



ФАЗОВАЯ МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ В АНСАМБЛЕ ГЕНЕРАТОРОВ С УДВОЕНИЯМИ ПЕРИОДА

А.В. Шабунин, В.В. Астахов

Рассматриваются закономерности развития мультистабильности в больших ансамблях идентичных генераторов, демонстрирующих усложнение колебаний через каскад бифуркаций удвоения периода. Исследования проводятся на примере осцилляторов Ресслера, с симметричной диффузионной связью. Определяется число сосуществующих аттракторов при слабой связи и проводится их классификация с точки зрения спектров.

Ключевые слова: Мультистабильность, автоколебания, хаос.

Введение

Синхронизация – фундаментальное природное явление, которое лежит в основе многих механизмов, управляющих эволюцией сложных систем. В связанных автоколебательных системах синхронизация может приводить к возникновению фазовой мультистабильности [1, 2], когда в фазовом пространстве сосуществует несколько аттракторов, соответствующих разным значениям установившихся разностей фаз, каждое из которых соответствует своему синхронному состоянию. В ансамблях осцилляторов с периодическими колебаниями простой формы фазовая мультистабильность реализуется в виде иерархии режимов бегущих волн [3–6]. В системах с более сложным поведением, например, в двух взаимодействующих фейгенбаумовских осцилляторах [1, 7–11], развитие фазовой мультистабильности в ходе каскада бифуркаций удвоения периода ведет к неограниченному увеличению числа сосуществующих предельных циклов на пороге перехода к хаосу. Закономерности развития мультистабильности в двух осцилляторах детально исследованы. В частности, было показано [12], что эволюция колебательных режимов может быть легко объяснена с точки зрения поведения фазовых спектров: фазы появляющихся после каждой бифуркации суб-гармоник принимают два возможных значения 0 и π , каждому из которых соответствует свой аттрактор.

Развитие фазовой мультистабильности в ансамблях с большим числом автогенераторов со сложной динамикой исследовано не столь полно. В ряде работ показано, что в ансамблях генераторов с хаотическим поведением возможно сосуществование хаотических бегущих волн [13–15]. В работе [16] рассматривался постепенный переход от регулярных бегущих волн к хаотическим в ходе каскада бифуркаций удвоения периода. На плоскости управляющих параметров были построены

области существования характерных пространственно – временных режимов, а также рассмотрены типичные последовательности бифуркаций на базе каждого из них. Однако, детального исследования формирования мультистабильности при усложнении формы колебаний не проводилось. В настоящей работе мы пытаемся восполнить этот пробел, исследуя как происходит развитие мультистабильности в ансамбле автогенераторов при усложнении формы колебаний в ходе каскада бифуркаций удвоения периода, сколько различных фазовых мод сосуществует в фазовом пространстве и как их число меняется с изменением параметров системы, а также, насколько подобные режимы являются типичными с точки зрения выбора начальных условий.

1. Исследуемая система в режиме бегущих волн

В качестве модели выберем ансамбль идентичных осцилляторов Ресслера с симметричной диффузионной связью:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= -y_i - z_i + \gamma(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) \\ \dot{y}_i &= x_i + 0.2y_i \\ \dot{z}_i &= 0.2 + z_i(x_i - c)\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь x_i , y_i и z_i – динамические переменные i -го осциллятора ($i = 1, \dots, N$); c – управляющий параметр, ответственный за бифуркации удвоения периода; $\gamma > 0$ – параметр связи. Для определенности выберем число осцилляторов N , равное 30. Будем также использовать периодические граничные условия: $x_{31} = x_1$, $x_0 = x_{30}$ (здесь и далее жирным шрифтом обозначаются векторные величины: $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$).

Как известно [17], осциллятор Ресслера – типичная автоколебательная система, демонстрирующая каскад бифуркаций удвоения периода. Динамика ансамбля (1) сложнее, чем динамика одного генератора. При слабой связи в подобных системах следует ожидать мультистабильность, то есть сосуществование множества устойчивых колебательных режимов, выбор между которыми осуществляется посредством выбора начальных условий. Поскольку генераторы идентичны, а связь между ними симметрична – уравнения (1) обладают трансляционной симметрией: сдвиг на любое число осцилляторов вправо или влево оставляет уравнения системы без изменения. Вследствие симметрии в (1) могут наблюдаться режимы, при которых форма колебаний и их амплитуда у всех осцилляторов одинаковые, а текущие фазы отличаются от фаз соседей на постоянную величину. Такие режимы можно рассматривать как автоволны, бегущие с постоянной фазовой скоростью вдоль цепочки.

Рассмотрим, какие бегущие волны возможны в системе (1), если колебания в каждом из генераторов близки к гармоническим. Введем в рассмотрение текущие фазы колебаний в каждом из осцилляторов ансамбля. Определим фазу в виде кусочно-линейной функции времени, монотонно возрастающей на периоде колебаний от $-\pi$ до π , а затем при достижении граничного значения, скачком возвращающейся назад на 2π ,

$$\varphi_i(t) = 2\pi \frac{t - t_n^{(i)}}{t_{n+1}^{(i)} - t_n^{(i)}} - \pi.\tag{2}$$

Здесь $t_n^{(i)}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) – момент времени n -го, а $t_{n+1}^{(i)}$ – $n+1$ -го пересечения траекторией $\mathbf{x}_i(t)$ некоторой гиперплоскости. Разности между текущими фазами соседних осцилляторов $\Delta\varphi_i(t) = \varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) будем называть фазовыми сдвигами между ними. Если величина связи равна нулю, то периоды колебаний всех осцилляторов будут одинаковы независимо от их местоположения в ансамбле, а следовательно величины фазовых сдвигов не должны меняться со временем: $\Delta\varphi_i(t) = c_i$. Сами значения разностей фаз для каждого i могут быть произвольными, однако, вследствие периодических граничных условий суммарный набег фаз вдоль кольца $\Phi = \sum_{i=1}^N c_i$ пропорционален 2π : $\Phi = 2\pi k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm N/2$ принимает целое значение. Введение сколь угодно слабой, но отличной от нуля связи приводит к синхронизации между осцилляторами, в результате которой произвол в значениях разностей фаз устраняется: фазовые сдвиги принимают строго определенные значения [18]. Симметричные системы, подобные (1), допускают решения, при которых в каждой точке среды форма колебаний в каждом из осцилляторов и фазовые сдвиги между соседними осцилляторами одинаковы: $\Delta\varphi_i(t) = \Delta\varphi$, то есть, допускают решения в виде волн, бегущих вдоль кольца с фазовой скоростью $v = 2\pi/\Delta\varphi T$ и характеризующихся длиной волны $\Lambda = 2\pi/\Delta\varphi$. Если число осцилляторов в ансамбле (N) конечно, то и число возможных бегущих волн также конечно и равно N . Значение фазового сдвига для каждой волны рассчитывается по формуле

$$\Delta\varphi^{(k)} = \frac{2\pi k}{N}. \quad (3)$$

Индекс k определяет пространственную структуру колебаний цепочки осцилляторов и будет в дальнейшем использоваться как индекс волны. Значению $k = 0$ соответствует пространственно-однородное состояние, когда колебания в каждом из осцилляторов синфазны, $k = \pm N/2$ относятся к противофазным колебаниям. В остальных случаях каждое положительное значение k соответствует прямой волне, отрицательное – обратной. Поскольку прямые и обратные волны отличаются только направлением распространения, в дальнейшем будем рассматривать только прямые волны, то есть ограничимся значениями $k \geq 0$.

В работе [19] проводился анализ устойчивости бегущих волн в квазигармоническом приближении, а в работе [6] – анализ устойчивости подобных режимов в ансамбле генераторов ван дер Поля с диффузионной связью, как вблизи бифуркации рождения предельного цикла, так и при релаксационных колебаниях. Было показано, что расположение областей устойчивости бегущих волн на плоскости параметров «связь – возбуждение» имеет вложенную структуру: области устойчивости коротковолновых режимов располагаются внутри областей устойчивости более длинноволновых режимов. Известно также [4], что при положительных значениях диффузионной связи могут быть устойчивыми только те волны, для которых разность фаз между соседними осцилляторами не превосходит $\pi/2$. В анализируемом нами случае $N = 30$ это с учетом (3) означает, что только волны с $k = 0, 1, \dots, 7$ могут быть устойчивыми, а с $7 < k \leq 15$ – нет.

