичности происходит переход к хаосу через разрушение

квазипериодического движения. Отметим, что в [33] рассматривался случай, когда модуляционная неустойчивость является конвективной, и лишь наличие механизма обратной связи превращает ее в глобальную.

Продemonстрируем типичные режимы колебаний, наблюдающиеся в модели (7), (8). Для этого зафиксируем частоту входного сигнала и будем плавно увеличивать амплитуду. Значения остальных параметров: коэффициент обратной связи $\rho = 0.5$, $\psi = 0.0$, параметр нелинейности $\beta = 1.0$, параметр дисперсии $\omega''_0 = 1.0$, частота входного сигнала $\omega = 0.0$, групповая скорость $v_g = 2.0$, время запаздывания $\tau = 0.05$, длина основной части системы $L = 20$. Значение τ выбрано малым для удобства численного моделирования. Как показывают расчеты, при большой длине L увеличение τ не приводит к каким-либо качественным изменениям.

При малых значениях A_0 происходит установление режима гармонических колебаний на частоте внешнего воздействия. Переходный процесс носит характер медленно затухающих осцилляций. В спектре показателей Ляпунова все показате-

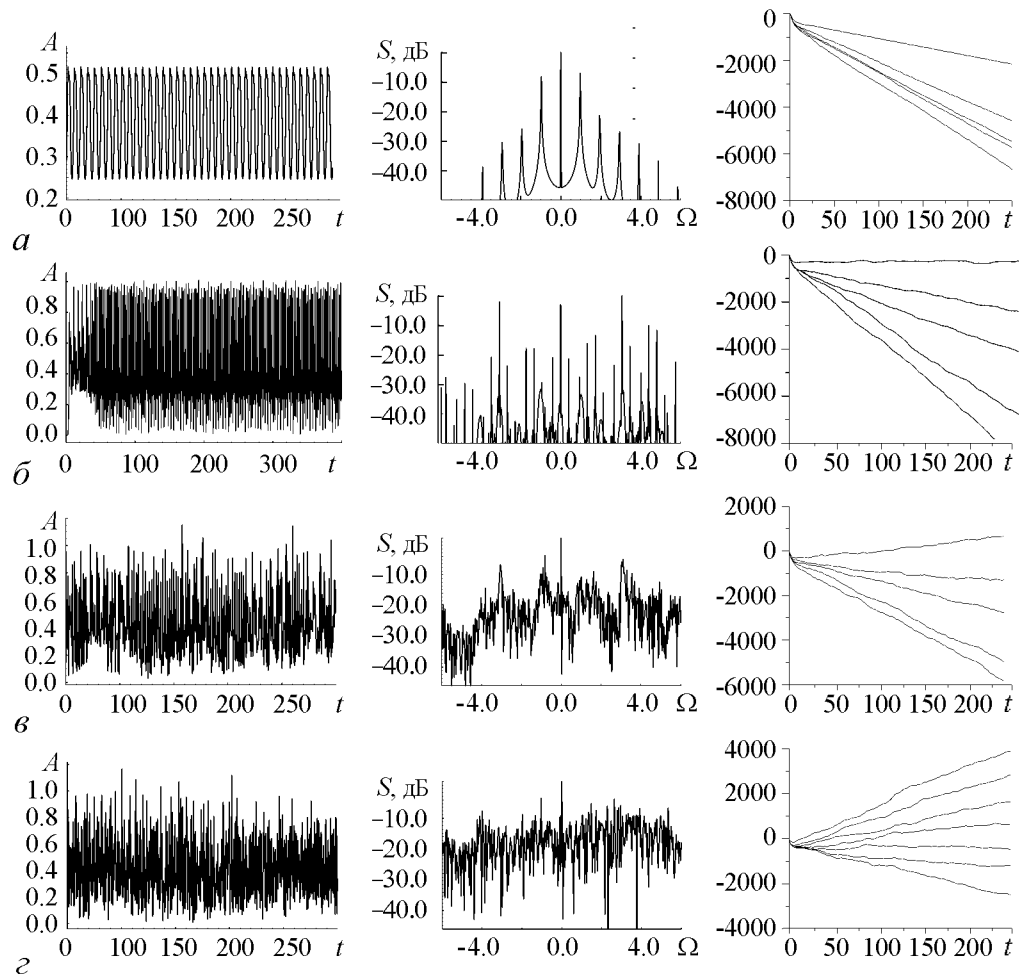


Рис. 5. Зависимость входного сигнала $|A(0, t)|$ от времени (первая колонка), спектр сигнала (вторая колонка) и зависимость накапливающихся сумм для старших пяти показателей Ляпунова от времени для типичных режимов динамики автогенератора кольцевого нелинейного резонатора: a – периодическая автомодуляция, $A_0 = 0.45$; b – квазипериодическая автомодуляция, $A_0 = 0.57$; v – хаос, $A_0 = 0.6$; z – гиперхаос, $A_0 = 1.4$, значения остальных параметров указаны в тексте.

