



УПРАВЛЕНИЕ ХАОСОМ В СИСТЕМЕ ИКЕДЫ

Упрощенная модель в виде точечного отображения

Н.М. Рыскин, О.С. Хаврошин

Рассматривается метод управления хаосом в кольцевом резонаторе, содержащем среду с кубической фазовой нелинейностью (система Икеды). Метод основан на введении дополнительного кольца обратной связи, параметры которого подбираются таким образом, чтобы спектральные компоненты сигнала на основной частоте, прошедшие по двум ветвям обратной связи, оказывались в фазе, а на паразитных частотах – в противофазе, и таким образом подавляли бы друг друга. В пределе, когда дисперсией нелинейной среды можно пренебречь, для описания динамики системы получено точечное отображение, являющееся модификацией известного отображения Икеды. Приведены результаты аналитического и численного исследования этого отображения при различных значениях управляющих параметров. Показано, что предложенный метод позволяет подавить автомодуляционные колебания и обеспечить устойчивость периодических режимов в широком диапазоне параметров.

Ключевые слова: Управление хаосом, кольцевой нелинейный резонатор, запаздывающая обратная связь, точечное отображение, бифуркация.

Введение

В последнее время интерес привлекает проблема управления хаосом. Впервые это понятие было сформулировано в работе [1], где была выдвинута идея стабилизации неустойчивых периодических орбит путем малых контролируемых воздействий. Таким образом, можно реализовать устойчивое периодическое поведение в той области параметров, где в отсутствие управления динамика является хаотической. Позднее были предложены другие методы управления, в частности, метод Пирагаса или так называемая автосинхронизация запаздывающей обратной связью [2]. Суть этого метода состоит во введении дополнительной обратной связи (ОС) с временем задержки, примерно равным периоду движения, которое желательно стабилизировать. Метод Пирагаса завоевал наибольшую популярность ввиду своей конструктивной простоты. В дальнейшем он развивался во многих работах (см., например, обзор [3]). В частности, в работе [4] этот метод был обобщен на случай

стабилизации неустойчивых положений равновесия. В этом случае время запаздывания должно быть примерно равно характерному периоду нарастающих колебаний малых возмущений неустойчивого состояния. Интересная модификация метода Пирагаса для подавления автомодуляции в микроволновом электронном автогенераторе обратной волны рассматривалась в работе [5], где было предложено модулировать ток электронного пучка протектированным выходным сигналом, поступающим на модулирующий электрод по цепи внешней обратной связи со специально подобранным временем запаздывания. В отличие от исходного метода Пирагаса, время задержки определяется не периодом неустойчивого движения, а периодом автомодуляции, который существенно больше. Это облегчает стабилизацию высокочастотных колебаний.

В настоящей работе предложено обобщение метода Пирагаса для управления пространственно-временным хаосом в распределенных системах с запаздыванием. Применение метода продемонстрировано на примере системы Икеды [6], которая представляет собой кольцевой резонатор, содержащий отрезок среды с кубической фазовой нелинейностью и возбуждаемый внешним гармоническим сигналом. Данная система играет большую роль, в особенности – в нелинейной оптике (нелинейный кольцевой интерферометр), где является базовой моделью при изучении многих нелинейных эффектов, таких как мультистабильность, оптическая турбулентность, образование диссипативных структур [6–8]. Наиболее подробно результаты исследований нелинейной динамики различных модификаций системы Икеды, а также разнообразные возможности ее практического применения отражены в недавно вышедшей монографии [7].

На рис. 1, *a* изображена схема системы Икеды, которую мы, следуя традиции, приводим в нелинейно-оптическом варианте [7, 8]. В этом случае нелинейный элемент NL представляет собой диэлектрик, диэлектрическая проницаемость которого квадратичным образом зависит от амплитуды поля, а резонатор образован зеркалами M_{1-4} . Первые два зеркала характеризуются коэффициентами отражения $R_{1,2}$, которые, вообще говоря, являются комплексными, остальные зеркала считаются полностью отражающими. Однако подчеркнем, что математические модели, которые анализируются в данной работе, носят достаточно общий характер и справедливы для кольцевых нелинейных резонаторов различной физической природы. Например, в микроволновом диапазоне интерес представляют аналогичные кольцевые системы на основе ферритовых пленок.

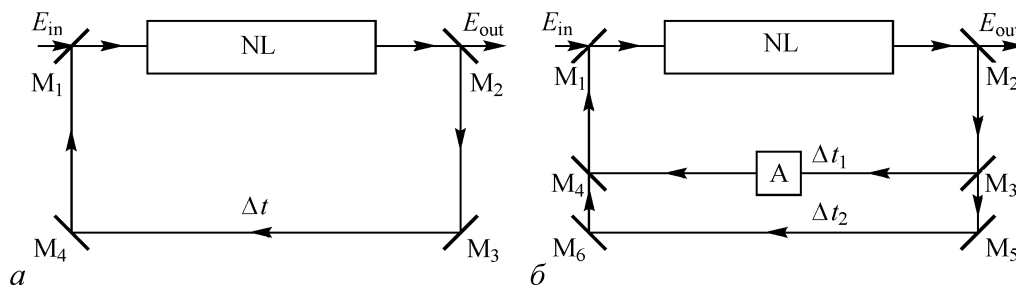


Рис. 1. Схема кольцевого нелинейного резонатора (системы Икеды) с одним (*a*) и двумя (*б*) кольцами обратной связи. NL – нелинейный элемент, А – поглотитель, M_1 – M_6 – зеркала

Как известно [8–11], в среде с дисперсией и кубической фазовой (керровской) нелинейностью распространение квазимонохроматической волны вида

$$A(x, t) \exp [i (\omega_0 t - k_0 x)]$$

($A(x, t)$ – медленно меняющаяся комплексная амплитуда сигнала, ω_0 и k_0 – частота и волновое число несущей волны) можно описать нелинейным уравнением Шрёдингера (НУШ)

$$i \left(\frac{\partial A}{\partial t} + V \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\omega_0''}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \beta |A|^2 A = 0, \quad (1)$$

где $V = d\omega/dk$ – групповая скорость, $\omega_0'' = d^2\omega/dk^2$ – параметр дисперсии групповой скорости, β – параметр нелинейности.

Предполагая, что резонатор возбуждается гармоническим входным сигналом вида $E_{in} = \text{Re} [A_{in} \exp (i\omega_{in}t)]$ с комплексной амплитудой A_{in} и частотой ω_{in} , можно записать следующее граничное условие для сигнала, прошедшего по цепи ОС [7, 8, 12]:

$$A(0, t) = A_{in} e^{i\omega t} + R A(l, t - \Delta t). \quad (2)$$

Здесь $\omega = \omega_{in} - \omega_0$ – отстройка частоты внешнего сигнала от несущей частоты, l – протяженность нелинейной среды, Δt – время прохождения сигнала по цепи ОС, R – комплексный параметр ОС, который нетрудно выразить через коэффициенты отражения зеркал как $R = R_1 R_2$. Далее будем представлять его в виде $R = \rho \exp (i\psi)$, где, очевидно, $0 < \rho < 1$.

Таким образом, математическая модель системы Икеды описывается НУШ (1) с запаздывающим граничным условием (2). Это распределенная система с бесконечным числом степеней свободы. В работе [12] изучалась нелинейная пространственно-временная динамика данной системы, в частности, возникновение автомодуляции излучения и переходы к хаосу по мере увеличения интенсивности возбуждающего сигнала. Отметим, что, если пренебречь дисперсией ($\omega_0'' = 0$), систему можно описать существенно более простой моделью: известным дискретным отображением Икеды [6–8, 12, 13]

$$A_{n+1} = A_{in} + \rho A_n e^{i(\varphi + |A_n|^2)}. \quad (3)$$

Здесь $A_n = A(x=0, t=n\tau)$ – комплексная амплитуда сигнала в n -й момент дискретного времени, $\tau = \Delta t + l/V$, $\varphi = \psi + \omega l/V$ – линейный набег фазы волны за время прохода по резонатору. Динамика этого отображения хорошо изучена (см., например, [8, 13]). Как известно, когда амплитуда входного сигнала превышает некоторое критическое значение, стационарный режим становится неустойчивым, и возникает автомодуляция с периодом 2τ (неустойчивость Икеды). При дальнейшем увеличении A_{in} происходит переход к хаосу, причем основным сценарием является последовательность бифуркаций удвоения периода.

