



## ЭФФЕКТ ПОДАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ В АНСАМБЛЯХ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ ФАЗОВЫХ СИСТЕМ

*Д.В. Касаткин*

В работе обсуждаются вопросы, связанные с явлением подавления колебаний в ансамблях взаимосвязанных систем фазовой синхронизации. Изучение данного явления проведено на примерах ансамбля трех каскадно связанных генераторов с фильтрами первого порядка в цепях управления и цепочки, состоящей из большого числа генераторов с безинерционными цепями управления. Продемонстрированы возможности подавления колебаний в части элементов рассматриваемых ансамблей за счет изменения параметра инерционности локальной цепи управления одной из систем фазовой синхронизации, а также благодаря наличию дополнительных связей. В пространстве параметров выделены области существования исследуемого эффекта.

*Ключевые слова:* Подавление колебаний, система фазовой автоподстройки, каскадное соединение.

### Введение

Исследование коллективного поведения взаимосвязанных автоколебательных систем является одной из актуальных проблем современной нелинейной динамики. Устойчивый интерес к данной тематике объясняется в том числе и тем, что при объединении в ансамбль такие системы приобретают новые свойства, не характерные для индивидуальной динамики связываемых объектов. Например, как показано в [1], автогенераторы с локальными цепями управления по фазе, обладая простой (нехаотической) индивидуальной динамикой, при объединении способны генерировать колебания различной сложности вплоть до хаотических. Особенности коллективного поведения определяются динамическими свойствами объединяемых элементов, а также характеристиками организуемых связей, которые, в свою очередь, являются эффективным средством управления свойствами таким систем. При исследовании особенностей коллективной динамики в моделях взаимосвязанных автоколебательных систем основное внимание исследователей, прежде всего, уделяется изучению фундаментальных физических явлений – синхронизации, подавлению колебаний, хаотизации и регуляризации колебаний, структурообразованию.

Настоящая работа также лежит в рамках этой тематики и посвящена изучению особенностей коллективного поведения в ансамблях взаимосвязанных автогенераторов с локальными цепями управления фазой (систем фазовой автоподстройки частоты – ФАП). Использование коллективных систем ФАП позволяет улучшить их динамические характеристики, а также решить задачи, связанные с оценкой параметров

сложных сигналов, синтезом частот, генерацией хаотически модулированных колебаний [2–4] и др. Исследования коллективной динамики таких ансамблей, проводимые в работах [1, 4–6], главным образом были направлены на изучение асинхронных режимов, сценариев возбуждения и хаотизации этих режимов, а также на определение областей их существования в пространстве параметров. Основное внимание в данной работе уделено изучению процессов подавления асинхронных колебаний.

## 1. Математическая модель и динамические режимы систем ФАП

Динамические процессы в моделях каскадно связанных систем ФАП, в цепях управления которых стоят интегрирующие фильтры первого порядка,<sup>1</sup> описываются следующими уравнениями [1, 2]:

$$\varepsilon_i \frac{d^2 \varphi_i}{d\tau^2} + \frac{d\varphi_i}{d\tau} + \sin(\varphi_i - \varphi_{i-1}) + \kappa_i \sin(\varphi_{i+1} - \varphi_i) = \gamma_i, \quad (1)$$

$$\varphi_0(t) = \varphi_{n+1}(t) = 0.$$

Здесь  $\varphi_i$  и  $\gamma_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) – текущие фазовые и начальные частотные расстройки  $i$ -го генератора относительно опорного сигнала;  $\varepsilon_i = \Omega T_i$ ;  $\Omega$  – максимальная расстройка по частоте, которую могут скомпенсировать цепи управления генераторов;  $T_i$  – постоянная времени фильтра;  $\tau = \Omega t$  – безразмерное время. В рассматриваемых ансамблях введены дополнительные связи  $\kappa_i$ , организованные путем подачи сигнала управления  $(i + 1)$ -м генератором в цепь управления  $i$ -го генератора.

