



## МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ СИНХРОННЫХ РЕЖИМОВ В АНСАМБЛЯХ НЕИДЕНТИЧНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ:

### Два элемента

*А.К. Крюков, Г.В. Осипов, А.В. Половинкин*

Изучается синхронизация в системе двух связанных неидентичных осцилляторов Бонхоффера–ван дер Поля. Доказано сосуществование двух синхронных режимов в системе. Рассмотрены механизмы возникновения и исчезновения синхронных режимов. Исследовано влияние флуктуаций на синхронные режимы. Обнаружено, что шум может приводить к следующим явлениям: срыву синхронизации и возникновению биений; флуктуационно-индуцированному устранению бистабильности; флуктуационно-индуцированной перемежаемости синхронных режимов без срыва синхронизации.

*Ключевые слова:* Синхронизация, мультистабильность, синхронный режим, численные методы, моделирование, стохастическая система, ФитцХью–Нагумо, Бонхоффер–ван дер Поля.

### Введение

Коллективные эффекты играют серьезную роль в поведении больших ансамблей элементов, будь то биологические, механические, лазерные или электрические системы [1–6]. Однако изучение механизмов и закономерностей, обуславливающих такие эффекты, сразу на больших ансамблях (в общем случае – нелинейных систем) представляет собой чрезвычайно сложную задачу. Тем важнее случаи, когда то или иное явление, оказывающее влияние на поведение больших ансамблей, проявляется в полной мере и на относительно малом количестве элементов. К таким случаям относится и эффект мультистабильности (то есть сосуществования в фазовом пространстве множества аттракторов) в ансамблях неидентичных осцилляторов<sup>1</sup>. Мультистабильность может иметь место в системах, состоящих как из малого числа (двух-трех) взаимосвязанных элементов, так и в больших ансамблях – цепочках и решетках. В этой работе рассматривается система из двух связанных осцилляторов Бонхоффера–ван дер Поля. Модель Бонхоффера–ван дер Поля – система

<sup>1</sup>Ограничимся рассмотрением случая, когда мультистабильность является эффектом ансамбля. То есть мультистабильность возникает вследствие взаимодействия осцилляторов, для каждого из которых в отсутствие связи характерен единственный режим колебаний.

второго порядка, демонстрирующая множество эффектов, присутствующих в ансамблях нейроноподобных элементов. В работе рассматриваются сценарии возникновения и разрушения синхронных режимов, а также переключения между режимами под влиянием шумов.

## 1. Модель

Система Бонхоффера–ван дер Поля [13] (иногда называемая системой Фитц Хью–Нагумо) часто применяется для моделирования нейронных сетей и генераторов ритма сердца [14]. Динамика цепочки локально диффузионно связанных неидентичных осцилляторов Бонхоффера–ван дер Поля описывается уравнениями

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x}_j = x_j - \frac{x_j^3}{3} - y_j + \beta(x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}), \\ \dot{y}_j = (x_j + a_j), \\ j = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $\beta$  – параметр связи;  $\varepsilon$  – малая величина;  $a_j$  – параметр, отвечающий за период и симметрию колебаний;  $N$  – количество элементов.

## 2. Один элемент

Один элемент описывается системой уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = x - \frac{x^3}{3} - y = F(x, y), \\ \dot{y} = (x + a) = G(x, y), \\ |a| < 1. \end{cases} \quad (2)$$

Система (2) имеет неустойчивое состояние равновесия (фокус при  $a > \sqrt{1 - 2\sqrt{\varepsilon}}$  или узел при  $a < \sqrt{1 - 2\sqrt{\varepsilon}}$ ) и устойчивый предельный цикл. Малость параметра  $\varepsilon$  обуславливает наличие быстрых и медленных движений в элементе.

Типичный фазовый портрет для одного элемента показан на рис. 1, *а*.  $h_-$  и  $h_+$  – устойчивые участки кривой медленных движений,  $h_0$  – неустойчивый участок. Для удобства описания динамики участок предельного цикла, лежащий в окрестности  $h_-$ , будем называть пассивной фазой, участок в окрестности  $h_+$  – активной фазой. Переход из пассивной фазы в активную и обратно будем называть спайком<sup>2</sup>.

На рис. 1, *б* показан предельный цикл для рассмотренной далее упрощенной модели двух связанных элементов, в которой нелинейная функция в правой части (2) заменена кусочно-линейной аппроксимацией, а параметр  $\varepsilon$  положен равным нулю.

<sup>2</sup>Использование понятий спайка, а также пассивной и активной фаз обусловлено возможностью применения полученных результатов в нейробиологии.

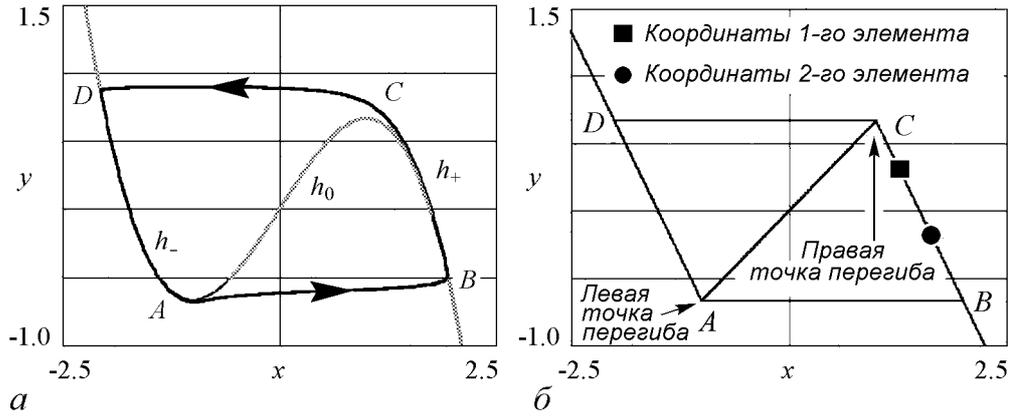


Рис. 1. *a* – Типичный фазовый портрет для одного элемента. Показана кривая медленных движений и предельный цикл. *б* – Взаимное расположение двух элементов на цикле в упрощенной модели (оба в активной фазе)

