

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СТРАННЫЕ АТТРАКТОРЫ СИСТЕМ, ДОПУСКАЮЩИХ ФИЗИЧЕСКУЮ РЕАЛИЗАЦИЮ

С.П. Кузнецов

Представлен обзор исследований, нацеленных на выявление или конструирование физических систем с гиперболическими странными аттракторами, такими как аттрактор Плыкина и соленоид Смейла–Вильямса. Приводятся примеры отображений, дифференциальных уравнений, а также простых радиотехнических устройств с хаотической динамикой, обусловленной присутствием таких аттракторов. Рассматривается и иллюстрируется принцип построения систем с гиперболическим хаосом, основанный на манипуляции фазами сигналов в попеременно возбуждающихся осцилляторах и в системах с запаздыванием. Обсуждаются другие подходы, намеченные в имеющихся публикациях, и перспективы дальнейших работ.

Ключевые слова: аттрактор, динамическая система, отображение Пуанкаре, соленоид Смейла–Вильямса, аттрактор Плыкина, гиперболический хаос, осциллятор, генератор хаоса.

Введение

Около 40 лет назад в теории динамических систем был введен в рассмотрение класс *однородно гиперболических аттракторов* [1–11]. Это предмет так называемой *гиперболической теории*, связанной с именами Аносова, Алексева, Смейла, Вильямса, Синая, Плыкина, Рюэля, Песина, Ньюхауса и других. Хаотическая природа динамики на этих аттракторах безупречно обоснована. Они обладают свойством структурной устойчивости, то есть устройство фазового пространства и характеристики хаоса нечувствительны к вариации определяющих уравнений. Первоначально казалось, что гиперболические аттракторы будут адекватными образами для многих физических ситуаций, где приходится иметь дело с хаосом. Однако со временем стало ясно, что многочисленные известные примеры конкретных систем с хаотической динамикой не вписываются в рамки, предлагаемые ранней гиперболической теорией. На гиперболические аттракторы стали смотреть как на рафинированный образ хаоса, не имеющий прямого отношения к реальным системам. Усилия же математиков оказались направленными на разработку обобщений, применимых для более широких классов систем [12–14].

Остался не вполне прояснен вопрос – можно ли указать физические системы, хаотическая динамика которых была бы обусловлена присутствием однородно гиперболических аттракторов? Проблема представляется принципиальной. Уместна

аналогия с таким историческим прецедентом, как установление соответствия между феноменом автоколебаний и его математическим образом – предельным циклом. Так же как в свое время предельные циклы, гиперболические аттракторы должны найти свое место как математические образы феноменов в реальных нелинейных системах.

В математических учебниках и обзорах в качестве примеров с гиперболическими аттракторами обычно фигурируют модели с дискретным временем на основе геометрических конструкций. Для физика, однако, это не более чем исходный пункт работы.

Прежде всего, в дополнение к геометрическим построениям желательно иметь отображения в виде явно записанных формул. Это, по крайней мере, дает возможность привлечь вычислительные методы для анализа характеристик динамики, интересных с точки зрения возможных приложений.

Далее нужно перейти к системам с непрерывным временем, поскольку для физики и техники именно они интересны в первую очередь. Хотя этот шаг также можно сделать на уровне геометрических построений, по-настоящему конструктивным следует признать получение в явном виде дифференциальных уравнений.

Желательно указать, как осуществить динамику на гиперболическом аттракторе путем комбинации структурных элементов, известных в контексте теории колебаний и приложений (осцилляторы, связанные системы, цепи обратной связи).

Наконец, самостоятельная задача состоит в создании реально функционирующих устройств, например, радиотехнических, на основе моделей с гиперболическими аттракторами.

1. Основные понятия гиперболической теории

Рассмотрим ансамбль большого числа одинаковых систем, различающихся только начальными состояниями. В фазовом пространстве ему отвечает облако изображающих точек, меняющее с течением времени размеры и форму из-за перемещения точек согласно динамическим уравнениям. В диссипативных системах объем «облака» убывает, и оно в итоге оседает на аттрактор (или, возможно, несколько аттракторов). Хаос имеет место при наличии повторяющихся преобразований, включающих растяжение и сплющивание облака изображающих точек, что обеспечивает перемешивающий характер динамики. Гиперболический хаос будет реализоваться, если такая эволюция во времени происходит совершенным образом, без разрывов и образования локальных уплотнений¹.

Однородно гиперболический хаотический аттрактор – это притягивающий объект в фазовом пространстве диссипативной системы, составленный из седловых гиперболических траекторий. Фазовую траекторию называют гиперболической, если для каждой ее точки в векторном пространстве всевозможных бесконечно малых воз-

¹То, что это возможно, показывает забавный пример машины для вытягивания и перемешивания сахарной ваты. Благодаря вращательному движению поперечных стержней, в ней происходит постоянное растяжение и сворачивание ваты из патоки и сахара с формированием тонкой волокнистой структуры. В работе Хальберга и Йорке [12] показано, что имеющий место в этой машине способ продольного расширения и поперечного сжатия субстанции именно такой, какой нужен для однородно гиперболического аттрактора. Оговоримся, что это не тот вариант физической реализации гиперболического хаоса, который хотелось бы иметь. Машина не является маломерной динамической системой, а содержит подвергаемую деформациям сплошную среду, при описании перемещения локальных элементов которой возникает отображение соответствующего типа. Читатель может найти фотографии и ролики такой машины в сети Интернет (ключевые слова – taffy-pulling machine).

мущений можно определить подпространство векторов, норма которых становится экспоненциально малой при эволюции в прямом времени, и подпространство векторов, норма которых становится экспоненциально малой при эволюции в обратном времени. В системах с непрерывным временем для траекторий, отличных от неподвижной точки, вводится еще одномерное нейтральное подпространство (возмущения вдоль траектории). Произвольный вектор малого возмущения обязан допускать представление в виде линейной комбинации векторов, относящихся к указанным подпространствам.

Множество точек, образы которых с течением времени сближаются с образом точки гиперболической траектории, есть устойчивое многообразие этой точки. Неустойчивое многообразие – это множество точек, прообразы которых приближаются к прообразу исходной точки в обратном времени. Устойчивое или неустойчивое многообразие траектории получается объединением устойчивых или неустойчивых многообразий, построенных для ее точек. То обстоятельство, что для гиперболических орбит это именно многообразия (то есть гладкие кривые, поверхности или гиперповерхности), является заключением специальной теоремы. На однородно гиперболическом аттракторе многообразия всех траекторий обязаны быть одной размерности. Устойчивые и неустойчивые многообразия не должны иметь касаний, а пересечения допускаются только под ненулевым углом.

Существует обоснованный на уровне математической теоремы и допускающий проверку в численных расчетах критерий гиперболичности – *критерий конусов* [3–8]. Пусть динамика задана гладким отображением. Критерий требует, чтобы при некотором выборе константы $\gamma > 1$ для каждой точки на данной траектории можно было определить в пространстве векторов бесконечно малых возмущений расширяющийся и сжимающийся конусы. Расширяющийся конус есть множество векторов, норма которых при действии отображения увеличивается в γ и более раз. Сжимающийся конус есть множество векторов, норма которых увеличивается в γ и более раз при действии обратного отображения. Эти конусы должны быть инвариантны в том смысле, что образ расширяющегося конуса попадает внутрь расширяющегося конуса, определенного для точки-образа, а прообраз сжимающегося конуса – внутрь сжимающегося конуса для точки-прообраза.

Если условия найдены выполняющимися в содержащей аттрактор поглощающей области, то гарантирована справедливость критерия и для всех траекторий на аттракторе. Для систем с непрерывным временем критерий применим в той же форме в рамках описания с помощью отображения Пуанкаре. Примеры компьютерной проверки критерия конусов и некоторые детали вычислительных приемов см. в работах [16–20].

2. Геометрические конструкции гиперболических аттракторов

Начнем с обсуждения гиперболических аттракторов в моделях с дискретным временем, формулируемых как геометрические конструкции [1–10].

Аттрактор Смейла–Вильямса [1–10]. Рассмотрим тор в трехмерном пространстве, как поглощающую область конструируемого отображения. Растянем его в длину, сожмем в поперечном направлении, сложим в виде двойной петли и вложим внутрь исходного тора (рис. 1). Полагаем, что поперечный размер сокращается более чем вдвое, и общий объем объекта уменьшается (диссипативность). На каждой итерации число витков удваивается и в пределе становится бесконечным – получа-

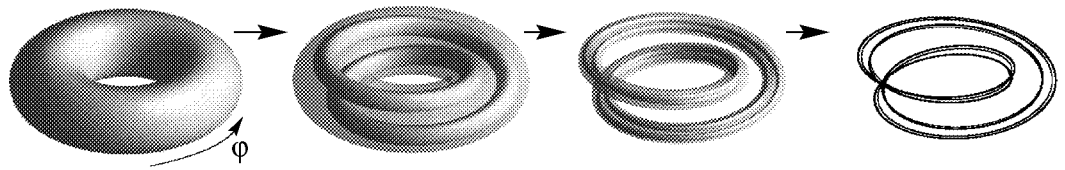


Рис. 1. Тороидальная поглощающая область в трехмерном фазовом пространстве (слева), результат ее преобразования на двух итерациях и соленоид Смейла–Вильямса, получающийся при многократном применении отображения (справа)

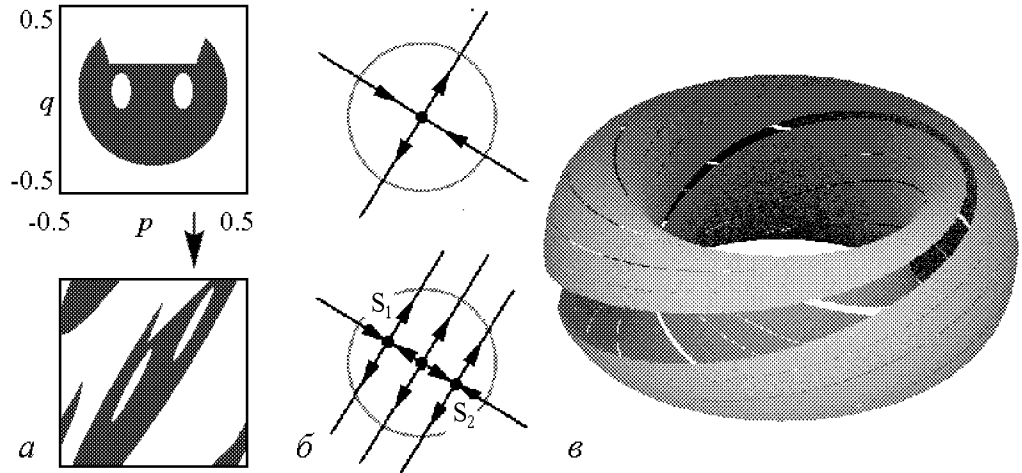


Рис. 2. Иллюстрация действия гиперболического отображения Аносова на точки единичного квадрата, представляющего собой развертку тора (*a*), пояснение модификации отображения в окрестности неподвижной точки в начале координат, составляющей содержание «хирургии Смейла» для перехода к отображению с *DA*-аттрактором (*б*), и портрет аттрактора, представленный на поверхности тора (*в*)

ется так называемый *соленоид*. Если рассмотреть поперечное сечение объекта, то на очередном шаге внутри каждого имеющегося к этому моменту диска выделяются две подобласти в виде дисков, сохраняемые для следующего шага. Когда число итераций стремится к бесконечности, остается множество типа канторова, как поперечное сечение соленоида. Неустойчивое многообразие любой точки на аттракторе одномерно и вытянуто вдоль волокна аттрактора, содержащего эту точку. Взятое целиком, неустойчивое многообразие совпадает с самим аттрактором. С другой стороны, двумерные устойчивые многообразия представлены семейством сечений тора поперек волокон аттрактора.

Следующий пример гиперболического аттрактора введен Смейлом и назван *DA-аттрактор* («Derived from Anosov») [1, 4, 6, 7]. Начнем с отображения Аносова

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} \pmod{1}, \quad (1)$$

фазовое пространство которого интерпретируется как поверхность тора с заданными на ней угловыми координатами $\varphi = 2\pi p$ и $\theta = 2\pi q$. Для графического представления удобно использовать развертку в виде единичного квадрата на плоскости (p, q) , у которого считаются попарно отождествленными противоположные стороны. Отображение (1) относится к классу консервативных. В начале координат оно имеет неподвижную точку типа седла, причем направления устойчивого и неустойчивого многообразий даются собственными векторами фигурирующей в (1) матрицы,

а именно, $\mathbf{a}_1 = (1, W)^T$ и $\mathbf{a}_2 = (-W, 1)^T$, где $W = (\sqrt{5} + 1)/2$. Отображение (1) часто называют отображением кота Арнольда, поскольку Арнольд иллюстрировал его действие, рассматривая область в виде головы кота (рис. 2, *а*).

Чтобы присутствовал аттрактор, отображение модифицируют, и оно становится диссипативным. Модификация затрагивает небольшую окрестность неподвижной точки и состоит в добавлении некоторых функций к правым частям уравнений. Их можно выбрать так, чтобы движение вдоль неустойчивого многообразия не претерпело изменений, а по второму собственному направлению неподвижная точка стала отталкивающей. При этом рядом с ней возникают седла S_1 и S_2 (рис. 2, *б*). За пределами зоны, подвергнутой «хирургии», вид отображения не меняется. Поглощающей областью служит вся поверхность тора за исключением вырезанной окрестности начала координат такого размера, что точки S_1 и S_2 в нее не попадают. При итерациях вырез вытягивается в обе стороны параллельно вектору \mathbf{a}_1 с одновременным сжатием по ортогональному направлению \mathbf{a}_2 , так что «отростки» превращаются в узкие полоски, идущие вдоль линии, отвечающей неустойчивому собственному направлению. Так как угловой коэффициент иррационален, эта линия плотно покрывает тор (рис. 2, *в*). Так формируется характерная для гиперболического аттрактора поперечная канторова структура.