ли отрицательны. Отметим, что в силу граничного условия симметрия уравнения нарушается (по сравнению с двумя первыми случаями) и нулевых показателей Ляпунова в спектре нет. Длительность переходного процесса с ростом A_0 постепенно увеличивается, и при $A_0 = 0.43$ мягко возникает режим периодической автомодуляции. Типичная зависимость модуля амплитуды от времени представлена на рис. 5, *а*. По мере дальнейшего увеличения амплитуды входного сигнала автомодуляция становится вначале квазипериодической (рис. 5, *б*), а затем – хаотической (рис. 5, *в*). Видно, что в квазипериодическом режиме появляется нулевой показатель. Точно локализовать в пространстве параметров режим квазипериодики достаточно сложно, и мы определили его лишь как точку, где один из показателей Ляпунова переходит через ноль. В хаотическом режиме появляется положительный показатель.

Будем увеличивать амплитуду внешнего воздействия дальше. В этом случае выходим из области параметров, отвечающих случаю конвективной модуляционной неустойчивости, в область, где она оказывается абсолютной. В [34] было установлено, что данный эффект связан с тем, что с ростом интенсивности сигнала расширяется диапазон неустойчивых возмущений, которые захватывают область встречных волн, имеющих отрицательную групповую скорость. Как показали наши расчеты, в этом случае реализуются режимы гиперхаоса. Это связано с тем, что вблизи частот отсечки происходит сгущение собственных мод резонатора и всё большее их число попадает в область неустойчивых возмущений. Таким образом, переход от конвективной модуляционной неустойчивости к абсолютной сопровождается появлением в спектре новых положительных показателей Ляпунова. Иллюстрацией этого служит рис. 6, где приведены зависимости сумм σ_n первых нескольких показателей Ляпунова, занумерованных в порядке убывания, от числа членов суммы. Графики построены: для случая $A_0 = 0.6$, что соответствует порогу возникновения хаотических колебаний в системе (модуляционная неустойчивость при этом является конвективной и сложная динамика обусловлена запаздывающей обратной связью); для случая $A_0 = 1.4$, что отвечает критическому значению амплитуды входного сигнала, когда

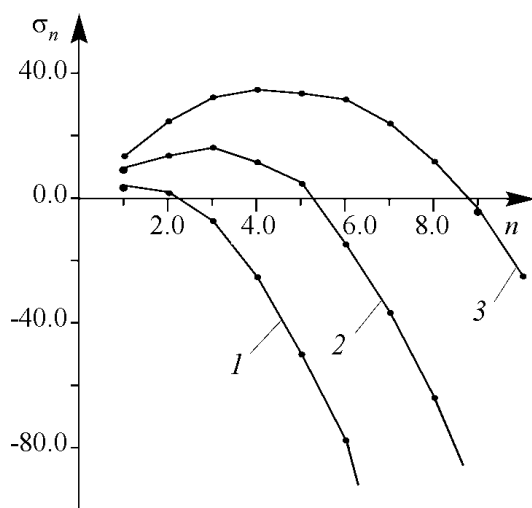


Рис. 6. Зависимости сумм показателей Ляпунова σ_n от числа показателей для хаотических режимов в кольцевом нелинейном резонаторе при следующих значениях A_0 : 1 – 0.6, 2 – 0.8, 3 – 1.4

имеет место смена характера модуляционной неустойчивости с конвективной на абсолютную; для случая $A_0 = 0.8$ – некоторое промежуточное значение. Видно, что с ростом амплитуды имеет место рост размерности D от 2.1 до 8.8. Рост размерности связан с возникновением все новых возмущений, имеющих отрицательную групповую скорость.

Отметим, что для обоих случаев (гиротрон с нефиксированной структурой поля и кольцевой нелинейный резонатор под внешним воздействием) принципиальным является то, что они работают вблизи критической частоты. На основании проведенных исследований был сделан вывод, что в этом случае высокая размерность хаотических аттракторов является типичной ситуацией (см. обсуждение этого вопроса в работах [35, 36]).