### 3. Два связанных элемента

Рассмотрим два связанных элемента Бонхоффера–ван дер Поля

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \dot{x}_1 = F(x_1, y_1) + \beta(x_2 - x_1), \\ \dot{y}_1 = (x + a_1), \\ \varepsilon \dot{x}_2 = F(x_2, y_2) + \beta(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_2 = (x + a_2), \\ F(x_j, y_j) = x_j - \frac{x_j^3}{3} - y_j, \quad j = 1, 2. \end{array} \right. \quad (3)$$

В компьютерных экспериментах было показано, что в этой системе при некоторых значениях параметров существуют два устойчивых предельных цикла. Первый соответствует синфазному синхронному режиму (осциллограмма приведена на рис. 2, *a*), второй – противофазному (осциллограмма на рис. 2, *б*). Будем считать, что два элемента синхронизованы синфазно, если для межспайкового интервала  $\tau_{12}$  выполняется следующее неравенство:  $\tau_{12} \equiv t_2 - t_1 \ll T$ , где  $t_j$  – время перехода  $j$ -го элемента из пассивной фазы в активную,  $T$  – период синхронного режима. Если же  $\tau_{12} \equiv t_2 - t_1 \sim T/2$ , то элементы синхронизованы в противофазе. Реализация в системе того или иного синхронного режима зависит от начальных условий.

Для аналитического доказательства сосуществования синфазного и противофазного синхронных режимов в цепочке модель (3) можно упростить. Для этого нужно положить  $\varepsilon = 0$  и заменить нелинейную функцию  $F(x_j, y_j)$  на ее кусочно-

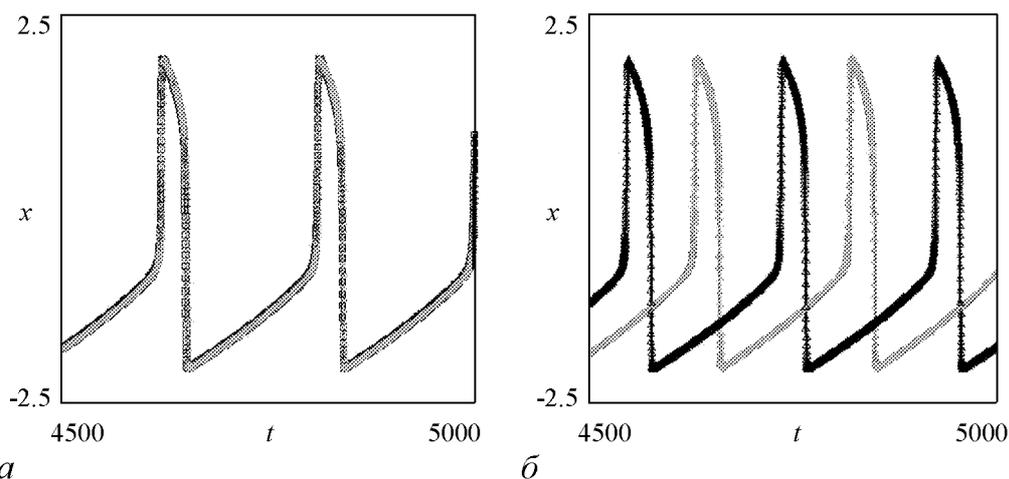


Рис. 2. Осциллограммы элементов  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  в синфазном (а) и противофазном (б) режимах  
линейную аппроксимацию

$$F = \begin{cases} \frac{-4}{3}x_j - 2 - y_j, & \text{для } x_j \leq -1, \\ \frac{2}{3}x_j - y_j, & \text{для } -1 < x_j < 1, \\ \frac{-4}{3}x_j + 2 - y_j, & \text{для } x_j \geq 1. \end{cases} \quad (4)$$

Тогда получим кусочно-линейную систему второго порядка

$$\begin{cases} 0 = F(x_1, x_2, y_1, y_2) + \beta(x_2 - x_1), \\ \frac{dy_1}{d\tau} = x_1 + a_1, \\ 0 = F(x_1, x_2, y_1, y_2) + \beta(x_1 - x_2), \\ \frac{dy_2}{d\tau} = x_2 + a_2. \end{cases} \quad (5)$$

Характерное поведение каждого из элементов показано на рис. 1, б. Динамику связанных элементов удобно рассматривать, отмечая их взаимное положение на ветвях  $h_{\pm}$ . Тогда в данной системе возможны четыре случая взаимного расположения элементов на цикле:

- 1) «+ +» – оба элемента находятся в активной фазе (этот случай показан на рис. 1, б);
- 2) «+ -» – первый элемент расположен в активной фазе, второй – в пассивной;
- 3) «- +» – первый элемент расположен в пассивной фазе, второй – в активной;
- 4) «- -» – оба элемента находятся в пассивной фазе.