Предлагаемая в настоящей работе схема управления хаосом в системе Икеды основана на введении дополнительной цепи обратной связи (рис. 1, б). Сигнал, прошедший через одну ветвь, получает временную задержку Δt_1 , а через вторую – Δt_2 .

В первую цепь ОС также включен дополнительный поглотитель A с коэффициентом поглощения k . В этом случае граничное условие (2) перепишется в виде

$$A(0, t) = A_{\text{in}} e^{i\omega t} + R_1 R_2 [k R_3 R_4 A(l, t - \Delta t_1) + T_3 T_4 A(l, t - \Delta t_2)], \quad (4)$$

где R_{1-4} , T_{1-4} – коэффициенты отражения и пропускания соответствующих зеркал (см. рис. 1, б). Зеркала $M_{5,6}$ полагаются полностью отражающими. Если выбрать коэффициент поглощения k таким образом, чтобы

$$k = \frac{\sqrt{(1 - |R_3|^2)(1 - |R_4|^2)}}{1 - |R_3||R_4|},$$

соотношению (4) можно придать вид

$$A(0, t) = A_{\text{in}} e^{i\omega t} + \rho [(1 - r) e^{i\psi_1} A(l, t - \Delta t_1) + r e^{i\psi_2} A(l, t - \Delta t_2)], \quad (5)$$

где введен параметр $r = 1 - |R_3 R_4|$.

Подбирая правильным образом разность между временами задержки Δt_1 и Δt_2 , а также фазы обратной связи $\psi_{1,2}$, можно добиться того, чтобы компоненты сигнала на частоте ω поступали на вход нелинейной среды в фазе, а компоненты на частоте паразитной автомодуляции – в противофазе, подавляя друг друга. Это позволит стабилизировать режим одночастотных вынужденных колебаний на частоте внешнего воздействия. На практике параметры ρ , r , $\psi_{1,2}$, $\Delta t_{1,2}$ удобно варьировать, включая в кольцо ОС различные пассивные элементы: аттенюаторы, фазовращатели, линии задержки, которые для простоты на рис. 1 не показаны. Аналогичный метод был предложен нами ранее для подавления автомодуляции в ряде других систем с запаздыванием, в частности, в простой модели автогенератора с кубической нелинейностью [14] и в генераторе на основе лампы бегущей волны [15].

Отметим, что динамика системы Икеды с двумя контурами ОС рассматривалась ранее (см. [7] и цитированную там литературу). Однако основное внимание уделялось вопросам, существенным для ее применения в хаотических системах связи, таким как расширение диапазона параметров, в котором возникают хаотические колебания, и увеличение размерности хаотического аттрактора. Использование дополнительной ОС для стабилизации одночастотных колебаний подробно не исследовалось, хотя такая возможность отмечалась в [7].

В настоящей работе анализируется предложенная схема управления хаосом и обосновывается выбор параметров, позволяющий подавить автомодуляцию, в случае пренебрежимо малой дисперсии, когда систему удастся приближенно описать при помощи точечного отображения. При этом можно получить дискретное отображение, являющееся обобщением (3), которое будем называть модифицированным отображением Икеды. Проводится теоретический анализ устойчивости стационарных состояний, которым соответствуют неподвижные точки отображения. Показано, что введение дополнительной ОС позволяет подавить бифуркации удвоения периода и переход к хаосу. Приведены результаты численного моделирования, хорошо согласующиеся с теорией. В последующей работе будут приведены результаты исследования динамики системы Икеды на основе пространственно-временной распределенной модели, описываемой НУШ (1) с запаздывающим граничным условием (5).

1. Метод управления хаосом

Рассмотрим модель кольцевого нелинейного резонатора с двумя цепями ОС, которая описывается НУШ (1) с запаздывающим граничным условием (5). В режиме одночастотных колебаний на частоте внешнего воздействия ω имеем

$$A(x, t) = A_0(x) e^{i\omega t}.$$

При этом соотношение (5) примет вид

$$A_0(0) = A_{\text{in}} + \rho \left((1 - r) e^{i(\psi_1 - \omega \Delta t_1)} + r e^{i(\psi_2 - \omega \Delta t_2)} \right) A_0(l). \quad (6)$$

Если выбрать фазы $\psi_{1,2}$ так, чтобы они удовлетворяли соотношению

$$\psi_1 = 2\pi n + \psi_2 + \omega (\Delta t_1 - \Delta t_2), \quad (7)$$

из уравнения (6) получим

$$\begin{aligned} A_0(0) &= A_{\text{in}} + \rho (1 - r + r e^{i(\psi_2 - \psi_1 + \omega(\Delta t_1 - \Delta t_2))}) A_0(l) e^{i(\psi_1 - \omega \Delta t_1)} = \\ &= A_{\text{in}} + \rho e^{i(\psi_1 - \omega \Delta t_1)} A_0(l). \end{aligned}$$

Это выражение совпадает с тем, что можно получить из граничного условия (2) для системы с одной цепью ОС в случае одночастотного сигнала. Следовательно, введение второй цепи ОС не изменяет характеристики режима одночастотных вынужденных колебаний, то есть управление является невозможным.

Теперь рассмотрим колебания в режиме автомодуляции. Представим $A(x, t)$ в виде

$$A(x, t) = [A_0(x) + a_+(x) e^{i\Omega t} + a_-(x) e^{-i\Omega t}] e^{i\omega t},$$

то есть будем считать, что в спектре появляются два модуляционных сателлита с частотами $\omega \pm \Omega$ и амплитудами $a_{\pm}(x)$. Тогда из граничного условия (5) на частоте ω вновь будем иметь соотношение (6), а на частотах сателлитов получим

$$a_{\pm}(0) = \rho \left[(1 - r) e^{i(\psi_1 - (\omega \pm \Omega) \Delta t_1)} + r e^{i(\psi_2 - (\omega \pm \Omega) \Delta t_2)} \right] a_{\pm}(l).$$

С учетом условия (7) это соотношение можно переписать в виде

$$a_{\pm}(0) = \rho \left[1 - r + r e^{\pm i\Omega(\Delta t_1 - \Delta t_2)} \right] a_{\pm}(l) e^{i(\psi_1 - (\omega \pm \Omega) \Delta t_1)}. \quad (8)$$

Если теперь подобрать разность между временами задержки $\Delta t_{1,2}$ так, чтобы

$$\Omega (\Delta t_2 - \Delta t_1) = 2\pi m + \pi, \quad (9)$$

то уравнение (8) примет вид

$$a_{\pm}(0) = \rho (1 - 2r) a_{\pm}(l) e^{i(\psi_1 - (\omega \pm \Omega) \Delta t_1)}.$$

Отсюда видно, что при таком выборе параметров обратная связь на частотах сателлитов ослабляется. Это обусловлено тем, что компоненты сигнала на этих частотах, проходящие через различные каналы ОС, поступают на вход нелинейной среды в противоположных фазах и, следовательно, подавляют друг друга. Если выбрать $r = 1/2$, это приведет к полному разрыву цепи обратной связи на модуляционных частотах. Таким образом, выбирая параметры цепей ОС в соответствии с соотношениями (7), (9), можно осуществить подавление автомодуляции, в то время как амплитуда основной спектральной составляющей не изменяется.