5. Типичные особенности расчета спектра показателей Ляпунова

В данном разделе обсуждаются некоторые особенности процедуры расчета спектра показателей Ляпунова, которые характерны для распределенных автоколебательных систем. Все представленные ниже результаты являются обобщением исследований, проведенных для рассмотренных в работе моделей. Некоторые результаты, представленные далее и относящиеся к системам с запаздывающей обратной связью, были опубликованы в [22]. Однако, как оказалось, особенности, обнаруженные для систем с запаздывающей обратной связью (первый тип, по нашей терминологии), присущи всему классу рассмотренных нами систем.

5.1. Зависимость от вида начального возмущения. Обычно в литературе считается (см., например, [1]), что начальные векторы возмущения должны выбираться ортогональными. Определить ортогональный набор векторов, разумеется, можно разными способами. Пусть, как в описано разделе 1, проведена искусственная дискретизация и требуется рассчитать N показателей Ляпунова, причем $N < M$, где M – число разбиений. В настоящей работе N ортогональных векторов возмущений задавались различным образом: в виде полиномов Лагранжа, Лагерра, тригонометрических функций и др. [22].

Сопоставление результатов показало, что значения показателей Ляпунова не зависят от вида начальных возмущений при условии, что время расчета достаточно большое³ (аналогичный вывод был сделан в [12] при изучении диода Пирса, хотя в этой работе рассчитывался только старший показатель). Более того, нами было показано, что требование ортогональности компонент возмущения на первом шаге не является критическим; это связано с тем, что уже на следующем шаге происходит его ортогонализация.

Непосредственный вид начального возмущения оказывает влияние лишь на скорость выхода зависимости накапливающихся сумм от времени на линейный закон. При этом расчеты могут быть существенно ускорены, если векторы первоначальных возмущений сразу ориентировать по направлениям главных осей M -мерного эллипсоида изображающих точек в фазовом пространстве, растяжение

³Под «большими» мы понимаем времена, много большие характерных временных масштабов системы, таких как период автомодуляции или время запаздывания в цепи обратной связи

и сжатие которого характеризует спектр показателей Ляпунова (см. [1]). К сожалению, эти направления, как правило, заранее не известны за исключением некоторых простых модельных систем типа точечных отображений, где их удается найти аналитически. Тем не менее, может оказаться полезным, например, задание начального возмущения в виде разложения по линейным собственным модам. Подобная методика, в частности, применялась в [17, 19] для ускорения расчетов. На рис. 3, б, в отчетливо видно, что существует начальный участок на зависимости накапливающейся суммы $S_n(t)$, отвечающий переходному процессу до выхода на линейный закон. Причем длительность такого переходного процесса может быть много больше характерного времени системы (например, периода автомодуляции) и чем больше номер характеристического показателя, тем больше это время. Таким образом, усовершенствование процедуры определения начальных возмущений может существенно сократить время расчета, особенно если рассчитывается большое число показателей (несколько десятков). Аналогичное рассуждение справедливо и для других систем. Такие участки переходных процессов (изломы на зависимости $S_n(t)$) заметны и на рис. 5, иллюстрирующем динамику кольцевого нелинейного резонатора.

Отметим также следующее обстоятельство. Как правило, требуется рассчитать показатели Ляпунова не при каких-то одних значениях управляющих параметров, а в диапазоне их изменения, например, построить зависимость показателей Ляпунова от какого-либо параметра. В этом случае следует при переходе к новой точке в пространстве управляющих параметров сохранять начальную ориентацию векторов возмущения ту же, что и на последнем шаге в какой-либо близлежащей точке. Это своего рода аналог процедуры расчета с наследованием начальных условий, но в данном случае не только для исходной, но и для возмущенных систем. Подобный подход использовался в [22].

5.2. Поведение нулевых показателей Ляпунова. Как уже отмечалось в разделе 2, для ряда распределенных систем с симметрией должны присутствовать нулевые показатели Ляпунова. Например, в однопараметрической модели ЛОВ [15], гиротрона с нефиксированной структурой поля [17] и в модели автогенератора с запаздывающей обратной связью [22] режимы, отличные от стационарных колебаний, характеризуются двумя нулевыми показателями Ляпунова, а квазипериодические колебания – тремя нулевыми показателями Ляпунова (см. суммы $S_n(t)$ на рис. 2 и 3). Наличие двух нулевых показателей связано с симметрией относительно сдвига начала отсчета времени и симметрией относительно фазового сдвига. Однако в режимах стационарной генерации, когда симметрия относительно сдвига начала отсчета времени вырождается, имеется лишь один нулевой показатель; в режимах отсутствия генерации, когда вырождаются обе симметрии, все показатели Ляпунова отрицательны. Таким образом, как уже указывалось выше, наличие соответствующего числа нулевых показателей является одним из критериев правильности расчетов.