Итак, предыдущие исследования позволяют предположить, что при слабой диффузионной связи в системе (1) можно ожидать сосуществование бегущих волн с

$k = 0, 1, \dots, 7$. Проведем численные исследования поведения ансамбля при $\gamma = 0.005$ и $c = 2.35$, что соответствует колебаниям простой формы в каждом из генераторов. Чтобы различать волны с разными k , будем отображать «профили» бегущих волн, для чего используем следующую методику. Построим отображение Пуанкаре, выбрав в качестве секущей гиперплоскость $y_1 = 0$. Для этого будем отслеживать моменты времени t_n , в которые переменная y_1 меняет знак с положительного на отрицательный. Построим график зависимости значений переменной x в каждом из генераторов при пересечении траекторией данной гиперплоскости ($x_i(t_n)$) от номера осциллятора i . Таким образом, у нас получится «мгновенный снимок» волны, привязанный к определенному значению фазы одного из генераторов (в данном случае – первого). Для исследования бегущих волн также будем использовать спектральные характеристики:

- спектр мощности колебаний $x_i(t)$

$$P_i(f) = \langle F_i(f)F_i^*(f) \rangle,$$

где $F(f)$ – Фурье преобразование, f – частота;

- взаимный фазовый спектр колебаний $x_i(t)$ и $x_{i+1}(t)$

$$\Delta\theta_i(f) = \theta_{i+1}(f) - \theta_i(f),$$

где $F_i(f) = |F_i(f)| \exp(j\theta_i(f))$.

Поскольку в системе может существовать несколько аттракторов, для выбора между ними необходимо задавать разные начальные условия. Как задать начальные условия, чтобы система выбрала «нужный» аттрактор с данным k ? Очевидно, начальные условия должны быть достаточно близки к искомому аттрактору. При нулевой связи можно задать начальные условия в первом из осцилляторов, выбрав их вблизи предельного цикла, а в остальных осцилляторах – те же значения, но сдвинутые по фазе на угол $(i - 1)\Delta\varphi^{(k)}$, пропорционально фазовому сдвигу, характерному для заданной моды. Если полагать, что слабая связь существенно не меняет форму колебаний, можно воспользоваться той же методикой и для ансамбля слабосвязанных генераторов. В наших исследованиях мы задавали начальные значения x_i и y_i в виде функций синус и косинус от аргумента $i\phi$ при $\phi = \Delta\varphi^{(k)}$, оставляя значения z_i нулевыми

$$\begin{aligned} x_i &= X_0 \sin(i\phi), \\ y_i &= Y_0 \cos(i\phi), \\ z_i &= 0, \\ i &= 0, 1, \dots, N - 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Константы X_0 и Y_0 выбирались достаточно близкими к амплитудам колебаний соответствующих переменных в отдельном несвязанном осцилляторе Ресслера при данном c . Как показали исследования, данный способ выбора начальных условий позволяет получить каждый из волновых режимов с $k = 0, \pm 1, \dots, \pm 7$. Таким образом,

численные исследования подтверждают, что все режимы с $k \leq 7$ при выбранной слабой связи устойчивы. На рис. 1 изображены снимки волн с $k = 0, 1, 2, 4$ и 7 (слева), а также проекции фазовых портретов x_1-x_2 (справа). Характер пространственного профиля волн полностью определяется значением индекса k ; последний равен числу максимумов или минимумов на профиле волны. На том же рисунке пунктирными линиями построены профили обратных волн с отрицательными k .

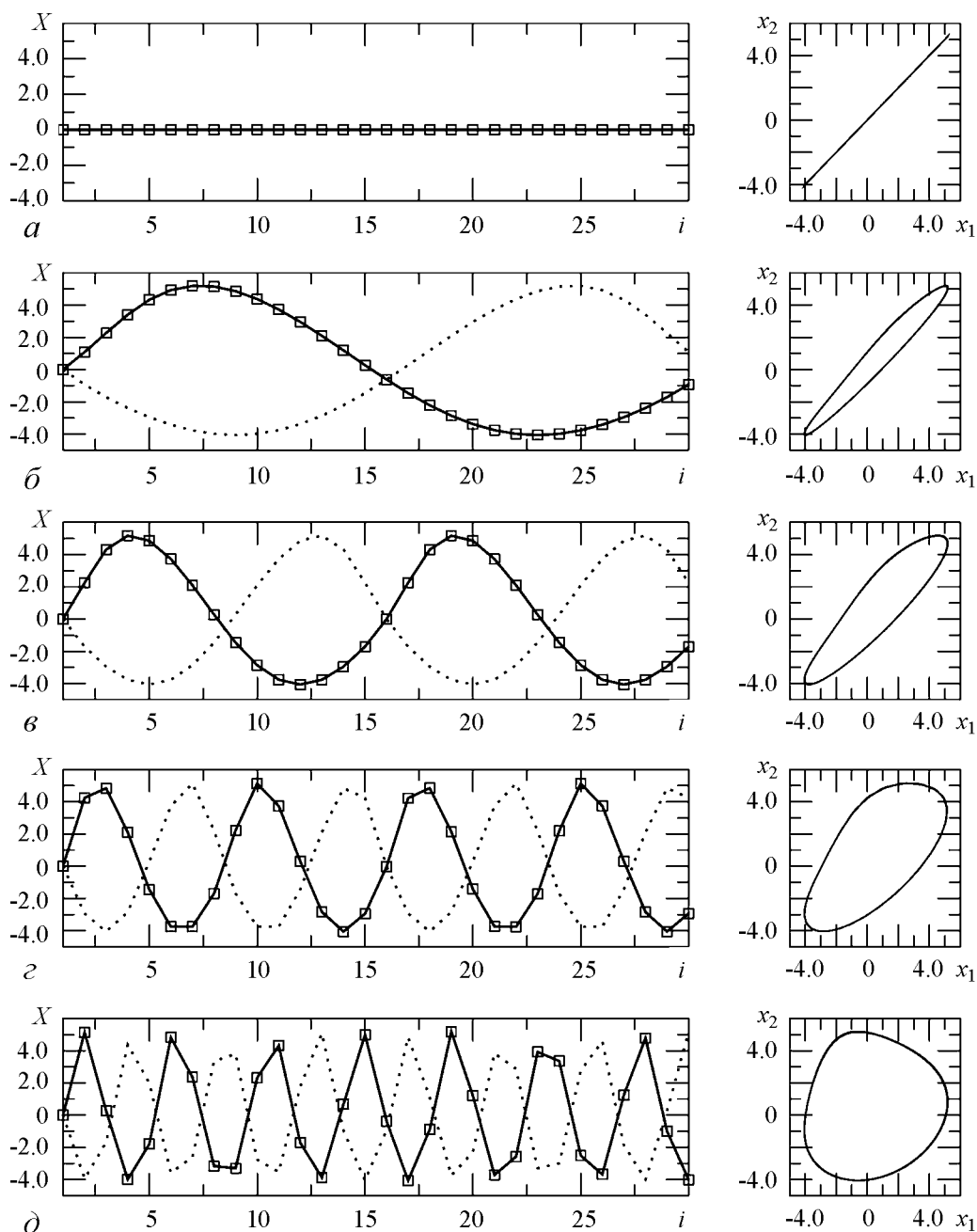


Рис. 1. «Профили» бегущих волн с разными значениями индекса k (слева) и фазовые портреты (справа): $a - k = 0$; $b - 1$; $\theta - 2$; $z - 4$; $d - 7$. Значения параметров: $c = 2.35$, $\gamma = 0.005$

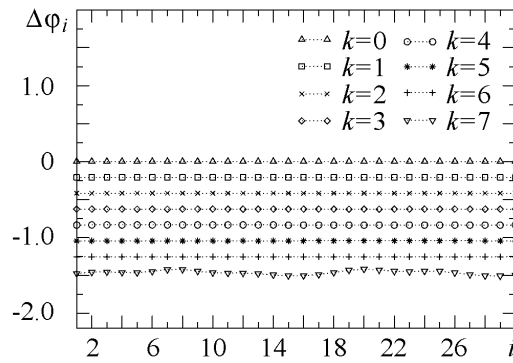


Рис. 2. Распределение разности фаз вдоль ансамбля. Значения параметров те же, что и на рис.1

волны с $k = 2$. В силу пространственной однородности колебаний, обе эти спектральные характеристики будут одинаковыми и для всех остальных осцилляторов ансамбля. Видно, что спектр мощности содержит основную гармонику на частоте $f_0 \simeq 0.17$ и высшие гармоники на частотах $2f_0, 3f_0$, и т.д. Значение фазы основной гармоники $\Delta\theta^{(1)} = \Delta\theta(f_0)$ совпадает со значением фазового сдвига данной моды: $\Delta\theta^{(1)} = -4\pi/30 \simeq -0.42$. Фазы высших гармоник принимают пропорциональные значения: $\Delta\theta(nf_0) = n\Delta\theta^{(1)}$.

