Журнал в журнале

Изв. вузов «ПНД», т. 16, № 4, 2008 УДК 517.9

АСИМПТОТИКА СЛОЖНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ СТРУКТУР В СИСТЕМАХ С БОЛЬШИМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

С.А. Кащенко, И.С. Кащенко

Работа посвящена локальной динамике дифференциальных уравнений с двумя запаздываниями. Рассмотрена ситуация, когда одно из запаздываний является асимптотически большим. При этом условии критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия имеют бесконечную размерность. Показано, что роль нормальных форм играют семейства уравнений типа Гинзбурга–Ландау. Их нелокальная динамика и определяет локальное поведение решений исходных уравнений.

Введение

Дифференциальные уравнения с запаздыванием служат математическими моделями для многих прикладных задач [1–4]. Одним из простейших и в то же время наиболее часто встречающихся в прикладных задачах [4–5] уравнением с запаздыванием является скалярное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dx}{dt} + x = F(x, x(t-T)), \quad T > 0.$$

В ряде работ отмечалась важность исследования динамики этого уравнения при условии

$$T \gg 1.$$

В настоящей работе при таком условии исследуется динамика более сложного объекта – уравнения с двумя запаздываниями

$$\dot{x} + x = ax(t-T) + bx(t-T_1) + f(x, x(t-T), x(t-T_1)), \tag{1}$$

где $0 < T < T_1$, а достаточно гладкая функция $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ имеет в нуле порядок малости выше первого. Уравнение (1) является естественным обобщением уравнения с одним запаздыванием.

Для упрощения дальнейших вычислений считаем, что нелинейность f зависит только от первого аргумента, то есть $f(x,y,z) \equiv f(x) = f_2x^2 + f_3x^3 + \ldots$.

Ситуация, когда f зависит от $x(t-T)$ и от $x(t-T_1)$, разбирается полностью аналогично.

Центральное место исследования занимает изучение поведения корней характеристического квазиполинома

$$\lambda + 1 = a\exp(-\lambda T) + b\exp(-\lambda T_1), \tag{2}$$

линеаризованного в нуле уравнения (1).

Критический случай в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия (1) реализуется, когда характеристическое уравнение (2) имеет корни с нулевой вещественной частью и не имеет с положительной. Интерес представляет выявление тех особенностей, которые, во-первых, возникают при достаточно большом параметре T_1, характеризующем запаздывание, и, во-вторых, специфичны для уравнения с двумя запаздываниями.

Изучим динамику уравнения (1) в окрестности нулевого состояния равновесия при условии, что параметры a, b и T как-то фиксированы, а для параметра T_1 выполнено условие

$$T_1 \gg 1. \tag{3}$$

Необходимо отметить, что численное исследование (1) наталкивается на значительные сложности вычислительного характера.

Произведем нормировку времени $t \to tT_1$. В итоге получим другую форму записи уравнения (1)

$$\varepsilon\dot{x} + x = ax(t - \varepsilon T) + bx(t-1) + f(x), \tag{4}$$

где $0 < \varepsilon = T_1^{-1} \ll 1$.

1. Линейный анализ

Характеристический квазиполином для линеаризованного в нуле уравнения (4) имеет вид

$$\varepsilon\lambda + 1 = a\exp(-\varepsilon\lambda T) + b\exp(-\lambda). \tag{5}$$

Для формулировки результатов введем несколько обозначений. Пусть $P(\omega)$ – комплексная функция вещественного аргумента ω, такая что

$$P(\omega) = i\omega + 1 - a\exp(-i\omega T) = \rho(\omega)\exp(i\varphi(\omega)).$$

Здесь $\rho(\omega) \geq 0$ и $\varphi(\omega)$ – вещественнозначные функции. Обозначим через b_0 минимум функции $\rho(\omega)$

$$b_0 = \min_{0 \leq \omega < \infty} \rho(\omega) = \rho(\omega_0).$$

Отметим, что ω_0 определяется единственным образом.

Кроме этого, обозначим через $\omega(T)$ наименьший положительный корень уравнения

$$-\omega = \operatorname{tg}\omega T$$

и определим значение $a_0(T) = -\sqrt{1 + \omega^2(T)}$.