Было обнаружено, что накапливающиеся суммы, отвечающие нулевым показателям Ляпунова, ведут себя по-разному в различных режимах. Так, в случаях стационарной генерации и в периодической автомодуляции накапливающиеся суммы быстро выходят на линейную зависимость, причем значения соответствующих показателей Ляпунова получаются нулевыми с высокой точностью (до 10^{-5} при шаге $d\tau = 10^{-2}$ и $\varepsilon = 10^{-2}$). В случае хаотических колебаний поведение накапливаю-

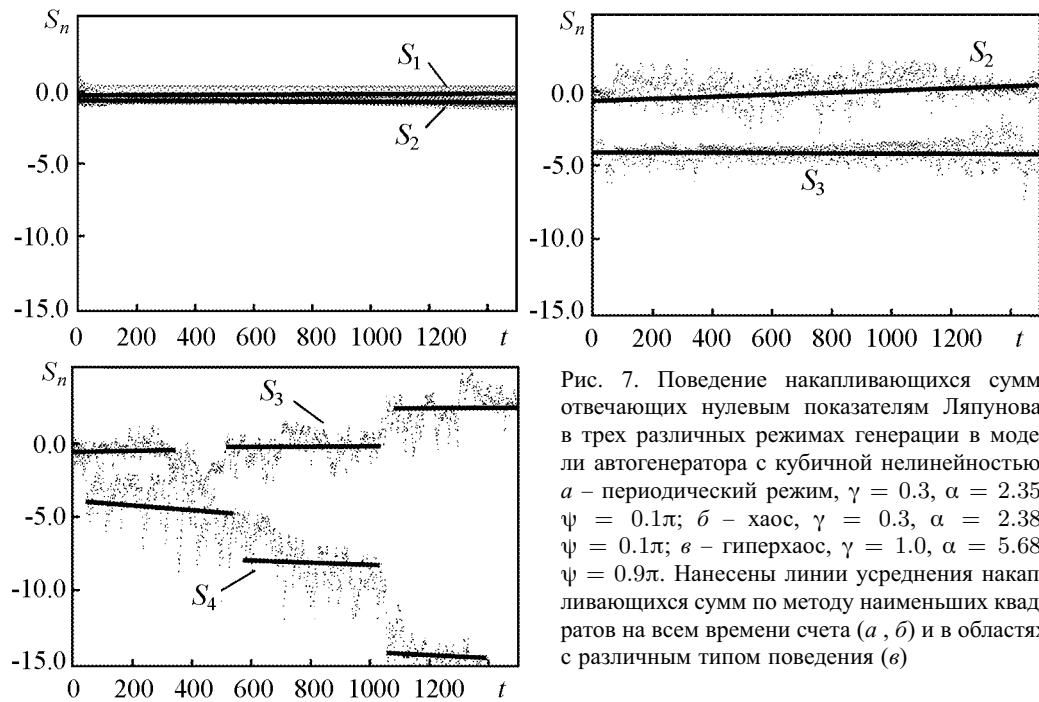


Рис. 7. Поведение накапливающихся сумм, отвечающих нулевым показателям Ляпунова, в трех различных режимах генерации в модели автогенератора с кубической нелинейностью: *a* – периодический режим, $\gamma = 0.3$, $\alpha = 2.35$, $\psi = 0.1\pi$; *b* – хаос, $\gamma = 0.3$, $\alpha = 2.38$, $\psi = 0.1\pi$; *e* – гиперхаос, $\gamma = 1.0$, $\alpha = 5.68$, $\psi = 0.9\pi$. Нанесены линии усреднения накапливающихся сумм по методу наименьших квадратов на всем времени счета (*a*, *b*) и в областях с различным типом поведения (*e*)

щихся сумм является более сложным и в ряде случаев может носить ступенчатый характер: в течение некоторого времени величина S_n является практически постоянной, после чего скачком изменяет свое значение [22].

На рис. 7 приведены для сравнения графики зависимости накапливающихся сумм, отвечающих нулевым показателям Ляпунова, в трех режимах генерации: периодическом, хаотическом и гиперхаотическом для модели автогенератора с кубической нелинейностью. Хорошо видно, что в режиме периодической генерации накапливающиеся суммы слабо колеблются вблизи нулевого значения. Имеющийся монотонный рост происходит чрезвычайно медленно, так что получающиеся усреднением методом наименьших квадратов значения показателей Ляпунова оказываются на 2–3 порядка меньше, чем норма возмущения ε . На рис. 7, *a* нанесены линии усреднения накапливающихся сумм $S_n(t)$ по методу наименьших квадратов; видно, что они практически не меняются с течением времени.

