



## КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ОДНОГО КЛАССА ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ

*Д.В. Глазков*

Изучаются две модели полупроводникового лазера с запаздывающей обратной связью. Рассматривается случай большого параметра, наличие которого приводит к сингулярно возмущенным задачам. Строятся и исследуются квазинормальные формы моделей в случаях, близких к критическим.

### Введение

Модели, описывающие динамику лазерных систем, в последнее время вызывают все больший интерес [1,2]. В первую очередь, это связано с их непосредственным прикладным значением. Однако эта причина не единственная. Как отмечено в [1], лазер принадлежит к числу систем, которые не только способны демонстрировать сложное поведение, но и более многих других пригодны для исследования общих закономерностей нелинейной динамики. Действительно, в целом ряде случаев лазеры функционируют в существенно нелинейных режимах. В наибольшей степени это замечание касается так называемой полуклассической теории лазера, которая предлагает целую иерархию нелинейных уравнений, надежно обоснованных с позиций квантовой электродинамики и количественно подтвержденных экспериментами.

Особый класс моделей лазерных систем представляют собой модели, учитывающие воздействие запаздывающей оптической обратной связи. Их сложность обусловлена тем, что этот класс задач описывается в терминах дифференциальных уравнений с запаздыванием, которые обладают бесконечным числом степеней свободы. Кроме того, динамические системы с запаздыванием демонстрируют различные типы неустойчивостей, обусловленные воздействием задержки. Например, для полупроводниковых лазеров с оптической обратной связью наблюдаются различные пути перехода к хаосу: квазипериодический [3], через каскад бифуркаций удвоения периода [4], сценарий Икеды [5], перемежаемость и кризис аттракторов [6, 7].

За последние 30 лет как численно, так и экспериментально обнаружен целый ряд новых сложных режимов генерации лазерных систем, обусловленных воздействием отраженного излучения на резонатор. В их числе отметим такие явления как

колебания Петермана–Тейгера [8, 9], регулярные импульсные пакеты [10, 11], низкочастотные флуктуации [2, 7, 12, 13], когерентный коллапс [2–4, 7, 12]. Глубокое понимание механизмов их возникновения открывает новые способы для управления режимами генерации, а значит, и новые возможности в приложениях. В таких областях, как хранение данных или оптические и оптоволоконные коммуникации отражения и связанные с ними сложные сопутствующие эффекты неизбежны. Например, искажения сигнала при передаче данных нередко обусловлены неминуемыми отражениями от торцов волноводов. Поэтому изучение влияния оптической запаздывающей обратной связи на работу лазеров разных типов представляет собой важную прикладную задачу.

В настоящей работе предпринимается попытка математически упростить исходные динамические уравнения с целью исследования феномена когерентного коллапса с новых позиций. Суть этого феномена заключается в дестабилизации лазера, приводящей к резкому уширению (в сотни и тысячи раз) спектра излучения. Как отмечается в [2, 3, 12], состояние когерентного коллапса достигается, когда ток накачки заметно превосходит первую пороговую величину и интенсивность отраженного излучения достигает некоторого критического значения.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим математическую модель динамики одномодового лазера, которая учитывает воздействие отраженного излучения на резонатор и основана на уравнениях Ланга–Кобаяши [14]

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = v(1+i\alpha)EZ + \gamma e^{-i\omega_0 h} E(t-h), \\ \frac{dZ}{dt} = Q - Z - (1+Z)|E|^2. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $E(t)$  – комплексная амплитуда электрического поля;  $Z(t)$  – инверсия носителей;  $\gamma > 0$  и  $(-\omega_0 h)$  – сила и фаза обратной связи;  $\omega_0$  – оптическая частота генерации в отсутствие обратной связи;  $Q$  – превышение током накачки первой пороговой величины;  $v$  – отношение времен затухания инверсии носителей и фотонов в резонаторе;  $\alpha$  – коэффициент уширения линии, отвечающий за нелинейное взаимодействие между амплитудой и фазой поля;  $h$  – время прохода излучения по внешнему резонатору, нормированное в единицах времени затухания инверсии.

Наряду с системой (1) рассмотрим более сложную модель, дополненную еще одним уравнением, которое описывает воздействие оптического фильтра [15],

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = v(1+i\alpha)EZ + \gamma f, \\ \frac{df}{dt} = i\Delta f + \Lambda[E(t-h)e^{-i\omega_0 h} - f], \\ \frac{dZ}{dt} = Q - Z - (1+Z)|E|^2. \end{cases} \quad (2)$$

В этой системе  $f(t)$  – комплексная амплитуда электрического поля на выходе из фильтра,  $\Lambda$  – ширина спектра,  $\Delta$  – расстройка между частотой излучения уединенного лазера и несущей частотой фильтра.

Система (1) при больших значениях параметров изучалась в работах [13, 16]. Другие исследования такого рода автору не известны.

Поставим задачу математического исследования систем (1), (2) в случае, когда параметр  $Q$  асимптотически велик. Используя такое предположение, удастся уменьшить число уравнений и параметров в моделях (1), (2), тем самым существенно упрощая исходную задачу.

Методы построения систем с фазовым пространством бесконечной размерности, играющих роль нормальных форм, были предложены в работах [17–21].

Наличие в системе большого параметра приводит к необходимости рассматривать сингулярно возмущенную задачу. Задачи этого типа [22] не могут быть качественно исследованы регулярными методами. Главное преимущество используемой в работе методики состоит в переходе от сингулярно возмущенной задачи к регулярным уравнениям, которые больших параметров уже не содержат.