Для каждого из этих случаев система (5) имеет аналитическое решение. Например, для случая «- +» решение выглядит так:

$$y_1^{-+}(t) = \left[ \frac{1}{2}(y_1(t_0) - y_2(t_0)) + 2 - (a_1 - a_2)\bar{\beta} \right] \exp\left(-\frac{t - t_0}{2\bar{\beta}}\right) + \left[ \frac{1}{2}(y_1(t_0) + y_2(t_0)) - \frac{2}{3}(a_1 + a_2) \right] \exp\left(-\frac{3t - t_0}{4}\right) - 2 - \hat{\beta}a_2 + \hat{\beta}a_1, \quad (6)$$

$$y_2^{-+}(t) = \left[ \frac{1}{2}(y_2(t_0) - y_1(t_0)) - 2 + (a_1 - a_2)\bar{\beta} \right] \exp\left(-\frac{t - t_0}{2\bar{\beta}}\right) + \left[ \frac{1}{2}(y_1(t_0) + y_2(t_0)) - \frac{2}{3}(a_1 + a_2) \right] \exp\left(-\frac{3t - t_0}{4}\right) + 2 - \hat{\beta}a_2 + \hat{\beta}a_1, \quad (7)$$

где  $y_1(t_0), y_2(t_0)$  – начальные условия соответствующей кусочно-линейной аппроксимации,  $\bar{\beta} = 2/3 + \beta$  и  $\hat{\beta} = 4/3 + \beta$ . Сшивая решения с различных временных интервалов, можно получить состояние системы в произвольный момент времени по заданным начальным условиям.

С использованием (6) и (7) было построено отображение разности  $df(n+1) = y_2(t_{n+1}) - y_1(t_{n+1})$  в момент времени  $t_{n+1}$  (момент начала  $(n+1)$ -го прохождения предельного цикла) от такой же разности в момент  $t_n$  (момент начала  $n$ -го прохождения предельного цикла). Наличие неподвижной точки такого отображения означает существование синхронного режима с соответствующей разностью  $df$ . Для различных значений параметра связи были численно построены данные отображения (рис. 3).

Как видно из рис. 3, при малой связи в системе существует два различных синхронных режима – синфазный ( $y_2 - y_1 \approx 0$ ) и противофазный. При большой связи – только синфазный.

Для характеристики синхронного режима в исходной модели вычислялись частоты всех элементов. Частота элемента вычислялась как средняя частота генерации спайков в элементе.

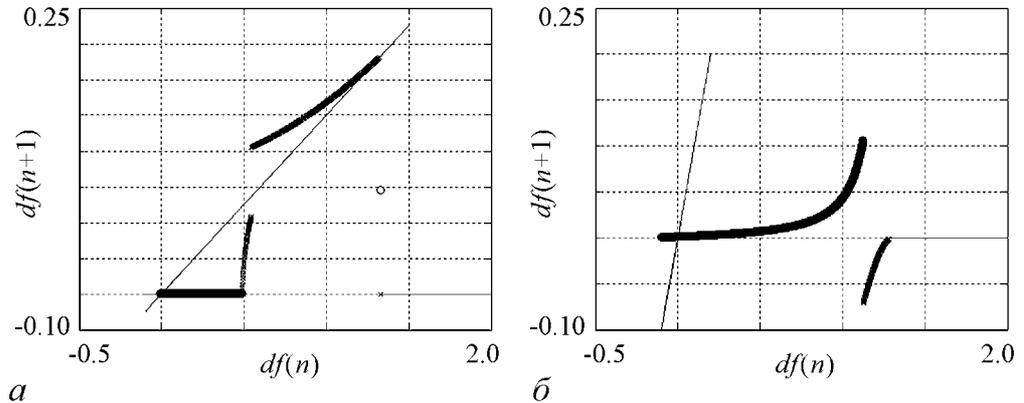


Рис. 3. Отображение разности  $df$  для слабой связи  $\beta = 0.002$  (а) и сильной связи  $\beta = 0.05$  (б) в системе двух элементов

Зависимость средних частот элементов исходной системы связанных осцилляторов Бонхоффера–ван дер Поля от параметра связи при синфазных и противофазных начальных условиях представлена на рис. 4. При слабой (но достаточной для синхронизации) связи оба эти режима устойчивы. Частота синфазного режима близка к частоте самого быстрого (высокочастотного) элемента цепочки и практически не зависит от параметра связи  $\beta$ . Частота противофазного синхронного режима при относительно слабой связи близка к собственной частоте самого низкочастотного элемента и уменьшается с увеличением связи. Численно показано, что, если параметр связи больше некоторого порогового значения, противофазный режим становится неустойчивым и в системе реализуется только синфазный синхронный режим.

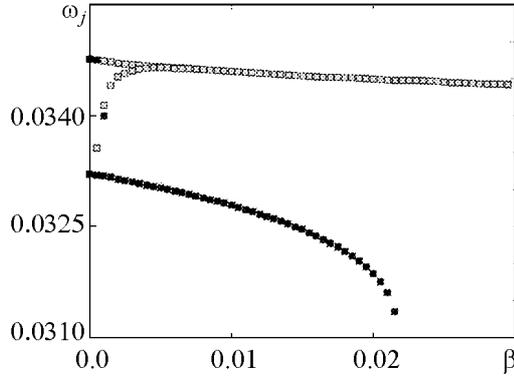


Рис. 4. Зависимость частот синхронизации от параметра связи при  $a_1 = 0.995$ ,  $a_2 = 0.985$ ,  $\varepsilon = 0.02$  (серые точки соответствуют синфазным начальным условиям, черные – противофазным)

**3.1. Возникновение и разрушение синхронных режимов.** Рассмотрим детально механизмы возникновения и разрушения синхронных режимов в ансамбле двух связанных нелинейных осцилляторов типа (3) с увеличением параметра связи  $\beta$  в случае  $a_1 = 0.995$ ,  $\varepsilon = 0.02$  при  $\Delta a = a_1 - a_2 = 0.001$  (случай относительно малых расстройок) и при  $\Delta a = 0.01$  (случай относительно больших расстройок).