2. Вывод модифицированного отображения Икеды

Как уже отмечалось, если пренебречь дисперсией групповой скорости ($\omega_0'' = 0$) в НУШ (1), для описания динамики системы можно получить точечное отображение, которое будем называть модифицированным отображением Икеды. В отсутствие дисперсии уравнение (1) принимает вид

$$i(A_t + VA_x) + \beta |A|^2 A = 0$$

и имеет следующее решение:

$$A(l, t) = A\left(0, t - \frac{l}{V}\right) \exp\left[\frac{i\beta l}{V} \left|A\left(0, t - \frac{l}{V}\right)\right|^2\right]. \quad (10)$$

Далее без ограничения общности будем считать, что несущая частота выбрана равной частоте входного сигнала, так что $\omega = 0$. Подставив (10) в граничное условие (5), найдем

$$\begin{aligned} A(0, t) = & A_{\text{in}} + \rho(1-r)e^{i\psi_1} A\left(0, t - \frac{l}{V} - \Delta t_1\right) \exp\left[\frac{i\beta l}{V} \left|A\left(0, t - \frac{l}{V} - \Delta t_1\right)\right|^2\right] + \\ & + \rho r e^{i\psi_2} A\left(0, t - \frac{l}{V} - \Delta t_2\right) \exp\left[\frac{i\beta l}{V} \left|A\left(0, t - \frac{l}{V} - \Delta t_2\right)\right|^2\right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Обозначим $\tau = \Delta t_1 + l/V$. Поскольку автомодуляция в отображении Икеды возникает с периодом $T = 2\tau$ [6, 8, 13], время задержки сигнала во второй цепи ОС необходимо подобрать следующим образом:

$$\Delta t_2 = 2\Delta t_1 + \frac{l}{V}. \quad (12)$$

С учетом (12) уравнение (11) принимает вид

$$\begin{aligned} A(0, t) = & A_{\text{in}} + \rho(1-r) A(0, t - \tau) \exp\left[i\psi_1 + \frac{i\beta l}{V} |A(0, t - \tau)|^2\right] + \\ & + \rho r A(0, t - 2\tau) \exp\left[i\psi_2 + \frac{i\beta l}{V} |A(0, t - 2\tau)|^2\right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Обозначим $A_n = A(0, t = n\tau)$ и выполним перенормировку

$$A \rightarrow A\sqrt{\frac{\beta l}{V}}, \quad A_{\text{in}} \rightarrow A_{\text{in}}\sqrt{\frac{\beta l}{V}}.$$

Тогда (13) примет вид дискретного отображения

$$A_{n+1} = A_{\text{in}} + \rho(1-r) A_n e^{i(\psi_1 + |A_n|^2)} + \rho r A_{n-1} e^{i(\psi_2 + |A_{n-1}|^2)}. \quad (14)$$

В соответствии с условием (7) фазы $\psi_{1,2}$ выберем следующим образом:

$$\psi_1 = 2\pi n + \psi_2.$$

Подставляя это соотношение в (14) и опуская индекс у ψ_1 , окончательно получаем

$$A_{n+1} = A_{\text{in}} + \rho e^{i\psi} \left[(1-r) A_n e^{i|A_n|^2} + r A_{n-1} e^{i|A_{n-1}|^2} \right]. \quad (15)$$

Таким образом, для описания динамики системы Икеды с двумя кольцами ОС в случае пренебрежимо малой дисперсии мы получили дискретное точечное отображение (15). Это отображение является четырехмерным, так как переменная A_n является комплексной. При $r = 0$ оно переходит в отображение Икеды (3).

3. Анализ характеристического уравнения

Исследуем на устойчивость режимы стационарных колебаний на частоте внешнего сигнала. Им соответствуют решения в виде неподвижных точек для отображения (15). В этом случае $A_n \equiv A_0 = \text{const}$, и из (15) получаем трансцендентное уравнение

$$A_0 = \frac{A_{\text{in}}}{1 - \rho \exp \left[i \left(\psi + |A_0|^2 \right) \right]}. \quad (16)$$

Уравнение (16) совпадает с аналогичным соотношением для отображения Икеды, и это вновь подтверждает, что при правильном выборе параметров управление является невозмущающим.

Без ограничения общности амплитуду входного сигнала A_{in} можно считать чисто вещественной. Тогда, умножая соотношение (16) на комплексно-сопряженное, получим выражение для интенсивности сигнала $I = |A_0|^2$

$$I = \frac{A_{\text{in}}^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\psi + I)}. \quad (17)$$

Проведем анализ этих решений на устойчивость. Для этого запишем амплитуду сигнала в виде

$$A_n = A_0 + \xi_n,$$

где ξ_n – малое возмущение, $|\xi_n| \ll 1$. В этом случае, считая что $\xi_{n+1} = \mu \xi_n = \mu^2 \xi_{n-1}$, где μ – мультипликатор, после подстановки в (15) и линеаризации получим характеристическое уравнение четвертого порядка

$$\mu^4 - 2\mu^2 \rho (\mu(1-r) + r) (\cos \Phi - I \sin \Phi) + \rho^2 (\mu(1-r) + r)^2 = 0, \quad (18)$$

где

$$\Phi = \psi + I. \quad (19)$$

Характеристическое уравнение (18) можно разложить на множители

$$\left[\mu^2 \left(G + \sqrt{G^2 - 1} \right) - \rho (\mu(1-r) + r) \right] \cdot \left[\mu^2 \left(G - \sqrt{G^2 - 1} \right) - \rho (\mu(1-r) + r) \right] = 0, \quad (20)$$

где

$$G = \cos \Phi - I \sin \Phi. \quad (21)$$

Таким образом, характеристическое уравнение можно разрешить относительно μ и проанализировать возможные неустойчивости.

Заметим, что, поскольку $G = G(\psi, \rho, A_{\text{in}})$, если мы проведем на плоскости параметров ψ, A_{in} линии, на которых $G = \text{const}$, корни характеристического уравнения вдоль этих линий также будут оставаться постоянными. Это обстоятельство позволяет построить на плоскости параметров линии различных бифуркаций.

а) Линии складки (касательной бифуркации). Эти линии ограничивают область, в которой имеется мультистабильность, то есть одним и тем же значениям параметров соответствует несколько возможных значений A_0 , причем одно из решений всегда является неустойчивым. Поскольку касательной бифуркации соответствует значение $\mu = 1$ (см., например, [13]), из характеристического уравнения (20) находим, что

$$G = \frac{1 + \rho^2}{2\rho}. \quad (22)$$

Подставив выражение (22) в (21), найдем

$$I = -\frac{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \Phi}{2\rho \sin \Phi}.$$

Отметим, что параметр r в эти уравнения не входит, то есть линии складок не изменяются по сравнению с отображением Икеды (3). Теперь с помощью соотношений (17) и (19) можно найти уравнение линии $\mu = 1$ на плоскости φ, A_{in} в параметрическом виде

$$A_{\text{in}}^2 = I(1 + \rho^2 - 2\rho \cos \Phi) = -\frac{(1 + \rho^2 - 2\rho \cos \Phi)^2}{2\rho \sin \Phi}, \quad (23)$$

$$\psi = \Phi - I = \Phi + \frac{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \Phi}{2\rho \sin \Phi}. \quad (24)$$

б) Линии бифуркации удвоения периода. Эти линии определяют границы возникновения неустойчивости Икеды. Положив в характеристическом уравнении $\mu = -1$ и действуя аналогично предыдущему случаю, получим

$$G = \frac{1 + \rho^2 (2r - 1)^2}{2\rho (2r - 1)}, \quad (25)$$

$$I = -\frac{1 + \rho^2 (2r - 1)^2 - 2\rho (2r - 1) \cos \Phi}{2\rho (2r - 1) \sin \Phi}. \quad (26)$$

Из соотношений (17) и (19) с учетом (26) находим параметрическое представление для линии $\mu = -1$ на плоскости параметров:

$$A_{\text{in}}^2 = -\frac{(1 + \rho^2 - 2\rho \cos \Phi) \left(1 + \rho^2 (2r - 1)^2 - 2\rho (2r - 1) \cos \Phi\right)}{2\rho (2r - 1) \sin \Phi}, \quad (27)$$

$$\psi = \Phi + \frac{1 + \rho^2 (2r - 1)^2 - 2\rho (2r - 1) \cos \Phi}{2\rho (2r - 1) \sin \Phi}. \quad (28)$$

Анализируя эти соотношения, можно показать, что при увеличении r области периодических режимов увеличиваются. Тем самым достигается стабилизация периодического поведения при более высоких уровнях мощности входного сигнала. В частности, очевидно, что при $r = 1/2$ пороговые значения A_{in} и ψ в (27), (28) обращаются в бесконечность, то есть бифуркация удвоения периода отсутствует.