Аттрактор Плыкина [21, 3–10] имеет место в двумерном отображении на плоскости. Поглощающая область составлена из трех полудисков с маленькими полукруглыми вырезами (рис. 3, *а*, слева). Область покрыта штриховкой, обозначающей заданные на ней два поля направлений. Результатом действия отображения

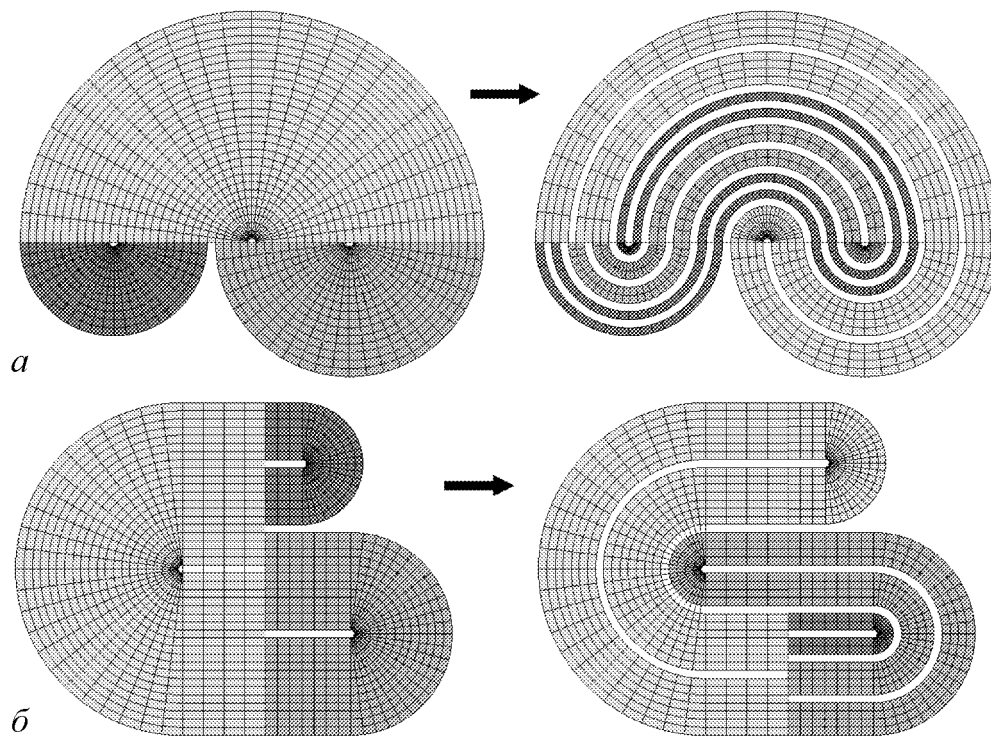


Рис. 3. Поглощающая область и результат ее преобразования при применении отображения для аттрактора Плыкина (*а*) и Плыкина–Ньюхауса (*б*)

является фигура справа. Заметим, что поля направлений после применения отображения совпадают с исходными полями, причем по одному из них осуществляется сжатие, а по другому – растяжение. Это обеспечивает гиперболическую природу аттрактора. Наличие вырезов, или дырок, принципиально. Как доказано Плыкиным, три – минимальное количество дырок, необходимое, чтобы в ограниченной части плоскости мог присутствовать однородно гиперболический аттрактор.

В двумерной области с тремя и более дырками можно сконструировать много гиперболических аттракторов, отличающихся друг от друга по топологической структуре [2]. О них говорят, как об аттракторах типа Плыкина. Одна из модификаций представлена на рис. 3, б; соответствующий аттрактор будем именовать *аттрактором Плыкина–Ньюхауса* [8, 21].

Аттракторы типа Плыкина можно рассматривать на сфере. Переход с плоскости на сферу и обратно производится заменой переменных, которая дается известной из элементарной геометрии стереографической проекцией.

3. Гиперболические аттракторы итерируемых отображений

Математики обычно стремятся конструировать модели так, чтобы по возможности облегчить строгое доказательство гиперболической природы аттракторов. Мы же отдаем предпочтение моделям, для которых рабочие соотношения заданы аналитически единым образом для всего фазового пространства. Что касается обоснования гиперболической природы аттрактора, то в этой ситуации уместно использовать компьютерную проверку критерия конусов.

ДА-аттрактор. Отображение кота Арнольда можно представить как композицию двух отображений, отвечающих половине шага. Именно, если $p_{n+\frac{1}{2}} = p_n + q_n$, $q_{n+\frac{1}{2}} = q_n$ и $p_{n+1} = p_{n+\frac{1}{2}}$, $q_{n+1} = p_{n+\frac{1}{2}} + q_{n+\frac{1}{2}}$, то на полном шаге $p_{n+1} = p_n + q_n$, $q_{n+1} = p_n + 2q_n$. В качестве альтернативы «хирургии Смейла» выполним ДА-модификацию, используя гладкие функции. На первом полушаге добавим в первое уравнение нечетную функцию p , чтобы сохранилась неподвижная точка в начале координат. Эта функция должна иметь период 1. Учитывая две гармоники Фурье, зададим соотношение амплитуд так, чтобы вблизи середины интервала влияние добавки по возможности исключить. Это приводит к функции $\sin 2\pi p + (1/2) \sin 4\pi p$. На втором полушаге добавку в виде такой же функции от q вводим во второе уравнение. Комбинируя оба полушага, имеем

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + q_n + \frac{\varepsilon}{2\pi} (\sin 2\pi p_n + \frac{1}{2} \sin 4\pi p_n) \pmod{1}, \\ q_{n+1} &= p_n + 2q_n + \frac{\varepsilon}{2\pi} (\sin 2\pi p_n + \frac{1}{2} \sin 4\pi p_n + \sin 2\pi q_n + \frac{1}{2} \sin 4\pi q_n) \pmod{1}, \end{aligned} \quad (2)$$

где ε характеризует относительную величину добавок и выбирается в интервале от $1/8$ до $4/9$.²

²С ростом ε , начиная от нуля, оба мультипликатора неподвижной точки увеличиваются. Первый всегда больше единицы, а второй достигает единицы при $\varepsilon = \varepsilon_1 = 1/8$, что отвечает возникновению неустойчивости по второму направлению. Определитель матрицы Якоби остается положительным во всем единичном квадрате, пока $\varepsilon < \varepsilon_2 = 4/9$, так что при этом условии отображение обратимое.

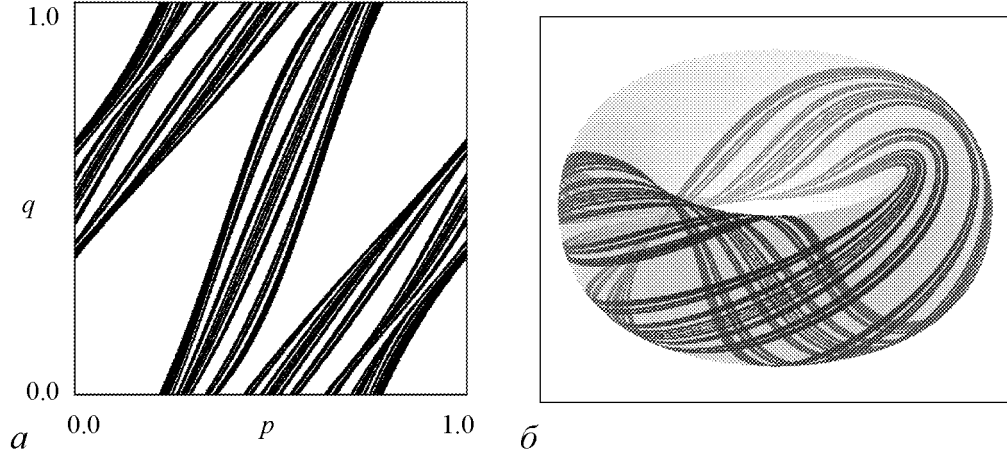


Рис. 4. Портрет аттрактора отображения (2) при $\varepsilon=0.35$ в единичном квадрате (а) и на поверхности тора (б)

На рис. 4 показаны портреты аттрактора в единичном квадрате (а) и на поверхности тора (б) при $\varepsilon = 0.35$. Можно наблюдать характерную поперечную канторову структуру. Вычисления подтверждают выполнение критерия конусов, так что аттрактор следует признать гиперболическим. Показатели Ляпунова согласно результатам расчетов, $\Lambda_1 = 0.962$, $\Lambda_2 = -1.345$, а размерность по Каплану–Йорке $D_L = 1 + \Lambda_1/|\Lambda_2| \approx 1.72$. Отметим, что старший показатель близок к величине, отвечающей отображению кота Арнольда $\ln((3 + \sqrt{5})/2) \approx 0.962$.

От DA-аттрактора к аттрактору Пльикина–Ньюхауса. Преобразуем модель с DA-аттрактором, следуя идее, изложенной в книге Катока и Хассельблата [10] и в диссертации Ханта [22]. Сначала в уравнениях (2) удвоим аргументы под знаком добавленных функций:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + q_n + \frac{\varepsilon}{2\pi} (\sin 4\pi p_n + \frac{1}{2} \sin 8\pi p_n) \pmod{1}, \\ q_{n+1} &= p_n + 2q_n + \frac{\varepsilon}{2\pi} (\sin 4\pi p_n + \frac{1}{2} \sin 8\pi p_n + \sin 4\pi q_n + \frac{1}{2} \sin 8\pi q_n) \pmod{1}, \end{aligned} \quad (3)$$

что вносит нужную для построения дополнительную симметрию. Изображение аттрактора в единичном квадрате составлено теперь из четырех уменьшенных копий объекта на рис. 4, а. Учитывая симметрию, условимся считать эквивалентными точки, связанные соотношением $(p, q) \leftrightarrow (1 - p, 1 - q)$. Далее выполним последовательность шагов, иллюстрируемую на рис. 5. Возьмем верхнюю или нижнюю половинку изображения (а). Представляя картинку нарисованной на резиновой пленке, согнем ее пополам по вертикальной линии и склеим по левому, верхнему и нижнему краям (б). В силу присущей отображению симметрии, при таком склеивании волокна аттрактора аккуратно и правильно соединятся. Далее, надуем получившийся квадратный «конверт», как воздушный шарик, превратив его в сферу (с). Со сферы можно перейти на плоскость, используя стереографическую проекцию (е).

Формально переход на плоскость производится так. Введем комплексную величину $z = p + iq$. Замена переменных должна даваться функцией z с периодами 1 и i . Как известно, двоякопериодические функции комплексной переменной – это эллиптические функции [23]. В частности, функция Вейерштрасса с периодами 1 и

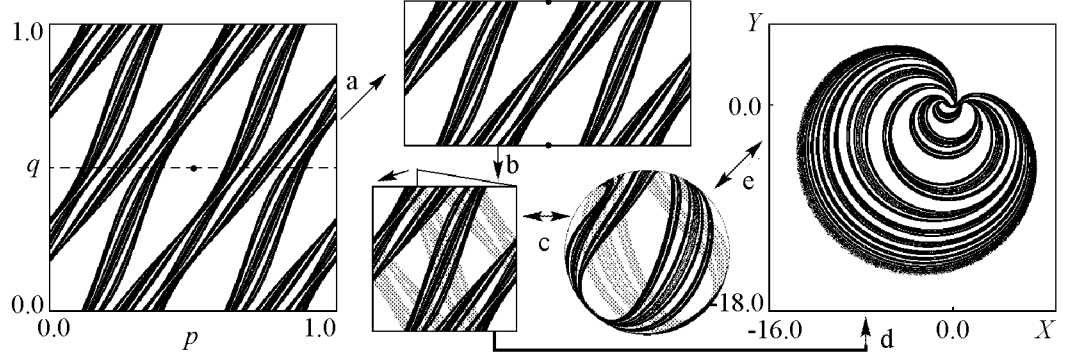


Рис. 5. Иллюстрация перехода от DA-аттрактора отображения (3) при $\varepsilon = 0.35$ (слева) к аттрактору Пльикина–Ньюхауса (справа). Шаги построения: выделение половинки единичного квадрата (a), складывание вдвое (b), переход на сферу (c), который можно реализовать, перейдя сначала на плоскость с использованием функции Вейерштрасса (d), а потом производя стереографическую проекцию (e)

i определяется рядом

$$\wp(z) = z^{-2} + \sum_{\substack{m,n=-\infty \\ (m,n) \neq (0,0)}}^{\infty} [(z - m - in)^{-2} - (m + in)^{-2}]. \quad (4)$$

Заменой $X + iY = 2\wp(p + iq)/\sqrt{g_2}$, $g_2 = 189.07272013$, точки нижней половины единичного квадрата переводятся в точки плоскости X, Y , причем начало координат отображается в бесконечность, а три точки, образующие неустойчивый цикл $(0, 1/2) \rightarrow (1/2, 0) \rightarrow (1/2, 1/2) \rightarrow \dots$, в точки $(-1, 0)$, $(1, 0)$ и $(0, 0)$. В переменных X, Y отображение выражается сложно и его вид здесь не приводится. Практически, разумно проводить итерации в переменных p и q , а функцию \wp использовать только для пересчета координат на плоскость. Вид аттрактора на плоскости показан на рис. 5 справа. Анализ расположения волокон аттрактора приводит к заключению, что по топологической структуре это аттрактор Пльикина–Ньюхауса, причем роль «дырок» играют окрестности точек $(-1, 0)$, $(1, 0)$ и $(0, 0)$.

