

ВЛИЯНИЕ ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ФОРМИРОВАНИЕ И ДИНАМИКУ ВИРТУАЛЬНОГО КАТОДА

С.А. Куркин, А.А. Короновский, А.Е. Храмов

Приведены результаты исследования в рамках двумерной численной модели механизмов формирования и динамики виртуального катода в сплошном и трубчатом электронных потоках во внешнем магнитном поле. Обнаружены два качественно различных типа динамики пространственного заряда в области виртуального катода, которые конкурируют между собой; преобладание в системе того или иного типа динамики определяется величиной внешнего магнитного поля. Последнее приводит к зависимости величины критического тока пучка, при котором в системе образуется нестационарный виртуальный катод, от величины внешнего магнитного поля.

Введение

Исследование физических процессов, происходящих в интенсивных пучках заряженных частиц с виртуальным катодом (ВК), на сегодняшний день является весьма актуальной задачей и привлекает большое внимание исследователей [1–3]. Хорошо известно, что влияние пространственного заряда в интенсивных пучках может приводить к сложной хаотической динамике [4–6]. Поэтому системы с виртуальным катодом представляют большой интерес, с одной стороны, из-за того что они демонстрируют сложную нетривиальную динамику (под которой подразумеваются эффекты хаотической генерации, образования структур, сложная перестройка режимов при изменении управляющих параметров и т.д.), что делает подобные системы весьма интересными объектами исследований с точки зрения нелинейной физики и теории самоорганизации. С другой стороны, интерес обусловлен важностью систем с виртуальным катодом (или, как их часто называют, виркаторов) в практических приложениях, которые заключаются в создании источников сверхмощного СВЧ-излучения, ускорении ионов, применении нерелятивистских генераторов на виртуальном катоде в качестве маломощных источников сверхширокополосного СВЧ-излучения.

Как показывает ряд экспериментальных и теоретических исследований приборов с виртуальным катодом, характеристики генерации виркаторов сильно зависят от внешнего магнитного поля. В частности, были получены экспериментальные и численные результаты влияния внешнего магнитного поля на частоту и мощность генерации виртуального катода [7–12], выявлена зависимость ширины полосы генерации низковольтного виркатора от магнитного поля [12, 13], обнаружена сильная

зависимость критического тока пучка от фокусирующего магнитного поля [14]. Однако систематического планомерного исследования вопросов влияния магнитного поля на динамику виртуального катода в потоке заряженных частиц не проводилось, так что процессы, происходящие в электронных пучках со сверхкритическим током во внешнем магнитном поле, остаются плохо изученными. Их понимание позволит продвинуться в изучении систем с виртуальным катодом, что является весьма важной и актуальной задачей нелинейной динамики пучково-плазменных и электронно-волновых систем.

В представленной работе приведены результаты исследования влияния величины внешнего магнитного поля на условия и механизмы формирования виртуального катода в сплошном и трубчатом электронных пучках, рассматривается влияние внешнего магнитного поля на критический ток электронного потока. Также в работе рассматриваются особенности нелинейной динамики электронного потока с виртуальным катодом при изменении магнитного поля.

1. Исследуемая модель

В качестве исследуемой модели рассмотрена классическая модель для изучения динамики виртуального катода [15]. Пространство дрейфа электронного потока представляет собой замкнутый отрезок цилиндрического волновода длиной L и радиусом R , закрытый с торцов сеточными электродами. Аксиально-симметричный моноскоростной на входе сплошной электронный пучок со скоростью v_0 , током I и радиусом R_b инжектируется в пространство взаимодействия через левую (входную) сетку и выводится через правую (выходную), а также может оседать на боковой стенке пространства взаимодействия. Вдоль оси системы прикладывается внешнее однородное фокусирующее магнитное поле с индукцией B .

Рассмотрена нестационарная двумерная модель динамики электронного потока в пространстве взаимодействия, которая представляет собой самосогласованную систему уравнений движения заряженных частиц для моделирования динамики электронного пучка, и уравнение Пуассона для нахождения самосогласованного поля пространственного заряда [16, 17]. Ограничимся рассмотрением в работе только нерелятивистских и слаборелятивистских электронных потоков, то есть потоков с $\beta_0 = v_0/c \leq 0.5$, где v_0 – статическая (невозмущенная) скорость потока на входе в систему, c – скорость света.

В уравнениях, описывающих динамику электронного пучка, используются следующие безразмерные величины: потенциал φ , напряженность E поля пространственного заряда, индукция B внешнего магнитного поля, плотность ρ , скорость v и импульс P электронов, а также пространственные координаты z , r и время t

$$\begin{aligned} \varphi' &= \frac{v_0^2}{\eta_0} \varphi, & E' &= \frac{v_0^2}{L\eta_0} E, & B' &= \frac{v_0}{L\eta_0} B, & \rho' &= \rho_0 \rho, \\ v' &= v_0 v, & P' &= m_e v_0 P, & z' &= Lz, & r' &= Lr, & t' &= \frac{L}{v_0} t, \end{aligned} \quad (1)$$

где штрихом обозначены соответствующие размерные величины, $\eta_0 = e/m_e$ – удельный заряд покоящегося электрона; v_0 и ρ_0 – не зависящие от радиуса статические

(невозмущенные) скорость и плотность электронного потока на входе в систему; L – длина пространства взаимодействия.

Численное моделирование нестационарных процессов в электронном пучке при инжекции его в пространство дрейфа проводилось методом крупных частиц. Он заключается в том, что электронный поток представляется в виде совокупности крупных частиц, которые в цилиндрической системе координат имеют вид заряженных колец. Для каждой заряженной частицы решались уравнения движения, записанные через компоненты ее импульса. В цилиндрических координатах в безразмерных величинах (1) уравнения движения записываются в следующем виде:

$$\frac{dP_{ri}}{dt} - \gamma(z_i, \theta_i, r_i) r_i \left(\frac{d\theta_i}{dt} \right)^2 = -E_r - r_i B \frac{d\theta_i}{dt}, \quad (2)$$

$$\frac{dP_{\theta i}}{dt} + \gamma(z_i, \theta_i, r_i) r_i \frac{dr_i}{dt} \frac{d\theta_i}{dt} = B \frac{dr_i}{dt}, \quad (3)$$

$$\frac{dP_{zi}}{dt} = -E_z, \quad i = 1, \dots, N_0, \quad (4)$$

где γ – релятивистский фактор; с учетом слабого релятивизма

$$\gamma(z_i, \theta_i, r_i) = \left(1 - \frac{\beta_0^2}{2} \left[\left(\frac{dr_i}{dt} \right)^2 + \left(r_i \frac{d\theta_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt} \right)^2 \right] \right). \quad (5)$$

Здесь z_i , r_i и θ_i – соответственно продольная, радиальная и азимутальная координаты заряженных частиц; $P_{zi} = \gamma \dot{z}_i$, $P_{ri} = \gamma \dot{r}_i$ и $P_{\theta i} = \gamma r_i \dot{\theta}_i$ – соответственно продольная, радиальная и азимутальная компоненты импульсов заряженных частиц; E_z и E_r – продольная и радиальная компоненты электрического поля; $B = B_z = \text{const}$ – продольная компонента внешнего магнитного поля (предполагается, что радиальная и азимутальная составляющие внешнего магнитного поля равны нулю: $B_r = B_\theta = 0$). Индексом i обозначены номера частиц, N_0 – полное число заряженных частиц, моделирующих электронный поток.

Частицы при влете в пространство дрейфа имеют ненулевую азимутальную скорость, пропорциональную продольному магнитному полю в пространстве дрейфа. Эта скорость определяется из теоремы Буша, записанной для случая экранированного от внешнего магнитного поля катода ($B_k = 0$) [18, 19]

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\eta_0 B_z}{2\gamma_0},$$

где $\gamma_0 = 1/\sqrt{1 - \beta_0^2}$.

Уравнения движения (2)–(4) для каждой крупной частицы интегрировались численно методом «с перешагиванием». Уравнение (3) может привести к неустойчивости азимутальной скорости частицы θ_i , так как из него следует, что $\theta_i \sim 1/r_i$, и при малых r_i и больших временных шагах численного интегрирования частица «нефизично» быстро раскручивается. Для корректного решения уравнений движения для частиц, близко подошедших к оси симметрии, интегрирование уравнений производится с повышенной точностью. Шаг интегрирования уменьшается до значения, при котором численная схема становится устойчивой, и результат интегрирования

уравнений движения частиц начинает сходиться с уменьшением шага интегрирования.