в) *Линия возникновения квазипериодического поведения.* В отличие от двумерного отображения Икеды (3), четырехмерное модифицированное отображение (15) может демонстрировать квазипериодическое поведение. Для исходной системы (кольцевого нелинейного резонатора) это означает возникновение автомодуляционной неустойчивости с периодом, отличным от 2τ . Из уравнения (20), очевидно, имеем

$$\mu(1 - r) + r = \frac{\mu^2}{\rho} \left(G \pm \sqrt{G^2 - 1} \right). \quad (29)$$

Квазипериодичность возникает при пересечении парой комплексно-сопряженных мультипликаторов единичной окружности на комплексной плоскости μ . Положим в (29) $\mu = \exp(i\theta)$, где θ – число вращения [13]. Приравняв аргументы левой и правой частей (29), получим

$$\frac{(1 - r) \sin \theta}{r + (1 - r) \cos \theta} = \tan 2\theta,$$

что после элементарных преобразований позволяет найти очень простое выражение для числа вращения

$$r = \frac{1}{1 - 2 \cos \theta}$$

или

$$\cos \theta = \frac{r - 1}{2r}. \quad (30)$$

Отметим, что, поскольку параметр r может принимать значения между нулем и единицей, квазипериодическое поведение возможно только при $r > 1/3$, а число вращения лежит в диапазоне $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$.

Подставив найденное соотношение для θ в (29) и приравняв модули левой и правой частей, получим

$$r = \frac{1}{\rho} \left| G \pm \sqrt{G^2 - 1} \right|.$$

Разрешим это соотношение относительно G :

$$G = -\frac{1 + \rho^2 r^2}{2\rho r}, \quad (31)$$

что после подстановки в (21) дает

$$I = \frac{1 + \rho^2 r^2 + 2\rho r \cos \Phi}{2\rho r \sin \Phi}. \quad (32)$$

Тогда из соотношений (17) и (19) находим параметрическое представление для линии $\mu = \exp \theta$ на плоскости параметров:

$$A_{in}^2 = \frac{(1 + \rho^2 - 2\rho \cos \Phi)(1 + \rho^2 r^2 + 2\rho r \cos \Phi)}{2\rho r \sin \Phi}, \quad (33)$$

$$\psi = \Phi - \frac{1 + \rho^2 r^2 + 2\rho r \cos \Phi}{2\rho r \sin \Phi}. \quad (34)$$

Видно, что при $r = 1/3$, то есть при минимальном значении параметра, при котором возникает квазипериодическое движение, эта линия совпадает с (27), (28). Таким образом, хотя с увеличением r линия удвоения периода на плоскости ψ , A_{in} продолжает подниматься вверх, при $r > 1/3$ границей устойчивости одночастотных колебаний является уже не она, а линия возникновения квазипериодичности (33), (34). Максимальный эффект стабилизации одночастотного режима достигается при $r = 1/3$. При $r > 1/3$, хотя частота $\omega = \pi/\tau$, которая возбуждается при неустойчивости Икеды, подавляется, возникает другой механизм неустойчивости. Аналогичный результат был получен нами при исследовании управления хаосом при помощи дополнительной обратной связи в других системах с запаздыванием [14]. Соотношения (26) или (32) позволяют определить максимальную интенсивность колебаний в резонаторе, при которой стационарный режим еще устойчив.

На рис. 2 приведены теоретические линии различных бифуркаций на плоскости параметров при различных значениях r , построенные согласно приведенным выше соотношениям. Так как эти кривые являются периодическими по параметру ψ с периодом 2π , приведен только один период. Хорошо видно, как при увеличении r линии $\mu = -1$, показанные на рис. 2 сплошными кривыми, смещаются вверх, то есть режимы одночастотных колебаний становятся устойчивыми при все больших значениях интенсивности входного сигнала. При $r > 1/3$ появляются линии $\mu = \exp i\theta$, показанные пунктиром. С ростом r они опускаются вниз. Линия складки показана штриховой линией. Жирным выделена линия $\mu = -1$ при $r = 1/3$, когда область устойчивости одночастотного режима максимальна.

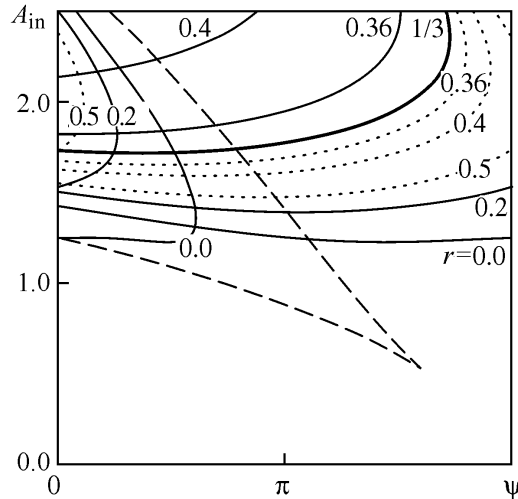


Рис. 2. Линии $\mu = -1$ (сплошные кривые), $\mu = \exp i\theta$ (пунктир) и $\mu = 1$ (штрих) на плоскости параметров ψ , A_{in} при $\rho = 0.5$ и различных значениях параметра r (указаны на рисунке вблизи соответствующих кривых)

4. Приближение низкодобротного резонатора

Как известно (см., например, [16]), отображение Икеды можно существенно упростить, уменьшив число независимых параметров, если считать, что $\rho \ll 1$, то есть добротность резонатора мала. Применим это приближение к отображению (15). Когда добротность резонатора мала, амплитуда колебаний незначительно отличается от амплитуды внешнего сигнала. Тогда можно положить $A_n \approx A_{\text{in}} + \tilde{A}_n$, где $|\tilde{A}_n| \ll A_{\text{in}}$, и приближенно переписать отображение (15) в виде

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{n+1} \approx \rho e^{i\psi} & \left[(1-r) A_{\text{in}} \exp \left[iA_{\text{in}}^2 + iA_{\text{in}} (\tilde{A}_n + \tilde{A}_n^*) \right] + \right. \\ & \left. + r A_{\text{in}} \exp \left[iA_{\text{in}}^2 + iA_{\text{in}} (\tilde{A}_{n-1} + \tilde{A}_{n-1}^*) \right] \right]. \end{aligned}$$

Здесь знак «*» обозначает операцию комплексного сопряжения. Сложив это выражение с комплексно-сопряженным и введя вместо \tilde{A}_n новую вещественную переменную

$$x_n = \psi + A_{\text{in}}^2 + A_{\text{in}} (\tilde{A}_n + \tilde{A}_n^*),$$

получим двумерное вещественное отображение

$$x_{n+1} = \varphi + \lambda [(1-r) \cos x_n + r \cos x_{n-1}]. \quad (35)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\varphi = \psi + A_{\text{in}}^2, \quad \lambda = 2\rho A_{\text{in}}^2. \quad (36)$$

Обратим внимание, что число независимых параметров сократилось на единицу.

При $r = 0$ отображение (35) переходит в известное одномерное \cos -отображение, которое хорошо изучено (см., например, [16]). Оно представляет самостоятельный интерес, так как возникает при описании гибридных – электрооптической ([8], гл. 3) и акустооптической [17] – систем с запаздыванием. Соответственно, отображение (35) может рассматриваться как модель управления хаосом в подобных системах.

