



ОТОБРАЖЕНИЯ С УДВОЕНИЯМИ ПЕРИОДА С МОДУЛЯЦИЕЙ УПРАВЛЯЮЩЕГО ПАРАМЕТРА ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

А.П. Кузнецов, Е.В. Новиков, А.В. Савин

Показано, что введение модуляции управляющего параметра с использованием запаздывания может рассматриваться как физически мотивированный метод построения двумерных отображений с нефиксированным якобианом. Представлены примеры таких двухпараметрических и трехпараметрического отображений. Получены условия бифуркаций Неймарка–Сакера, удвоения периода и резонанса 1:2. Исследуется устройство пространства параметров методом карт динамических режимов. С его помощью выявлены области квазипериодических режимов и различных синхронных режимов.

Введение

Двумерные отображения представляют собой один из наиболее важных объектов для изучения в теории динамических систем и теории бифуркаций [1, 2]. Они интересны как сами по себе, так и по той причине, что могут выступать как сечения Пуанкаре трехмерных потоков [2]. Поэтому характерные для двумерных отображений типы поведения, фактически, переносятся на дифференциальные системы с размерностью фазового пространства, равной трем.

Двумерные отображения разбиваются на два класса: отображения с фиксированным и нефиксированным якобианом. Первые характеризуются постоянной диссипацией. Простейшим и наиболее популярным примером такой системы является отображение Эно [1, 2]

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \lambda - x_n^2 - \varepsilon y_n, \\y_{n+1} &= x_n.\end{aligned}\tag{1}$$

Физической системой, приводящей к отображению Эно, может служить диссипативный осциллятор под действием внешней силы, величина которой нелинейным (квадратичным) образом зависит от координаты осциллятора [2]. Основные феномены, которые демонстрируют отображения с постоянным якобианом, – это возможности хаоса и удвоений периода. В этом, однако, нет существенных отличий от более простого случая одномерных отображений.

Двумерные отображения с нефиксированным якобианом демонстрируют заметно более богатую динамику: возможность бифуркации Неймарка–Сакера рождения инвариантной кривой, картину разрушения инвариантной кривой, наличие квазипериодического поведения и эффектов синхронизации.

Одним из известных примеров отображений с нефиксированным якобианом может быть возмущенное нелинейным образом отображение Эно, предложенное Гонченко и др. [3, 4] для описания ситуаций вблизи гомоклинической петли:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \lambda - x_n^2 - \varepsilon y_n + \gamma x_n y_n + \mu x_n^3, \\y_{n+1} &= x_n.\end{aligned}\tag{2}$$

Авторы называют его «обобщенное отображение Эно» (generalized Hénon map). Недавние публикации, посвященные отображению (2) [3, 4], говорят о возможности различных интересных особенностей поведения таких систем¹. Естественно ожидать, что соответствующие черты динамики будут интересны не только с математической точки зрения, а будут важными и для приложений. Однако в этом плане ощущается недостаточная физическая мотивация аналогичных моделей. Достаточно сказать, что в работе [4] только выводу отображения (2) посвящено около 10 страниц сугубо математического текста, включающего емкие выкладки, имеющие вид традиционных математических доказательств.

Итак, возникает задача формирования физически мотивированных и допускающих физическую реализацию моделей, приводящих к обобщению отображения Эно на случай систем с нефиксированным якобианом. С другой стороны, желательно, чтобы они были максимально просты и допускали аналитическое исследование хотя бы основных бифуркаций. В настоящей статье предлагается применить для этой цели идеи управления хаосом [6] за счет введения запаздывания в управляющий параметр. Это дает некоторую исследовательскую программу продвижения от одномерных моделей к двумерным. Таким образом, задача управления выступает как способ построения новых существенных моделей². В качестве простейшего «генератора» новых отображений используется логистическое отображение (в различных формах). Это важно с позиций физических приложений, поскольку известно огромное количество примеров с соответствующим типом поведения. Затем аналогичный подход распространен на двухпараметрическое отображение с удвоениями периода.

1. Схема построения двумерных отображений. Простейший пример – отображение Эно

Итак, пусть задано одномерное отображение

$$x_{n+1} = F(x_n, \lambda),\tag{3}$$

где λ – параметр, управляющий удвоениями в системе. Теперь допустим, что значение переменной на предыдущем шаге x_{n-1} влияет на эволюцию системы таким

¹Укажем в связи с этим также PhD диссертацию Мейджера (2006) [5], в которой анализу отображения (2) посвящен специальный раздел.

²Заметим, что, хотя мы используем идеи управления, наша цель, в определенном смысле, противоположна: мы хотим построить системы с более сложным поведением, чем исходная система.

образом, что осуществляется модуляция управляющего параметра по закону

$$\lambda \rightarrow \lambda + \varepsilon(x_n - x_{n-1}), \quad (4)$$

где ε – параметр, отвечающий за запаздывающее воздействие. В результате получим новое отображение с двумя параметрами

$$x_{n+1} = F(x_n, \lambda + \varepsilon(x_n - x_{n-1})). \quad (5)$$

Если ввести новую переменную $y_{n+1} = x_n$, то получим двумерное отображение

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= F(x_n, \lambda + \varepsilon(x_n - y_n)), \\ y_{n+1} &= x_n. \end{aligned} \quad (6)$$

Применим описанную процедуру к логистическому отображению в виде

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2. \quad (7)$$

При введении запаздывающего воздействия с помощью соотношения (4) приходим к отображению

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda + \varepsilon(x_n - y_n) - x_n^2, \\ y_{n+1} &= x_n. \end{aligned} \quad (8)$$

Заменой переменной типа сдвига $x \rightarrow x + \varepsilon/2$, $y \rightarrow y + \varepsilon/2$ отображение (8) приводится точно к виду (1).

Таким образом, модуляция параметра, отвечающего за удвоения периода, с использованием задержанного сигнала приводит к отображению Эно. При этом амплитуда модуляции выступает как параметр диссипации. На рис. 1 воспроизведена полученная численно карта динамических режимов отображения Эно.