В обоих случаях существует критическое значение связи между элементами  $\beta_{\min}^1$  такое, что при  $\beta < \beta_{\min}^1$  в системе наблюдаются биения – разность времен прохождения характерных значений (например, максимумов) координатами  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  или  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  непрерывно дрейфует, изменяясь от нуля до максимального значения.

Анализ отображений Пуанкаре и характеристических показателей Ляпунова, проведенный с использованием [9], позволяет заключить, что при изменении  $\beta$  в пределах от 0 до  $\beta_{\min}^1$  в системе реализуются различные сложные режимы. При этом в случае  $\Delta a = 0.001$  (рис. 5, а) с точностью до вычислительной погрешности по-

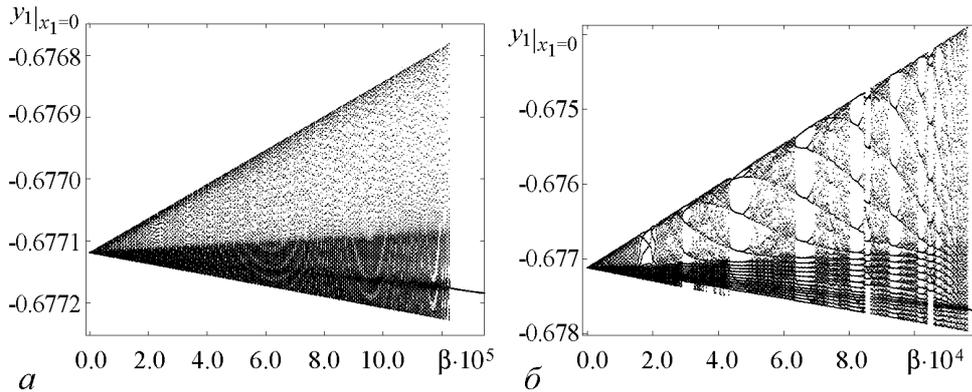


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма отображения Пуанкаре (значение  $y_1$  при переходе элемента из пассивной фазы в активную при  $x_1 = 0$  в зависимости от параметра  $\beta$ ) в системе связанных нелинейных осцилляторов ван дер Поля в области фазовых биений  $\beta < \beta_{\min}^1$ ;  $\Delta a = 0.001$  (а) и  $0.01$  (б)

казателей Ляпунова можно сделать вывод о хаотическом характере наблюдаемых колебаний. В случае  $\Delta a = 0.01$  (рис. 5, б) эти режимы являются достоверно хаотическими и перемежаются окнами  $n : m$  синхронизации парциальных элементов.

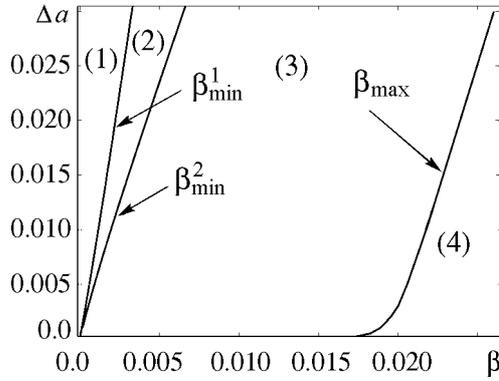


Рис. 6. Области: биений (1), моностабильности противофазного режима синхронизации (2), бистабильности противофазного и синфазного режимов (3), моностабильности синфазного режима синхронизации (4). Бифуркационные границы  $\beta_{\min}^1(\Delta a)$ ,  $\beta_{\min}^2(\Delta a)$ ,  $\beta_{\max}(\Delta a)$

С приближением  $\beta$  снизу к значению  $\beta_{\min}^1$  частота биений уменьшается, и при  $\beta_{\min}^1 = 1.23 \cdot 10^{-4}$  (в случае  $\Delta a = 0.001$ ) или при  $\beta_{\min}^1 = 1.16 \cdot 10^{-3}$  (в случае  $\Delta a = 0.01$ ) в системе возникает (с максимальным значением мультипликатора отображения Пуанкаре  $\mu \cong +1$ ) устойчивый предельный цикл, соответствующий 1 : 1 противофазному режиму синхронизации элементов (рис. 6).

Интересно отметить, что непосредственно перед установлением этого режима большую часть времени осцилляторы колеблются в режиме, близком к противофазному, и только малая часть времени приходится на режим, близкий к синфазному, и на переходный процесс между двумя режимами (рис. 7).

При дальнейшем увеличении  $\beta$  вплоть до значений  $\beta_{\min}^2 = 1.70 \cdot 10^{-4}$  (в случае  $\Delta a = 0.001$ ) или при  $\beta_{\min}^2 = 1.95 \cdot 10^{-3}$  (в случае  $\Delta a = 0.01$ ) в системе рождается (при возникновении также с максимальным значением мультипликатора  $\mu \cong +1$  отображения Пуанкаре) ещё один устойчивый предельный цикл, соответствующий уже синфазному режиму синхронизации и, таким образом, реализуется бистабильность синфазного и антифазного режимов синхронизации.