Распределение потенциала в пространстве взаимодействия рассчитывалось с помощью уравнения Пуассона, которое в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = \alpha^2 \rho, \quad (6)$$

где

$$\alpha = L \left(\frac{|\rho_0|}{\varphi_0 \varepsilon_0} \right)^{1/2}. \quad (7)$$

Здесь $\alpha = \eta_0 |\rho_0| L / (\varepsilon_0 v_0)$ – безразмерный управляющий параметр (критерий подобия задачи [20]), пропорциональный току пучка как $\alpha \sim \sqrt{I}$ и длине пространства взаимодействия как $\alpha \sim L$. Уравнение Пуассона решается при следующих граничных условиях, учитывающих влияние стенок на поток:

$$\varphi(z=0, r) = 0, \quad \varphi(z=1, r) = 0, \quad \varphi(z, r=R) = 0, \quad (8)$$

$$\left. \frac{d\varphi}{dr} \right|_{r=0} = 0. \quad (9)$$

Условие (9) на оси симметрии $r = 0$ определяется аксиальной симметрией пространства взаимодействия. Для решения уравнение Пуассона (6) используется метод сеток. На пространство распространения электронного потока (цилиндрический волновод) накладывается пространственная сетка с шагами Δr и Δz по радиальной и продольной координатам, соответственно. Затем в узлах этой сетки вычисляются плотности пространственного заряда с использованием снижающей сеточный шум процедуры билинейного взвешивания крупных частиц на пространственной сетке в цилиндрической системе координат (PIC-метод) [17]. Определенные процедурой билинейного взвешивания величины пространственных зарядов в узлах сетки $\rho(k\Delta z, j\Delta r)$ используются для нахождения распределения потенциала пространственного заряда, то есть его значений в узлах сетки, с помощью уравнения Пуассона. После этого дифференцированием определяются величины напряженности электрического поля в узлах сетки.

Положение крупных частиц, используемых для моделирования пучка электронов, определяется непрерывными координатами, поэтому необходимо найти значения напряженностей электрического поля в этих координатах. Это делается с помощью процедуры, аналогичной билинейному взвешиванию.

2. Формирование и динамика ВК в сплошном электронном потоке во внешнем магнитном поле

Формирование ВК в электронном потоке связано с появлением в пространстве дрейфа потенциального барьера, отражающего к плоскости инжекции и на боковые поверхности рабочей камеры виркатора часть электронного потока. Виртуальный катод, формирующийся в электронном потоке со сверхпределным током, принципиально ведет себя нестационарным образом, совершая колебания как во времени, так

и в пространстве [2, 12, 21–26]. Картина формирования и динамики ВК достаточно подробно описана в литературе [13, 21, 22, 27, 28] для случая одномерного движения электронов пучка (полностью замагниченного потока). Величина критического тока для этого случая была впервые аналитически определена в работах [1, 15, 29]:

$$I_0 = \frac{c^3}{\eta_0} \frac{(\gamma_0^{2/3} - 1)^{3/2}}{\Delta/R_b + 2 \ln(R/R_b)}, \quad (10)$$

где R_b – средний радиус пучка, а Δ – его толщина.

Введение в систему с виртуальным катодом внешнего магнитного поля оказывает сильное влияние на динамику пучка и особенности формирования и динамики ВК в виркаторной системе. Рассмотрим их более подробно, используя для анализа механизмов формирования и динамики ВК в пучке заряженных частиц описанную в разделе 1 двумерную математическую модель.

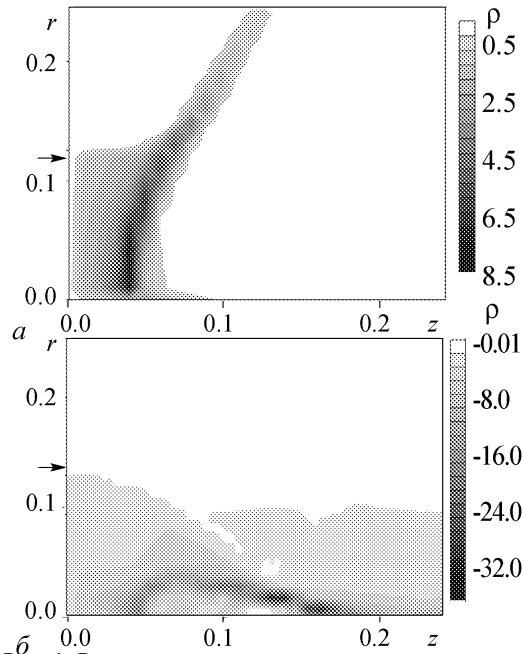


Рис. 1. Распределения плотности пространственного заряда в области виртуального катода, усредненные за характерный период колебаний ВК при $\sigma = 0.5$, $\beta_0 = 0.1$, $B = 42$ Гс, $\alpha = 11$ (а) и $B = 170$ Гс, $\alpha = 7$ (б). Стрелкой показан начальный радиус сплошного цилиндрического потока

образуется колеблющийся нестационарный ВК. Величина усредненной за характерный период колебаний ВК плотности пространственного заряда $\rho(r, z)$ в различных точках (r, z) пространства дрейфа пропорциональна интенсивности серого цвета. Максимум на распределении плотности пространственного заряда (темная область на рисунке) соответствует области виртуального катода, где электроны останавливаются и начинают двигаться обратно от ВК либо к входному электроду, либо к боковой стенке пространства дрейфа в зависимости от величины магнитного поля. Из рисунка видно, что в случае малой величины внешнего магнитного поля (рис. 1, а)

Наиболее часто используемыми в реальных приборах являются цилиндрические сплошной и трубчатый электронные пучки. Поэтому важной задачей является исследование пучков именно с такой геометрией. В данном разделе будет рассмотрен сплошной поток электронов, находящийся во внешнем магнитном поле, причем параметр заполнения пучком канала пространства дрейфа $\sigma = R_b/R$ предполагается фиксированным и равным 0.5. Ниже, в разделе 3 приведены результаты исследования трубчатого пучка.

Для иллюстрации процессов, протекающих в сплошном электронном потоке с виртуальным катодом, находящимся во внешнем магнитном поле, на рис.1 приведены распределения плотности пространственного заряда в области виртуального катода для случаев малой и большой индукции магнитного поля при токе пучка, превышающем критическое значение, когда в системе

виртуальный катод растянут вдоль радиального направления на расстояние, превышающее начальный радиус пучка (начальный радиус пучка обозначен стрелкой). Это является следствием малой величины внешнего магнитного поля, которое не может удерживать частицы от движения в радиальном направлении, вызванного силами пространственного заряда. Динамика пучка с ВК в данном случае преимущественно проходит в поперечном направлении. В случае большей величины внешнего магнитного поля (рис. 1, б) движение крупных частиц, в основном, происходит в продольном направлении. Такое поведение объясняется влиянием внешнего магнитного поля, которое не позволяет пучку расширяться и двигаться в поперечном направлении, поэтому виртуальный катод в этом случае сосредоточен около оси системы и имеет поперечный размер, не превышающий начальный радиус пучка. Более того, при больших магнитных полях поперечный размер области, отражающей от себя электроны (то есть ВК, которому также соответствует наиболее плотный сгусток электронов), значительно меньше начального радиуса пучка за счет сильного сжатия потока во внешнем магнитном поле. Основная часть пространственного заряда в системе, как в случае малого, так и в случае большого магнитного поля, сосредоточена в области ВК, что является следствием потери электронами энергии при приближении к ВК за счет торможения в потенциальной яме, образованной ВК.

На рис. 2 приведены зависимости нормированного числа крупных частиц, покидающих пространство дрейфа, от безразмерного тока пучка α . Кривая 1 на рисунках, соответствующая числу частиц, покидающих систему через входной электрод, ведет себя одинаково как в случае малого (рис. 2, а), так и в случае большого (рис. 2, б) магнитного поля. При токе пучка меньшем критического значения $\alpha < \alpha_{кр}$, при котором в системе образуется нестационарный ВК (величина $\alpha_{кр}$ обозначена стрелкой на рисунке), частицы не отражаются к входной плоскости; при $\alpha > \alpha_{кр}$ количество частиц, отражающихся обратно к плоскости инжекции, монотонно возрастает с увеличением тока пучка, асимптотически приближаясь к постоянному значению.