Индивидуальная динамика объединяемых в ансамбль систем ФАП с фильтром первого порядка может быть только регулярной; имеют место следующие режимы [3]: *режим синхронизации генератора опорным сигналом*, при котором частоты управляемого генератора и опорного сигнала равны, а разность фаз принимает некоторое постоянное значение; *режим регулярных биений*, при котором разность фаз управляемого генератора и опорного сигнала неограниченно нарастает, а разность частот не равна нулю. В фазовом пространстве парциальной системы ФАП этим режимам отвечают устойчивое состояние равновесия и устойчивый вращательный предельный цикл (с набегом разности фаз более  $2\pi$ ), соответственно.

При объединении в ансамбль динамика систем ФАП характеризуется появлением нового типа динамического поведения – *режима квазисинхронизации*, при котором имеет место регулярная или хаотическая модуляция частоты управляемого генератора около стабилизированной по опорному сигналу средней частоты. В фазовом пространстве математических моделей этому режиму соответствуют аттракторы колебательного типа – предельные циклы или хаотические аттракторы с набегом разности фаз менее  $2\pi$ .

Коллективная динамика ансамблей каскадно связанных систем ФАП характеризуется режимами глобальной и частичной синхронизации, регулярной и хаотической квазисинхронизации, регулярными и хаотическими режимами биений. Динамика отдельных ФАП, входящих в состав ансамбля, определяется проекциями аттракторов на соответствующие локальные подпространства [1]. Если проекция аттрактора на соответствующее локальное подпространство вырождается в точку, то  $i$ -й генератор находится в режиме синхронизации, если проекция аттрактора ограничена по  $\varphi_i$ , то  $i$ -й генератор функционирует в режиме квазисинхронизации, в противном случае система находится в режиме биений.

<sup>1</sup>Фильтр с коэффициентом передачи  $K_i(p) = (1 + T_i p)^{-1}$ .

## 2. Процессы подавления колебаний в ансамблях ФАП

**2.1. Ансамбль из трех каскадно связанных систем ФАП.** Рассмотрим динамику ансамбля из трех каскадно связанных систем ФАП с фильтрами первого порядка в цепях управления. Для классификации аттракторов математической модели (1) и соответствующих им динамических режимов ФАП будем использовать введенный в [1] индекс вращения (индекс квазисинхронизма)  $[J_1, J_2, J_3]$ . Величина  $J_i=1$ , если по координате  $\varphi_i$  происходит вращение, и  $J_i=0$  в противном случае. Отсутствие вращения по координатам  $\varphi_i$  означает, что  $i$ -е генераторы работают в квазисинхронном режиме, когда остальные генераторы находятся в режиме биений.

Зафиксируем параметры второго и третьего генераторов в точке  $\gamma_2 = 0.5$ ,  $\varepsilon_2 = 7.5$ ,  $\gamma_3 = 0.7$ ,  $\varepsilon_3 = 3$ , а параметры дополнительных связей выберем на уровне  $\kappa_1 = 0.15$ ,  $\kappa_2 = 1.6$ . Рассмотрим, как влияют на динамику ансамбля параметры первого генератора. На рис. 1, а приведена диаграмма, иллюстрирующая распределение областей существования динамических режимов модели (1) на плоскости  $(\varepsilon_1, \gamma_1)$ . Представленная диаграмма получена при использовании методики построения карт динамических режимов, подробно описанной в [7], и проведенного бифуркационного анализа. Далее мы проанализируем возможные динамические режимы каскадной системы и свойства определяющих их аттракторов модели (1), не останавливаясь подробно на результатах бифуркационного анализа.

Из представленной на рис. 1, а диаграммы видно, что ансамбль из трех ФАП с фильтрами первого порядка обладает большим разнообразием динамических режимов как регулярных, так и хаотических. В интервале значений начальной частотной расстройки  $\gamma_1 \in (-0.95, 0.9)$  система демонстрирует режим, при котором либо один из генераторов (аттракторы с индексом квазисинхронизма  $[0,1,1]$ ), либо два генератора (аттракторы с индексами  $[0,0,1]$  или  $[0,1,0]$ ) функционируют в квазисинхронном режиме, а остальные находятся в режиме биений. Причем данные режимы могут быть как регулярными, так и хаотическими. Области существования хаотических режимов на рис. 1, а выделены штриховкой. Представленная диаграмма позволяет сделать вывод, что при рассматриваемых значениях параметров системы ФАП демонстрируют преимущественно хаотическую динамику. При больших начальных частотных расстройках вне данного интервала все генераторы ансамбля функционируют в режиме хаотических биений (аттракторы с индексом  $[1,1,1]$ ).

