



## МЕХАНИЗМ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ПЕРЕМЕЖАЕМОСТИ В СИНГУЛЯРНЫХ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМАХ

*С.В. Слипущенко, А.В. Тур, В.В. Яновский*

В работе исследованы свойства консервативных сингулярных отображений. Обнаружено, что при определенных условиях в таких отображениях наблюдается перемежаемость без хаотических фаз. Рассмотрен альтернативный механизм хаотизации в гамильтоновых сингулярных отображениях, приводящий к возникновению такого динамического режима. Выяснены его основные свойства. Изучены особенности устройства фазового пространства в подобных системах. Показано, что гамильтонова перемежаемость может характеризоваться нулевым показателем Ляпунова, что позволяет классифицировать ее как проявление псевдохаоса.

*Ключевые слова:* Динамический хаос, гамильтонова система, перемежаемость, сингулярность.

### Введение

Исследования гамильтоновых динамических систем, несмотря на огромное число результатов, полученных в этой области, по-прежнему сохраняют актуальность. Современный прогресс в этих исследованиях тесно связан с достижениями Колмогорова, Арнольда, Мозера [1–3], получившими название КАМ-теории. Развитие этих идей привело к пониманию процессов, ведущих к появлению хаоса в замкнутых консервативных системах, не подверженных никаким внешним случайным воздействиям (см., например, [4–7]). Сейчас достигнут значительный прогресс в изучении механизмов возникновения хаоса и свойств таких хаотических режимов в гладких гамильтоновых системах.

Несмотря на большой интерес к проблеме гамильтонова хаоса, особенности сложной динамики сингулярных гамильтоновых систем стали рассматриваться не так давно [8, 9]. Во многих работах, посвященных таким системам, отмечалось поведение, не характерное для обычных консервативных систем, например, гамильтонова перемежаемость [10]. Основной целью нашей работы является демонстрация того, что в сингулярных гамильтоновых отображениях существует альтернативный

механизм хаотизации, не связанный с разрушением резонансов, а базирующийся на наличии особенности в фазовом пространстве исследуемого отображения. Наличие такого дополнительного механизма хаотизации в сингулярных гамильтоновых отображениях и изучение его свойств исключительно интересно. Следует заметить, что сингулярности рассматриваемого типа естественным образом появляются в задачах релятивистской физики. Поэтому обнаруженные явления, связанные с ними, должны найти применение и при создании релятивистских систем и устройств. На примере типичного сингулярного консервативного отображения проведено исследование этих особенностей. В первую очередь, обнаружен нетипичный динамический режим для гамильтоновых систем – перемежаемость без хаотических фаз. Кроме этого показано, что для сингулярных консервативных систем характерна исключительно низкая мера хаотичности, проявляющаяся в обращении показателя Ляпунова в ноль. В современной нелинейной физике такую динамику называют псевдохаосом. Ее исследование является на сегодняшний день актуальной проблемой [8, 9, 11].

### 1. Сингулярные консервативные отображения

В качестве объекта исследования рассмотрим консервативное сингулярное отображение вида

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + ay_n, \\ y_{n+1} &= y_n - ax_{n+1} + \frac{1}{x_{n+1}}, \end{aligned} \quad (1)$$

где параметр  $a \in [0, 1]$ . Нетрудно заметить, что это отображение представляет собой отображение поворота, дополненное сингулярным слагаемым  $1/x_{n+1}$ . Его фазовое пространство – плоскость  $(x_n, y_n)$ . Легко проверить, что якобиан этого отображения равен 1, иными словами, при эволюции сохраняется фазовый объем « $\Delta x \Delta y$ ». Такие отображения могут возникать при дискретизации гамильтоновых системы с двухъямным потенциалом, разделенным бесконечно высоким потенциальным барьером. Поэтому координате  $y_n$  можно придать смысл импульса, а  $x_n$  – канонически сопряженной координаты.

Главной особенностью исследуемого отображения, является наличие сингулярного слагаемого. С физической точки зрения это означает, что в фазовом пространстве отображения присутствует множество точек, которые формально за одну итерацию переходят на бесконечность. Эти точки принадлежат линии сингулярности, определяемой уравнением

$$x + ay = 0. \quad (2)$$

Переход траектории на бесконечность за один временной шаг означает движение с бесконечной скоростью. Естественно, что такое движение следует признать особым и, строго говоря, не физическим. Таким образом, все точки линии (2) следует исключить из фазового пространства. Кроме траекторий, берущих начало на линии сингулярности, по аналогичной причине следует исключить все те траектории, которые за конечное число шагов попадут на эту линию. Траектории, попадающие на линию разрыва за  $n$  итераций, принадлежат  $n$ -му прообразу линии сингулярности. Поэтому

все прообразы линии (2) за конечное или счетное число шагов уходят на бесконечность, а следовательно, динамика на этом множестве является не физической. Иными словами, из фазового пространства следует исключить целую сеть особых линий. Наличие такой густой сети линий, уходящих на бесконечность, приводит к появлению в этой области фазового пространства, своеобразного «притяжения» траекторий к бесконечности. Причина этого связана с навязыванием такого ухода на бесконечность траекториям из целой окрестности любой из сингулярных точек по непрерывности. Для консервативных систем это достаточно необычное свойство. В определенном смысле бесконечность играет роль своеобразного «аттрактора», несмотря на консервативность отображения (1). Разумеется, для диссипативных или неконсервативных систем появление аттрактора на бесконечности достаточно частое явление, которое не связано ни с каким специальным механизмом (см., например, [12]), а определяется видом конкретной системы. Следует отметить, что исключение из фазового пространства сети прообразов линии сингулярности встречается и в других физических системах. Например, аналогичным образом исключаются лучи или траектории в полигональных бильярдах, попадающие точно в вершины углов полигона [13].

Исключение сети сингулярных линий приводит к структурированию фазового пространства. Для исследования и построения этой сети, достаточно изучить динамику линии сингулярности (2) в обратном времени. Отметим, что необходимое для этого точное отображение легко получить из уравнений (1)

$$\begin{aligned} y_n &= y_{n+1} + ax_{n+1} - \frac{1}{x_{n+1}}, \\ x_n &= x_{n+1} - ay_n. \end{aligned} \quad (3)$$

Для того, чтобы рассмотреть глобальное устройство сети особых линий, удобно перейти от плоскости  $(x, y)$  к компактному многообразию. Это можно сделать с помощью стереографической проекции [14]. Эта проекция отображает двумерную плоскость (фазовое пространство) на двумерную сферу  $S^2$ . С помощью преобразования

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{4x}{x^2 + y^2 + 4}, \\ y_s &= \frac{4y}{x^2 + y^2 + 4}, \\ z_s &= \frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + 4} \end{aligned} \quad (4)$$

каждой точке плоскости  $(x, y)$  ставится в соответствие точка  $(x_s, y_s, z_s)$  двумерной сферы  $S^2$ . Таким образом, все фазовое пространство системы может быть изображено на двух компактных картах, соответствующих проекциям северной ( $z_s > 1$ ) и южной ( $z_s < 1$ ) полусфер на плоскость. На рис. 1, в стереографической проекции изображено множество точек, принадлежащих линии разрыва (2) и ее прообразам, полученных численным моделированием. Из этого рисунка следует, что фазовое пространство отображения (1) разделяется на две существенно различные области. В областях первого типа полностью отсутствуют точки сингулярных