Таким образом, мы видим, что на этапе простейших колебаний в системе (1) наблюдается фазовая мультстабильность. Специальный выбор начальных условий позволяет выявить все ожидаемые режимы бегущих волн. Существуют ли бегущие волны с другими значениями $\Delta\varphi$? Будут ли волновые моды с $\Delta\varphi^{(k)} > \pi/2$ устойчивы в ансамбле генераторов Ресслера в отличие от ансамблей квазигармонических осцилляторов? Для ответа на эти вопросы произведен поиск установившихся устойчивых колебательных режимов при том же циклическом способе задания начальных условий (4), но при произвольных значениях угла φ .

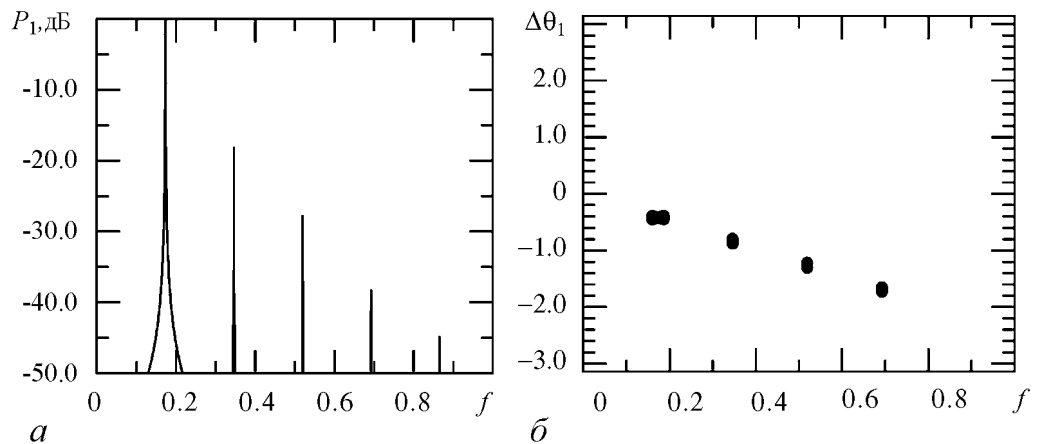


Рис. 3. Взаимный спектр мощности (а) и взаимный фазовый спектр (б) колебаний $x(t)$ с $k = 2$. Значения параметров те же, что и на рис. 1

На рис. 4 представлены результаты исследований при сканировании ϕ в диапазоне значений от 0 до π (результаты для значений с отрицательными ϕ будут симметричными). На нём построена зависимость индекса k , характеризующего установившуюся волновую моду, от угла ϕ . Анализ результатов показывает, что во всем диапазоне значений ϕ задание циклических начальных условий приводит к выбору одной из указанных ранее бегущих волн в том же диапазоне значений $0 \leq k \leq 7$. Колебательные режимы с неоднородным пространственным распределением, а также бегущие волны с $k > 7$ обнаружены не были. При малых значениях угла система демонстрирует пространственно-однородные колебания. Постепенное увеличение ϕ ведет к серии «прыжков» ко все более и более коротковолновым модам. Такое поведение сохраняется вплоть до значения $\phi = \pi/2$, после чего характер зависимости выхода на ту или иную пространственную моду от угла ϕ существенно меняется. При $\phi > \pi/2$ эта зависимость становится неупорядоченной – близким начальным условиям могут соответствовать разные пространственные моды.

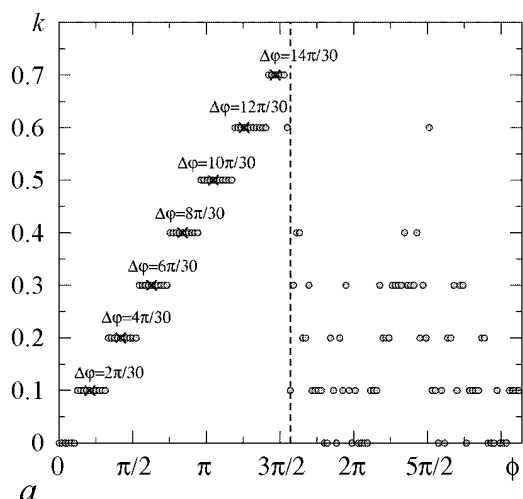


Рис. 4. Выход на разные пространственные моды в зависимости от выбора начальных условий (4). Значения параметров: $c = 2.7$, $\gamma = 0.005$

Проведенные исследования показали, что бегущие волны с $k \in [0 : 7]$ являются устойчивыми решениями системы (1) при выбранных значениях параметров, а волны с $k > 7$ – неустойчивыми. Однако, специальный выбор начальных условий не может дать ответа на следующие вопросы:

- насколько типичными решениями для данной системы являются решения в виде бегущих волн?
- существуют ли другие виды устойчивых решений, не обладающие такой высокой степенью пространственной однородности?

Для ответа на эти вопросы были проведены исследования вида установившихся колебаний при случайном выборе начальных условий

$$x_i = X_0 \xi_i^{(x)}, y_i = Y_0 \xi_i^{(y)}, z_i = Z_0 \xi_i^{(z)}, \quad (5)$$

где $\xi_i^{(x,y,z)}$ – некоррелированные источники шума с равномерным распределением, $X_0 = Z_0 = 1$, $Y_0 = 0.5$ – константы. Исследования были выполнены для двух значений параметра c : 1.35 и 2.7. Как и в случае регулярных начальных условий не удалось обнаружить других устойчивых режимов, кроме указанных выше. Более того, при случайном выборе начальных условий в ходе 2000 выборок система демонстрировала только длинноволновые режимы с $k < 5$. Расчет вероятностей выхода на тот или иной колебательный режим ($p^{(k)}$) при случайном выборе начальных условий

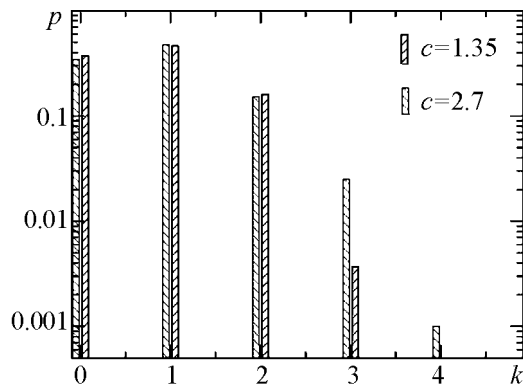


Рис. 5. Вероятности появления разных пространственных мод при случайном выборе начальных условий и $\gamma = 0.005$

показал, что две самые длинные моды с $k = 0$ и $k = 1$ являются типичными решениями системы (1) с суммарной вероятностью около 85%. Оставшиеся 15% приходятся на более короткие волны с $k = 2, 3$ и 4. Режимы с $k \geq 5$ в ходе 2000 попыток ни разу не наблюдались. Результаты расчетов показаны на рис. 5. Видно, что распределение вероятности появления каждого типа волны сохраняется примерно одинаковым для разных значений параметра. С увеличением c мы наблюдаем небольшое увеличение вероятности появления более коротковолновых режимов.

Данные исследования позволяют заключить, что рассматриваемые режимы бегущих волн – характерные типы колебаний, которые с ненулевой вероятностью можно обнаружить в системе (1) на этапе простых однопериодных колебаний. Другие типы пространственно-временных режимов либо отсутствуют вовсе, либо бассейны притяжения их аттракторов настолько малы, что их появление крайне маловероятно.

2. Эволюция бегущих волн при усложнении формы колебаний в ходе удвоений периода

Рассмотрим, что происходит с режимами бегущих волн при увеличении параметра c . Выберем начальные условия, соответствующие одной из пространственных мод, например, с $k = 2$ и, адиабатически меняя параметр, будем отслеживать качественные изменения установившихся колебательных режимов. До $c \simeq 2.85$ в каждом из генераторов сохраняются колебания периода один. При достижении этого значения в одиночном осцилляторе Ресслера наблюдается бифуркация удвоения периода. Вместо нее в ансамбле осцилляторов имеет место мягкое возникновение двухчастотных квазипериодических колебаний, которые при $c \simeq 3.05$ сменяются двухоборотным предельным циклом. Пространственные профили и проекции фазовых портретов показаны на рис. 6, а, б. Рассмотрим режим, соответствующий вновь появившимся колебаниям периода два, более подробно. Анализ пространственного профиля, а также распределения разностей текущих фаз вдоль цепочки показывает, что данные колебания больше не являются пространственно-однородными. В распределении разностей фаз присутствуют стационарные «фазовые дефекты», а именно – значения фазовых сдвигов в нескольких осцилляторах ансамбля отличаются от фазовых сдвигов в остальных осцилляторах. Режим с фазовыми дефектами показан на рис. 7, где построено распределение разностей текущих фаз вдоль ансамбля осцилляторов. Наблюдаются два дефекта, находящиеся на одинаковом расстоянии друг от друга. Несмотря на наличие дефектов суммарный набег фазы вдоль ансамбля сохраняет значение $\Phi = 4\pi$, характерное для моды с $k = 2$.