Стоит сказать несколько слов о методе построения карт динамических режимов, являющемся одним из эффективных компьютерных методов исследования многопараметрических нелинейных систем [2, 7]. При его применении в каждой точке плоскости параметров проводится следующая процедура. После выполнения большого числа итераций выделяется стадия процесса, для которой переходный процесс уже завершен. Затем численным образом определяется период колебаний, для чего выбранное значение переменной последовательно сравнивается с последующим. После этого «точка» плоскости (пиксель на экране компьютера) окрашивается в определенный цвет, соответствующий данному периоду колебаний.

В отдельные цвета окрашиваются также области неперiodических режимов (квазипериодическое поведение и хаос) и области «убегания» траекторий в бесконечность.

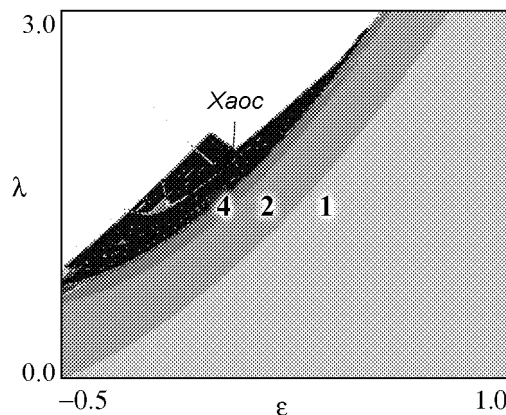


Рис. 1. Карта динамических режимов отображения (8). Цифрами обозначены периоды некоторых циклов

(Для черно-белых иллюстраций можно выбирать разные оттенки серого цвета.) В результате после сканирования плоскости параметров она оказывается «окрашенной» в цвета, соответствующие определенным режимам колебаний.

Если говорить с позиций управления, то можно видеть, что при положительных значениях параметра модуляции ε значения параметра λ , отвечающие потере устойчивости циклов, увеличиваются. Таким образом, осуществляется стабилизация режимов. С методической же точки зрения для дальнейшего важно, что указанная процедура приводит к одному из «эталонных» отображений нелинейной динамики. Поэтому можно ожидать, что она будет эффективна и в других случаях.

Отображение Эно – это отображение с постоянным якобианом. Поэтому перейдем к другим способам введения управляющего параметра.

2. Отображение с переменным якобианом. Общий случай

В представленном примере «опорное» логистическое отображение выбрано в форме (7), когда управляющий параметр входит *аддитивным* образом. При введении запаздывающего управления с помощью соотношений (4) можно использовать и другие формы логистического отображения. Например, вариант

$$x_{n+1} = \lambda(1 - x_n^2), \quad (9)$$

или

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n). \quad (10)$$

В этих случаях управляющий параметр λ входит не аддитивно, а *мультипликативно*. Именно это отличие от описанного выше случая приводит к отображениям с нефиксированным якобианом.

Отображения (7), (9) и (10) в автономном режиме эквиваленты. Все они превращаются друг в друга заменой типа сдвига переменной. Но если мы модулируем управляющий параметр λ по закону (4), то они порождают *разные двумерные отображения*, причем, в отличие от системы (8), с нефиксированным якобианом. Имея в виду эту тонкость, приступим к реализации схемы построения новых моделей.

Отображения (9) и (10) могут быть представлены в виде

$$x_{n+1} = \lambda f(x_n). \quad (11)$$

Это позволяет провести простейший анализ в общем виде.

Модуляция параметра в (11) запаздывающим воздействием по закону (4) приводит к следующему двумерному отображению:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (\lambda + \varepsilon(x_n - y_n))f(x_n), \\ y_{n+1} &= x_n. \end{aligned} \quad (12)$$

Обсудим его свойства.

Неподвижные точки. неподвижные точки отображения (12) получаются при подстановке $x_{n+1} = x_n$ и $y_{n+1} = y_n$, что приводит к уравнению

$$x = \lambda f(x), \quad (13)$$

тождественному случаю автономной системы в отсутствие модуляции параметра.

Для анализа бифуркаций неподвижной точки нужно найти матрицу монодромии (матрицу Якоби) системы (12). Нетрудно видеть, что

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}, & \frac{\partial F}{\partial y} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon f(x) + \lambda f'(x), & -\varepsilon f(x) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Соответственно, якобиан этой матрицы

$$J = \varepsilon f(x). \quad (15)$$

Таким образом, при $\varepsilon \neq 0$ мы действительно приходим к отображению с нефиксированным якобианом. Далее, для следа матрицы получаем

$$S = \varepsilon f(x) + \lambda f'(x). \quad (16)$$

Бифуркация Неймарка–Сакера. Эта бифуркация ответственна за возникновение инвариантной кривой. Как известно, ей отвечает значение якобиана равное единице $J = 1$. В соответствии с (15) получаем $\varepsilon f(x) = 1$. Дополнив это соотношение уравнением для поиска неподвижных точек (13), приходим к параметрическому уравнению для линии бифуркации Неймарка–Сакера

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{x}, \quad x = \lambda f(x). \quad (17)$$

Бифуркация удвоения периода. Этой бифуркации отвечает равенство одного из мультипликаторов минус единице, то есть $\mu_1 = -1$. В свою очередь, по свойствам матрицы возмущений, $\mu^2 - S\mu + J = 0$. Таким образом, ей отвечает условие $1 + S\mu + J = 0$. Используя выражения для следа и якобиана, (15) и (16), получаем

$$1 + 2\varepsilon f(x) + \lambda f'(x) = 0. \quad (18)$$

С использованием (13) приходим к следующему параметрическому уравнению линии удвоений:

$$\varepsilon = -\lambda \frac{1 + \lambda f'(x)}{2x}, \quad x = \lambda f(x). \quad (19)$$

Резонанс 1:2. Линии удвоения периода и бифуркации Неймарка–Сакера пересекаются в точке коразмерности два, которой отвечают значения мультипликаторов $\mu_1 = -1$ и $\mu_2 = -1$. (Точка резонанса 1:2, по терминологии [1].) Мы легко можем теперь записать уравнение для поиска этих точек, совмещая (17) и (19),

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{x}, \quad \lambda f'(x) + 3 = 0, \quad x = \lambda f(x). \quad (20)$$

Перейдем теперь к конструированию и обсуждению конкретных отображений с нефиксированным якобианом.