В режимах хаоса и гиперхаоса (рис. 7, *b*, *e*) зависимость накапливающихся сумм от времени носит гораздо более сложный характер. Видны области, где накапливающиеся суммы ведут себя по-разному, убывая или возрастая с различной

Таблица 3

Значения нулевых показателей Ляпунова в различных режимах генерации в модели автогенератора с кубической нелинейностью, $\varepsilon = 0.01$

Периодическая автомодуляция $\gamma = 0.3$, $\alpha = 1.4$, $\psi = 0.1\pi$	Хаотические колебания $\gamma = 0.3$, $\alpha = 1.4$, $\psi = 0.1\pi$	Гиперхаос $\gamma = 1$, $\alpha = 5.68$, $\psi = 0.9\pi$
0.00002	0.001	0.009
0.00015	-0.002	-0.02

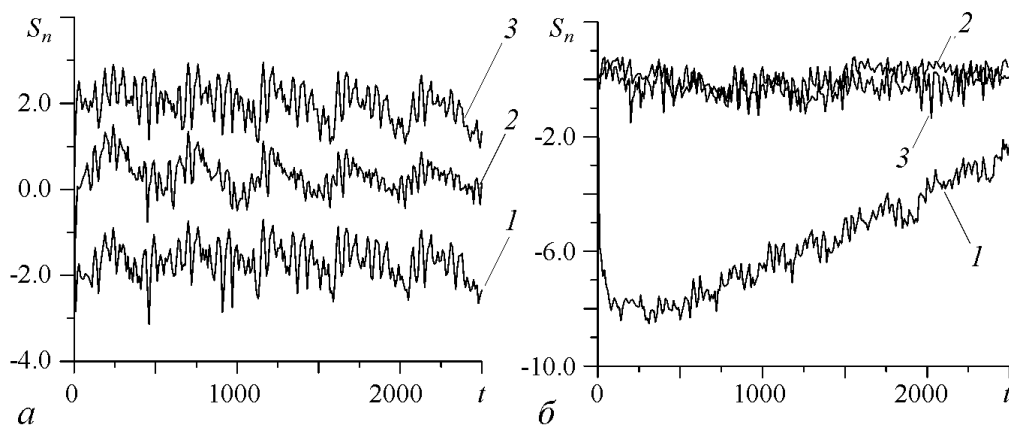


Рис. 8. Поведение накапливающихся сумм, отвечающих первому нулевому показателю (а) и второму нулевому показателю (б), для модели автогенератора с кубичной нелинейностью в режиме квазипериодических колебаний, $\gamma = 0.3$, $\alpha = 3.77$, $\psi = 0.9\pi$. Цифрами на рисунке отмечены кривые, вычисленные при задании разных видов начальных возмущений: 1 – случайное начальное возмущение, 2 – возмущение, задаваемое по формуле (9), 3 – возмущение в виде тригонометрических функций

скоростью. Соответственно, падает точность вычисления показателей Ляпунова, и значение нулевых показателей оказывается порядка ε . Точность расчета нулевых показателей Ляпунова в сложных режимах можно существенно улучшить, если проводить усреднение методом наименьших квадратов не на всей области расчетов, а разбивать ее на участки, в которых поведение накапливающихся сумм остается приблизительно одинаковым (см. рис. 7, в). Значения нулевых показателей Ляпунова, отвечающих представленным на рис. 7 режимам, приведены в табл. 3. Видно уменьшение точности с переходом от периодического режима к хаосу и затем к гиперхаосу. Отметим, что все равно точность остается сравнимой с ε (норма вектора возмущения, который добавляется к невозмущенной системе).

Как показало наше исследование, нулевые показатели оказываются наиболее чувствительными к виду начального возмущения. На рис. 8 показаны зависимости накапливающихся сумм $S_n(t)$ от времени, отвечающих первому (а) и второму (б) нулевым показателям в режиме квазипериодических колебаний для генератора Ван дер Поля. Цифрами отмечены суммы, полученные при выборе разных начальных возмущений: 1 – случайное распределение; 2 – в виде функций, определяемых формулой

$$\tilde{F}_n(x, t) = (0, \dots, 0, F_{(n-1)d}, \dots, F_{nd}, 0, \dots, 0), \quad (9)$$

где число ненулевых компонент n -го вектора возмущений d есть целая часть отношения M/N ⁴; 3 – синусоидальное распределение ($F_n(t) = \sin(\pi n \tau_i / (2N))$), где τ_i есть i -й момент времени в петле обратной связи).

Оценка нулевых показателей приведена в табл. 4. Из сравнения значений показателей видно, что начальное распределение влияет на их величину, но в целом точность определения нулевых показателей Ляпунова остается очень высокой.