Отметим, что противофазный режим синхронизации возникает при меньших значениях параметра связи  $\beta$  по сравнению с синфазным. Данному факту можно

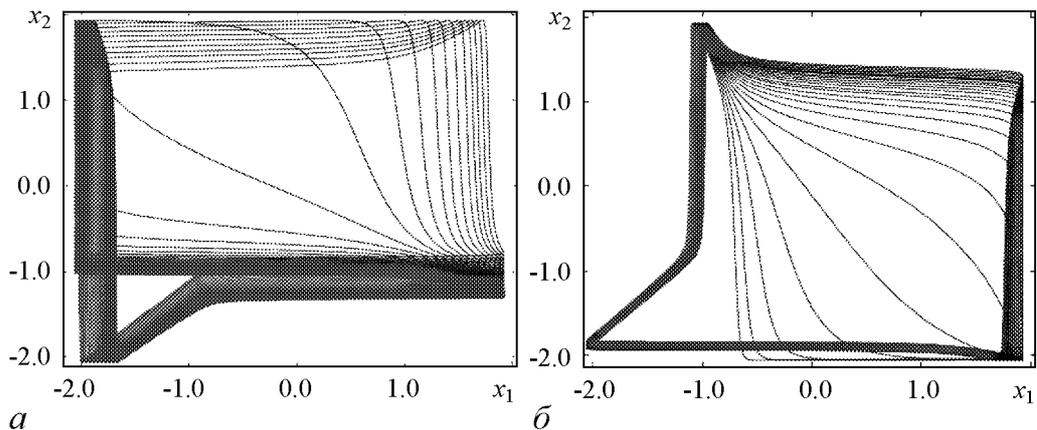


Рис. 7. Проекция фазовых траекторий на плоскость  $(x_1, x_2)$  в случае  $\Delta a = 0.001$  и  $\beta < \beta_{\min}^1$  на временных отрезках, соответствующих колебаниям, близким к противофазным – (а), и колебаниям, близким к синфазным – (б)

дать простую интерпретацию: за возникновение синхронизации «ответственно» линейное слагаемое  $\beta(x_j - x_i), j \neq i$ . В синфазном режиме типичные значения модуля разности  $x_j - x_i$  меньше, чем в противофазном, поэтому для заметного воздействия на систему требуются бóльшие значения параметра  $\beta$ .

При  $\beta = \beta_{\max} = 1.89 \cdot 10^{-2}$  (в случае  $\Delta a = 0.001$ ) предельный цикл, соответствующий противофазному режиму синхронизации исчезает в результате ( $\mu = -1$ )-бифуркации (вследствие слияния с седловым предельным циклом двукратного периода). В случае  $\Delta a = 0.01$  исчезновение предельного цикла, соответствующего противофазному режиму синхронизации, происходит при  $\beta = \beta_{\max} = 2.17 \cdot 10^{-2}$  в результате ( $\mu = +1$ )-бифуркации и, таким образом, при  $\beta > \beta_{\max}$  в любом случае в системе реализуется только синфазный режим синхронизации. Некоторые отличия случая относительно больших расстройек ( $\Delta a = 0.01$ ) связаны также с тем, что цикл, соответствующий противофазному режиму синхронизации, при определенных значениях параметров может претерпевать бифуркацию удвоения периода, однако, с точки зрения существования мультистабильных синхронных режимов, данный факт не является существенным, так как фазовые траектории цикла удвоенного периода проходят в малой окрестности исходного противофазного цикла периода  $T$ , не нарушая при этом факт существования бистабильности. Интересно отметить, что линии  $\beta_{\min}^1(\Delta a)$  и  $\beta_{\min}^2(\Delta a)$  на плоскости  $\beta, \Delta a$  близки к прямо пропорциональной зависимости, в то время как зависимость  $\beta_{\max}(\Delta a)$  является, безусловно, нелинейной.

**3.2. Смена динамических режимов в системе двух релаксационных осцилляторов в присутствии флуктуаций.** Для анализа влияния флуктуаций (реально существующих в любых физических и биологических системах) на смену динамических режимов в ансамбле двух связанных релаксационных осцилляторов Бонхоффера–ван дер Поля при различных значениях параметра  $\beta$  численно исследовались статистические характеристики решений системы (8), которая отличается от (3) заменой времени и добавлением независимых источников белого гауссова шума  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$  в правые части 1-го и 3-го уравнений,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - \frac{x_1^3}{3} - y_1 + \beta(x_2 - x_1) + \xi_1(t), \\ \dot{y}_1 &= \varepsilon(x_1 + a_1), \quad \langle \xi_i(t) \rangle = 0, \\ \dot{x}_2 &= x_2 - \frac{x_2^3}{3} - y_2 + \beta(x_1 - x_2) + \xi_2(t), \\ \dot{y}_2 &= \varepsilon(x_2 + a_1 - \Delta a), \quad \langle \xi_i(t)\xi_j(t + \tau) \rangle = D \delta_{ij} \delta(\tau), \end{aligned} \tag{8}$$

где  $D$  – интенсивность белого шума,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. Для фиксированных параметров  $\varepsilon, a_1$  и  $\Delta a$  использовались те же значения, что и в п. 3.1:  $\varepsilon = 0.02, a_1 = 0.995, \Delta a = 0.01$ .

Как показали результаты численного счета, при наличии флуктуаций биения в системе двух связанных релаксационных осцилляторов и, соответственно, несоответствие средних периодов колебаний 1-го и 2-го осцилляторов сохраняются и при  $\beta > \beta_{\min}^1$  (рис. 8, а, б).

Скорость возрастания среднего периода биений  $\langle T_b \rangle$  с ростом параметра  $\beta$  тем выше, чем меньше интенсивность шума. Так, при  $D = 10^{-8}$  величина  $\langle T_b \rangle$  возраста-