## 2. Уравнения Ланга–Кобаяши при $Q \gg 1$

Рассмотрим уравнение (1) при условии  $Q = \varepsilon^{-1}$ , где  $\varepsilon$  – малый положительный параметр. Нормируя переменные следующим образом:

$$t = \varepsilon s, \quad E = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot e^{-i\omega s} E_1,$$

сведем исходную систему к частному случаю следующего векторного уравнения:

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \varepsilon \cdot \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}(s - h\varepsilon^{-1})). \quad (3)$$

Общая методика исследования его динамики была разработана в [18, 19]. В соответствии с алгоритмами, представленными в этих статьях, в малой окрестности некоторого периодического решения системы «нулевого приближения»  $dx/ds = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  строится нормализующая замена, позволяющая получить асимптотические оценки системы (3). Эта замена имеет следующий вид:

$$\mathbf{V}(s, \varepsilon) = \mathbf{V}_0(\tau) + \varepsilon \mathbf{V}_1(t, \tau) + \varepsilon^2 \mathbf{V}_2(t, \tau) + \dots, \quad (4)$$

$$\frac{d\tau}{ds} = 1 + \varepsilon \varphi(t) + \varepsilon^2 \psi(t) + \dots \quad (5)$$

Здесь  $\mathbf{V}_j(t, \tau)$  являются  $T$ -периодичными по  $\tau$ , причем  $\mathbf{V}_0(s)$  есть периодическое решение системы ОДУ  $dx/ds = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ ,  $\varphi(t)$  – скалярная почти периодическая функция.

Отметим, что из (5) можем получить

$$\tau(s - h\varepsilon^{-1}) \approx \tau(s) - y, \quad \text{где} \quad y = h\varepsilon^{-1} + \int_{-h}^0 \varphi(t+r) dr.$$

Стандартная линеаризация  $dx/ds = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  на  $\mathbf{V}_0(s)$  приводит к системе

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \mathbf{A}(s) \mathbf{u}, \quad (6)$$

где  $A(s)$  есть матрица Якоби  $DF/D\mathbf{x}$  при  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{V}_0(s)$ . Таким образом,  $A(s)$  является  $T$ -периодической. Обозначим через  $\mathbf{H}_j(s)$  линейно независимые периодические решения сопряженной к (6) системы  $d\mathbf{w}/ds = -A^*(s)\mathbf{w}$ .

Подставляя ряды (4), (5) в (3) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим цепочку уравнений вида

$$\frac{d\mathbf{V}_k}{d\tau} = A(\tau)\mathbf{V}_k + \mathbf{f}_k(t, \tau, \tau-y), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

где через  $\mathbf{f}_k(t, \tau, \tau-y)$  обозначена неоднородность дифференциального уравнения. На первом шаге из условий периодичности функции  $\mathbf{V}_1$  по  $\tau$  получим систему уравнений

$$\langle \mathbf{f}_1(t, \tau, \tau-y), \mathbf{H}_j(\tau) \rangle = 0, \quad (8)$$

где угловыми скобками  $\langle \rangle$  обозначено скалярное произведение

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T (\mathbf{X}(\tau), \mathbf{Y}(\tau)) d\tau.$$

Полученные уравнения (8) играют роль нормальной формы в задаче о локальной динамике уравнения (3) в некоторой окрестности решения  $\mathbf{V}_0(s)$  системы «нулевого приближения»  $dx/ds = F(\mathbf{x})$ . Отыскав решение  $\mathbf{V}_1$  системы (7) в указанном классе функций, можно последовательно найти любое число элементов рядов (4), (5).

В случае уравнений Ланга–Кобаяши при  $Q \gg 1$  система ОДУ вида  $dx/ds = F(\mathbf{x})$  является консервативной и имеет семейство периодических решений, которое в форме вектора с вещественными компонентами может быть записано следующим образом:

$$\mathbf{V}_0(s) = (c \cos(\omega s), c \sin(\omega s), c^{-2} - 1)^T.$$

Матрица системы (6) имеет вид

$$A(s) = \frac{DF}{D\mathbf{x}}(\mathbf{V}_0(s)) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ -2c^{-1} \cos(\omega s) & -2c^{-1} \sin(\omega s) & -c^2 \end{pmatrix}.$$

Для системы (6) легко находятся все линейно независимые решения, два из которых можно выбрать периодическими

$$\mathbf{K}_0(s) = \begin{pmatrix} \cos(\omega s) \\ \sin(\omega s) \\ -2c^{-3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_1(s) = \begin{pmatrix} -\sin(\omega s) \\ \cos(\omega s) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_2(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-c^2 s} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, мультипликаторы системы (6) имеют вид:  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ,  $\mu_3 = e^{-\frac{2\pi}{\omega} c^2} < 1$ .

Линейно независимые периодические решения сопряженной к (6) системы выберем таким образом, чтобы  $\langle \mathbf{K}_i, \mathbf{H}_j \rangle = \delta_{ij}$ ,  $i, j = 0, 1$ , где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. Таким условиям удовлетворяют вектор-функции вида

$$\mathbf{H}_0(s) = \begin{pmatrix} \cos(\omega s) \\ \sin(\omega s) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_1(s) = \begin{pmatrix} -\sin(\omega s) \\ \cos(\omega s) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим свободную постоянную  $c$  как функцию «медленного» времени:  $t = \varepsilon s$ . В соответствии с изложенной методикой, собирая коэффициенты при первой степени  $\varepsilon$ , приходим к системе

$$\frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial c} \frac{dc(t)}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial \tau} \varphi(t) + \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial \tau} = \mathbf{A}(\tau) \mathbf{V}_1 + \Phi(\mathbf{V}_0(\tau), \mathbf{V}_0(\tau - y)). \quad (9)$$

Условие существования  $2\pi/\omega$ -периодического (по  $\tau$ ) решения уравнения (9) состоит в ортогональности его неоднородной части функциям  $\mathbf{H}_0(\tau), \mathbf{H}_1(\tau)$ . Выполнив ряд преобразований и переобозначив  $\omega\tau \rightarrow \varphi$ , получим следующую систему интегрально-дифференциальных уравнений, которую мы будем называть квазинормальной формой модели Ланга–Кобаяши в случае  $Q \gg 1$ :

$$\begin{cases} \frac{dc(t)}{dt} = v \left( \frac{1}{c(t)} - c(t) \right) + \gamma \cos \left( \omega_0 h + \int_{-h}^0 \varphi(t+r) dr \right) c(t-h), \\ \varphi(t) = v\alpha \left( \frac{1}{c^2(t)} - 1 \right) - \gamma \sin \left( \omega_0 h + \int_{-h}^0 \varphi(t+r) dr \right) \frac{c(t-h)}{c(t)}. \end{cases} \quad (10)$$

Заметим, что система (10) заменими

$$\varphi(t) = \frac{d\theta}{dt}, \quad c(t)e^{i\theta(t)} = E(t)$$

может быть преобразована к одному комплексному уравнению следующего вида:

$$\frac{dE}{dt} = v(1+i\alpha) (|E|^{-2} - 1) E + \gamma e^{-i\omega_0 h} E(t-h), \quad (11)$$

которое, очевидно, связано с (1).