Проанализируем устойчивость неподвижных точек отображения (35) аналогично тому, как это было сделано для модифицированного отображения Икеды в п. 3. Неподвижные точки удовлетворяют уравнению

$$x_0 = \varphi + \lambda \cos x_0. \quad (37)$$

Зададим малое возмущение этого решения, подставим в (35) и линеаризуем. В результате после ряда несложных операций придем к следующему характеристическому уравнению для мультипликатора μ :

$$\mu^2 + \lambda\mu(1-r) \sin x_0 + \lambda r \sin x_0 = 0, \quad (38)$$

корни которого есть

$$\mu = -\frac{\lambda(1-r)\sin x_0}{2} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2(1-r)^2\sin^2 x_0}{4} - \lambda r \sin x_0}. \quad (39)$$

Аналогично тому, как это было сделано для модифицированного отображения Икеды в п. 3, построим границы различных бифуркаций на плоскости параметров φ , λ . Для линий складки (касательной бифуркации), положив в (39) $\mu = 1$, после ряда несложных преобразований с учетом (37) найдем выражения, задающие линию складки на плоскости параметров в параметрическом виде

$$\lambda = -\frac{1}{\sin x_0}, \quad (40)$$

$$\varphi = x_0 + \operatorname{ctg} x_0. \quad (41)$$

Как и в п. 3, параметр r в эти соотношения не входит.

Для линии бифуркации удвоения периода, полагая $\mu = -1$ и действуя аналогично предыдущему случаю, находим

$$\lambda = \frac{1}{(1-2r)\sin x_0}, \quad (42)$$

$$\varphi = x_0 - \frac{\operatorname{ctg} x_0}{1-2r}. \quad (43)$$

Видим, что при увеличении r пороговое значение параметра λ увеличивается и при $r = 1/2$ стремится к бесконечности.

Наконец, найдем границу бифуркации Неймарка–Сакера. В этом случае $\mu = \exp(\pm i\theta)$ и, следовательно, из выражения (39) находим, что

$$\cos \theta = -\frac{\lambda(1-r)\sin x_0}{2}, \quad (44)$$

$$\sin \theta = \sqrt{\lambda r \sin x_0 - \frac{\lambda^2(1-r)^2\sin^2 x_0}{4}}. \quad (45)$$

Возводя (44), (45) в квадрат и складывая, получаем

$$\lambda = \frac{1}{r \sin x_0}. \quad (46)$$

Подставив это соотношение в (37), также получаем

$$\varphi = x_0 - \frac{\operatorname{ctg} x_0}{r}. \quad (47)$$

Кроме того, отметим, что подстановка (46) в (44) приводит к соотношению (30), то есть бифуркация Неймарка–Сакера, как и прежде, имеет место только при $r > 1/3$.

Итак, мы получили выражения, задающие линии различных бифуркаций на плоскости параметров φ , λ в параметрическом виде. Можно убедиться, что эти выражения получаются непосредственным переходом к пределу $\rho \ll 1$ в соответствующих соотношениях п. 3. Кроме того, отметим, что в данном случае нетрудно выразить связь между φ и λ в явном виде, однако в дальнейшем эта связь нам не понадобится.

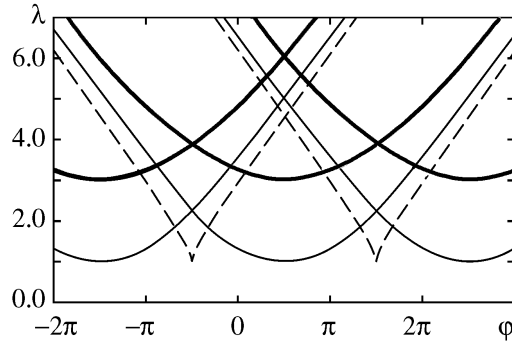


Рис. 3. Границы устойчивости одночастотного режима для отображения (35) на плоскости параметров φ , λ . Показаны линии $\mu = -1$ при $r = 0$ (тонкие сплошные кривые) и $r = 1/3$ (жирные сплошные кривые), а также линии складки $\mu = 1$ (штриховые линии)

Линии бифуркации удвоения периода на плоскости φ , λ , то есть границы устойчивости одночастотного режима, построенные согласно соотношениям (42),(43) при $r = 0$, показаны на рис. 3. При увеличении r эти линии поднимаются вверх. При $r = 1/3$ от них ответвляются линии бифуркации Неймарка–Сакера, которые с ростом r опускаются вниз. Как и в случае, рассмотренном в п. 3 (см. рис. 2), можно считать, что максимальное повышение порога автомодуляции достигается при $r = 1/3$. Соответствующие кривые показаны на рис. 3 жирными линиями.

Кроме того, показаны линии складки, ограничивающие область мультистабильности, которые построены согласно формулам (40), (41). Сравнивая выражения (42) при $r = 1/3$ и при $r = 0$, видим, что пороговое значение параметра λ повышается в три раза. Соответственно, это означает, что пороговое значение амплитуды внешнего сигнала повышается в $\sqrt{3}$ раз (см. (36)). Также, исходя из определения параметра λ , нетрудно видеть, что все бифуркационные значения A_{in} с уменьшением добротности резонатора будут возрастать пропорционально $\rho^{-1/2}$.

5. Результаты численного моделирования

Результаты теоретического анализа устойчивости стационарных состояний подтверждаются прямым численным моделированием отображения (15). На рис. 4 приведены карты динамических режимов на плоскости параметров ψ , A_{in} при различных значениях r . Оттенками серого показаны области циклов различных периодов, соответственно обозначенные цифрами, белым цветом – области хаотического или квазипериодического движения. Рис. 4 свидетельствует о том, что при введении дополнительной цепи обратной связи в отображении Икеды происходит сдвиг областей одночастотных колебаний в сторону увеличения амплитуды возбуждающего сигнала. На этом рисунке также нанесены линии касательной бифуркации, бифуркации удвоения периода и бифуркации Неймарка–Сакера, построенные согласно теоретическим формулам, приведенным в п. 3. Они полностью согласуются с численными результатами.

При $r > 1/3$ между циклами периодов один и два возникает область квазипериодического движения (рис. 4, $z-e$). Таким образом, хотя порог бифуркации удвое-

