



СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ МОДЕЛИ «ХИЩНИК – ДВЕ ЖЕРТВЫ»

И.А. Башкирцева, Л.В. Карпенко, Л.Б. Ряшко

В работе рассматривается модель популяционной динамики «хищник – две жертвы». Исследуется детерминированная устойчивость предельных циклов этой трехмерной модели в зоне бифуркаций удвоения периода при переходе от порядка к хаосу. Стохастическая чувствительность циклов к аддитивным и параметрическим случайным возмущениям анализируется с помощью специально конструируемой функции стохастической чувствительности. Демонстрируются возможности функции чувствительности в описании тонких эффектов стохастических воздействий. Показан рост стохастической чувствительности циклов по мере удвоения периода при переходе от порядка к хаосу. Установлена универсальность индекса роста чувствительности.

Ключевые слова: Популяционная динамика, предельный цикл, удвоение периода, стохастическая чувствительность.

Введение

Математическая теория бифуркаций нелинейных динамических систем в настоящее время служит теоретической основой исследований качественных изменений в поведении биологических сообществ [1–5]. Периодические колебания, наблюдаемые в живых системах, могут определяться не только внешними воздействиями, но и внутренними свойствами самой системы. Даже простейшая модель взаимодействия популяций хищника и жертвы, задаваемая классическим уравнением Лотки–Вольтерры, демонстрирует незатухающие колебания численности животных. В литературе описан и детально исследован целый ряд двумерных моделей популяционной динамики [1, 3, 6, 7], в которых при изменении параметра равновесие теряет устойчивость, и в системе появляется предельный цикл.

В настоящее время значительный интерес исследователей вызывают трехмерные модели популяционной динамики [8–10], где кроме регулярных аттракторов – точек покоя (стационарные режимы) и предельных циклов (периодические режимы), могут возникать странные аттракторы (хаотические режимы).

Один из стандартных сценариев перехода системы от порядка к хаосу по мере изменения управляющих параметров состоит в бесконечной последовательности

бифуркаций удвоения периода предельных циклов. Возможность реализации серии бифуркаций удвоения периода была установлена ещё задолго до открытия странных аттракторов, а в 1978 году М. Фейгенбаумом были открыты универсальные закономерности перехода к хаосу посредством такой серии бифуркаций [11]. Наиболее известной моделью, демонстрирующей возникновение странного аттрактора, является модель Лоренца [12]. Именно в этой модели, описывающей динамику тепловой конвекции, подобные свойства динамической системы были обнаружены впервые. Также детерминированный хаос наблюдается и во многих других динамических моделях, среди которых классические системы Ресслера [13], Чуа [14], генератор Анищенко–Астахова [15]. Качественное изменение динамических режимов, связанное с бифуркациями удвоения периода, наблюдается также и в трехмерных популяционных моделях [3, 8–10].

Функционирование реальных биологических систем сопровождается трудно контролируемыми внешними воздействиями. Так, на численность взаимодействующих популяций может влиять изменение погодных условий, болезни, случайная смертность и т.д. Все эти факторы могут быть названы малыми случайными возмущениями и описаны при помощи соответствующих дополнительных слагаемых в уравнениях системы. Включение в модель случайных возмущений приводит к тому, что решение системы также становится случайным процессом. Под действием возмущений решение системы покидает детерминированный аттрактор и формирует вокруг него облако случайных состояний с некоторым вероятностным распределением. Решение стохастической системы, имеющее стационарную плотность распределения случайных состояний, называется *стохастическим аттрактором*. При этом для всякого другого достаточно близкого решения соответствующая плотность распределения стабилизируется и сходится к этой стационарной. Конструкция стохастических аттракторов рассматривалась в [16–21].

Исследование нелинейных систем в присутствии случайных возмущений было начато в [23] и продолжено в большом числе работ (см., например [24, 25]). Многочисленные экспериментальные и теоретические исследования показали, что случайные флуктуации могут вызывать неожиданные и интересные явления, такие как стохастический резонанс [26], индуцированные шумами переходы [27], индуцированный шумом порядок [28], индуцированный шумом хаос [29].

Фазовый портрет системы под воздействием случайных возмущений может претерпевать значительные изменения. Соответствующие деформации, вызванные шумами, особенно ощутимы вблизи точек бифуркаций, где даже малые шумы, вследствие высокой чувствительности аттракторов, могут породить новые явления в динамике системы [22, 30, 31].