Таким образом, при достаточно больших значениях накачки  $Q$  оказывается возможно исключить из системы (1) уравнение для инверсии  $Z$ , упростив первоначальную задачу.

Стационарные решения системы (10) определяются из трансцендентного уравнения относительно  $\varphi$

$$\varphi = -\gamma \left[ \alpha \cos(\omega_0 h + \varphi h) + \sin(\omega_0 h + \varphi h) \right].$$

Обозначая  $\eta = \omega_0 h + \varphi h$ , приходим к хорошо известному соотношению для определения числа мод внешнего резонатора [7, 23]

$$\eta - \omega_0 h = -\gamma h \sqrt{1 + \alpha^2} \sin(\eta + \arctg(\alpha)), \quad (12)$$

которое, имеет, по крайней мере, одно решение. Легко видеть, что, чем больше значение  $\gamma h \sqrt{1+\alpha^2}$ , тем больше решений имеет уравнение (12).

Отметим, что по  $\eta_k$  можно однозначно определить  $\varphi$  и  $c$ . Устойчивость каждого из состояний равновесия системы (10) определяется расположением в комплексной плоскости корней характеристического уравнения

$$\lambda^2 + 2\lambda\gamma \cos \eta_k(1-e^{-\lambda h}) + \gamma^2(1-e^{-\lambda h})^2 + 2(v-\gamma \cos \eta_k)[\lambda + \gamma(\cos \eta_k - \alpha \sin \eta_k)(1-e^{-\lambda h})] = 0. \quad (13)$$

В случае  $\cos \eta_k=1$  для моды с максимальным усилением [23] уравнение (13) сводится к следующей простой совокупности:

$$\begin{cases} \lambda + \gamma(1-e^{-\lambda h}) = 0, \\ \lambda + \gamma(1-e^{-\lambda h}) + 2(v-\gamma) = 0. \end{cases} \quad (14)$$

При  $0 < \gamma < v$  у каждого из уравнений (14) отсутствуют корни с положительной вещественной частью. Следовательно, мода с максимальным усилением в случае асимптотически большой накачки является устойчивой. Этот результат хорошо согласуется с выводами, сделанными в работе [23].

Мода с минимальной шириной линии достигается при  $\eta_k = -\arctg(\alpha)$ . Достаточным условием ее устойчивости является следующая теорема:

**Теорема 1.** Пусть  $\eta_k = -\arctg(\alpha)$  и  $\gamma \leq \gamma_1 = v/\sqrt{1+\alpha^2}$ . Тогда все корни уравнения (13) имеют неположительные действительные части.

Критерием устойчивости моды с минимальной шириной линии в случае большого запаздывания  $h = \mu^{-1}$ , где  $\mu$  – малый параметр, является следующая теорема:

**Теорема 2.** Пусть  $\eta_k = -\arctg(\alpha)$  и  $\gamma < \gamma_2 = (2v\sqrt{1+\alpha^2})/(2+\alpha^2)$ . Тогда все корни уравнения (13) имеют неположительные действительные части. В случае  $\gamma > \gamma_2$  существует корень с положительной действительной частью.

Непосредственной подстановкой несложно проверить, что корней с асимптотикой  $i\omega\mu^{-p}$ , где  $p > 0$ , у уравнения (13) в случае  $\eta_k = -\arctg(\alpha)$  нет. Раскладывая  $\lambda$  в ряд по степеням малого параметра  $\mu$ , так что  $\lambda = \lambda_0 + \mu\lambda_1 + \mu^2\lambda_2 + \dots$ , получаем  $\text{Re } \lambda_0 = \text{Re } \lambda_1 = 0$ , а знак  $\text{Re } \lambda_2$  определяет знак выражения  $\gamma(2+\alpha^2) - 2v\sqrt{1+\alpha^2}$ .

Основные результаты относительно динамических свойств системы (10) получены численным моделированием. При этом исследовалась не сама система (10), а система дифференциальных уравнений с запаздыванием, получаемая заменой  $\varphi(t) = d\theta(t)/dt$ . Тем не менее, в качестве основных характеристик модифицированной таким образом квазинормальной формы выступали функции  $c(t)$ ,  $d\theta(t)/dt$ .

Численное интегрирование выполнялось с помощью схемы Рунге–Кутты 4-го порядка, адаптированной для систем с запаздыванием. В качестве начальных условий выбирались функции из класса тригонометрических полиномов, заданных на отрезке  $[-h, 0]$ . Были обнаружены явления мультистабильности (рис. 1), кризиса аттракторов, последовательного удвоения периода циклов, определены области с хаотической и сложной нехаотической динамикой.