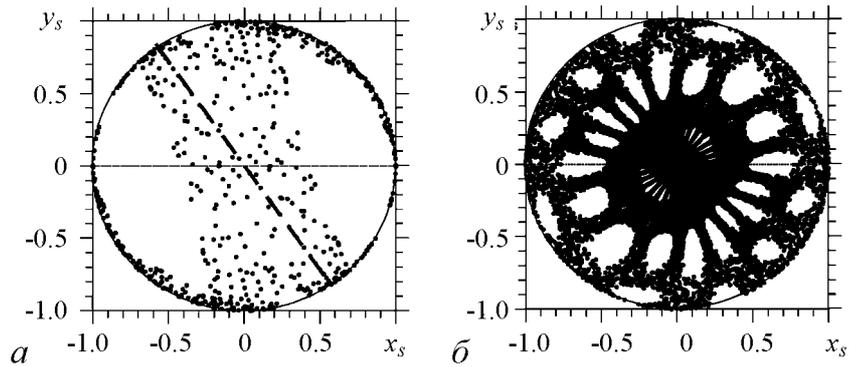


Рис. 1. Множество сингулярных точек в фазовом пространстве, полученное путем численного моделирования (параметр отображения  $a = 0.7$ ). Результат изображен на сфере  $S^2$  с помощью стереографической проекции:  $a$  – проекция нижней полусферы, на которой изображается окрестность нуля двумерной плоскости;  $b$  – проекция верхней полусферы, изображающая окрестность бесконечности

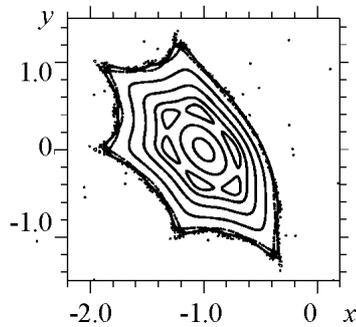


Рис. 2. Типичное устройство фазового пространства отображения в одном из островков, свободном от точек сингулярности. В центре располагается неподвижная эллиптическая точка. Она окружена инвариантными торами. Хорошо заметен вторичный резонанс ( $a = 0.7$ )

линий, а в области второго типа они образуют густую сложную сеть. Области первого типа формируют множество «островков» фазового пространства, погруженных в море области второго типа. Естественно ожидать, что внутри этих островков поведение системы будет обычным для гамильтоновых систем. На рис. 2 показано устройство фазового пространства внутри типичного «островка». Как видно из рис. 2, центром этого образования является эллиптическая неподвижная точка. Это естественно, поскольку такая точка принадлежит периодической орбите, в след-

ствии чего не может принадлежать никакому из прообразов сингулярности. В окрестности неподвижной эллиптической точки отображение может быть линеаризовано. Соответственно, в этой области все траектории ложатся на инвариантные кривые, имеющие форму эллипсов. Иными словами, фазовое пространство типичной гамильтоновой динамики внутри островков стратифицируется на торы и имеет конечный размер.

Естественно, что с удалением от эллиптической неподвижной точки влияние нелинейности нарастает. Это приводит к возможности возникновения резонансов и хаотических слоев. При перекрытии хаотических слоев внутри острова будет наблюдаться типичный гамильтонов хаос. Разумеется, структура инвариантных кривых, наличие хаотических слоев, их перекрытие зависят как от параметра отображения  $a$ , так и от положения соответствующего острова на фазовой плоскости. Все эти элементы и их зависимость от параметра  $a$  могут быть исследованы обычными методами. При этом можно убедиться в типично гамильтоновом поведении траекторий в этих областях. Поэтому основное внимание следует уделить траекториям, принадлежащим области второго типа, содержащей сингулярные точки. Отметим, что гео-

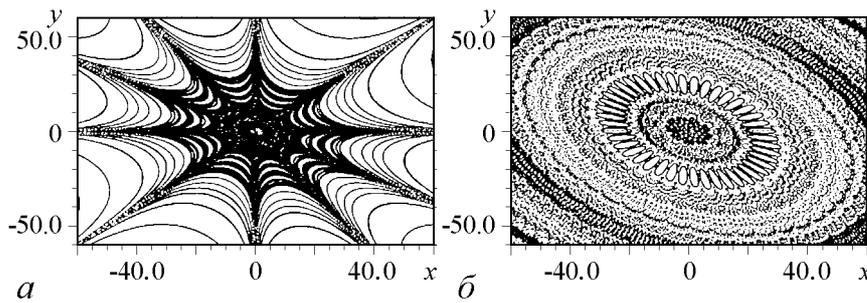


Рис. 3. Фазовый портрет отображения при различных значениях параметра  $a$ :  $a - 0.61803$ , что соответствует рациональному числу вращений  $1/10$ ;  $b - 0.7$ , что соответствует фазовому портрету при иррациональном числе вращений

метрические пропорции и размеры областей, изображенные на сфере, существенно отличаются от размеров этих же объектов на плоскости. Так, например, область второго типа занимает несоизмеримо бóльшую часть фазового пространства, нежели область первого типа.

Наличие островковой структуры в фазовом пространстве отображения является типичным. Однако при определенных значениях параметра  $a$  происходит ее качественная перестройка. В окрестности этих значений фазовое пространство отображения приобретает особый «звездобразный» вид. Пример соответствующего фазового портрета приведен на рис. 3,  $a$ . Причину такой качественной перестройки и значения параметра, при которых она происходит, можно объяснить, проанализировав отображение в обратном времени (3). Очевидно, что оно является вариантом отображения поворота

$$\begin{aligned} y_n &= y_{n+1} + ax_{n+1}, \\ x_n &= x_{n+1} - ay_n \end{aligned} \quad (5)$$

с добавкой сингулярного слагаемого  $-1/x_{n+1}$ . Влияние этой поправки при  $x_{n+1} \gg 1$  мало. Характер поведения этого отображения зависит от числа вращений [15], которое, в свою очередь, зависит от параметра  $a$ . При рациональных значениях числа вращений все траектории этого отображения периодические. Это приводит к возникновению периодической структуры сингулярных линий, которые направлены вдоль лучей, формирующих «звездобразную» структуру фазового портрета. Число лучей зависит от знаменателя рационального числа вращений. Из множества всех рациональных значений числа вращений наиболее интересны те, которые имеют вид  $2/n$ , где  $n$  целое и превосходит единицу не более чем на порядок. Для больших значений  $n$  размер окрестности параметра  $a$ , в которой наблюдается такое изменение структуры фазового пространства, становится слишком малым и трудно наблюдаемым. Численное моделирование показало, что при таких значениях параметра  $a$  в исходном отображении асимптотика линии сингулярности и  $n$ -го ее прообраза совпадают. Естественно, что это приводит к существенному упорядочению структуры сети прообразов линии сингулярности, а также к усилению эффектов, связанных с ней.