3. Отображение с нефиксированным якобианом. Система 1

Используем в качестве автономной системы логистическое отображение в форме (9), так что $f(x) = 1 - x^2$. В этом случае приходим к двумерному отображению

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (\lambda + \varepsilon(x_n - y_n))(1 - x_n^2), \\ y_{n+1} &= x_n. \end{aligned} \quad (21)$$

Устойчивой может быть только одна неподвижная точка этого отображения, для которой из (13) находим $x = (\sqrt{1 + 4\lambda^2} - 1)/(2\lambda)$. Соотношения (17) для системы (21) позволяют получить аналитическое выражение для линии бифуркации Неймарка–Сакера

$$\varepsilon = \frac{2\lambda^2}{\sqrt{1 + 4\lambda^2} - 1}, \quad (22)$$

а соотношения (19) – для линии бифуркации удвоения периода

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{1 + 4\lambda^2} - 2}{\sqrt{1 + 4\lambda^2} - 1}. \quad (23)$$

С помощью уравнений (20) находим общие точки этих линий – точки резонанса 1:2

$$\varepsilon = \frac{5}{2}, \quad \lambda = \pm \frac{\sqrt{15}}{2}. \quad (24)$$

Найденные бифуркационные линии на плоскости параметров (ε, λ) показаны на рис. 2, а. На рис. 2, б представлена карта динамических режимов, на которой оттенками серого цвета обозначены области устойчивости циклов различных периодов.

Из вида карты можно заключить, что мы действительно получили интересующие нас свойства отображения с нефиксированным якобианом. На плоскости (ε, λ) имеется линия бифуркации Неймарка–Сакера и область квазипериодических режимов. Увеличенный фрагмент карты на рис. 3 демонстрирует систему языков Арнольда, встроенную в область квазипериодических режимов. Фазовые портреты в

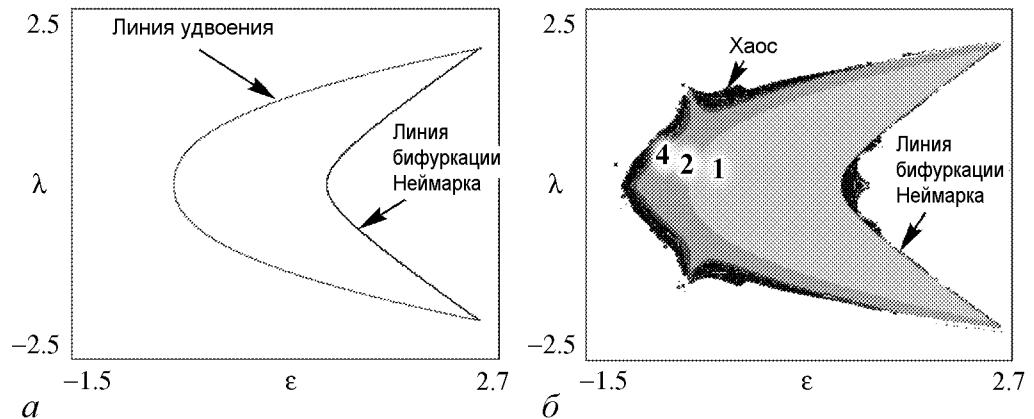


Рис. 2. а – аналитически найденные линии удвоения периода и Неймарка–Сакера для системы (21); б – карта динамических режимов этой системы

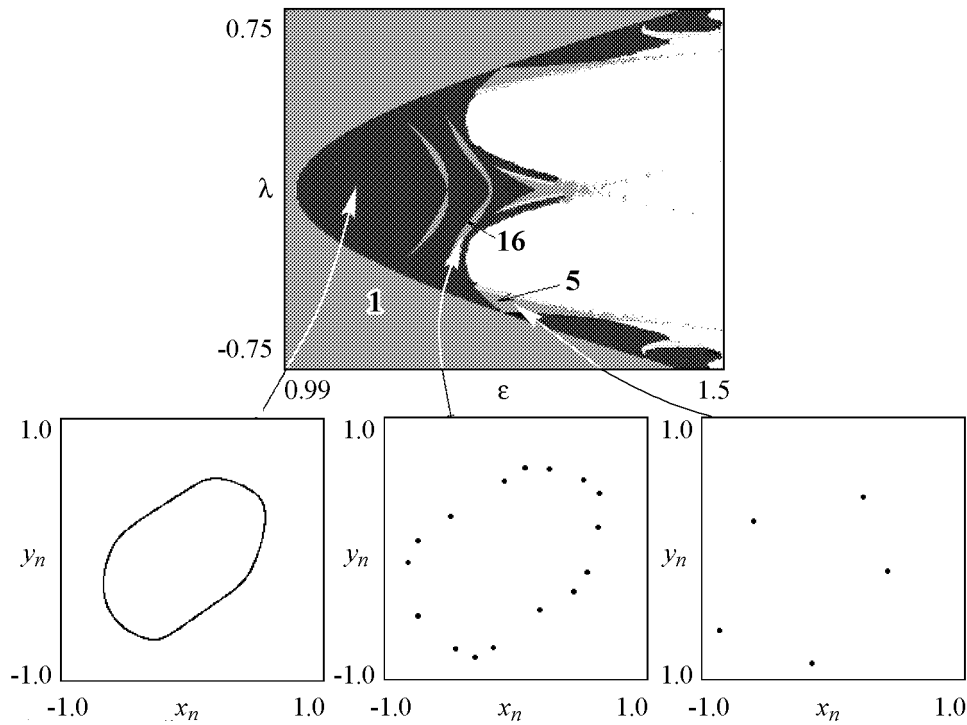


Рис. 3. Фазовые портреты отображения (21), построенные в различных точках области квазипериодических режимов

избранных точках карты иллюстрируют существование инвариантной кривой и резонансных циклов разных периодов.