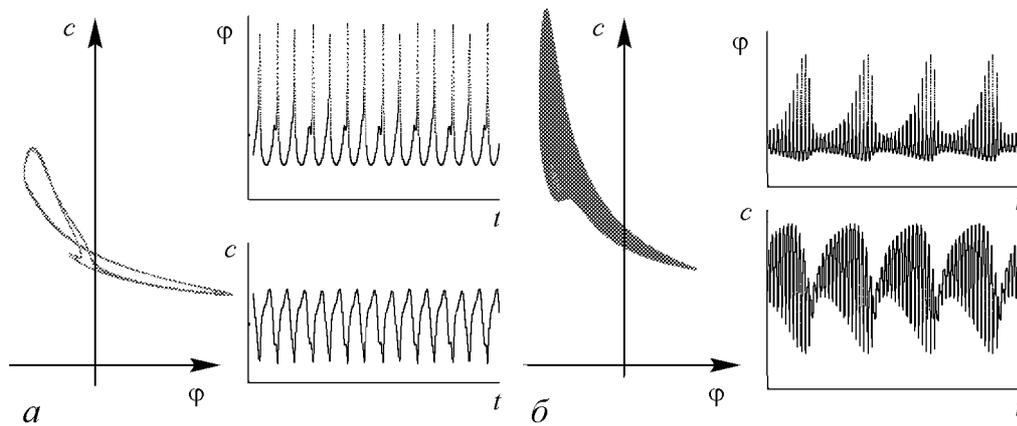


Рис. 1. Иллюстрация явления мультистабильности. При значениях параметров  $v=100, \alpha=5, \omega_0 h=1, \gamma=97.9, h=0.04$  найдено 3 различных устойчивых режима: мода, близкая к состоянию с максимальным усилением, цикл удвоенного периода (а) и режим, известный как регулярный импульсный пакет (regular pulse package, RPP [10, 11]) (б)

Важные особенности динамики квазинормальной формы (10) отражает бифуркационная диаграмма, представленная на рис. 2. Выбраны следующие значения параметров  $v=100, \alpha=5, \omega_0 h=1$ . Цифрами обозначены области: 1 – состояние равновесия; 2 – цикл, рождающийся в результате бифуркации Андронова–Хопфа; 3 – сценарий Фейгенбаума – каскад бифуркаций удвоения периода (штриховой линией отмечены первые две бифуркации удвоения); 4 – нефейгенбаумовские переходные режимы (в некоторых случаях интерпретировались как квазипериодические или двухчастотные на основе анализа временного ряда стандартной функцией FFT пакета Maple); 5 – хаос. Штрихпунктиром обозначены первые две бифуркации седло-узла, в которых происходит рождение пары мода-антимода. Правее первой из них существуют области мультистабильности. Изменение бассейнов притяжения лежит в основе перехода (при возрастании параметров  $h, \gamma$ ) от все усложняющихся режимов из области 3 к области 2. Область, отмеченная цифрой 4 на верхней части диаграммы имеет сложную струк-

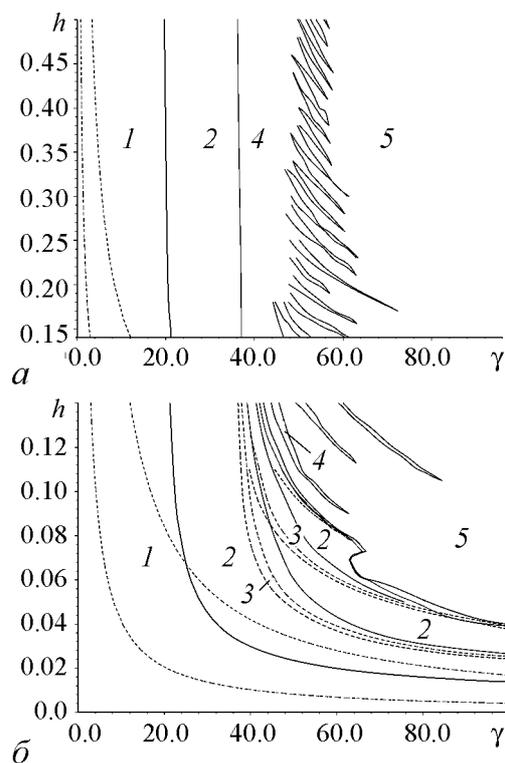


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма системы (10) на плоскости  $(\gamma, h)$ , разделенная на две части с разным масштабом по параметру  $h$ . Отметим существование областей мультистабильности

туру и содержит многочисленные участки типа 2 и 5 малых размеров. Отметим, что существование устойчивого состояния равновесия, близкого к моде с максимальным усилением, подтверждается численно. При  $\gamma > v\sqrt{1+\alpha^2}$  система (1), вообще говоря, теряет свойство диссипативности. Это объясняется тем, что столь большие значения  $\gamma$  физически недостижимы, поскольку величину  $v^{-1}\gamma$  следует понимать как ту долю отраженного излучения, которая возвращается в резонатор. Граница области динамического хаоса определялась на основе вычисления корреляционной размерности [24, 25]. Расчет старшего показателя Ляпунова [26], в целом, подтверждает полученные оценки.

Подчеркнем связь между установившимися режимами в квазинормальной форме и в исходной модели: устойчивым состоянием равновесия и циклам системы (10) соответствуют устойчивые предельные циклы и торы в (1).

Следует также обратить внимание на то, что известные о когерентном коллапсе факты [2–4, 7, 12] хорошо согласуются с наблюдаемой динамикой системы (10).

### 3. Модель с фильтром при $v, Q \gg 1$

Введем в рассмотрение малый положительный параметр  $\varepsilon$  так, что

$$v = \varepsilon^{-1}, \quad Q = q\varepsilon^{-1},$$

и выполним замену переменных

$$t = \varepsilon s, \quad E = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot e^{-i\omega s} E_1, \quad f = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot e^{-i\omega s} f_1.$$

Это приводит к системе, которая является частным случаем (3).