Полное вероятностное описание возможных в системе стохастических режимов дается с помощью функции плотности распределения, удовлетворяющей уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова. Непосредственное использование этого уравнения уже для систем двух взаимодействующих популяций весьма затруднительно. Важный для практики случай воздействия малых возмущений приводит к известным проблемам анализа уравнений с малыми коэффициентами при старших производных. В этой ситуации одним из наиболее распространенных приемов исследования является прямое численное моделирование случайных траекторий с их последующей статистической обработкой.

В настоящее время развивается подход, позволяющий для искомым вероятностных характеристик стохастических аттракторов системы найти соответствующее приближение. Для систем с малыми случайными возмущениями в работе

А.Д. Вентцеля и М.И. Фрейдлина [32] предложен метод, использующий конструкцию *квазипотенциала*. Для квазипотенциала вблизи аттрактора детерминированной системы может быть найдена [33] квадратичная аппроксимация, позволяющая в итоге получить асимптотику стационарной плотности в форме нормального распределения. При этом разброс случайных траекторий стохастической системы вокруг детерминированного аттрактора может быть описан с помощью *функции стохастической чувствительности*. Данная функция была введена в работах [33, 34], где с ее помощью были исследованы особенности стохастических автоколебаний в моделях брюсселятора и Лоренца.

Аппарат функции стохастической чувствительности использовался в работе [35] для анализа равновесий и предельных циклов двумерной модели «хищник – жертва» с насыщением хищника. Данная же работа посвящена изучению характеристик устойчивости колебательных режимов трехмерной системы «хищник – две жертвы», учитывающей внутривидовую конкуренцию хищников.

В первой части работы излагаются необходимые теоретические сведения по анализу стохастических циклов общих нелинейных динамических систем. Вводится конструкция функции стохастической чувствительности, приводятся методы ее нахождения.

Во второй части детально рассмотрены бифуркации удвоения периода предельных циклов системы «хищник – две жертвы», и впервые для этой модели исследованы характеристики их устойчивости как к однократному начальному возмущению, так и к воздействию аддитивных и параметрических стохастических шумов. Исследованы особенности разброса случайных траекторий в фазовом пространстве и показано, как изменяются статистические характеристики этого разброса при вариации параметров системы.

1. Характеристики устойчивости предельных циклов

Рассмотрим детерминированную динамическую систему, заданную конечным числом нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad (1)$$

где $f(x)$ – достаточно гладкая n -мерная вектор-функция.

Предполагается, что система (1) имеет экспоненциально устойчивый T -периодический аттрактор – предельный цикл $\Gamma: x = \xi(t)$ ($0 \leq t \leq T$), $\xi(0) = \xi(T)$. Это означает, что в некоторой малой окрестности U цикла Γ существуют константы $K > 0$, $l > 0$, такие что для всякого решения $x(t)$ системы (1) с начальным условием $x(0) = x_0 \in U$ выполняется следующее неравенство:

$$\|\Delta(x(t))\| \leq K e^{-lt} \|\Delta(x_0)\|.$$

Здесь $\Delta(x) = x - \gamma(x)$ – отклонение точки x от цикла Γ ; $\gamma(x)$ – точка цикла Γ , ближайшая к x .

Классический анализ устойчивости периодических аттракторов к возмущению начальных данных сводится к исследованию мультипликаторов ρ_i ($i = 1, \dots, n$) соответствующей линейной системы первого приближения

$$\dot{z} = F(t)z, \quad (2)$$

где $z(t) = x(t) - \xi(t)$, $F = \partial f / \partial x(\xi(t))$ – T -периодическая матрица. Пусть $Z(t)$ – фундаментальная матрица системы (2). Тогда мультипликаторы – собственные числа матрицы монодромии $B = Z(T)$ – характеризуют динамику системы (1) в окрестности цикла Γ . Один из них (пусть это будет ρ_n) всегда равен единице. В качестве детерминированной характеристики устойчивости цикла обычно используют величину $r = \max_i |\rho_i|$ ($i = 1, \dots, n-1$). Её смысл заключается в том, что первоначальное отклонение периодического движения через период T умножается на r . Поэтому для затухания возмущения необходимо выполнение неравенства $r < 1$. Это условие является критерием экспоненциальной устойчивости предельного цикла. Отметим, что мультипликаторы характеризуют устойчивость цикла в целом и не позволяют различать и сравнивать по степени устойчивости различные участки цикла.