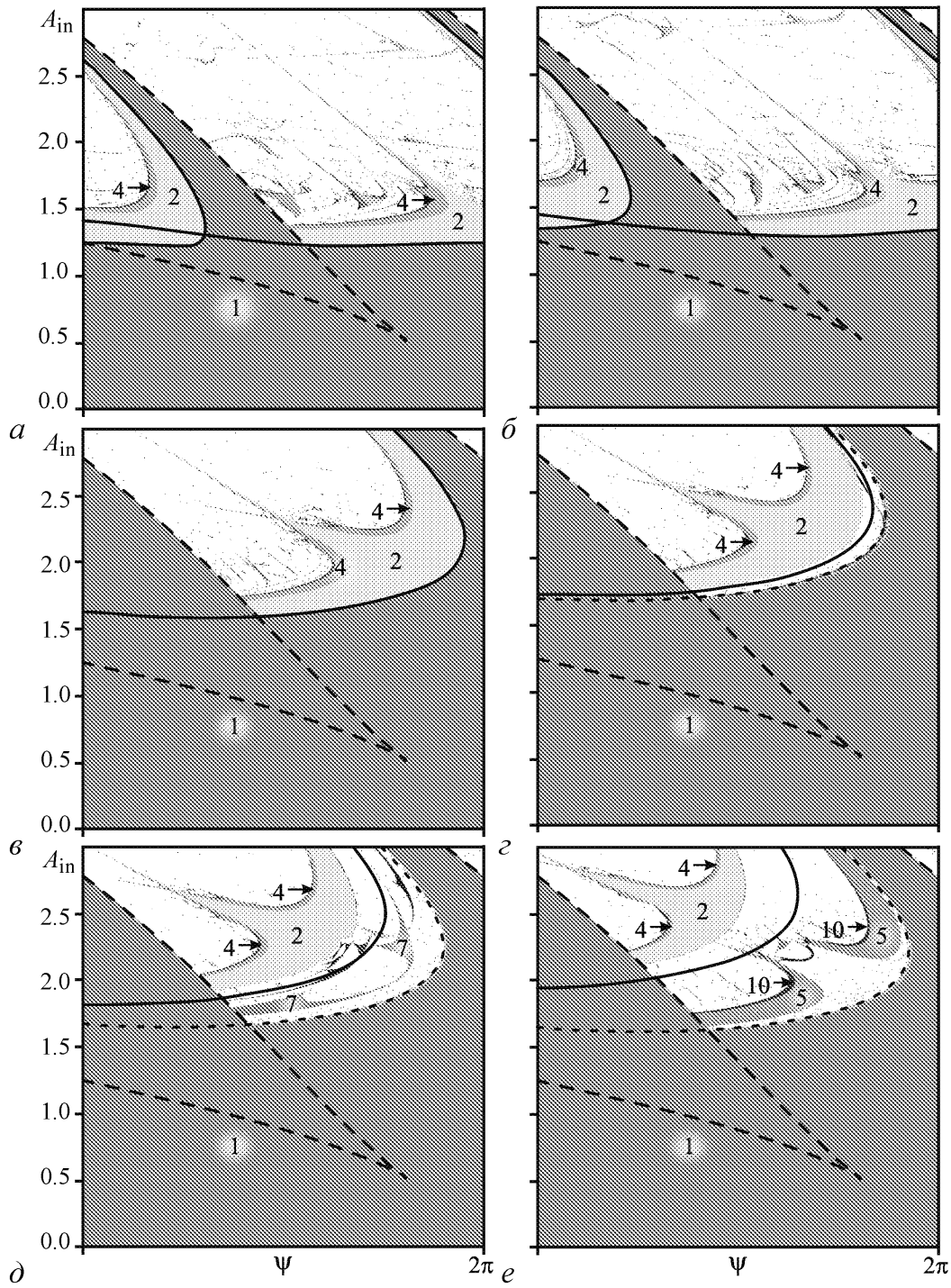


Рис. 4. Карты динамических режимов отображения (15) на плоскости параметров ψ , A_{in} при $\rho = 0.5$; $r = 0$ (а), 0.1 (б), 0.3 (в), 0.34 (г), 0.36 (д) и 0.38 (е). Оттенками серого обозначены области циклов разных периодов, белым – области квазипериодического или хаотического движения. Линия $\mu = -1$ – сплошная кривая, $\mu = \exp i\theta$ – пунктир, $\mu = 1$ – штриховая линия

ния периода продолжает сдвигаться вверх, интересующий нас стационарный режим становится неустойчивым, но теперь уже в результате бифуркации рождения тора. С ростом r порог этой бифуркации сдвигается вниз, то есть область квазипериодического движения расширяется. При движении внутри нее по плоскости параметров могут происходить переходы к хаосу через разрушение квазипериодического движения. Сверху к области квазипериодичности примыкает область цикла периода 2, причем переход к этому циклу от квазипериодического или хаотического режима происходит через перемежаемость.

Внутри области квазипериодичности заметны многочисленные сложноустроенные языки синхронизации. Однако их устройство отличается от известной картины для систем с бифуркацией Неймарка–Сакера, где они отходят от линии бифуркации в точках, в которых число вращения принимает рациональные значения. В данном же случае число вращения не меняется вдоль линии бифуркации. Это объясняется тем, что представленные на рис. 4 карты динамических режимов фактически представляют собой сечения четырехмерного пространства параметров плоскостями ψ , A_{in} при различных значениях r . В этих сечениях линии, на которых число вращения рационально, оказываются примерно параллельными линии $\mu = \exp i\theta$ и, соответственно, языки синхронизации вытянуты вдоль них. Изучение этой картины представляет самостоятельный интерес и требует дополнительного исследования, тогда как основную цель настоящей работы составляет изучение вопроса об устойчивости одночастотного режима колебаний.

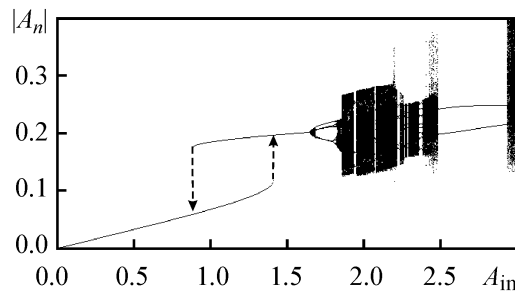


Рис. 5. Однопараметрическая бифуркационная диаграмма для отображения (15) при $\rho = 0.5$, $r = 0.38$, $\psi = \pi$

Более наглядно представить себе поведение системы при увеличении амплитуды внешнего сигнала позволяет представленная на рис. 5 бифуркационная диаграмма, построенная для случая, которому соответствует рис. 4, *e*, с наследованием начальных условий вдоль линии $\psi = \pi$. На диаграмме отложены значения $|A_n|$ при различных значениях амплитуды воздействия A_{in} . Видны жесткие переходы с одной ветви передаточной характеристики на другую, область квазипериодического движения при $1.65 < A_{in} < 1.68$, резонанс 1:5 и

переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума на базе этого цикла ($A_{in} \approx 1.82$). Далее наблюдается обширная область квазипериодических режимов, в которой видны многочисленные окна периодического поведения. При $A_{in} \approx 2.47$ наблюдается переход через перемежаемость к циклу периода 2.

Как следует из приведенных в п. 3 рассуждений, максимальный порог автомодуляции должен достигаться при $r = 1/3$. При $r < 1/3$ потеря устойчивости происходит в результате бифуркации удвоения периода, при $r > 1/3$ – в результате бифуркации Неймарка–Сакера. Аналогичное поведение характерно и для других систем с запаздыванием [14]. Однако в системе Икеды в зависимости от других управляющих параметров форма области устойчивости режима одночастотных колебаний может иметь более сложный вид. Рассмотрим приведенные на рис. 6 карты

динамических режимов на плоскости параметров r, A_{in} , построенные при различных значениях параметра ψ . Как и на рис. 4, на них наложены линии различных бифуркаций, построенные согласно аналитическим формулам, полученным в п. 3. Как видно из рис. 6, *a*, при $\psi = 0$ линии $\mu = -1$ и $\mu = \exp(\pm i\theta)$ не пересекаются, так что имеются две изолированные друг от друга области нестационарного поведения, а область устойчивости ограничена сверху линией касательной бифуркации, которая в данном случае представляет собой горизонтальную прямую, поскольку условия касательной бифуркации не зависят от r (см. п. 3). Таким образом, в данном случае можно, выбирая параметр $r \sim 0.3 \div 0.4$, получить одночастотные колебания в широком диапазоне изменения интенсивности внешнего сигнала. Максимальное значение A_{in} увеличивается более чем в два раза по сравнению с системой с одним контуром ОС.

Иную форму принимает область устойчивости при $\psi < -0.27\pi$, когда линии $\mu = -1$ и $\mu = \exp(\pm i\theta)$ начинают пересекаться (рис. 6, *б, в*). Обратим внимание,