С точки зрения задачи управления можно констатировать следующее. При возрастании параметра глубины модуляции ε порог устойчивости неподвижной точки повышается. Однако с ростом ε может произойти возникновение квазипериодического поведения и синхронных режимов, отвечающих резонансам на инвариантной кривой. Можно отметить «пороговый» характер этого эффекта: квазипериодическое поведение возникает, если параметр ε больше единицы. (Или, говоря иными словами, зависимость $\varepsilon = \varepsilon(\lambda)$ (22) имеет минимум, которому отвечает значение $\varepsilon = 1$.) Повышая одновременно оба параметра ε и λ , можно добиться существенного увеличения порога устойчивости, но он ограничен точкой резонанса 1:2 (24).

4. Отображение с нефиксированным якобианом. Система 2

Перейдем теперь к анализу двумерной системы, возникающей на базе логистического отображения (10). В этом случае получаем

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (\lambda + \varepsilon(x_n - y_n))x_n(1 - x_n), \\ y_{n+1} &= x_n. \end{aligned} \quad (25)$$

Уравнение (13) для неподвижных точек для данной системы имеет два решения $x = (\lambda - 1)/\lambda$ и $x = 0$. Для первой из них соотношения (17), (19) и (20) приводят

к следующим аналитическим выражениям для бифуркации Неймарка–Сакера

$$\varepsilon = \frac{\lambda^2}{\lambda - 1} \quad (26)$$

и для бифуркации удвоения периода

$$\varepsilon = \frac{\lambda^2(\lambda - 3)}{2(\lambda - 1)}. \quad (27)$$

Для точек резонанса 1:2 находим

$$\varepsilon = \frac{25}{4}, \quad \lambda = 5. \quad (28)$$

Карта динамических режимов отображения (25) показана на рис. 4, *a*. Можно видеть, что в области небольших значений параметра модуляции ε система демонстрирует поведение, аналогичное отображению Эно (ср. рис. 4, *a* в области значений $-3 < \varepsilon < 3$, $2 < \lambda < 5$ и рис. 1). При превышении некоторого порогового значения параметра ε также становятся возможными квазипериодические режимы (рис. 4, *б*). Максимально возможный уровень управления по параметрам также ограничен точкой резонанса 1:2 (28).

В отличие от системы (21), в этом случае может быть устойчивой и вторая неподвижная точка $x = 0$ при $\lambda < 1$. Выше линии $\lambda = 1$ для отображения (25) точка $x = y = 0$ является седлом, а ниже ее – она устойчива. Для нее линия удвоения периода задается соотношением

$$\lambda = -1. \quad (29)$$

Бифуркация Неймарка–Сакера для этой точки невозможна. Линию (29) можно видеть на рис. 4, *a*, а также (при уменьшении параметра λ) – соответствующий каскад удвоений и области хаоса. Заметим, что с точки зрения управления эта ситуация неэффективна, поскольку параметр λ не чувствителен к вариации глубины модуляции.

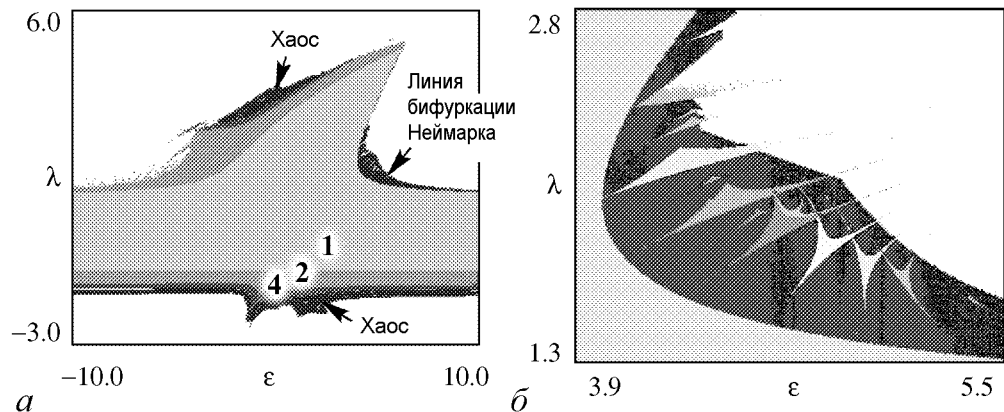


Рис. 4. *a* – карта динамических режимов отображения (25); *б* – увеличенная область квазипериодических режимов и система языков Арнольда

И система 1, и система 2 демонстрируют исчезновение квазипериодических режимов с переходом к ситуации «убегания» траектории на бесконечность. Эту особенность объясняет рис. 5, который показывает картину сосуществования инвариантной кривой и устойчивого и неустойчивого многообразий седловой (для данной области значений параметров) неподвижной точки $x = y = 0$ отображения (25). Можно видеть, что при возрастании параметров инвариантная кривая и многообра-

