



**СВЯЗАННЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ
ВАН ДЕР ПОЛЯ И ВАН ДЕР ПОЛЯ–ДУФФИНГА:
ФАЗОВАЯ ДИНАМИКА И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

А.П. Кузнецов, Н.В. Станкевич, Л.В. Тюрюкина

Обсуждается синхронизация в системе связанных неидентичных, неизохронных осцилляторов ван дер Поля с диссипативной и инерционной связью. Получено и исследовано обобщенное уравнение Адлера в присутствии всех перечисленных факторов. Выявлены характерные симметрии уравнения, приводящие к эквивалентности некоторых физических факторов. Проведено численное исследование устройства пространства параметров исходной дифференциальной системы методом построения карт динамических режимов. Результаты двух подходов сопоставляются и обсуждаются.

Введение

Система связанных автоколебательных осцилляторов ван дер Поля и ван дер Поля–Дуффинга является базовой моделью теории колебаний, иллюстрирующей явление синхронизации и сопутствующие эффекты. Однако задача синхронизации в системе связанных осцилляторов характеризуется большим количеством физических параметров и непростой картиной бифуркаций в пространстве этих параметров [1–12]. Соответственно, обнаруживается множество интересных и взаимосвязанных колебательных эффектов. К настоящему времени стало понятно, что в методическом плане эта задача оказывается существенно более сложной, чем задача о вынужденной синхронизации осциллятора внешним сигналом [1, 15]. Большой интерес представляет вопрос о соотношении фаз взаимодействующих осцилляторов [1, 3]. При этом оказывается, что разные физические факторы ведут к синхронизации с различными фазовыми условиями. В то же время при некоторых условиях результаты воздействия разных факторов оказываются эквивалентными.

В части 1 работы данный круг вопросов обсуждается в рамках следующих ограничений. Во-первых, используется метод медленно меняющихся амплитуд. Во-вторых, возмущения орбит осцилляторов считаем слабыми, что позволит, как и в классической теории вынужденной синхронизации, перейти к уравнению для разности фаз осцилляторов. Оно будет представлять собой некоторое обобщение известного уравнения Адлера [1, 15].

В качестве факторов, которые оказывают влияние на динамику разности фаз, рассмотрим:

- диссипативную связь,
- инерционную связь,
- неизохронность осцилляторов, то есть зависимость скорости изменения фазы от радиуса орбиты осциллятора,
- неидентичность осцилляторов по управляющим параметрам, отвечающим за бифуркацию Андронова–Хопфа в подсистемах.

Как показано ниже, определенная тонкость состоит в том, что для описания динамики фазы при наличии каждого из этих факторов, за исключением диссипативной связи, необходим учет эффектов второго порядка. Поэтому соответствующий анализ требует тщательного обсуждения.

Конечно, связанным осцилляторам ван дер Поля и ван дер Поля–Дуффинга посвящена обширная литература. Прежде всего следует отметить фундаментальную монографию [1], а также [2–12] и цитированную там литературу. Однако в силу очень большого числа параметров охватить общую картину очень сложно. Поэтому обычно описываются лишь ее отдельные фрагменты. Например, в известной и часто цитируемой работе [2] в рамках укороченных уравнений анализируется случай диссипативно связанных идентичных по управляющим параметрам осцилляторов. В работе [3] обсуждение идет в контексте обобщения уравнения Адлера и предполагается комбинированная связь, но осцилляторы считаются идентичными и изохронными. Вообще, идентичность осцилляторов – это одно из традиционных ограничений. Определенное исключение составляет недавняя работа [12]. Однако в ней не учтена неизохронность осцилляторов, которая, согласно [1], обеспечивает один из механизмов синфазной или противофазной синхронизации («притягивающие» и «отталкивающие» взаимодействия). Таким образом, ощущается необходимость в некоторой систематизации и осмыслении имеющихся результатов. Замечательной особенностью рассматриваемой задачи является также наличие целого ряда симметрий относительно фазы, которые приводят к симметриям относительно физических факторов и также обсуждаются в настоящей работе. Заметим также, что проведенный анализ имеет некоторые черты, характерные для теории катастроф [13–14, 21]. Это позволяет надеяться на определенную общность представленных результатов и их обсуждения.

Фазовая динамика, хотя и дает четкую физическую картину и механизмы синхронизации, но, конечно, не позволяет описать важный «атрибут» картины синхронизации любой колебательной системы – структуру языков синхронизации и особенности их внутреннего устройства. Поэтому после обсуждения фазовой динамики, в части 2 работы обращаемся к иллюстрациям для исходной системы дифференциальных уравнений. Используем метод карт динамических режимов [16], который позволяет изучать систему в «стиле» компьютерного эксперимента. Соответствующий программный инструментарий не столь сложен, а преимущество состоит в том, что автоматически визуализируется вся система языков синхронизации, включая их внутреннее устройство, которое может быть достаточно сложно и тонко организовано. Выявляются, например, даже особенности картины синхронизации, связанные с существованием бифуркации Неймарка–Сакера и пр. При этом результаты аналитических исследований фазовой динамики дают некоторую методологию проведения компьютерных экспериментов, без которой очень сложно ориентироваться в этой многопараметрической задаче.

Часть 1. Фазовая динамика

1.1. Обобщенное уравнение для фазы. Исходная система дифференциальных уравнений, описывающая взаимодействие осцилляторов указанного типа, имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (\lambda_1 - x^2) \frac{dx}{dt} + \left(1 - \frac{\Delta}{2}\right)x + \beta x^3 + \varepsilon(x - y) + \mu \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\right) = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - (\lambda_1 - y^2) \frac{dy}{dt} + \left(1 + \frac{\Delta}{2}\right)y + \beta y^3 + \varepsilon(y - x) + \mu \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt}\right) = 0.$$

Здесь λ_1 и λ_2 – параметры, отвечающие за бифуркации Андронова–Хопфа в автономных осцилляторах; Δ – относительная частотная расстройка осцилляторов; β – параметр, введенный по аналогии с осциллятором Дуффинга и ответственный за неизохронность малых колебаний [1, 2, 17]; μ и ε – коэффициенты связи, причем μ отвечает за диссипативную связь, а ε – за инерционную¹.

Применим для анализа уравнений (1.1) метод медленно меняющихся амплитуд [15]. С этой целью представим динамические переменные в виде

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(ae^{it} + a^*e^{-it}), \\ y &= \frac{1}{2}(be^{it} + b^*e^{-it}), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $a(t)$ и $b(t)$ – комплексные амплитуды первого и второго осцилляторов. Накладывая стандартные дополнительные условия

$$\dot{a}e^{it} + \dot{a}^*e^{-it} = 0, \quad \dot{b}e^{it} + \dot{b}^*e^{-it} = 0,$$

имеем следующие выражения для скоростей осцилляторов:

$$\dot{x} = \frac{1}{2}(iae^{it} - ia^*e^{-it}), \quad \dot{y} = \frac{1}{2}(ibe^{it} - ib^*e^{-it}). \quad (1.3)$$

Подставим соотношения (1.2), (1.3) в уравнения (1.1), умножим полученные выражения на e^{-it} и проведем усреднение для исключения быстро осциллирующих членов. После соответствующих преобразований получаем уравнения для комплексных амплитуд

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\lambda_1 a}{2} - \frac{|a|^2 a}{8} + \frac{3i\beta |a|^2 a}{8} + \frac{i\varepsilon}{2}(a - b) - \frac{\mu}{2}(a - b) - \frac{i\Delta a}{4}, \\ \frac{db}{dt} &= \frac{\lambda_2 b}{2} - \frac{|b|^2 b}{8} + \frac{3i\beta |b|^2 b}{8} + \frac{i\varepsilon}{2}(b - a) - \frac{\mu}{2}(b - a) + \frac{i\Delta b}{4}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

¹Разные авторы для двух типов связи используют разные термины. В [3] оба они названы диффузионными, в [12] – диссипативным и консервативным, в [1] – диссипативным и реактивным, в [2] – скалярным и нескалярным. Мы используем термин инерционная связь [23], который отражает как «перекрестный» нескалярный характер связи (см. обсуждение в [1, с. 297]), так и влияние связи на собственные частоты системы даже в отсутствие диссипации.

Удобно ввести замены переменных: $\tau = t/2$, $z = a/2$, $w = b/2$, $\chi = 3\beta$. Тогда уравнения (1.4) приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{d\tau} &= \lambda_1 z - |z|^2 z + i\chi |z|^2 z + i\varepsilon(z - w) + \mu(w - z) - \frac{i\Delta z}{2}, \\ \frac{dw}{d\tau} &= \lambda_2 w - |w|^2 w + i\chi |w|^2 w + i\varepsilon(w - z) + \mu(z - w) + \frac{i\Delta w}{2}.\end{aligned}\quad (1.5)$$

Положим теперь $z = Re^{i\varphi_1}$ и $w = re^{i\varphi_2}$, где R , r и φ_1 , φ_2 – действительные амплитуды и фазы осцилляторов. Подставим эти выражения в (1.5) и умножим первое уравнение на $e^{-i\varphi_1}$, а второе – на $e^{-i\varphi_2}$. Отделяя в полученных соотношениях действительную и мнимую части, приходим к уравнениям для действительных амплитуд и фаз:

$$\begin{aligned}\frac{dR}{d\tau} &= R(\lambda_1 - \mu) - R^3 + \mu r \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \varepsilon r \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \frac{dr}{d\tau} &= r(\lambda_2 - \mu) - r^3 + \mu R \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon R \sin(\varphi_1 - \varphi_2),\end{aligned}\quad (1.6)$$

$$\frac{d\varphi_1}{d\tau} = \chi R^2 + \varepsilon - \frac{r}{R} \varepsilon \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{r}{R} \mu \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{\Delta}{2},$$

$$\frac{d\varphi_2}{d\tau} = \chi r^2 + \varepsilon - \frac{R}{r} \varepsilon \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{R}{r} \mu \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{\Delta}{2}.$$

Замечательно, что в уравнения для амплитуд входит лишь разность фаз осцилляторов. Поэтому можно вычесть из первого уравнения для фазы второе и получить уравнения, содержащие только относительную фазу осцилляторов $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$

$$\begin{aligned}\frac{dR}{d\tau} &= R(\lambda_1 - \mu) - R^3 + \mu r \cos \varphi + \varepsilon r \sin \varphi, \\ \frac{dr}{d\tau} &= r(\lambda_2 - \mu) - r^3 + \mu R \cos \varphi - \varepsilon R \sin \varphi,\end{aligned}\quad (1.7)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \Delta + \chi(r^2 - R^2) + \varepsilon \left(\frac{r}{R} - \frac{R}{r} \right) \cos \varphi - \mu \left(\frac{r}{R} + \frac{R}{r} \right) \sin \varphi.$$

В уравнениях (1.7) один из управляющих параметров может быть убран перенормировкой. Удобнее всего это сделать, используя среднее значение параметров. Для этого положим

$$\lambda_1 = \lambda + \delta \quad \text{и} \quad \lambda_2 = \lambda - \delta.$$

Здесь $\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$ – среднее значение управляющего параметра, а $\delta = (\lambda_1 - \lambda_2)/2$ – параметр неидентичности. Выполним также замену переменных

$$R = \sqrt{\lambda} \vec{R}, \quad r = \sqrt{\lambda} \vec{r}, \quad t = \vec{t}/\lambda,$$

и параметров

$$\delta = \lambda \vec{\delta}, \quad \varepsilon = \lambda \vec{\varepsilon}, \quad \mu = \lambda \vec{\mu}, \quad \Delta = \lambda \vec{\Delta}. \quad (1.8)$$

Тогда приходим к окончательной форме искомым укороченных уравнений [12]

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\tau} &= R(1 + \delta - \mu) - R^3 + \mu r \cos \varphi + \varepsilon r \sin \varphi, \\ \frac{dr}{d\tau} &= r(1 - \delta - \mu) - r^3 + \mu R \cos \varphi - \varepsilon R \sin \varphi, \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \Delta + \chi(r^2 - R^2) + \varepsilon \left(\frac{r}{R} - \frac{R}{r} \right) \cos \varphi - \mu \left(\frac{r}{R} + \frac{R}{r} \right) \sin \varphi.$$

Для сокращения записи мы опустили черту, которой обозначены «новые» параметры и переменные в укороченном уравнении (1.9). В случае идентичных по управляющему параметру систем уравнения (1.9) совпадают с полученными в [1].

В укороченных уравнениях (1.9) амплитуды осцилляторов и разность их фаз взаимосвязаны. Однако, используя определенный прием, предложенный в [1, 3], можно получить независимое уравнение для фазы φ . Для этого необходимо, чтобы коэффициенты связи μ , ε и параметры неизохронности χ и неидентичности δ были малыми. (По сравнению с единицей в принятой нормировке или по сравнению с λ в исходных уравнениях.) В этом случае в «нулевом» приближении для амплитуд осцилляторов из первых двух уравнений (1.9) имеем

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\tau} &= R - R^3, \\ \frac{dr}{d\tau} &= r - r^3. \end{aligned}$$

Этим уравнениям отвечает установившееся движение по одинаковым орбитам единичного радиуса $R = r = 1$.

Перейдем теперь к возмущенным движениям. В первом приближении можно положить $R = 1 + \tilde{R}$ и $r = 1 + \tilde{r}$, где тильдой отмечены малые возмущения соответствующих переменных. Подставим сначала эти соотношения в первые два уравнения (1.9). Пренебрегая членами высшего порядка, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{R}}{d\tau} &= -2\tilde{R} + \mu(\cos \varphi - 1) + \varepsilon \sin \varphi + \delta, \\ \frac{d\tilde{r}}{d\tau} &= -2\tilde{r} + \mu(\cos \varphi - 1) - \varepsilon \sin \varphi - \delta. \end{aligned}$$

Вслед за [1] обращаем внимание, что возмущения амплитуды сильно демпфированы, поэтому их значения очень быстро выходят на стационарный уровень. Этот факт позволяет вычислить возмущения, определяющие стационарные орбиты осцилляторов

$$\tilde{R} = \frac{1}{2}[\mu(\cos \varphi - 1) + \varepsilon \sin \varphi + \delta], \quad (1.10)$$

$$\tilde{r} = \frac{1}{2}[\mu(\cos \varphi - 1) - \varepsilon \sin \varphi - \delta].$$

Из выражений (1.10) видно, что присутствие диссипативной связи уменьшает орбиты обоих осцилляторов, причем одинаковым образом. В свою очередь, инерционная связь влияет иначе. Например, при сдвиге фаз между осцилляторами $\pi/2$ и $\varepsilon > 0$ радиус орбиты первого осциллятора возрастает, а второго – уменьшается. Эти особенности оказываются существенными при обсуждении отличия в поведении систем с разным типом связи.

Подставим теперь выражения $R = 1 + \tilde{R}$ и $r = 1 + \tilde{r}$ в третье уравнение (1.9). После некоторых преобразований имеем

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \Delta + 2\chi(\tilde{r} - \tilde{R}) - 2\mu \sin \varphi + 2\varepsilon(\tilde{r} - \tilde{R}) \cos \varphi. \quad (1.11)$$

Теперь мы можем получить обобщенное уравнение Адлера для нашей задачи. Для этого подставим соотношения (1.10) для возмущений радиусов в уравнение (1.11). После некоторых преобразований получим

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \Delta - 2\chi\delta - 2(\mu + \chi\varepsilon) \sin \varphi - \varepsilon^2 \sin 2\varphi - 2\varepsilon\delta \cos \varphi. \quad (1.12)$$

Это и есть искомое фазовое уравнение². Его анализ позволяет выяснить характер динамики относительной фазы слабо связанных осцилляторов в зависимости от всех существенных факторов: диссипативной связи μ , инерционной связи ε , а также параметров неидентичности по управляющим параметрам δ и неизохронности χ .