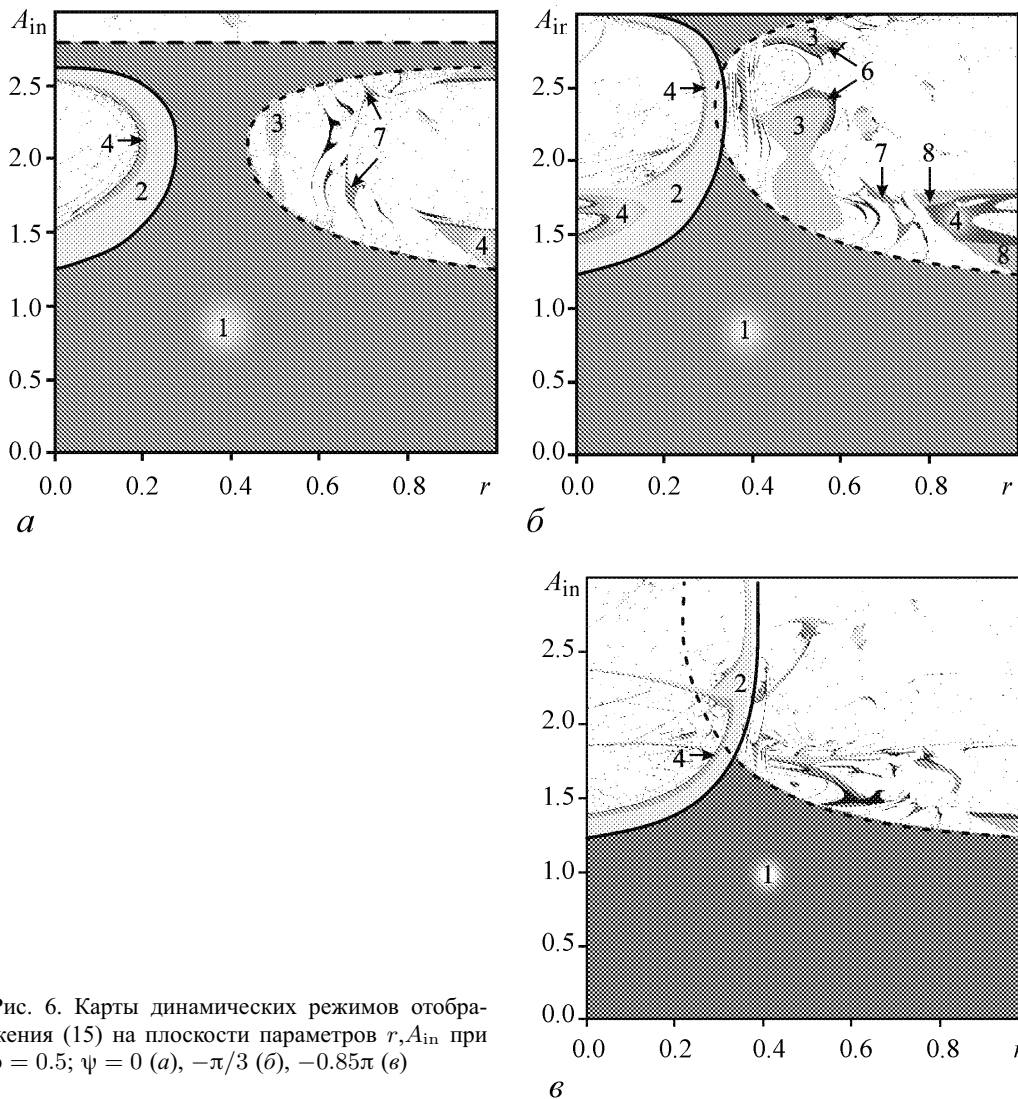


Рис. 6. Карты динамических режимов отображения (15) на плоскости параметров r, A_{in} при $\rho = 0.5$; $\psi = 0$ (*a*), $-\pi/3$ (*б*), -0.85π (*в*)

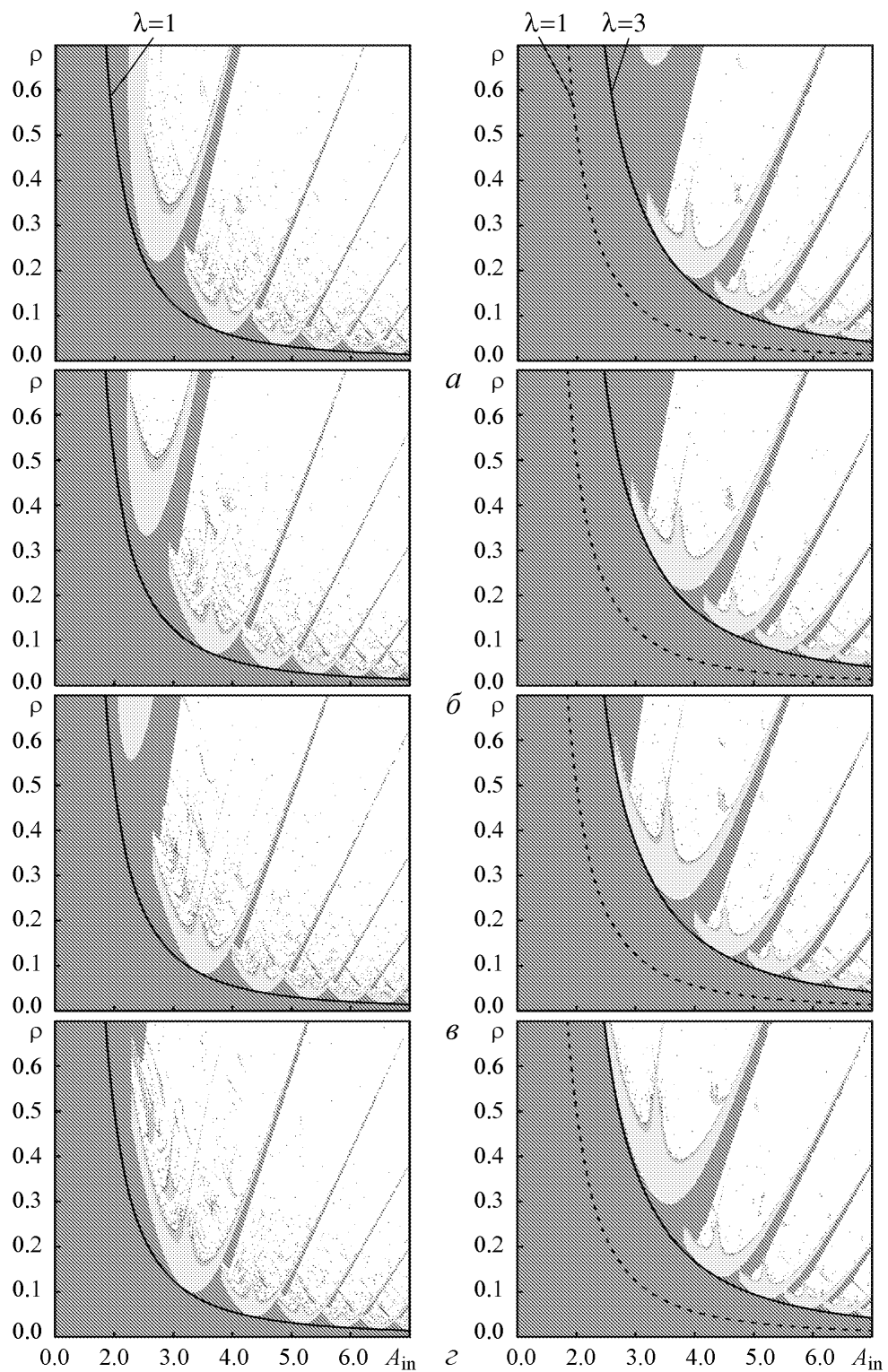


Рис. 7. Карты динамических режимов отображения (15) на плоскости параметров A_{in}, ρ при $r = 0$ (левая колонка) и $r = 1/3$ (правая колонка) для $\psi = 0$ (*a*), $\pi/3$ (*b*), $2\pi/3$ (*e*) и π (*z*)

что точки пересечения всегда расположены при $r = 1/3$. Область устойчивости разбивается на две, причем с уменьшением ψ верхняя область сдвигается в сторону больших A_{in} и становится все более узкой. Граница нижней области приобретает вид, характерный для других систем с запаздыванием [14], с максимумом при $r = 1/3$. Тем не менее и в этом случае можно достаточно существенно повысить порог автомодуляции.

Наконец, обсудим вопрос о зависимости порога автомодуляции от добротности резонатора. На рис. 7 приведены карты динамических режимов на плоскости параметров A_{in} , ρ при различных значениях фазы ψ , рассчитанные для значений $r = 0$ (слева) и $r = 1/3$ (справа). Для наглядности на этих рисунках нанесены кривые $\lambda = 1$ и $\lambda = 3$, где λ определяется формулой (36). Границы автомодуляции в точках минимума опираются на эти кривые в случае, когда справедливо приближение низкодобротного резонатора (см. п. 4).

Карты имеют очевидную самоподобную структуру. Действительно, в приближении низкодобротного резонатора переход к параметрам λ , φ (36) делает карту динамических режимов периодической по параметру φ . Соответственно, на плоскости параметров исходного отображения существует структура характерных «ячеек», в которых наблюдается нестационарное поведение. Как видно из рис. 7, при изменении фазы ψ первая «ячейка» постепенно сдвигается вверх и исчезает, а на ее место приходит вторая, и т.д. Основываясь на рис. 7, можно примерно оценить границу справедливости приближения низкодобротного резонатора как $\rho < 0.3$. Отметим, что, как следует из [16], приближение низкодобротного резонатора хорошо работает, начиная уже со второй «ячейки», что вполне согласуется с полученными нами результатами.