## 2. Свойства перемежаемости в сингулярных отображениях

Теперь рассмотрим область фазового пространства, покрытую сингулярной сетью. Эта область по своим размерам значительно превосходит суммарную площадь всех регулярных областей в фазовом пространстве (см. рис. 1). Начнем с устройства траекторий в этой области. Численное моделирование показало, что исследуемые траектории состоят из набора регулярных участков, имеющих вид «полуволны» синусоиды, разделенных разрывом I рода (рис. 4, *a*). Такое поведение можно назвать перемежаемостью. В отличие от перемежаемости, наблюдаемой в диссипативных системах, динамический режим, имеющий место в системе (1), имеет ряд существенных отличий. Например, длительность ламинарных фаз в исследуемой консервативной перемежаемости является постоянной. Естественно, что подобное свойство не является универсальным для сингулярных гамильтоновых систем. Известны другие консервативные системы, в которых наблюдаются подобные режимы перемежаемости, и при этом длительность ламинарных фаз в них не одинакова [10]. Из-за равной длительности ламинарных фаз в исследуемой гамильтоновой перемежаемости ее функция распределения становится тривиальной. Соответственно, требуется введение других характеристик перемежаемости. В качестве физически интересной величины выберем значение адиабатического инварианта. Для его введения перейдем к непрерывной модели, предполагая малыми изменения координат за одну итерацию

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x + \frac{1}{x}. \end{aligned} \quad (6)$$

Гамильтониан этой системы уравнений имеет вид

$$I = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \ln|x|,$$

где переменная  $y$  играет роль импульса, а  $x$  – канонически сопряженной координаты. На отдельной ламинарной фазе значение этого инварианта сохраняется и в дискретной модели. Небольшие отклонения наблюдаются только вблизи границ перехода от одной фазы к другой (рис. 4, *b*).

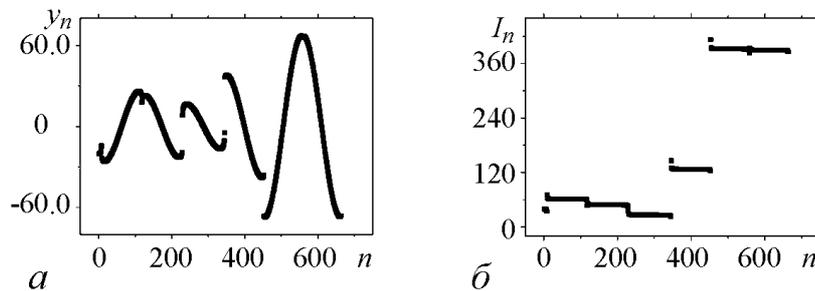


Рис. 4. *a* – типичный вид изменений со временем координаты  $y$  в режиме перемежаемости: наблюдаются четко отделенные друг от друга ламинарные фазы без хаотических всплесков между ними; *b* – динамика переменной «действие»  $I$ , которая остается постоянной на протяжении одной ламинарной фазы и меняется скачком при переходе от одной фазы к другой. Графики построены при значении параметра отображения  $a = 0.03$ .

Зависимость  $I$  от исходных переменных позволяет ввести канонически сопряженную переменную «угол»  $\varphi$ . Таким образом можно перейти к фазовому пространству в переменных угол–действие  $(I, \varphi)$ .

$$\{I, \varphi\} = 1,$$

$$\varphi = - \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{-\xi^2 + 2 \ln \xi + x^2 + y^2 - 2 \ln \xi}}.$$

Поскольку в течении ламинарной фазы величина  $I$  остается практически постоянной, то естественно перейти к изучению последовательности скачков  $\Delta I_n$ , происходящих при переходе между ламинарными фазами, где  $n$  уже обозначает не номер итерации, а номер ламинарной фазы. Численное исследование статистических свойств скачков переменной  $I$  показало, что ее функция распределения с хорошей точностью аппроксимируется распределением Коши (рис. 5).

Необычным свойством скачков  $\Delta I$  между ламинарными фазами является возможность специфического сокращенного описания их динамики уже в одномерном фазовом пространстве. Действительно, построение на плоскости множества точек с координатами  $(\Delta I_n, \Delta I_{n+1})$  показывает, что подавляющее большинство из них ложится на определенные кривые (рис. 6, *a*). Это означает, что в большинстве случаев значение  $\Delta I_{n+1}$  определяется только величиной  $\Delta I_n$ . Численный анализ множества точек  $(\Delta I_n, \Delta I_{n+1})$  позволил опре-

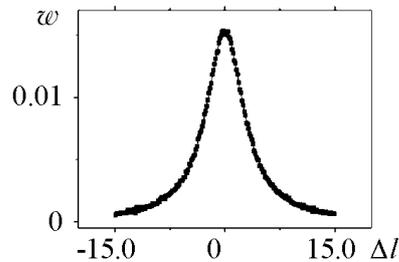


Рис. 5. Результаты численного моделирования функции распределения  $w$  (последовательность точек) при значении параметра отображения  $a = 0.03$ . Аппроксимация полученной последовательности точек распределением Коши есть непрерывная кривая, которая практически не видна из-за хорошего совпадения исходных данных и результатов аппроксимации

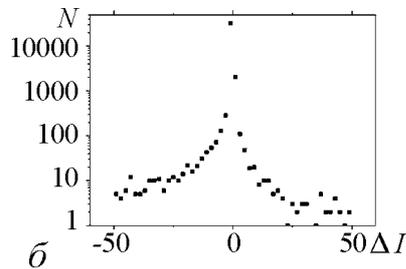
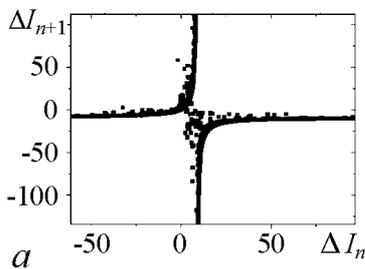


Рис. 6. *a* – последовательность  $\Delta I_n$  изображенная в пространстве  $(\Delta I_n, \Delta I_{n+1})$ . Точки группируются вдоль некоторых кривых. Аппроксимация этих кривых определяет закон эволюции  $\Delta I_n$ . *б* – статистика отклонений последовательности от кривой, полученной в результате аппроксимации. Видно, что подавляющее большинство точек лежит на кривой ( $a = 0.03$ )

делить вид этой зависимости следующим образом:

$$\Delta I_{n+1} = f(\Delta I_n) = \alpha \frac{\Delta I_n + \beta}{\Delta I_n + \alpha}. \quad (7)$$

Здесь  $\alpha$  и  $\beta$  – параметры, значения которых получены в результате аппроксимации численно. Естественно, они зависят от значения исходного параметра  $a$ . Из рис. 6 видно, что подавляющее большинство точек лежит на полученных кривых. Отклонения от этих кривых возникают в случае прохождения траектории в относительной близости от центра фазового пространства системы, то есть через область, где влияние нелинейности велико. В удалении от этой области влияние нелинейности локализуется в малой окрестности линии сингулярности (2), что и позволяет перейти к одномерному фазовому пространству. Таким образом, одномерное отображение (7) предсказывает величину изменения инварианта  $I$  между соседними ламинарными фазами.

Описанное упрощение динамики системы, позволяет провести несколько полезных рассуждений. Например, оценить меру хаотичности наблюдаемого динамического режима. Непосредственный расчет показателей Ляпунова для исходного отображения (1) дает в результате величины, близкие к нулю. Соответственно, для более точного определения степени хаотичности наблюдаемой динамики требуется дополнительное исследование. Поскольку динамика исходной системы непосредственно связана с отображением (7), то логично предположить, что мера хаотичности этого одномерного отображения определяет меру хаотичности всей системы в целом. Простой вид отображения (7) позволяет аналитически вычислить его инвариантную функцию распределения, используя уравнение Фробениуса–Перрона. Его решение имеет вид

$$w(x) = \frac{\pi}{\sqrt{-\alpha\beta}} \frac{1}{x^2 - \alpha\beta}$$

и хорошо согласуется с численными данными (см. рис. 5). Воспользовавшись эргодической гипотезой при вычислении показателя Ляпунова, можно перейти от усреднения по времени в формуле для показателя Ляпунова к усреднению по ансамблю:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln |f'(x_n)| = \langle \ln |f'(x_n)| \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \ln f'(x) w(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \ln \frac{\alpha(\alpha - \beta)}{(x + \alpha)^2} \frac{\sqrt{-\alpha\beta}}{x^2 - \alpha\beta} dx = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Нулевое значение показателя Ляпунова подтверждает предположение о низкой степени хаотизации системы, сделанное на основе численного моделирования.