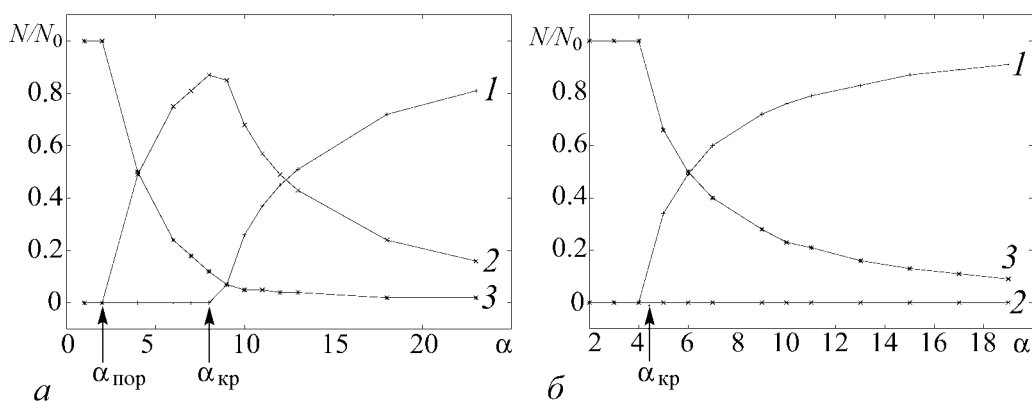


Рис. 2. Зависимости нормированного числа частиц N/N_0 , покидающих пространство дрейфа через боковую поверхность (кривая 2), через входной (кривая 1) и выходной (3) электроды, от безразмерного тока пучка α при $B = 0$ Гс (а) и $B = 256$ Гс (б); N_0 – полное число инжектированных в систему частиц

Кривая 3 на рисунках, соответствующая числу частиц, покидающих систему через выходной электрод, монотонно спадает с увеличением тока пучка. В случае большого магнитного поля (см. рис. 2, б) это уменьшение начинается при токе $\alpha > \alpha_{кр}$, так как при этом значении тока электронного пучка в системе образуется ВК, отражающий от себя часть потока к входному электроду и приводящий к уменьшению токопрохождения в системе. Поперечная динамика частиц, которой соответствует кривая 2, в этом случае отсутствует, и при любых значениях тока пучка число частиц, отражающихся к боковой поверхности пространства дрейфа, равно нулю. Таким образом, при большом магнитном поле частицы покидают систему через входной и выходной электроды, а количественное соотношение между ними определяется величиной тока инжектируемого пучка.

При малой величине внешнего магнитного поля (см. рис. 2, а) количество частиц, покидающих систему через выходной электрод (кривая 3), начинает монотонно уменьшаться при токе пучка меньшем критического значения, но большем некоторого порогового значения (обозначено на рисунке стрелкой): $\alpha_{пор} < \alpha < \alpha_{кр}$. При данном токе в системе начинается токооседание на боковую поверхность пространства дрейфа, которому соответствует кривая 2 на рис. 2, а, и не все заряженные частицы доходят до выходного электрода. Кривая 2 имеет два характерных участка: при $\alpha_{пор} < \alpha < \alpha_{кр}$ наблюдается монотонное увеличение числа частиц, покидающих систему через боковую поверхность; при $\alpha > \alpha_{кр}$ – монотонное уменьшение. Как следствие, существует некоторое значение тока пучка, при котором число частиц, уходящих через боковую поверхность, максимально. Увеличение числа частиц, оседающих на боковую поверхность при $\alpha < \alpha_{кр}$, объясняется следующим. С увеличением тока пучка в области вблизи плоскости инжекции, где тормозятся электроны и, как следствие, накапливается пространственный заряд, наблюдается рост суммарного заряда и увеличивается сила расталкивания электронов в поперечном направлении. Это приводит к возрастанию числа частиц, отражающихся к боковой поверхности пространства дрейфа и к уменьшению токопрохождения (кривая 3). При этом число частиц, отражающихся к плоскости инжекции, равно нулю, так как силы пространственного заряда оказываются недостаточными для того, чтобы отражать электроны обратно к плоскости инжекции, а достаточными только для существенного изменения их траекторий в пространстве дрейфа. Однако при достижении током пучка критического значения $\alpha_{кр}$ в системе формируется нестационарный ВК, который начинает отражать электроны к входному электроду. Это приводит к уменьшению токооседания на боковую поверхность пространства дрейфа и к еще более значительному уменьшению токопрохождения к выходной сетке. В конечном итоге, при больших токах пучка ($\alpha \gg \alpha_{кр}$) и малых магнитных полях практически все частицы отражаются к входному электроду, и лишь небольшая часть оседает на боковой поверхности пространства дрейфа, не удерживаясь малым магнитным полем.

На рис. 3 изображены конфигурационные портреты электронного потока для случаев малой и большой величин внешнего магнитного поля, построенные при токе пучка, превышающем критическое значение $\alpha_{кр}$. Следуя работе [21], точками показаны координаты и скорости частиц потока в некоторый фиксированный момент времени. Данная характеристика оказывается удобной и наглядной при рассмотрении процессов в электронном потоке в режиме формирования виртуального катода.

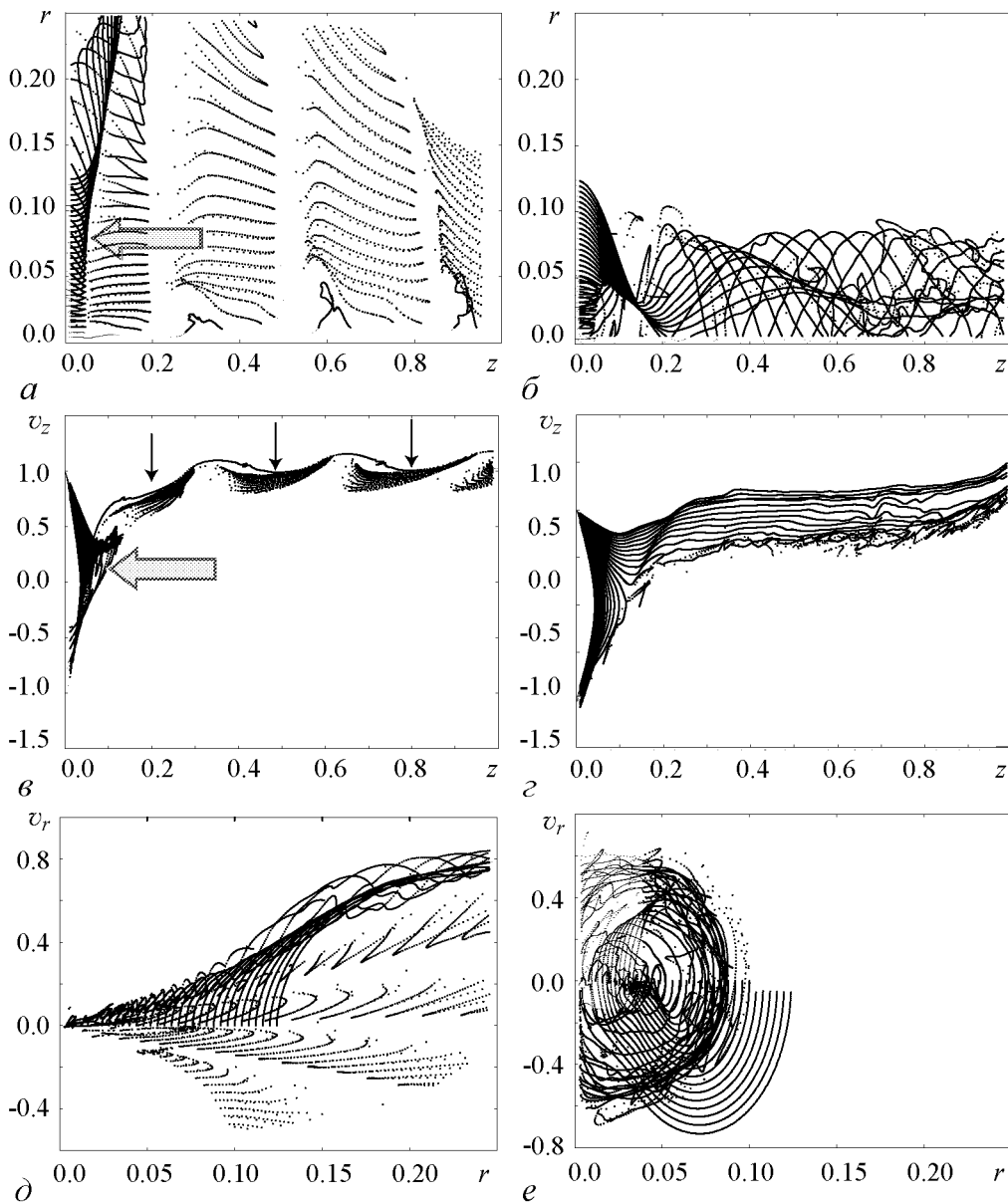


Рис. 3. Конфигурационные портреты сплошного электронного потока в безразмерных координатах при $B = 42$ Гс, $\alpha = 11$ (*a*, *в*, *д*) и $B = 170$ Гс, $\alpha = 7$ (*б*, *з*, *е*).