Решение системы «нулевого приближения» представимо в форме

$$\mathbf{V}_0(s) = \sqrt{q} \cdot (\exp(i\omega s), c \exp(i\omega s), 0)^T.$$

Матрица линеаризованной на  $V_0$  системы имеет вид

$$\mathbf{A}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 & 0 & \sqrt{q} \cdot [\cos(\omega s) - \alpha \sin(\omega s)] \\ \omega & 0 & 0 & 0 & \sqrt{q} \cdot [\sin(\omega s) + \alpha \cos(\omega s)] \\ 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 0 & 0 \\ -2\sqrt{q} \cdot \cos(\omega s) & -2\sqrt{q} \cdot \sin(\omega s) & 0 & 0 & -q \end{pmatrix}.$$

Система (6) и сопряженная к ней имеют по три (с точностью до константы) периодических решения и им соответствующих единичных мультипликатора. Выберем эти решения следующим образом:

$$\mathbf{K}_0(s) = \sqrt{q} \cdot (-\sin(\omega s), \cos(\omega s), 0, 0, 0)^T,$$

$$\mathbf{H}_0(s) = -\frac{1}{\sqrt{q}} \cdot (\sin(\omega s) + \alpha \cos(\omega s), -\cos(\omega s) + \alpha \sin(\omega s), 0, 0, 0)^T,$$

$$\mathbf{K}_1(s) = \mathbf{H}_1(s) = (0, 0, \cos(\omega s), \sin(\omega s), 0)^T,$$

$$\mathbf{K}_2(s) = \mathbf{H}_2(s) = (0, 0, -\sin(\omega s), \cos(\omega s), 0)^T,$$

чтобы выполнялось условие  $\langle \mathbf{K}_i, \mathbf{H}_j \rangle = \delta_{ij}$ ,  $i, j=0\dots 2$ , где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

В данном случае замена (4), (5) несколько модифицируется, а именно:

$$\mathbf{V}(s, \varepsilon) = \mathbf{V}_0(\tau_1, \tau_2) + \varepsilon \mathbf{V}_1(t, \tau_1, \tau_2) + \varepsilon^2 \mathbf{V}_2(t, \tau_1, \tau_2) + \dots,$$

$$\frac{d\tau_1}{ds} = 1 + \varepsilon \varphi_1(t) + \varepsilon^2 \psi_1(t) + \dots,$$

$$\frac{d\tau_2}{ds} = 1 + \varepsilon \varphi_2(t) + \varepsilon^2 \psi_2(t) + \dots.$$

Здесь  $\mathbf{V}_0(\tau_1, \tau_2) = \sqrt{q} \cdot (\exp(i\omega\tau_1), c \exp(i\omega\tau_2), 0)^T$ . Кроме того,

$$\tau_2(s) - \tau_1(s) = \varepsilon \int_{s_0}^s [\varphi_2(\varepsilon r) - \varphi_1(\varepsilon r) + \dots] dr = \int_{t_0}^t [\varphi_2(r) - \varphi_1(r)] dr + O(\varepsilon).$$

По аналогии с предыдущим пунктом введем в рассмотрение  $y_1$  и  $y_2$ . Тогда, собирая коэффициенты при первой степени  $\varepsilon$ , получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial c} \frac{dc(t)}{dt} + \varphi_1(t) \frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial \tau_1} + \varphi_2(t) \frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial \tau_2} + \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial \tau_1} + \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial \tau_2} = \\ = \mathbf{A} \mathbf{V}_1 + \Phi(\mathbf{V}_0(\tau_1, \tau_2), \mathbf{V}_0(\tau_1 - y_1, \tau_2 - y_2)). \end{aligned} \quad (15)$$

Из условий периодичности функции  $\mathbf{V}_1$  по  $\tau_1, \tau_2$  получим следующие уравнения, которые будем называть квазинормальной формой системы (2) в выбранной области пространства параметров,

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_1(t) &= -c(t) \gamma \sqrt{1 + \alpha^2} \sin\left(\int_{t_0}^t (\varphi_1(r) - \varphi_2(r)) dr + \arctg(\alpha)\right), \\ \frac{dc(t)}{dt} &= \Lambda \left[ \cos(\omega_0 h + \int_{-h}^0 \varphi_1(t+r) dr + \int_{t_0}^t (\varphi_2(r) - \varphi_1(r)) dr) - c(t) \right], \\ \varphi_2(t) &= \Delta - \frac{\Lambda}{c(t)} \sin\left(\omega_0 h + \int_{-h}^0 \varphi_1(t+r) dr + \int_{t_0}^t (\varphi_2(r) - \varphi_1(r)) dr\right). \end{aligned} \right. \quad (16)$$

Здесь и далее без ограничения общности считаем, что  $\theta_1(t_0) = \theta_2(t_0)$ , где  $\frac{d\theta_j(t)}{dt} = \varphi_j(t)$ .

Отметим, что при численном моделировании системы (16) других аттракторов, кроме состояний равновесия, обнаружить не удалось. Такой же результат был получен в работе [27] для уравнений (1) в случае  $v, Q \gg 1$ . Исходя из принципов работы фильтра, можно предположить, что характер излучения на выходе из фильтрующего устройства не должен оказаться сложнее, чем на входе, поэтому сформулированный результат выглядит естественно.

Подчеркнем связь между установившимися режимами в квазинормальной форме и в исходной модели: устойчивому состоянию равновесия системы (16) соответствует устойчивый предельный цикл в (2).

#### 4. Большая накачка $Q \gg 1$ в системе с фильтром

Пусть параметр  $Q$  достаточно велик. В данном случае считаем, что  $v = O(1)$ . Положим  $Q = \varepsilon^{-1}$ , где  $\varepsilon \ll 1$ . Выполним следующее преобразование переменных:

$$t = \varepsilon s, \quad E = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot e^{-i\omega s} E_1, \quad f = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot e^{-i\omega s} f_1.$$

Полученная в результате система также сводится к уравнению общего вида (3).

Решение системы «нулевого приближения» можно записать следующим образом:

$$\mathbf{V}_0(s) = (c_1 \exp(i\omega s), c_2 \exp(i\omega s), c_1^{-2} - 1)^T.$$

Стандартная линеаризация  $dx/dt = F(x)$  на  $\mathbf{V}_0(s)$  в соответствии с изложенной методикой приводит к системе (6),  $2\pi/\omega$ -периодическая матрица которой имеет вид

$$(A_0(s)) = \frac{DF}{D\mathbf{x}}(\mathbf{V}_0(s)) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 & 0 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 0 & 0 \\ -2c_1^{-1} \cos(\omega s) & -2c_1^{-1} \sin(\omega s) & 0 & 0 & -c_1^2 \end{pmatrix}.$$

По аналогии с процедурой, изложенной в предыдущем разделе, несложно установить, что в данном случае система (6) и сопряженная к ней имеют по четыре линейно независимых периодических решения.