Дальнейшая эволюция колебаний в ансамбле происходит так же, как и в одиночном осцилляторе, то есть через каскад бифуркаций удвоения периода. При $c \simeq 4.1$ наблюдается бифуркация удвоения периода двух-оборотного предельного цикла, и колебания в каждом из генераторов становятся четырехоборотными (рис. 6, в). Каскад бифуркаций удвоения периода при $c \simeq 4.35$ завершается переходом к многоленточному хаосу. В закритической области наблюдаются бифуркации слияния лент многоленточных хаотических аттракторов, завершающиеся возникновением одноленточного хаоса (рис. 6, д).

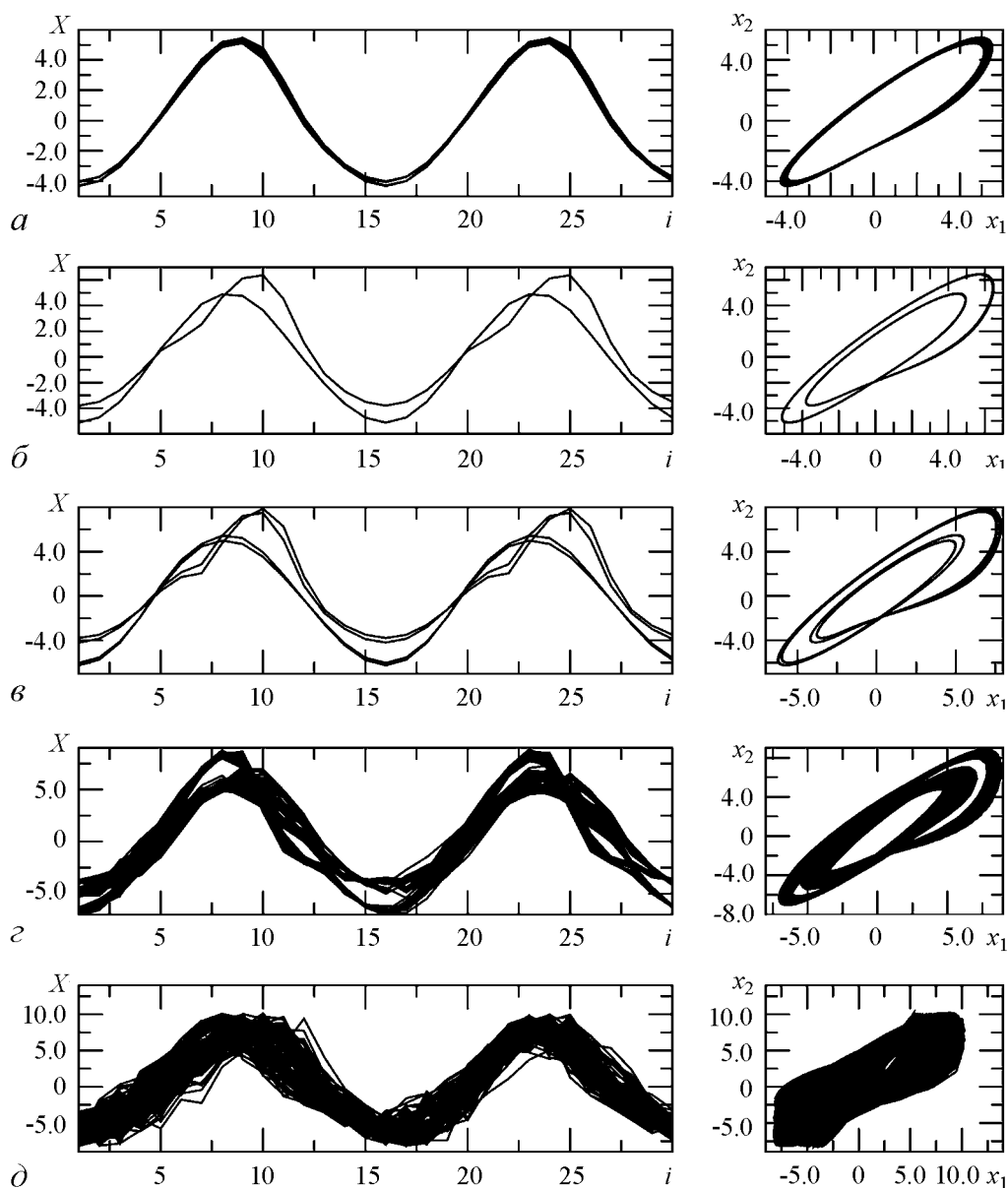


Рис. 6. Пространственные профили (слева) и проекции фазовых портретов (справа) колебательных режимов, образованных на базе волны с $k = 2$ при увеличении параметра c : а – 2.85, б – 3.05, в – 4.1, г – 4.4, д – 6.25

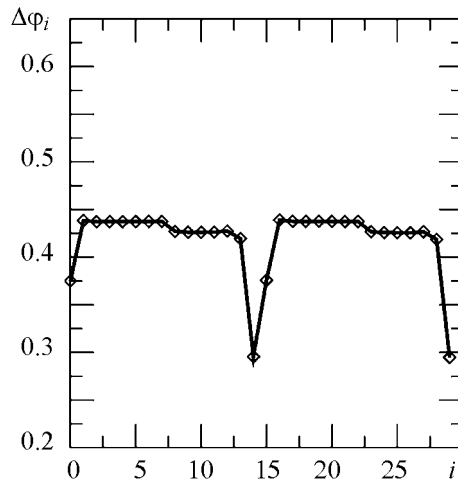


Рис. 7. Распределение разностей мгновенных фаз вдоль ансамбля для колебаний периода два; $c = 3.05$, $\gamma = 0.01$

ет трансляционной симметрией – она инвариантна по отношению к вращению вдоль кольца

$$I : \dots \rightarrow x_{i-1} \rightarrow x_i \rightarrow x_{i+1} \rightarrow \dots$$

Вследствие этого все предельные множества фазового пространства системы (1) будут либо самосимметричными, либо будут иметь симметричных «двойников». На уровне колебаний периода один все бегущие волны самосимметричны. После перехода к колебаниям периода два симметрия нарушается за счет появления фазовых дефектов. Так, например, аттрактор, показанный на рис. 6, *б*, не симметричен, поскольку имеет пару дефектов. Соответственно, имеется $N/2 - 1$ симметричных аттракторов, которые могут быть получены посредством вращения на $1, 2, \dots, N/2 - 1$ позиции. Рождение нескольких циклов периода два из одного цикла периода один не может происходить через бифуркацию удвоения периода. Вместо нее наблюдается сначала переход к квазипериодическим колебаниям, а затем – в результате одновременных седло-узловых бифуркаций – рождение нескольких устойчивых предельных циклов периода два.

Таким образом, переход от колебаний периода один к колебаниям периода два приводит к нарушению пространственной регулярности – на фоне бегущей волны появляются дефекты. Строго говоря, такие колебательные режимы более не являются бегущими волнами. Однако среднее значение фазового сдвига между соседними осцилляторами сохраняется и, соответственно, наследуется пространственный вид профиля моды с двумя минимумами и максимумами вдоль цепочки. Как показывают исследования спектров колебаний, также сохраняется значение фазы основной гармоники $\Delta\theta^{(1)}$, которое остается одинаковым для каждого из осцилляторов ансамбля. Однако значения фаз, появившихся после удвоения периода субгармоник, $\Delta\theta^{(1/2)} = \Delta\theta(0.5f_0)$ уже перестают быть однородными. В «регулярных» осцилляторах и в «дефектах» эти значения различаются. Рис. 8 отображает проекции фазовых портретов (верхняя часть рисунка) и взаимные фазовые спектры (нижняя часть рисунка) колебаний осцилляторов в «регулярной» части ансамбля (*a*) и в ме-

Как видно, в описанном выше сценарии нарушение каскада бифуркаций удвоения периода происходит только однократно: между циклами периода один и периода два. Остальные бифуркации происходят обычным образом. Подобное замещение одной из бифуркаций удвоения периода отмечено во множестве работ, посвященных исследованию динамики взаимодействующих идентичных осцилляторов с симметричной связью. Почему именно первая из бифуркаций удвоения периода играет особую роль? Полагаем, данная особенность бифуркационного механизма связана со свойствами симметрии системы (1). Исследуемая система обладает

сте расположения дефекта (\bar{b}). Видно, что в обоих случаях фазы гармоник $\Delta\theta(nf_0)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) имеют одинаковое значение: $-2\pi kn/N$; в то время как фазы субгармоник $\Delta\theta(0.5(2n-1)f_0)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) могут иметь два разных значения: они равны $-\pi k(2n-1)/N$ в первом случае, либо равны $\pi - \pi k(2n-1)/N$ во втором случае. Таким образом, фазы субгармоники в основной части ансамбля равны половине фазы основной гармоники, а в точке дефекта – отличаются от нее на π .