На рис. 3, *a* и рис. 3, *б* хорошо прослеживаются различия в динамике ВК при малом и значительном внешнем магнитном поле. На рис. 3, *a*, соответствующем слабому магнитному полю, частицы в области ВК (обозначен стрелкой) двигаются как в поперечном направлении, оседая на боковой поверхности пространства дрейфа, так и в продольном, либо отражаясь к входному электроду, либо проходя ВК и создавая пролетный ток (см. рис. 2, *a*). Наличие ВК в системе в случае малого магнитного поля демонстрирует также рис. 3, *в*, представляющий собой конфигурационный портрет пучка в координатах (v_z, z) , где v_z – продольная скорость электронов в си-

стеме. При приближении к плоскости ВК (обозначена толстой стрелкой) происходит торможение частиц в поле пространственного заряда ВК, а затем – отражение заряженных частиц от ВК. Таким образом, плотность пространственного заряда в области ВК максимальна, а слева от плоскости ВК существуют частицы как с положительной продольной скоростью, так и с отрицательной, что также прослеживается на рис. 3, в. Некоторые частицы способны преодолевать потенциальный барьер ВК в моменты времени, когда он минимален. Результатом является глубокая модуляция пролетного электронного потока по плотности за счет колебаний глубины потенциальной ямы ВК. Этот факт также иллюстрируют рис. 3, а и рис. 3, в в виде последовательности сгустков справа за плоскостью ВК (сгустки обозначены тонкими стрелками на рис. 3, в).

Для анализа поперечной динамики ВК на рис. 3, д и рис. 3, е приведены конфигурационные портреты пучка в безразмерных координатах (v_r, r) (где v_r – радиальная скорость заряженных частиц в системе) для малых и больших магнитных полей, соответственно. В случае слабого магнитного поля основная доля частиц имеет положительные поперечные скорости, возрастающие с ростом радиальной координаты. Плотность пространственного заряда в области ВК вдоль всего радиального направления приблизительно одинакова. Такой вид конфигурационного портрета (v_r, r) свидетельствует о высокой роли поперечной динамики заряженных частиц в формировании и динамике нестационарного ВК в слабом внешнем магнитном поле.

В случае большого магнитного поля (рис. 3, б) частицы либо отражаются от ВК к плоскости инжекции, либо проходят потенциальный барьер в продольном направлении к выходному электроду (см. рис. 2, а). Таким образом, поперечная динамика пространственного заряда в области ВК играет меньшую роль, чем в случае малого магнитного поля, а сам ВК сосредоточен около оси симметрии системы. Последнее определяется сильным сжатием пучка в большом магнитном поле при его инжекции в пространство дрейфа. Как следствие, основная часть проходящих через ВК частиц принадлежит внешним слоям сплошного пучка, в то время как частицы из внутренних слоев практически полностью отражаются от ВК обратно к плоскости инжекции.

За счет действия сильного магнитного поля в системе наблюдаются существенно нерегулярные пульсации проходящего пучка, но их амплитуда не превышает его начального радиуса. Нерегулярность пульсаций определяется сильным разбросом электронов по скоростям после прохождения нестационарного ВК. Этот факт хорошо отражает конфигурационный портрет пучка в координатах (v_r, r) (см. рис. 3, е). Из этого рисунка следует, что в системе приблизительно одинаковое число частиц с положительными и отрицательными поперечными скоростями, а радиус пучка в пространстве дрейфа ограничен, что свидетельствует о наличии циклотронного вращения электронов в пространстве дрейфа. Также на данном конфигурационном портрете наблюдается ВК – сгусток частиц, расположенный рядом с осью симметрии.

Формирование ВК также иллюстрирует рис. 3, з, на котором показан конфигурационный портрет пучка в координатах (v_z, z) при большом магнитном поле. Хорошо видно формирование ВК вблизи плоскости инжекции пучка. Также видно, что при большом магнитном поле, в отличие от слабого магнитного поля, не происходит

сильной модуляции потока по плотности, и в проходящем потоке электронных сгустков не наблюдается, в системе присутствует достаточно однородное распределение частиц вдоль продольной координаты. Это свидетельствует о наличии постоянного токопрохождения в системе.

Для иллюстрации процесса конкуренции двух типов динамики пространственного заряда в пучке электронов при увеличении магнитного поля на рис. 4 приведены зависимости нормированного числа частиц N/N_0 , покидающих пространство дрейфа через боковую поверхность и через входной и выходной электроды, от величины внешнего магнитного поля B . В случае слабого магнитного поля $B < 85.0$ Гс большое число частиц покидает систему через боковую поверхность пространства дрейфа, причем их количество монотонно уменьшается с увеличением величины магнитного поля. Одновременно монотонно возрастает число частиц, покидающих систему через входной и выходной электроды. При большой величине магнитного поля $B > 85.0$ Гс число частиц, выходящих из системы в поперечном направлении, близко к нулю; электроны преимущественно покидают систему через входной электрод, и в меньшей степени – через выходной.

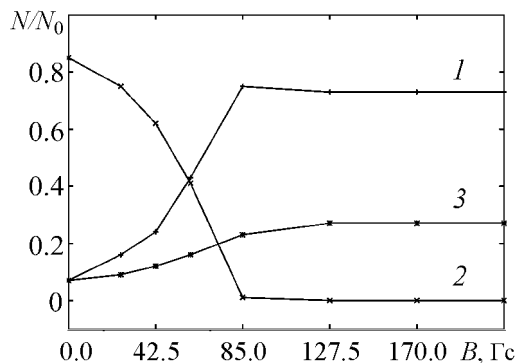


Рис. 4. Зависимости нормированного числа частиц N/N_0 , покидающих пространство дрейфа через боковую поверхность (кривая 2), через входной (кривая 1) и выходной (кривая 3) электроды, от величины внешнего магнитного поля B при $\alpha = 9$

На рис. 5 изображен конфигурационный портрет пучка в координатах (r, z) при значении индукции магнитного поля $B = 85.0$ Гс. Видно, что частицы из-

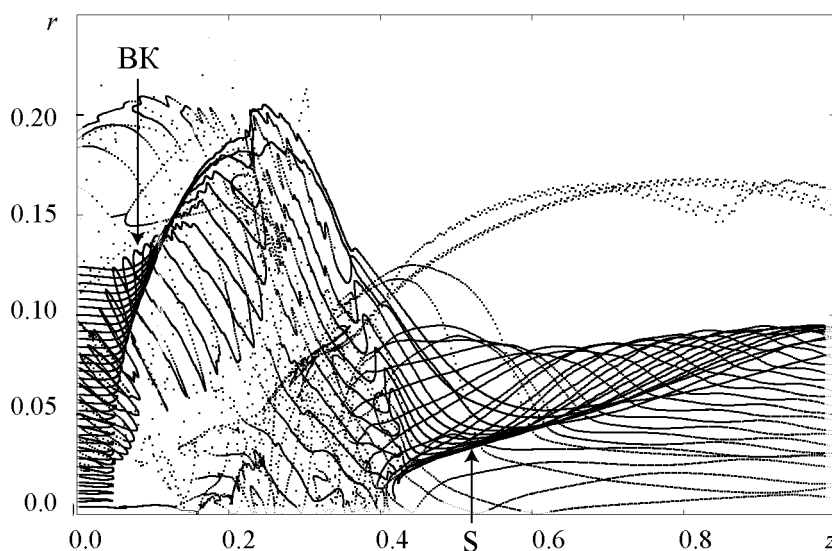


Рис. 5. Конфигурационный портрет сплошного электронного потока в безразмерных координатах при $B = 85.0$ Гс, $\alpha = 9$. За ВК справа наблюдается вторичный сгусток (S)

за действия магнитного поля не достигают боковой поверхности – это определяет отсутствие токооседания на нее. Однако ВК сильно растянут вдоль радиального направления, что говорит о все еще важной роли поперечной динамики пространственного заряда в области ВК при данном значении магнитного поля. При дальнейшем увеличении магнитного поля поперечная динамика будет все менее существенной; в случае, изображенном на рис. 3, б динамика пространственного заряда преимущественно протекает в продольном направлении.