Сделаем еще одно замечание, касающееся нормировки. При выводе уравнений (1.9) можно было использовать нормировку не на среднее значение управляющих параметров, а на один из них, λ_2 , как это сделано, например, в [12]. Нетрудно показать, что в этом случае мы приходим все равно точно к тому же фазовому уравнению (1.12), но тогда фактор пересчета параметров исходной системы (1.1) и фазового уравнения (1.12) будет $\lambda = \lambda_2$. Таким образом, взаимосвязь параметров не вполне однозначна, что связано с приближенным характером уравнения (1.12). Эта неоднозначность, однако, не столь существенна, поскольку в соответствии с (1.8) приводит лишь к одновременному изменению масштабов всех параметров. Представляется, что использованная при выводе (1.9) нормировка предпочтительнее, поскольку учитывает симметрию осцилляторов при смене знака δ . Однако, чтобы минимизировать проблемы, связанные с пересчетом параметров, в компьютерных расчетах в части 2 мы будем выбирать либо среднее значение λ , либо величину λ_2 всегда равными единице.

²При сопоставлении (1.12) и (1.9) и их обсуждении с другими работами [1, 3, 12] следует иметь в виду, что разные авторы используют различные варианты выбора знаков параметров и относительной фазы осцилляторов. Так, в [1] использованы противоположные знаки параметров неизохронности χ и инерционной связи ε . В [12] при получении уравнения, аналогичного (1.9), нормировка осуществлена не по среднему значению управляющих параметров, а по одному из них и т.д.

1.2. Качественное обсуждение влияния различных факторов на динамику фазы. Каждый из перечисленных в п. 1.1 факторов влияет на динамику фазы по-своему. Обсудим сначала их влияние на качественном уровне. С этой целью удобно ввести эффективный потенциал $U(\varphi)$ [15, 24]

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = -\frac{\partial U(\varphi)}{\partial \varphi}. \quad (1.13)$$

Тогда устойчивым режимам синхронизации (захвата фазы) отвечает минимум потенциала $U(\varphi)$. Максимумам отвечают неустойчивые состояния равновесия. В нашем случае, в соответствии с (1.12), имеем

$$U(\varphi) = -(\Delta - 2\chi\delta)\varphi - 2(\mu + \chi\epsilon)\cos\varphi - \frac{1}{2}\epsilon^2\cos 2\varphi + 2\epsilon\delta\sin\varphi. \quad (1.14)$$

Обсудим влияние каждого фактора.

Диссипативная связь. Диссипативная связь стремится сблизить фазы осцилляторов. Отвечающий ей член в эффективном потенциале

$$U(\varphi) = -2\mu\cos\varphi + \dots \quad (1.15)$$

(в изохронном случае) имеет минимум в точке $\varphi = 0$. Таким образом, диссипативная связь стремится синхронизовать осцилляторы в фазе. Случаю $\varphi = \pi$ отвечает неустойчивое состояние равновесия.

Инерционная связь. Инерционная связь приводит к синхронизации во втором порядке по параметру связи. В соответствии с вкладом в общий потенциал

$$U(\varphi) = -\frac{1}{2}\epsilon^2\cos 2\varphi + \dots \quad (1.16)$$

может быть выявлена особенность инерционной связи – наличие фазовой бистабильности. Действительно, соотношению (1.16) отвечают два устойчивых состояния равновесия: $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. Таким образом, инерционная связь может синхронизовать осцилляторы как в фазе, так и в противофазе в зависимости от начальных условий. Между устойчивыми положениями равновесия располагаются два неустойчивых, так что общее число равновесий – четыре.

Неизохронность. Неизохронность приводит к «добавке» в члене, соответствующем диссипативной связи

$$U(\varphi) = -2(\mu + \chi\epsilon)\cos\varphi + \dots \quad (1.17)$$

Это тоже эффект второго порядка, связанный с комбинированным воздействием неизохронности и инерционной связи. Соответствующий механизм фазировки осцилляторов описан в [1] и состоит в следующем. Пусть второй осциллятор опережает первый по фазе на $\pi/2$. В соответствии с (1.10), он будет иметь орбиту меньшего радиуса, а первый – большего. За счет неизохронности, в соответствии с двумя последними уравнениями (1.6), у первого осциллятора угловая скорость вращения возрастет, а у второго – уменьшится. В результате осцилляторы начнут сближаться по угловой координате. Это и приводит к тому, что изохронность в комбинации с инерционной связью действует аналогично диссипативной связи, что видно формальным образом из (1.17).

Если же параметр неизохронности χ отрицателен, то у отстающего по фазе первого осциллятора угловая скорость уменьшится, а у второго – увеличится. Осцилляторы начнут «расходиться» по фазе. Это пример «отталкивающего» взаимодействия, которое приводит к противофазной синхронизации. В соответствии с (1.17) эта ситуация аналогична отрицательному значению параметра μ . Последние соображения говорят о том, что для общности картины имеет смысл вводить в рассмотрение и случай $\mu < 0$, который можно назвать *активной связью*³. В случае активной связи в соответствии с (1.17) будет наблюдаться противофазная синхронизация.

Неидентичность. Малая неидентичность по управляющим параметрам действует тоже как эффект второго порядка в системе с инерционной связью. Член в эффективном потенциале

$$U(\varphi) = 2\epsilon\delta \sin \varphi + \dots \quad (1.18)$$

отвечает устойчивому режиму синхронизации со сдвигом фаз между вторым и первым осцилляторами на $3\pi/2$. Точке $\pi/2$ соответствует неустойчивое состояние равновесия. Смена знака связи или изменение знака добавки к управляющим параметрам меняет характер устойчивости этих состояний равновесия на противоположный.

Неидентичность в неизохронной системе дает еще и аддитивную добавку к частотной расстройке, поскольку теперь

$$U(\varphi) = -(\Delta - 2\chi\delta)\varphi + \dots \quad (1.19)$$

Итак, в общем случае есть несколько механизмов, которые стремятся привести к синхронизации с разным фазовым сдвигом ($0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$) между осцилляторами. Кроме того, в системе с инерционной связью возможна фазовая мультистабильность.

Заметим, что полученное нами фазовое уравнение (1.12) образует своего рода «нормальную» форму для фазовой динамики связанных осцилляторов. Действительно, оно имеет вид

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \Delta + A \sin \varphi + B \cos \varphi + C \sin 2\varphi. \quad (1.20)$$

Понятна его «организация»: постоянный член (дрейф фазы), члены с осцилляциями в виде синуса и косинуса и их произведение, обусловленное эффектом второго порядка⁴.

Уравнение (1.20) характеризуется целым рядом симметрий. Например, оно переходит в себя при замене $\varphi \rightarrow -\varphi, \Delta \rightarrow -\Delta, B \rightarrow -B$. Такого рода симметрии, как мы увидим ниже, приводят к соответствующим симметриям в устройстве языков синхронизации.

³Представление об «активной» связи кажется логичным с формальной точки зрения (см. в этой связи уравнение (1.20)). В современной радиотехнике, однако, создание «отрицательного сопротивления» в цепи связи не представляет проблем, например, с использованием операционного усилителя. Таким образом, включение в анализ только положительных констант диссипативной связи отчасти является исторической традицией.

⁴Может показаться, что в общем случае мы «упустили» член $\cos 2\varphi$. Этот член, однако, можно убрать сдвигом фазы на постоянную величину. Так что уравнение (1.20) в определенной мере универсально. С его вариантом, $B = 0$, можно встретиться, например, в теории солитонов для так называемого двойного синус-уравнения Гордона [18], правда, следует использовать не первую, а вторую производную.

Периодичность фазы предоставляет в этом плане новые интересные возможности. Пусть, например, в (1.20) «включены» только два члена

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \Delta + A \sin \varphi + C \sin 2\varphi.$$

Выполним замену переменной $\varphi = \pi/2 - \theta$. Тогда это уравнение приводится к

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -[\Delta + A \cos \theta + C \sin 2\theta].$$

Оно эквивалентно (1.20), в котором нужно положить $A = 0$, выполнить замену $B \rightarrow A$ и обратить время. Следовательно, картина бифуркаций в этих двух случаях будет полностью эквивалентной, но устойчивые равновесия заменятся на неустойчивые и наоборот. С такими симметриями мы встретимся при обсуждении влияния неидентичности и неизохронности осцилляторов.

1.3. Диссипативная связь. Система с чисто диссипативной связью приводит к фазовому уравнению

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \Delta - 2\mu \sin \varphi. \quad (1.21)$$

Это классическое уравнение Адлера [1, 15]. Положения равновесия (ситуации захвата фазы) в соответствии с (1.21) ищутся из уравнения

$$\frac{\Delta}{2\mu} = \sin \varphi. \quad (1.22)$$

На плоскости частотная расстройка – величина связи (Δ, μ) им отвечает область внутри языка синхронизации с «изломом» при вершине, ограниченная линиями $\mu = \pm\Delta/2$ (рис. 1.1).

Внутри языка наблюдается синфазная синхронизация, причем при нулевой расстройке $\Delta = 0$ фаза точно равна нулю. На рис. 1.1 показана только область диссипативной связи $\mu > 0$. Для «активной» связи, когда $\mu < 0$, в соответствии с (1.22) картина получается симметричной относительно оси частотных расстроек, при этом синфазный режим сменяется противофазным.

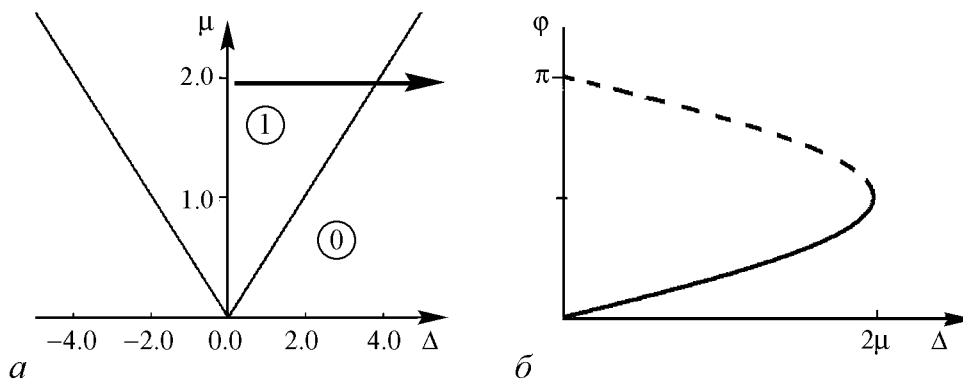


Рис. 1.1. *a* – Язык синхронизации в системе с диссипативной связью, в кружочке указано число устойчивых состояний равновесия фазы; *б* – бифуркационная диаграмма при пересечении языка по указанной на левом рисунке стрелке

Введение малой неидентичности по управляющим параметрам δ в системе с чисто диссипативной связью в соответствии с (1.12) не сказывается на форме языка. Точно так же в этом приближении введение неизохронности χ не меняет картины, поскольку диссипативная связь изменяет орбиты одинаковым образом и скорость изменения фазы оказывается одинаковой для обоих осцилляторов. А вот одновременное введение и неидентичности и неизохронности, согласно выражению (1.12), приводит к появлению в фазовом уравнении постоянной добавки к частотной расстройке. Это, в свою очередь, означает сдвиг языка синхронизации вправо или влево на величину этой добавки. Однако наиболее интересные и многообразные эффекты наблюдаются при наличии инерционной связи.

1.4. Инерционная связь. Инерционная связь и неидентичность. Перейдем теперь к случаю инерционно связанных осцилляторов. Для идентичных изохронных осцилляторов имеем

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \Delta - \varepsilon^2 \sin 2\varphi. \quad (1.23)$$

В этом случае границы языка синхронизации задаются соотношением

$$\Delta = \pm \varepsilon^2. \quad (1.24)$$

Таким образом, язык имеет очень узкое острие в виде корневой особенности (рис. 1.2, *a*). Этот факт связан с тем, что синхронизация осцилляторов в этом случае, как мы уже говорили – эффект «второго порядка». Однако язык очень быстро расширяется с ростом ε и вполне выявляется компьютерным моделированием (см. часть 2). На рис. 1.2 представлен случай положительных значений параметра связи ε ; для отрицательных ε картина получается зеркальным отражением относительно оси частотной расстройки.

Существенная особенность задачи в анализируемом случае – фазовая бистабильность внутри языка, что формально связано с удвоенным аргументом синуса в соотношении (1.23). Бистабильные состояния одновременно рождаются и одновременно исчезают при переходе через границу языка. Соответствующая бифуркационная диаграмма при движении по выделенной на рис. 1.2, *a* линии показана на

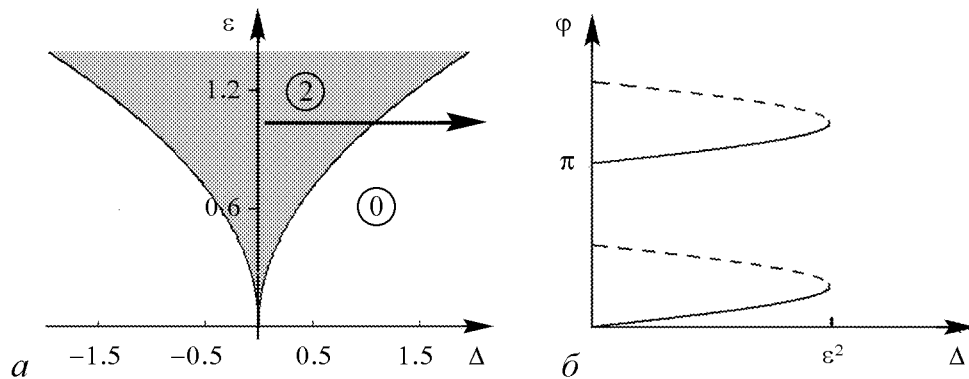


Рис. 1.2. *a* – Язык синхронизации в системе с инерционной связью, в кружочке – число устойчивых состояний равновесия фазы, серым цветом выделена область бистабильности; *b* – бифуркационная диаграмма при пересечении языка по указанной на левом рисунке линии

рис. 1.2, б. На рис. 1.2 и далее цифрами в кружочке показано число устойчивых состояний равновесия фазы, а серым цветом выделена область бистабильности.

Рассмотрим теперь влияние неидентичности по управляющим параметрам в системе с инерционной связью. В этом случае фазовое уравнение имеет вид

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \Delta - \varepsilon^2 \sin 2\varphi - 2\varepsilon\delta \cos \varphi, \quad (1.25)$$

и мы приходим к следующему уравнению для определения положений равновесия фазы:

$$\Delta = \varepsilon^2 \sin 2\varphi + 2\varepsilon\delta \cos \varphi. \quad (1.26)$$

Заметим, прежде всего, что введение неидентичности «исправляет» форму языка у его основания: при очень малых ε первым членом можно пренебречь, и язык будет иметь традиционный вид с изломом $\varepsilon = \pm\Delta/(2\delta)$. При этом с ростом неидентичности язык становится все более широким.