Для перехода на сферу делаем еще одну замену. Пусть это единичная сфера в пространстве (x, y, z) с центром в начале координат, а центр стереографической проекции соответствует южному полюсу $(0, 0, -1)$. Тогда замена дается соотношением $Z = (x + iy)/(1 + z)$.

Отображения с **аттрактором Смейла–Вильямса** конструируются достаточно просто и приведены во многих учебниках. Например, можно определить отображение, следуя [7], как

$$\varphi_{n+1} = 2\varphi_n, \quad X_{n+1} = \alpha X_n + \frac{1}{2} \cos \varphi_n, \quad Y_{n+1} = \alpha Y_n + \frac{1}{2} \sin \varphi_n, \quad (5)$$

где α достаточно малая константа, X и Y – координаты точки в сечении тора меридиональной плоскостью, а φ – угловая координата, характеризующая положение данного сечения. При $\alpha = 1/3$ получается аттрактор, изображенный на рис. 1. Значения показателей Ляпунова $\Lambda_1 = \ln 2$, $\Lambda_2 = \Lambda_3 = -\ln 3$. (Поскольку за один шаг итераций производится растяжение вдвое вдоль волокон аттрактора по угловой координате φ , и сжатие по двум поперечным направлениям в три раза.) Размерность аттрактора по формуле Каплана–Йорке $D_{KY} = 1 + \Lambda_1/|\Lambda_2| \approx 1.63$.

4. Примеры неавтономных потоковых систем с гиперболическими аттракторами в отображении Пуанкаре

Чтобы перейти от отображения к системе с непрерывным временем или, как говорят математики, выполнить надстройку, нужно указать способ провести видоизменение поглощающей области на одном шаге отображения как непрерывную деформацию. Для неавтономных систем она осуществляется в сечении, перемещающемся вдоль временной оси в расширенном фазовом пространстве за период изменения во времени правых частей уравнений.

В диссертации Ханта [22] представлена модель, реализующая надстройку аттрактора Плыкина–Ньюхауса (см. также [24]). В правых частях дифференциальных уравнений относительно двух переменных вид функций задается по-разному на трех стадиях, составляющих полный период изменения правых частей во времени. Определяющие соотношения различаются в зависимости от области фазового пространства и содержат множество искусственно введенных сглаживающих функций. Достоинство модели в том, что гиперболичность аттрактора строго обосновывается, однако, трудно вообразить, чтобы ее можно было воспроизвести как реальное физическое устройство.

Обратимся к другим примерам неавтономных систем с гиперболическими аттракторами в отображении Пуанкаре, в которых также используется разбиение полного периода на последовательные стадии.

Система, реализующая надстройку аттрактора Плыкина–Ньюхауса введена в недавней работе автора [25]. Мгновенные состояния системы ассоциируются с точками единичной сферы и задаются координатами x, y, z , подчиненными условию $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Роль дырок играют окрестности точек A, B, C, D (рис. 6, а). Рассмотрим непрерывные преобразования, каждое из которых занимает единичный интервал времени.

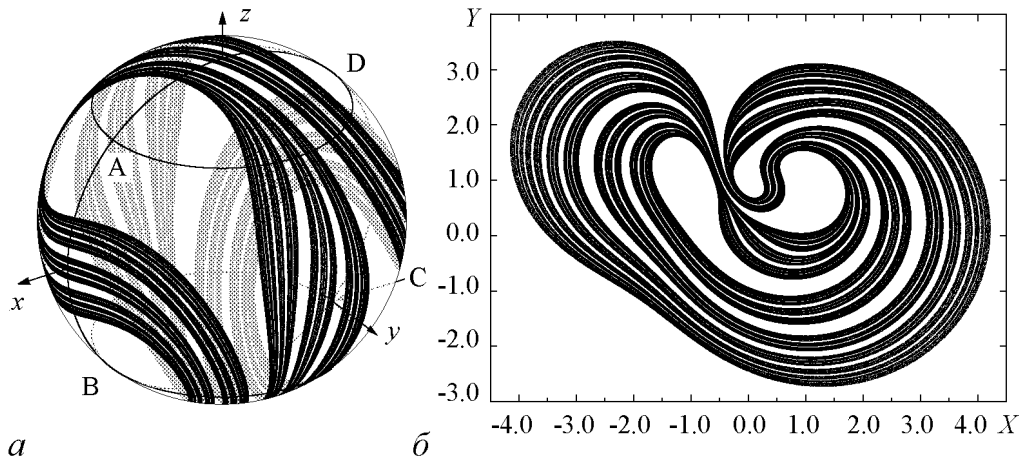


Рис. 6. Аттрактор отображения (7) при $\varepsilon = 0.77$ на единичной сфере (а) и его представление на плоскости переменных X, Y (б)

1) Сток по параллели

$$\dot{x} = -\varepsilon xy^2, \quad \dot{y} = \varepsilon x^2 y, \quad \dot{z} = 0.$$

2) Дифференциальное вращение вокруг оси z

$$\dot{x} = \pi(z/\sqrt{2} + 1/2)y, \quad \dot{y} = -\pi(z/\sqrt{2} + 1/2)x, \quad \dot{z} = 0.$$

3) Сток к экватору

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = \varepsilon y z^2, \quad \dot{z} = -\varepsilon y^2 z.$$

4) Дифференциальное вращение вокруг оси x

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = -\pi(x/\sqrt{2} + 1/2)z, \quad \dot{z} = \pi(x/\sqrt{2} + 1/2)y.$$

Эта последовательность преобразований периодически повторяется, что можно представить единой неавтономной системой уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\varepsilon y^2 x f_1(t) + \pi(z/\sqrt{2} + 1/2) y f_2(t), \\ \dot{y} &= \varepsilon x^2 y f_1(t) - \pi(z/\sqrt{2} + 1/2) x f_2(t) + \varepsilon y z^2 f_3(t) - \pi(x/\sqrt{2} + 1/2) z f_4(t), \\ \dot{z} &= -\varepsilon y^2 z f_3(t) + \pi(x/\sqrt{2} + 1/2) y f_4(t), \end{aligned} \quad (6)$$

где $f_k(t) = 1$, если $k - 1 \leq t - 4[t/4] < k$, и 0 в противном случае. (Квадратные скобки здесь означают целую часть числа.)

Заметим, что разрывная зависимость от времени коэффициентов $f_k(t)$ не препятствует существованию аттрактора интересующего типа в отображении Пуанкаре, описывающем изменение состояния $x_n = (x_n, y_n, z_n)$ за период $T=4$. Это композиция диффеоморфизмов, каждый из которых отвечает одной из стадий эволюции. Отображение можно выписать явно:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f_+(f_-(x_n)), \\ f_{\pm}(x) &= \begin{pmatrix} \pm z \\ \sqrt{x^2 + y^2} \frac{y e^{\frac{\varepsilon}{2}(x^2+y^2)} \cos(\pi/2)(z\sqrt{2} + 1) \pm x e^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^2+y^2)} \sin(\pi/2)(z\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{x^2 e^{-\varepsilon(x^2+y^2)} + y^2 e^{\varepsilon(x^2+y^2)}}} \\ \sqrt{x^2 + y^2} \frac{y e^{\frac{\varepsilon}{2}(x^2+y^2)} \sin(\pi/2)(z\sqrt{2} + 1) \mp x e^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^2+y^2)} \cos(\pi/2)(z\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{x^2 e^{-\varepsilon(x^2+y^2)} + y^2 e^{\varepsilon(x^2+y^2)}}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

Точка C служит неустойчивой неподвижной точкой отображения, а точки A, B, D образуют неустойчивый цикл периода 3: $A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A$.

На рис. 6, a показан аттрактор отображения (7) на сфере при $\varepsilon=0.77$. Отметим наличие характерной поперечной фрактальной структуры аттрактора, как бы составленного из полосок, каждая из которых содержит полосы следующего уровня, и так далее. Показатели Ляпунова найдены равными $\Lambda_1 = 0.959$, $\Lambda_2 = -1.141$, а размерность аттрактора по формуле Каплана-Йорке $D_L \approx 1 + \Lambda_1/|\Lambda_2| = 1.841$. Проведенные численные расчеты свидетельствуют, что критерий конусов выполнен, так что гиперболичность аттрактора подтверждена [20].

Описание динамики можно переформулировать так, чтобы мгновенные состояния представлялись точками на плоскости. Для этого проведем замену переменных $W = X + iY = (x - z + iy\sqrt{2})/(x + z + \sqrt{2})$. Это соответствует стереографической проекции с выбором за центр проецирования точки C . Аттрактор отображения Пуанкаре на плоскости показан на рис. 6, б. Анализ топологии расположения волокон аттрактора позволяет заключить, что это аттрактор типа Плькина–Ньюхауса.

Ту же замену можно сделать непосредственно в уравнениях (6), поскольку точка C не принадлежит аттрактору (находится в «дырке») на протяжении всего периода. Получается неавтономная система двух дифференциальных уравнений первого порядка относительно X и Y . (Из-за громоздкого вида они здесь опущены.) На рис. 7 показаны полученные при численном решении уравнений зависимости переменных от времени, демонстрирующие хаос, а также портрет аттрактора в трехмерном расширенном фазовом пространстве.

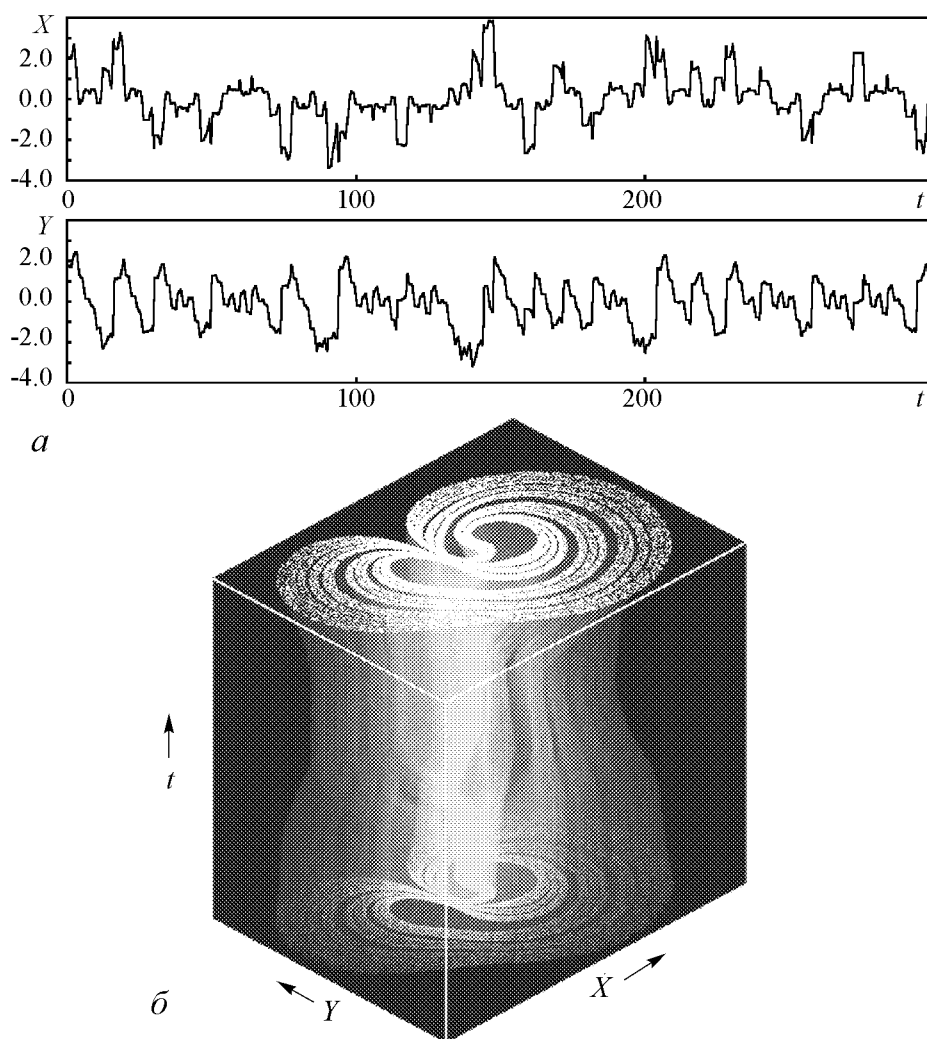


Рис. 7. Зависимости динамических переменных от времени в системе (6) при $\varepsilon = 0.77$ (а) и портрет аттрактора в трехмерном расширенном фазовом пространстве (б). В сечении можно видеть объект, показанный на рис. 6, б

Модель, реализующая надстройку аттрактора Смейла–Вильямса. Сконструируем неавтономную систему, в которой мгновенное состояние дается вектором (x, y, z) , а расширенное фазовое пространство четырехмерное. Рассмотрим четыре стадии, каждая протяженностью в единицу времени.