В соответствии с изложенной методикой, собирая коэффициенты при первой степени  $\varepsilon$ , приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial c_1} \frac{dc_1(t)}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial c_2} \frac{dc_2(t)}{dt} + \varphi_1(t) \frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial \tau_1} + \varphi_2(t) \frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial \tau_2} + \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial \tau_1} + \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial \tau_2} = \\ = A\mathbf{V}_1 + \Phi(\mathbf{V}_0(\tau_1, \tau_2), \mathbf{V}_0(\tau_1 - y_1, \tau_2 - y_2)). \end{aligned} \quad (17)$$

Условие существования периодического (по  $\tau$ ) решения уравнения (17) состоит в ортогональности его неоднородной части функциям  $\mathbf{H}_0(\tau_1)$ ,  $\mathbf{H}_1(\tau_1)$ ,  $\mathbf{H}_2(\tau_2)$ ,  $\mathbf{H}_3(\tau_2)$ . Отметим, что, выполнив замену  $\omega\tau \rightarrow \varphi$ , можно избавиться от  $\omega$ .

Следующая система интегрально-дифференциальных уравнений выступает в роли нормальной формы в задаче о локальной динамике уравнений (2) в окрестности решения  $\mathbf{V}_0$  невозмущенной предельной системы при  $Q \rightarrow \infty$ :

$$\begin{cases} \frac{dc_1(t)}{dt} = v \left( \frac{1}{c_1(t)} - c_1(t) \right) + \gamma \cos \left( \int_{t_0}^t (\varphi_2(r) - \varphi_1(r)) dr \right) c_2(t), \\ \varphi_1(t) = v\alpha \left( \frac{1}{c_1^2(t)} - 1 \right) + \gamma \sin \left( \int_{t_0}^t (\varphi_2(r) - \varphi_1(r)) dr \right) \frac{c_2(t)}{c_1(t)}, \\ \frac{dc_2(t)}{dt} = \Lambda \left[ c_1(t-h) \cos \left( \omega_0 h + \int_{-h}^0 \varphi_1(t+r) dr + \int_{t_0}^t (\varphi_2(r) - \varphi_1(r)) dr \right) - c_2(t) \right], \\ \varphi_2(t) = \Delta - \Lambda \sin \left( \omega_0 h + \int_{-h}^0 \varphi_1(t+r) dr + \int_{t_0}^t (\varphi_2(r) - \varphi_1(r)) dr \right) \frac{c_1(t-h)}{c_2(t)}. \end{cases} \quad (18)$$

Заметим, что квазинормальная форма (18) при выполнении замен

$$E(t) = c_1(t) e^{i\theta_1(t)}, \quad f(t) = c_2(t) e^{i\theta_2(t)}, \quad \frac{d\theta_1(t)}{dt} = \varphi_1(t), \quad \frac{d\theta_2(t)}{dt} = \varphi_2(t)$$

допускает более компактную запись в терминах исходной системы (2)

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = v(1+i\alpha) (|E|^{-2}-1) E + \gamma f, \\ \frac{df}{dt} = i\Delta f + \Lambda[E(t-h)e^{-i\omega_0 h} - f]. \end{cases} \quad (19)$$

Численный анализ показывает, что динамика (18) оказывается существенно проще, чем (10). В пределах точности вычислений при  $\gamma < v$  и  $0 < h < 10$  вне зависимости от значений других параметров удавалось обнаружить лишь один аттрактор – устойчивое состояние равновесия, которому соответствует простой периодический режим в системе (2).

## 5. Нормализация в неавтономном случае

Полученные результаты распространяются на случай, когда параметры уравнений (1), (2) являются гладкими ограниченными периодическими функциями времени  $t$ , амплитуда и период колебаний которых не зависят от малого параметра. Сформулируем основной результат для системы (1). Пусть параметры уравнений Ланга–Кобаяши имеют вид [28, 29]

$$\alpha = \alpha(t), \quad \gamma = \gamma(t), \quad h = h(t), \quad Q = \varepsilon^{-1}q(t).$$

Если  $v = \varepsilon^{-1}v_*(t)$  есть большой параметр, то соответствующая квазинормальная форма уравнений (1) записывается следующим образом:

$$\varphi(t) = -\gamma(t) \sqrt{1+\alpha^2(t)} \sin\left(\omega_0 h(t) + \int_{-h(t)}^0 \varphi(t+r) dr + \arctg(\alpha(t))\right). \quad (20)$$

В случае, когда  $v = v(t)$  есть величина порядка единицы, нормализованная система имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dc(t)}{dt} = v(t) \left( \frac{q(t)}{c(t)} - c(t) \right) + \gamma(t) \cos(\omega_0 h(t) + \int_{-h(t)}^0 \varphi(t+r) dr) c(t-h(t)), \\ \varphi(t) = v(t) \alpha(t) \left( \frac{q(t)}{c^2(t)} - 1 \right) - \gamma(t) \sin(\omega_0 h(t) + \int_{-h(t)}^0 \varphi(t+r) dr) \frac{c(t-h(t))}{c(t)}. \end{cases}$$

Детальное изучение этой модели представляет собой отдельную задачу.

Исследуем уравнение (20) в случае, когда его параметры представимы в виде

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \sin(\omega_\alpha t), \quad \gamma = \gamma_0 + \gamma_1 \sin(\omega_\gamma t), \quad h = h_0 + h_1 \sin(\omega_h t),$$

где  $\alpha_0 > |\alpha_1|$ ,  $\gamma_0 > |\gamma_1|$ ,  $h_0 > |h_1|$ . Если частоты  $\omega_\alpha$ ,  $\omega_\gamma$ ,  $\omega_h$  соизмеримы, то в системе (20) устанавливается периодический режим. Такой эффект связан с пульсацией эллипса [2, 7, 9], который соотносят с модами внешнего резонатора. При этом возможны

переходы с одной моды на другую. Соответственно такие «медленные» изменения параметров могут приводить к усложнению динамики исходной модели. Однако, как отмечено, например, в [30], физически в модели Ланга–Кобаяши проще всего управлять параметрами  $h$  и  $Q$ .