Полезно проанализировать случай нулевой расстройки $\Delta = 0$ (середина языка синхронизации). Из (1.26) имеем соотношение

$$0 = \cos \varphi(\varepsilon \sin \varphi + \delta). \quad (1.27)$$

Оно распадается на два:

$$\cos \varphi = 0 \quad \text{и} \quad \varepsilon \sin \varphi + \delta = 0. \quad (1.28)$$

Из первого мы видим, что имеются два положения равновесия, которые не зависят от величины связи: $\varphi = \pi/2$ и $\varphi = 3\pi/2$. При малых ε первое неустойчиво, а второе устойчиво.

В свою очередь, при выполнении второго условия (1.28) возможны еще два положения равновесия. Они возникают при $\varepsilon = \delta$ для фазы $\varphi = 3\pi/2$ и с ростом ε расходятся, стремясь в асимптотике к значениям $\varphi = \pi$ и $\varphi = 2\pi$. Общая бифуркационная диаграмма показана на рис. 1.3, б. В соответствии с этим рисунком, при $\varepsilon = \delta$ наблюдается бифуркация типа «вилка», когда положение равновесия $\varphi = 3\pi/2$

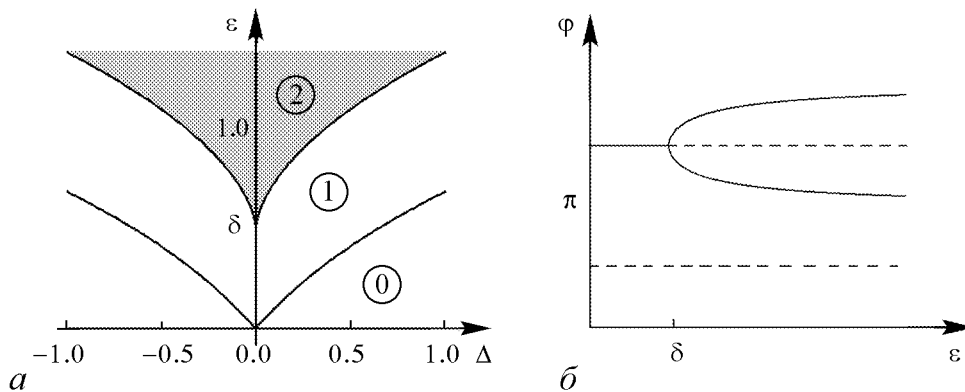


Рис. 1.3. а – Язык синхронизации в системе с инерционной связью в присутствии неидентичности ($\delta = 0.5$) по управляющим параметрам; б – бифуркационная диаграмма при пересечении языка по линии нулевой частотной расстройки $\Delta = 0$

теряет устойчивость, и от него отделяются симметричным образом два новых устойчивых. До этой бифуркации бистабильность невозможна – она возникает при $\varepsilon > \delta$. Таким образом, неидентичность осцилляторов разрушает общую границу синхронизации бистабильных состояний – теперь у каждого из них она своя.

Определим теперь границы областей синхронизации. Для этого надо продифференцировать соотношение (1.26) по φ и приравнять производную нулю, что отвечает ситуации слияния корней. Соответствующие линии на плоскости параметров, по терминологии теории бифуркаций [1, 15], являются линиями седло-узловых бифуркаций или линиями складок, по терминологии теории катастроф [14, 21]. В результате получаем

$$0 = \varepsilon \cos 2\varphi - \delta \sin \varphi. \quad (1.29)$$

Соотношения (1.26), (1.29) задают границы областей синхронизации на плоскости частотная расстройка – величина связи (рис. 1.3, *a*) в параметрической форме

$$\Delta = \varepsilon^2 \sin 2\varphi + 2\varepsilon\delta \cos \varphi, \quad (1.30)$$

$$\varepsilon = \frac{\delta \sin \varphi}{\cos 2\varphi}.$$

На рисунке видим, что, действительно, границы седло-узловых бифуркаций для состояний с разными положениями равновесия для фазы не совпадают.

Заметим, что наличие бифуркации типа вилка «сигнализирует» о существовании точки сборки на плоскости (Δ, ε) в точке $(0, \delta)$. Несложно показать, что в этой точке располагается вершина полукубического острия. Для этого положим $\varphi = 3\pi/2 + x$. Тогда из (1.29) получаем

$$\varepsilon = \frac{\delta \cos x}{\cos 2x} = \delta \left(1 + \frac{3}{2}x^2 + \dots \right). \quad (1.31)$$

В свою очередь, из (1.30) и (1.31) следует

$$\Delta = \delta^2(-\sin 2x + 2 \sin x) = \delta^2(x^3 + \dots).$$

Комбинируя эти соотношения, действительно получаем полукубическую параболу

$$\Delta = \pm \left[\frac{2}{3} \delta^{1/3} (\varepsilon - \delta) \right]^{3/2}.$$

Рассматриваемая задача характеризуется тремя параметрами $(\Delta, \varepsilon, \delta)$. Поэтому полезно изобразить и сечение плоскостью (Δ, δ) . Соответствующая область (язык) синхронизации и бифуркационная диаграмма при движении внутри языка снизу вверх показаны на рис. 1.4. В этом случае также имеется точка сборки, но обращенная острием вверх, так что область бистабильности расположена в нижней части языка.

Итак, наш анализ в рассматриваемом случае выявил две характерные конфигурации областей (языков) синхронизации, показанные на рис. 1.3, *a* и рис. 1.4, *a*.

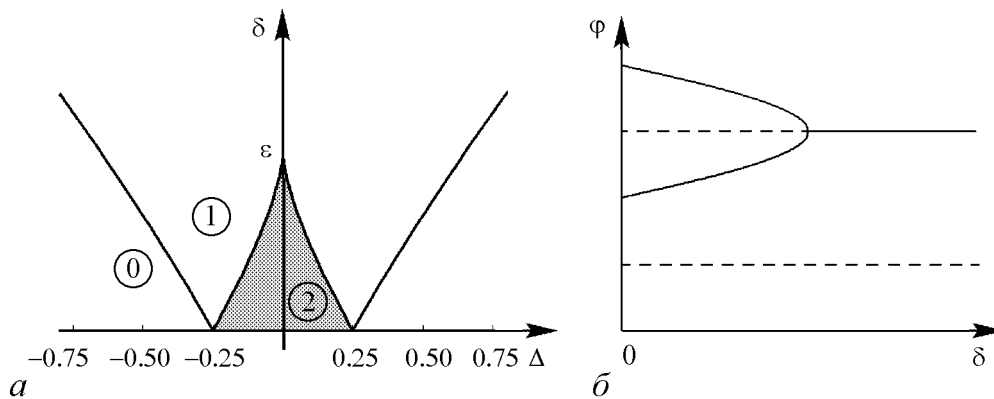


Рис. 1.4. *a* – Язык синхронизации в системе неидентичных осцилляторов с инерционной связью на плоскости параметров частотная расстройка Δ – параметр неидентичности осцилляторов δ в случае $\varepsilon=0.5$; *b* – бифуркационная диаграмма при пересечении языка по линии нулевой частотной расстройки $\Delta = 0$

1.5. Эквивалентные случаи: инерционная связь и неизохронность, комбинированная связь. В предыдущем разделе мы добавили к системе с инерционной связью неидентичность осцилляторов по управляющим параметрам. Вновь возьмем систему с инерционной связью, но добавим другой фактор – неизохронность осцилляторов. Тогда из (1.12) получаем

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \Delta - 2\chi\varepsilon \sin \varphi - \varepsilon^2 \sin 2\varphi. \quad (1.32)$$

Выполним в этом соотношении замену переменной $\varphi = \pi/2 - \theta$:

$$-\frac{d\theta}{d\tau} = \Delta - \varepsilon^2 \sin 2\theta - 2\chi\varepsilon \cos \theta. \quad (1.33)$$

Если положить $\chi = \delta$, (1.33) с точностью до знака производной от фазы совпадает с соотношением (1.25) для неидентичной изохронной системы. Таким образом, в рассматриваемом приближении неидентичность и неизохронность приводят к эквивалентной картине бифуркаций с точностью до сдвига фаз осцилляторов на $\pi/2$ и смене неустойчивых равновесий на устойчивые и наоборот. Это одно из проявлений симметрии, о которой мы говорили при обсуждении соотношения (1.20). Следовательно, конфигурация бифуркационных линий в системе с инерционной связью и неидентичностью оказывается такой же, как в системе с инерционной связью и неизохронностью.

В определенной мере, то же самое относится и к ситуации, когда имеется комбинированная связь – диссипативная и инерционная, а остальные возмущающие факторы не включены. Действительно, для этого случая уравнение фазовой динамики имеет вид

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \Delta - 2\mu \sin \varphi - \varepsilon^2 \sin 2\varphi. \quad (1.34)$$

При фиксированном уровне инерционной связи $\varepsilon = 1$ (1.34) совпадает с (1.32), если положить $\mu = \chi$. Таким образом, для неизохронной системы устройство языка

синхронизации на плоскости (Δ, χ) точно совпадает с устройством языка для комбинированной связи на плоскости (Δ, μ) .

Картина будет аналогичной и при других значениях инерционной связи, необходимо только пересчитывать ее величину по определенному правилу. Действительно, если выполнить в выражении (1.32) замены вида

$$\Delta \rightarrow \varepsilon^2 \Delta, \quad \varepsilon \rightarrow \varepsilon^2, \quad \chi \rightarrow \mu,$$

то оно с точностью до изменения масштаба времени на фактор ε^2 перейдет в (1.34). Таким образом, картина бифуркаций будет эквивалентна при пересчете уровня инерционной связи по правилу $\varepsilon \rightarrow \varepsilon^2$.

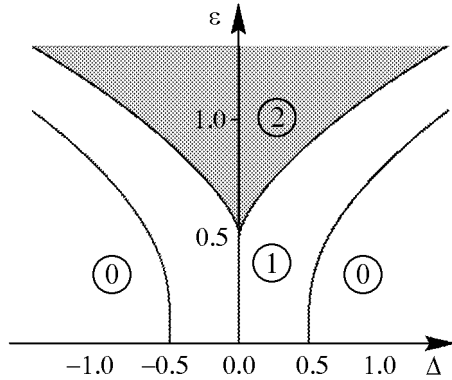


Рис. 1.5. Язык синхронизации в системе с комбинированным типом связи на плоскости параметров частотная расстройка Δ – параметр инерционной связи ε в случае $\mu = 0.25$

Итак, неизохронность, диссипативная связь и неидентичность, добавляемые поодиночке к инерционной связи, дают одинаковую геометрию бифуркационных линий в соответствующих сечениях пространства параметров. В этом плане рис. 1.3, *a* и рис. 1.4, *a* выступают как «эталонные» варианты устройства языков синхронизации. Правда, неизохронность и неидентичность различаются реализацией сдвига фаз между осцилляторами на $\pi/2$ и сменой устойчивых равновесий на неустойчивые и наоборот.

В заключение этого раздела представим на рис. 1.5 для случая комбинированной связи вид области синхронизации на плоскости параметров (частотная расстройка Δ – величина инерционной связи ε). В этом случае язык синхронизации опирается на конечный интервал частотных расстроек $\Delta = 4\mu$, который легко находим из (1.34), полагая $\varepsilon = 0$ и $\sin \varphi = \pm 1$.

1.6. Инерционная связь, неидентичность и неизохронность. С позиций уравнения фазовой динамики (1.12) рассмотренные выше случаи отвечают «включению» двух существенных членов. Теперь следует перейти к более общей ситуации, когда нужно учитывать все три. При этом эквивалентность между разными физическими факторами нарушится, потому что решения, отвечающие, например, сдвигу фазы на $\pi/2$, оказываются уже неэквивалентными.

Для того чтобы сохранить физическую интерпретацию, рассмотрим конкретный пример. Так, логичным продолжением пункта 1.3 может служить ситуация, когда системе с чисто инерционной связью и неидентичностью добавляют неизохронность. Естественно рассмотреть, как меняется устройство «типичных» языков рис. 1.3, *a* и рис. 1.4, *a* при введении дополнительного существенного фактора. В этом случае имеем следующее уравнение для равновесия фазы:

$$\Delta = 2\chi\delta + 2\chi\varepsilon \sin \varphi + \varepsilon^2 \sin 2\varphi + 2\varepsilon\delta \cos \varphi. \quad (1.35)$$

Здесь проявляется еще одна особенность неизохронности, которая отвечает постоянной добавке к частотной расстройке, тем большей, чем более неидентичными являются осцилляторы. Для поиска границ областей синхронизации приравняем нулю производную по фазе

$$\chi \cos \varphi + \varepsilon \cos 2\varphi - \delta \sin \varphi = 0. \quad (1.36)$$

Откуда

$$\delta = \frac{\varepsilon \cos 2\varphi + \chi \cos \varphi}{\sin \varphi}. \quad (1.37)$$

Используя соотношения (1.35) и (1.37), изучим сначала трансформации языка на плоскости (Δ, δ) при вариации параметра неизохронности χ . Соответствующие перестройки показаны на рис. 1.6. Заметим, что теперь, в отличие от рис. 1.4, мы представляем области как положительных, так и отрицательных значений δ , поскольку это существенно с точки зрения происходящих перестроек.

Из рисунка хорошо видно, что с ростом неизохронности χ язык становится асимметричным (рис. 1.6, б). Две ветви линий складок сближаются и при $\chi = 0.5$ сливаются (рис. 1.6, в), так что от начала координат отделяются две новые сборки, которые затем постепенно расходятся (рис. 1.6, г). Соответствующая перестройка в терминах теории катастроф называется «клюв к клюву» [21]. (См. в этом контексте характерное расположение двух наиболее близких сборок на рис. 1.6, г.) Ее пороговое значение может быть найдено аналитически из тех соображений, что на плоскости параметров при $\delta = 0$ сливаются и исчезают две точки пересечения линий складок с осью Δ (переход от рис. 1.6, б к рис. 1.6, г). Поэтому, полагая в (1.37)

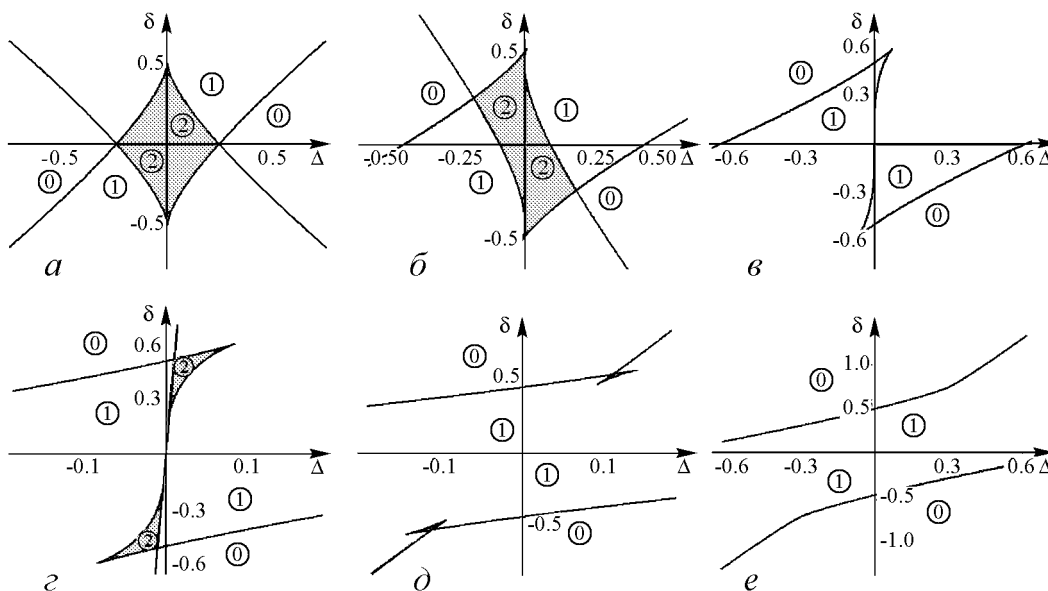


Рис. 1.6. Метаморфозы бифуркационных линий системы с инерционной связью в присутствии неидентичности и неизохронности на плоскости параметров (Δ, δ) . Параметр инерционной связи $\varepsilon = 0.5$. Параметр неизохронности χ : 0 (а); 0.25 (б); 0.5 (в); 0.51 (г); 0.6 (д); 0.75 (е)

$\delta = 0$, получаем

$$\varepsilon \cos 2\varphi = -\chi \cos \varphi.$$

Условия исчезновения корней, очевидно, $\cos \varphi = \pm 1$; при этом получаем $\chi = \pm \varepsilon$, что находится в соответствии с рис. 1.6, *в*.