Кроме этого, одномерное отображение (7) позволяет определить характер диффузии траекторий исходной системы. Легко видеть, что величина  $I = x^2/2 + y^2/2 - \ln |x|$  фактически определяет расстояние от ламинарной фазы до центра фазового пространства системы. Иными словами, проследив динамику последовательности  $I_n$ , мы можем определить характеристики диффузии наблюдаемых тра-

екторий в фазовом пространстве. Результат компьютерного моделирования отображения (7) с последующим расчетом последовательности  $I_n$  показал, что диффузия траекторий происходит по закону

$$\langle I(t)^2 \rangle^{1/2} \sim t^\gamma, \quad \gamma = 1.0 \pm 0.05.$$

Подобные диффузионные процессы, для которых параметр  $\gamma$  превышает величину  $1/2$ , обычно называют супердиффузионными. Нормальная диффузия реализуется при значении  $\gamma = 1/2$ . Отметим, что аномальные свойства транспорта в системе служат дополнительным подтверждением хаотичности наблюдаемой динамики.

Отображение, сведенное к одномерному, помогает в изучении изменений, происходящих в фазовом портрете исходной системы. Как говорилось выше, при некоторых значениях параметра  $a$  фазовое пространство системы приобретает особую «звездообразную» структуру. Такая перестройка происходит, когда компонента исходного отображения, соответствующая повороту на определенный угол, имеет целое или полуцелое число вращений. Это приводит к тому, что на некотором шаге асимптотика прообраза линии сингулярности вдали от центра системы совпадает с самой линией сингулярности. При этом происходит упорядочение и разрежение сети прообразов, которые порождают стохастические скачки между ламинарными фазами. Поскольку отображение, сведенное к одномерному, определяет динамику таких скачков, то естественно предполагать, что параметры этого отображения окажутся чувствительными к таким перестройкам фазового пространства. Последовательность значений параметра  $a$ , при которых происходят качественные перестройки фазового портрета исходного отображения, были определены численно. На рис. 7 показаны результаты расчета этих значений и результаты расчета зависимости параметра  $\alpha$  отображения, сведенного к одномерному, от параметра исходной системы  $a$ , также полученные в ходе численного моделирования. Видно, что зависимость  $\alpha(a)$ , имеет последовательность разрывов II рода. Расчеты показывают, что аналогичный вид имеют и зависимости от  $a$  параметра  $\beta$  (7), (8). Координаты разрывов соответствуют значениям параметра  $a_n$ , при котором структура фазового пространства приобретает «звездообразный» вид. Эти значения рассчитаны с использованием упрощенного вида отображения (1), без учета сингулярного слагаемого. Последовательность  $a_n$  хорошо аппроксимируется формулой

$$a_n = C/n, \quad C = 0.32 \pm 0.01.$$

Это позволяет говорить о существовании специфического каскада перестроек фазового портрета динамической системы.

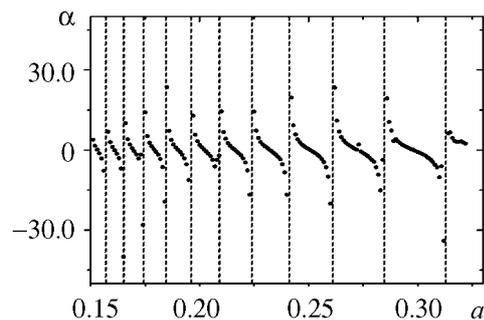


Рис. 7. Зависимость параметра  $\alpha$  отображения, сведенного к одномерному, от параметра  $a$  исходного отображения. На графике видна последовательность разрывов II рода. Координаты разрывов удовлетворяют соотношению  $a_n = C/n$ . Каждый такой разрыв соответствует формированию «звездообразного» фазового портрета исходной системы

### 3. Механизм возникновения перемежаемости

Как известно, траектории в режиме обычной перемежаемости состоят из чередующихся ламинарных и хаотических фаз различной длительности. Большая длительность хаотических фаз в таком режиме связана, в первую очередь, с наличием значительной области фазового пространства, в которой динамика системы является хаотической, а также низкой вероятностью перехода траекторий из этой области в область ламинарной динамики. Важное отличие наблюдаемой гамильтоновой перемежаемости от перемежаемости в диссипативных системах, состоит в отсутствии хаотических фаз. Иными словами, в системе отсутствуют участки траекторий с хаотическим поведением. При этом элемент хаоса привносится в систему последовательными, случайными скачками траектории. Такой хаотический режим является нехарактерным для обычных консервативных систем. Поэтому следует ожидать, что в исследуемых сингулярных гамильтоновых системах существует альтернативный механизм усложнения динамики, приводящий к возникновению перемежаемости без хаотических фаз. Естественно предположить, что этот механизм базируется на наличии линии сингулярности в фазовом пространстве, так как в областях, свободных от сингулярных точек, режимы перемежаемости не были обнаружены.

Для понимания механизма хаотизации, рассмотрим эволюцию некоторого выбранного фазового объема в сингулярной области. Пример изменения такого объема в процессе эволюции показан на рис. 8. Рисунок демонстрирует два характерных процесса, определяющих эволюцию выбранного элемента фазового объема. Первый процесс – это последовательное дробление фазового объема на несвязные части. Он непосредственно связан со свойством линии сингулярности. Так, две бесконечно близкие точки, находящиеся по разные стороны от этой линии, за один шаг по времени расходятся на конечное расстояние. Другими словами, происходит разрезание фазовой «капли» на две несвязные части. Второй процесс связан с усложнением формы отдельных частей фазового объема. При этом наблюдается сжатие «капли» вдоль одних направлений и растяжение вдоль других. Этот процесс является следствием консервативности отображения и типичен для гамильтоновых отображений [6, 16].

Рассмотрим подробнее процесс дробления. Как было описано ранее, в области сингулярности любой выбранный фазовый объем в процессе эволюции разделяется на несвязные «осколки». Они, в свою очередь, при последующих итерациях также могут распадаться на все более и более мелкие части. Отметим, что для описываемого процесса не важен конкретный вид сингулярности, содержащейся в исходном отображении, а важно лишь наличие самого свойства «разрезания» фазового объема. Чтобы убедиться в этом, можно сравнить рис. 8 с рис. 9, на котором изображен аналогичный процесс разрезания фазового объема в отображении, аналогичном отображению (1), но с другой степенью сингулярного слагаемого  $1/x^3$ . Для того чтобы этот сценарий выполнялся не только для выбранного объема, но и для любого фазового объема из области сингулярности, необходимо, чтобы исследуемая система обладала свойством перемешивания. Известно, что это свойство тесно связано со свойством потери информации о начальных условиях в ходе эволюции системы, иными слова-