Особый практический интерес представляет изучение двух случаев. Это учет влияния параметрического резонанса и быстро осциллирующих слагаемых на квазинормальную форму. Поскольку у системы «нулевого приближения» есть пара единичных мультипликаторов, то параметры с резонансными слагаемыми имеют вид  $Q = \varepsilon^{-1} + q_1 \sin(\varepsilon \Omega_q t)$ ,  $\gamma = \gamma_0 + \varepsilon \gamma_1 \sin(\varepsilon \Omega_\gamma t)$  и так далее. Из построения нормализованной системы можно установить, что резонансные слагаемые не влияют на вид уравнений (10). То есть реализовать параметрический резонанс в данном случае невозможно.

Наличие быстро осциллирующих составляющих приводит к несколько более содержательным результатам. Пусть параметры системы (1) имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_0 + \gamma_1 \sin(t\varepsilon^{-2}), & h &= h_0 + h_1 \sin(t\varepsilon^{-2}), & \alpha &= \alpha_0 + \alpha_1 \sin(t\varepsilon^{-2}), \\ v &= v_0 + v_1 \sin(t\varepsilon^{-2}), & Q &= \varepsilon^{-1} [q_0 + q_1 \sin(t\varepsilon^{-2})]. \end{aligned}$$

Выполняя стандартные замены в уравнениях (1), усредняя их по «быстрому» времени  $s\varepsilon^{-1} = t\varepsilon^{-2}$ , и действуя далее в соответствии с изложенным алгоритмом нормализации, получим следующую систему с распределенным запаздыванием:

$$\begin{cases} \frac{dc(t)}{dt} = v_0 \left( \frac{q_0}{c(t)} - c(t) \right) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma_0 + \gamma_1 r}{\sqrt{1-r^2}} \cos(\omega_0 h(r) + \int_{-h(r)}^0 \varphi(t+u) du) c(t-h(r)) dr, \\ \varphi(t) = p_0 \left( \frac{q_0}{c^2(t)} - 1 \right) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma_0 + \gamma_1 r}{\sqrt{1-r^2}} \sin(\omega_0 h(r) + \int_{-h(r)}^0 \varphi(t+u) du) \frac{c(t-h(r))}{c(t)} dr. \end{cases} \quad (21)$$

Здесь

$$p_0 = v_0 \alpha_0 + \frac{v_1 \alpha_1}{2}, \quad h(r) = h_0 + h_1 r.$$

Таким образом, при асимптотически больших значениях параметра  $Q$  модуляция тока накачки (параметр  $q_1$ ) уже не оказывает серьезного влияния на динамику уравнений (1).

Рассмотрим систему (21) в случае  $v_1 = \gamma_1 = \alpha_1 = 0$ . В терминах исходной задачи (1) это ситуация быстро осциллирующего запаздывания. Численный анализ системы (21) показывает, что уже при соотношении  $h_1/h_0 = 0.01$  происходит ощутимый сдвиг вправо по параметру  $\gamma$  всех границ между областями, изображенными на рис. 2. При  $h_1/h_0 = 0.2$  в системе (21) практически всюду в рассматриваемой на рис. 2 области параметров устанавливается стационарный режим, которому соответствует простой периодический режим в усредненной системе (1).

Аналогичные результаты справедливы и для модели с фильтром.

## Заключение

Методом большого параметра исследованы две модели полупроводникового лазера с запаздывающей обратной связью. Изучение динамики полученных эволюционных уравнений, так называемых квазинормальных форм, позволяет сделать выводы о поведении исходных систем при достаточно больших значениях параметра

накачки. Заметим, что аттракторы модельных задач (1), (2) и нормализованных уравнений связаны между собой стандартным образом: устойчивому состоянию равновесия или циклу, наблюдаемому в квазинормальной форме, соответствует устойчивый цикл или тор в исходной системе.

Главным достоинством подхода, использованного в данной работе, является исключение «быстрых» движений. В результате остаются только уравнения для «медленных» амплитуд, которые определяют «в главном» поведение решений исходных систем, что серьезно облегчает дальнейшие аналитические исследования и численный счет.

В случае большой величины накачки модель с фильтром, несмотря на кажущуюся сложность, демонстрирует более простую динамику, нежели исходная система Ланга–Кобаяши. Вне зависимости от интенсивности запаздывающей оптической обратной связи в системе (2) устанавливается простой периодический режим, соответствующий стабильному рабочему режиму генерации. Аналогичные выводы можно сделать, исследуя динамику квазинормальной формы системы (1) при быстро осциллирующем запаздывании. Соответственно фильтрование отраженного электромагнитного излучения и высокочастотная вибрация отражающих поверхностей представляют собой действенные механизмы преодоления феномена когерентного коллапса, которому на языке модели Ланга–Кобаяши отвечает явление детерминированного динамического хаоса. Отмеченный стабилизирующий эффект от использования оптического фильтра или быстро вибрирующих зеркал может быть принят во внимание в различных приложениях лазерных систем.

Автор выражает благодарность С.А. Кащенко и С.Д. Глызину за постановку задачи, помощь и внимание к работе, а также Е.В. Григорьевой за полезные консультации.

*Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект РНП.2.1.1.630).*

### **Библиографический список**

1. Ханин Я.И. Основы динамики лазеров // М.: Наука, Физматлит, 1999. 368 с.
2. Van Tartwijk G.H.M. and Agrawal G.P. Laser instabilities: A modern perspective // Progress in Quantum Electronics. 1998. Vol. 22. P. 43.
3. Grigorieva E.V. Quasiperiodicity in Lang–Kobayashi model of lasers with delayed optical feedback // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2001. Vol. 4, № 4. P. 333.
4. Ye J., Li H., McInerney J.M. Period-doubling route to chaos in a semiconductor laser with weak optical feedback // Phys. Rev. A. 1993. Vol. 47, № 3. P. 2249.
5. Fischer I., Hess O., Elsässer W. and Göbel E. High-dimensional chaotic dynamics of an external cavity semiconductor laser // Phys. Rev. Lett. 1994. Vol. 73, № 16. P. 2188.
6. Sacher J., Elsässer W., Göbel E.O. Intermittency in the coherence collapse of a semiconductor laser with external feedback // Phys. Rev. Lett. 1989. Vol. 63, № 20. P. 2224.