Далее, одна «новая» и одна «старая» сборки попарно образуют на рис. 1.6, *г, д* характерные конфигурации, известные в теории катастроф как «ласточкин хвост» [13, 14, 21]. Входящие в них точки сборки, в свою очередь, сближаются и, как видно из рис. 1.6, *д, е*, сливаются и исчезают. Соответствующую бифуркационную ситуацию коразмерности три ищем, приравнявая нулю три производные по φ от выражения (1.35):

$$\begin{aligned} \chi \cos \varphi + \varepsilon \cos 2\varphi - \delta \sin \varphi &= 0, \\ \chi \sin \varphi + 2\varepsilon \sin 2\varphi + \delta \cos \varphi &= 0, \\ \chi \cos \varphi + 4\varepsilon \cos 2\varphi - \delta \sin \varphi &= 0. \end{aligned} \tag{1.38}$$

Из первого и третьего соотношений следует, что $\cos 2\varphi = 0$ и $\chi \cos \varphi - \delta \sin \varphi = 0$. Первое уравнение имеет два корня, $\varphi_1 = \pi/4$ и $\varphi_2 = 3\pi/4$, и поэтому $\chi = \pm \delta$. Подставляя этот результат во второе уравнение (1.38), после некоторых преобразований получаем

$$\chi = \mp \sqrt{2}\varepsilon,$$

что при $\varepsilon = 0.5$ дает $\chi = \mp 0.707\dots$ и находится в соответствии с рис. 1.6, *д, е*.

На плоскости параметров (Δ, δ) моменту катастрофы «ласточкин хвост» отвечают точки с координатами $\Delta = \chi^2/2$, $\delta = \chi$, а также $\Delta = -\chi^2/2$, $\delta = -\chi$. Таким образом, на плоскости параметров две особенности типа «ласточкин хвост» появляются одновременно симметричным образом, в первой и третьей четверти графика, на разных ветвях бифуркационных линий (рис. 1.6, *д*). Это одно из проявлений симметрии, присущей системе.

Эволюция языка синхронизации на плоскости (Δ, ε) при фиксированном параметре неидентичности $\delta = 0.5$ и добавлении все возрастающей неизохронности представлена на рис. 1.7. В этом случае линии седло-узловых бифуркаций даются соотношениями (1.35) и (1.37), причем последнее следует представить в следующем виде:

$$\varepsilon = \frac{\delta \sin \varphi - \chi \cos \varphi}{\cos 2\varphi}. \tag{1.39}$$

Анализ соответствующих иллюстраций показывает, что введение неизохронности приводит к асимметрии языка и смещению его вершины в область положительных расстроек на величину $\Delta = 2\chi\delta$, тем большую, чем больше неизохронность. Из рисунка мы видим, что имеется особая ситуация при $\chi = \delta$. В этом случае $\varphi = \pi/4$ и соотношение (1.39) приводит к неопределенности, поэтому на рис. 1.7, *в* показан «почти» бифуркационный случай. Как видно из рис. 1.7, *в, г*, при превышении значения $\chi = \delta$ «сценарий» изменения внутреннего устройства языка повторяется в обратном порядке.

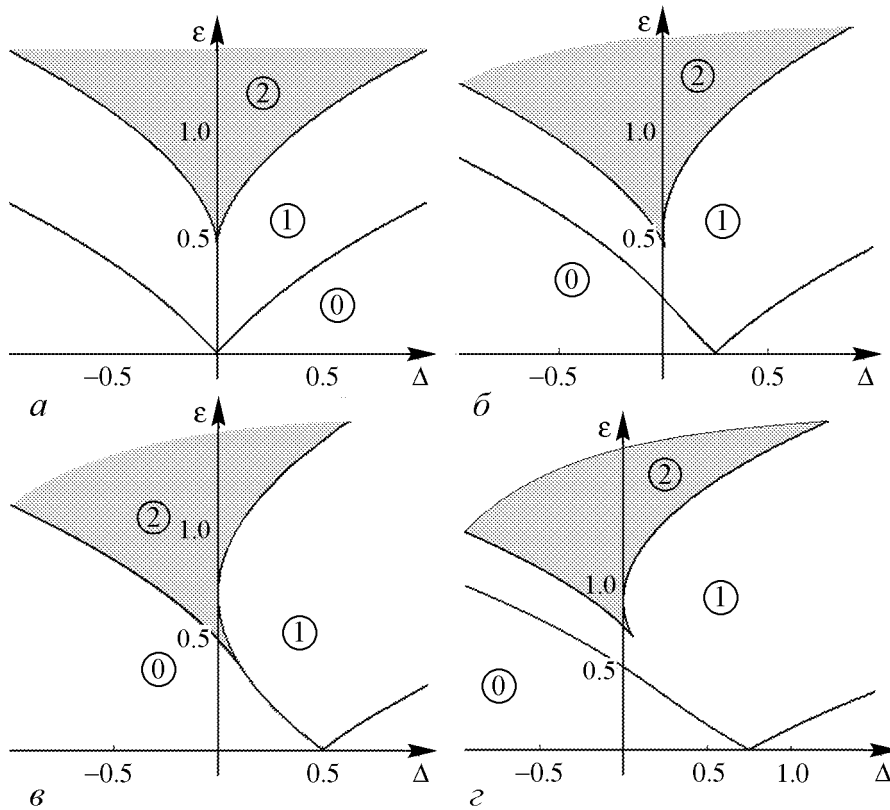


Рис. 1.7. Метаморфозы бифуркационных линий системы с инерционной связью в присутствии неидентичности и неизохронности на плоскости параметров (Δ, ϵ) . Параметр неидентичности $\delta = 0.5$. Параметр неизохронности χ : 0 (а); 0.25 (б); 0.4999 (в); 0.75 (г)

1.7. Инерционная связь, диссипативная связь, неидентичность и неизохронность. «Включим» теперь все возможные физические факторы. Тогда, в соответствии с (1.12) имеем

$$\Delta = 2\chi\delta + 2(\mu + \chi\epsilon) \sin \varphi + \epsilon^2 \sin 2\varphi + 2\epsilon\delta \cos \varphi. \quad (1.40)$$

Продифференцировав это соотношение по φ , можно прийти к соотношению

$$\delta = \frac{\epsilon \cos 2\varphi + (\mu/\epsilon + \chi) \cos \varphi}{\sin \varphi}. \quad (1.41)$$

Совместно с (1.40) оно задает вид языка синхронизации на плоскости (Δ, δ) . Его устройство и перестройки иллюстрирует рис. 1.8, на котором показана конфигурация бифуркационных линий при $\chi = 0.75$ и $\epsilon = 0.5$. Это случай «большой» неизохронности, параметр $\chi = 0.75$ соответствует рис. 1.6, г. Параметр диссипативной связи μ на серии рисунков 1.8 постепенно уменьшается от 1.5 до -0.75.

«Стартовая» ситуация отвечает языку синхронизации в виде наклоненной «полосы», которая не имеет особенностей и вершин. Области бистабильности отсутствуют (рис. 1.8, а). Обсудим наблюдаемые перестройки при уменьшении уровня диссипативной связи. Для этого заметим, что соотношение (1.41) эквивалентно (1.37)

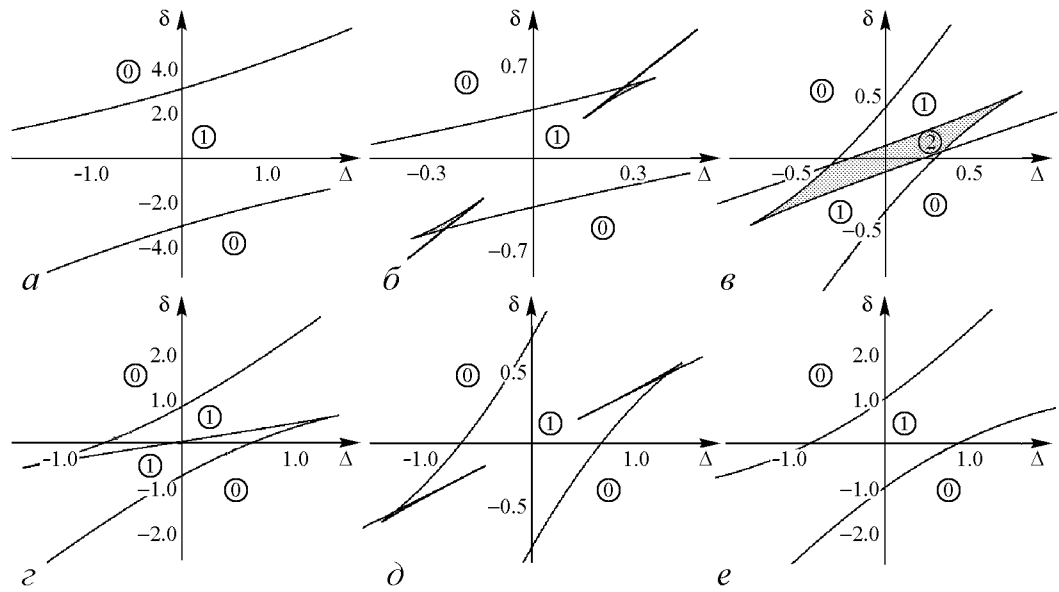


Рис. 1.8. Метаморфозы бифуркационных линий системы с инерционной и диссипативной связью в присутствии неидентичности и неизохронности на плоскости параметров (Δ, δ) при уменьшении параметра диссипативной связи μ : 1.5 (а); -0.11 (б); -0.4 (в); -0.625 (г); -0.63 (д); -0.75 (е). Случай $\mu = 0$ представлен на рис. 1.6, е. Параметры инерционной связи $\varepsilon = 0.5$ и неизохронности $\chi = 0.75$

при замене $(\mu/\varepsilon + \chi) \rightarrow \chi$. Поэтому можно использовать результаты раздела 1.5. Действуя таким образом, заключаем, что при $\mu/\varepsilon + \chi = \pm \varepsilon$ или $\mu = \varepsilon(\pm \varepsilon - \chi)$ имеют место перестройки «клов к клову». В свою очередь, при $\mu/\varepsilon + \chi = \pm\sqrt{2}\varepsilon$ или $\mu = \varepsilon(\pm\sqrt{2}\varepsilon - \chi)$ наблюдаются катастрофы типа «ласточкин хвост».

Если мы фиксируем χ и ε , и уменьшаем μ , как на рис. 1.8, то последовательно имеем следующие перестройки. При $\mu_1 = \varepsilon(\sqrt{2}\varepsilon - \chi)$ происходит катастрофа «ласточкин хвост» и образуются две небольшие области бистабильности (рис. 1.8, б). Затем при $\mu_2 = \varepsilon(\varepsilon - \chi)$ имеет место перестройка «клов к клову» и области бистабильности объединяются в одну (рис. 1.8, в).

При дальнейшем уменьшении параметра μ , при $\mu_3 = -\varepsilon(\varepsilon + \chi)$ происходит вторая перестройка «клов к клову», а при $\mu_4 = -\varepsilon(\sqrt{2}\varepsilon + \chi)$ – «ласточкин хвост» (рис. 1.8, г, д). В результате при $\mu < -\varepsilon(\sqrt{2}\varepsilon + \chi)$ мы приходим к конфигурации рис. 1.8, е, аналогичной «стартовой», рис. 1.8, а. В представленном примере все перестройки происходили при $\mu < 0$, то есть в случае активной связи. Однако две первые перестройки могут отвечать и случаю диссипативной связи, если только параметр неизохронности не превышает параметр инерционной связи, то есть $\chi < \varepsilon$.

Чтобы выявить конфигурацию языка на плоскости (Δ, ε) , следует разрешить соотношение (1.41) относительно коэффициента инерционной связи ε , в результате чего придем к квадратному уравнению

$$\varepsilon^2 \cos 2\varphi - \varepsilon(\delta \sin \varphi - \chi \cos \varphi) + \mu \cos \varphi = 0.$$

Решая его, получаем

$$\varepsilon = \frac{\delta \sin \varphi - \chi \cos \varphi \pm \sqrt{(\delta \sin \varphi - \chi \cos \varphi)^2 - 4\mu \cos \varphi \cos 2\varphi}}{2 \cos 2\varphi}. \quad (1.42)$$

Мы видим, что даже малое введение диссипативной связи по сравнению с (1.39) приводит к появлению новой ветви решения, которой отвечает знак «минус» перед квадратным корнем. (При $\mu = 0$ этой ветви отвечала ось $\varepsilon = 0$.)

Несколько характерных иллюстраций для этого случая показаны на рис. 1.9. Параметры неидентичности и неизохронности фиксированы и равны значениям $\delta = 0.5$, $\chi = 0.75$. Как и на рис. 1.8, «стартовая» ситуация отвечает достаточно большой диссипативной связи $\mu = 1$, а затем величина связи убывает.

На рис. 1.9, *a* можно видеть конфигурации, аналогичные рис. 1.7. Однако в области отрицательных значений инерционной связи $\varepsilon < 0$ две разные ветви бифуркации седло-узел пересекаются, формируя несколько иную картину областей бистабильности. С уменьшением параметра диссипативной связи (переход от рис. 1.9, *a* к рис. 1.9, *б*) расположенная в нижней полуплоскости точка сборки приближается ко второй линии бифуркации седло-узел. Вслед за этим в ее окрестности происходят перестройки, которые в увеличенном масштабе иллюстрирует рис. 1.10.

На рис. 1.10, *a* показан увеличенный фрагмент рис. 1.9, *б*. Можно видеть точку сборки и две близко расположенные ветви линий седло-узловых бифуркаций. С уменьшением параметра диссипативной связи μ , эти ветви сближаются, касаются друг друга, и происходит «разрыв» в результате перестройки «клюв к клюву» (переход от рис. 1.10, *a* к рис. 1.10, *б*). При этом возникает характерная для катастрофы ласточкин хвост конфигурация, которую иллюстрирует в еще большем масштабе правый рисунок 1.10, *б*.