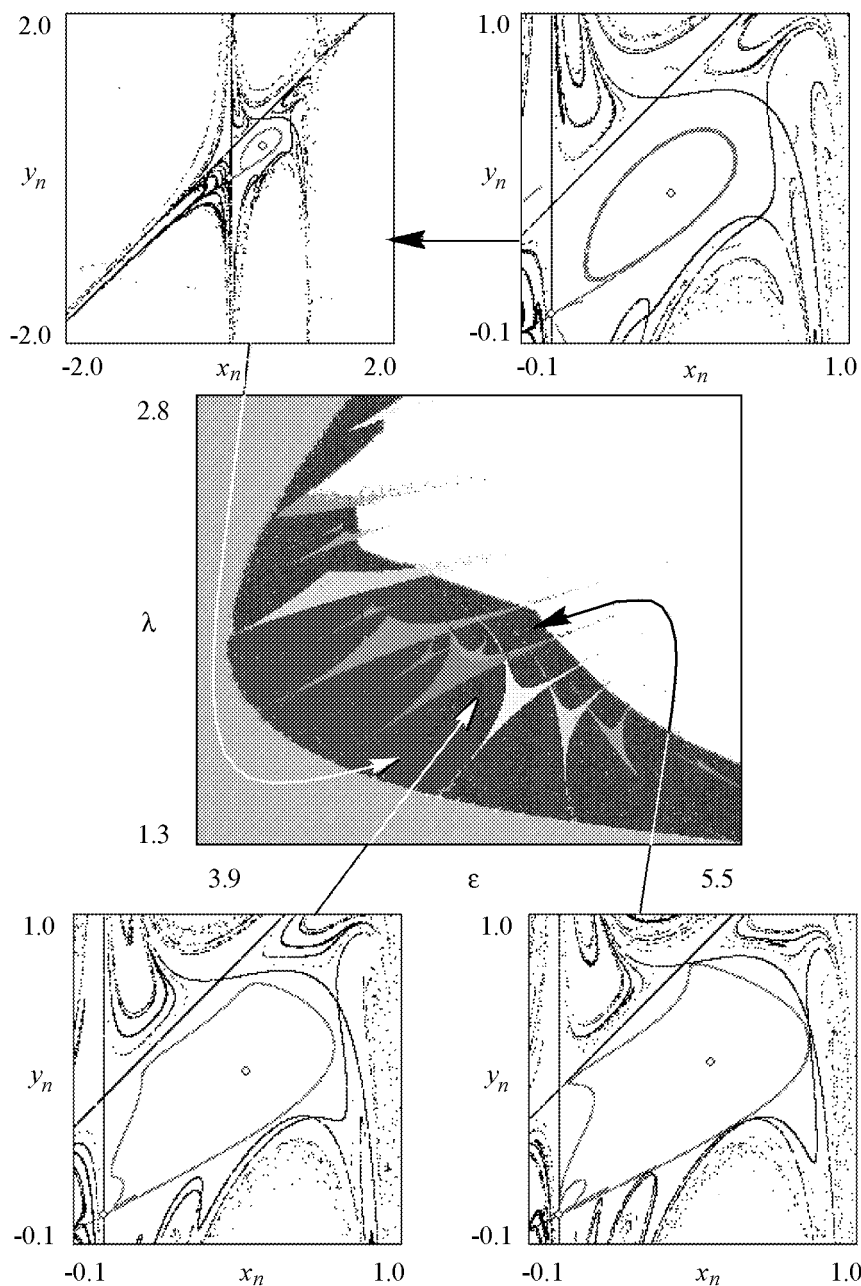


Рис. 5. Многообразия седловой неподвижной точки отображения (25) и аттрактор в виде инвариантной кривой, построенные в разных точках области квазипериодических режимов. Маленькими кружками обозначены неподвижные точки отображения (25)

зия сближаются и могут коснуться друг друга. Это и отвечает моменту, когда квазипериодический режим исчезает и сменяется «убеганием» изображающей точки вдоль соответствующего многообразия на бесконечность.

5. Оценка качества управления

Выше были проиллюстрированы некоторые особенности поведения представленных отображений с нефиксированным якобианом с позиций управления с помощью карт динамических режимов. Однако можно дать и соответствующие аналитические оценки.

Понятно, что возможность (невозможность) стабилизации и ее эффективность определяются наклоном линии удвоения периода при $\varepsilon = 0$ (см. рис. 2 и 4). Этот наклон легко определить в общем случае. Положим для этого $x = x_0 + \xi$ и $\lambda = \lambda_0 + \delta$, где значения, отмеченные индексом «ноль», соответствуют точке удвоения периода автономной системы, то есть

$$x_0 = \lambda_0 f(x_0), \quad -1 = \lambda_0 f'(x_0). \quad (30)$$

Тогда из $x = \lambda f(x)$ с точностью до первого порядка по возмущениям получаем

$$\xi = \lambda_0 f'(x_0) \xi + f(x_0) \delta. \quad (31)$$

Откуда с учетом (30) следует, что

$$\xi = \frac{1}{2} f(x_0) \delta. \quad (32)$$

С другой стороны, имеем

$$f'(x) = f'(x_0) + f''(x_0) \xi. \quad (33)$$

Подставляя (33) в первое из уравнений (12) для линии удвоения, после некоторых преобразований и с учетом (30), с точностью до членов первого порядка по возмущениям, получаем

$$\varepsilon = \gamma \delta, \quad \text{где } \gamma = \frac{1}{2x_0} - \frac{\lambda_0}{4} f''(x_0). \quad (34)$$

Например, для системы 1 точка удвоения в автономном режиме отвечает $\lambda_0 = \sqrt{3}/2$ и $x_0 = 1/\sqrt{3}$ и $f''(x_0) = -2$, откуда находим $\gamma = 3\sqrt{3}/4$. Для системы 2 имеем $\lambda_0 = 3$, $x_0 = 2/3$ и, соответственно, $\gamma = 9/4$.

Таким образом, в обоих случаях параметр γ , задающий наклон линии удвоения при $\varepsilon = 0$, положителен. Это значит, что для стабилизации режимов следует использовать модуляцию с положительным значением ε . При этом эффективность стабилизации для системы 1 выше.

Как видно из соотношений (34), смена знака ε отвечает переходу от стабилизации к дестабилизации. Поэтому знак γ не существенен: если он отрицательный, то для достижения стабилизации нужно просто изменить знак параметра модуляции ε .

Наконец, отметим, что при $\gamma = 0$ имеет место вырожденная ситуация, когда стабилизация не возникает. Такой случай имеет место на рис. 4 в области отрицательных значений управляющего параметра λ .