⁴Значения компонент вектора возмущений могут выбираться случайными, постоянными и др. (очевидно, это не повлияет на ортогональность векторов), но так, чтобы выполнялось условие нормировки. Далее рассматривается случай, когда они постоянные.

Значение нулевых показателей
в модели автогенератора с кубической нелинейностью
в режиме квазипериодических колебаний ($\gamma = 0.3$, $\alpha = 3.77$, $\psi = 0.9\pi$)

Случайное распределение	Ступенчатая функция	Синусоидальное распределение
-0.000031	-0.00012	-0.00016
0.002	0.00024	-0.000064

5.3. Влияние параметров численной схемы. В ходе численного моделирования проверялась зависимость показателей Ляпунова от параметров численной схемы: шага по времени $d\tau$, нормы начального возмущения ε , числа рассчитываемых показателей и числа L шагов между перенормировками. Наименее чувствительным к изменению параметров схемы оказывается старший показатель Ляпунова; наиболее чувствительными, как уже отмечалось, – нулевые показатели в случае сложных режимов. С другой стороны, благодаря этой чувствительности можно идентифицировать нулевые показатели Ляпунова. При одинаковом значении управляющих параметров, но при разном выборе параметров численной схемы сильно изменяются лишь два элемента спектра показателей Ляпунова, которые и следует ассоциировать с нулевыми показателями. Это, в свою очередь, позволяет различать режимы хаоса и гиперхаоса: после того, как найдены нулевые показатели Ляпунова, становится ясно, сколько имеется положительных показателей.

Изменение таких параметров численного метода, как нормы возмущения и шага по времени, показало, что значения показателей Ляпунова остаются практически неизменными при постоянном произведении $\varepsilon \cdot L \cdot d\tau$. Эта величина должна быть достаточно небольшой в случае хаотических режимов⁵. В регулярных режимах ее можно выбирать на порядок большей. Данное обстоятельство вызвано тем, что с увеличением времени между перенормировками в каждом векторе возмущения начинает доминировать составляющая с максимальным показателем Ляпунова. Более того, если L слишком велико, все векторы возмущений окажутся ориентированными вдоль наиболее неустойчивого направления, отвечающего старшему показателю Ляпунова, и провести их ортогонализацию и вычисление спектра показателей Ляпунова не удастся. Это обстоятельство объясняет хорошую точность расчета старшего показателя Ляпунова и высокую чувствительность нулевых показателей Ляпунова к изменению параметров численной схемы. Отметим также, что выбор слишком больших значений L (порядка 10) в режимах хаоса и гиперхаоса приводит к тому, что возмущение начинает сильно расходиться и численная схема оказывается неустойчивой.

Было установлено, что число рассчитываемых показателей Ляпунова не влияет на получающиеся значения показателей. Это связано непосредственно с методикой расчетов: алгоритм Бенеттина предполагает последовательное вычисление показателей и на первом шаге рассчитывается показатель, соответствующий направлению в фазовом пространстве, вдоль которого имеет место максимальный рост начального возмущения. Ясно, что увеличение числа показателей не может изменить это значение, поскольку лишь добавляет новые направления к уже имеющимся. Нужно,

⁵Для систем типа генератор ван дер Поля было установлено, что наиболее эффективно алгоритм работает при $\varepsilon \cdot L \cdot d\tau \sim 10^{-4}$ [22].

однако, отметить, что с увеличением номера показателя при его вычислении будет происходить потеря точности расчетов, поскольку ему отвечает всё меньшее по модулю возмущение в фазовом пространстве.

Заключение

Таким образом, в настоящей работе были представлены результаты расчетов спектров характеристических показателей и обсуждены основные особенности спектра показателей Ляпунова для ряда моделей распределенных автоколебательных систем радиофизической природы. Продемонстрировано, что различные распределенные системы обладают схожими свойствами. Представленные результаты показали, что спектр показателей Ляпунова является эффективным инструментом для анализа «тонкой структуры» хаотических режимов, позволяющим количественно охарактеризовать качественно различные типы хаотического поведения.

Показано, что конкретный вид начального возмущения не влияет на получаемые значения спектра показателей Ляпунова и сказывается лишь на скорости выхода зависимости накапливающихся сумм от времени на линейный закон. Установлено, что число рассчитываемых показателей Ляпунова не влияет на точность вычислений. Описана высокая чувствительность нулевых показателей Ляпунова к изменению параметров численной схемы, что может облегчить различение режимов «слабого» хаоса с единственным положительным показателем Ляпунова и гиперхаоса. Обсуждается зависимость результатов компьютерного моделирования от параметров численной схемы.