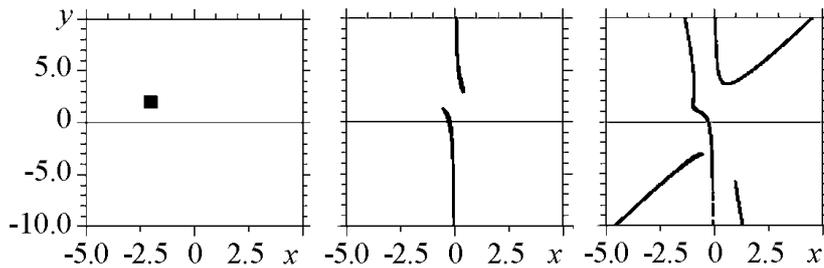


Рис. 8. Численное моделирование эволюции выбранного фазового объема ( $a = 0.5$ ). Рисунки (слева направо) приведены через 5 итераций отображения. Наблюдается дробление исходного объема на некоторое количество меньших по площади несвязных частей. Число частей растет с числом итераций

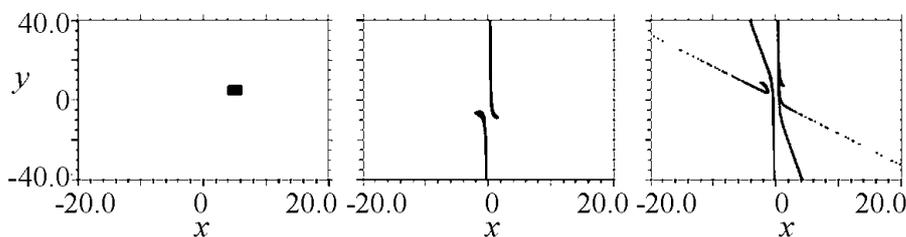


Рис. 9. Численное моделирование эволюции выбранного фазового объема отображения, совпадающего с отображением (1), но с сингулярным слагаемым типа  $1/x^3$  ( $a = 0.5$ ). Рисунки (слева направо) приведены через 5 итераций отображения

ми, со свойством спадания корреляционной функции. Как показано ниже, в разделе посвященном анализу меры хаотичности, корреляционная функция любой траектории исследуемой системы спадает до нуля в области сингулярности. Таким образом, благодаря перемешиванию, любой сколь угодно малый фазовый объем из области сингулярности будет подвержен описанному выше механизму разрезания. Соответственно, любые сколь угодно близкие траектории за некоторое счетное число шагов окажутся по разные стороны линии сингулярности, после чего они за одну итерацию будут разнесены на конечное расстояние. Иными словами, в таком динамическом режиме траектории системы являются неустойчивыми по отношению к малым отклонениям, что и означает их хаотичность.

Рассмотрим теперь вторую составляющую процесса усложнения формы фазового объема – «вытягивание». В обычных гамильтоновых системах вытягивание элементов фазового объема происходит вдоль направлений неустойчивых ветвей сепаратрис (см., например, [6–16]). Сепаратрисы, образуя сложную гомоклиническую или гетероклиническую структуру в фазовом пространстве, являются основным элементом усложнения динамики в гамильтоновых системах. Именно в этих областях возникает хаотическое поведение с положительным показателем Ляпунова.

Однако оказалось, что в исследуемой системе этот механизм возникновения хаоса подавлен в большей части фазового пространства. Численное моделирование

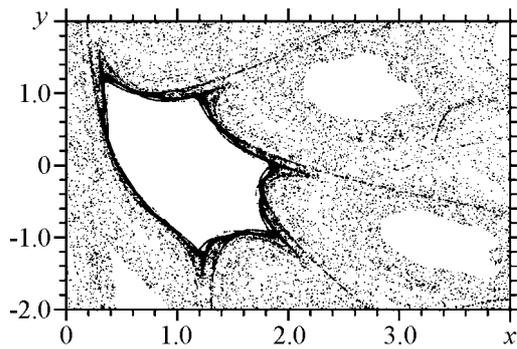


Рис. 10. Численное моделирование области развитой гетероклиники (черный цвет) и области с высокой плотностью точек, принадлежащих прообразам линии сингулярности (серый цвет), при значении параметра отображения  $a = 0.7$ . Видно, что эти области отделены друг от друга

Траектории, находящиеся с другой стороны, стремятся вернуться к центру фазовой плоскости. Схематически такое устройство фазовых потоков изображено на рис. 11, *а*. Таким образом, показанное на рис. 8 растяжение фазового объема происходит вдоль линии сингулярности, а не вдоль сепаратрис. Возникает вопрос, что будет происходить с устойчивыми и неустойчивыми ветвями сепаратрис гиперболических точек, находящихся в области, где отсутствует сеть сингулярных линий? Компьютерное моделирование показало, что естественным поведением является втягивание неустойчивых сепаратрис в фазовый поток, уходящий на бесконечность, а устойчивых – в фазовый поток, направленный к центру плоскости. Иными словами, устойчивые и неустойчивые сепаратрисы «притягиваются» к сетке сингулярных прообразов и уходят в кардинально различные области фазового пространства без образования развитой гетероклинической структуры. В результате подавляется влияние типичного механизма гамильтоновой хаотизации на траектории. Отметим

показало, что в областях с высокой плотностью прообразов линии сингулярности отсутствует развитая гетероклиническая структура (рис. 10). Поэтому естественно предположить, что сетка прообразов линии сингулярности подавляет сильный гетероклинический хаос в системе.

Механизм такого подавления можно понять, если рассмотреть фазовые потоки в окрестности линии сингулярности или ее прообраза. При этом становится очевидно, что траектории с одной стороны от этой линии имеют тенденцию к уходу на бесконечность. Траектории, находящиеся с другой стороны, стремятся вернуться к центру фазовой плоскости.

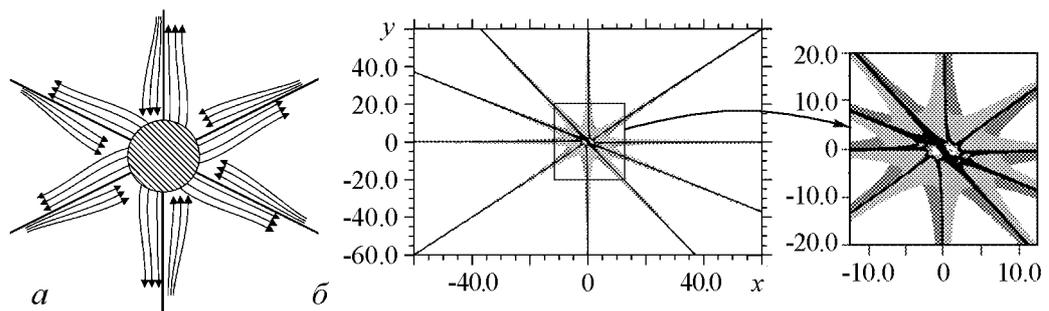


Рис. 11. *а* – структура фазового потока вдали от центра фазовой плоскости. Сетка, состоящая из линии сингулярности и ее прообразов (радиальные лучи), упорядочивает фазовые потоки. Область где нелинейность велика, заштрихована. Такое упорядочение предотвращает образование гетероклинической структуры и, как следствие, сильную хаотизацию. *б* – результат численного моделирования множества траекторий, уходящих на бесконечность (темно-серый цвет), и множества траекторий стремящихся вернуться к центру фазовой плоскости (светло-серый цвет) при  $a = 0.61803$ . Видно, что вдали от центра фазовой плоскости потоки разделяются прообразами линии сингулярности (черные линии)