Определим теперь пороговое значение параметра глубины модуляции, начиная с которого возможны квазипериодические режимы. Как мы видели, пороговой ситуации отвечает минимум функции $\varepsilon = \varepsilon(\lambda)$ или условие $d\varepsilon/d\lambda = 0$. Дифференцируя по λ соотношение (17), отвечающее бифуркации Неймарка–Сакера, получаем

$$\frac{d\varepsilon}{d\lambda} = \frac{x - \lambda \frac{dx}{d\lambda}}{x^2}. \quad (35)$$

В соответствии с этим, условие минимума $\varepsilon = \varepsilon(\lambda)$ можно записать в виде $x = \lambda(dx/d\lambda)$. С другой стороны, дифференцируя по λ соотношение $x = \lambda f(x)$, получаем

$$\frac{dx}{d\lambda} \left(1 - \lambda \frac{df}{dx}\right) = f(x). \quad (36)$$

Подставляя сюда $x = \lambda(dx/d\lambda)$ и $x = \lambda f(x)$, приходим к условию

$$\frac{df}{dx} = 0. \quad (37)$$

Таким образом, мы получили замечательный результат: пороговой ситуации возникновения квазипериодических режимов отвечает значение управляющего параметра λ , соответствующее *сверхустойчивому режиму автономной системы*, то есть режиму с нулевым мультипликатором. Само пороговое значение параметра глубины модуляции ε_0 определяется как

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{f(x)}, \quad \frac{df}{dx} = 0. \quad (38)$$

Так, для системы 1 при $f(x) = 1 - x^2$ сверхустойчивый режим отвечает, очевидно, $x = 0$, $f(x) = 1$ и, в соответствии с (38), $\varepsilon_0 = 1$, что и видно из рис. 2.

Для системы 2 в случае $f(x) = x - x^2$, получаем $df/dx = 0$. Поэтому для сверхустойчивого режима $x = 1/2$, $f(x) = 1/4$ и, соответственно, $\varepsilon_0 = 4$ (см. рис. 4, б).

6. Стабилизация в двухпараметрическом отображении с удвоениями периода. Система 3

Выше рассмотрены примеры, когда процедура построения отображений с нефиксированным якобианом за счет модуляции управляющего параметра запаздывающим сигналом применяется к простейшему однопараметрическому отображению с удвоениями периода. Известно, однако, что системы с удвоениями периода демонстрируют достаточно характерную картину *двухпараметрических* бифуркаций и перехода к хаосу. Возможным примером такого поведения является отображение

$$x_{n+1} = \lambda \cos(x_n + \varphi). \quad (39)$$

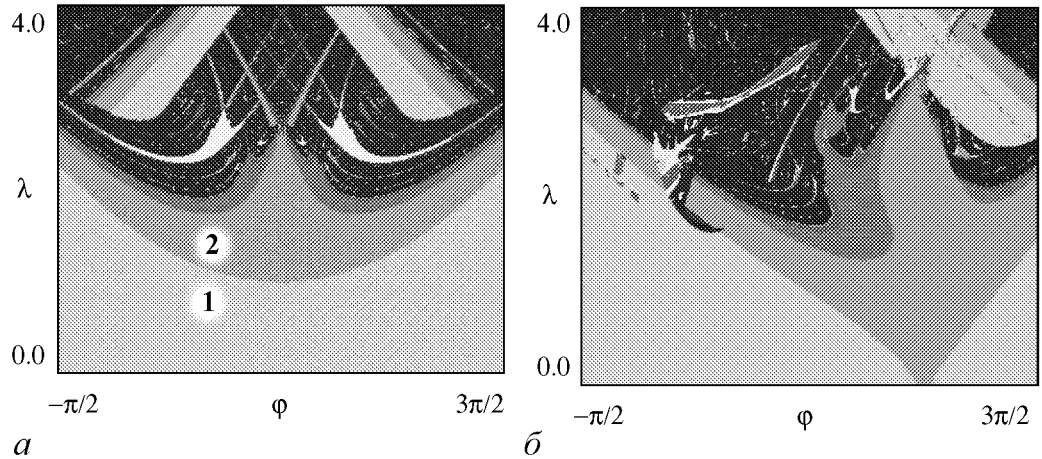


Рис. 6. Карты динамических режимов отображения (40) на плоскости (φ, λ) в случаях отсутствия запаздывания и небольшом значении параметра запаздывания ε : $a - 0.0$; $\bar{b} - 0.5$

К этому отображению в случае сильной диссипации приводится задача о воздействии импульсного сигнала на нелинейный осциллятор Дуффинга [8, 9], известная система Икеды в виде возбуждаемого лазером кольцевого оптического резонатора с нелинейной средой [10, 11], а также акустооптическая система, рассмотренная в [12].

На рис. 6, *a* приведена карта отображения (39) на плоскости параметров (φ, λ) . Можно видеть области удвоенного периода, характерные бифуркационные структуры crossroad area и т.д. Соответствующая картина характерна не только для перечисленных выше примеров, но и для многих систем с удвоениями периода (включая дифференциальные системы) [2].

Нетрудно видеть, что отображение (39) также относится к рассмотренному нами классу $x_{n+1} = \lambda f(x_n)$, где функция $f(x) = \cos(x + \varphi)$ зависит от дополнительного параметра φ . Тогда, предполагая модуляцию управляющего параметра λ по закону (4), получаем двумерное трехпараметрическое отображение

$$x_{n+1} = (\lambda + \varepsilon(x_n - y_n)) \cos(x_n + \varphi), \quad (40)$$

$$y_{n+1} = x_n.$$

Эволюцию карты динамических режимов системы (40) на плоскости параметров автономной системы (φ, λ) при увеличении глубины модуляции ε от 0.0 до значения 0.5 иллюстрирует рис. 6. Можно видеть, что конфигурации crossroad area на базе цикла периода 2 испытали определенные трансформации. Еще более существенные метаморфозы произошли с областью периода 3 и соответствующими областями удвоенного периода³.