Сформулируем несколько простых промежуточных утверждений. Через q ниже обозначена некоторая положительная и не зависящая от ε постоянная, точное значение которой несущественно.

Лемма 1. *Пусть либо $a > 1$ либо $a < a_0(T)$. Тогда при всех достаточно малых* ε *уравнение (5) имеет корень* $\lambda(\varepsilon)$, *удовлетворяющий неравенству* $\mathrm{Re}\lambda(\varepsilon) \geq q$.

Тем самым в условии Леммы 1 задача о динамике уравнения (4) становится нелокальной: в достаточно малой (но не зависящей от ε) окрестности нулевого состояния равновесия уравнения (4) не может существовать аттрактор. Поэтому предполагаем, что выполнено неравенство

$$a_0(T) \leq a \leq 1.$$

Отметим, что в случае $a = a_0(T)$ или $a = 1$ параметр $b_0 = 0$. Этот случай рассмотрен ниже. Здесь же считаем, что

$$a_0(T) < a < 1. \tag{6}$$

Лемма 2. *Пусть* $|b| > b_0$. *Тогда при всех достаточно малых* ε *существует такой корень* $\lambda(\varepsilon)$ *уравнения (5), для которого* $\mathrm{Re}\lambda(\varepsilon) \geq q$.

Лемма 3. *Пусть* $|b| < b_0$. *Тогда при всех достаточно малых* ε *все корни уравнения (5) удовлетворяют неравенству* $\mathrm{Re}\lambda \leq -q$.

В условии Леммы 2 задача о динамике уравнения (4) снова является нелокальной, а в условии Леммы 3 – тривиальной: все решения из достаточно малой (но не зависящей от ε) окрестности нулевого решения стремятся к нулю при $t \to \infty$.

Таким образом, в изучении нуждается ситуация, когда параметр b близок по модулю к b_0. Положим

$$b = b_0(1 + \mu b_1), \quad 0 < \mu \ll 1.$$

Случай, когда b близок к $-b_0$, совпадает с этим в пределах точности вычислений, поэтому разбирать его мы не будем.

Легко показать, что в данном случае квазимногочлен (5) имеет бесконечное количество корней, стремящихся к мнимой оси, вида

$$\lambda_k = \frac{\omega_0}{\varepsilon}i + (\theta_0(\varepsilon) + \Omega + 2\pi k)i + \varepsilon\tilde{\lambda}_{k1} + \varepsilon^2\tilde{\lambda}_{k2} + \mu b_1 + o(\varepsilon^2 + \mu), \tag{7}$$

где $\theta_0(\varepsilon) \in [0, 2\pi)$ такое, что $\omega_0\varepsilon^{-1} + \theta_0(\varepsilon)$ является целым кратным 2π; $\Omega \in [0, 2\pi)$ определяется уравнением

$$b_0 \exp(-i\Omega) = i\omega_0 + 1 - a\exp(-i\omega_0 T);$$

а для λ_{k1} и λ_{k2} справедливы формулы

$$\begin{aligned}
\tilde{\lambda}_{k1} &= -\varphi'(\omega_0)(\theta_0(\varepsilon) + \Omega + 2\pi k)i, \\
\tilde{\lambda}_{k2} &= -\frac{1}{2}(\varphi'(\omega_0)^2 + \frac{\rho''(\omega_0)}{b_0^{-1}})(\theta_0(\varepsilon) + \Omega + 2\pi k)^2 - \\
&\quad - (\varphi'(\omega_0))^2(\theta_0(\varepsilon) + \Omega + 2\pi k)i - \frac{1}{2}\varphi''(\omega_0)(\theta_0(\varepsilon) + \Omega + 2\pi k)^2 i.
\end{aligned}$$

Формула (7) дает асимптотическое представление корней, которые непрерывно зависят от малого параметра ε. Снимем требование непрерывности. Тогда мы можем записать корни (5) следующим образом.

Фиксируем $0 < \gamma < 1$ и выберем произвольно положительное число ω. Аналогично θ_0 обозначим через $\theta(\varepsilon)$ такое число из полуинтервала $[0, 2\pi)$, что $\omega\varepsilon^{-\gamma} + \theta(\varepsilon)$ является целым кратным 2π.