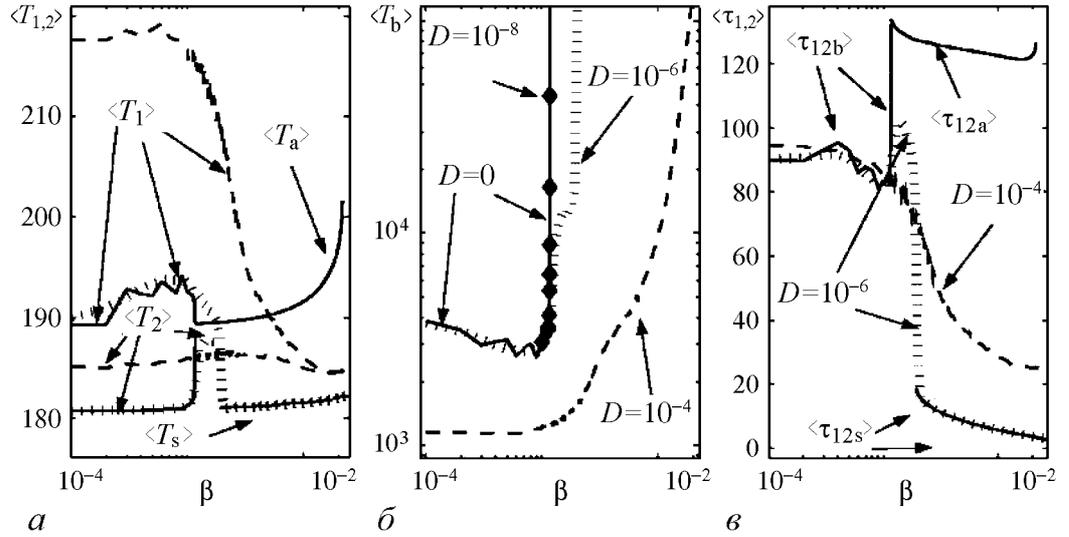


Рис. 8. Зависимости от параметра связи  $\beta$  средних периодов колебаний  $\langle T_{1,2} \rangle$  первого и второго осцилляторов (а), среднего периода биений  $\langle T_b \rangle$  (б), средней задержки  $\langle \tau_{12} \rangle$  момента возникновения спайка второго осциллятора относительно момента возникновения спайка первого осциллятора (в) при различных интенсивностях флуктуаций  $D$ : 0 – детерминированный случай (сплошная линия);  $10^{-8}$  (ромбы);  $10^{-6}$  (поперечные штрихи);  $10^{-4}$  (штриховая линия).  $\langle T_s \rangle$ ,  $\langle T_a \rangle$  – детерминированные периоды колебаний в синфазном и противофазном режиме синхронизации, соответственно.  $\langle \tau_{12s} \rangle$ ,  $\langle \tau_{12a} \rangle$  – детерминированные значения задержки в синфазном и противофазном режиме синхронизации, соответственно. В целях лучшей читаемости рисунков опущены зависимости  $\langle T_{1,2}(\beta) \rangle$  и  $\langle \tau_{12}(\beta) \rangle$  при  $D = 10^{-8}$ . Видно, что в случае  $D = 10^{-6}$  при  $\beta > \beta_{\min}^2$  зависимости  $\langle T_{1,2}(\beta) \rangle$  и  $\langle \tau_{12}(\beta) \rangle$  практически совпадают с соответствующими кривыми для детерминированного случая в синфазном режиме

ет до значений, превосходящих  $10^5$  при изменении  $\beta$  на практически неразличимом на рисунке интервале порядка  $10^{-5}$  справа от  $\beta_{\min}^1$ , при  $D = 10^{-6}$  этот интервал увеличивается до значений порядка  $\Delta\beta = 0.001$  и, наконец, при  $D = 10^{-4}$  занимает практически всю область от  $\beta_{\min}^1$  до  $\beta_{\max}$  (то есть включает диапазон значений  $\beta$ , в пределах которого реализуется бистабильность синфазного – противофазного режимов колебаний в отсутствие флуктуаций). Интересно отметить, что при наличии относительно больших флуктуаций ( $D = 10^{-4}$ ) средние периоды колебаний как первого, так и второго осциллятора существенно возрастают (почти на 16% у осциллятора с параметром  $a = 0.995$  при  $\beta < 10^{-3}$ ). Данный эффект связан с существенным изменением скорости движения изображающей точки осциллятора при флуктуационно-индуцированном отклонении от детерминированной траектории в область более медленного движения. Он аналогичен известному эффекту задержки распада неустойчивого состояния системы [10, 11] под воздействием флуктуаций.

Происходящие под воздействием шума переключения между синфазным и противофазным режимами синхронизации проявляются не только в явлении биений, но и в изменении среднего временного интервала между моментами активации элементов (моментами перехода  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  через значение  $x = 0$ ). На рис. 8, в изображена зависимость от силы связи  $\beta$  величины  $\langle \tau_{12} \rangle$  – среднего значения разности  $\tau_{12}$  момента перехода через 0 переменной  $x_1(t)$  и предшествующего перехода через 0 переменной  $x_2(t)$ . В отсутствие флуктуаций четко различаются: линия, отражающая

однозначную зависимость  $\langle \tau_{12} \rangle = \tau_{12b}$  в области биений  $(0, \beta_{\min}^1)$ , где значение  $\tau_{12}$  меняется с течением времени от 0 до  $T_2$ , поэтому  $\langle \tau_{12} \rangle \simeq T_2/2$ ; кривая зависимости  $\tau_{12}(\beta) = \tau_{12a}$  в области  $(\beta_{\min}^1, \beta_{\max})$ , где реализуется либо только противофазная синхронизация (при  $\beta_{\min}^1 < \beta < \beta_{\min}^2$ ), либо бистабильность синхронных режимов (при  $\beta_{\min}^2 < \beta < \beta_{\max}$ ); кривая зависимости  $\tau_{12}(\beta) = \tau_{12s}$  в области  $(\beta > \beta_{\min}^2)$ , где реализуется либо бистабильность синхронных режимов (при  $\beta_{\min}^2 < \beta < \beta_{\max}$ ), либо только синфазная синхронизация (при  $\beta > \beta_{\max}$ ).