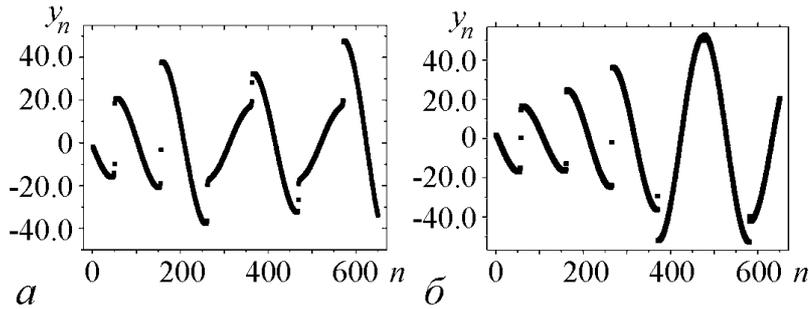


Рис. 12. *a* – типичный вид изменений со временем координаты  $y$  для отображения, аналогичного отображению (1), но с сингулярным слагаемым  $1/x^2$ ; *b* – то же самое с сингулярным слагаемым  $1/x^3$ . На обоих графиках параметр отображения  $a = 0.03$

важный элемент, связанный с простотой устройства сетки прообразов линии сингулярности, приведенной на рис. 11. Естественно, что существуют системы, в которых такая сетка имеет существенно более сложную структуру, сравнимую по сложности с гетерокликой в обычных консервативных системах. В таких системах не следует ожидать эффекта подавления хаоса за счет свойств сингулярности. В нашем случае невозмущенное отображение представляет собой отображение поворота и имеет простую динамику. Это обеспечивает регулярность сетки прообразов сингулярности в подавляющей части фазового пространства. Иными словами, большую часть времени динамика системы является регулярной, а основная хаотизация происходит по механизму «дробления», связанного с линией сингулярности. В итоге, поведение траекторий системы состоит из участков регулярной динамики, которые прерываются хаотическими скачками. Именно такой тип поведения мы называем перемежаемостью без хаотических фаз. Чтобы убедиться в отсутствии связи такого динамического режима с конкретным видом сингулярного слагаемого в отображении (1), можно сравнить поведение исходного отображения (см. рис. 4) с поведением отображений, аналогичных (1), но содержащих другую степень сингулярности. Например, на рис. 12 представлена эволюция координаты  $y$  согласно отображений с сингулярными слагаемыми вида  $1/x^2$  (*a*) и  $1/x^3$  (*b*), соответственно. Видно, что динамические режимы, возникающие в отображениях с различным типом сингулярности, схожи друг с другом. Это подтверждает сделанное выше утверждение о независимости механизма хаотизации от конкретного вида сингулярности. Отметим также, что перемежаемость без хаотических фаз может наблюдаться и в одномерных отображениях. Ее свойства рассмотрены в работах [17, 18].

#### 4. Сингулярные консервативные отображения как результат дискретизации механических систем

Рассмотрим теперь еще один подход к объяснению механизма возникновения гамильтоновой перемежаемости без хаотических фаз, который основан на дискретизации механических систем с бесконечным потенциальным барьером. Этот подход интересен еще и тем, что позволяет обнаружить нетривиальное влияние дискретизации на поведение динамических систем. Легко показать, что рассматриваемое отоб-

ражение (1) представляет собой результат тривиальной временной дискретизации следующей системы дифференциальных уравнений с временным шагом  $\Delta t = a$ :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x + 1/x.\end{aligned}$$

Эта система уравнений описывает динамику физической системы с гамильтонианом

$$H = y^2/2 + x^2/2 - \ln|x|. \quad (9)$$

Из него можно выделить часть, имеющую смысл потенциальной энергии  $U(x) = x^2/2 - \ln|x|$ . Иными словами, исходная динамическая система имеет двухъямный потенциал с бесконечным потенциальным барьером (рис. 13, *a*). Такая механическая система совершает нелинейные периодические колебания, фазовые траектории которых приведены на рис. 13, *б*. Эта и подобные ей гамильтоновы системы обладают естественным топологическим инвариантом, запрещающим переходы из одной потенциальной ямы в другую (см., например, [19]).

Легко доказать, что исходная физическая система является полностью интегрируемой, и даже явно получить точное решение. При дискретизации к исходному гамильтониану (9) добавляется периодическое возмущение высокой частоты  $V_{eff}(t)$ , нарушающее полную интегрируемость [10]. Хотя величина этого возмущения может достигать порядка невозмущенной амплитуды, но из-за своей высокой частоты эта добавка оказывает существенное влияние на систему лишь в областях с высокой чувствительностью к внешним возмущениям. Обычно такими областями являются окрестности сепаратрис, которые отсутствуют на фазовом портрете рассматриваемой механической системы (см. рис. 13, *б*), а также области с высокой плотностью фазового потока. Такая область в фазовом пространстве рассматриваемой системы находится в окрестности линии сингулярности. На фазовом портрете эта область сосредоточена вблизи вертикальной оси. Воздействие потенциала дискретизации  $V_{eff}(t)$  на траектории в этой области приводит к перекрытию близлежащих орбит, что делает возможными переходы между ними. Естественно, что чем выше плотность фазового потока, тем большее число близлежащих орбит перекрывается. В системе с бесконечным потенциалом эта плотность неограниченно нарастает с приближением

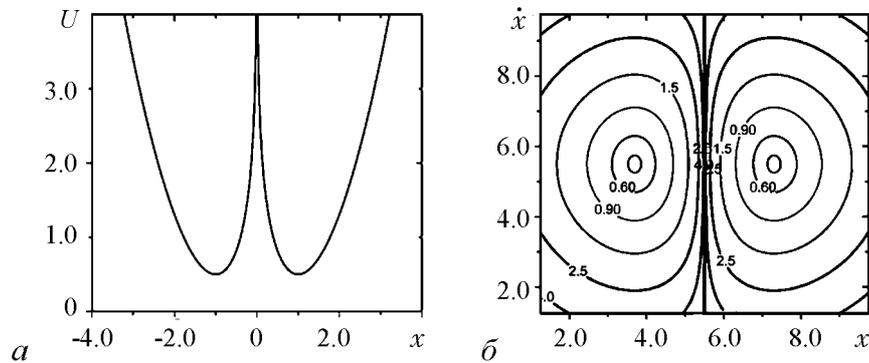


Рис. 13. *a* – вид потенциальной энергии исходной механической системы с гамильтонианом (9), *б* – ее фазовый портрет

к линии сингулярности. Соответственно, для любого сколь угодно малого высокочастотного возмущения  $V_{eff}(t)$  найдется такая окрестность линии сингулярности, в которой все траектории окажутся перекрытыми. Чем меньше шаг дискретизации, а следовательно меньше величина усредненного возмущения, тем большая плотность фазового потока требуется для возникновения хаотичности. Это приводит также к сужению окрестности линии сингулярности, содержащей разрушенные траектории. В остальном пространстве плотность фазового потока недостаточна для нарушения регулярности траекторий. В результате чего оказывается, что большинство траекторий на большом расстоянии от линии сингулярности ведут себя регулярно и, только проходя вблизи нее, траектория может перейти с одной близко лежащей орбиты на другую. Естественно, что орбиты, близко расположенные в окрестности линии сингулярности, вдали от нее могут расходиться друг от друга на значительное расстояние, в результате чего переход между ними становится невозможным. Иными словами, траектории системы в таком динамическом режиме состоят из набора различных орбит, переход между которыми осуществляется лишь в окрестности линии сингулярности. Такое поведение представляет собой перемежаемость без хаотических фаз. Иными словами, перемежаемость, наблюдаемую в исходном отображении, можно рассматривать как эффект дискретизации механической системы с бесконечным потенциальным барьером.