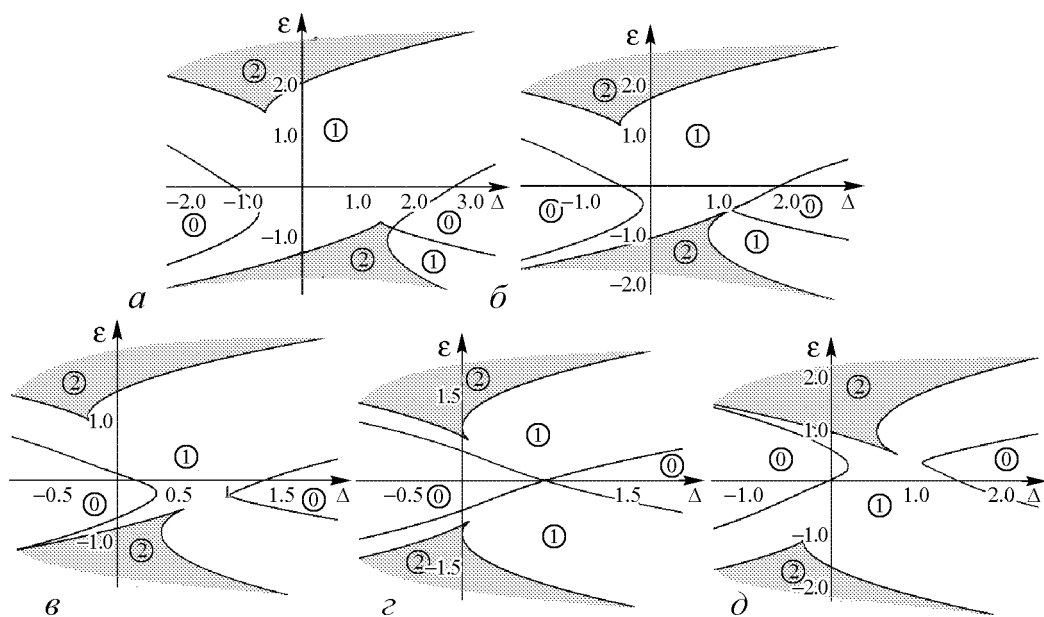


Рис. 1.9. Метаморфозы бифуркационных линий системы с инерционной и диссипативной связью в присутствии неидентичности и неизохронности на плоскости параметров (Δ, ε) при уменьшении параметра диссипативной связи μ : 1.0 (*a*); 0.6 (*б*); 0.3 (*в*); 0 (*г*); -0.4 (*д*). Параметры неидентичности $\delta = 0.5$ и неизохронности $\chi = 0.75$

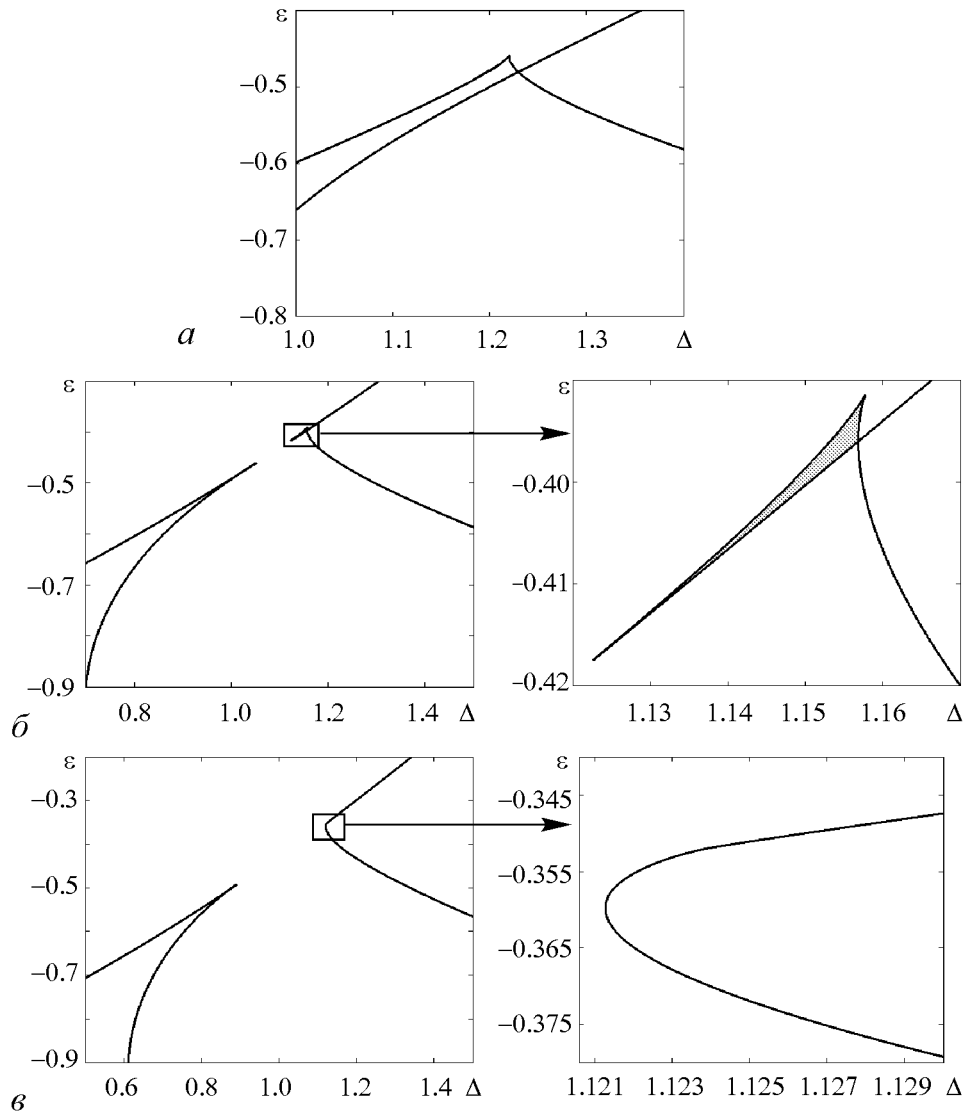


Рис. 1.10. *a* – увеличенная окрестность точки сборки, представленной на рис. 1.9, *б* и построенной для $\mu = 0.6$; *в*, *г* – перестройка «ласточкин хвост» при переходе от $\mu = 0.495$ к $\mu = 0.44$

По аналогии с анализом п. 1.5, без труда получаем условия катастрофы «ласточкин хвост»

$$\mu = \frac{\delta(\chi + \delta)}{\sqrt{2}}. \quad (1.43)$$

Для данных значений параметров $\delta = 0.5$, $\chi = 0.75$, имеем $\mu = 0.4419417\dots$ Переход через это бифуркационное значение можно наблюдать на увеличенных правых фрагментах рис. 1.10, *б* и рис. 1.10, *г*⁵.

⁵Еще одна перестройка имеется при $\mu = \frac{\delta(\chi - \delta)}{\sqrt{2}}$.

Полезно указать также точки на плоскости параметров (Δ, ϵ) , которым отвечает катастрофа «ласточкин хвост»

$$\Delta = 2\chi\delta - \frac{3}{2}\delta^2, \quad \epsilon = -\frac{\delta}{\sqrt{2}}. \quad (1.44)$$

Вернемся к рис. 1.9. С дальнейшим уменьшением параметра диссипативной связи (рис. 1.9, в) возникает структура бифуркационных линий, аналогичная рис. 1.5, но не обладающая соответствующей симметрией. Язык синхронизации имеет «основание» в виде отрезка конечной ширины по частотной расстройке, края которого даются соотношением $\Delta = 2\chi\delta \pm 2\mu$. С уменьшением величины диссипативной связи ширина «основания» уменьшается, и при $\mu = 0$ обращается в ноль. Возникает симметричный относительно оси расстроек язык с характерным острием (рис. 1.9, з). При дальнейшем уменьшении параметра μ в отрицательную сторону вновь наблюдается появление «основания» конечной ширины и асимметрии картины (рис. 1.9, д).

Часть 2. Компьютерное моделирование системы связанных осцилляторов ван дер Поля–Дуффинга

2.1. Общая методика. Обратимся теперь к компьютерному исследованию исходной системы связанных осцилляторов ван дер Поля–Дуффинга (1.1). Эта задача характеризуется пятью параметрами, оказывающими влияние на динамику фазы и картину синхронизации в соответствии с представленным выше обсуждением. Для исходной системы (1.1) количество значимых параметров возрастает, поскольку оказываются существенными уже оба параметра λ_1 и λ_2 , а не только их разность $\delta = (\lambda_1 - \lambda_2)/2$.

Использованный в первой части работы метод медленно меняющихся амплитуд применим в случае малых значений λ_1 и λ_2 . Теперь мы будем выбирать их примерно равными единице. Такой выбор, с одной стороны, дает возможность хотя бы на качественном уровне выявить особенности, характерные для фазовой динамики, а с другой – иллюстрирует феномены исходной системы связанных осцилляторов, которые оказываются, конечно, существенно богаче. В конкретных расчетах для идентичных систем полагаем $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, а для неидентичных – либо $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 1$, если неидентичность фиксирована, либо $\lambda_1 = 1 + \delta$, $\lambda_2 = 1 - \delta$, если неидентичность является изменяемым параметром (см. также замечание о нормировке в конце п. 1.1).

Для иллюстрации колебательных режимов и картины синхронизации использовался метод карт динамических режимов [16]. На таких картах белым цветом и оттенками серого показаны найденные численно области, соответствующие различным периодам колебаний (рис. 2.1). Черный цвет обозначает хаотические и квазипериодические режимы. Периоды циклов при построении карт динамических режимов определялись с использованием метода сечений Пуанкаре. После достаточно длительного переходного процесса, когда можно считать фазовую траекторию вышедшей на предельный цикл, определялись точки ее пересечения с секущей плоскостью. При этом рассматривались только траектории, пересекающие сечение Пуанкаре в одном направлении. Количество точек пересечения секущей плоскости принималось за период предельного цикла. В качестве сечения Пуанкаре удобно выбрать гиперповерхность в четырехмерном фазовом пространстве, соответствующую обращению в

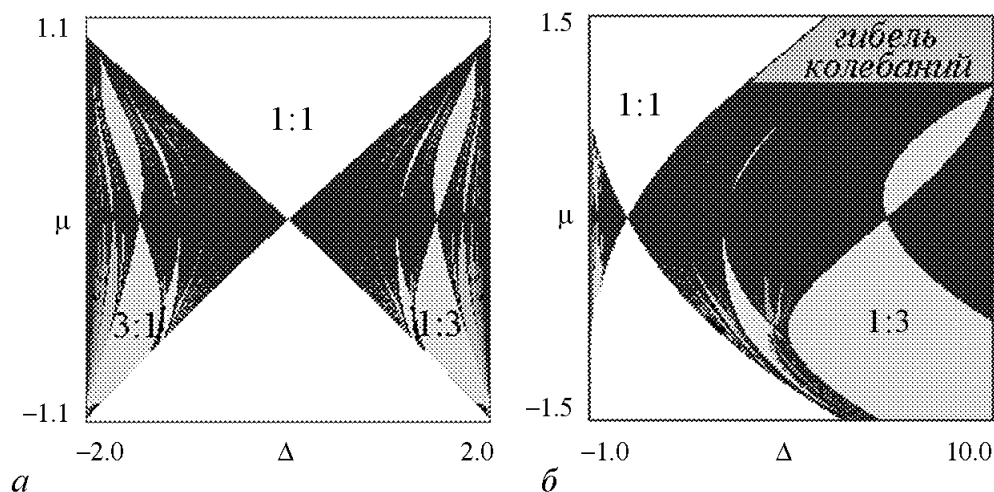


Рис. 2.1. Языки синхронизации и области квазипериодических режимов на плоскости параметров частотная расстройка осцилляторов – величина связи (Δ, μ) : a – для системы (1.1), b – для системы (2.1). Параметры: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0$

ноль скорости одного из осцилляторов, например, $\dot{y} = 0$. Цвет на карте выбирался в соответствии с периодом в таком сечении.⁶

Прежде чем перейти к иллюстрациям, сделаем еще два замечания. Во-первых, укороченная система (1.7) получена из (1.1) с помощью некоторых приближений. Поэтому отвечающая ей форма полной дифференциальной системы может быть подобрана неоднозначно. Поясним это. Если вместо (1.1) использовать, например,

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (\lambda_1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x + \beta x^3 + \varepsilon(x - y) + \mu \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \right) = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - (\lambda_2 - y^2) \frac{dy}{dt} + (1 + \Delta)y + \beta y^3 + \varepsilon(y - x) + \mu \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} \right) = 0,$$

то придем тем не менее к тому же укороченному уравнению (1.7). Хотя (2.1) и отличается от (1.1) всего лишь перенормировкой, эти отличия оказываются существенными. Например, система (1.1) при $\Delta > 2$ описывает ситуацию, когда первый осциллятор характеризуется двухъямным потенциалом, а (2.1) – нет; на плоскости параметров может «исчезнуть» область гибели колебаний при одинаковых значениях параметра λ (см. ниже) и т.д. Мы выберем для дальнейших иллюстраций именно систему (1.1), поскольку для нас важны характерные симметрии задачи, а они в этой форме максимально представлены.

Во-вторых, для компьютерных экспериментов знак коэффициентов в уравнениях не является (с точки зрения расчетов) существенным моментом. В этом отличие от реальной системы, когда изменение знака связи может потребовать использования

⁶Поскольку осцилляторы равноправны, при таком выборе только одна из систем языков синхронизации по одну сторону от основного языка оказывается окрашенной, а вторая – фиксируется как область периода 1 (например, языки с числами вращения 3:1 и 1:3, соответственно). Чтобы сделать картину более информативной, мы учитываем равноправие осцилляторов и окрашиваем такие языки одинаковый цвет.

совершенно другого радиотехнического элемента. Мы уже отмечали, что полезно выбирать разные варианты знаков, и не будем делать в компьютерных экспериментах никаких ограничений.

2.2. Чисто диссипативная связь. Будем следовать структуре первой части работы. Поэтому, прежде всего, представим карту динамических режимов для чисто диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля (1.1) в случае идентичных по управляющему параметру систем при $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (рис. 2.1, *a*). В соответствии с нашими замечаниями, «разрешаем» константе связи принимать и отрицательные значения. По частотной расстройке масштаб рисунка ограничен точками $\Delta = \pm 2$, вне которого изображающие точки при компьютерном моделировании убегают на бесконечность. Для иллюстрации «проблемы» выбора дифференциальной системы на рис. 2.1, *б* показана аналогичная карта для системы (2.1). Заметны определенные различия, например, с точки зрения реализации эффекта гибели колебаний⁷ и симметрии картины.

Вернемся к системе (1.1). На рис. 2.1, *a* видим четко выраженный, симметричный относительно вертикальной оси язык, границы которого с высокой точностью даются полученным в п. 1.2 соотношением $\mu = \pm \frac{\Delta}{2}$. Языки для случаев диссипативной и активной связи на рисунке визуальны идентичны, как и предсказывает анализ фазовой динамики.

На рис. 2.2 показаны две проекции четырехмерного фазового пространства системы (2.1): фазовый портрет первого осциллятора на плоскости (x, \dot{x}) и своего рода «фигуры Лиссажу» на плоскости переменных (x, y) . Выбрана очень маленькая частотная расстройка и представлены случаи диссипативной и активной связи. Из рассмотрения рисунков хорошо видно, что в первом случае (диссипативной связи) осцилляторы синхронизовались практически точно в фазе, а во втором – в противофазе. Хорошо видно также, что при диссипативной связи радиус орбиты уменьшается, а при активной – увеличивается. Физически это совершенно понятно, поскольку активная связь подкачивает дополнительную энергию в систему, а формально это следует из (1.10). В последнем случае цикл искажается еще и по форме с ростом λ [15] так же, как и в автономной системе.