Как показали исследования, эволюция колебательных режимов на базе каждой из бегущих волн с $k = 1, \dots, 7$ происходит схожим образом. В каждом из случаев наблюдается замещение первой бифуркации удвоения периода последовательностью бифуркации рождения двумерного тора и синхронизацией на торе, в результате чего система переходит на один из нескольких сосуществующих предельных циклов периода два, симметричных друг другу. В пространственном распределении разностей фаз вдоль цепочки наблюдаются фазовые дефекты, обусловленные тем, что в некоторых точках среды значения фаз субгармоник отличаются на π от соответствующих значений в других точках среды, в то время как значения фаз основных гармоник

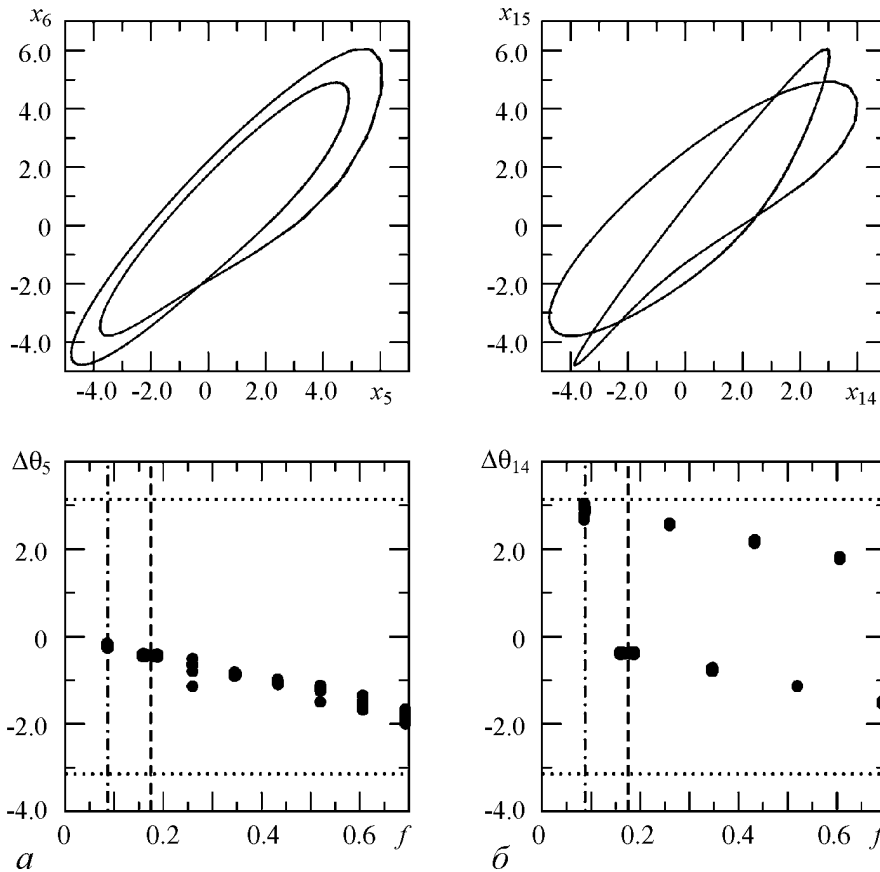


Рис. 8. Фазовые портреты (вверху) и взаимные фазовые спектры (внизу) колебаний в «регулярном» (a) и «дефектном» (б) элементах ансамбля. Вертикальные линии отмечают положение базовой частоты спектра $f = f_0$ (штриховая линия) и первой из субгармоник $f = f_0/2$ (штрих-пунктирная линия). Значения параметров те же, что и на рис. 7

остаются неизменными. Эволюция спектров характеризуется тем, что в результате бифуркаций колебательных режимов на базе выбранной пространственной моды фазы существующих до бифуркаций гармоник сохраняют свое значение и после нее. Данное правило имеет место и для хаотических колебаний. Многоленточный хаотический аттрактор, образованный на базе многооборотного цикла, характеризуется теми же значениями фаз гармоник и субгармоник, что и исходный предельный цикл. Поэтому усложнение формы колебаний в ходе цепочки мягких бифуркаций не разрушает пространственную структуру, характерную для выбранной фазовой моды. Сохраняется в среднем профиль волны, на который накладываются «дефекты», сохраняется значение фазы основных гармоник взаимного спектра $\Delta\theta^{(1)}$, а также значение суммарного набега фазы k . На рис. 9 построены взаимные фазовые спектры для ряда типичных режимов данной моды: четырехоборотного цикла (а), двухленточного (б) и одноленточного аттракторов (в). Во всех случаях фазы основных гармоник оказываются захваченными на тех же значениях, что и у исходного цикла периода один. В то же время значения фаз для субгармоник в каждом из элементов ансамбля могут различаться. Различие в фазах субгармоник является источником дальнейшего развития мультистабильности на базе каждой из пространственных мод.

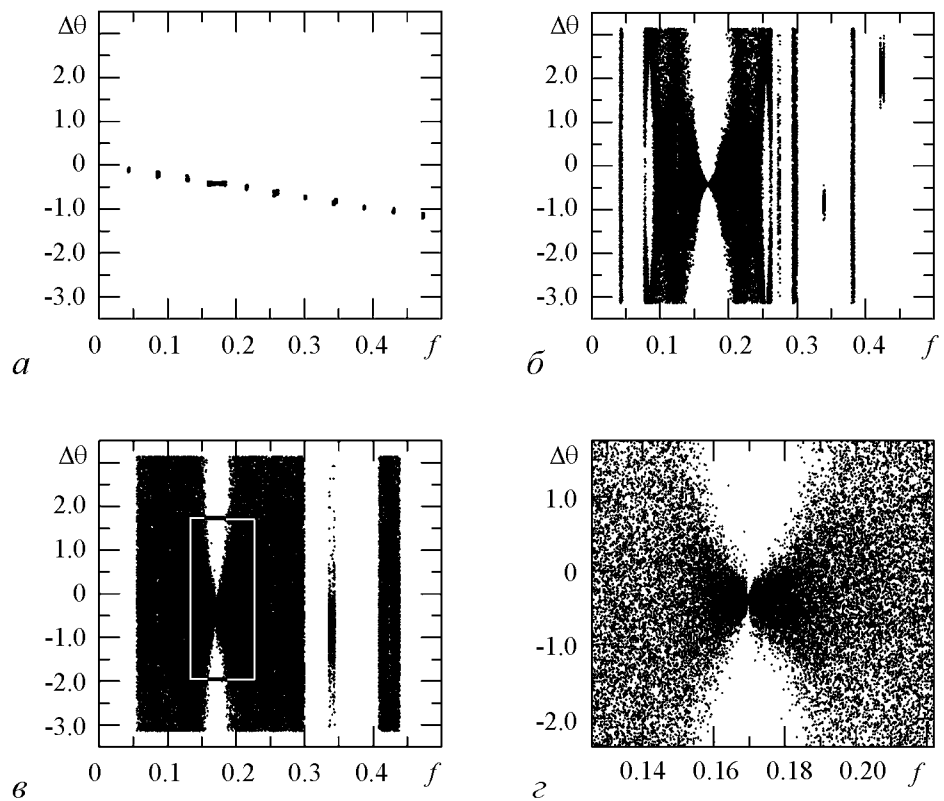


Рис. 9. Взаимный фазовый спектр колебаний для пространственной моды с $k = 2$: а – предельный цикл периода четыре (см. рис. 6, в); б – двухленточный хаотический аттрактор (см. рис. 6, г); в – одноленточный хаотический аттрактор (см. рис. 6, д); г – воспроизводит часть рис. в, отмеченную прямоугольником

3. Развитие мультистабильности при усложнении формы колебаний

Как было показано выше, при малой связи в системе (1) сосуществуют 15 аттракторов, соответствующих колебаниям периода один. Усложнение формы колебаний приводит к увеличению числа сосуществующих аттракторов за счет «расщепления» одного самосимметричного аттрактора на несколько – симметричных друг другу, различающихся расположением дефектов. Как можно оценить число сосуществующих аттракторов данной пространственной моды с определенным индексом k и с выбранной формой колебаний?

Вернемся к циклу периода два. Переход от однооборотного предельного цикла к двухоборотному сопровождается потерей симметрии: один самосимметричный аттрактор периода один порождает несколько симметричных друг другу аттракторов периода два, каждый из которых отличается своим расположением фазовых дефектов. Как показывают исследования, число дефектов совпадает со значением k , а сами дефекты располагаются равномерно вдоль ансамбля. Например, для волны с $k = 2$ этот переход ведет к появлению 15 колебательных режимов с двумя дефектами. Таким образом, общее число сосуществующих аттракторов, возникших описанным выше способом, не должно превосходить значения NM_1 , где M_1 – число бегущих волн периода один. Однако экспериментальная проверка не подтверждает данный результат. Попытка подсчитать число сосуществующих аттракторов периода два обнаруживает, что их число гораздо больше.