1) Дифференциальное вращение вокруг оси x

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = -\frac{\pi}{2}xz, \quad \dot{z} = \frac{\pi}{2}xy.$$

2) Неоднородное смещение со сжатием по оси y

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = -d_1(y - 2x^2 + 1), \quad \dot{z} = 0.$$

3) Поворот вокруг оси y на угол $\pi/2$

$$\dot{x} = -\frac{\pi}{2}z, \quad \dot{y} = 0, \quad \dot{z} = \frac{\pi}{2}x.$$

4) Сжатие к единичной окружности в плоскости $z = 0$

$$\dot{x} = \mu x(1 - x^2 - y^2), \quad \dot{y} = \mu y(1 - x^2 - y^2), \quad \dot{z} = -d_2 z.$$

Последовательность преобразований периодически повторяется, что представляется единой неавтономной системой уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\pi}{2}z f_3(t) + \mu x(1 - x^2 - y^2) f_4(t), \\ \dot{y} &= -\frac{\pi}{2}xz f_1(t) - d_1(y - 2x^2 + 1) f_2(t) + \mu y(1 - x^2 - y^2) f_4(t), \\ \dot{z} &= \frac{\pi}{2}xy f_1(t) + \frac{\pi}{2}x f_3(t) - d_2 z f_4(t), \end{aligned} \quad (8)$$

где $f_k(t) = 1$, если $k - 1 \leq t - 4[t/4] < k$, и $f_k(t) = 0$ в противном случае. Объединяя первую стадию со второй и третью с четвертой, можно получить отображение за период в виде

$$\begin{aligned} x_{n+\frac{1}{2}} &= x_n, \\ y_{n+\frac{1}{2}} &= e^{-d_1} \left(y_n \cos \frac{\pi}{2} x_n - z_n \sin \frac{\pi}{2} x_n \right) + (2x_n^2 - 1)(1 - e^{-d_1}), \\ z_{n+\frac{1}{2}} &= z_n, \\ x_{n+1} &= -\frac{e^\mu z_{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{1 + (z_{n+\frac{1}{2}}^2 + y_{n+\frac{1}{2}}^2)(e^{2\mu} - 1)}}, \\ y_{n+1} &= \frac{e^\mu y_{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{1 + (z_{n+\frac{1}{2}}^2 + y_{n+\frac{1}{2}}^2)(e^{2\mu} - 1)}}, \\ z_{n+1} &= e^{-d_2} x_{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (9)$$

На рис. 8, *а* показана область, заданная неравенством $(p\sqrt{x^2+y^2}-1)^2+qz^2 \leq 1$, $p = 12.5$, $q = 25$, и результат ее преобразования за один шаг отображения Пуанкаре (9) при $d_1 = d_2 = 2$, $\mu = 2$. Действие отображения качественно согласуется с конструкцией Смейла–Вильямса. Хотя локальное направление растяжения не везде совпадает с направлением волокон, и локальное направление сжатия образует с ним разный угол в зависимости от расположения в фазовом пространстве, имеющаяся степень соответствия геометрической конструкции достаточна, чтобы реализовался однородно гиперболический аттрактор. На рис. 8, *б* представлен портрет аттрактора. На вставке в увеличенном виде можно видеть поперечную канторову структуру. На рис. 8, *в* приводится итерационная диаграмма для угловой переменной, определяемой на n -м шаге итераций отображения по формуле $\varphi_n = \arg(x_n + iy_n)$. Ее вид соответствует растягивающему отображению окружности, в котором изменение аргумента на 2π влечет изменение функции на 4π .

Найденные значения показателей Ляпунова $\Lambda_1 = 0.661$, $\Lambda_2 = -2.601$, $\Lambda_3 = -2.650$, а размерность аттрактора по формуле Каплана–Йорке $D_L \approx 1 + \Lambda_1/|\Lambda_2| \approx 1.25$. Проведенные численные расчеты подтверждают выполнение критерия конусов в поглощающей области.

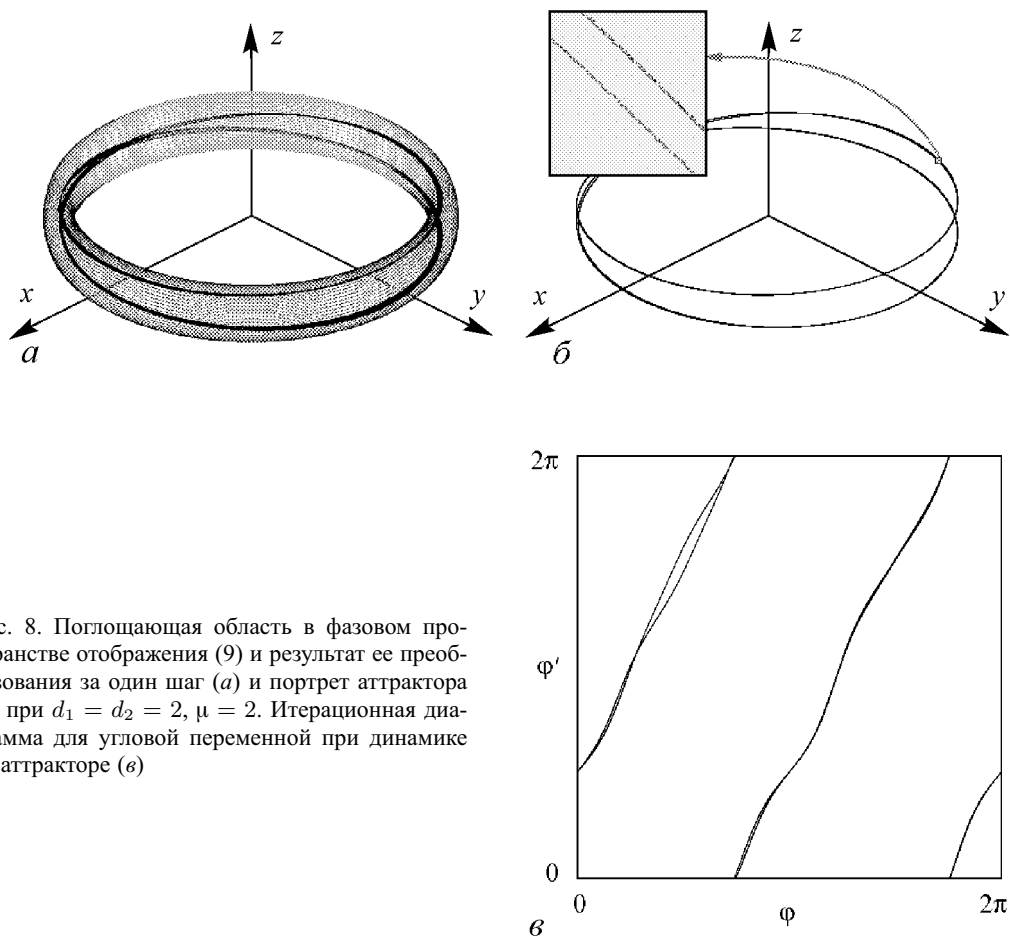


Рис. 8. Поглощающая область в фазовом пространстве отображения (9) и результат ее преобразования за один шаг (*а*) и портрет аттрактора (*б*) при $d_1 = d_2 = 2$, $\mu = 2$. Итерационная диаграмма для угловой переменной при динамике на аттракторе (*в*)

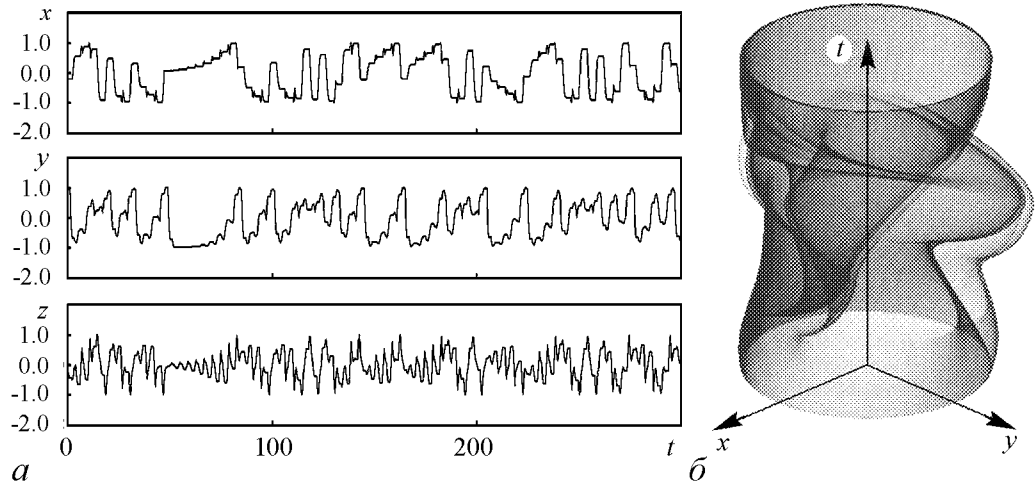


Рис. 9. Зависимости переменных x , y , z от времени, полученные при численном решении уравнений (8) для $d_1 = d_2 = 2$, $\mu = 2$ (а). Портрет аттрактора в 3-мерной проекции из 4-мерного расширенного фазового пространства, представленный тонами серого цвета, где насыщенность тона определяется относительной частотой пребывания изображающей точки в соответствующем пикселе (б)

На рис. 9 иллюстрируются аспекты динамики, отражающие специфику системы с непрерывным временем. Диаграмма (а) показывает зависимости переменных от времени, демонстрирующие хаотическое поведение. На панели (б) приводится портрет аттрактора в трехмерной проекции.

5. Гиперболические аттракторы в связанных осцилляторах с поочередным возбуждением

В работе [26] указан способ реализации гиперболического аттрактора в системе двух осцилляторов ван дер Поля, возбуждающихся попеременно благодаря модуляции параметра. Переход каждого осциллятора к активной стадии сопровождается передачей возбуждения к нему от партнера, так что за полный цикл обмена возбуждением фазовая переменная претерпевает удвоение. Идея манипуляции фазами при передаче возбуждения оказалась полезным общим принципом, позволившим сконструировать примеры систем, демонстрирующих целый ряд различных феноменов сложной динамики [27–30].

Система связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля. Для аттрактора Смейла–Вильямса принципиально наличие угловой переменной, которая при действии отображения Пуанкаре умножается на два, тогда как по остальным направлениям имеет место сжатие фазового объема. Пусть эта переменная – фаза некоторого колебательного процесса. Построим неавтономную систему так, чтобы за временной период изменения коэффициентов реализовалось отображение нужного типа для фазы. В модельных уравнениях

$$\begin{aligned} \ddot{x} - [A \cos(2\pi t/T) - x^2]\dot{x} + \omega_0^2 x &= \varepsilon y \cos \omega_0 t, \\ \ddot{y} - [-A \cos(2\pi t/T) - y^2]\dot{y} + 4\omega_0^2 y &= \varepsilon x^2 \end{aligned} \quad (10)$$

обобщенные координаты x и y относятся к двум осцилляторам типа ван дер По-

ля с рабочими частотами ω_0 и $2\omega_0$, соответственно. Они возбуждаются по очереди благодаря принудительному изменению с периодом T параметра, ответственного за бифуркацию Андронова–Хопфа, причем глубина модуляции задается константой A . Отношение $N = \omega_0 T / 2\pi$ предполагается целым, так что (10) – система уравнений с периодическими коэффициентами. Воздействие подсистем друг на друга характеризуется параметром ε .

Пусть первый осциллятор на стадии активности имеет фазу φ , так что $x \sim \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Его воздействие на второй осциллятор определяется членом, пропорциональным x_2 , который содержит вторую гармонику $\cos(2\omega_0 t + 2\varphi)$ с фазой 2φ . Она резонансным образом действует на второй осциллятор и способствует его возбуждению при переходе в активную стадию. Возникающие колебания получают (с точностью до постоянной добавки) ту же фазу 2φ . В свою очередь, при действии второго осциллятора на первый, благодаря смещению колебаний y со вспомогательным сигналом, возникает составляющая на частоте ω_0 с фазой 2φ , которая, будучи в резонансе с первым осциллятором, обеспечивает затравку для колебаний на очередной его активной стадии. Подсистемы по очереди передают возбуждение одна другой, и на последовательных стадиях активности фаза в рассматриваемом приближении изменяется согласно отображению Бернулли $\varphi_{n+1} = 2\varphi_n + \text{const} \pmod{2\pi}$.³

Описанный процесс действительно наблюдается при численном моделировании динамики системы, притом в широком диапазоне параметров. На рис. 10 показан образец временной зависимости обобщенных координат, полученной при численном решении уравнений (10), и диаграмма эмпирического отображения для фаз, определенных в середине стадий возбуждения первого осциллятора при динамике на аттракторе. Хаос выражается в смещении заполнения относительно огибающей на последовательных стадиях активности.

Предположим, что в момент $t_n = nT$ состояние системы задано вектором $\mathbf{x}_n = \{x, u, y, v\}$, где $u = \dot{x}/\omega_0$, $v = \dot{y}/\omega_0$. Из решения уравнений с начальными условиями x_n на интервале времени T получаем новый вектор \mathbf{x}_{n+1} и, тем самым, определяем функцию, отображающую четырехмерное пространство $\{x, u, y, v\}$ в себя: $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{T}(\mathbf{x}_n)$. В пространстве состояний при действии отображения имеет место

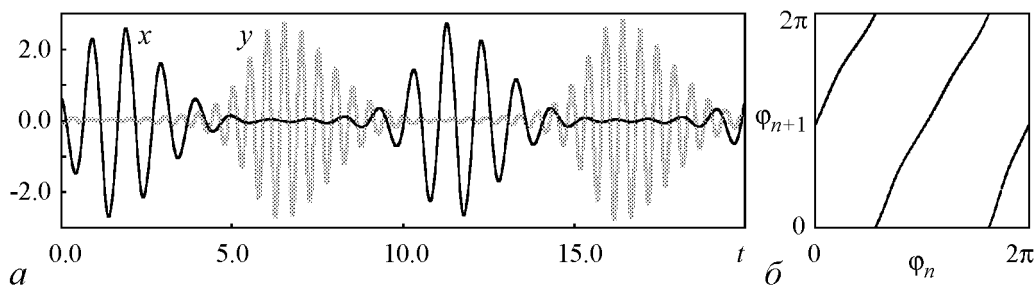


Рис. 10. Образец временной зависимости для переменных x и y , полученной при численном решении уравнений (10) для $\omega_0 = 2\pi$, $T = N = 10$, $A = 3$, $\varepsilon = 0.5$ (а) и диаграмма эмпирического отображения для фаз, определенных в середине стадий возбуждения первого осциллятора (б)

³Константу можно устранить сдвигом начала отсчета фазы φ .