Остановимся более подробно на аттракторах, определяющих квазисинхронную работу одного или нескольких генераторов ансамбля и проследим их эволюцию при изменении параметра  $\varepsilon_1$ . При значениях параметра  $\varepsilon_1 < 10$  каскадная система преимущественно демонстрирует режимы, определяемые регулярными предельными циклами и хаотическими аттракторами с индексом  $[0,1,1]$ . Также можно выделить несколько узких областей, в которых существуют предельные циклы с индексами  $[0,0,1]$  или  $[0,1,0]$ . При этом существует область параметров, где предельные циклы  $[0,1,1]$  и  $[0,0,1]$  реализуются одновременно. Для значений параметров  $\varepsilon_1 > 10$ ,  $\gamma_1 \in (-0.95, 1.0)$  в фазовом пространстве системы существуют только аттракторы с индексом квазисинхронизма  $[0,0,1]$ .

При анализе областей существования динамических режимов управляемых генераторов ансамбля (1) особое внимание уделялось виду и размеру проекций аттракторов модели на соответствующие локальные подпространства. В результате проведенного анализа было установлено, что при увеличении параметра  $\varepsilon_1$  проекция

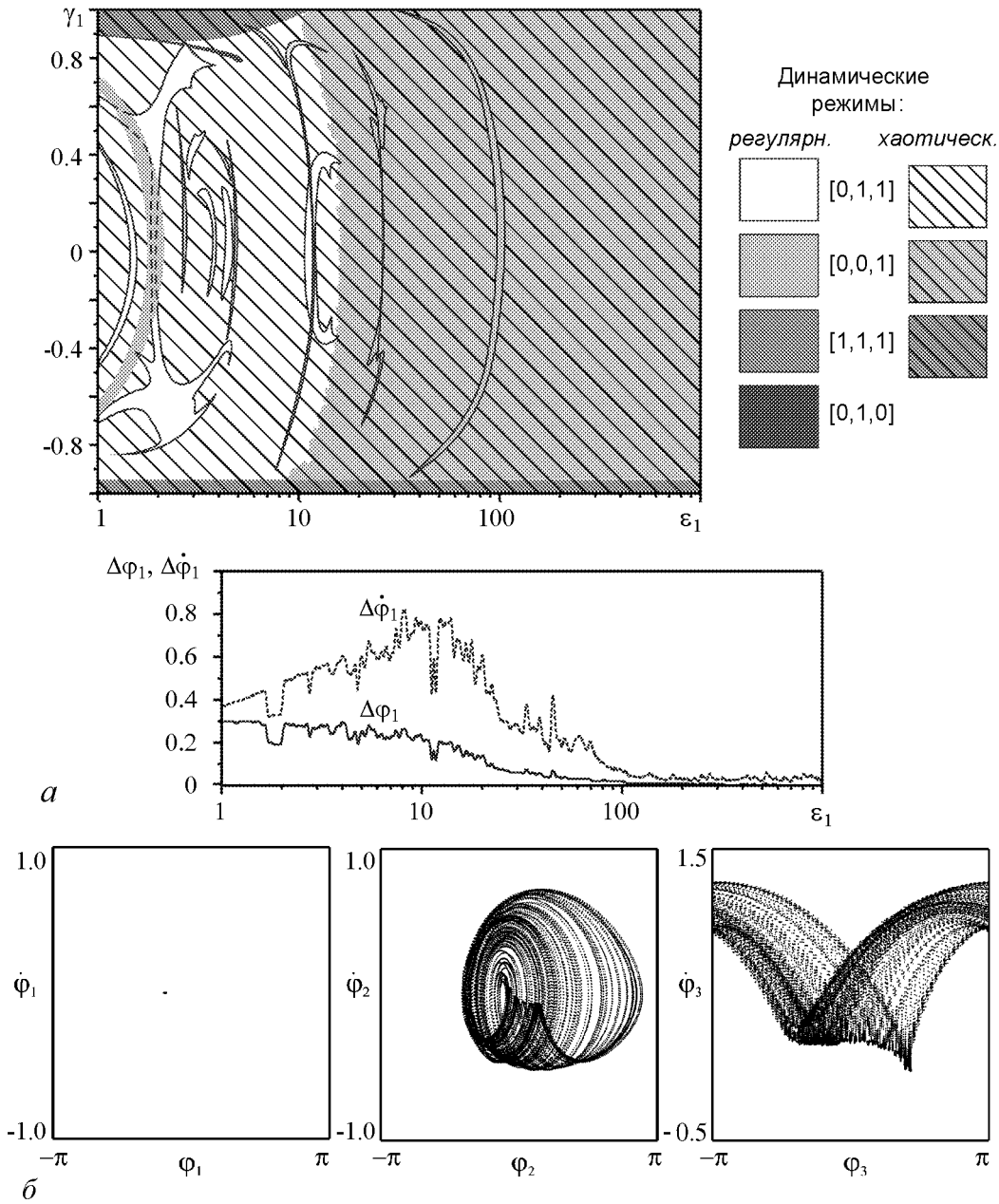


Рис. 1. *a* – карта динамических режимов системы (1) при  $N = 3$ . Значения параметров:  $\gamma_2 = 0.5$ ,  $\varepsilon_2 = 7.5$ ,  $\gamma_3 = 0.7$ ,  $\varepsilon_3 = 3$ ,  $\kappa_1 = 0.15$ ,  $\kappa_2 = 1.6$ . Размеры проекций аттрактора на локальное подпространство  $U_1$  для  $\gamma_1 = 0.4$ :  $\Delta\phi_1$  (пунктирная линия),  $\Delta\dot{\phi}_1$  (сплошная линия); *b* – фазовые проекции аттрактора системы (1) при значениях параметров из области  $D_{OS} = \{\varepsilon_1 > 100, -0.95 < \gamma_1 < 1\}$

хаотического аттрактора с индексом квазисинхронизма  $[0,0,1]$  на подпространство  $U_1 = \{\varphi_1(\text{mod } 2\pi), \dot{\varphi}_1\}$  сжимается. В качестве примера, иллюстрирующего данный факт, на рис. 1, *a* приведен график зависимости размеров проекций аттрактора, реализующегося в системе (1), на локальное подпространство  $U_1$  при увеличении параметра  $\varepsilon_1$ . Установлено, что в области значений параметров  $D_{OS} = \{\varepsilon_1 > 100, \gamma_1 \in (-0.95, 1.0)\}$  размер проекций аттрактора с индексом квазисинхронизма  $[0,0,1]$  на плоскость фазовых переменных первого генератора удовлетворя-