Тогда можно показать, что характеристический многочлен (5) имеет набор корней вида

$$\lambda_k(\varepsilon) = \left(\frac{\omega_0}{\varepsilon} + \frac{\omega k}{\varepsilon^\gamma} + \theta_0(\varepsilon) + k\theta(\varepsilon) + \Omega\right) i + \varepsilon^{1-\gamma} i(\lambda_{k1} + o(1)) + \varepsilon^{2-2\gamma}\lambda_{k2} + \\ + \mu b_1 + o(\varepsilon^{2-2\gamma} + \mu),$$

где θ_0, $\theta \in [0, 2\pi)$ и дополняют до целого кратного 2π величины $\omega_0\varepsilon^{-1}$ и $\omega\varepsilon^{p/2-1}$, соответственно. А коэффициенты λ_{k1} и λ_{k2} определяются по формулам

$$\begin{aligned}
\lambda_{k1} &= -i\omega k\varphi'(\omega_0), \\
\lambda_{k2} &= -\frac{\omega^2 k^2}{2}((\varphi'(\omega_0)^2 + \rho''(\omega_0)b_0^{-1}).
\end{aligned}$$

Ниже рассмотрены две ситуации:

$$b = b_0(1 + \varepsilon^2 b_1), \text{ то есть } \mu = \varepsilon^2 \tag{8}$$

и

$$b = b_0(1 + \varepsilon^p b_1), \text{ то есть } \mu = \varepsilon^p, \quad 0 < p < 2. \tag{9}$$

2. Нелинейный анализ

Изучим локальную динамику (4) в окрестности нуля при условиях (8) и (9). Случай (8) подробно разобран в [6]. Основной результат состоит в том, что при условии (8) локальную динамику исходного уравнения (4) определяет поведение решений комплексного уравнения типа Гинзбурга–Ландау

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = d_1 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + d_2 \frac{\partial u}{\partial r} + d_3 u + d u|u|^2, \quad u(\tau, r) = u(\tau, r+1), \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{1}{2}((\varphi'(\omega_0)^2 + \rho''(\omega_0)b_0^{-1} + i\varphi''(\omega_0)), \\
d_2 &= -(\varphi'(\omega_0))^2 + 2id_1(\theta_0 + \Omega), \\
d_3 &= b_1 - d_1(\theta_0 + \Omega)^2 - (\varphi'(\omega_0))^2(\theta_0 + \Omega), \\
d &= 3f_3 e^{i\Omega} + 2f_2[P(2\omega_0) - b_0 e^{-2i\Omega}]^{-1}.
\end{aligned}$$

Задача (10) играет роль нормальной формы для уравнения (4).

Коэффициенты уравнения (10) через θ_0 зависят от малого параметра ε. При $\varepsilon \to 0$ функция $\theta_0(\varepsilon)$ принимает бесконечное количество раз каждое значение из промежутка $[0, 2\pi)$. Обозначим через $\varepsilon_n(\alpha)$ такую последовательность, что $\varepsilon_n(\alpha)\to 0$ и $\theta_0(\varepsilon_n(\alpha)) \equiv \alpha$ ($\alpha \in [0, 2\pi)$).

Теорема 1. *Пусть при* $\theta_0 = \alpha$ *уравнение (10) имеет периодическое орбитально устойчивое (неустойчивое) решение* $u_*(\tau, r)$. *Тогда исходное уравнение (4) при* $\varepsilon=\varepsilon_n(\alpha)$ *имеет быстро осциллирующее асимптотическое по невязке решение*

$$\begin{aligned} x_*(t) = \varepsilon \Big(& e^{(\omega_0\varepsilon^{-1}+\theta_0+\Omega-\varepsilon\varphi'(\omega_0)(\theta_0+\Omega))it} u_*(\varepsilon^2 t, t(1-\varepsilon\varphi'(\omega_0)) + \\ & + e^{-(\omega_0\varepsilon^{-1}+\theta_0+\Omega-\varepsilon\varphi'(\omega_0)(\theta_0+\Omega))it} \overline{u}_*(\varepsilon^2 t, t(1-\varepsilon\varphi'(\omega_0))\Big) + o(\varepsilon). \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь и далее асимптотическим по невязке решением называется такое решение, которое удовлетворяет уравнению с некоторой асимптотически малой невязкой.