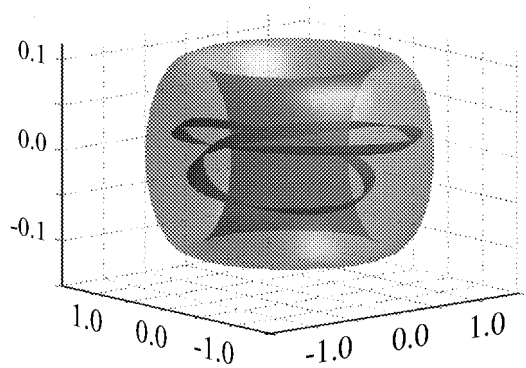


Рис. 11. Поглощающая область и ее образ под действием отображения Пуанкаре в виде проекции из четырехмерного пространства (x_0, x_1, x_2, x_3) , где $x_0 = x/0.812$, $x_1 = (u - 0.438x)/0.721$, $x_2 = y + 0.042x - 0.226u$, $x_3 = v + 0.218x - 0.029u + 0.118y$. В горизонтальной плоскости отложены x_0, x_1 , а по вертикальной оси x_2 . Четвертая переменная x_3 отвечает направлению проецирования. Значения параметров $\omega_0 = 2\pi$, $T = 6$, $A = 5$, $\varepsilon = 0.5$

растяжение в направлении, связанном с фазой φ , и сжатие по трем остальным направлениям. С учетом цикличности по φ , мы можем вообразить торонд U в 4-мерном пространстве (область, топологически представляющая собой прямое произведение окружности и трехмерного шара), такой что одна итерация отвечает продольному растяжению и поперечному сжатию этого объекта, вкладываемого затем в виде двойной петли внутрь исходной области. Это соответствует конструкции аттрактора Смейла–Вильямса, хотя размерность фазового пространства на единицу больше, чем минимально необходимая для существования такого аттрактора. На рис. 11 показана трехмерная проекция, дающая представление о взаимном расположении областей U и $T(U)$.

Область $T(U)$ выглядит как узкая лента из-за сильного поперечного сжатия фазового объема.

На рис. 12 приводятся изображения аттрактора системы (10). На панели (а) показана проекция аттрактора из пятимерного расширенного пространства состояний на фазовую плоскость первого осциллятора (x, u) . Черным отмечены точки, отвечающие сечению Пуанкаре, то есть моментам времени $t_n = nT$. Панель (б) изображает аттрактор в сечении Пуанкаре и соответствует фрагменту диаграммы (а) внутри пунктирного параллелограмма. Очевидно визуальное сходство с аттрактором Смейла–Вильямса. Поперечная канторова структура аттрактора иллюстрируется отдельно на панелях (в) и (г).

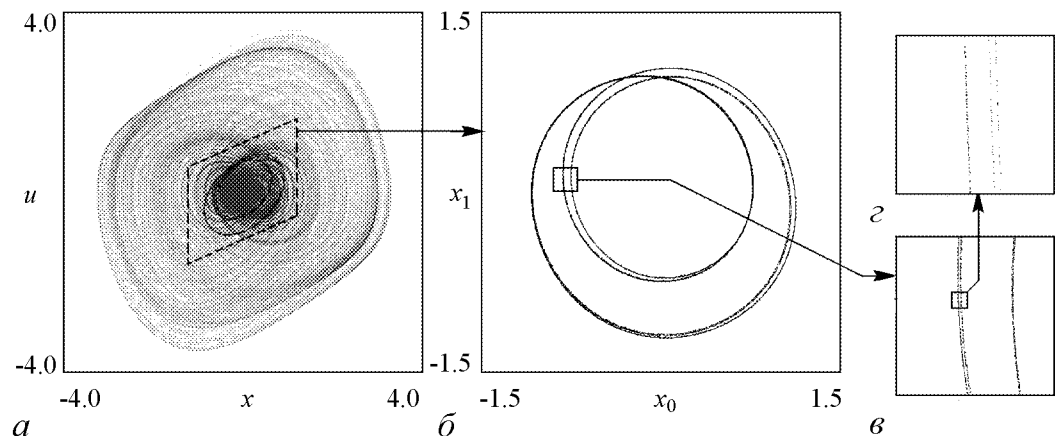


Рис. 12. Аттрактор системы связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля (10) при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 6$, $A = 5$, $\varepsilon = 0.5$ в проекции на фазовую плоскость первого осциллятора в исходных переменных (а), портрет аттрактора в сечении Пуанкаре на плоскости (x_0, x_1) (б) и детали поперечной структуры аттрактора (в), (г)

Согласно результатам расчетов, показатели Ляпунова для аттрактора отображения Пуанкаре при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 6$, $A = 5$, $\varepsilon = 0.5$ составили $\Lambda_1 = 0.6832$, $\Lambda_2 = -2.602$, $\Lambda_3 = -4.605$, $\Lambda_4 = -6.538$. Положительный показатель Λ_1 , наличие которого свидетельствует о присутствии хаоса, близок к величине $\ln 2 = 0.693$, что естественно в свете приближенного описания эволюции фазовой переменной одномерным отображением. Оценка размерности через показатели Ляпунова по формуле Каплана–Йорке дает $D \approx 1.263$. Корреляционная размерность аттрактора в сечении Пуанкаре была вычислена по алгоритму Грассбергера–Прокаччиа обработкой четырехкомпонентного временного ряда $x_n = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}_{t_n=nT}$ ($n = 1 \div M$, $M = 40000$) и составила $D \approx 1.252$.

Как отмечалось, система (10) устроена так, что члены, ответственные за связь, содержат составляющие, резонансные с осциллятором, которому передается возбуждение. Однако, как показано в работе [31], аттрактор типа Смейла–Вильямса в системе попеременно активных осцилляторов может иметь место и при нерезонансной передаче возбуждения. В самом деле, с учетом конечного характерного времени передачи возбуждения, спектр сигнала ограничен по полосе частот и имеет спадающие в обе стороны «хвосты». Если, скажем, центральная частота сигнала $2\omega_0$, а частота возбуждаемого осциллятора ω_0 , то при определенных обстоятельствах присутствие на хвосте спектрального распределения частотных составляющих вблизи ω_0 может обеспечить передачу возбуждения. При нерезонансной передаче возбуждения условия на параметры системы становятся более жесткими. По-видимому, применительно ко многим физическим приложениям (СВЧ-электроника, лазерная физика), где отношение частот ω_0 и $\Omega = 2\pi/T$ велико, нерезонансная передача возбуждения на достаточном уровне, превышающем уровень шумов, будет проблематичной или вообще невозможной.

Пример автономной системы с аттрактором Смейла–Вильямса предложен в работе [29]. Рассмотрим вначале модифицированную систему «хищник – жертва»:

$$\dot{r}_1 = 2(1 - r_2 + \frac{1}{2}r_1 - \frac{1}{50}r_1^2)r_1, \quad \dot{r}_2 = 2(r_1 - 1)r_2. \quad (11)$$

Неотрицательные переменные $r_{1,2}$ можно интерпретировать как квадраты амплитуд двух осцилляторов, и записать уравнения для комплексных амплитуд a_1 и a_2 так, чтобы величины $r_{1,2} = |a_{1,2}|^2$ удовлетворяли уравнениям (1). Частоты осцилляторов считаем одинаковыми и заданными параметром ω_0 . Дополнительно введем связь между осцилляторами, для чего добавим в уравнение для первой комплексной амплитуды член, содержащий квадрат комплексной амплитуды a_2 , а в уравнение для второй – член, включающий первую степень a_1 :

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= -i\omega_0 a_1 + (1 - |a_2|^2 + \frac{1}{2}|a_1|^2 - \frac{1}{50}|a_1|^4)a_1 + \frac{1}{2}\varepsilon \operatorname{Im} a_2^2, \\ \dot{a}_2 &= -i\omega_0 a_2 + (|a_1|^2 - 1)a_2 + \varepsilon \operatorname{Re} a_1. \end{aligned} \quad (12)$$

Мгновенное состояние системы определяется комплексными числами a_1 и a_2 , то есть фазовое пространство имеет размерность 4. Выделим гиперповерхность $S = |a_2|^2 - |a_1|^2 = 0$, и рассмотрим ее пересечение траекториями в направлении увеличения S . Точка в сечении задается трехмерным вектором, так что приходим к трехмерному отображению Пуанкаре.

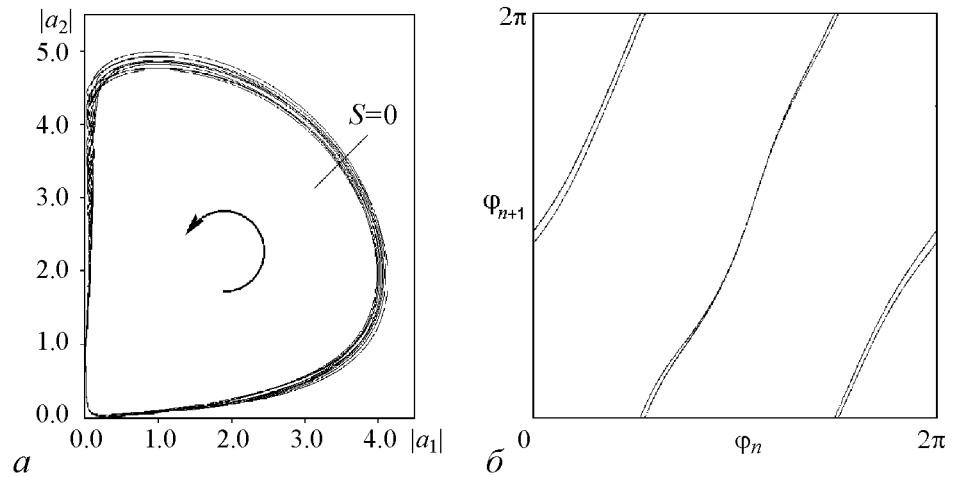


Рис. 13. Портрет аттрактора системы (12) в проекции на плоскость вещественных амплитуд $|a_1|$, $|a_2|$ (а) и отображение для фазы $\varphi = \arg a_2$, определенной в моменты последовательных пересечений секущей поверхности принадлежащей аттрактору траекторией (б)

На рис. 13 показан вид аттрактора в проекции на плоскость вещественных амплитуд обоих осцилляторов при $\omega_0 = 2\pi$, $\varepsilon = 0.3$.

В установившемся режиме траектория раз за разом посещает окрестность начала координат на плоскости переменных $|a_1|$, $|a_2|$. После каждого такого прохождения имеет место сначала возбуждение первого осциллятора, потом возбуждение второго осциллятора, далее затухание колебаний первого, и, наконец, более медленное затухание второго. Активизация второго осциллятора происходит в присутствии воздействия со стороны партнера, благодаря добавленному члену во втором уравнении, так что он наследует фазу колебаний первого осциллятора. Затем, на стадии затухания, второй осциллятор обеспечивает затравочный сигнал для первого при прохождении орбиты вблизи начала координат. Поскольку отвечающий за это член содержит квадрат комплексной амплитуды, передача возбуждения сопровождается удвоением фазы. (Здесь имеет место нерезонансный механизм.) Далее процесс повторяется, и при этом изменение фазы приближенно описывается отображением Бернулли.

На рис. 13, б показан график отображения для фазы по результатам численного решения уравнений (12). Фаза определяется в момент прохождения поверхности $S = 0$, как аргумент комплексной амплитуды a_2 . Из рисунка видно, что однократный обход окружности для прообраза отвечает двукратному обходу для образа. Поскольку по остальным направлениям отображение Пуанкаре обеспечивает сжатие, в его трехмерном фазовом пространстве должен присутствовать аттрактор Смейла–Вильямса. На рис. 14 показаны портреты аттрактора в виде трехмерной проекции из четырехмерного фазового пространства потоковой системы и в сечении Пуанкаре в проекции на фазовую плоскость второго осциллятора. Аттрактор имеет тонкую поперечную фрактальную структуру, фрагмент которой приводится на врезке.