ет условиям  $\Delta\varphi_1 < 0.1$  и  $\Delta\dot{\varphi}_1 < 0.02$ . Характерный вид проекций аттрактора, существующего при значениях параметров принадлежащих области  $D_{OS}$ , на локальные подпространства отдельных генераторов представлен на рис. 1, б. Заметим, что вид проекций аттрактора на подпространство  $U_1$  более соответствует режиму синхронизации, в то время как проекции на подпространства второго и третьего генераторов отвечают режимам квазисинхронных хаотических колебаний и хаотических биений, соответственно. Таким образом, увеличение параметра  $\varepsilon_1$  может приводить к подавлению колебаний в цепи управления первого генератора в ансамбле трех каскадно связанных систем ФАП.

**2.2. Ансамбль из пятидесяти каскадно связанных систем ФАП.** Теперь рассмотрим коллективную динамику ансамбля, состоящего из пятидесяти каскадно связанных систем ФАП с цепями управления, не содержащими фильтры низких частот. Динамика такого ансамбля описывается системой (1), если положить в ней  $\varepsilon_i = 0$ , ( $i = \overline{1, n}$ ). Рассмотрим простейший случай, когда объединяемые системы идентичны ( $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_n = \gamma$ ) и параметры дополнительных связей между генераторами одинаковы ( $\kappa_i = \kappa$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ). Изучение динамики ансамбля будем проводить в области значений начальной частотной расстройки  $\gamma > 1$ , где индивидуальная динамика элементов характеризуется режимом регулярных биений. В работах [6, 8] показано, что для малых ансамблей ФАП, состоящих из  $n = 3, 4, 5$  управляемых генераторов, в окрестности значения частотной расстройки  $\gamma = 1$  и интервале значений параметра дополнительной связи  $\kappa \in [0, 1)$  существует слоистая структура из областей частичных квазисинхронных режимов. Первые  $n^*$  ( $n^* < n$ ) генераторов ансамбля находятся в квазисинхронизме по отношению к опорному сигналу, а последующие  $n - n^*$  генераторов функционируют в режиме биений. При фиксированном значении параметра дополнительной связи увеличение начальной частотной расстройки сопровождается последовательным переходом от одного частичного квазисинхронного режима к другому и, соответственно, уменьшением значения  $n^*$ . После превышения некоторого значения  $\gamma$  все управляемые генераторы переходят в режим биений ( $n^* = 0$ ).