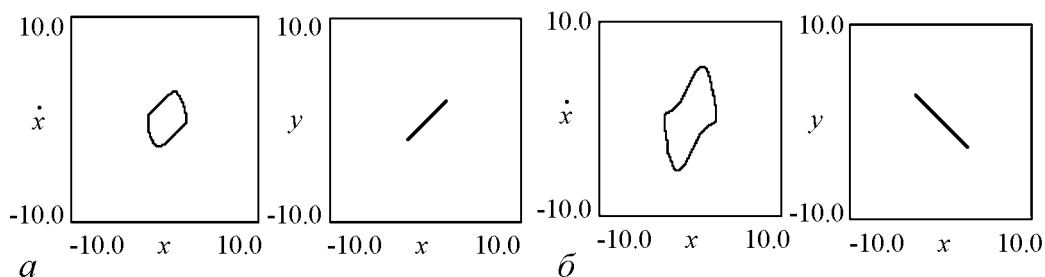


Рис. 2.2. Проекция аттракторов на плоскости (x, \dot{x}) и «фигуры Лиссажу» на плоскости (x, y) для системы (1.1). Параметры: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\Delta = 0.01$; $\mu = 0.5$ – диссипативная связь (*a*) и $\mu = -0.5$ – активная связь (*б*)

⁷Эффект гибели колебаний состоит в том, что положение равновесия в начале координат становится устойчивым из-за значительной величины диссипативной связи и колебания исчезают [1, 2].

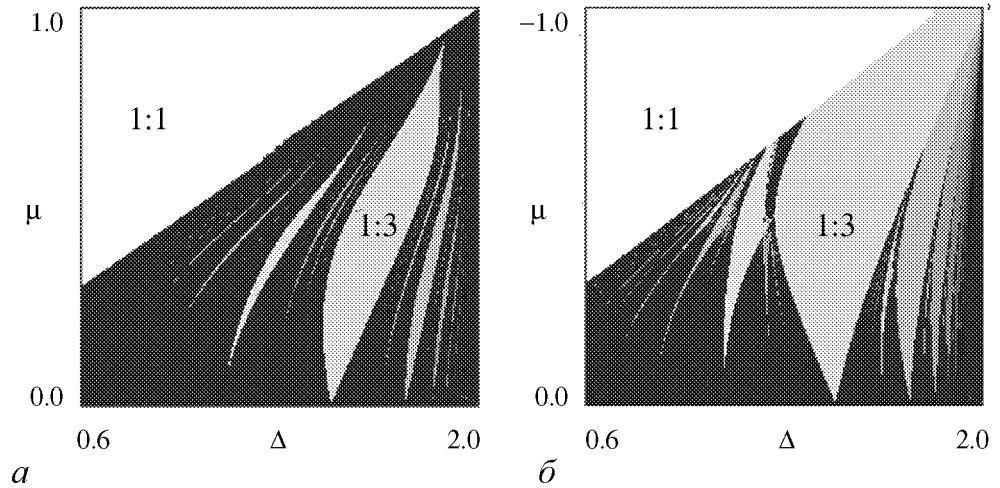


Рис. 2.3. Увеличенные фрагменты рис. 2.1 в случае диссипативной (а) и активной (б) связи. Значения параметров те же, что и на рис. 2.1

На плоскости параметров на рис. 2.1 мы видим также целую систему высших языков синхронизации, из которых наиболее значительный отвечает соотношению частот осцилляторов 3:1 (и 1:3). Эти языки уже не описываются укороченными уравнениями (1.7).

Увеличенные фрагменты карты режимов на рис. 2.3, а, б показывают, что при рассмотрении всей системы языков, в отличие от уравнения фазовой динамики, диссипативная и активная связь уже не эквиваленты. Действительно, для активной связи языки заполняют более широкую частотную полосу и характеризуются более развитым внутренним устройством. Это объясняется тем, что, в соответствии с (1.7), диссипативная связь несколько понижает «эффективный» управляющий параметр, а активная – повышает. Поэтому в системе с активной связью колебания в некотором смысле отвечают большему превышению значения «эффективного» управляющего параметра над пороговым.

2.3. Диссипативная связь, неидентичность и неизохронность. Добавим теперь к диссипативной связи последовательно неидентичность, а затем – неизохронность. Уравнение фазовой динамики (1.12) говорит о том, что введение этих факторов в отсутствие инерционной связи не сказывается на картине синхронизации. Посмотрим, что будет в случае, когда управляющий параметр λ уже не мал.

Сначала добавим только неидентичность осцилляторов, выбрав $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. Карта динамических режимов на плоскости параметров (Δ, μ) для данного случая представлена на рис. 2.4. Хорошо видно, что в области малых расстройек язык остается симметричным, как и предсказывает анализ на основе фазового уравнения, но в области больших расстройек он становится асимметричным. При этом порог синхронизации при отрицательных расстройках существенно ниже, чем при положительных. В рамках уравнения фазовой динамики (1.12) этот эффект уже нельзя объяснить⁸.

⁸Здесь представлен случай, когда отсутствует эффект гибели колебаний. В его присутствии неидентичность осцилляторов оказывается более существенной, соответствующие вопросы обсуждаются в [22].

Добавим теперь к диссипативной связи неизохронность осцилляторов, то есть положим в (1.1) $\beta \neq 0$ (рис. 2.5). В этом случае вершина языка располагается точно при нулевой расстройке, и язык строго симметричен. Видно, однако, что система высших языков синхронизации испытала очень существенные метаморфозы. Теперь они имеют развитое внутреннее устройство, более характерное для традиционного синусотображения окружности [1, 16]. На увеличенном фрагменте (рис. 2.5, б) можно видеть характерные структуры *crossroad area* [16], каскады удвоений и области хаоса. На рис. 2.5, б граница основного языка синхронизации (показанного белым цветом) является линией седло-узловой бифуркации. В соответствии с этим высшие языки выстраиваются вдоль этой линии.

Следует отметить, однако, что система (1.1) с учетом нелинейности вида βx^3 может демонстрировать и режимы, которые уже не имеют никаких аналогов в рамках укороченных уравнений. Действительно, несвязанным осцилляторам с помощью (1.1) можно сопоставить потенциал

$$U(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Delta}{2}\right) x^2 + \frac{1}{4} \beta x^4, \quad U(y) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Delta}{2}\right) y^2 + \frac{1}{4} \beta y^4. \quad (2.2)$$

Если $\Delta > 2$ или $\Delta < -2$, то либо первый, либо второй осциллятор имеет вблизи начала координат не минимум, а максимум потенциала. В этом случае они при $\beta > 0$ характеризуются «двухъямным» потенциалом. Тогда вблизи начала координат нет движения с некоторой собственной частотой, которое можно было бы

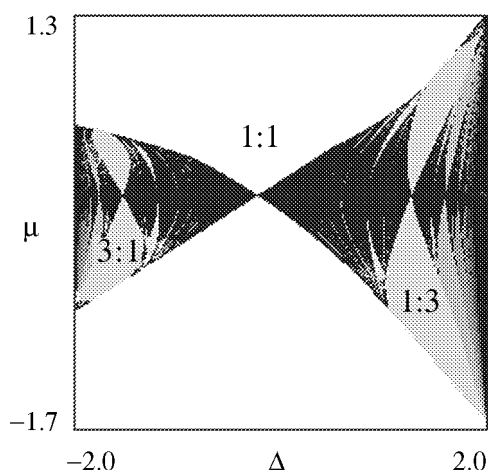


Рис. 2.4. Карта динамических режимов неидентичных по управляющему параметру систем с диссипативной связью, $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \beta = 0$

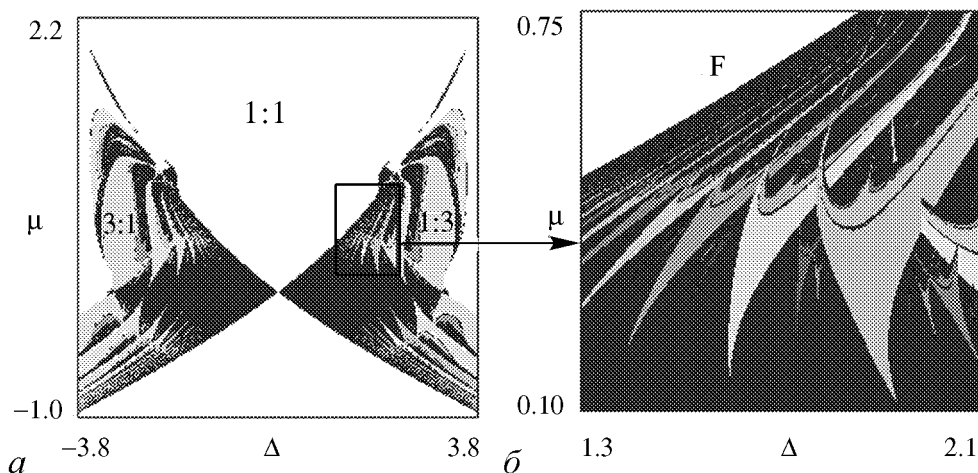


Рис. 2.5. Карта динамических режимов неизохронных систем с диссипативной связью и ее увеличенный фрагмент. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.0, \beta = 0.5$. F – линия седло-узловой бифуркации

использовать как «опорное» в методе медленно меняющихся амплитуд, и укороченная система уравнений (1.9) не применима. В то же время система (1.1) может быть решена численно и в этом случае. Как видно из (2.2), даже при малых β за счет члена $\frac{1}{4}\beta x^4$ исчезает разбегание траекторий при любых величинах параметра Δ . Соответственно, диапазон Δ может быть увеличен (сравните рис. 2.4 и рис. 2.5,а).

Фрагмент карты динамических режимов в окрестности точки $\Delta = 2$, отвечающей «фазовому переходу» от одноячного к двухъячному потенциалу в первом осцилляторе, представлен на рис. 2.6. На этом рисунке в области $\Delta > 2$ граница языка устроена сложнее, чем мы видели ранее. Можно видеть, например, жесткий переход для области периода 1 (в левой части рис. а), который возникает при сканировании плоскости параметров в ходе построения карты. Кроме того, в области периода 1 выделяются некоторые дополнительные линии.

Для более ясного понимания устройства плоскости параметров на рис. 2.6, б показаны найденные численно бифуркационные линии. На этом рисунке наряду с линией седло-узловой бифуркации можно видеть две линии бифуркации Неймарка–Сакера. Именно переход между линиями седло-узловой бифуркации и Неймарка–Сакера и фиксируется как «скачок» на карте рис. 2.6, а. Одна из линий бифуркации Неймарка–Сакера имеет концевую точку на линии седло-узловой бифуркации, которая является бифуркацией коразмерности два – резонанс 1:1 [17]. Вторая линия бифуркации Неймарка–Сакера кончается в точке резонанса 1:2 на линии бифуркации удвоения периода. Соответственно, в правой части рис. 2.6 при уменьшении величины связи имеют место удвоения периода. Имеется некоторая особая точка – точка слияния двух линий бифуркации Неймарка–Сакера при $\mu = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Это некоторая вырожденная ситуация. Природа вырождения понятна: при $\mu = \lambda_1 = \lambda_2$ в системе, в соответствии с (1.1) и (1.7), диссипативная связь точно компенсирует отрицательное трение в автоколебательной системе.

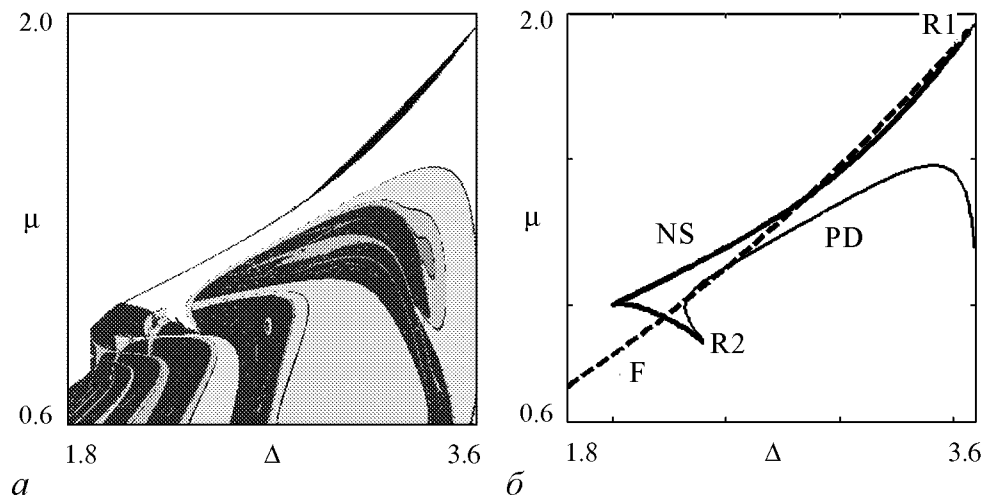


Рис. 2.6. а – Фрагмент карты динамических режимов, показанной на рис. 2.5, а, в окрестности точки $\Delta = 2$. б – Линии и точки бифуркаций: NS – линии бифуркации Неймарка–Сакера, F – линия седло-узловой бифуркации, PD – линия бифуркации удвоения периода, R1 – точка резонанса 1:1, R2 – точка резонанса 1:2

Теперь добавим и неидентичность и неизохронность одновременно (рис. 2.7). В этом случае основной язык очень сильно смещается в область положительных расстройок. В рамках фазового уравнения (1.12) получаем оценку $\Delta = 2\chi\delta = 6\beta\delta \approx 3$. Смещение настолько велико, что вершина языка оказывается вне области $-2 < \Delta < 2$, которой соответствуют положительные коэффициенты, отвечающие за собственные колебания в исходной системе (1.1). По сравнению с изохронным случаем, видна резко выраженная асимметрия картины относительно вершины основного языка.

Выделенный фрагмент на рис. 2.7, б демонстрирует систему языков, содержащих острова удвоенного периода. Четко фиксируется мультистабильность и возможность перекрытия языков синхронизации. На карте это выглядит как система перекрывающихся своеобразных «колец», принадлежащих разным языкам синхронизации.