Расчет показателей Ляпунова дает $\lambda_1 = 0.0918$, $\lambda_2 = 0.0000$, $\lambda_3 = -0.982$, $\lambda_4 = -1.330$. Учитывая автономную природу системы, естественно полагать, что показатель λ_2 равен нулю точно. Согласно вычислениям, средний период между прохождениями сечения Пуанкаре равен $T_{av} = 7.248$. В соответствии с приближением,

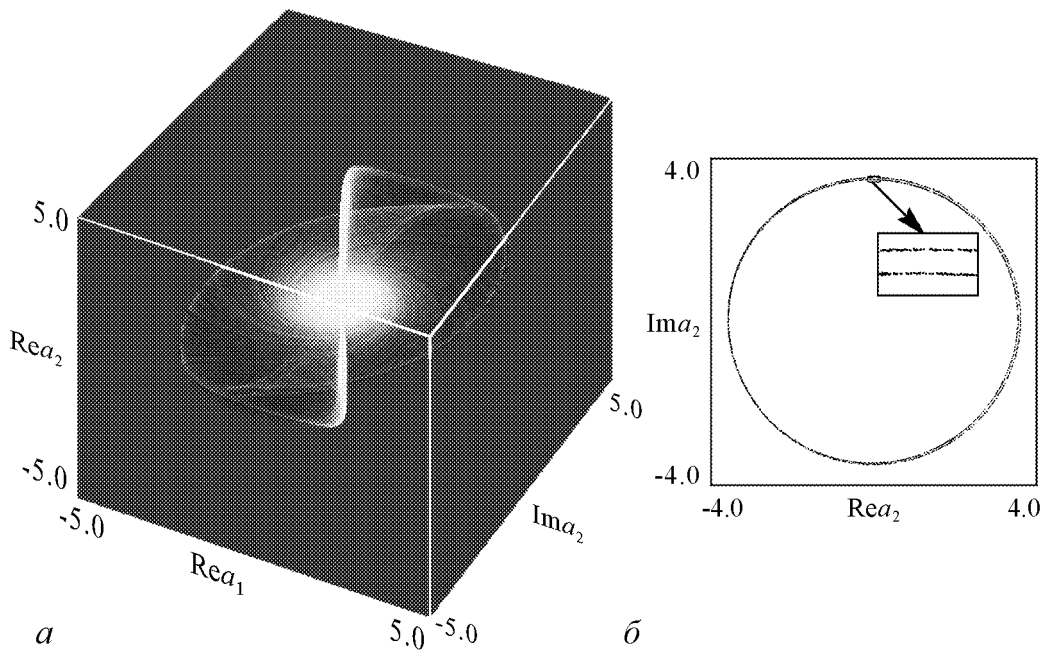


Рис. 14. Аттрактор системы (12) при $\omega_0 = 2\pi$, $\varepsilon = 0.3$ (а) в виде трехмерной проекции (а) и в сечении Пуанкаре в проекции на фазовую плоскость второго осциллятора (б)

основанным на отображении Бернулли, наибольший показатель Ляпунова должен равняться $\lambda = \Lambda/T_{av} = \ln 2/T_{av} \approx 0.096$, что разумно согласуется с величиной λ_1 , найденной в численных расчетах. Оценка размерности аттрактора по формуле Каплана-Йорке приводит к результату $D_{KY} = 2 + (\lambda_1 + \lambda_2)/\lambda_3 \approx 2.094$. Численные расчеты подтверждают выполнение критерия конусов в тороидальной области, содержащей аттрактор трехмерного отображения Пуанкаре [32].

Данная модель представляет собой первый указанный в явном виде пример автономной системы дифференциальных уравнений с аттрактором Смейла-Вильямса в сечении Пуанкаре, с минимальной размерностью фазового пространства.⁴

6. О возможности реализации аттрактора типа Смейла-Вильямса в системах с запаздыванием

Для реализации принципа манипуляции фазами при передаче возбуждения можно обратиться также к системам с запаздыванием. В этом случае достаточно иметь один осциллятор, который попеременно пребывает в стадиях активности или затухания, а передача возбуждения с трансформацией фазы осуществляется через цепь запаздывающей обратной связи от одной стадии активности к другой. С практической точки зрения, эти системы могут быть даже проще, чем попеременно воз-

⁴Вопрос о физической реализации автономной системы с аттрактором Смейла-Вильямса все же остается пока открытым. Дело в том, что уравнения типа (12) в теории колебаний получаются естественным образом в рамках метода медленных комплексных амплитуд при условии $\omega_0 T \gg 1$. С другой стороны, нерезонансный механизм передачи возбуждения эффективен лишь при небольших величинах $\omega_0 T$. Эти требования противоречивы, так что модель (12) приходится рассматривать пока как формальный пример, как и другие примеры в работе [9].

буждающиеся осцилляторы. Однако, с математической точки зрения, они сложнее, поскольку наличие запаздывания формально означает бесконечную размерность пространства состояний. Аккуратный математический анализ аттракторов в таких системах, в том числе строгое обоснование гипотезы гиперболичности, представляется трудной проблемой, требующей разработки новых подходов.

Рассмотрим модельную систему [33]

$$\ddot{x} - [A \cos(2\pi t/T) - x^2]\dot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon x(t - \tau)\dot{x}(t - \tau) \cos \omega_0 t. \quad (13)$$

Это осциллятор ван дер Поля с рабочей частотой ω_0 , в котором параметр, управляющий бифуркацией рождения предельного цикла, медленно изменяется во времени с периодом T и амплитудой A . В правой части добавлен член, отвечающий за дополнительную запаздывающую обратную связь, величина которой характеризуется параметром ε . Это произведение динамической переменной в запаздывающий момент времени, ее производной и вспомогательного сигнала на частоте ω_0 . Как и раньше, полагаем $N = \omega_0 T / (2\pi)$ целым числом.

При надлежащем выборе запаздывания, например $\tau = (3/4)T$, на каждой новой стадии возбуждения затравку для возникновения самоподдерживающихся колебаний будет обеспечивать сигнал, испущенный на предыдущей стадии активности. Пусть его фаза φ , то есть $x(t) \sim \sin(\omega_0 t + \varphi)$ и $\dot{x}(t) \sim \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Тогда член в правой части уравнения будет содержать составляющую на частоте ω_0 с удвоенной фазой. В самом деле, $x(t)\dot{x}(t) \sim \sin 2(\omega_0 t + \varphi)$, так что $x(t - \tau)\dot{x}(t - \tau) \cos \omega_0 t \sim \sin 2(\omega_0(t - \tau) + \varphi) \cos \omega_0 t = (1/2) \sin(\omega_0 t - 2\omega_0 \tau + 2\varphi) +$ нерезонансное слагаемое. В результате на последовательных стадиях активности получаем отображение Бернулли. При сжатии фазового объема по остальным направлениям такая динамика должна характеризоваться наличием аттрактора Смейла–Вильямса в отображении фазового пространства в себя за период внешнего воздействия.

На рис. 15, *a* показана реализация, соответствующая движению на аттракторе при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 6$, $\tau = (3/4)T$, $A = 4.7$, $\varepsilon = 0.3$. Хаос проявляется в смещении заполнения относительно огибающей для последовательных стадий активности. На рис. 15, *б* приводится диаграмма для фаз. Видно, что отображение относится к тому же топологическому типу, что и отображение Бернулли. На рис. 16 показан портрет аттрактора в проекции на фазовую плоскость осциллятора и портрет в сечении Пуанкаре. На втором изображении различима поперечная фрактальная структура, характерная для аттрактора типа Смейла–Вильямса.

Формально аттрактор имеет бесконечное число показателей Ляпунова в силу бесконечномерной природы системы с запаздыванием. С практической точки зрения, разумно ограничиться рассмотрением количества наибольших показателей, достаточного для вычисления размерности по формуле Каплана–Йорке. Расчеты на основании адаптированного для системы с запаздыванием алгоритма Бенеттина, дают для отображения за период T показатели Ляпунова $\Lambda_1 = 0.688$, $\Lambda_2 = -0.837$, $\Lambda_3 = -4.287$. Единственный положительный показатель близок к $\ln 2$, что согласуется с приближением отображения Бернулли. Оценка размерности по формуле Каплана–Йорке дает 1.822. Размерность аттрактора, рассматриваемого как объект в расширенном фазовом пространстве, на единицу больше.

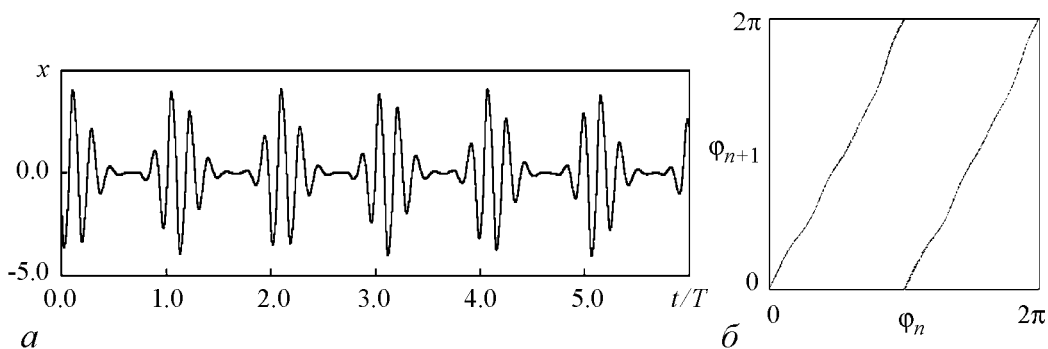


Рис. 15. Зависимость динамической переменной от времени согласно результатам численного решения уравнения (13) при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 6$, $\tau = (3/4)T$, $A = 4.7$, $\varepsilon = 0.3$ (а) и диаграмма, иллюстрирующая трансформацию фазы на последовательных стадиях активности осциллятора (б)

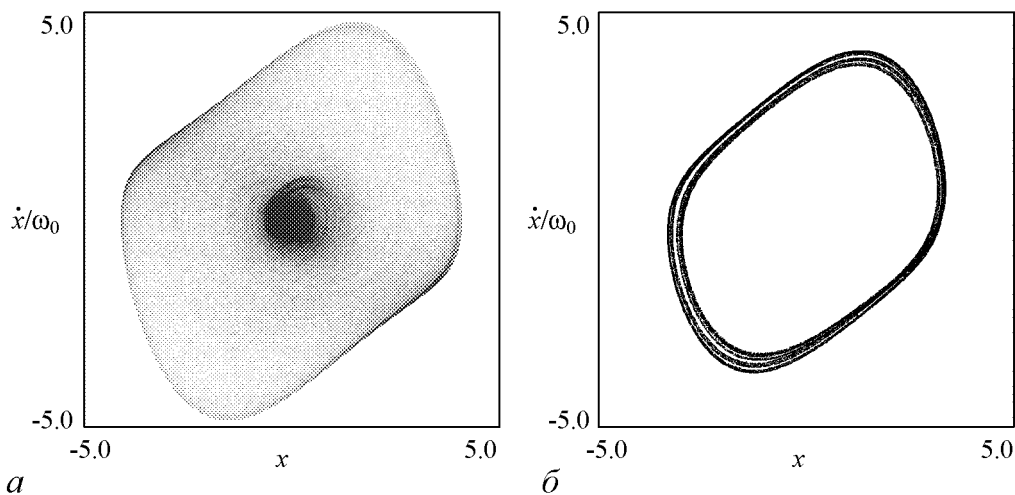


Рис. 16. Портрет аттрактора системы (13) в проекции из бесконечномерного пространства состояний на фазовую плоскость осциллятора (x, \dot{x}) (а) и портрет аттрактора в сечении Пуанкаре (б)

Принцип действия модели и численные результаты дают основания полагать, что наблюдаемый хаотический аттрактор гиперболический и представляет собой соленоид Смейла–Вильямса в бесконечномерном пространстве состояний системы с запаздыванием. Две другие модели неавтономных систем с запаздыванием, использующие идею манипуляции фазами, рассмотрены в работах [34, 35].

7. О реализации гиперболических аттракторов в радиотехнических устройствах

Как говорилось во введении, проработка проблемы гиперболических аттракторов на физическом уровне должна иметь итогом создание функционирующих генераторов хаоса. Два примера радиотехнических устройств реализованы, как лабораторные макеты, в Саратовском филиале ИРЭ РАН [36, 33].

Связанные автогенераторы с поочередным возбуждением. Схема, описанная в работе [36], составлена из двух подсистем – осцилляторов ван дер Поля с частотами $f_1 = 1.09$ кГц и $f_2 = 2f_1 = 2.18$ кГц. Отрицательное сопротивление в каждом колебательном контуре вносится элементом на основе операционного усилителя. Нелинейная проводимость, обеспечивающая увеличение потерь энергии с ростом амплитуды колебаний, вводится элементом из полупроводниковых диодов в виде двух параллельных ветвей с противоположным направлением пропускания тока. Полевой транзистор в каждом контуре вносит положительную проводимость, величина которой управляется напряжением на затворе, изменяющимся во времени в противофазе для двух подсистем с периодом $T = N/f_1$, где N – целое число. Первый осциллятор действует на второй через квадратичный нелинейный элемент. Второй осциллятор действует на первый через нелинейный элемент, осуществляющий смешение поступающего сигнала и вспомогательного сигнала фиксированной частоты f_1 . Напряжения U_1 и U_2 с первого и второго контура, можно подавать на регистрирующую аппаратуру или вводить в компьютер в виде временного ряда с помощью аналого-цифрового преобразователя. Функции \dot{U}_1 и \dot{U}_2 получались с использованием дифференцирующей цепочки, содержащей емкость, резистор и операционный усилитель.