Установлено, что для ансамбля, состоящего из большого числа фазоуправляемых генераторов в окрестности значения  $\gamma = 1$  также существует область частичных квазисинхронных режимов, характеризуемых различными значениями  $n^*$ . Однако в данном случае наблюдается уменьшение амплитуды колебаний фазовой переменной  $\varphi_i$  при уменьшении порядкового номера генератора  $i$  и, начиная с некоторого значения  $n_0$ , отмечается подавление колебаний ( $\Delta\varphi_i \approx 0$ ,  $i = \overline{1, n_0}$ ).

Для иллюстрации такого поведения на рис. 2 приведена диаграмма, характеризующая пространственно-временную динамику ансамбля и временные реализации фазовых переменных отдельных генераторов. Диаграмма свидетельствует о том, что последний генератор в рассматриваемом ансамбле находится в режиме биений – наблюдается постоянный рост разности фаз  $\varphi_{50}(\tau)$  управляемого генератора и опорного сигнала с течением времени. В остальных генераторах ансамбля после некоторого переходного процесса устанавливается стационарный режим, при котором набег разности фаз не превышает  $2\pi$ . Однако при уменьшении порядкового номера генератора  $i$  наблюдается уменьшение амплитуды колебаний разности фаз  $\Delta\varphi_i$  и, начиная с  $i = 47$ , данная величина не превышает 0.04. Данный факт подтверждают временные реализации разностей фаз  $\varphi_1(\tau)$ ,  $\varphi_{48}(\tau)$ ,  $\varphi_{49}(\tau)$ , приведенные на рис. 2. Следовательно, в представленном случае первые  $n_0 = 47$  управляемых генераторов

функционируют в синхронном режиме по отношению к опорному сигналу, причем величина ошибки синхронизации, как видно из рис. 2, изменяется периодически в интервале от 0 до  $2\pi$  с увеличением порядкового номера генератора.

При увеличении параметра  $\gamma$  ( $\kappa$ ) происходит последовательный переход в режим биений других генераторов (отсчитывая от конца цепочки) и одновременно с этим наблюдается уменьшение значения  $n_0$ . При превышении некоторых граничных значений параметров все генераторы ансамбля переходят в режим биений. Для