Вершины языков на рис. 2.7, б выстраиваются весьма характерным образом вдоль линии бифуркации Неймарка–Сакера NS. (Сравните с альтернативным слу-

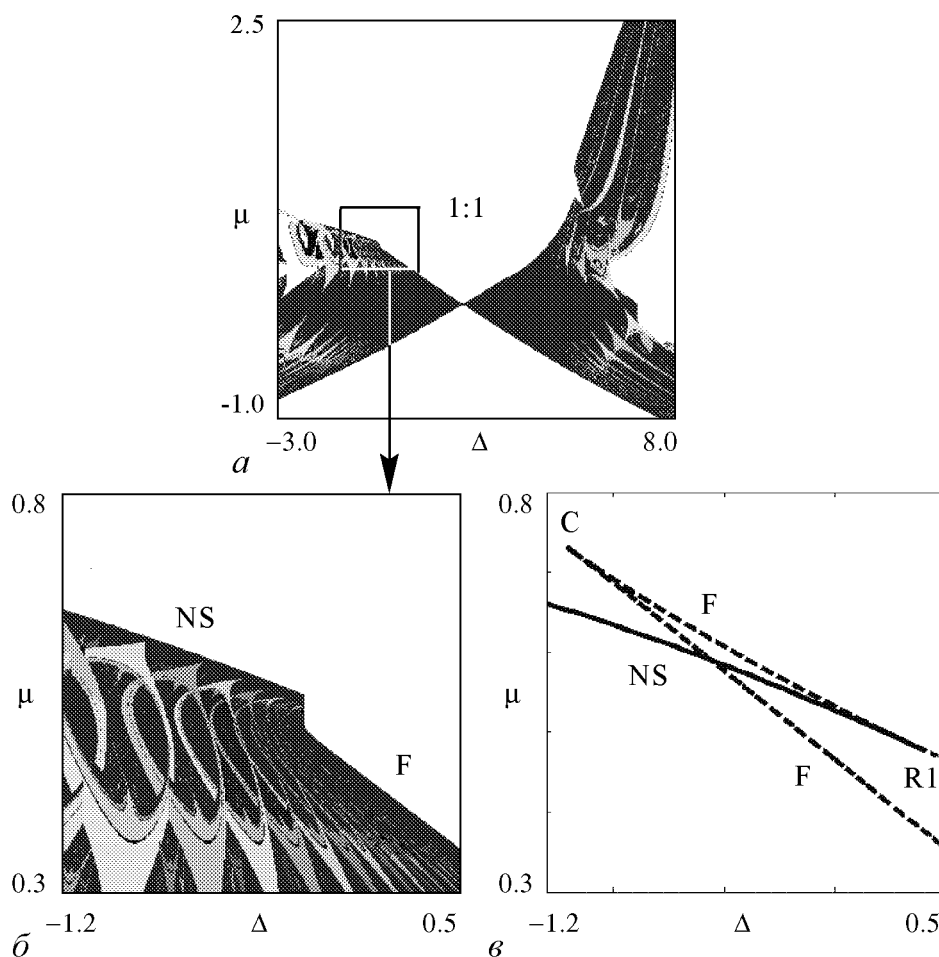


Рис. 2.7. Карта динамических режимов (а) и ее увеличенный фрагмент (б) для неизохронной неидентичной системы с диссипативной связью: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, ($\delta = 0.5$) и $\beta_1 = \beta_2 = 1$. Линии и точки бифуркаций на границе основного языка синхронизации (б): NS – линия бифуркации Неймарка–Сакера, F – линии седло-узловой бифуркации, R1 – точка резонанса 1:1, C – точка сборки

чаем седло-узловой бифуркации рис. 2.5, б.) В правой части рисунка границей основной области синхронизации вновь является линия седло-узловой бифуркации. В окрестности точки $\Delta = -0.2$ можно видеть жесткий переход с линии седло-узловой бифуркации на линию Неймарка–Сакера.

На рис. 2.7, в показаны найденные с помощью численного бифуркационного анализа основные линии и точки. Можно видеть, что линия седло-узловой бифуркации имеет острие с точкой сборки, а линии седло-узловой бифуркации и Неймарка–Сакера имеют общую точку бифуркации коразмерности два, резонанс 1:1. Представленная конфигурация весьма характерна для задач синхронизации и выявляется и в системе ван дер Поля с гармоническим воздействием [19].

2.4. Чисто инерционная связь. Обратимся теперь к случаю инерционной связи. На рис. 2.8, а показана соответствующая карта для идентичных ($\lambda_1 = \lambda_2 = 1$) изохронных осцилляторов. При построении рисунка масштабы изменения связи и частотной расстройки выбирались так, чтобы в «поле зрения» оказалась вся система основных языков синхронизации. В отличие от случая диссипативной связи это требует существенно больших значений параметров.

Прежде всего, отметим, что основной язык синхронизации имеет ярко выраженное острие (корневую особенность), как и следует из анализа фазовой динамики. С другой стороны, в выбранных нами масштабах частоты и связи случаи отрицательной и положительной связи резко различаются. Можно видеть также область «убегания» траекторий на бесконечность своеобразной формы. Ее границы можно найти аналитически. Действительно, в случае чисто инерционной связи система уравнений (1.1) в изохронном случае может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - (\lambda_1 - x^2) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} - (\lambda_2 - y^2) \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где потенциал задается соотношением

$$U(x, y) = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{\Delta}{2} + \varepsilon\right)x^2 - 2\varepsilon xy + \left(1 + \frac{\Delta}{2} + \varepsilon\right)y^2 \right]. \quad (2.4)$$

Таким образом, в отличие от диссипативной связи, инерционная связь изменяет форму потенциала так, что он становится функцией обеих координат. Нетрудно показать, что выражение (2.4) отвечает двумерному минимуму при условии

$$\varepsilon > \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta^2}{4} - 1 \right). \quad (2.5)$$

Если же неравенство имеет противоположный знак, минимум превращается в седло. В этом случае наблюдается убегание траекторий. Граница области убегания дается соотношением

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta^2}{4} - 1 \right). \quad (2.6)$$

Эту границу и можно видеть на рис. 2.8. Пороговое значение связи, при которой еще возможны колебания, $\varepsilon = -\frac{1}{2}$.

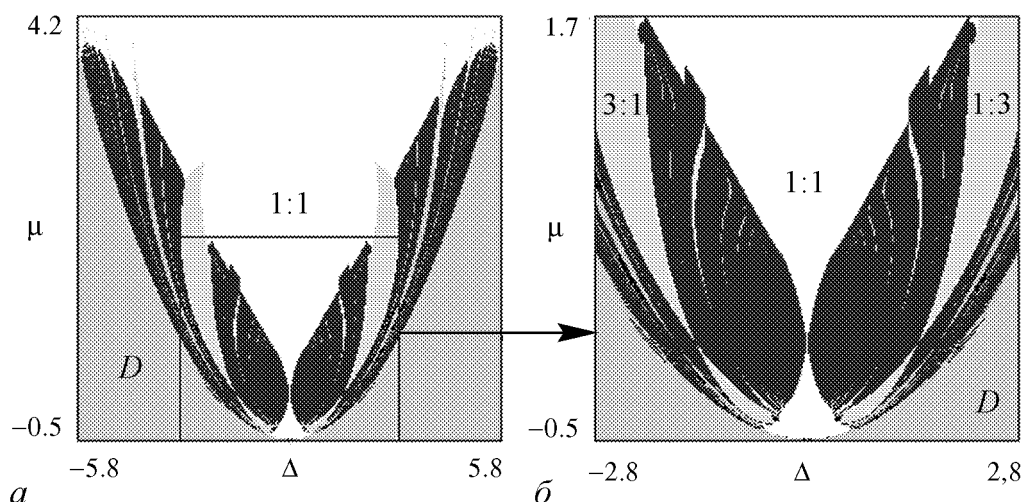


Рис. 2.8. *a* – Система языков синхронизации для системы с чисто инерционной связью при $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\beta = 0$. *б* – увеличенный фрагмент в области острия основного языка синхронизации. Здесь и далее *D* обозначает область, в которой траектории системы убегают на бесконечность

На рис. 2.8, *б* показан фрагмент рис. 2.8, *а*, демонстрирующий в увеличенном виде острие основного языка. Видно, что в этих масштабах случаи положительных и отрицательных параметров связи уже почти эквивалентны, как и предсказано анализом динамики фазы. Более того, в области отрицательных ε можно видеть и всю систему высших языков синхронизации.

2.5. Инерционная связь и неидентичность. На рис. 2.9, *а* представлена карта для случая инерционной связи с добавлением неидентичности осцилляторов. Анализ фазовой динамики предсказывал бистабильность внутри основного языка синхронизации (см. рис. 1.2 и его обсуждение). Компьютерные эксперименты также обнаруживают бистабильность, которая проявляется в перекрытии разных «листов» карты. (Вообще говоря, разные листы карты, отвечающие разным начальным условиям, но одному периоду, формально не должны визуализироваться. Однако на краях листа, когда имеет место седло-узловая бифуркация, процессы во времени резко замедляются, и при компьютерном исследовании линия бифуркации проявляется отдельными точками или даже целой линией [16], как и видно на рис. 2.9. (Для более точного описания многолистной структуры карты, однако, нужно использовать бифуркационный анализ.)

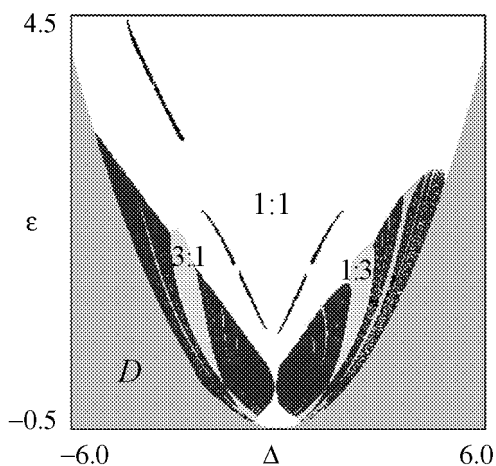


Рис. 2.9. Плоскость параметров частотная расстройка – величина связи для неидентичных систем с инерционной связью; $\delta = 0.5$ ($\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 1$).

При обсуждении фазовой динамики обращалось внимание на две харак-

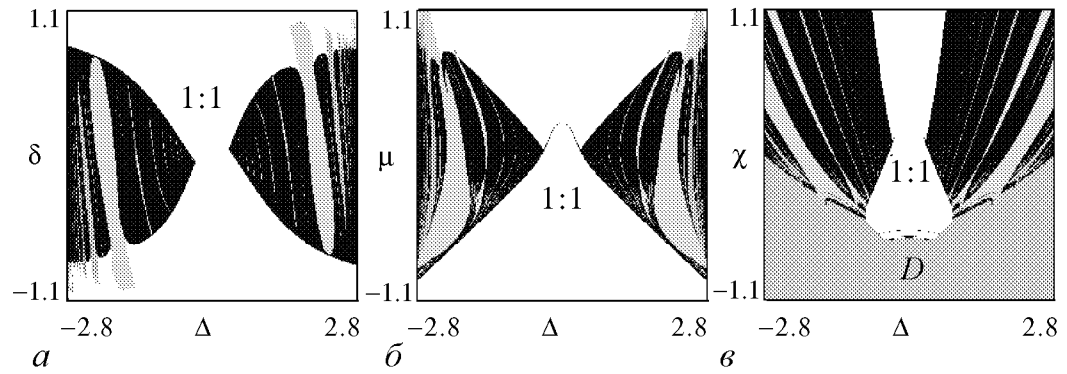


Рис. 2.10. Карты динамических режимов для случаев: a – инерционная связь и неидентичность; b – комбинированная связь; v – инерционная связь и неизохронность. Все карты построены для $\epsilon = 0.5$

терные «базовые» конфигурации языков, которые реализуются соответственно на плоскостях параметров частотная расстройка – сила связи (Δ , ϵ) и частотная расстройка – параметр неидентичности (Δ , δ). На рис. 2.10, a показана карта режимов, представляющая второй характерный тип языка синхронизации, которую следует сравнивать с рис. 1.4. Как и в рамках фазовой динамики, в этом случае язык опирается на конечный интервал частотных расстроек. Можно видеть и два листа карты динамических режимов, «нависающие» друг над другом, что отвечает бистабильности и соответствует рис. 1.4.

2.6. Исследование симметрий, предсказанных в рамках уравнения фазовой динамики. В первой части работы, анализируя возможные симметрии обобщенного уравнения Адлера (1.12) относительно сдвига фазы, мы установили эквивалентность трех случаев: наличие инерционной связи и неидентичности, комбинированной связи, инерционной связи и неизохронности. На рис. 2.10 показаны карты динамических режимов, отвечающие второму «типу» языка синхронизации для этих трех вариантов. Можно видеть хорошее соответствие пары инерционная связь и неидентичность (рис. 2.10, a) паре диссипативная и инерционная связь (рис. 2.10, b). Это соответствие касается не только формы основного языка синхронизации, но отчасти и устройства всей системы языков. Существенно хуже соотносится с этими двумя ситуациями случай инерционная связь и неизохронность (рис. 2.10, v). Различия, однако, касаются, в первую очередь, системы высших языков синхронизации.

2.7. Инерционная связь с добавкой неидентичности, неизохронности и диссипативной связи. Обратимся теперь к системе с инерционной связью и неизохронностью. На рис. 2.11 показано устройство системы языков синхронизации в такой системе в широком диапазоне изменения параметров. Иллюстрации даны на плоскости частотная расстройка и один из параметров: величина связи ϵ (рис. 2.11, a) и параметр неизохронности $\chi = 3\beta$ (рис. 2.11, b). Можно видеть, что добавление неизохронности существенно влияет на систему высших языков синхронизации. На рис. 2.11, a наблюдаются острова удвоенного периода внутри высших языков в области положительных значений константы связи. В области отрицательных значений ϵ , в нижней части карты, можно видеть еще более сильные метаморфозы: возникают развитые структуры *crossroad area* и картина перекрытия языков, характерная для традиционного синус-отображения окружности [1, 16].

На плоскости параметров частотная расстройка Δ – параметр неизохронности χ (рис. 2.11, б) высшие языки синхронизации имеют совершенно другую, весьма специфическую конфигурацию. В нижней части карты можно видеть области разбегания траектории. Это понятно: при отрицательных значениях параметра неизохронности соответствующий потенциал (2.2) характеризуется обращенными «вниз» ветвями параболы четвертой степени. Интересно отметить, что доминирующие высшие языки 1:3 при приближении к границе разбегания заметно расширяются и внутри них наблюдаются удвоения периода и структуры *crossroad area*.

На следующем рис. 2.12 показаны карты динамических режимов, представляющие собой модификацию рис. 2.11 при введении нового фактора: существенной

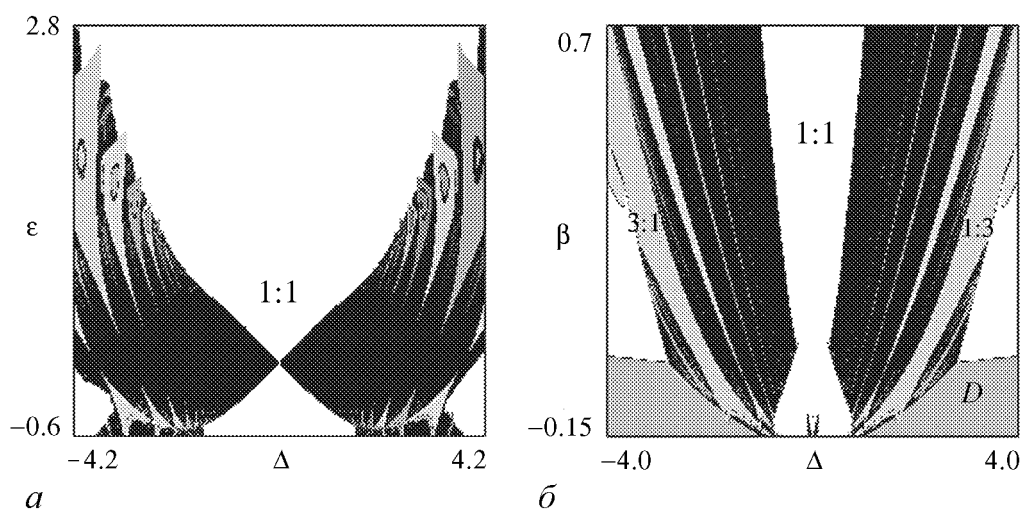


Рис. 2.11. Карты динамических режимов для системы с инерционной связью и неизохронностью, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$: а – $\beta = 1$, б – $\epsilon = 0.5$

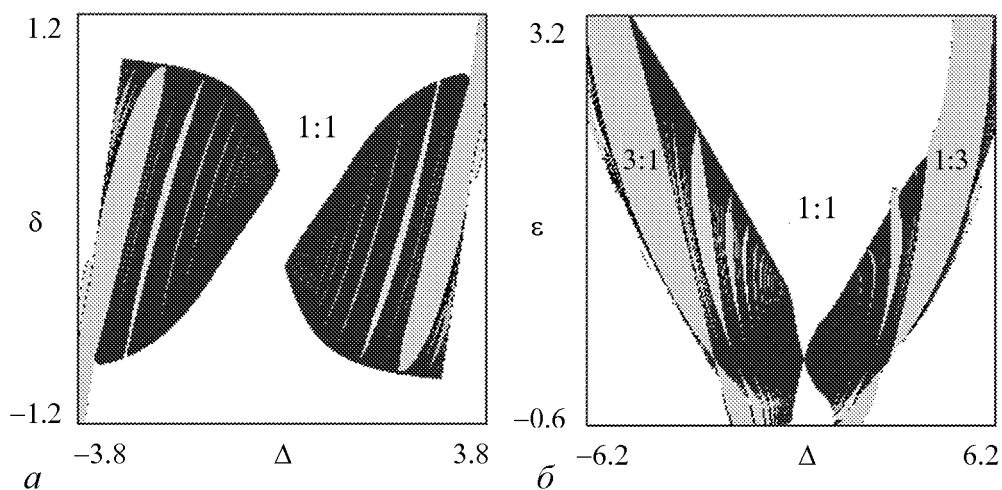


Рис. 2.12. Карты динамических режимов для неидентичных неизохронных систем с инерционной связью: а – на плоскости (δ, Δ) при фиксированном значении $\epsilon = 0.5$; б – на плоскости (ϵ, Δ) при фиксированном значении $\delta = 0.5$ ($\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 1$). Параметр неизохронности в обоих случаях $\chi = 0.75$ ($\beta = 0.25$)

неидентичности. При обсуждении соответствия со случаем фазовой динамики, левый рисунок рис. 2.12 нужно сопоставить с рис. 1.6, *e*. (При этом следует только иметь в виду разные масштабы по осям координат на этих рисунках.) Можно видеть, что предсказанная в рамках фазовой динамики характерная «наклонная» структура области периода 1, выявляется и на карте динамических режимов. При этом четко фиксируются и характерные «изломы» на ее краях, связанные, как мы видели при обсуждении в п.1.6, с катастрофой типа «ласточкин хвост». Рис. 2.12, *б* также демонстрирует появление асимметрии в устройстве плоскости параметров частотная расстройка – величина связи.