Принцип действия схемы соответствует идее, изложенной в разделе 5. При надлежащем выборе параметров можно наблюдать хаотические колебания, обусловленные поочередным пребыванием осцилляторов в активном состоянии и передачей возбуждения от одного осциллятора к другому с соответствующей трансформацией фазы. На рис. 17, *а* показана фотография портрета аттрактора с экрана осциллографа. На входы горизонтального и вертикального отклонения электронного луча подавались напряжение от первой подсистемы $U_1(t)$ и сигнал с выхода дифференцирующей цепочки $\dot{U}_1(t)$. На рис. 17, *б* приведен портрет аттрактора в стробоскопическом сечении в проекции на плоскость (U_1, \dot{U}_1) , построенный путем обработки

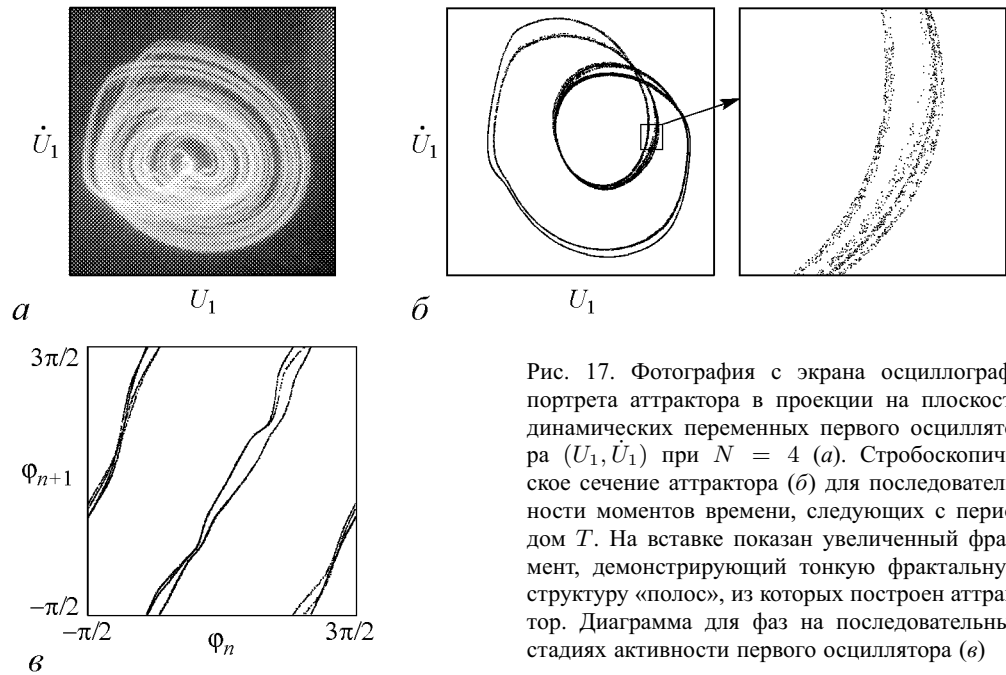


Рис. 17. Фотография с экрана осциллографа портрета аттрактора в проекции на плоскость динамических переменных первого осциллятора (U_1, \dot{U}_1) при $N = 4$ (а). Стробоскопическое сечение аттрактора (б) для последовательности моментов времени, следующих с периодом T . На вставке показан увеличенный фрагмент, демонстрирующий тонкую фрактальную структуру «полос», из которых построен аттрактор. Диаграмма для фаз на последовательных стадиях активности первого осциллятора (в)

двухкомпонентного временного ряда. Одна компонента отвечала выборке сигнала U_1 с периодом T , а в качестве второй фигурировала производная на выходе дифференцирующей цепочки в те же моменты времени. Визуально картина соответствует изображению соленоида Смейла–Вильямса. Отдельно на вставке показана в увеличенном виде тонкая поперечная фрактальная структура волокон аттрактора. На рис. 17, *в* приведена итерационная диаграмма для фаз, полученная обработкой двухкомпонентного временного ряда. То обстоятельство, что отображение для фазы топологически соответствует отображению Бернулли, подтверждает природу аттрактора как соленоида Смейла–Вильямса. Старший показатель Ляпунова, полученный из обработки временного ряда с выборкой периода T , составляет $\Lambda \approx 0.73$, что согласуется с оценкой на основе отображения Бернулли $\Lambda \cong \ln 2$.

Схема радиотехнического устройства с запаздывающей обратной связью приведена в работе [33]. Ее основой служит автогенератор, приближенно описываемый уравнением ван дер Поля. Он содержит LC -контур, элемент с отрицательным сопротивлением на операционном усилителе, и нелинейный диссипативный элемент, составленный из диодов. Основная частота колебаний $f = \omega_0/2\pi = 3$ кГц. Модуляция параметра, ответственного за возбуждение автоколебаний, обеспечивается схемой на полевом транзисторе, управляемым внешним сигналом $A \cos(2\pi t/T)$, где $T \approx 6/f$. При этом на одном полупериоде процесса осциллятор находится в режиме генерации колебаний, а на втором – под порогом генерации.

Возбуждение колебаний с определенной фазой при наступлении очередной стадии активности стимулируется сигналом, приходящим по цепи запаздывающей обратной связи. В этой цепи сигнал подвергается квадратичному преобразованию и дифференцированию посредством стандартной дифференцирующей схемы. Далее он проходит через цифровую линию задержки, содержащую аналого-цифровой преобразователь, компьютер и цифро-аналоговый преобразователь. Задержка $\tau = (3/4)T$ реализована программным образом в компьютере. Далее на нелинейном элементе производится смешение с вспомогательным сигналом на частоте f . В результате получается сигнал, содержащий составляющую с удвоенной фазой, который стимулирует возбуждение осциллятора на очередной стадии активности.

Сигнал, порождаемый системой, записывался в компьютер при помощи аналого-цифрового преобразователя, как временной ряд, и по нему строилось отображение для фазы сигнала за период T (рис. 18, *а*). Отображение принадлежит к тому же

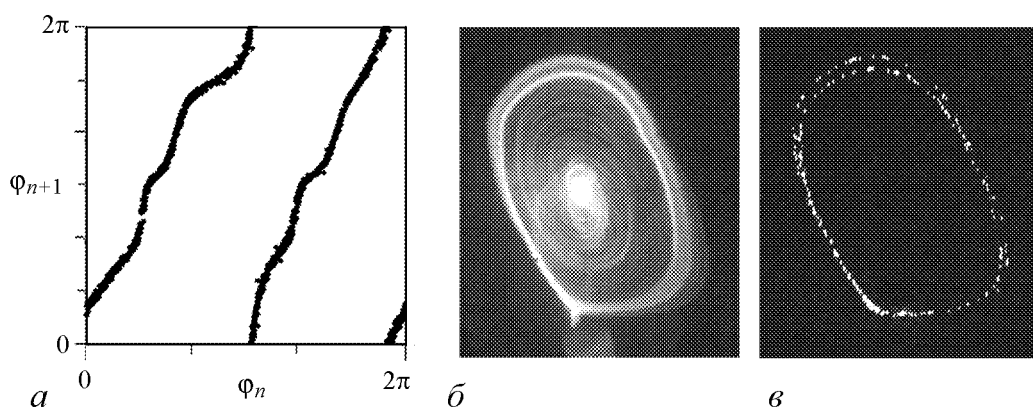


Рис. 18. Итерационная диаграмма для фаз последовательных цугов колебаний в режиме генерации хаоса (*а*), проекция фазового портрета аттрактора (*б*) и его стробоскопическое изображение (*в*)

топологическому классу, как и отображение Бернулли, что свидетельствует о присутствии аттрактора Смейла–Вильямса. На рис. 18, *б* показан сфотографированный с экрана осциллографа портрет аттрактора в проекции на фазовую плоскость осциллятора, а на рис. 18, *в* – стробоскопическое изображение аттрактора, визуально сходное с соленоидом Смейла–Вильямса.

8. Краткий обзор подходов к построению систем с гиперболическими аттракторами и заключительные замечания

Дополняя изложенный материал, приведем краткий обзор идей и подходов, имеющих отношение к проблеме реализации гиперболических аттракторов, но не доведенных по тем или иным причинам до конкретных уравнений и численных расчетов.

В начале 1970-х годов Рюэль и Такенс предложили концепцию, согласно которой переход к хаосу при изменении параметра в многомерных нелинейных системах наступает после возникновения небольшого числа колебательных составляющих и сопровождается появлением странного аттрактора [37]. Специально подчеркнем, что речь идет не просто о странном аттракторе в широком смысле, как этот термин теперь употребляется, а конкретно о гиперболическом аттракторе. Промежуточный результат сформулирован для диффеоморфизмов (*а*) на двумерном компактном многообразии, (*б*) на двумерном торе, (*в*) на компактном многообразии размерности $m \geq 3$ [38]. В случае (*а*) доказано, что имеющее гиперболический аттрактор отображение может быть сколь угодно близким к тождественному отображению в классе C^1 (в классе функций с первой производной). В случае (*б*) справедливо аналогичное утверждение, но в смысле близости в классе C^2 (функций с двумя производными), а в случае (*в*) – в классе бесконечно дифференцируемых функций. В своем анализе авторы используют, как известный факт, существование двумерного отображения с гиперболическим аттрактором; эти рассуждения, конечно, не могут помочь в его нахождении. Отметим абсолютно нефизический характер конструкций (*а*) и (*б*), где в определении отображения фигурируют функции, сложным образом устроенные на малых масштабах в фазовом пространстве.

В работах МакКэя и Ханга [39, 22] установлена гиперболическая природа динамики в механической системе, называемой *тройным соединением*. Около трех шарниров, закрепленных в вершинах равностороннего треугольника, могут свободно вращаться присоединенные к ним концами идентичные стержни. Каждый стержень на другом конце имеет подвижный шарнир, и к этим трем шарнирам прикреплены другие три одинаковых стержня, противоположные концы которых соединены вместе посредством еще одного подвижного шарнира. Благодаря механическим связям, из угловых переменных, задающих мгновенное пространственное положение, независимы только две, то есть движение происходит на двумерном многообразии в конфигурационном пространстве. В отсутствие трения и внешних сил это движение по инерции, с сохранением кинетической энергии. Кинетическая энергия выражается как квадратичная форма через обобщенные скорости – временные производные локальных координат на двумерном многообразии. Эта квадратичная форма, коэффициенты которой зависят от соотношения длин и масс элементов конструкции, задает метрику на двумерном многообразии, причем движение имеет место по геодезическим линиям, отвечающим этой метрике. Перебором вариантов найден набор параметров, при котором метрика характеризуется всюду отрицательной кривизной.

Известно, что в этой ситуации имеет место гиперболический хаос в его консервативной версии. Авторы утверждают, что, добавив диссипацию и механизм обратной связи, на основе «тройного соединения» можно получить систему с гиперболическим аттрактором. Идея представляется интересной и обещающей, но конкретные физические устройства или математические модели, где на этой основе был бы реализован гиперболический аттрактор, пока не рассмотрены.

В работе В. Белых, И. Белых и Э. Мозекильде [40] обосновывается возможность реализации гиперболического аттрактора в модели нейрона Хиндмарш–Розе. Авторы исходят из формальной обобщенной записи уравнений $\dot{x} = X(x, z)$, $\dot{z} = \mu[Z(x) - z - \delta]$, где x – двумерный вектор, а функции $X(x, z)$ и $Z(x)$ конкретизируются лишь в той мере, чтобы были оправданы проводимые качественные рассуждения. Согласно анализу, в области, где система претерпевает переход от генерации периодических спайков к берстовой активности, может иметь место ситуация, когда двумерное отображение Пуанкаре определено на диске с тремя вырезами («дырками»), и реализуется аттрактор типа Плыкена. Эти результаты интересны, поскольку получены для модели в каком-то смысле естественного происхождения и указывают на возможное значение гиперболической динамики для нейросистем. В то же время, конкретного исследования, с указанием явного вида уравнений и демонстрацией присутствия гиперболического аттрактора в численных расчетах, пока не представлено.

Шильниковым и Тураевым [41, 42] указана возможность реализации аттрактора типа Смейла–Вильямса в контексте так называемой «катастрофы голубого неба». В простейшем варианте катастрофа голубого неба встречается в трехмерной автономной системе. В момент бифуркации в фазовом пространстве имеется седло-узловой цикл, уход от которого происходит по траекториям, образующим «трубку», которая сужается и скручивается в спираль, приближающуюся к тому же седло-узловому циклу с противоположной стороны. При смещении по параметру в одну сторону вместо седло-узлового цикла образуется пара предельных циклов, один неустойчивый, а другой соответствующий устойчивому автоколебательному режиму. При смещении в другую сторону седло-узловой цикл исчезает, а на его месте остается сгущение, образованное витками спиралевидной траектории и составляющее часть возникшего на месте «трубки» притягивающего предельного цикла.

Имея вначале угловую координату φ , после обхода по «трубке» траектория возвращается к седло-узловому циклу с угловой координатой, выражение для которой содержит слагаемое $m\varphi$. Для трехмерных систем возможны варианты $m = 0$ и $m = 1$. Однако, начиная с размерности четыре, целое число m может быть любым. В частности, если $m = 2$, тороидальное трехмерное сечение около седло-узлового цикла с неустойчивой стороны при возвращении принимает вид сложенной вдвое петли. В такой ситуации бифуркация будет сопровождаться рождением аттрактора Смейла–Вильямса. Авторы подчеркивают, что в результате такой бифуркации система Морса–Смейла (имеющая лишь простые установившиеся режимы, ассоциирующиеся с неподвижными точками и замкнутыми орбитами), сразу превращается в систему со структурно устойчивым гиперболическим аттрактором.

Насколько известно автору, в литературе описаны примеры систем с «катастрофой голубого неба» только в трехмерном фазовом пространстве [43, 44]. Примеров с большей размерностью, где реализовался бы переход к аттрактору типа Смейла–Вильямса, пока не представлено. Для построения такого примера требуется обеспечить в фазовом пространстве эволюцию области в форме тора с поперечным сжатием

и формированием двойной петли. Это не проще, чем осуществить такую трансформацию в общей постановке. В то же время, с точки зрения выявления сценариев рождения гиперболических аттракторов, рассмотренный анализ следует признать важным и содержательным.