7. *Sano T.* Antimode dynamics and chaotic itinerancy in the coherence collapse of semiconductor lasers with optical feedback // *Phys. Rev. A.* 1994. Vol. 50, № 3. P. 2719.
8. *Tager A.A., Petermann K.* High-frequency oscillations and self-mode locking in short external-cavity laser diodes // *IEEE J. Quantum Electron.* 1994. Vol. 30, № 7. P. 1553.
9. *Wolfrum M., Turaev D.* Instabilities of lasers with moderately delayed optical feedback // *Opt. Commun.* 2002. Vol. 212. P. 127.
10. *Heil T., Fischer I., Elsässer W., Krauskopf B., Green K., Gavrielides A.* Delay dynamics of semiconductor lasers with short external cavities: Bifurcation scenarios and mechanisms // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 67. 066214.
11. *Tabaka A., Panajotov K., Veretennicoff I., Sciamanna M.* Bifurcation study of regular pulse packages in laser diodes subject to optical feedback // *Phys. Rev. E.* 2004. Vol. 70. 036211.
12. *Heil T., Fischer I., and Elsässer W.* Influence of amplitude-phase coupling on the dynamics of semiconductor lasers subject to optical feedback // *Phys. Rev. A.* 1999. Vol. 60, № 1. P. 634.
13. *Pieroux D., Mandel P.* Bifurcation diagram of a complex delay-differential equation with cubic nonlinearity // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 67. 056213.
14. *Lang R., Kobayashi K.* External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties // *IEEE J. Quantum Electron.* 1980. Vol. 16, №1. P. 347.
15. *Green K., Krauskopf B.* Mode structure of semiconductor laser subject to filtered optical feedback // *Opt. Commun.* 2006. Vol. 258. P. 243.
16. *Alsing P., Kovanis V., Gavrielides A. and Erneux T.* Lang and Kobayashi phase equation // *Phys. Rev. A.* 1996. Vol. 53, № 6. P. 4429.
17. *Kaschenko S.A.* Normalization in the systems with small diffusion // *International Journal of Bifurcations and chaos.* 1996. Vol. 6, № 7. P. 1093.
18. *Кащенко С.А.* Бифуркации цикла в сингулярно возмущенных нелинейных автономных системах // *Изв. РАН, серия МММИУ.* 1998. Т.2, № 4. С. 5.
19. *Кащенко С.А.* Локальная динамика нелинейных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием // *Дифференциальные уравнения.* 1999. Т.35, № 10. С. 1343.
20. *Кащенко С.А.* Бифуркации в окрестности цикла при малых возмущениях с большим запаздыванием // *Журнал выч. матем. и матем. физ.* 2000. № 4.
21. *Kaschenko S.A.* Bifurcational features in systems of nonlinear parabolic equations with weak diffusion // *International Journal of Bifurcation and Chaos.* 2005. Vol. 15, № 11.
22. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
23. *Levine A.M., Tartwijk G.H.M., Lenstra D. and Erneux T.* Diode lasers with optical feedback: Stability of the maximum gain mode // *Phys. Rev. A.* 1995. Vol. 52, № 5. P. 3436.

24. *Grassberger P., Procaccia I.* Estimation of the Kolmogorov entropy from a chaotic signal // *Phys. Rev. A.* 1983. Vol. 28, № 4. P. 2591.
25. *Grassberger P., Procaccia I.* Measuring the strangeness of strange attractors // *Physica D.* 1983. Vol. 9, №1,2. P. 189.
26. *Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A.* Determining Lyapunov exponents from a time series // *Physica D.* 1985. Vol. 16, № 3. P. 285.
27. *Глазков Д.В.* Простейшие устойчивые режимы в модели Ланга–Кобаяши с большим запаздыванием // *Труды XXVII Конференции молодых ученых ММФ МГУ им. М.В. Ломоносова.* 2005. С. 27.
28. *Колесов Ю.С., Майоров В.В.* Новый метод исследования устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с близкими к постоянным почти-периодическими коэффициентами // *Дифференциальные уравнения.* 1974. Т. 10, № 10. С. 1778.
29. *Кащенко С.А., Майоров В.В.* Алгоритм исследования устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с последствием и быстро осциллирующими почти периодическими коэффициентами // *Сборник статей. Исследования по устойчивости и теории колебаний.* 1977. С. 70.
30. *Mendez J.M., Laje R., Giudici M., Aliaga J. and Mindlin G.B.* Dynamics of periodically forced semiconductor laser with optical feedback // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 63. 066218.

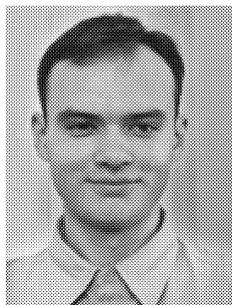
*Ярославский государственный  
университет им. П.Г. Демидова*

*Поступила в редакцию 29.03.2008  
После доработки 02.07.2008*

## QUALITATIVE ANALYSIS OF ONE CLASS OF OPTOELECTRONIC SYSTEMS SINGULARLY PERTURBED MODELS

*D.V. Glazkov*

Two models of semiconductor laser with delayed optical feedback are studied. We consider singularly perturbed problem because of the large parameter presence. We construct and discuss quasinormal forms of models in transcritical cases.



*Глазков Дмитрий Владимирович* – родился в 1982 году в Ачинске Красноярского края. Окончил с отличием математический факультет Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова (2004). В настоящее время является ассистентом кафедры математического моделирования ЯРГУ. Область научных интересов – дифференциальные уравнения с запаздыванием, метод нормальных форм, модели динамики лазеров. Автор 5 статей по данной тематике.  
E-mail: glazkov\_d@mail.ru