Для анализа чувствительности цикла Γ к воздействию малых стохастических возмущений рассмотрим соответствующую систему Ито [36]:

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon \sigma(x) \dot{w}, \quad (3)$$

где $\sigma(x)$ – достаточно гладкая $n \times m$ -матричная функция, задающая зависимость возмущения от состояния системы; $w(t)$ – m -мерный стандартный винеровский процесс; скалярный параметр ε характеризует интенсивность возмущения.

Под воздействием стохастических возмущений решение системы (3) покидает детерминированный цикл и формирует вокруг него пучок случайных траекторий. В случае, когда вероятностное распределение случайных состояний в этом пучке с течением времени стабилизируется, можно говорить о наличии у возмущенной системы *стохастического аттрактора*.

Детальное описание плотности стационарного вероятностного распределения состояний $p(x, \varepsilon)$ системы (3) дается стационарным уравнением Фоккера–Планка–Колмогорова

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (a_{ij} p) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (f_i p) = 0, \quad a_{ij} = [\sigma \sigma^T]_{ij}.$$

Непосредственное использование этого уравнения даже в простейших ситуациях (автоколебательная система с одной степенью свободы) весьма затруднительно. Важный для практики случай воздействия малых помех приводит к известным проблемам анализа уравнений с малыми коэффициентами при старших производных. В настоящее время известны различные подходы, позволяющие для искомых вероятностных характеристик найти соответствующие приближения. Для систем с малыми случайными возмущениями в работе А.Д. Вентцеля и М.И. Фрейдлина [32] предложен подход, использующий некоторую специально конструируемую функцию Ляпунова – *квазипотенциал*

$$v(x) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln p(x, \varepsilon).$$

Первая аппроксимация квазипотенциала $v(x) = \varphi(x) + O(\|\Delta(x)\|^3)$ в малой окрестности цикла Γ задается квадратичной формой [33]

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} (\Delta(x), \Psi(\gamma(x)) \Delta(x)),$$

где $\Psi(\gamma) = (\partial^2 v / \partial x^2)(\gamma)$. Для каждой точки $\gamma \in \Gamma$ значение функции $\Psi(\gamma)$ является симметрической неотрицательно определенной $n \times n$ -матрицей. Из равенства $(\partial v / \partial x)(\gamma) = 0$ следует, что $(\partial^2 v / \partial x^2)(\gamma)f(\gamma) = 0$. Поэтому $\Psi(\gamma)f(\gamma) = 0$, а значит, матрица $\Psi(\gamma)$ является вырожденной ($\text{rank} \Psi(\gamma) \leq n - 1$). При невырожденных шумах ($\det(\sigma(\gamma)) \neq 0$) имеем $\text{rank} \Psi(\gamma) = n - 1$. Рассмотрим наряду с матричной функцией $\Psi(\gamma)$ матричную функцию $\Phi(\gamma) = \Psi^+(\gamma)$, где $+$ есть знак операции псевдообращения.

В результате асимптотика стационарной плотности распределения $p(x, \varepsilon)$ для малых шумов в малой окрестности цикла Γ может быть записана в форме нормального распределения [37]:

$$p(x, \varepsilon) \approx K \cdot \exp\left(-\frac{(\Delta(x), \Phi^+(\gamma(x))\Delta(x))}{2\varepsilon^2}\right) \quad (4)$$

с ковариационной матрицей $\varepsilon^2 \Phi(\gamma)$. Матрица $\Phi(\gamma)$ описывает разброс точек пересечения случайных траекторий с гиперплоскостью, ортогональной циклу Γ в точке γ . Функцию $\Phi(\gamma)$ будем называть *функцией стохастической чувствительности*. Эта функция характеризует отклик системы (3) вблизи цикла Γ на случайные возмущения. Используя эту функцию, мы можем описать изменение чувствительности цикла в разных его точках.

Функцию стохастической чувствительности удобно искать в параметрической форме. Решение $\xi(t)$ системы (1), связывающее точки Γ с точками временного интервала $[0; T)$ позволяет использовать следующую параметризацию:

$$\Phi(\xi(t)) = W(t).$$

Пусть Π_t – гиперплоскость, ортогональная циклу в точке $\xi(t)$ ($0 \leq t \leq T$). Матричная функция $W(t)$ позволяет [34] записать экспоненциальную гауссовскую асимптотику (4) в параметрической форме

$$p_t(x, \varepsilon) = K \cdot \exp\left(-\frac{(x - \xi(t))^T W^+(t)(x - \xi(t))}{2\varepsilon^2}\right)$$

со средним значением $m_t = \xi(t)$ и ковариационной матрицей $D(t, \varepsilon) = \varepsilon^2 W(t)$, задающей вблизи $\xi(t)$ разброс точек пересечения случайных траекторий с плоскостью Π_t .