На рис. 6 приведены зависимости нормированного числа частиц N/N_0 , покидающих пространство дрейфа через входной электрод, от безразмерного тока пучка α , построенные при трех значениях магнитного поля. Анализ кривых, полученных при различных магнитных полях показывает, что величина критического тока пучка, когда начинаются отражения частиц к входному электроду (образование ВК), существенно зависит от величины внешнего магнитного поля. Самый большой ток $\alpha_{кр1}$ для образования в системе ВК требуется при малом магнитном поле (кривая 1), а самый маленький $\alpha_{кр2}$ – при среднем (кривая 2). С дальнейшим увеличением магнитного поля критический ток возрастает, но остается меньше $\alpha_{кр1}$: $\alpha_{кр3} < \alpha_{кр1}$ (кривая 3). Более подробное исследование зависимости величины критического тока пучка от величины внешнего магнитного поля проведено в разделе 4.

При формировании ВК в рассматриваемой системе возможно появление вторичного сгустка электронов в пролетном потоке (показан на рис. 5 буквой S). Ранее данный эффект формирования вторичного сгустка был обнаружен для модели диода Пирса [30,31]. Образование вторичного сгустка связано с модуляцией электронов по скоростям в поле колеблющегося ВК, однако учет двумерных эффектов несколько изменяет картину его образования. Возникающий ВК начинает замедлять инжектируемые в систему электроны, а также изменять направления их скоростей. Наличие магнитного поля приводит к фокусировке электронов. Совместно с модуляцией скоростей электронов в поле ВК это приводит к модуляции электронов по плотности в пространстве дрейфа, что отражается в появлении вторичного сгустка электронов за ВК. Из-за действия сил пространственного заряда этот сгусток разрушается через некоторый интервал времени.

На плоскости параметров «внешнее магнитное поле B – безразмерный ток

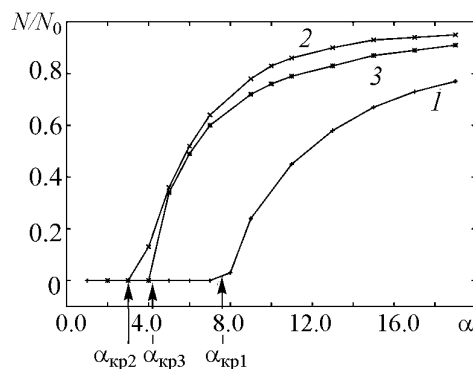


Рис. 6. Зависимости нормированного числа частиц N/N_0 , покидающих пространство дрейфа через входной электрод, от безразмерного тока пучка α при $B = 42.0$ Гс (кривая 1), $B = 128.0$ Гс (кривая 2) и $B = 256.0$ Гс (кривая 3)

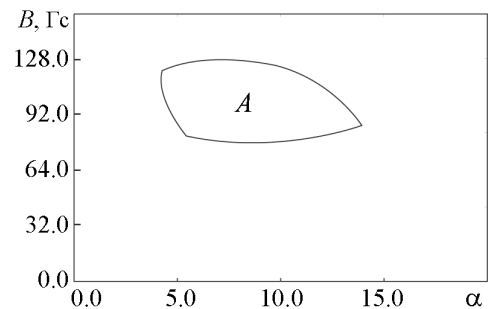


Рис. 7. Плоскость параметров «внешнее магнитное поле B – безразмерный ток пучка α ». Буквой A обозначена область, где наблюдается вторичный сгусток

пучка α » (рис. 7) была найдена область параметров системы, где справа за плоскостью ВК образуется вторичный сгусток. Наличие нижней границы области объясняется тем, что при малых величинах внешнего магнитного поля в системе преобладает поперечная динамика частиц и их движение к боковой поверхности, что не позволяет образоваться вторичному сгустку электронов (пролетный ток мал). Сильное магнитное поле, которому соответствует верхняя граница, приводит к значительным пульсациям пучка, которые мешают образованию вторичного сгустка. Левая граница области появляется вследствие того, что сгусток может сформироваться только за счет модуляции электронов по скоростям виртуальным катодом, но сам ВК образуется при превышении током критического значения; этот факт отражает левая граница. Вторичный сгусток разрушается вследствие действия сил пространственного заряда, возникающих в его области. Эти силы возрастают с ростом тока пучка, и при некотором значении тока, которому соответствует правая граница области, не позволяют сгустку сформироваться.

3. Формирование и динамика виртуального катода в трубчатом электронном потоке во внешнем магнитном поле

Рассмотрим теперь динамику ВК в трубчатом пучке электронов, находящемся во внешнем магнитном поле. Пучки с такой геометрией представляют большой интерес, так как наиболее часто используются на практике при экспериментах с генераторами на ВК. Поэтому важно провести исследования для трубчатого электронного потока, аналогичные проведенным для сплошного пучка, и выявить особенности, связанные с его геометрией. Будем рассматривать здесь пучок фиксированной толщины с помощью модели, описанной в разделе 1.

На рис. 8 приведены распределения плотности пространственного заряда в области виртуального катода, усредненные за характерный период колебаний виртуального катода, в случаях малой и большой величины внешнего магнитного поля при токе пучка, превышающем критическое значение. Как и в случае сплошного пучка, величина плотности пространственного заряда $\rho(r, z)$ в различных точках (r, z) пространства дрейфа пропорциональна интенсивности серого цвета. Максимум на распределении плотности пространственного заряда (темная область на рисунке) соответствует области виртуального катода. В слабом магнит-

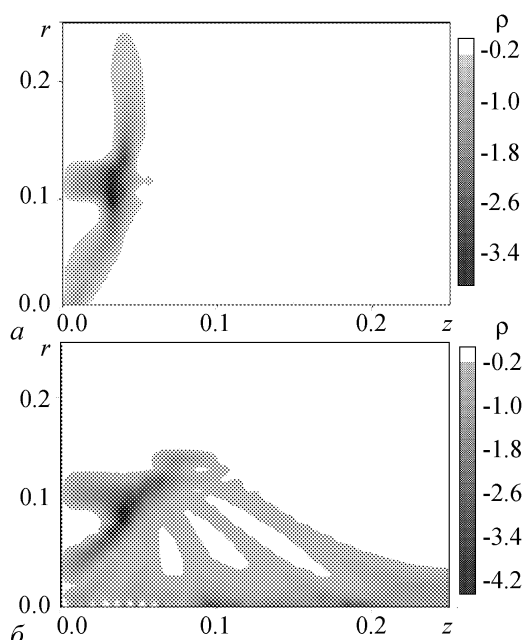


Рис. 8. Распределения плотности пространственного заряда в области виртуального катода, усредненные за характерный период колебаний ВК при $\beta_0 = 0.1$, $B = 42.0$ Гс, $\alpha = 24$ (а) и $B = 128.0$ Гс, $\alpha = 18$ (б).