Одна из самых известных систем в контексте сложной динамики и хаоса – это модель Лоренца [45], к которой в течение многих лет привлечено внимание математиков. Существенным этапом в объяснении качественной стороны динамики было формулирование упрощенной модели, так называемого геометрического аттрактора Лоренца [8]. Своего рода итогом исследований стало компьютерное доказательство Такером [46] хаотической природы аттрактора Лоренца на уровне строго обоснованных вычислительных процедур.

Аттрактор Лоренца классифицируют как квазигиперболический или сингулярно гиперболический из-за того, что он включает особую траекторию (неустойчивое многообразие неподвижной точки). Интересен вопрос, можно ли модифицировать систему так, чтобы аттрактор в сечении Пуанкаре стал однородно гиперболическим. Положительный ответ дается в работе Моралеса [47], правда, лишь на уровне геометрической конструкции. Рассматривается модель, в которой неподвижная точка претерпевает бифуркацию, аналогичную седло-узловой (при наличии дополнительного неустойчивого направления в окрестности бифурцирующей пары точек), и которая подобна в остальных отношениях геометрической модели аттрактора Лоренца. При вариации параметра, с одной стороны от точки бифуркации имеет место аттрактор Лоренца. С другой стороны от нее, при исчезновении неподвижных точек, в зависимости от устройства векторного поля в удаленных областях, через которые проходят траектории, реализуется один из двух вариантов. Первый состоит в возникновении негиперболической динамики типа Эно, а второй – в появлении аттрактора типа Плыкина в отображении Пуанкаре. Возможность получить такой аттрактор весьма интересна. Поскольку модель Лоренца имеет отношение к ряду физических систем, можно думать, что версия с гиперболическим аттрактором будет применима к определенным модификациям этих систем.

Перечисленные подходы определяют возможные направления поиска конкретных систем с гиперболическими аттракторами в дополнение к примерам, приведенным в основном тексте статьи. С практической точки зрения, системы с гиперболическими аттракторами обещают быть интересными благодаря структурной устойчивости, которая будет выражаться в нечувствительности свойств генерируемого хаоса по отношению к вариациям параметров и характеристик элементов устройства, техническим флуктуациям и т.п.

Известны аргументы в пользу применения хаотических сигналов в информационно-коммуникационных системах: большая информационная емкость сигналов, возможность управления динамикой посредством малых возмущений, разнообразие методов ввода информации в сигнал, богатые возможности кодирования для защиты информации [48].

Можно предположить, что причина, почему ожидаемые потенциальные преимущества пока не достигнуты в полной мере, заключена в том, что при использовании сигналов, порожденных негиперболическими аттракторами, не удастся опереться на детальное теоретическое понимание соответствующей им динамики. С другой стороны, для гиперболических аттракторов существует в известном смысле полное математическое описание хаоса. Например, имеется возможность исчерпывающего перечисления всех принадлежащих аттрактору траекторий как последовательностей

символов конечного алфавита (символическая динамика). Поэтому вполне вероятно, что с привлечением гиперболического хаоса удастся в большей степени реализовать ожидаемые достоинства информационно-коммуникационных систем на основе хаотических сигналов. Специальный интерес для применения в схемах скрытой коммуникации могут представлять системы, использующие принцип манипуляции фазами [25–36]. Хаос проявляется в этом случае в нерегулярном изменении фаз заполнения генерируемой последовательности радиоимпульсов, так что на этой основе возможна реализация схем, в которых передача сигнала в канале связи будет гораздо менее чувствительной к помехам, потерям и искажениям, нежели в предложенных до сих пор вариантах. (В этой связи уместно вспомнить об известном в традиционной радиотехнике преимуществе частотной или фазовой модуляции в сравнении с амплитудной модуляцией.)

Автор благодарен коллегам – А.С. Пиковскому, В.И. Пономаренко, И.Р. Сатаеву, Е.П. Селезневу, результаты совместных исследований с которыми использованы в статье.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 09-02-00426, гранта РФФИ–ННИО № 08-02-91963, а также гранта Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках Программы развития научного потенциала высшей школы № 2.1.1/1738.

Библиографический список

1. *Smale S.* Differentiable dynamical systems // *Bull. Amer. Math. Soc. (NS)*. 1967. Vol. 73. P. 747.
2. *Williams R.F.* Expanding attractors // *Publications mathématiques de l’I.N.E.S.* 1974. Vol. 43. P. 1693.
3. *Синай Я.Г.* Стохастичность динамических систем // В кн. *Нелинейные волны* / Ред. А.В. Гапонов–Грехов. М.: Наука, 1979. С. 192.
4. *Современные проблемы математики. Фундаментальные направления* // *Итоги науки и техники*, т. 2 / Под ред. Р.В. Гамкрелидзе. М.: Изд. ВИНТИ АН СССР, 1985. 310 с.
5. *Eckmann J.-P., Ruelle D.* Ergodic theory of chaos and strange attractors // *Rev. Mod. Phys.* 1985. Vol. 57. P. 617.
6. *Shilnikov L.* Mathematical problems of nonlinear dynamics: a tutorial // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 1997. Vol. 7, № 9. P. 1353.
7. *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем / Пер. с англ. М.: Изд. «Факториал», 1999. 768 с.
8. *Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 560 с.
9. *Afraimovich V., Hsu S.-B.* Lectures on chaotic dynamical systems, *AMS/IP Studies in Advanced Mathematics*, **28**, American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Somerville, MA, 2003, 353 pp.
10. *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений. М.: МЦНМО, 2005. 464 с.

11. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
12. *Barreira L., Pesin Y.* Lectures on Lyapunov exponents and smooth ergodic theory // In book: «Smooth Ergodic Theory and Its Applications», AMS, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 2001. С. 3.
13. *Bonatti C., Diaz L.J., Viana M.* Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity. A global geometric and probabilistic perspective // Encyclopedia of Mathematical Sciences. Vol. 102. Springer: Berlin, Heidelberg, New-York, 2005. 384 p.
14. *Benedicks M. and Carleson L.* The dynamics of the Hénon map // Ann. of Math. 1991. (2) 133. P. 73.
15. *Halbert J.T., Yorke J.A.* Modeling a chaotic machine's dynamics as a linear map on a «square sphere», <http://www.math.umd.edu/halbert/taffy-paper-1.pdf>.
16. *Sinai J.G., Vul E.B.* Hyperbolicity conditions for the Lorenz model // Physica D2. 1981. P. 3.
17. *Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Проверка условий гиперболичности хаотического аттрактора в системе связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 5. С. 3.
18. *Kuznetsov S.P.* Plykin-type attractor in nonautonomous coupled oscillators // CHAOS. 2009. Vol. 19, № 1. P. 013114.
19. *Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Hyperbolic attractor in a system of coupled non-autonomous van der Pol oscillators: Numerical test for expanding and contracting cones // Physics Letters. 2007. Vol. A365, № 1-2. P. 97.
20. *Кузнецов С.П.* Пример неавтономной системы с непрерывным временем, имеющей аттрактор типа Плыкина в отображении Пуанкаре // Нелинейная динамика. 2009. Vol. 5, № 3.
21. *Newhouse S.E.* Lectures on dynamical systems // In Dynamical Systems C.I.M.E. Lectures Bressanone, Italy, June 1978, 1–114. Progress in Mathematics, № 8, Birkhäuser–Boston: Boston.
22. *Hunt T.J.* Low Dimensional Dynamics: Bifurcations of Cantori and Realisations of Uniform Hyperbolicity. PhD Thesis. University of Cambridge, 2000. 121 p.
23. *Ахиезер Н.И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.
24. *Айдарова Ю.С., Кузнецов С.П.* Хаотическая динамика модели Ханта – искусственно сконструированной потоковой системы с гиперболическим аттрактором // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 3. P. 176.
25. *Kuznetsov S.P.* A non-autonomous flow system with Plykin type attractor // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2009. Vol. 14. P. 3487.
26. *Kuznetsov S.P.* Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale–Williams type // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95. P. 144101.
27. *Кузнецов С.П., Исаева О.Б., Осбалдестин А.* Феномены комплексной аналитической динамики в системе связанных неавтономных осцилляторов с поочередным возбуждением // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33. Вып. 17. С. 69.
28. *Жалнин А.Ю., Кузнецов С.П.* О возможности реализации в физической системе странного нехаотического аттрактора Ханта и Отта // ЖТФ. 2007. Т. 77, № 4. С. 10.

29. *Kuznetsov S.P., Pikovsky A.* Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors // *Physica*. 2007. Vol. D232. P. 87.
30. *Кузнецов С.П.* О возможности реализации параметрического генератора гиперболического хаоса // *ЖЭТФ*. 2008. Vol. 133, № 2. P. 438.
31. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Пиковский А.С., Тюрюкина Л.В.* Хаотическая динамика в системах связанных неавтономных осцилляторов с резонансным и нерезонансным механизмом передачи возбуждения // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2007. Т. 15, № 6. С. 75.
32. *Kuznetsov S.P., Pikovsky A.S., Sataev I.R.* Hyperbolic Smale–Williams attractor in Poincaré map of a four-dimensional autonomous system // *Proc. of the III Int. Conf. «Frontiers of Nonlinear Physics»*. Nizhny Novgorod–Saratov–Nizhny Novgorod, July 3–9, 2007, 66–67.
33. *Кузнецов С.П., Пономаренко В.И.* О возможности реализации странного аттрактора типа Смейла–Вильямса в радиотехническом генераторе с запаздыванием // *Письма в ЖТФ*. 2008. Т. 34. Вып. 18. С. 1.
34. *Kuznetsov S.P., Pikovsky A.S.* Hyperbolic chaos in the phase dynamics of a Q-switched oscillator with delayed nonlinear feedbacks // *Europhysics Letters*. 2008. Vol. 84. P. 10013.
35. *Баранов С.В., Кузнецов С.П., Пономаренко В.И.* Хаос в фазовой динамике осциллятора ван дер Поля с модулированной добротностью и дополнительной запаздывающей обратной связью // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2009. Принята к печати.
36. *Кузнецов С.П., Селезнев Е.П.* Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла–Вильямса // *ЖЭТФ*. 2006. Т. 129, № 2. С. 400.
37. *Рюэль Д., Такенс Ф.* О природе турбулентности // В сб. *Странные аттракторы / Под ред. Я.Г. Синая и Л.П. Шильникова*. М.: Мир, 1981. С. 117.
38. *Newhouse S., Ruelle D., Takens F.* Occurrence of strange Axiom-A attractors near quasi periodic flows on T^m , $m \geq 3$ // *Comm. Math. Phys.* 1978. Vol. 64. P. 35.
39. *Hunt T.J., MacKay R.S.* Anosov parameter values for the triple linkage and a physical system with a uniformly chaotic attractor // *Nonlinearity*. 2003. Vol. 16. P. 1499.
40. *Belykh V., Belykh I., Mosekilde E.* The hyperbolic Plykin attractor can exist in neuron models // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 2005. Vol. 15, № 11. P. 3567.
41. *Шильников Л.П., Тураев Д.В.* О катастрофах голубого неба // *Доклады РАН*. 1995. Т. 342. С. 596.
42. *Shil'nikov L.P., Turaev D.V.* Simple bifurcations leading to hyperbolic attractors // *Computers Math. Appl.* 1997. Vol. 34, № 2–4. P. 173.
43. *Gavrilov N.K., Shilnikov A.L.* An example of blue sky catastrophe // In: *Methods of qualitative theory of differential equations and related topics*. Amer. Math. Soc. Transl., II Ser. Vol.200, AMS, Providence, RI, 1999, 165–188.
44. *Shilnikov A., Symbalyuk G.* Transition between tonic spiking and bursting in a neuron model via the blue-sky catastrophe // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 94. P. 048101.
45. *Лоренц Э.* Детерминированное непериодическое течение // В сб. *Странные аттракторы / Под ред. Я.Г. Синая и Л.П. Шильникова*. М.: Мир, 1981. С. 88.

46. *Tucker W.* A rigorous ODE solver and Smale's 14th problem // *Comp. Math.* 2002. Vol. 2. P. 53.
47. *Morales C.A.* Lorenz attractor through saddle-node bifurcations // *Ann. de l'Inst. Henri Poincaré.* 1996. Vol. 13. P. 589.
48. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002. 252 с.

Поступила в редакцию 29.06.2009

HYPERBOLIC STRANGE ATTRACTORS OF PHYSICALLY REALIZABLE SYSTEMS

S.P. Kuznetsov

A review of studies aimed on revealing or constructing physical systems with hyperbolic strange attractors, like Plykin attractor and Smale–Williams solenoid, is presented. Examples of iterated maps, differential equations, and simple electronic devices with chaotic dynamics associated with such attractors are presented and discussed. A general principle is considered and illustrated basing on manipulation of phases in alternately excited oscillators and time-delay systems. Alternative approaches are reviewed outlined in literature, as well as the prospects of further researches.

Keywords: Attractor, dynamical system, Poincaré map, Smale–Williams solenoid, Plykin attractor, hyperbolic chaos, oscillator, chaos generator.



Кузнецов Сергей Петрович – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). С 1988 – сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, в настоящее время – заведующий лабораторией теоретической нелинейной динамики. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиофизика. Профессор кафедры динамических систем. Автор учебно-научной монографии «Динамический хаос» и учебника «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 180 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под руководством С.П. Кузнецова защищены семь кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994–1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН
им. В.А. Котельникова
E-mail: spkuz@rambler.ru