Пусть теперь выполнено условие (9). Положим $\gamma = 1 - p/2$.

Произведем в (4) замену

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= \varepsilon^{p/2} e^{(\omega_0\varepsilon^{-1}+\theta_0+\Omega)ti} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) e^{\omega i k t_1} + \\ &+ \varepsilon^{p/2} e^{-(\omega_0\varepsilon^{-1}+\theta_0+\Omega)ti} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\xi}_k(\tau) e^{-\omega i k t_1} + \varepsilon^p x_2 + \varepsilon^{3p/2} x_3 + \dots \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $t_1 = (\omega\varepsilon^{-\gamma} + \theta - \varepsilon^{p/2}\varphi'(\omega_0))t$, $\tau = \varepsilon^p t$, а функции $x_j = x_j(t\varepsilon^{-1}, t_1, \tau)$ периодичны по первым двум аргументам. Действуя стандартным образом, то есть приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим, что амплитуды ξ_k должны удовлетворять бесконечномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\xi_k}{d\tau} = \lambda_{k2}\xi_k + \left(3f_3 e^{i\Omega} + 2f_2\left[P(2\omega_0) - b_0 e^{-2i\Omega}\right]^{-1}\right)\Psi_k(\xi). \tag{13}$$

Здесь через $\Psi_k(\xi)$ обозначен коэффициент при $\exp(2\pi i k t)$ в разложении функции

$$\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi_m(\tau) e^{2\pi i m t} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{\xi}_m(\tau) e^{-2\pi i m t}\right)^3$$

в ряд Фурье.

Система (13) может быть представлена в виде одного комплексного параболического уравнения типа Гинзбурга–Ландау

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = d_1 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + b_1 u + d u|u|^2, \quad u(\tau, r) = u\left(\tau, r + \frac{2\pi}{\omega}\right), \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{2}((\varphi'(\omega_0)^2 + \rho''(\omega_0)b_0^{-1} + i\varphi''(\omega_0)), \\ d &= 3f_3 e^{i\Omega} + 2f_2[P(2\omega_0) - b_0 e^{-2i\Omega}]^{-1}. \end{aligned}$$

Это следует из того, что, разложив функцию $u(t, x)$ в ряд по собственным функциям рассматриваемой краевой задачи для определения соответствующих коэффициентов разложения, приходим в точности к системе (13).

Теорема 2. *Пусть краевая задача (14) имеет решение* $u_*(\tau, r)$. *Тогда у исходного уравнения (4) существует асимптотическое по невязке с точностью до* $O(\varepsilon^{3p/2})$ *решение вида*

$$x_*(t,\varepsilon) = \varepsilon^{p/2}\Big(e^{(\omega_0\varepsilon^{-1}+\theta_0+\Omega)ti}u_*(\varepsilon^p t, (\omega\varepsilon^{p/2-1}+\theta-\varepsilon^{p/2}\varphi'(\omega_0))t)+$$

$$+e^{-(\omega_0\varepsilon^{-1}+\theta_0+\Omega)ti}\overline{u}_*(\varepsilon^p t, (\omega\varepsilon^{p/2-1}+\theta-\varepsilon^{p/2}\varphi'(\omega_0))t)\Big)+o(\varepsilon^{p/2}).$$

Заметим, что мы не можем сделать вывод о существовании у (4) точного решения с приведенной асимптотикой. Однако, если u_* неустойчиво, то даже если точное решение существует – оно неустойчиво. Таким образом, нам достаточно рассматривать только устойчивые решения (14).