Выберем $c = 3.15$ и будем задавать случайные начальные условия согласно правилу (5), подсчитывая число разных аттракторов, обнаруженных после R попыток. Для каждой из $j = 1, 2, \dots, R$ попыток будем использовать следующую методику.

- Зададим случайные начальные условия $\mathbf{x}_i^{(j)}(0)$ ($i = 1, 2, \dots, N$).
- Проинтегрируем систему (1) с выбранных начальных условий в течение заданного интервала установления t_r (в наших исследованиях $t_r = 50000$).
- Выясним, относится ли точка $\mathbf{X}_i^{(j)} = \mathbf{x}_i^{(j)}(t_r)$ к уже найденным аттракторам. Для этого будем использовать свойство возвращаемости траектории аттрактора в окрестность каждой из своих точек. Проинтегрируем систему (1) в течение времени анализа t_a ($t_a = 10000$) из начальных условий $\mathbf{X}_i^{(j)}$, отслеживая расстояние между траекторией $\mathbf{x}_i^{(j)}(t)$ и точками, принадлежащими уже найденным в предыдущих попытках аттракторам $\mathbf{X}_i^{(l)}$, $l = 1, 2, \dots, j-1$: $d^{(j,l)} = \min \|\mathbf{x}_i^{(j)}(t) - \mathbf{X}_i^{(l)}\|$. Если для точки, принадлежащей одному из аттракторов $\mathbf{X}_i^{(s)}$, это расстояние меньше заданного ε ($d^{(j,s)} \leq \varepsilon$), полагаем, что точка $\mathbf{X}_i^{(j)}$ принадлежит тому же аттрактору, что и точка $\mathbf{X}_i^{(s)}$.

- В противном случае принимаем, что точка $\mathbf{X}_i^{(j)}$ не принадлежит ни одному из найденных ранее аттракторов, добавляем $\mathbf{X}_i^{(j)}$ в общий пул точек, относящихся к найденным ранее аттракторам, и увеличиваем число последних на единицу.

На рис. 10, а представлен график зависимости числа обнаруженных аттракторов после задания R разных случайных начальных условий. Как видно из графика, число аттракторов растет с увеличением R практически линейно, не обнаруживая склонности к насыщению даже после 2000 выборок. Оно значительно превышает ожидаемое число аттракторов, примерно равное 450. Для сравнения на рис. 10, б

подобная зависимость построена для циклов периода один. Здесь число обнаруженных аттракторов после 700 попыток стабилизируется на значении 9 с $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ и больше не меняется.

Поскольку, как было обнаружено, в фазовом пространстве существует гораздо больше аттракторов, чем появляется в результате седло-узловых бифуркаций на торе, описанный в предыдущем разделе бифуркационный механизм нельзя считать единственным. Соответственно, следует ожидать существование колебательных режимов с пространственными свойствами, отличными от свойств описанных выше режимов.

Рассмотрим два произвольно выбранных колебательных режима периода два, полученных при случайном задании начальных условий (рис. 11). Их пространственные профили в среднем совпадают: оба профиля характеризуются двумя глобальными максимумами и минимумами вдоль цепочки, однако, имеются локальные

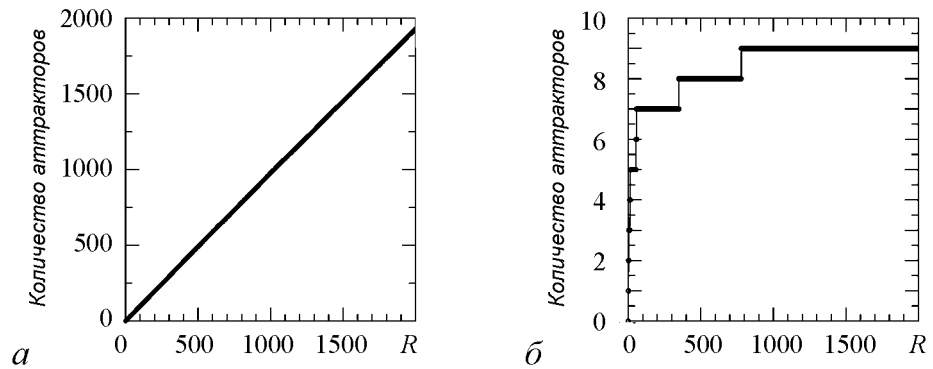


Рис. 10. Число сосуществующих аттракторов, обнаруженных после R случайных начальных условий для $\gamma = 0.005$: a – цикл периода два, $c = 3.15$; b – цикл периода один, $c = 2.7$

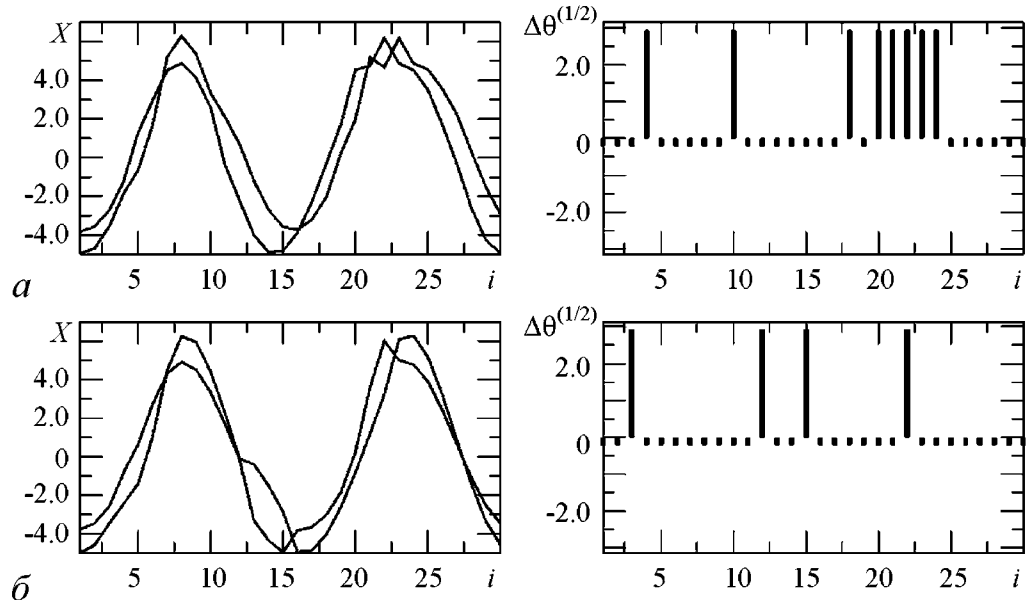


Рис. 11. Аттракторы фазовой моды $2C^2$ ($c = 3.15$, $\gamma = 0.005$) для двух случайных наборов начальных условий

различия. Эти различия связаны с фазами субгармоник взаимных спектров колебаний. Исследования фазовых спектров этих режимов показывают, что также как и для волн периода один значение разности фаз основной гармоники одинаково в каждом осцилляторе $\Delta\theta_i^{(1)} = -0.418$. Однако фазы субгармоник распределены вдоль цепочки неравномерно. Распределения данных фаз вдоль ансамбля построены для указанных режимов в правой части рис. 11. Так же как и для режимов на рис. 6, б фазы субгармоник могут принимать в каждом осцилляторе одно из двух возможных значений: $\Delta\theta^{(1/2)} = 0.5\Delta\theta^{(1)} = -0.209$ и $\Delta\theta^{(1/2)} = 0.5\Delta\theta^{(1)} + \pi = 2.932$. Однако их пространственное распределение больше не соответствует тем правилам, которые были обнаружены для предельных циклов, появившихся в результате синхронизации на торе: число дефектов больше двух и они распределены вдоль ансамбля неравномерно. Назовем элемент ансамбля, в котором фаза первой субгармоники принимает первое значение, элементом «а», а элемент ансамбля, в котором фаза первой субгармоники принимает второе значение – элементом «б». Элемент «а» соответствует «регулярному» осциллятору, элемент «б» – дефекту. Анализ этих и подобных им примеров дает возможность предположить, что сочетание «а» и «б» элементов может быть любым. Это предположение предсказывает существование 2^{N-1} циклов периода два для каждой из M_1 фазовых мод:

$$M_2 = M_1 2^{N-1}. \quad (6)$$

В случае 30 осцилляторов формула (6) предсказывает существование 80530636890 аттракторов, что объясняет почти линейный ход зависимости на рис. 10 а. Однако столь большое число аттракторов исключает возможность экспериментальной проверки.