Проведен расчет ляпуновской размерности в хаотических режимах по формуле Каплана-Йорке. Установлено, что аномально высокая размерность хаотических аттракторов является характерной для систем, работающих вблизи критической частоты, что связано с наличием возмущений, имеющих отрицательную групповую скорость.

Авторы благодарны С.П. Кузнецову, А.Г. Рожневу и Н.М. Рыскину за обсуждение результатов работы и полезные замечания.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 06-02-16773 и 05-02-16931. Работа Балякина А.А. была также поддержана грантом CRDF Y3-P-06-02 и грантом Президента Российской Федерации для поддержки молодых кандидатов наук МК-4945.2006.2.

Библиографический список

1. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2001. 296 с.
2. Ott E. Chaos in dynamical systems. NY: Cambridge Univ. Press, 1993. 385 p.
3. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Изд-во Мир, 1988. 240 с.
4. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука. Физматлит. 1997.
5. Трубецков Д.И., Анфиногентов В.Г., Рыскин Н.М., Титов В.Н., Храмов А.Е. Сложная динамика электронных приборов СВЧ (нелинейная нестационарная теория с позиций нелинейной динамики) // Радиотехника. 1999. № 4. С. 61.

6. *Airila M.I., Dumbrajs O., Reinfelds A., Strautins U.* Nonstationary oscillations in gyrotrons // *Physics of Plasmas*. 2001. Vol. 8, № 3. P. 4608.
7. *Ginzburg N.S., Zaitsev N.I., Ilyakov E.V., Kulagin I.S., Novozhilova Y.V., Rozenthal R.M., and Sergeev A.S.* Observation of chaotic dynamics in a powerful backward-wave oscillator // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 89, № 10. 108304.
8. *Rozental R.M., Zaitsev N.I., Kulagin I.S. et al.* Nonstationary processes in an X-band relativistic gyrotron with delayed feedback // *IEEE Trans. Plasma Sci.* 2004. Vol. 32, № 2. P. 418.
9. *Rozental R.M., Zaitsev N.I., Kulagin I.S. et al.* Nonstationary processes in an X-band relativistic gyrotron with delayed feedback // *IEEE Transaction on Plasma Science*. 2004. Vol. 32. № 2. P. 418.
10. *Shigaev A.M., Dmitriev B.S., Zharkov D.V., Ryskin N.M.* Chaotic dynamics of delayed feedback klystron oscillator and its control by external signal // *IEEE Transaction on Electron Devices*. 2005. Vol. 52, № 5. P. 790.
11. *Безручко Б.П., Булгакова Л.В., Кузнецов С.П., Трубецков Д.И.* Стохастические автоколебания и неустойчивость в лампе обратной волны // *Радиотехника и электроника*. 1983. Т. 28, № 6. С. 1136.
12. *Анфиногентов В.Г.* Хаотические колебания в электронном потоке с виртуальным катодом // *Известия вузов. ПНД*. 1994. Т. 2, № 5. С. 69.
13. *Farmer J.D.* Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system // *Physica D*. 1982. Vol. 4, № 3. P. 366.
14. *Cenys A., Tamasevicius A., Mykolaitis G., Blumeliene S.* Coupled VHF delay line chaos generators // *Proceedings of the first international workshop on the noise radar technology (NRTW-2002)*. Yalta, Ukraine, September 18-20, 2002. P. 136.
15. *Кузнецов С.П., Трубецков Д.И.* Хаос и гиперхаос в лампе обратной волны // *Изв. вузов. Радиофизика*. 2004. Т. 47, № 5-6. С. 383.
16. *Dronov V., Hendry M.R., Antonsen T.M. and Ott E.* Communication with a chaotic traveling wave tube microwave generator // *Chaos*. 2004. Vol. 14, № 1. P. 30.
17. *Блохина Е.В., Рожнев А.Г.* Хаос и гиперхаос в гиротроне // *Изв. вузов. Радиофизика*. 2006. Т. 49, № 10. С. 887.
18. *Блохина Е.В., Кузнецов С.П., Рожнев А.Г.* Высокая размерность хаотических аттракторов в гиротроне с нефиксированной структурой поля // *Письма в ЖТФ*. 2006. Т. 32, № 8. С. 83.
19. *Blokhina E.V., Kuznetsov S.P., Rozhnev A.G.* High-dimensional chaos in a gyrotron // *IEEE Trans. on Electron Devices*. 2007. Vol. 54, № 2. P. 188.
20. *Ott E., Hunt B.R., Szunyogh I., Zimin A. V., Kostelich E.J., Corazza M., Kalnay E., Patil D.J., Yorke J.A.* A local ensemble Kalman filter for atmospheric data assimilation // arxiv.org/abs/physics/0203058.
21. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. М.: Наука, Физматлит, 2002.
22. *Балякин А.А., Рыскин Н.М.* Особенности расчета спектров показателей Ляпунова в распределенных автоколебательных системах с запаздывающей обратной связью // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2007. Т. 16, № 6. С. 3.