Если говорить о стабилизации неподвижной точки, то, сравнивая рис. 6, *a* и рис. 6, *b*, можно видеть, что результат зависит от второго параметра автономной системы φ . Так, в диапазоне, примерно, $-\pi/2 < \varphi < 0$ порог удвоений для непо-

³Периоду 3 обычно соответствует максимальное «окно» в области хаоса.

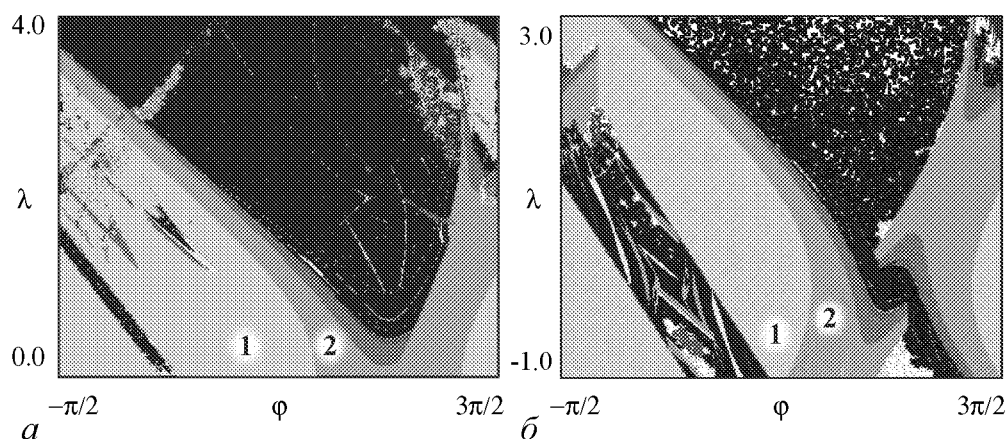


Рис. 7. Карты динамических режимов отображения (40) на плоскости (φ, λ) в случае больших значений параметра запаздывания ε : $a - 1.0$; $b - 1.2$

движной точки и 2-цикла несколько повышается. Это особенно заметно на карте динамических режимов на плоскости (ε, λ) для $\varphi = 0$ (см. ниже). С другой стороны, в окрестности точки $\varphi \approx \pi$ порог устойчивости неподвижной точки существенно понижается, и начинает доминировать область периода 2.

На рис. 7 представлены карты для случая еще больших значений параметра запаздывания $\varepsilon = 1$ и $\varepsilon = 1.2$. Такие значения выбраны не случайно. Действительно, в соответствии с соотношениями (38), куда подставляем для анализируемой системы $f(x) = \cos(x + \varphi)$ и $df/dx = -\sin(x + \varphi)$, пороговому значению возникновения квазипериодических режимов отвечает как раз $\varepsilon = 1$.

Обсудим устройство области квазипериодических режимов. В соответствии с обсуждением, приведенным в разделе 4, квазипериодические режимы возникают в окрестности сверхустойчивого режима автономного отображения. В случае исследуемого отображения $x_{n+1} = \lambda \cos(x_n + \varphi)$ для сверхустойчивого режима периода 1 имеем $x = \lambda \cos(x + \varphi)$, $\mu = -\lambda \sin(x + \varphi) = 0$, что приводит к соотношению

$$\lambda = -\varphi. \quad (41)$$

Этому уравнению отвечает линия на плоскости двух параметров автономной системы (39). Таким образом, квазипериодические режимы должны появиться сразу в виде некоторой полосы в окрестности линии (41) существования сверхустойчивого режима. Именно эту ситуацию и иллюстрирует рис. 7. На рис. 7, a при $\varepsilon = 1$ можно видеть «предвестник» квазипериодического поведения в виде узкой полосы долгопериодических режимов. На рис. 7, b при $\varepsilon = 1.2$ мы видим уже сформировавшуюся полосу квазипериодических режимов в окрестности линии $\lambda = -\varphi$ со встроенной системой языков синхронизации. Более того, внутри этой полосы уже появились области убегания траекторий, которые при дальнейшем увеличении глубины модуляции ε начинают доминировать.

Разбегание траекторий возникает и в «основной» области хаоса на рис. 7, b . Оно проявляется в форме «изрешечивания» области хаоса, что сигнализирует об изрешечивании бассейнов притяжения хаотических аттракторов.

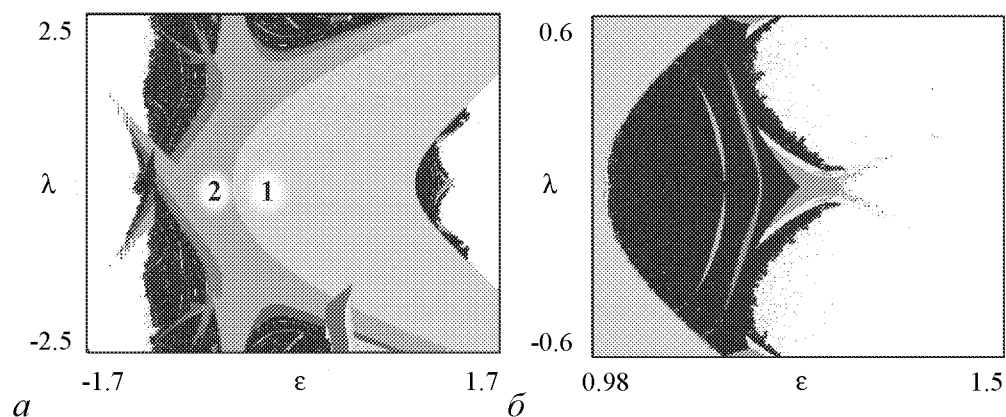


Рис. 8. Карта динамических режимов отображения (40) на плоскости (ϵ, λ) при $\varphi=0$ (a) и ее увеличенный фрагмент (б)

Наконец, на рис. 8 показаны карта динамических режимов отображения (40) на плоскости (ϵ, λ) при $\varphi=0$ и ее увеличенный фрагмент. Этот рисунок интересно сравнить с рис. 2 и рис. 3 для системы (21). Можно видеть некоторые общие черты, особенно в форме и внутреннем устройстве области квазипериодического поведения. Это легко объяснимо, поскольку разложение в ряд Тейлора отображения (40) при $\varphi = 0$ приводит к форме системы (21)

$$x_{n+1} = \lambda \cos x_n \approx \lambda \left(1 - \frac{x_n^2}{2}\right). \quad (42)$$

Можно видеть, однако, и существенные отличия: например, сложнее устроены области периода 2 и периода 4 на их базе, гораздо более существенны области хаоса и др.