Чтобы проверить правильность нашего предположения выберем ансамбль с меньшим числом осцилляторов. Для $N = 2, 3, 5, 6$ формула (6) дает $M_2 = 2, 4, 8, 96$ сосуществующих аттрактора, соответственно. Численные исследования подтверждают эти предсказания. Так, на рис. 12 сплошными линиями построены графики зависимости числа обнаруженных аттракторов периода два после R случайно выбранных начальных условий для ансамбля из трех (а) и пяти (б) осцилляторов. В обоих

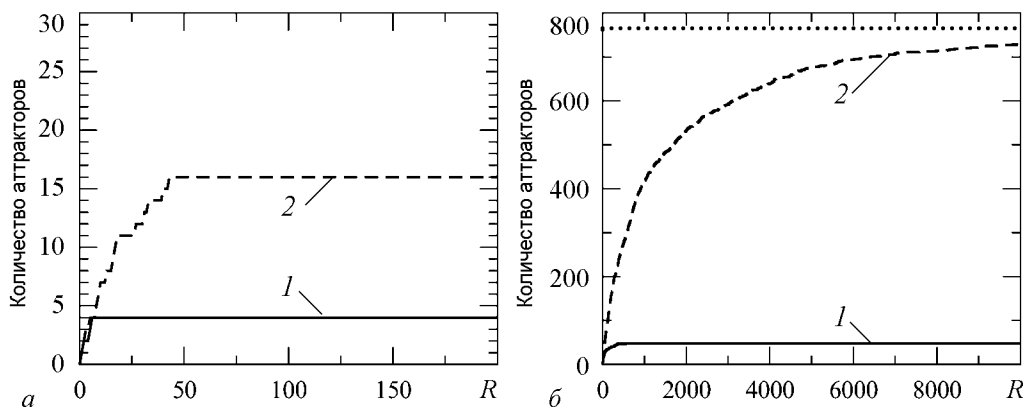


Рис. 12. Число сосуществующих аттракторов периода два (1) для $c = 3.15$ и периода четыре (2) для $c = 4.1$, найденных после R случайных начальных условий для ансамблей из 3 (а) и 5 (б) осцилляторов. Во всех случаях $\gamma = 0.005$

случаях мы наблюдаем стабилизацию зависимости на значениях в 4 и 48 аттракторов, предсказанных (6). Аналогичные результаты были получены для ансамблей из 2 и 6 осцилляторов. Что касается $N = 4$, то это более сложный случай, поскольку он включает в себя $\pi/2$ моды, характеризующиеся в гармоническом приближении нейтральной устойчивостью. Они не обнаруживаются в эксперименте при положительной связи, когда колебания в осцилляторах имеют простую форму. Исследования показывают, что в случае колебаний более сложной формы некоторые из них могут быть найдены при очень слабой связи $\gamma < 0.005$. Если исключить из рассмотрения $\pi/2$ колебания, то для $N = 4$ мы получим 8 сосуществующих аттракторов, что подтверждается экспериментом. На рис. 13 построены пространственные профили и перекрестные проекции фазовых портретов для всех режимов

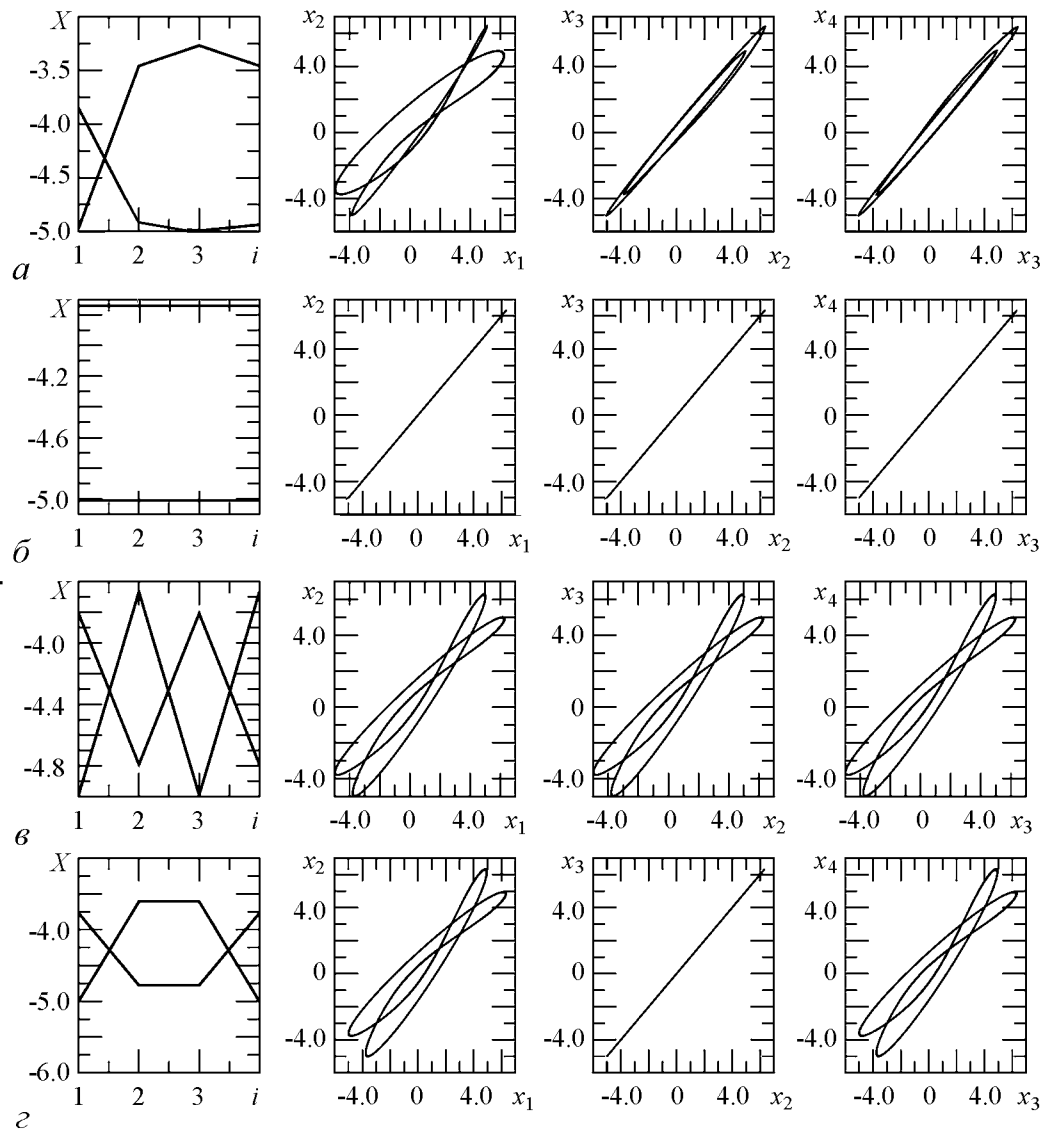


Рис. 13. Пространственные профили колебательных режимов (слева) и проекции фазовых портретов циклов периода два в цепочке из 4 осцилляторов; $c = 3.15$, $\gamma = 0.005$

периода два (с точностью до преобразования симметрии) для цепочки из четырех элементов при $\gamma = 0.005$. На рисунке всего четыре режима, но два из них имеют симметричных «двойников»: аттрактор на рис. 13, *a* со структурой фаз субгармоник «baab» имеет три симметричных аттрактора со структурами фаз субгармоник «aabb», «abba» и «bbaa», и аттрактор на рис. 13, *z* со структурой фаз субгармоник «baba» имеющий один симметричный аттрактор со структурой фаз «abab». Режимы (*b*) и (*e*) – самосимметричны. Распределение колебаний вдоль ансамбля для них полностью однородно. Они являются истинными бегущими волнами. Остальные из указанных режимов по нашей терминологии называются «бегущими волнами с фазовыми дефектами». Таким образом, численные исследования подтверждают правильность формулы (6) для коротких цепочек.