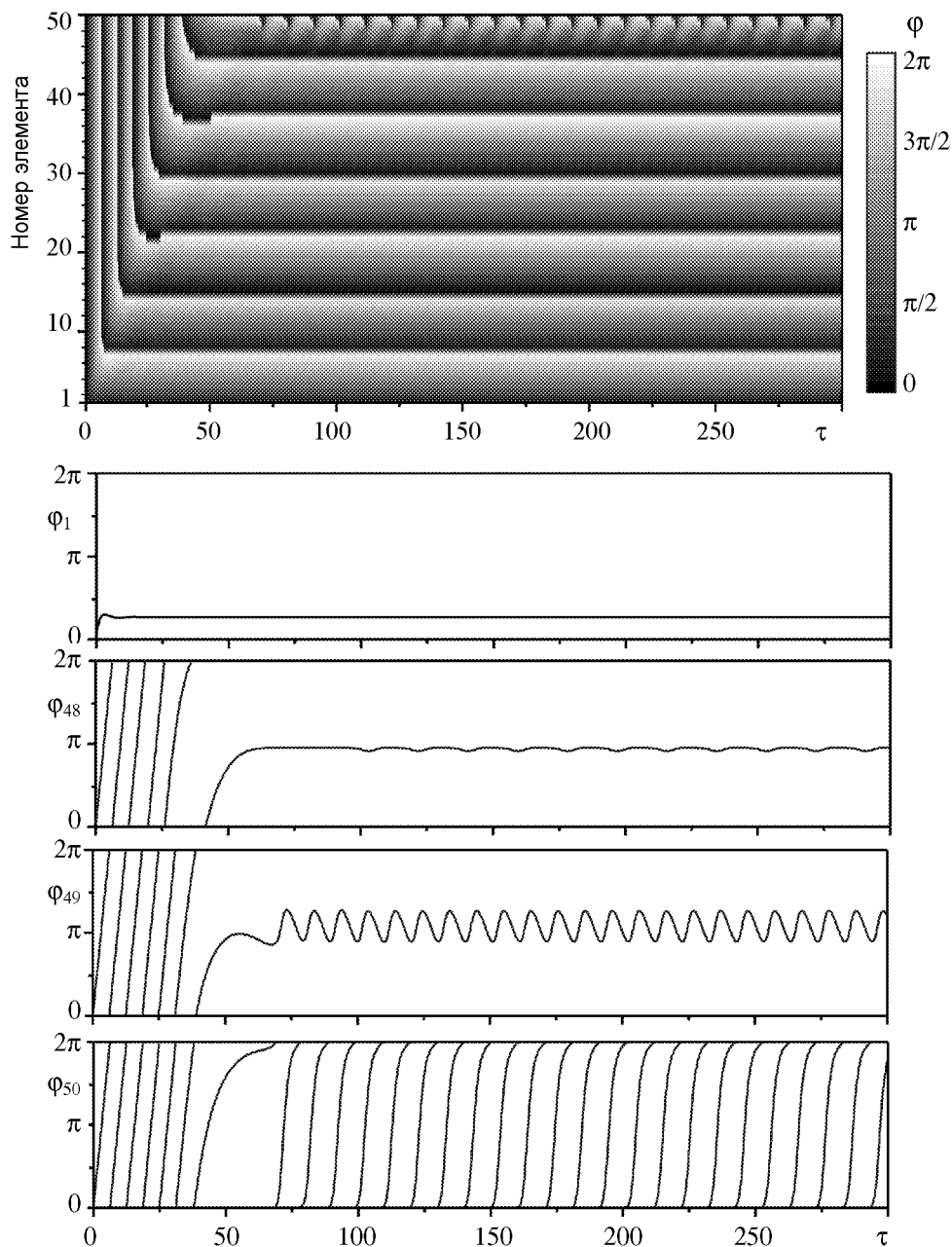


Рис. 2. Ансамбль пятидесяти каскадно связанных систем ФАП. Пространственно-временная диаграмма и временные реализации отдельных систем. Значения параметров:  $\gamma_1 = \dots = \gamma_n = \gamma = 1.01$ ,  $\kappa_1 = \dots = \kappa_{n-1} = \kappa = 0.35$

фиксированной величины параметра связи  $k = 0.35$  все генераторы ансамбля будут функционировать в режиме биений при значении  $\gamma > 1.133$ .

Таким образом, в области больших частотных расстройек обнаружен эффект подавления колебаний в ансамбле пятидесяти каскадно связанных систем ФАП с дополнительными связями «назад» (сигнал дополнительной связи передается из цепи управления впередистоящей системы ФАП в цепь управления предшествующей). В этом случае существует возможность работы каскадной системы в частичном синхронном режиме вне области существования состояний равновесия, когда часть генераторов находится в режиме синхронизма по отношению к опорному сигналу, часть – в квазисинхронном режиме, а остальные генераторы – в режиме биений. Увеличение силы связи и частотной расстройки приводит к исчезновению данного эффекта. Следует заметить, что для больших ансамблей каскадно связанных ФАП с дополнительными связями «вперед» (связь организуется путем подачи сигнала управления  $i$ -го генератора в цепь управления  $(i + 1)$ -го генератора) также были найдены [2] режимы, когда часть генераторов находится в режиме синхронизации, при асинхронной работе остальных генераторов. Однако такое поведение было возможно только в той области значений параметров, где индивидуальная динамика систем ФАП определяется режимом синхронизации относительно опорного сигнала.