Заключение

В настоящей работе показано, что введение модуляции управляющего параметра с использованием запаздывания может рассматриваться как физически мотивированный метод построения двумерных отображений с нефиксированным якобианом. Представлены примеры таких двухпараметрических и трехпараметрических отображений. В общем случае получены условия бифуркаций Неймарка–Сакера, удвоения периода и резонанса 1:2. Методом карт динамических режимов иллюстрируется существование областей квазипериодических режимов со встроенной системой языков синхронизации. Выявлена характерная ситуация возникновения «полосы» квазипериодических режимов при вариации параметра запаздывания в окрестности линии существования сверхустойчивой неподвижной точки в автономной системе.

Работа поддержана грантами РФФИ 06-02-16773 и Программой целевых расходов Президиума РАН «Поддержка молодых ученых».

Библиографический список

1. *Kuznetsov Yuri A.* Elements of applied bifurcation theory. Springer-Verlag, 1998. P. 593.
2. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. С. 356.
3. *Gonchenko V.S., Kuznetsov Yu.A., Meijer H.G.E.* Generalized Hénon map and bifurcations of homoclinic tangencies // Preprint 1296, Department of Mathematics, Utrecht University, 2004. P. 24.
<http://www.math.uu.nl/publications/preprints/1296.pdf>
4. *Гонченко С.В., Стенькин О.В., Шильников Л.П.* О существовании счетного множества устойчивых и неустойчивых инвариантных торов у систем из областей Ньюхауса с гетероклиническими касаниями // Нелинейная динамика. 2006. Т. 2, № 1. С. 3.
5. *Meijer H.G.E.* Codimension 2 bifurcations of iterated maps // Physica D. 2006. Thesis Utrecht University.
<http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2006-1204-200716/index.htm>.
6. *Pyragas K.* Continuous control of chaos by self-controlling feedback // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 170. P. 421.
7. *Богданов Н.С., Кузнецов А.П.* «Атлас» карт динамических режимов эталонных моделей нелинейной динамики и радиофизических систем // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 1. С. 80.
8. *Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.* Динамические системы разных классов как модели нелинейного осциллятора с импульсным воздействием // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 2. С. 31.
9. *Kuznetsov A.P., Turukina L.V. and Mosekilde E.* Dynamical systems of different classes as models of the kicked nonlinear oscillator // Int. J. of Bif. & Chaos. 2001. Vol. 11, № 4. P. 1065.
10. *Ikeda K., Daido H., Akimoto O.* Optical turbulence: chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity // Phys. Rev. 1980. Vol. 45. P. 709.
11. *Carr Y., Eilbech Y.C.* One-dimensional approximations for a quadratic Ikeda map // Phys. Lett. 1984. Vol. A104. P. 59.
12. *Vallee R., Delisle C., Chrostowski J.* Noise versus chaos in an acousto-optic bistability // Phys. Rev. 1984. Vol. A30, № 1. P. 336.

*Саратовский филиал Института
радиотехники и электроники РАН
Саратовский государственный
университет*

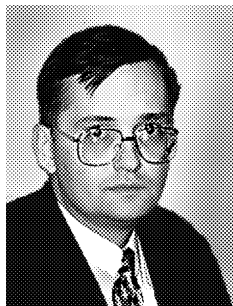
*Поступила в редакцию 29.12.2007
После доработки 19.06.2008*

PERIOD DOUBLING MAPS WITH DRIVING PARAMETER MODULATED BY DELAYED FEEDBACK

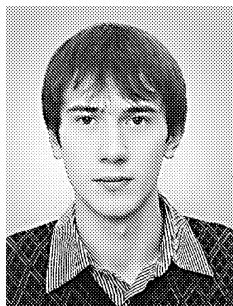
A.P. Kuznetsov, E.V. Novikov, A.V. Savin

It was shown that addition of modulation of driving parameter with using delay can be considered as physically reasoned method of construction two-dimensional maps

with nonfixed Jacobian. The examples of such two-parameter and three-parameter maps were presented. The conditions of Neumark–Sacker’s bifurcation, period doubling and resonance 1:2 were obtained. The structure of parameter space was studied by dynamical regimes maps method and the regions of quasiperiodic regimes and different synchronous regimes were revealed.



Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и школьной научной лаборатории. Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и лица прикладных наук СГУ, 10 учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002). E-mail: alkuz@sgu.ru; www.sgtnn.narod.ru



Новиков Евгений Вячеславович – родился в Пугачеве Саратовской области (1987). Студент 5-го курса факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета базовой кафедры динамических систем. Участник научных конференций «Нелинейные дни в Саратове для молодых» (2004, 2007), «Нанопотоника, наноэлектроника, нелинейная физика – 2008» с публикациями тезисов докладов. Область научных интересов: особенности критического поведения в связанных нелинейных системах и поведения модельных систем при введении «запаздывания».



Савин Алексей Владимирович – родился в Саратове в 1980 году. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (2002) и аспирантуру факультета нелинейных процессов СГУ. Кандидат физико-математических наук (2005). Доцент факультета нелинейных процессов СГУ, научный сотрудник Саратовского филиала ИРЭ РАН. Имеет более 20 научных публикаций в центральных и международных журналах. Область научных интересов: особенности перехода к хаосу и критического поведения, в том числе в связанных слабодиссипативных нелинейных системах.