Рассмотрим собственные значения $\lambda_1(t) \geq \lambda_2(t) \geq \dots \geq \lambda_n(t) \geq 0$ и собственные векторы $v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)$ матрицы $W(t)$. В силу вырожденности матрицы $W(t)$ ($W(t)f(\xi(t)) \equiv 0$), младшее собственное значение $\lambda_n(t) \equiv 0$. Остальные собственные значения и соответствующие им собственные векторы характеризуют разброс пучка в гиперплоскости Π_t по величине и направлению.

Матрица $W(t)$ стохастической функции чувствительности для экспоненциально устойчивого цикла является единственным решением уравнения [33]

$$\dot{W} = F(t)W + WF^T(t) + P(t)S(t)P(t) \quad (5)$$

с условиями

$$W(t)r(t) = 0, \quad (6)$$

$$W(t+T) = W(t). \quad (7)$$

Здесь

$$F(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t)), \quad S(t) = G(t)G^\top(t), \quad G(t) = \sigma(\xi(t)), \quad r(t) = f(\xi(t))$$

$$P(t) = P_{f(\xi(t))}, \quad P_r = I - \frac{rr^\top}{r^\top r},$$

P_r – матрица проектирования на подпространство, ортогональное вектору $r \neq 0$.

Свяжем матрицу $W(t)$ с системой первого приближения. Система первого приближения для отклонения $z(t) = x(t) - \xi(t)$ решений $x(t)$ стохастической системы (3) от $\xi(t)$ имеет вид

$$\dot{z} = F(t)z + \varepsilon G(t)\dot{w}. \quad (8)$$

Для функции $u(t) = \frac{z(t)}{\varepsilon}$ справедлива система

$$\dot{u} = F(t)u + G(t)\dot{w}. \quad (9)$$

Рассмотрим наряду с (9) стохастическую систему

$$\dot{y} = F(t)y + P(t)G(t)\dot{w}, \quad (10)$$

случайные возмущения в которой являются проекциями возмущений системы (9).

Для устойчивого цикла у системы (10) существует решение $\bar{y}(t)$ с ковариационной матрицей $\text{cov}(\bar{y}(t), \bar{y}(t)) = W(t)$. При этом для всякого решения $z(t)$ системы (8) проекция $P(t)z(t)$ сходится в среднем квадратичном к $\varepsilon\bar{y}(t)$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \|P(t)z(t) - \varepsilon\bar{y}(t)\|^2 = 0,$$

а ковариационная матрица $\text{cov}(P(t)z(t), P(t)z(t))$ проекций $P(t)z(t)$ сходится к $\varepsilon^2 W(t)$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\text{cov}(P(t)z(t), P(t)z(t)) - \varepsilon^2 W(t)) = 0.$$

Для отыскания матрицы $W(t)$ естественно использовать следующий метод установления. Рассмотрим решение $V(t)$ задачи Коши

$$\dot{V} = F(t)V + VF^\top(t) + P(t)S(t)P(t), \quad V(0) = V_0. \quad (11)$$

Матрица $P(t)V(t)P(t)$ независимо от выбора начальной неотрицательно определенной матрицы V_0 сходится к $W(t)$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (P(t)V(t)P(t) - W(t)) = 0. \quad (12)$$

Действительно, разность $\Delta(t) = V(t) - W(t)$, являясь решением однородного уравнения

$$\dot{\Delta} = F\Delta + \Delta F^\top,$$

имеет явное представление $\Delta(t) = Z(t)\Delta(0)Z^\top(t)$, где $Z(t)$ – фундаментальная матрица решений системы (2). Благодаря экспоненциальной устойчивости цикла, при $t \rightarrow +\infty$ справедливо $P(t)Z(t) \rightarrow 0$ и как следствие выполняется (12)

$$P(t)V(t)P(t) - W(t) = P(t)\Delta(t)P(t) \rightarrow 0.$$

Скорость сходимости этого метода установления напрямую связана со степенью устойчивости цикла и определяется величиной старшего мультипликатора r : при уменьшении r скорость сходимости увеличивается, при стремлении r к единице скорость сходимости резко падает.