Таким образом, подтверждается сделанный в п. 4 вывод, что при достаточно малых ρ предложенный метод управления хаосом позволяет повысить порог автомодуляции по параметру A_{in} примерно в $\sqrt{3}$ раз. В области больших ρ ситуация более сложная, так как там может происходить описанная выше трансформация плоскости параметров, когда границей автомодуляции служит уже не линия бифуркации удвоения периода, а линия складки. В этом случае при определенных параметрах можно добиться значительно большего увеличения порога автомодуляции (например, при $\rho > 0.45$ в случае, которому соответствует рис. 7, б).

Отметим также, что мы не рассматриваем область $\rho \approx 1$, когда система близка к консервативной и ее динамика носит особенно сложный характер (см., например, [18]). В частности, имеют место чрезвычайно длительные переходные процессы, сосуществование аномально большого числа аттракторов и т.д.

Заключение

В данной работе на примере одной из наиболее известных моделей нелинейной динамики – системы Икеды – рассмотрен метод управления хаосом в системах с запаздыванием, являющийся модификацией известного метода Пирагаса. Метод основан на введении дополнительной цепи обратной связи, параметры которой подбираются таким образом, чтобы спектральные компоненты сигнала на основной ча-

стоте, прошедшие по двум ветвям цепи ОС, оказывались в фазе, а на паразитных частотах – в противофазе, и таким образом подавляли бы друг друга. В случае, когда дисперсия пренебрежимо мала, показано, что динамику системы можно приближенно описать при помощи четырехмерного точечного отображения, являющегося обобщением известного отображения Икеды. Проведен теоретический анализ устойчивости неподвижных точек этого отображения, позволивший аналитически построить линии возникновения различных бифуркаций (удвоения периода, Неймарка–Сакера, касательной бифуркации) на плоскостях управляющих параметров. Представлены результаты численного моделирования, хорошо согласующиеся с теорией. Показано, что при определенных значениях параметров удастся значительно расширить область устойчивости одночастотных колебаний.

В случае, когда пренебрегать эффектами дисперсии нельзя, необходимо обратиться к исследованию пространственно-временной распределенной модели, описываемой НУШ (1) с запаздывающим граничным условием (5). Результаты такого исследования будут приведены в последующей работе. Они показывают, что при достаточно слабой дисперсии хорошо работает приближенное описание на основе точечного отображения. Более сложный характер носит динамика системы в случае сильной дисперсии, когда нестационарное поведение, в основном, обусловлено не неустойчивостью Икеды, а модуляционной неустойчивостью [8, 12]. Тем не менее и в этом случае введение дополнительной обратной связи с соответствующим образом подобранными параметрами позволяет подавить автомодуляцию и стабилизировать режим одночастотных колебаний.

Авторы благодарны А.П. Кузнецову и С.П. Кузнецову за полезные дискуссии.

Работа выполнена при поддержке программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/1738). Работа Н.М. Рыскина поддержана также фондом некоммерческих программ «Династия».

Библиографический список

1. Ott E., Grebogi C., Yorke J.A. Controlling chaos // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64, № 11. P. 1196.
2. Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback // Phys. Lett. A. 1992. Vol. 170. P. 421.
3. Just W., Benner H., Schoell E. Control of chaos by time-delayed feedback: A survey of theoretical and experimental aspects // In: B. Kramer (Ed.), Advances in Solid State Physics. Vol. 43, Springer, Berlin, 2003. P. 589.
4. Hoevel P., Schoell E. Control of unstable steady states by time-delayed feedback methods // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72, № 4. 046203.
5. Долов А.М., Кузнецов С.П. Применение методики контроля хаоса для устранения автомодуляции в лампе обратной волны // ЖТФ. 2003. Т. 73, № 8. С. 139.
6. Ikeda K., Daido H., Akimoto O. Optical turbulence: chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45, № 9. P. 709.

7. *Измайлов И.В., Лячин А.В., Пойзнер Б.Н.* Детерминированный хаос в моделях кольцевого нелинейного интерферометра. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007.
8. *Розанов Н.Н.* Оптическая бистабильность и гистерезис в распределенных нелинейных системах. М.: Наука, 1997.
9. *Dodd R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Morris H.S.* Solitons and Nonlinear Wave Equations, Academic Press, London, 1984.
10. *Рыскин Н.М., Трубецков Д.И.* Нелинейные волны. М.: Наука, Физматлит, 2000.
11. *Островский Л.А., Потапов А.И.* Введение в теорию модулированных волн. М.: Физматлит, 2003.
12. *Балякин А.А., Рыскин Н.М., Хаврошин О.С.* Нелинейная динамика модуляционной неустойчивости в распределенных резонаторах под внешним гармоническим воздействием // Изв. вузов. Радиофизика. 2007. Т. 50, № 9. С. 800.
13. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001.
14. *Емельянов В.В., Рыскин Н.М., Хаврошин О.С.* Подавление автомодуляции в автогенераторе с запаздыванием при помощи методики управления хаосом // Радиотехника и электроника. 2009. Т. 54, № 6. С. 719.
15. *Ryskin N.M., Khavroshin O.S.* Suppressing self-modulation instability in a delayed feedback traveling wave tube oscillator using controlling chaos technique // IEEE Trans. Electron Devices. 2008. Vol. 55, № 2. P. 662.
16. *Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.* Динамические системы разных классов как модели нелинейного осциллятора с импульсным воздействием // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 2. С. 31.
17. *Valee R., Delisle C., Chrostowski J.* Noise versus chaos in acousto-optic bistability // Phys. Rev. A. 1984. Vol. 30, № 1. P. 336.
18. *Кузнецов А.П., Савин А.В., Савин Д.В.* Отображение Икеды: от диссипативного к консервативному случаю // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 2. С. 94.

Поступила в редакцию 4.09.2008

CONTROLLING CHAOS IN IKEDA SYSTEM

Symplified discrete map model

N.M. Ryskin, O.S. Khavroshin

Method of controlling chaos in a ring cavity containing a media with cubic phase nonlinearity (Ikeda system) is considered. The proposed method is based on introduction of an additional feedback loop with parameters chosen so that the fundamental frequency components after passing through different feedback loops appear in phase, while the most unstable sidebands appear in antiphase, thus suppressing each other. In the weak dispersion limit a discrete map is derived that is a modification of the well-known Ikeda map. The results of analytic investigation and numerical simulation of this map in a broad range

of parameters are presented. It is shown that the suggested method allows suppression of self-modulation and stabilization of periodic regimes.

Keywords: Controlling chaos, nonlinear ring-loop resonator, delayed feedback, return map, bifurcation.



Рыскин Никита Михайлович – родился в 1966 г. в Саратове. Окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1991). Защитил кандидатскую (1996) и докторскую (2005) диссертации. С 1997 г. работает на факультете нелинейных процессов СГУ, в настоящее время – профессор кафедры нелинейной физики. Область научных интересов – нелинейная динамика распределенных систем, нелинейные волны и солитоны, вакуумная сверхвысокочастотная электроника и микроэлектроника. Имеет более 100 научных публикаций по указанным выше направлениям, в том числе учебные пособия «Нелинейные волны» (в соавторстве с Д.И. Трубецковым; М.: Физматлит, 2000) и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и С.П. Кузнецовым; М.: Физматлит, 2002, 2005).

E-mail: RyskinNM@info.sgu.ru
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83



Хаврошин Олег Сергеевич – родился 19 октября 1983 года в г. Луцк, Волынской области, Украина. Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (2006). В настоящее время обучается в аспирантуре кафедры нелинейной физики СГУ. Область научных интересов – управление хаосом в радиофизических системах с запаздыванием.

E-mail: jktufdmail@mail.ru
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83