3. Роль малых возмущений

Изучим роль малых возмущений в уравнениях с большим запаздыванием. Предположим, что выполняется одно из равенств

$$a = 1 \quad \text{или} \quad a = a(T).$$

Тогда, как было сказано выше, критическим является случай $b_0 = 0$. При этом в уравнении (4)

$$b = \mu b_1, \quad 0 < \mu \ll 1.$$

Ситуация, когда μ меньше по порядку, чем ε, является тривиальной. Поэтому уделим внимание тем случаям, когда $\varepsilon\mu^{-1} \le c$, где константа c не зависит ни от μ, ни от ε.

Тогда уравнение (4) записывается в виде

$$\varepsilon\dot{x} + x = ax(t-\varepsilon T) + \mu b_1 x(t-1) + f(x). \tag{15}$$

Первый случай. Положим

$$a = 1 + \mu a_1.$$

Рассмотрим вопрос о поведении корней уравнения (5). Если $a_1 > 0$, то у (5) существует корень $\lambda_+(\varepsilon,\mu) = a_1\mu\varepsilon^{-1}(1+o(1))$. Понятно, что при малых ε этот корень имеет положительную вещественную часть и отделен от нуля. Следовательно, в некоторой окрестности нулевого решения уравнения (4) нет устойчивых решений.

Если $a_1 < 0$, то положим в (4) $\lambda = \mu\varepsilon^{-1}\lambda_1(\varepsilon,\mu) + \ldots$ Выделяя главную часть уравнения, получим, что $\lambda_1(\varepsilon)$ должно удовлетворять уравнению

$$(1+T)\lambda_1(\varepsilon) = a_1 + b_1\exp(-\mu\varepsilon^{-1}\lambda_1(\varepsilon)). \tag{16}$$

Уравнение (16) является характеристическим квазиполиномом для уравнения с запаздыванием

$$(1+T)\dot{x} = a_1 x + b_1 x(t-\mu\varepsilon^{-1}).$$

Обозначим через λ_{1k} ($k = 0, 1 \dots$) все корни (16) (занумеруем в порядке убывания вещественных частей).

Перейдем теперь к рассмотрению нелинейного уравнения (15). Положим в нем

$$x(t, \varepsilon, \mu) = \mu\xi(\tau) + \mu^2 x_2(\tau) + \dots, \tag{17}$$

где $\tau = \mu\varepsilon^{-1}t$, а функция $x_2(\tau)$ ограничена при $\tau \to \infty$.

Подставим (17) в (15) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε. На первом шаге приходим к верному тождеству, а на втором – получим уравнение для нахождения $\xi(\tau)$

$$(1 + T)\frac{d\xi}{d\tau} = a_1\xi(\tau) + b_1\xi(\tau - \mu\varepsilon^{-1}) + f_2\xi^2. \tag{18}$$

Основной результат состоит в том, что в рассматриваемом случае уравнение (18) играет роль нормализованной формы для исходного уравнения (15).

Отметим, что, если $\varepsilon\mu^{-1} \ll 1$, то уравнение (18) является уравнением с большим запаздыванием. Для исследования его динамики применимы методы, изложенные в [7, 8].

Теорема 3. *Пусть уравнение (18) имеет орбитально устойчивое периодическое решение* $\xi_*(\tau)$. *Тогда уравнение (15) имеет устойчивое решение с асимптотикой*

$$x(t, \varepsilon) = \mu\xi_*(\mu\varepsilon^{-1}(1 + o(1)t) + o(\mu)).$$

Второй случай. Пусть

$$a = a_0(T)(1 + \mu a_1), \tag{19}$$

где $a_0(T)$ такое, как было определено выше.

Стандартными методами легко показать, что при условии (19) квазимногочлен

$$\lambda + 1 = ae^{-\lambda T}$$

имеет пару комплексно-сопряженных корней $\lambda_\pm(\mu)$ вида

$$\lambda_+(\mu) = i\omega_0(T) + \mu\lambda_1 + O(\mu^2), \tag{20}$$

где λ_1 описывается выражением

$$\lambda_1 = \frac{a_1(i\omega_0(T) + 1)}{1 + T(i\omega_0(T) + 1)}.$$

При этом все остальные корни этого квазимногочлена имеют отрицательные вещественные части и отделены от нуля при малых μ.