На рис. 2.13 и 2.14 можно видеть карты динамических режимов, представляющие собой дальнейшую модификацию рис. 2.12 при введении в неидентичной неизо-

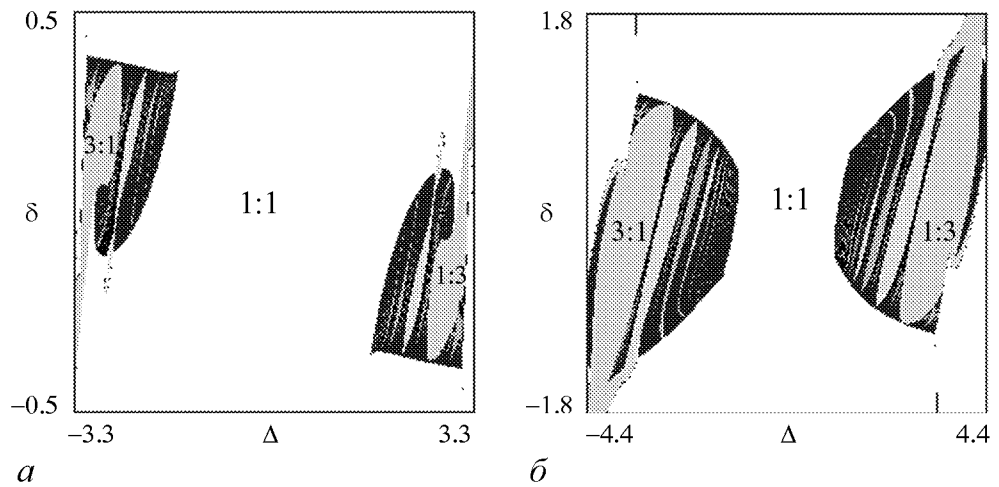


Рис. 2.13. Карты динамических режимов для неидентичных неизохронных систем с диссипативной и инерционной связью на плоскости (Δ, δ) для $\chi = 0.75$, $\varepsilon = 0.5$, $\mu = 0.6$ (*a*) и $\mu = -0.4$ (*б*)

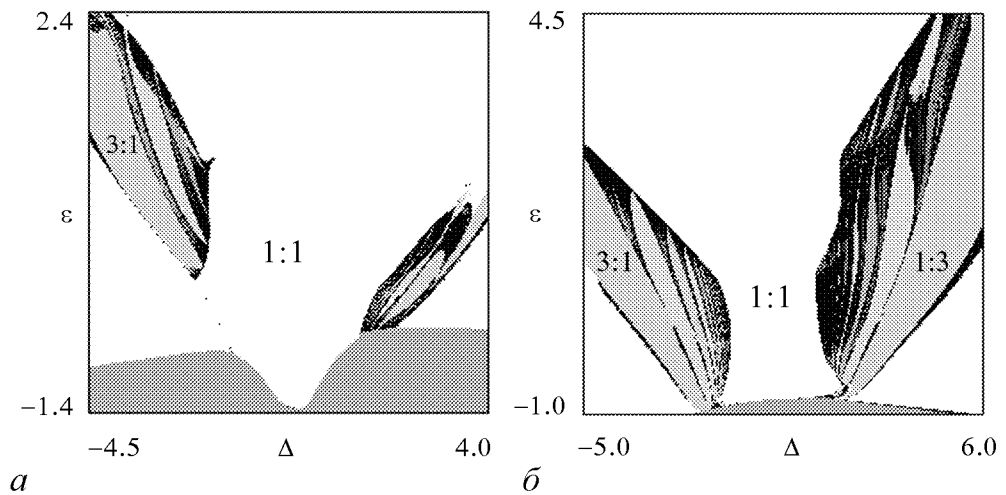


Рис. 2.14. Карты динамических режимов для неидентичных неизохронных систем с диссипативной и инерционной связью на плоскости (Δ, ε) для $\chi = 0.75$, $\delta = 0.5$ ($\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 1$), $\mu = 0.6$ (*a*), и $\mu = -0.4$ (*б*)

хронной системе с инерционной связью добавки диссипативной связи. На рис. 2.13 представлены карты на плоскости частотная расстройка – параметр неидентичности, а на рис. 2.14 – частотная расстройка – величина инерционной связи. При этом рисунки (а) соответствуют диссипативной связи ($\mu > 0$), а рисунки (б) – активной ($\mu < 0$). Это случай, когда существенны все четыре фактора, оказывающие влияние на поведение системы связанных осцилляторов ван дер Поля (1.1).

Из рис. 2.13, а можно видеть, что резко увеличивается область основной синхронизации 1:1 при $\mu > 0$. Несколько меньшее уширение имеется и для случая $\mu < 0$, однако, для него характерно заметное уширение высших языков синхронизации, которые на рис. 2.13, б, фактически, смыкаются краями. На плоскости частотная расстройка – величина инерционной связи на рис. 2.14 также увеличивается и меняет конфигурацию область синхронизации 1:1, и весьма характерным является уширение высших языков синхронизации.

Заключение

В настоящей работе получено обобщенное уравнение Адлера, описывающее фазовую динамику связанных осцилляторов ван дер Поля–Дуффинга с учетом всех существенных факторов: неидентичности, неизохронности, диссипативной и инерционной связи. Показано, что все они, за исключением диссипативной связи, для описания динамики фазы требуют учета эффектов второго порядка. Поэтому, например, введение неидентичности или неизохронности проявляется лишь в присутствии инерционной связи как комбинированный эффект.

В рамках фазового уравнения условия основных бифуркаций, ответственных за конфигурацию областей синхронизации, находятся аналитически. При этом типичными являются перестройки «клюв к клюву» и «ласточкин хвост». Проведенное рассмотрение наглядно показало продуктивность подхода, основанного на рассмотрении случаев произвольных знаков всех параметров системы, включая величину диссипативной связи.

Фазовое уравнение обладает определенными симметриями, которые за счет преобразования сдвига фазы приводят к одинаковой картине бифуркационных линий в случае совместного действия некоторых факторов: инерционная связь и неидентичность, комбинированная связь, а также инерционная связь и неизохронность.

Методом карт динамических режимов выявлено устройство пространства параметров дифференциальной системы осцилляторов ван дер Поля–Дуффинга в случае не малых управляющих параметров с учетом неидентичности, неизохронности, диссипативной и инерционной связи. При этом обнаруживаются как черты поведения, предсказанные в рамках фазовой динамики (форма основного языка у его основания, наличие областей бистабильности и др.), так и существенно отличающиеся моменты (например, исчезновение областей гибели колебаний). В общем случае система характеризуется большим числом параметров и ее полный численный анализ очень объемен. Исследование фазовой динамики облегчает его, давая некоторый «путеводитель» в пространстве параметров.

К числу достоинств метода карт динамических режимов можно отнести выявление всей структуры языков синхронизации и их внутреннего устройства, кото-

рое, особенно в неизохронном случае, оказывается достаточно сложным и включает острова удвоенного периода, структуры *crossroad area* и области хаоса. Весьма наглядно выявляются два типа организации высших языков: в окрестности линии седло-узловой бифуркации, ограничивающей основной язык синхронизации, и линии бифуркации Неймарка–Сакера.

Компьютерное исследование подтверждает также связанную с симметрией фазового уравнения эквивалентность некоторых типов поведения. При этом случаи инерционная связь плюс неидентичность и комбинированная связь демонстрируют не только сходство формы основного языка синхронизации, но и похожую структуру высших языков синхронизации.

Авторы выражают благодарность Сатаеву И.Р. и Кузнецову С.П. за полезное обсуждение.

Работа поддержана грантом РФФИ (грант № 06-02-16773).

Библиографический список

1. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация, фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003, 508 с.
2. Aronson D.G., Ermentrout G.B., Kopell N. Amplitude response of coupled oscillators // *Physica D*. 1990. Vol. 41. P. 403.
3. Rand R.H., Holmes P.J. Bifurcation of periodic motions in two weakly coupled van der Pol oscillators // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 1980. Vol. 15. P. 387.
4. Storti D.W., Rand R.H. Dynamics of two strongly coupled van der Pol oscillators // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 1982. Vol. 17, № 3. P. 143.
5. Chakraborty T., Rand R.H. The transition from phase locking to drift in a system of two weakly coupled van der Pol oscillators // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 1988. Vol. 23, № 5/6. P. 369.
6. Poliashenko M., McKay S.R., Smith C.W. Chaos and nonisochronism in weakly coupled nonlinear oscillators // *Phys. Rev. A*. 1991. Vol. 44. P. 3452.
7. Poliashenko M., McKay S.R., Smith C.W. Hysteresis of synchronous – asynchronous regimes in a system of two coupled oscillators // *Phys. Rev. A*. 1991. Vol. 43. P. 5638.
8. Pastor I., Perez-Garcia V.M., Encinas-Sanz F., Guerra J.M. Ordered and chaotic behavior of two coupled van der Pol oscillators // *Phys. Rev. E*. 1993. Vol. 48. P. 171.
9. Camacho E., Rand R.H., Howland H. Dynamics of two van der Pol oscillators coupled via a bath // *Int. J. of Solids and Structures*. 2004. Vol. 41. P. 2133.
10. Кузнецов А.П., Паксютов В.И. О динамике двух связанных осцилляторов ван дер Поля–Дуффинга с диссипативной связью // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2003. Т. 11, № 6. С. 48.
11. Кузнецов А.П., Паксютов В.И. Особенности устройства пространства параметров двух неидентичных связанных осцилляторов ван дер Поля–Дуффинга // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2005. Т. 13, № 4. С. 3.

12. *Ivanchenko M.V., Osipov G.V., Shalfeev V.D., Kurths J.* Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators // *Physica D.* 2004. Vol. 189, № 1-2. P. 8.
13. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980.
14. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. М.: Наука, 1990. 128 с.
15. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. Сер. Современная теория колебаний и волн. 2-е изд. М.: Физматлит, 2006.
16. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Сер. Современная теория колебаний и волн. 2-е изд. М.: Физматлит, 2006. 356 с.
17. *Ван Д., Ли Ч., Чоу Ш.-Н.* Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости. М.: МЦНМО, 2005. 415 с.
18. Солитоны / Под ред. Р. Буфала и Ф. Кодри. М.: Мир, 1983. 408 с.
19. *Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей.; Ижевск; Москва: РХД, 2002. 560 с.
20. *Mettin R., Parlitz U., Lauterborn W.* Bifurcation structure of the driven van der Pol oscillator // *International Journal of Bifurcation and Chaos.* 1993. Vol. 3, № 6.
21. *Арнольд В.И.* Эволюция волновых фронтов и эквивариантная лемма Морса // В кн.: В.И. Арнольд. Избранное–60. М.: Фазис, 1997. С. 289.
22. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И., Ю.П. Роман.* Особенности синхронизации в системе неидентичных связанных осцилляторов ван дер Поля и ван дер Поля–Дуффинга. Широкополосная синхронизация // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2007. Т. 15, № 4. С. 3.
23. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* Критическая динамика решеток связанных отображений у порога хаоса (обзор) // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1991. Т. 34, № 10–12. С. 1079.
24. *Anishchenko V.S. et al.* Nonlinear dynamics of chaotic and stochastic systems. Springer, 2001. 374 p.

*Саратовский филиал Института
радиотехники и электроники РАН
Саратовский государственный
университет*

*Поступила в редакцию 11.01.2008
После доработки 25.03.2008*

COUPLED VAN DER POL AND VAN DER POL–DUFFING OSCILLATORS: DYNAMICS OF PHASE AND COMPUTER SIMULATION

A.P. Kuznetsov, N.V. Stankevich, L.V. Turukina

Synchronization in the system of coupled nonidentical and nonisochronous van der Pol oscillators with dissipative and inertial type of coupling is discussed. Generalized Adler equation is obtained and investigated in the presence of all factors. Basic symmetry of the equation, with leads to equivalence of some physical factors, is displayed. Numerical investigation of parameters space of initial differential system is realized. Results of two methods are compared and discussed.



Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и школьной научной лаборатории. Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и лицея прикладных наук СГУ, 10 учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002).

E-mail: alkuz@sgu.ru; www.sgtnd.narod.ru



Станкевич Наталья Владимировна – родилась в 1985 году, окончила (с отличием) Саратовский госуниверситет, факультет нелинейных процессов (2007). В настоящее время аспирант факультета нелинейных процессов СГУ. Занимается исследованием особенностей синхронизации короткими импульсами в многомерных автоколебательных системах. Автор 15 публикаций, в том числе 6-ти статей в российских и международных журналах.



Тюрюкина Людмила Владимировна – родилась в 1977 году. Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, доцент базовой кафедры динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов – динамический хаос, критические явления на пороге хаоса, сложная динамика нелинейных осцилляторов и автоколебательных систем с внешним периодическим воздействием в контексте сопоставления различных подходов к их описанию, синхронизация короткими импульсами и управление неустойчивыми режимами посредством коротких импульсов. Автор более 50 научных публикаций, из них около 20 статей в российских и зарубежных журналах. Лауреат стипендии Президента РФ для студентов и аспирантов. В 2001 и 2002 годах получила персональные гранты РФФИ для молодых исследователей. Принимает участие в работе международных научных коллективов.

E-mail: ludmila@forpost.ru