### Заключение

Проведено исследование динамических режимов ансамблей каскадно связанных фазовых систем в пространстве параметров. Прослежена эволюция стационарных движений модели (1) при варьировании параметров системы, в результате чего установлены новые сведения о возможных режимах поведения связанных генераторов. На примере малого ансамбля, состоящего из трех фазовых систем с фильтрами первого порядка в цепях управления, продемонстрирована возможность подавления асинхронных колебаний, генерируемых одной из систем, за счет увеличения параметра, характеризующего инерционность цепи управления.

Проанализированы динамические режимы ансамбля, состоящего из большого числа фазовых систем, не содержащих фильтров низких частот в цепях управления и обладающих простой индивидуальной динамикой (режим регулярных биений). Установлено, что при объединении в ансамбль часть управляемых генераторов может быть переведена в режим квазисинхронизации, а при определенных значениях параметра дополнительной связи наблюдается подавление колебаний по направлению к началу цепочки.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (гранты 06-02-16137, 08-02-97035), гранта Президента РФ для поддержки молодых ученых (МК-4659.2007.2).*

### Библиографический список

1. Матросов В.В., Касаткин Д.В. Динамические режимы связанных генераторов с фазовым управлением //Радиотехника и электроника. 2003. Т. 48, № 6. С. 698.
2. Афраймович В.С., Некоркин В.И., Осипов Г.В., Шалфеев В.Д. Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации. Горький: ИПФ АН СССР, 1989.

3. Системы фазовой синхронизации /Под ред. Шахгильдяна В.В., Белюстиной Л.Н. М.: Радио и связь, 1982.
4. *Матросов В.В., Шалфеев В.Д., Касаткин Д.В.* Анализ областей генерации хаотических колебаний в связанных фазовых системах //Известия вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49, № 5. С. 448.
5. *Матросов В.В., Касаткин Д.В.* Анализ процессов возбуждения хаотических колебаний во взаимосвязанных генераторах с фазовым управлением //Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т. 11, № 4–5. С. 31.
6. *Матросов В.В., Касаткин Д.В.* Особенности динамики трех каскадно связанных генераторов с фазовым управлением //Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2004. Т. 12, № 1–2. С. 159.
7. *Матросов В.В.* Автомодуляционные режимы системы фазовой автоподстройки частоты с фильтром второго порядка //Известия вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49, № 4. С. 357.
8. *Kasatkin D.V., Matrosov V.V.*, Collective dynamics of small ensembles of coupled PLL systems //Proc. of the Int. Symposium «Topical Problems of Nonlinear Wave Physics». Nizhny Novgorod: IAP RAS, 2003. P. 137.

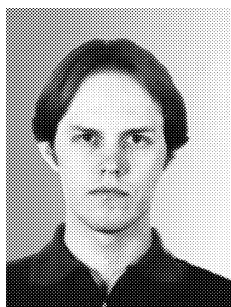
*Поступила в редакцию 11.03.2009  
После доработки 11.04.2009*

## THE PHENOMENON OF OSCILLATION SUPPRESSION IN ENSEMBLES OF COUPLED PHASE-LOCKED LOOP SYSTEMS

*D.V. Kasatkin*

The phenomenon of oscillation suppression in ensembles of coupled phase-locked loop systems is discussed. The investigation of this phenomenon was performed for ensembles of three and fifty cascade coupled phase-locked loop systems with first-order filter in control circuits and without it, respectively. The possibilities of oscillation suppression in a part of phase oscillators of ensembles are demonstrated. Domains of the analysed effect existence are determined in the parameter space.

*Keywords:* Oscillation suppression, phase-locked loop systems, cascade coupling.



*Касаткин Дмитрий Владимирович* – родился в 1978 году в Нижнем Новгороде, окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (2001). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2004, ННГУ). С 2002 года работает в Институте прикладной физики РАН. Область научных интересов – теория нелинейных колебаний и волн, динамический хаос, нейродинамика. Имеет более 30 научных публикаций по указанным направлениям.

603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46  
Институт прикладной физики РАН  
E-mail: kasatkin@neuron.appl.sci-nnov.ru