Для отыскания приближенных значений $V_i \approx V(t_i)$ ($t_i = ih$) решения $V(t)$ задачи (11) можно взять за основу один из стандартных одношаговых численных методов

$$V_{i+1} = \mathcal{F}_i(V_i, h). \quad (13)$$

При непосредственном использовании схемы (13) накапливающаяся погрешность ведет к расходимости процесса. Дело в том, что из-за неизбежных локальных ошибок у последовательных приближений V_i появляется компонента, лежащая в неустойчивом подпространстве. Рост этой компоненты и ведет к расходимости. Чтобы избежать этого, следует модифицировать схему (13) и вести расчет по формуле

$$V_{i+1} = P_{i+1} \mathcal{F}_i(V_i, h) P_{i+1}.$$

Такая дополнительная «чистка» приближения проектором $P_{i+1} = P(t_{i+1})$ обеспечивает сходимость метода.

Сингулярное разложение матрицы чувствительности. В трехмерном случае у матрицы $W(t)$ собственное значение $\lambda_3(t) \equiv 0$. Функция стохастической чувствительности цикла для каждой точки t может быть выражена двумя собственными числами $\lambda_1(t) \geq \lambda_2(t)$ и соответствующими собственными векторами $v_1(t)$, $v_2(t)$. Сингулярное разложение матрицы $W(t)$ при $n = 3$ имеет вид

$$W(t) = \lambda_1(t) v_1(t) v_1^\top(t) + \lambda_2(t) v_2(t) v_2^\top(t). \quad (14)$$

Для невырожденных шумов функции $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ являются положительными и задают размер эллипса рассеивания случайных состояний системы в плоскости Π_t , а векторы $v_1(t)$ и $v_2(t)$ определяют направления осей этого эллипса. В плоскости Π_t этот эллипс задается уравнением

$$\frac{\eta_1^2}{\lambda_1} + \frac{\eta_2^2}{\lambda_2} = 2k^2 \varepsilon^2.$$

Здесь $\eta_i = (x - \xi(t), v_i(t))$, $k = -\ln(1 - P)$, а P – доверительная вероятность.

Обозначим через $u_1(t)$, $u_2(t)$ некоторый ортонормальный базис плоскости Π_t , который легко найти, зная T -периодическое решение $\xi(t)$ системы (1). Собственные векторы $v_1(t)$ и $v_2(t)$ могут быть получены поворотом базиса $u_1(t)$, $u_2(t)$ на некоторый угол $\varphi(t)$

$$\begin{aligned} v_1(t) &= u_1(t) \cos \varphi(t) + u_2(t) \sin \varphi(t), \\ v_2(t) &= -u_1(t) \sin \varphi(t) + u_2(t) \cos \varphi(t). \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, разложение (14), (15) позволяет нам выразить неизвестное решение системы (5) через значения трех скалярных функций $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ и $\varphi(t)$.

Перепишем (14) в форме

$$W(t) = \lambda_1(t) P_1(t) + \lambda_2(t) P_2(t), \quad (16)$$

где матрицы

$$P_1(t) = v_1(t)v_1^\top(t), \quad P_2(t) = v_2(t)v_2^\top(t)$$

являются проекционными: $P_i v_i = v_i$, $P_i v_j = 0$ ($i \neq j$), $P = P_1 + P_2$.

Подставляя разложение (16) в дифференциальное уравнение (5) получаем

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{\lambda}_1 P_1 + \lambda_1 \dot{P}_1 + \dot{\lambda}_2 P_2 + \lambda_2 \dot{P}_2 = \\ &= \lambda_1 F P_1 + \lambda_2 F P_2 + \lambda_1 P_1 F^\top + \lambda_2 P_2 F^\top + (P_1 + P_2) S (P_1 + P_2). \end{aligned}$$

Умножая это соотношение слева на v_i^\top и справа на v_j и используя следующие свойства проекционных матриц

$$\begin{aligned} v_1^\top(t) \dot{P}_1(t) v_1(t) &\equiv 0, \quad v_1^\top(t) \dot{P}_2(t) v_1(t) \equiv 0, \quad v_2^\top(t) \dot{P}_1(t) v_2(t) \equiv 0, \quad v_2^\top(t) \dot{P}_2(t) v_2(t) \equiv 0, \\ v_1^\top(t) \dot{P}_1(t) v_2(t) &= \dot{\varphi}(t) + \dot{u}_1^\top(t) u_2(t), \quad v_1^\top(t) \dot{P}_2(t) v_2(t) = -\dot{\varphi}(t) - \dot{u}_1^\top(t) u_2(t), \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} v_1^\top \dot{V} v_1 &= \dot{\lambda}_1 = \lambda_1 v_1^\top F v_1 + \lambda_1 v_1^\top F^\top v_1 + v_1^\top S v_1, \\ v_2^\top \dot{V} v_2 &= \dot{\lambda}_2 = \lambda_2 v_2^\top F v_2 + \lambda_2 v_2^\top F^\top v_2 + v_2^\top S v_2, \\ v_1^\top \dot{V} v_2 &= \lambda_1 (\dot{\varphi} + \dot{u}_1^\top u_2) + \lambda_2 (-\dot{\varphi} - \dot{u}_1^\top u_2) = \\ &= \lambda_2 v_1^\top F v_2 + \lambda_1 v_1^\top F^\top v_2 + v_1^\top S v_2. \end{aligned}$$