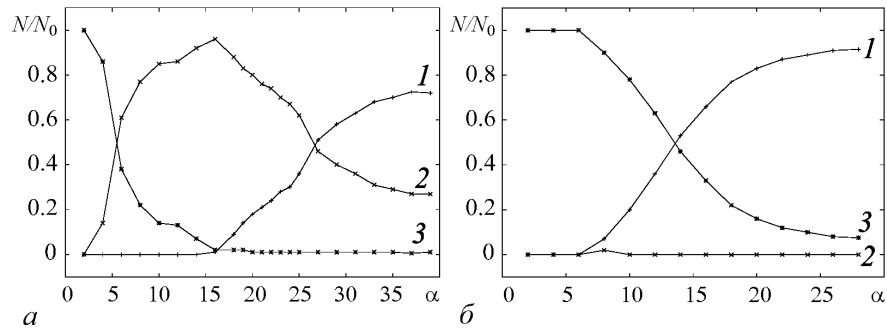


Рис. 9. Зависимости нормированного числа частиц N/N_0 , покидающих пространство дрейфа через боковую поверхность (кривая 2), через входной (кривая 1) и выходной (кривая 3) электроды, от безразмерного тока пучка α при $B = 0$ Гс (а) и $B = 128.0$ Гс (б); N_0 – полное число инжектированных в систему частиц

ном поле в трубчатом пучке (рис. 8, а), как и в случае сплошного пучка, ВК растянут вдоль всего радиального направления, причем его максимум сосредоточен в области инжекции пучка в пространство дрейфа. Также наблюдается разделение потока электронов на две части, одна из которых движется к боковой поверхности пространства дрейфа, а другая – по направлению к оси симметрии системы. С увеличением величины внешнего магнитного поля ограничивается поперечная динамика частиц в направлении боковой стенки системы (рис. 8, б). Как следствие, уменьшается токооседание на боковую поверхность пространства дрейфа, и динамика ВК начинает преимущественно проходить в продольном направлении, а также в направлении к оси симметрии системы. Сам виртуальный катод за счет сжатия пучка магнитным полем начинает прижиматься к оси симметрии системы.

На рис. 9 приведены зависимости нормированного числа крупных частиц N/N_0 , покидающих пространство дрейфа через боковую поверхность и через входной и выходной электроды, от безразмерного тока пучка α . Как и в случае сплошного пучка, в трубчатом электронном потоке с увеличением тока пучка уменьшается число частиц, покидающих систему через выходной электрод (кривые 3 на рис. 9). При малом магнитном поле до образования ВК в системе с ростом тока пучка увеличивается число частиц, оседающих на боковую поверхность пространства дрейфа, а после образования ВК – отражающихся обратно к плоскости инжекции (кривые 1 и 2 на рис. 9, а). В случае большого магнитного поля частицы покидают систему преимущественно через входной или выходной электроды в зависимости от величины тока пучка (рис. 9, б). Следует заметить, что зависимости нормированного числа частиц, покидающих пространство дрейфа через боковую поверхность и через входной и выходной электроды, от безразмерного тока пучка α и от величины внешнего магнитного поля B для трубчатого пучка имеют вид, аналогичный тем же зависимостям для сплошного пучка (см. раздел 2, рис. 2 и рис. 4). Это говорит о схожих механизмах конкуренции двух различных типов динамики в сплошном и трубчатом пучках.

На рис. 10 показаны конфигурационные портреты электронного потока в случаях малой и значительной величин внешнего магнитного поля при токе пучка, превышающем критическое значение $\alpha_{кр}$. Из сравнения конфигурационных портретов

пучка в координатах (r, z) для различных величин внешнего магнитного поля обнаруживается описанная выше зависимость динамики пучка от магнитного поля (см. рис. 8), а также эффекты, связанные с геометрией рассматриваемого потока. Вследствие трубчатой формы пучка с увеличением магнитного поля он сильнее прижимается к оси. Если в отсутствие магнитного поля он разделялся на две приблизительно равные части (рис. 10, *a*), одна из которых стремилась к боковой поверхности (верхняя стрелка на рисунке), а другая – к оси системы (нижняя стрелка на рисунке), то

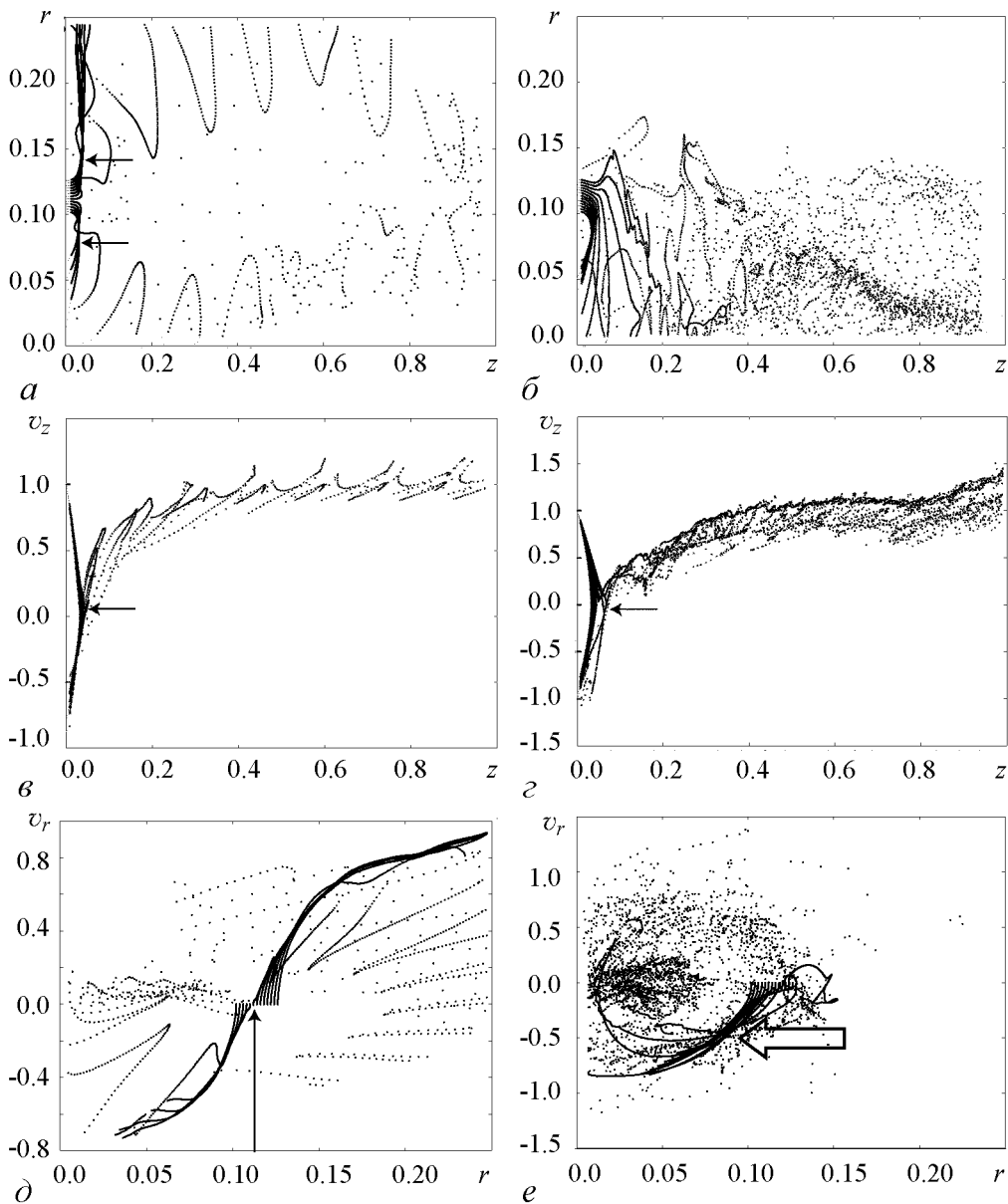


Рис. 10. Конфигурационные портреты трубчатого электронного потока в безразмерных координатах при $B = 42.0$ Гс, $\alpha = 24$ (*a*, *б*, *д*) и $B = 128.0$ Гс, $\alpha = 18$ (*б*, *з*, *е*)

с увеличением магнитного поля все большая часть пучка начинает стремиться к оси (рис. 10, б). Такое поведение трубчатого пучка при небольших величинах внешнего магнитного поля приводит к сложному распределению ВК вдоль радиальной оси и к его разделению на две части, а также – к усложнению формы потенциального барьера ВК. С увеличением величины магнитного поля при том же токе пучка плотность нижней части ВК начинает возрастать, и, в конце концов, верхняя часть исчезает, переходя полностью в нижнюю. Описанное поведение пучка является следствием его формы, а также наличия поперечной динамики частиц в системе. При больших величинах внешнего магнитного поля, когда поперечная динамика отсутствует, деления пучка не наблюдается.