Отметим еще, что в фазовом пространстве системы отсутствуют множественные области регулярной динамики, которые наблюдаются на фазовом портрете исходного отображения. Появление таких структур в результате дискретизации можно понять, анализируя зависимость параметра нелинейности, определяемого как

$$K(E) = \frac{d\omega(E)}{dE} \frac{E}{\omega(E)},$$

от величины энергии системы [4]. График такой зависимости, полученный путем численного моделирования, имеет вид, представленный на рис. 14. Из формы графика следует, что на определенном расстоянии от центра фазового пространства в системе могут существовать структуры, связанные с нелинейным взаимодействием потенциала дискретизации и потенциала исходной механической системы, например, ряд эллиптических неподвижных точек и связанных с ними «островков» классической гамильтоновости. График показывает уменьшение величины нелинейности с ростом значения  $E$ , что делает невозможным образование эллиптических точек на значительных расстояниях от центра фазовой плоскости. Этот факт подтверждается результатами численного моделирования.

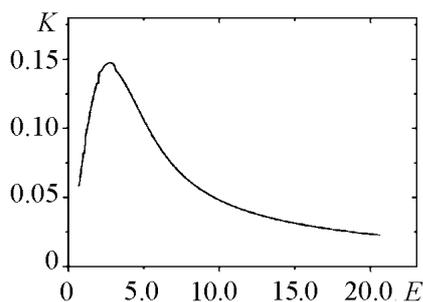


Рис. 14. Зависимость параметра нелинейности  $K$  от величины энергии  $E$  непрерывной механической системы

Анализ динамики траекторий исходного отображения показывает, что в системе наблюдается интересный сильный эффект дискретизации – разрушение топологического инварианта. В исходной механической системе две области  $x < 0$  и  $x > 0$  были абсолютно изолированы друг от друга бесконечно высоким потенциальным барьером. Поэтому нахождение частицы в одной из областей можно рассматривать как топологический инвариант. Дискретизация системы приводит к нарушению такого инварианта, так как частица, начавшая движение в области  $x > 0$ , через некоторое время может оказаться в области  $x < 0$ . Такое поведение становится возможным благодаря тому, что возмущение, вызванное дискретизацией системы, приводит к перекрытию близко лежащих орбит, принадлежащих топологически различным областям. Поскольку в фазовом пространстве системы существуют сколь угодно близко лежащие траектории, расположенные в топологически различных областях, то разрушение топологического инварианта происходит при сколь угодно слабом возмущении, вызванном дискретизацией. Происходящий процесс можно рассматривать как своеобразное классическое «туннелирование» – прохождение частицы под потенциальным барьером. Следует обратить внимание, что этот эффект принципиально отличается от известного эффекта дискретизации, связанного с появлением внешней случайной силы в дискретизированном отображении (см., например, [10]). Действительно, в классической механике никакое силовое воздействие не может перевести частицу через бесконечный барьер из одной потенциальной ямы в другую.

## 5. Мера хаотичности

Проанализируем меру хаотичности траекторий исследуемого отображения. Для начала отметим, что при определенных значениях параметра в областях обычной гамильтоновой динамики, свободных от сингулярных точек, существуют хаотические режимы с отличным от нуля старшим показателем Ляпунова. Такие режимы наблюдаются в стохастических слоях, лежащих внутри этих областей. Этот естественный для обычных гамильтоновых систем результат подтверждается данными численного моделирования.

Теперь перейдем к анализу меры хаотичности сингулярной гамильтоновой системы в режиме перемежаемости без хаотических фаз. Какова мера хаоса для траектории, на которой вовсе отсутствуют хаотические участки, а хаотичность обеспечивается лишь последовательностью «случайных» скачков? Результаты численного моделирования, а также аналитические оценки демонстрируют низкий уровень хаотичности исследуемой системы. Непосредственный численный расчет показателей Ляпунова демонстрирует их стремление к нулевой величине. Кроме того, показатель Ляпунова, рассчитанный аналитически для отображения, описывающего сокращенную динамику скачков адиабатического инварианта, также имеет нулевое значение. Этот факт указывает на более медленную, чем экспоненциальная, скорость разбегания близких траекторий. Нулевое значение показателя Ляпунова требует проведения дополнительного исследования для достоверной классификации наблюдаемого режима как хаотического.

Еще одним критерием хаотического поведения траекторий служит корреляционная функция. Проведенный ранее анализ сокращенной динамики отображения указывает на расходимость квадратичных и более высоких моментов инвариантной функции распределения, а следовательно, и обычной корреляционной функции. В данном случае целесообразно использовать обобщенную корреляционную функцию, определенную по более низким дробным моментам [20]

$$K(\tau) = \left( \frac{1}{T} \int_0^T (\langle x \rangle - x(t + \tau))^{1/\alpha} (\langle x \rangle - x(t))^{1/\alpha} dt \right)^\alpha.$$

На рис. 15 приведены результаты вычисления корреляционной функции для различных значений  $\alpha$ . С уменьшением  $\alpha$  вклад больших выбросов в корреляционную функцию падает, поэтому ее сходимость улучшается. Полученная корреляционная функция может быть аппроксимирована выражением

$$K \sim e^{-c\tau^d}.$$

Из-за ее значительных флуктуаций не удастся точно установить зависимость показателя  $d$  от величины  $\alpha$ . Однако следует отметить, что для небольших значений  $\alpha$  наблюдается общая тенденция к уменьшения величины  $d$ , например, при  $\alpha = 1/8$  имеем  $d = 0.87 \pm 0.07$ . Поскольку  $d < 1$ , то можно предположить, что в исследуемой системе реализуется квазиэкспоненциальный закон спадания корреляций. В этом случае уменьшение до нуля автокорреляционной функции будет означать то, что со временем система теряет информацию о своих начальных условиях. Иными словами, такой динамический режим можно считать хаотическим. Известно, что существуют системы, в которых корреляционная функция имеет подобную зависимость, при этом они также характеризуются нулевым показателем Ляпунова [11]. В современной нелинейной физике динамические режимы, обладающие слабыми хаотическими свойствами, принято называть псевдохаосом.