Таким образом, функции $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\varphi(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= \lambda_1 v_1^\top [F + F^\top] v_1 + v_1^\top S v_1, \\ \dot{\lambda}_2 &= \lambda_2 v_2^\top [F + F^\top] v_2 + v_2^\top S v_2, \\ (\lambda_1 - \lambda_2) \dot{\varphi} &= \lambda_2 v_1^\top F v_2 + \lambda_1 v_1^\top F^\top v_2 + v_1^\top S v_2 - (\lambda_1 - \lambda_2) \dot{u}_1^\top u_2. \end{aligned} \tag{17}$$

В невырожденном случае, когда $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, система (17) позволяет однозначно находить параметры $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\varphi(t)$ разложения (14), (15) матрицы $W(t)$, удовлетворяющей системе (5), (6). При этом решение с условием (7) можно получить методом установления, описанным выше.

В случае, когда собственные числа λ_1 , λ_2 равны или близки друг к другу, система (17) имеет особенность. Дело в том, что в случае кратных собственных значений задача отыскания собственных векторов является некорректной. При $\lambda_1(t) = \lambda_2(t)$ соответствующие собственные векторы матрицы $W(t)$ составляют двумерное подпространство: всякий вектор, ортогональный $r(t)$, будет собственным. Формально это означает, что величина угла $\varphi(t)$ в разложении (15) может быть любой. При этом отметим, что в случае $\lambda_1 \equiv \lambda_2$ матрица $W(t)$ имеет простое представление: $W(t) = \lambda_1(t) P(t)$ и отыскание собственных векторов не требуется. В этих обстоятельствах на интервалах, где $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ равны или близки друг к другу, можно перейти от системы (17) к системе (5).

Функция стохастической чувствительности, определяемая в точках цикла Γ собственными числами $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$, характеризует на различных участках этого цикла величину разброса пучка случайных траекторий. Она позволяет сравнивать

степень чувствительности разных частей цикла к стохастическим помехам и предсказывать тонкие эффекты случайных воздействий.

В анализе чувствительности предельного цикла к случайным возмущениям важную роль играет величина $m = \max_{[0;T]} \lambda_1(t)$, которую мы будем называть *показателем стохастической чувствительности* цикла. Эта величина является удобной характеристикой чувствительности цикла в целом.

2. Детерминированная модель

Модель популяционной динамики «хищник – две жертвы» задается [3, 10] вольтерровской системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{u} = \alpha_1 u - \beta_1 u w - \gamma_{11} u^2 - \gamma_{12} u v, \\ \dot{v} = \alpha_2 v - \beta_2 v w - \gamma_{21} v^2 - \gamma_{22} u v, \\ \dot{w} = -\delta w + \nu_1 u w + \nu_2 v w - \mu w^2, \end{cases} \quad (18)$$

где u и v – численности первого и второго вида жертвы, соответственно; w – численность популяции хищника. Численности u , v и w являются функциями от времени t . Все параметры модели положительны.

Для удобства изучения и сокращения количества параметров эту систему можно преобразовать к нормированным координатам. При помощи замены [3] $\tau = t/\delta$, $u = (\delta/\gamma_{11})x$, $v = (\delta/\gamma_{22})y$, $w = z$, система (18) приводится к виду

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - x - c_1 y - e_1 z), \\ \dot{y} = y(b - y - c_2 x - e_2 z), \\ \dot{z} = -z(1 - d_1 x - d_2 y + g z), \end{cases} \quad (19)$$

где x , y и z – нормированные численности популяций жертв и хищника, зависящие от времени t , а остальные коэффициенты получены заменой $a = \alpha_1/\delta$, $b = \alpha_2/\delta$, $e_{1,2} = \beta_{1,2}/\delta$, $c_1 = (\gamma_{12}\delta)/\gamma_{22}$, $c_2 = (\gamma_{21}\delta)/\gamma_{11}$, $d_1 = \nu_1/\gamma_{11}$, $d_2 = \nu_2/\gamma_{22}$, $g = \mu/\delta$.