На рис. 10, д, представляющем собой конфигурационный портрет находящегося в слабом магнитном поле пучка в координатах (v_r, r) , также наблюдается деление пучка и ВК на две части (координата деления r обозначена стрелкой). Справа от точки деления частицы пучка движутся с положительными поперечными скоростями, а слева – с отрицательными. При большом магнитном поле (рис. 10, е) основная часть частиц движется с $v_r < 0$, а сам пучок по радиальной координате не выходит за границу, которую он имел на входе в систему. Это приводит к формированию ВК ближе к оси симметрии системы (обозначен стрелкой на рисунке).

Конфигурационные портреты пучка в координатах (v_z, z) при различных величинах магнитного поля (рис. 10, в и рис. 10, з) имеют схожий вид. На них наблюдается наличие плоскости ВК, слева от которой частицы имеют продольные скорости разных знаков (плоскости ВК обозначены стрелками на рисунках). Однако при малом магнитном поле (см. рис. 10, в), по сравнению с большим, значительно меньше величина токопрохождения в системе, поэтому справа за плоскостью ВК имеется незначительное число частиц,двигающихся к выходному электроду, что также наблюдается и на рис. 10, а. Это является следствием преимущества поперечной динамики частиц в системе при малом магнитном поле. При большом магнитном поле (см. рис. 10, з) токопрохождение в системе гораздо существеннее (см. также рис. 9, б). Как и в случае сплошного электронного пучка, в трубчатом потоке при малом магнитном поле за плоскостью ВК наблюдается модуляция проходящего потока по плотности (см. рис. 10, в).

4. Критический ток сплошного и трубчатого пучков во внешнем магнитном поле

Критический ток электронного пучка, при котором в системе образуется нестационарный ВК, является экспериментально легко измеряемой и практически важной величиной. Только при превышении током пучка критического значения в СВЧ-приборах, основанных на колебаниях ВК, возможна генерация СВЧ-излучения. Напомним, что под критическим током электронного потока полагается такой ток, при котором в системе начинаются отражения частиц от плоскости ВК, а сам ВК начинает совершать колебания во времени. В предыдущих разделах была обнаружена зависимость величины тока пучка, при котором формируется ВК, от величины внешнего магнитного поля. В данном разделе проводится более подробное исследование обнаруженной зависимости, характерный вид которой определяется вышеописанными физическими процессами в пучке с ВК.

На рис. 11 приведены зависимости нормированной величины критического тока сплошного и трубчатого электронных пучков от величины внешнего магнитного поля. Видно, что качественно эти зависимости имеют подобный вид. На них наблюдается две различные характерные области изменения тока пучка при увеличении магнитного поля. В первой области, соответствующей малым величинам магнитного поля, наблюдается монотонное уменьшение критического тока пучка при увеличении индукции B . Во второй области, при больших внешних магнитных полях, критический ток электронного пучка монотонно растет с увеличением магнитного поля, асимптотически приближаясь к постоянной величине, которая определяется формулой (10). Как следствие, существует некоторое значение магнитного поля B_{\min} , при котором критический ток пучков минимален. Такое поведение зависимостей является результатом конкуренции двух типов динамики пучков, описанных в разделе 2 и 3 [32].

При малых индукциях магнитного поля $B < B_{\min}$, когда оно слабо удерживает электроны пучка, в системе преобладает поперечная динамика заряженных частиц. Такое поведение электронов приводит к существенному расширению пучка в радиальном направлении и является причиной уменьшения величины плотности пространственного заряда в области виртуального катода. Как следствие, при этом происходит увеличение тока пучка (критического тока), необходимого для достижения величины плотности заряда в пространстве взаимодействия, обеспечивающей начало поворота и отражения частиц в пучке, то есть формирование колеблющегося нестационарного виртуального катода. В трубчатом пучке дополнительное влияние на уменьшение плотности пространственного заряда в области ВК оказывает также его разделение на две части при малых индукциях магнитного поля. При магнитных полях $B \sim B_{\min}$ поведение системы определяется как поперечной, так и продольной динамикой заряженных частиц в области виртуального катода, что приводит к возникновению минимума на зависимости критического тока пучка от величины внешнего магнитного поля. Когда магнитное поле становится значительным ($B > B_{\min}$), поперечная динамика частиц практически ограничивается, а их отражение и поворот от ВК затрудняется, поэтому требуется некоторое увеличение тока пучка для начала формирования нестационарного ВК в системе.

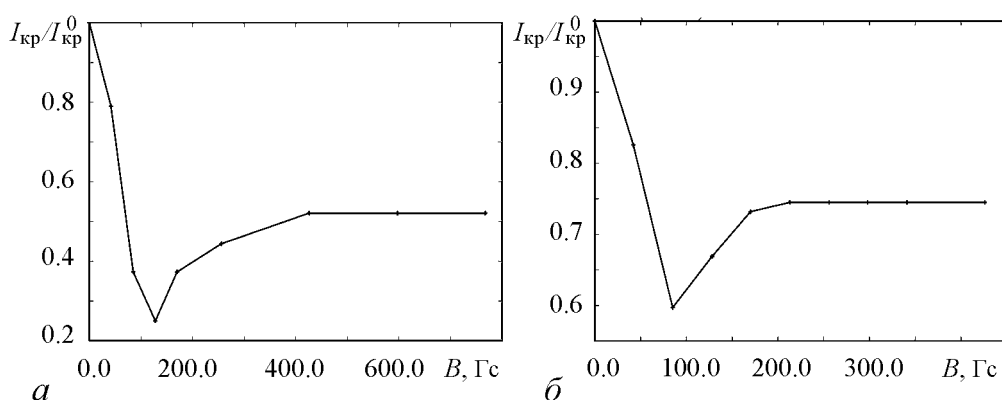


Рис. 11. Зависимости нормированной величины критического тока сплошного (а) и трубчатого (б) пучков I_{cr}/I_{cr}^0 (нормировка осуществляется на величину тока пучка при $B = 0$) от индукции внешнего магнитного поля

Заключение

Было проведено исследование формирования и динамики виртуального катода в сплошном и трубчатом электронных пучках во внешнем магнитном поле. Обнаружено сильное влияние внешнего магнитного поля на механизмы формирования, конфигурацию и динамику виртуального катода. Это объясняет зависимость различных характеристик генерации приборов, использующих колебания виртуального катода, от величины внешнего магнитного поля.

Обнаружено два качественно различных типа динамики виртуального катода, причем преимущество того или иного типа определяется величиной индукции внешнего магнитного поля. При малых магнитных полях в системе преобладает поперечная динамика, а при больших – продольная. Поведение сплошного электронного пучка во внешнем магнитном поле во многом подобно поведению трубчатого пучка, однако у последнего есть свои особенности. Они связаны со спецификой его геометрии, которая во внешнем магнитном поле приводит к разделению трубчатого пучка на две части, а следовательно, и к расщеплению виртуального катода.

Обнаруженная конкуренция двух типов динамики приводит к характерной зависимости критических токов сплошного и трубчатого электронных пучков от величины внешнего магнитного поля. При малых магнитных полях наблюдается монотонное уменьшение критических токов пучков с увеличением индукции, а при больших – монотонный рост. Как следствие, имеется оптимальная величина магнитного поля, при которой критические токи пучков минимальны.

Работа поддержана РФФИ (проект 07-02-12071-офи), CRDF (проект REC-006), Президентской программой поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-355.2008.2) и программой поддержки молодых докторов наук (проект МД-1884.2007.2), а также ФНП «Династия».

Библиографический список

1. *Granatstein V.L., Alexeff I.* High Power Microwave Sources. Artech House Microwave Library. 1987.
2. *Дубинов А.Е., Селемир В.Д.* Электронные приборы с виртуальным катодом // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47. С. 575.
3. *Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. В 2 т. Т. 2. М.: Физматлит, 2004.
4. *Афанасьева В.В., Лазерсон А.Г., Чемичев Г.В.* Пространственный хаос в системе электронный пучок – периодическое магнитное поле // Лекции по СВЧ электронике и радиофизике. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1992.
5. *Афанасьева В.В., Лазерсон А.Г.* Пространственный хаос и подавление параметрической неустойчивости в системе «электронный пучок – периодическое магнитное поле» // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20, вып. 12. С. 19.
6. *Калинин Ю.А., Лазерсон А.Г., Чемичев Г.В.* Сложная динамика непараксиальных электронных потоков в периодическом магнитном поле // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, № 4. С. 32.