Положим $\theta(\varepsilon) \in [0, 2\pi)$ таким, что выражение $\omega_0(T)\varepsilon^{-1} + \theta(\varepsilon)$ является целым кратным 2π. Затем в (4) положим

$$\lambda = \lambda(\varepsilon, \mu) = \frac{i\omega_0(T)}{\varepsilon} + \frac{\mu}{\varepsilon}\lambda_1(\mu) + \dots$$

Собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε и μ, приходим к уравнению для определения $\lambda_1(\mu)$

$$\lambda_1 = A + B\exp(-\lambda_1\mu\varepsilon^{-1}), \tag{21}$$

в котором

$$A = \frac{a_1(i\omega_0(T)+1)}{1+(i\omega_0(T)+1)T},$$

$$B = \frac{b_1}{1+(i\omega_0(T)+1)T}\exp(i\theta(\mu)).$$

Уравнение (21) имеет счетное множество корней λ_{1k} $(k = 1, 2, \dots)$, которые можно занумеровать в порядке убывания их вещественных частей. Важно отметить, что это уравнение является характеристическим квазиполиномом уравнения с запаздыванием

$$\dot{x} - Ax = Bx(t - \mu\varepsilon^{-1}).$$

Все остальные корни характеристического квазиполинома (4) имеют отрицательные вещественные части, которые при $\varepsilon, \mu \to 0$ находятся в левой комплексной полуплоскости и отделены от мнимой оси.

Вернемся к исходному нелинейному уравнению (15). Положим в нем

$$x(t,\varepsilon,\mu) = \mu^{1/2}\left[\xi(\tau)e^{i\omega_0(T)\varepsilon^{-1}t} + \bar{\xi}(\tau)e^{-i\omega_0(T)\varepsilon^{-1}t}\right] + \mu x_2(t,\tau) + \mu^{3/2}x_3(t,\tau) + \dots, \tag{22}$$

где $\tau = \mu\varepsilon^{-1}t$, а функции $x_j(t,\tau)$ являются $(2\pi\varepsilon/\omega_0(T))$-периодическими по первому аргументу. Подставим (22) в (15) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε и μ. На первом шаге получится верное тождество, а на втором, то есть для коэффициентов при μ, получим уравнение для нахождения $x_2(t,\tau)$

$$\frac{\partial x_2}{\partial t} + x_2 - a_0(T)x_2(t-T) = f_2\left(\xi^2(\tau)e^{2i\omega_0\varepsilon^{-1}t} + 2|\xi(\tau)|^2 + \bar{\xi}^2(\tau)e^{-2i\omega_0\varepsilon^{-1}t}\right). \tag{23}$$

Из (23) находим функцию $x_2(t,\tau)$

$$x_2(t,\tau) = x_{21}\xi^2(\tau)e^{2i\omega_0(T)\varepsilon^{-1}t} + x_{22}|\xi(\tau)|^2 + \bar{x}_{21}\bar{\xi}^2(\tau)e^{-2i\omega_0(T)\varepsilon^{-1}t},$$

где

$$x_{21}(\tau) = \frac{f_2 a_0(T)}{(1+i\omega_0(T))^2 + a_0(1+2i\omega_0(T))},$$

$$x_{22}(\tau) = \frac{2f_2}{1-a_0(T)}.$$

После этого, собирая коэффициенты при $\mu^{3/2}$, приходим к уравнению для определения функции $x_3(t,\tau)$, условие разрешимости которого в классе $(2\pi\varepsilon/\omega_0)$-периодических функций состоит в выполнении равенства

$$\frac{d\xi}{d\tau} - A\xi = B\xi(\tau - \mu\varepsilon^{-1}) + \sigma_1|\xi|^2\xi, \tag{24}$$

где

$$\sigma_1 = 2f_2(x_{21} + x_{22}) + 3f_3.$$

Уравнение (24) играет роль нормальной формы для уравнения (15) в случае (19). Так же, как и выше, если $\varepsilon\mu^{-1} \ll 1$, то это уравнение является уравнением с большим запаздыванием, для исследования которого можно применять методы, описанные в [7, 8].