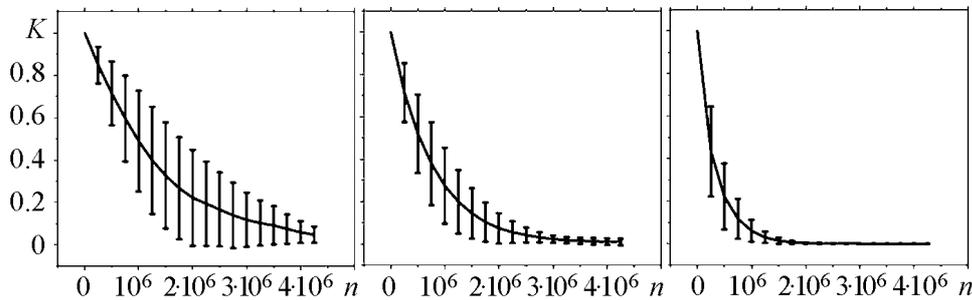


Рис. 15. Корреляционная функция траектории при значении параметра отображения  $a = 0.7$ , вычисленная по различным дробным моментам  $\alpha$ :  $a - 1/2$ ,  $b - 1/4$ ,  $c - 1/8$ . Спадание корреляционной функции свидетельствует о хаотичности исследуемого режима

## Заключение

Для широкого класса сингулярных консервативных или гамильтоновых отображений показано сосуществование и взаимодействие двух механизмов появления детерминированного хаоса. Один из них стандартный, связанный с перекрытием резонансов. При реализации этого механизма эволюция выбранной окрестности фазового пространства приводит к усложнению ее формы с сохранением связности. Реализуется сильный хаос, при котором показатель Ляпунова положителен. По другому сингулярному механизму происходит нарушение связности исходной области, которая в процессе эволюции многократно разрезается на множество областей. Показатель Ляпунова при реализации этого механизма обращается в нуль. Хаотичность оказывается слабой и проявляется в спадании обобщенной корреляционной функции, но медленнее чем по экспоненциальному закону. В нелинейной физике такое поведение динамических систем принято называть псевдохаосом. Траектории в области реализации этого механизма демонстрируют необычный режим перемежаемости без хаотических фаз. Наблюдение такой перемежаемости однозначно указывает на механизм возникновения хаоса, основанного именно на сингулярных свойствах системы. Интересной особенностью этого режима оказалась возможность его сведения к одномерному дробно-рациональному отображению. Это позволяет установить аналитически ряд важных свойств более сложного исходного двумерного отображения. В частности, аномальность диффузионных движений и меры хаотичности этого режима. В работе предложен и другой способ трактовки этого механизма перемежаемости, при котором обнаружен интересный эффект дискретизации. Он состоит в разрушении топологического инварианта непрерывной сингулярной гамильтоновой системы в результате ее дискретизации.

## Библиографический список

1. *Kolmogorov A.N.* La theorie generale des systemes dynamiques et la mecanique classique // Amsterdam Congress 1. 1954. P. 315.
2. *Арнольд В.И.* Малые знаменатели и проблема устойчивости движения в классической и небесной механике // Усп. мат. наук. 1963. Т. 18. С. 85.
3. *Moser J.K.* Stable and random motions in dynamical systems: with special emphasis on celestial mechanics. Princeton: Princeton Univ. Press Ann. of Math. Studies, 1973.
4. *Чуриков В.В.* Нелинейный резонанс. НГУ, 1977.
5. *Arnold V.I., Avez A.* Ergodic Problems of Classical Mechanics. New York: W.A. Benjamin, 1968.
6. *Lichtenberg A.J. and Leiberman M.A.* Regular and Stochastic Motion. New York: Springer, 1983.
7. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973.
8. *Fan R., Zaslavsky G.M.* Pseudochaotic dynamics near global periodicity // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2007. Vol. 12. P. 1038.

9. *Scott A.J., Holmes C.A., Milburn G.J.* Hamiltonian mappings and circle packing phase spaces // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2001. Vol. 155. P. 34.
10. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А.* Слабый хаос и квазирегулярные структуры. М.: Наука, 1964.
11. *Zaslavsky G.M., Edelman M.* Pseudochaos // arXiv:nlin/0112033v2, 2001.
12. *Grebogi C., Ott E., Yorke J.A.* Fractal basin boundaries, long-lived chaotic transients, and unstable-unstable pair bifurcation // *Phys. Rev. Lett.* 1983. Vol. 50. P. 935.
13. *Синай Я.Г.* Введение в эргодическую теорию. М.: Фазис, 1996.
14. *Розенфельд Б.А., Сергеева Н.Д.* Стереографическая проекция. М.: Наука, 1973.
15. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001.
16. *Шустер Г.* Детерминированный хаос: Введение. М.: Мир, 1988.
17. *Slipushenko S.V., Tur A.V., Yanovsky V.V.* Intermittency without chaotic phases // *Functional Materials*. 2006. Vol. 13, № 4. P. 551.
18. *Слипушенко С.В., Тур А.В., Яновский В.В.* Конкуренция перемежаемостей // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2008. Т. 16, № 4. С. 3.
19. *Шварц А.С.* Квантовая теория поля и топология. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит, 1989.
20. *Shenker S.J.* Scaling behavior in a map of a circle into itself: Empirical results // *Physica 5D*. 1982. P. 405.

*Институт монокристаллов, Национальная Академия Наук Украины, Харьков*  
*Center D'etude Spatiale Des Rayonnements, C.N.R.S.-U.P.S., France, Toulouse*

*Поступила в редакцию*  
*После доработки*

*29.06.2009*  
*9.04.2010*

## **ORIGIN OF INTERMITTENCY IN SINGULAR HAMILTONIAN SYSTEMS**

*S.V. Slipushenko, A.V. Tur, V.V. Yanovsky*

In the paper we studied properties of conservative singular maps. It was found that under some conditions the intermittency without chaotic phases can be observed in these maps. The alternative mechanism of the intermittency origin in Hamiltonian singular systems was considered. Its general properties were discussed. We studied special properties of phase space structure in these systems. It is shown that Hamiltonian intermittency can be characterized by zero Lyapunov exponents. It gives us the possibility to classify it as pseudochaos dynamics.

*Keywords:* Dynamic chaos, Hamiltonian system, intermittency, singularity.



*Слиушенко Сергей Васильевич* – родился в 1984 году в Харькове, окончил физико-технический факультет Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина (2007). В настоящее время аспирант Института монокристаллов Национальной академии наук Украины.

61001 Украина, Харьков, пр. Ленина, д. 60  
Институт монокристаллов Национальной академии наук Украины  
E-mail: slsdelta@mail.ru



*Тур Анатолий Валентинович* – родился в 1949 году в Петропавловске, окончил Харьковский государственный университет (1972). После окончания ХГУ работал в Физико-техническом институте (Харьков), а затем в Институте космических исследований. В настоящее время работает в Национальном центре научных исследований Франции (CNRS), Университет Пауль Сабатини, обсерватория Миди-Пириней, Центр космического исследования излучения (CESR) Тулуза. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук в Институте космических исследований (1978) и доктора физико-математических наук (1988) в области теоретической физики. Область научных интересов – нелинейная динамика, теория турбулентности, физика плазмы, хаос и нелинейная физика. Автор более 130 научных публикаций, в том числе монографии Yu.L. Bolotin, A.V. Tur, V.V. Janovsky «Chaos: Concepts, Control and Constructive Use». Springer, 2009. 198 pp.

Universite de Toulouse, CNRS,  
Center d'Etude spatiale des Rayonnements  
E-mail: anatoly.tour@cers.fr



*Яновский Владимир Владимирович* – родился в 1950 году в Полтаве, окончил Харьковский государственный университет (1973). После окончания ХГУ работал в Физико-техническом институте (Харьков). В настоящее время работает в Институте монокристаллов (ИМ) НАН Украины. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук в Институте космических исследований (1983) и доктора физико-математических наук в ИМ НАНУ (1996) в области теоретической физики. Область научных интересов – теоретическая физика, хаос и теория турбулентности, нелинейная физика. Автор более 220 научных публикаций, в том числе монографии Yu.L. Bolotin, A.V. Tur, V.V. Janovsky «Chaos: Concepts, Control and Constructive Use». Springer, 2009. 198 pp.

61001 Украина, Харьков, пр. Ленина, д. 60  
Институт монокристаллов Национальной академии наук Украины  
E-mail: yanovsky@isc.kharkov.ua