Как видно из рис. 8, *а, в*, переключения между сосуществующими режимами синхронизации, вызванные шумом малой интенсивности ( $D \lesssim 10^{-6}$  для исследуемых значений детерминированных параметров) приводят к срыву менее устойчивого по отношению к флуктуациям противофазного режима синхронизации. В результате подавляющую часть времени реализуется более устойчивый синфазный режим синхронизации, что можно трактовать как флуктуационно-индуцированное устранение бистабильности шумом малой интенсивности. Отсутствие в случае  $D = 10^{-6}$  уже при  $\beta = 0.0025$  переключений между различными режимами синхронизации и, таким образом, высокую стабильность синхронного режима по отношению к слабым флуктуациям подтверждает гистограмма значений  $\tau_{12}$  (рис. 9, *а*). Наоборот, флуктуации относительно большой интенсивности ( $D \gtrsim 10^{-6}$ ) приводят к относительно быстрым срывам не только противофазного, но и более устойчивого синфазного режима синхронизации, как бы восстанавливая бистабильные свойства системы. При этом усредненная задержка  $\tau_{12}$  между спайками 1-го и 2-го элементов имеет величину, промежуточную между соответствующими значениями для синфазного и антифазного режимов синхронизации. Интересно отметить, что эта задержка может сохранять некоторое промежуточное значение и при значениях параметров, соответствующих отсутствию бистабильности синхронных режимов в детерминированном случае (в области  $\beta_{\min}^1 < \beta < \beta_{\min}^2$  при  $D \gtrsim 10^{-6}$ , а также при  $\beta > \beta_{\max}$ ,  $D \gtrsim 10^{-4}$ ).

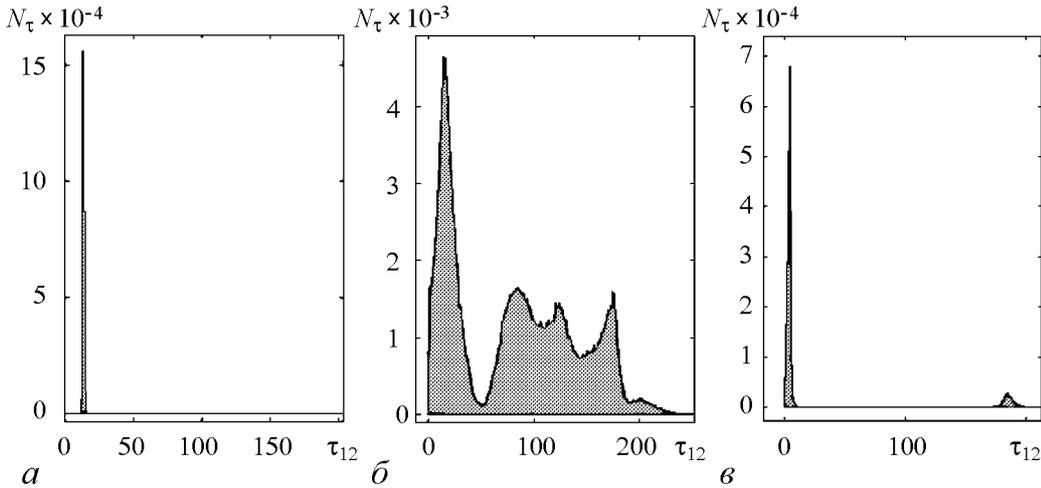


Рис. 9. Гистограммы значений задержки  $\tau_{12}$ : при  $D = 10^{-6}$  и  $\beta = 0.0025$  (*а*); при  $D = 10^{-6}$  и  $\beta = 0.0014$  (*б*); при  $D = 10^{-4}$  и  $\beta = 0.0227$  (*в*)

Чтобы разобраться в причинах данного явления, были построены гистограммы значений  $\tau_{12}$  при  $\beta = \beta_1 = 0.0014$ ,  $\beta_{\min}^1 < \beta_1 < \beta_{\min}^2$  в случае  $D = 10^{-6}$  (рис. 9, б), и при  $\beta = \beta_2 = 0.0227$ ,  $\beta_2 > \beta_{\max}$  в случае  $D = 10^{-4}$  (рис. 9, в). Как видно из этих рисунков, на гистограммах четко выделяются два максимума. Один из максимумов соответствует задержке  $\tau_{12}$ , характерной для существующего устойчивого при данных значениях параметров в детерминированном случае режима синхронизации (противофазного при  $\beta = \beta_1$  и синфазного при  $\beta = \beta_2$ ). Другой максимум находится вблизи значения  $\tau_{12}$ , характеризующего другой режим синхронизации при бифуркационных значениях параметров, связанных с исчезновением этого режима синхронизации (синфазного при  $\beta = \beta_{\min}^2$  и противофазного при  $\beta = \beta_{\max}$ ). Таким образом, при значениях параметров вне детерминированной области бистабильности синхронных режимов может наблюдаться индуцированная шумом бимодальность плотности вероятности распределения задержек  $\tau_{12}$ , свидетельствующая о *флуктуационно-индуцированной перемежаемости режимов синхронизации*. При  $\beta_{\min}^1 < \beta < \beta_{\min}^2$  флуктуационно-индуцированная перемежаемость сопровождается проскоками фазы и приводит, как уже отмечалось, к биениям. Однако в случае относительно большого шума ( $D = 10^{-4}$ ) флуктуационно-индуцированная перемежаемость режимов синхронизации наблюдается и при  $\beta > \beta_{\max}$ , когда биения отсутствуют, и средние частоты 1-го и 2-го осцилляторов практически совпадают (рис. 8, а, б). То есть в данном случае, в отличие от индуцированных шумом биений при малых значениях  $\beta$ , происходят индуцированные шумом переходы между режимами без нарушения взаимной синхронизации осцилляторов.