Дальнейшее усложнение формы колебаний в осцилляторах происходит через каскад бифуркаций удвоений периода (за исключением самосимметричных режимов, которые претерпевают последовательность бифуркаций рождения тора и синхронизации на торе). Каждая бифуркация удвоения периода сопровождается появлением новых субгармоник на все более низких частотах. Как показывают исследования, для фаз этих субгармоник действует то же правило, что и для субгармоник $\Delta\theta_i^{(1/2)}$. Так, например, появившаяся после перехода к четырехоборотному циклу субгармоника $\Delta\theta_i^{(1/4)} = \Delta\theta_i(0.25f_0)$ также может принимать два разных значения: $\Delta\theta_i^{(1/2)}/2$ или $\pi + \Delta\theta_i^{(1/2)}/2$, где $\Delta\theta_i^{(1/2)}$ – фаза субгармоники на половинной частоте. Таким образом, каждый из M_2 циклов периода два рождает 2^{N-1} циклов периода четыре. Соответственно, полное число аттракторов периода четыре должно быть

$$M_4 = M_1 4^{N-1}.$$

Данная формула предсказывает 16 аттракторов в ансамбле из 3 осцилляторов и 768 аттракторов в ансамбле из 5 осцилляторов. Результаты численных исследований представлены на рис. 12 штриховыми линиями. В случае 3-х осцилляторов (*a*) ожидаемое число аттракторов достигается примерно после 40 случайных начальных условий и далее не меняется. Для цепочки из 5 осцилляторов (*b*) предсказанного числа аттракторов достичь не удалось за 10000 выборок. Однако налицо стремление графика к этому значению. Экстраполируя правило расчета числа аттракторов на другие многооборотные циклы, возникшие в ходе удвоения периода, получаем общую формулу для цикла периода i

$$M_i = M_1 i^{N-1}. \quad (7)$$

Формула (7) обобщает известную закономерность развития мультистабильности в двух взаимодействующих системах с удвоениями периода, по которой число предельных циклов, одновременно сосуществующих в фазовом пространстве, удваивается после каждой бифуркации. На пороге хаоса число аттракторов стремится к бесконечности.

В закритической области наблюдаются бифуркации объединения лент многоленточных хаотических аттракторов. На базе каждого из предельных циклов периода- i образуется i -ленточный хаотический аттрактор, характеризующийся теми же значениями фаз субгармоник, что и исходный цикл. Бифуркации объединения лент сопровождаются объединением нескольких аттракторов в один, что приводит

к последовательному уменьшению числа аттракторов. Хаотические режимы «наследуют» значения фаз субгармоник от тех периодических режимов, из которых они образовались. После бифуркации объединения лент хаотических аттракторов субгармоники «растворяются» и их фазы «высвобождаются». Например, после перехода от двух- к одноленточному аттрактору фазы на частоте $0.5f_0$ равномерно распределяются по интервалу $[-\pi : \pi]$. Соответственно, фазовые дефекты, обусловленные распределением фаз на этой частоте вдоль ансамбля, исчезают. Таким образом, число сосуществующих хаотических аттракторов с i лентами должно совпадать с числом предельных циклов периода- i , а значит, каждая бифуркация слияния лент сопровождается объединением 2^{N-1} хаотических аттракторов. С точки зрения формирования мультистабильности, бифуркации слияния лент аттракторов оказываются симметричными бифуркациям удвоения периода. В результате – в фазовом пространстве образуется 15 одноленточных хаотических аттракторов с набегом фаз вдоль ансамбля: $\Phi = 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \dots, \pm 7$. Пространственная структура каждого из таких аттракторов схожа с профилем соответствующей периодической бегущей волны.

Заключение

Рассмотрено явление формирования фазовой мультистабильности в ансамбле осцилляторов Ресслера при постепенном усложнении временной динамики. Показано, что при колебаниях простой формы мультистабильность реализуется в виде иерархии бегущих волн. Бегущие волны являются типичными колебательными режимами рассматриваемой системы. Переход к более сложным колебаниям при удвоениях периода приводит к нарушению пространственной регулярности колебательных режимов за счет появления фазовых дефектов – осцилляторов с «нестандартными» значениями разности фаз. Наличие фазовых дефектов резко увеличивает число сосуществующих колебательных режимов: после каждого удвоения периода оно растет как 2^{N-1} , где N – число осцилляторов в ансамбле. В результате на пороге перехода к хаосу число аттракторов становится неограниченно большим. В критической области наблюдается обратный процесс: после каждой бифуркации слияния лент многоленточных аттракторов их число уменьшается в 2^{N-1} раз. В итоге число сосуществующих многоленточных аттракторов совпадает с числом предельных циклов той же кратности.

Исследования выполнены при финансовой поддержке CRDF (грант № ВР4М06) и Министерства образования и науки РФ в рамках АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (2009–2010 годы) на 2009 г. (грант 2.2.2.2/229).

Библиографический список

1. Астахов В.В., Безручко Б.П., Гуляев Ю.П., Селезнев Е.П. Мультистабильные состояния в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15, № 3. С. 60.
2. Астахов В.В., Безручко Б.П., Пудовочкин О.Б., Селезнев Е.П. Фазовая мультистабильность и установление колебаний в нелинейных системах с удвоением периода // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38, № 2. С. 291.

3. *Дворников А.А., Уткин Г.М., Чуков А.М.* О взаимной синхронизации цепочки резистивно связанных автогенераторов // Известия вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27, № 11. С. 1388.
4. *Ermentrout G.B.* The behaviour of rings of coupled oscillators // J. of Math. Biol. 1985. Vol. 23, № 1. P. 55.
5. *Ermentrout G.B.* Stable periodic solutions to discrete and continuum arrays of weakly coupled nonlinear oscillators // SIAM J. of Appl. Math. 1992. Vol. 52, № 6. P. 1664.
6. *Шабунин А.В., Акопов А.А., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е.* Бегущие волны в дискретной ангармонической автоколебательной среде // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13, № 4. С. 37.
7. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Ерастова Е.Н., Селезнев Е.П.* Формы колебаний и их эволюция в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах // Журнал технической физики. 1990. Т. 60, № 10. С. 19.
8. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И., Селезнев Е.П.* Мультистабильность в системе радиотехнических генераторов с емкостной связью // Радиотехника и электроника. 1991. Т. 36, № 11. С. 2167.
9. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И.* Формирование мультистабильности, классификация изомеров и их эволюция в связанных фейгенбаумовских системах // Известия вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34, № 1. С. 35.
10. *Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.V., Wu C.W., Chua L.* Dynamics of two coupled Chua's circuits // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1995. Vol. 5, № 6. P. 1677.
11. *Bezruchko B.P., Prokhorov M.D., Seleznev E.P.* Oscillation types, multistability, and basins of attractors in symmetrically coupled period-doubling systems // Chaos, Solitons and Fractals. 2003. Vol. 15. P. 695.
12. *Астахов В.В., Шабунин А.В., Анищенко В.С.* Спектральные закономерности при формировании мультистабильности в связанных генераторах с удвоением периода // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42, № 8. С. 974.
13. *Matias M.A., Perez-Munuzuri V., Marino I.P., Lorenzo M.N., Perez-Villa V.* Size instabilities in ring of chaotic synchronized systems // Europhys. Lett. 1997. Vol. 37. P. 379.
14. *Matias M.A., Guemez J., Perez-Munuzuri V., Marino I.P., Lorenzo M.N., Perez-Villar V.* Observation of a fast rotating wave in rings of coupled chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 219.
15. *Marino I.P., Perez-Munuzuri V., Perez-Villar V., Sanchez E., Matias M.A.* Interaction of chaotic rotating waves in coupled rings of chaotic cells // Physica D. 2000. Vol. 128. P. 224.
16. *Shabunin A., Astakhov V., Anishchenko V.* Developing chaos on base of traveling waves in a chain of coupled oscillators with period-doubling. Synchronization and hierarchy of multistability formation // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2002. Vol. 12. P. 1895.
17. *Rössler O.E.* An equation for continuous chaos // Phys. Lett. A. 1976. Vol. 57. P. 397.
18. *Блехман И.И.* Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981.

19. Гуртовник А.С., Неймарк Ю.И. Синхронизмы в системе циклически слабосвязанных осцилляторов // Динамические системы: Межвузовский сборник научных трудов. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1991. С. 84.

Поступила в редакцию 30.03.2009

После доработки 18.05.2009

PHASE MULTISTABILITY IN AN ARRAY OF PERIOD-DOUBLING SELF-SUSTAINED OSCILLATORS

A.V. Shabunin, V.V. Astakhov

Regularities of multistability developments are considered in an array of identical self-sustained oscillators with transition to chaos through period-doubling bifurcations. The used model is chain of diffusively coupled Rössler oscillators. The number of co-existing regimes are determined through the cascade of the bifurcations. It is shown that regularities of increasing of attractors are defined by transformation of the phase spectrum during transition to chaos.

Keywords: Multistability, self-sustained oscillations, chaos.

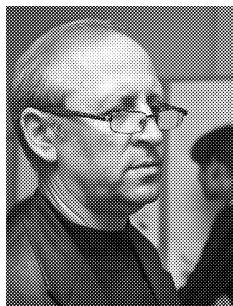


Шабунин Алексей Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1990). Доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ, доктор физико-математических наук (2008). Научные интересы – нелинейная динамика, теория колебаний, синхронизация и управление хаосом. Автор более 40 научных публикаций.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

E-mail: shabuninav@info.sgu.ru



Астахов Владимир Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1980). Доктор физико-математических наук (1999), профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов – теория колебаний и динамический хаос, синхронизация и управление хаосом. Имеет более 80 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

E-mail: astakhov@chaos.ssu.runnet.ru