23. Рыскин Н.М., Шигаев А.М. Сложная динамика простой модели распределенной автоколебательной системы с запаздыванием // ЖТФ. 2002. Т. 72, № 7. С. 1.
24. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
25. Dmitrieva T.V., Ryskin N.M., Shigaev A.M. Complex dynamics of simple models of distributed self-oscillating delayed feedback systems // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2001. Vol. 4, № 4. P. 376.
26. Дмитриева Т.В., Рыскин Н.М., Титов В.Н., Шигаев А.М. Сложная динамика простых моделей распределенных электронно-волновых систем // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7, № 6. С. 66.
27. Кузнецов С.П. Сложная динамика генераторов с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25, № 12. С. 1410.
28. Kuznetsov S.P., Mosekilde E. Coupled map lattices with complex order parameter // Physica A 291. 2001., № 3-4, P. 299.
29. Гинзбург Н.С., Завольский Н.А., Нусинович Г.С., Сергеев А.С. Установление автоколебаний в электронных СВЧ генераторах с дифракционным выводом излучения // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29, № 1. С. 106.
30. Rozhnev A.G. Boundary Conditions in the Theory of Microwave Electron Devices with a Diffraction Energy Output // J. Comm. Techn. Elect. 2000. Vol. 45, Suppl. 1. P. 595.
31. Блохина Е.В., Рожнев А.Г. Влияние отражений от выходного рупора на динамику гиротрона // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 11. С. 1390.
32. Розанов Н.Н. Оптическая бистабильность и гистерезис в распределенных нелинейных системах. М.: Физматлит, 1997.
33. Балякин А.А., Рыскин Н.М., Хаврошин О.С. Нелинейная динамика модуляционной неустойчивости в распределенных резонаторах под внешним гармоническим воздействием // Изв. вузов. Радиофизика. 2007. Т. 50, № 9. С. 800.
34. Балякин А.А., Рыскин Н.М. Смена характера модуляционной неустойчивости вблизи критической частоты // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30, вып. 5. С. 6.
35. Balyakin A.A., Blokhina E.V. High-dimensional chaotic regimes in distributed radio-physical systems operating near the cutoff frequency // PIERS Proceedings. Prague, Czech Republic, August 27-30, 2007. P. 507.
36. Балякин А.А., Блохина Е.В. Особенности расчета спектра показателей Ляпунова в распределенных системах // Тез. докл. Международ. конгр. «Нелинейный динамический анализ – 2007». С.-Петербург, 4-8 июня 2007. СПб: СПбГУ, 2007. С. 362.

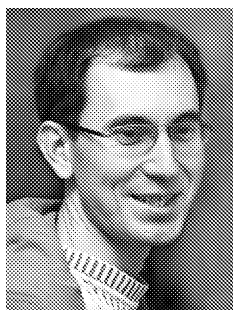
Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 16.11.2007
После доработки 26.02.2008

PECULIARITIES OF CALCULATION OF THE LYAPUNOV EXPONENTS SET IN DISTRIBUTED SELF-OSCILLATED SYSTEMS WITH DELAYED FEEDBACK

A.A. Balyakin, E.V. Blokhina

The numerical scheme for calculation the set of Lyapunov exponents in distributed systems with delayed feedback based on a modification of Benettine algorithm is described. The results of numerical simulation of two such systems (active oscillator with cubic nonlinearity and active oscillator of klystron type) are presented. The sets of Lyapunov exponents in different regimes, particularly in regimes of «weak» and «developed» chaos are analyzed. The calculation peculiarities of the set of Lyapunov exponents in the systems with delayed feedback are discussed.



Балякин Артем Александрович – окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета с отличием (2001), кандидат физико-математических наук (2004), доцент кафедры нелинейной физики СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика распределенных систем, анализ количественных характеристик сложных режимов. Автор 16 научных статей.



Блохина Елена Владимировна – родилась в Саратове (1980). Окончила с отличием Саратовский государственный университет по специальности «радиофизика» (2002), кандидат физико-математических наук (2005, СГУ). С 2005 работает в СГУ. В настоящее время проходит стажировку в Университетском колледже Дублина (Ирландия). Научные интересы – нелинейная динамика микроволновых электронных устройств. Автор 17 статей в отечественных и зарубежных журналах.