### Заключение

В ходе работы проанализирована система из двух связанных осцилляторов Бонхоффера–ван дер Поля. Экспериментально обнаружено, что при определенных значениях параметров в зависимости от начальных условий в системе могут устанавливаться синфазный и противофазный синхронные режимы. Аналитически доказано существование области параметров, соответствующих мультистабильности синхронных режимов. При сильной связи в системе реализуется только синфазный синхронный режим. При близких к нулю коэффициентах диффузионной связи  $\beta$  между элементами в ансамбле двух осцилляторов наблюдаются биения. При малых значениях параметра связи в системе возможны как хаотические колебания, так и  $(n : m)$ -синхронизация (в узких диапазонах параметра  $\beta$ ). При  $\beta = \beta_{\min}^1$  происходит рождение противофазного режима, а при  $\beta = \beta_{\min}^2 > \beta_{\min}^1$  – также и синфазного режима 1 : 1 синхронизации элементов.

При исследовании влияния флуктуаций на синхронные режимы обнаружено, что шум может приводить к срыву синхронизации и возникновению биений; к флуктуационно-индуцированному устранению бистабильности; к флуктуационно-индуцированной перемежаемости синхронных режимов без срыва синхронизации.

*Данная работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 08-02-01259-а, 08-02-92004 и 08-02-97049.*

## Библиографический список

1. *Maurer J. and Libchaber A.* // J.Phys (France) Lett. 1982. Vol. 41. P. 515.
2. *Brun E., Derighette B., Meier D., Holzner R., and Raveni M.* // J.Opt.Soc.Am. B. 1985. Vol. 2. P. 156.
3. *Dangoisse D., Glorieux P., and Hennequin D.* // Phys. Rev. A. 1987. Vol. 36. P. 4775.
4. *Thompson J.M.T. and Stewart H.B.* Nonlinear Dynamics and Chaos. Wiley, Chichester, 1986.
5. *Foss J., Longtin A., Mensour B., and Milton J.* // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76. P. 708.
6. *Simonotto E., Riani M., Seife C., Roberts M., Twitty J., and Moss F.* // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 1186.
7. *Bonhoeffer K.F.* // Naturwissenschaften. 1953. Vol. 40. P. 301.
8. *Torre V.* // J. Theor. Biol. 1976. Vol. 61. P. 55.
9. *Матросов В.В.* Динамика нелинейных систем. Программный комплекс для исследования нелинейных динамических систем с непрерывным временем. Н. Новгород, ННГУ, 2002.
10. *Mantegna R.N. and Spagnolo B.* // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 395, № 4. P. 563.
11. *Malakhov A.N. and Agudov N.V.* // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 60. P. 6333.

*Поступила в редакцию 15.08.2008*

*После доработки 1.12.2008*

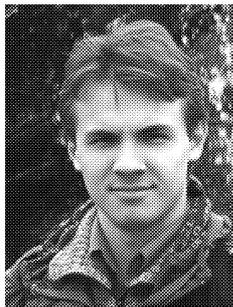
## VARIETY OF SYNCHRONOUS REGIMES IN ENSEMBLES OF NONIDENTICAL OSCILLATORS:

### Two coupled elements

*A.K. Kryukov, G.V. Osipov, A.V. Polovinkin*

We study synchronization of two coupled nonidentical Bonhoeffer–van der Pol oscillators. Coexistence of two different synchronous regimes is proved. Mechanisms of synchronous regimes origination and destruction are investigated. Fluctuations influence on synchronous regimes is considered. It is found that noise can cause: i) synchronization destruction and beating originations; ii) fluctuations-caused bistability destruction; iii) fluctuations-caused intermittency of synchronous regimes without synchronization destruction.

*Keywords:* Synchronization, multistability, synchronous regime, numerical methods, modeling, stochastic system, FitzHugh–Nagumo, Bonhoeffer–van der Pol.



*Крюков Алексей Константинович* – родился в 1984 году, окончил Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (2007). Аспирант кафедры теории управления и динамики машин факультета ВМК ННГУ. Область научных интересов: структуры синхронизации в нелинейных системах, моделирование динамики биологических сред. Стипендиат некоммерческого фонда «Династия» (2006). Имеет 12 публикаций (в соавторстве) в том числе 2 журнальных. Лауреат стипендии имени академика Г.А. Разуваева (2008).

E-mail: [alkryukov@gmail.com](mailto:alkryukov@gmail.com)

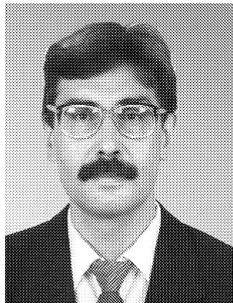
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23



*Осипов Григорий Владимирович* – родился в Горьком (1960), окончил Горьковский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (1982). В 1986–1988 годах учился в аспирантуре Научного совета по комплексной проблеме «Кибернетика» (НСК) АН СССР. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в НСК (1988) по математическому моделированию и доктора физико-математических наук в ННГУ (2004) по радиофизике. С 1988 года работает в ННГУ, с 2007 года в качестве заведующего кафедрой «Теории управления и динамики машин» факультета ВМК. Один из авторов монографий «Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации» и «Synchronization in oscillatory networks». Опубликовал 120 научных статей (в том числе 2 обзора) по теории колебаний и волн и математическому моделированию.

E-mail: [osipov@vmk.unn.ru](mailto:osipov@vmk.unn.ru)

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23



*Половинкин Андрей Владимирович* – родился в 1959 году, окончил Нижегородский государственный университет в 1981 году. Докторант кафедры математики радиофизического факультета ННГУ, кандидат физико-математических наук (1987). Область научных интересов: флуктуационно-индуцированные процессы в нелинейных системах и неоднородных средах. Соавтор свыше 40 научных и 5 учебно-методических работ. Участник российских и международных научных проектов.

E-mail: [polovinkin@rf.unn.ru](mailto:polovinkin@rf.unn.ru)

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23