Благодаря такой нормировке параметры, отвечающие интенсивности внутривидовой конкуренции в популяциях жертв и скорости вымирания хищников в отсутствие жертв, сделаны равными единице. Оставшиеся параметры c_1 и c_2 характеризуют интенсивность межвидовой конкуренции популяций жертв; e_1 и e_2 – скорость выедания жертв хищником; d_1 и d_2 – прирост популяции хищника вследствие выедания жертв; g – интенсивность внутривидовой конкуренции в популяции хищника.

Параметры a и b отвечают естественному приросту в популяциях первого и второго вида жертвы, соответственно. Их значения можно регулировать, например, изменением интенсивности промысла жертв. Увеличение уровня промысла ведет к снижению значения соответствующего параметра и наоборот.

В работе [10] подробно исследуются параметрические и фазовые портреты системы (19) в зависимости от параметров a и b при следующих фиксированных значениях остальных коэффициентов:

$$c_1 = 6, \quad c_2 = 1, \quad e_1 = 4, \quad e_2 = 10, \quad d_1 = 0.25, \quad d_2 = 4, \quad g = 1.$$

Авторы [10] детально рассматривают перестройки фазовых портретов системы по мере изменения параметра b , характеризующего биотический потенциал второго вида жертвы, при различных фиксированных значениях параметра a . Наиболее интересны динамические эффекты, наблюдающиеся в численном эксперименте при $a = 2.4$. Система (19) при заданных параметрах приобретает вид

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2.4 - x - 6y - 4z), \\ \dot{y} = y(b - x - y - 10z), \\ \dot{z} = -z(1 - 0.25x - 4y + z). \end{cases} \quad (20)$$

Именно этот частный случай модели «хищник – две жертвы» мы и будем изучать в данной работе.

Коэффициенты системы (20) подобраны так, что межвидовая конкуренция жертв оказывается сильнее внутривидовой, поэтому в отсутствие хищников устойчивое сосуществование популяций жертв невозможно – одна из них неизбежно вытеснит другую. Таким образом, предлагаемая модель демонстрирует известное свойство некоторых биологических систем, в которых неустойчивое сообщество жертв стабилизируется [38] хищником. В природе этот эффект наблюдается, например, в некоторых морских сообществах [39].

Кроме того, при выбранных значениях коэффициентов можно сказать, что хищник более приспособлен к питанию жертвами второго вида. Жертв только первого вида оказывается недостаточно, чтобы обеспечить пищей популяцию хищника. Следовательно, при вымирании популяции второго вида жертвы популяция хищника вымирает вслед за ней.

В зависимости от значения варьируемого параметра b сосуществование популяций может носить характер не только устойчивого равновесия, но и устойчивых колебаний, а в некотором диапазоне значений параметра наблюдаются и сложные непериодические (квазистохастические) колебательные режимы [40].

Стационарные режимы. Система (20) имеет 6 положений равновесия:

1) При отсутствии жертв популяция хищника вымирает. Этой ситуации отвечает седловое равновесие $O = (0; 0; 0)$.

2) Равновесие $A_1 = (2.4; 0; 0)$ соответствует разрушению биологического сообщества вследствие одновременного вымирания хищника и второго вида жертвы при стабилизации численности популяции первого вида жертвы.

3) Равновесие $A_2 = (0; b; 0)$, существующее при любых положительных значениях параметра b , отвечает выживанию второй популяции жертвы при отсутствии хищника и первого вида жертвы.

4) Ситуации, когда в системе нет хищников и фигурируют только две конкурирующие популяции жертв, соответствует равновесие $B_1 = (1/25(30b - 12); 1/25(12 - 5b); 0)$. Равновесие существует при $0.4 \leq b \leq 2.4$. Эта точка неустойчива, любое отклонение в популяциях жертв ведет к неизбежному вымиранию одного из видов.

5) Равновесие $B_2 = (0; 1/41(b + 10); 1/41(4b - 1))$ имеет смысл при $b \geq 0.25$ и отвечает устойчивому сосуществованию хищника и второй популяции жертвы при вымирании первой. Отметим также, что с первым видом жертвы в отсутствие второго хищник устойчиво сосуществовать не может.

6) При $1.6 \leq b \leq 1.9273$ в системе (20) существует единственное невырожденное положение равновесия $M(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (2/25(106 - 55b); 2/25(5b - 6); 1/10(5b - 8))$, соответствующее сосуществованию всех трех популяций.