7. *Nikolov N.A., Kostov K.G., Spassovsky I.P., Spassov V.A.* High-power microwave generation from virtual cathode in foilless diode (vircator) // *Electronics Letters*. 1988. Vol. 24. P. 1445.
8. *Kostov K.G., Nikolov N.A., Spassovsky I.P., Spassov V.A.* Experimental study of virtual cathode oscillator in uniform magnetic field // *Appl. Phys. Lett.* 1992. Vol. 60. P. 2598.
9. *Kostov K.G., Nikolov N.A., Spassov V.A.* Excitation of transverse electric modes in axially extracted virtual cathode oscillator // *Electronics Letters*. 1993. Vol. 29. P. 1069.
10. *Kostov K.G., Nikolov N.A.* Microwave generation from an axially extracted virtual cathode oscillator with a guide magnetic field // *Phys. Plasmas*. 1994. Vol. 1. P. 1034.
11. *Kostov K.G., Yovchev I.G., Nikolov N.A.* Numerical investigation of microwave generation in foilless diode vircator // *Electron Letters*. 1999. Vol. 35. P. 1647.
12. *Егоров Е.Н., Храмов А.Е.* Исследование хаотической динамики в электронном пучке с виртуальным катодом во внешнем магнитном поле // *Физика плазмы*. 2006. Т. 32. С. 742.
13. *Калинин Ю.А., Короновский А.А., Храмов А.Е., Егоров Е.Н., Филатов Р.А.* Экспериментальное и теоретическое исследование хаотических колебательных явлений в нерелятивистском электронном потоке с виртуальным катодом // *Физика плазмы*. 2005. Т. 31. С. 1009.
14. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Morozov M., Mushtakov A.V.* Effect of external magnetic field on critical current for the onset of virtual cathode oscillations in relativistic electron beams // *Phys. Lett. A*. 2008. Vol. 372. P. 876.
15. *Кузелев М.В., Рухадзе А.А.* Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. М.: Наука, 1990.
16. *Рошаль А.С.* Моделирование заряженных пучков. М.: Атомиздат, 1979.
17. *Birdsall C.K., Langdon A.B.* Plasma physics, via computer simulation. NY: McGraw-Hill, 1985.
18. *Алямовский И.В.* Электронные пучки и электронные пушки. М.: Сов. радио, 1966.
19. *Tsimring S.E.* Electron beams and microwave vacuum electronics. John Wiley and Sons. Inc., Hoboken, New Jersey, 2007.
20. *Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. В 2 т. Т. 1. М.: Физматлит, 2003.
21. *Селемир В.Д., Алёхин Б.В., Ватрунин В.Е., Дубинов А.Е., Степанов Н.В., Шамро О.А., Шибалко К.В.* Теоретические и экспериментальные исследования СВЧ-приборов с виртуальным катодом // *Физика плазмы*. 1994. Т. 20. С. 689.
22. *Jiang W., Masugata K., Yatsui K.* Mechanism of microwave generation by virtual cathode oscillation // *Phys. Plasmas*. 1995. Vol. 2. P. 982.
23. *Анфиногентов В.Г., Храмов А.Е.* К вопросу о механизме возникновения хаотической динамики в вакуумном СВЧ генераторе на виртуальном катоде // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1998. Т. XLI. С. 1137.

24. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Исследование когерентных структур в электронном пучке со сверхкритическим током с помощью вейвлетной бикогерентности // *Физика плазмы.* 2002. Т. 28. С. 722.
25. *Егоров Е.Н., Калинин Ю.А., Левин Ю.И., Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Вакуумные генераторы широкополосных хаотических колебаний на основе нерелятивистских электронных пучков с виртуальным катодом // *Изв. РАН, сер. физич.* 2005. Т. 69. С. 1724.
26. *Егоров Е.Н., Калинин Ю.А., Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Процессы образования и нестационарная динамика виртуального катода в нерелятивистском электронном пучке в тормозящем поле (двумерное приближение) // *Известия вузов. Радиофизика.* 2006.
27. *Егоров Е.Н., Калинин Ю.А., Короновский А.А., Левин Ю.И., Храмов А.Е.* Исследование образования структур и хаотической динамики в нерелятивистском электронном пучке с виртуальным катодом в тормозящем поле // *Радиотехника и электроника.* 2006. Т. 51. С. 1.
28. *Диденко А.Н. Рациков В.И.* Генерация мощных СВЧ колебаний в системах с виртуальным катодом // *Физика плазмы.* 1992. Т. 18. С. 1182.
29. *Рухадзе А.А., Богданкевич Л.С., Росинский С.Е., Рухлин В.Г.* Физика сильноточных релятивистских пучков. М.: Атомиздат, 1980.
30. *Анфиногентов В.Г.* Хаотические колебания в электронном потоке с виртуальным катодом // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1994. Т. 2. С. 69.
31. *Анфиногентов В.Г.* Взаимодействие когерентных структур и хаотическая динамика в электронном потоке с виртуальным катодом // *Письма в ЖТФ.* 1995. Т. 21. С. 70.
32. *Морозов М.Ю., Храмов А.Е.* Влияние внешнего магнитного поля на величину критического тока электронного пучка, при котором формируется виртуальный катод // *Физика плазмы.* 2007. Vol. 33. С. 610.

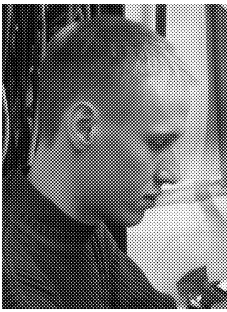
*Саратовский государственный
университет*

*Поступила в редакцию 4.02.2008
После доработки 24.06.2008*

EXTERNAL MAGNETIC FIELD INFLUENCE ON THE FORMING AND DYNAMICS OF VIRTUAL CATHODE

S.A. Kurkin, A.A. Koronovskii, A.E. Hramov

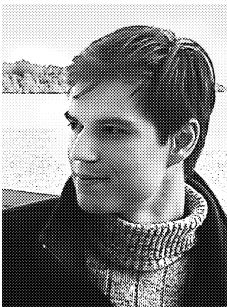
The results of investigation of virtual cathode mechanisms forming and its dynamics in the context of 2-dimensional model are presented. There were considered entire and tubular electron beams in external axial magnetic field. Two different types of virtual cathode dynamics were discovered. The value of external magnetic field determines a dominant type of dynamics. Therefore the current critical value (when virtual cathode arises in a beam) depends on external magnetic field value.



Куркин Семён Андреевич – родился в Саратове (1986). Окончил с отличием факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского по специальности радиофизика и электроника (2008). В данный момент является аспирантом и ассистентом кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Имеет 2 публикации в центральных реферируемых журналах, участник Всероссийских и Международных конференций. Область научных интересов – исследование систем с интенсивными пучками заряженных частиц, изучение нелинейной динамики виртуального катода, а также генераторов, основанных на колебаниях виртуального катода (виркаторов).
E-mail: KurkinSA@nonlin.sgu.ru



Короновский Алексей Александрович – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995), кандидат физико-математических наук (1997). Доцент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой деятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. Автор ряда статей в центральной печати, а также монографий (в соавторстве) «Нелинейная динамика в действии» и «Непрерывный вейвлетный анализ», вышедших в Издательстве ГосУНЦ «Колледж».
E-mail: alkor@nonlin.sgu.ru



Храмов Александр Евгеньевич – окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1996). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1999) и доктора (2006) физ.-мат. наук. Профессор, заместитель заведующего кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов – радиофизика в той ее части, которая связана со взаимодействием свободных электронов с электромагнитными полями, нелинейная динамика распределенных активных сред, методы анализа и моделирования динамических систем. Опубликовал в соавторстве с чл.-корр. РАН, профессором Д.И. Трубецковым книгу «Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков» (Т. 1, М.: Физматлит, 2003; Т. 2, М.: Физматлит, 2004) и в соавторстве с доцентом А.А. Короновским монографии «Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения» (Москва: Наука, Физматлит, 2003) и «Непрерывный вейвлетный анализ в приложениях к задачам нелинейной динамики» (Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2002).
E-mail: aeh@nonlin.sgu.ru