Теорема 4. *Пусть уравнение (24) имеет решение* $\xi_*(\tau)$. *Тогда уравнение (15) имеет асимптотическое по невязке решение с точностью* $O(\mu)$ *вида*

$$x_*(t,\varepsilon) = \mu^{1/2}\left(\xi_*(\mu\varepsilon^{-1}t)e^{i\omega_0(T)\varepsilon^{-1}t} + \overline{\xi}_*(\mu\varepsilon^{-1}t)e^{-i\omega_0(T)\varepsilon^{-1}t}\right)(1+o(1)).$$

Выводы

Сделаем некоторые выводы относительно влияния второго запаздывания на динамику системы.

Если параметр $a = 0$, то исходное уравнение (4) является уравнением с одним большим запаздыванием, которое может быть записано в виде

$$\varepsilon\dot{x} + x = bx(t-1) + f_2x^2 + f_3x^3 + \ldots$$

Принципиальное упрощение этого случая состоит в том, что введенный выше параметр $\omega_0 = 0$. То есть критические случаи могут реализоваться на асимптотически небольших модах. Если же $a \neq 0$, то есть мы имеет дело с уравнением с двумя запаздываниями, то все критические случаи реализуются только на асимптотически больших модах.

Нормализованные формы для уравнения с одним запаздыванием будут, в отличие от задач (10) и (14), не комплексными, а действительными. Динамика таких уравнений проще, хотя и остается достаточно богатой.

Присутствие в нормализованной форме зависящего от ε коэффициента $\theta_0 = \theta_0(\varepsilon)$ позволяет сделать вывод о чувствительности динамики даже к небольшим вариациям параметра T_1.

Таким образом, добавление второго запаздывания T делает динамику системы существенно сложнее.

Библиографический список

1. *Ланда П.С.* Автоколебания в распределенных системах. М.: Наука, 1983.
2. *Дмитриев А.С., Кислов В.Я.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989.
3. *Кузнецов С.П.* Сложная динамика генераторов с запаздывающей обратной связью (обзор) // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25, №12. С. 1410.
4. *Kilias T., Kutzer K., Moegel A., Schwarz W.* Electronic chaos generators – design and applications // International Journal of Electronics. 1995. Vol. 79. №. 6. P. 737.
5. *Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Н., Шарковский А.Н.* Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова Думка, 1986.
6. *Кащенко С.А.* Бифуркационные особенности сингулярно возмущенного уравнения с запаздыванием // Сибирский математический журнал. 1999. Т. 40, №3. С. 567.

7. *Кащенко С.А.* Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, №8. С. 1448.
8. *Кащенко И.С.* Динамические свойства уравнений первого порядка с большим запаздыванием // Моделирование и анализ информационных систем. Яросл. гос. ун-т. Ярославль. 2007. Т. 14, № 2. С. 58.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

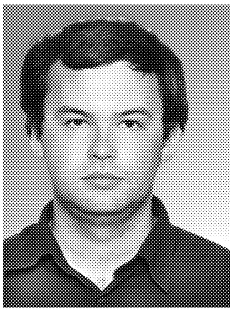
Поступила в редакцию 14.01.2008

ASYMPTOTICS OF COMPLEX SPATIO-TEMPORAL STRUCTURES IN THE SYSTEMS WITH LARGE DELAY

S.A. Kaschenko, I.S. Kaschenko

The local dynamics is considered of differential equations with two delays in the case of one delay is asymptotically large. Under this condition, critical cases have infinite dimension. As the normal form equations the Ginzburg–Landau equations have been. Their nonlocal dynamics defines local behavior of solutions of initial equations.

Кащенко Сергей Александрович – родился в 1953 году в Ярославле, окончил Ярославский государственный университет в 1975 году. После окончания ЯрГУ работает в там же. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ННГУ (1976) и доктора физико-математических наук в МГУ (1990) в области теории нелинейных колебаний. Автор 4х монографий. Опубликовал 200 научных статей по направлению, указанном выше.



Кащенко Илья Сергеевич – родился в 1982 году в Ярославле, окончил Ярославский государственный университет в 2004 году. После окончания ЯрГУ работает там же. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ЯрГУ (2007) в области нелинейной динамики уравнений с запаздыванием. Является автором 20 научных и научно-методических трудов.