Заключение об устойчивости равновесий модели (20) можно сделать, исходя из исследования системы первого приближения вблизи равновесий с матрицей

$$F = \begin{bmatrix} 2.4 - 2x - 6y - 4z & -6x & -4x \\ -y & b - x - 2y - 10z & -10y \\ 0.25z & -4z & 0.25x + 4y - 2z - 1 \end{bmatrix}.$$

Значения собственных чисел этой системы могут быть найдены численно.

В данной работе нас будут интересовать два из указанных равновесий – A_1 и M . Равновесие A_1 устойчиво на всем интервале существования M . Равновесие M устойчиво только при $b > 1.7638$. При $b < 1.7528$ A_1 является единственным притягивающим множеством в фазовом пространстве (x, y, z) . Рассмотрим оставшийся диапазон $b \in (1.7528; 1.7638)$, на котором помимо равновесия A_1 существует ещё один, более сложный, аттрактор, о котором будет сказано ниже. Если фазовая траектория попадает в область притяжения этого аттрактора, все три популяции будут сосуществовать в автоколебательном режиме. Если же траектория попадает в бассейн притяжения равновесия A_1 , это означает, что система популяций обречена на разрушение – вымирание хищника и второго вида жертвы.

Рассмотрим подробно явления, происходящие в системе (20) по мере уменьшения параметра b на интервале $(1.7528; 1.7638)$.

При переходе b через значение 1.7638 равновесие M теряет устойчивость, и путем мягкого возникновения автоколебаний в системе формируется новый аттрактор – устойчивый предельный цикл. На рис. 1 изображены траектории в фазовом

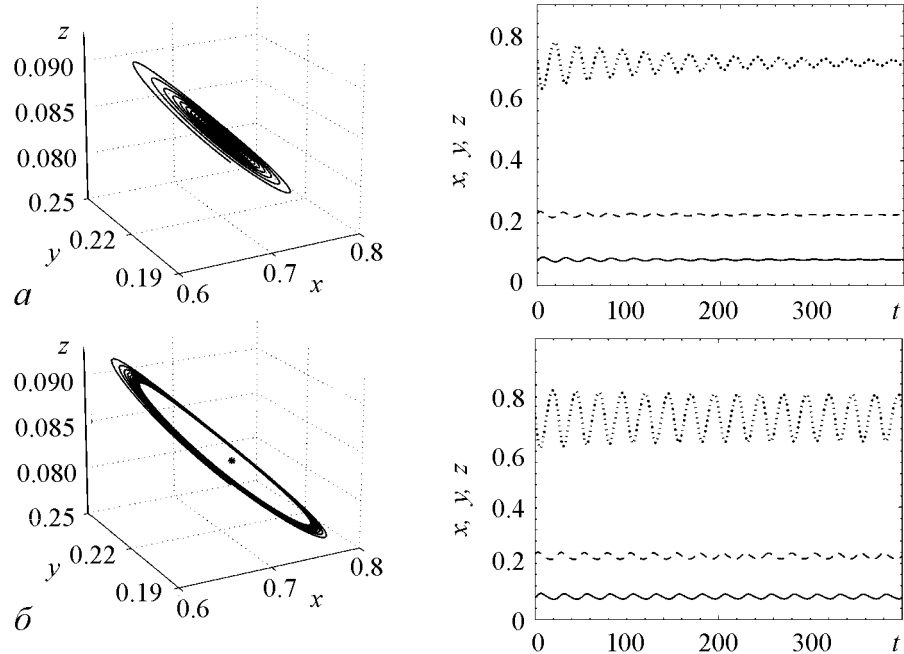


Рис. 1. Формирование аттрактора: фазовый портрет (слева) и колебания численности популяций (справа: x – точки, y – пунктир, z – сплошная линия); a – точка покоя, $b = 1.765$; b – устойчивый предельный цикл, $b = 1.763$

пространстве, стремящиеся к аттрактору, а так же соответствующие им колебания численности популяций в зависимости от времени t . При $b = 1.765$ аттрактором является равновесие M (рис. 1, *a*), а при $b = 1.763$ – предельный цикл (рис. 1, *б*).

Как демонстрирует рисунок, для устойчивого равновесия численность каждой популяции со временем стабилизируется, а при возникновении предельного цикла численности популяций выходят в режим автоколебаний с постоянным периодом и амплитудой. При уменьшении параметра b амплитуда колебаний увеличивается, цикл изменяет свою форму, а затем в системе возникает ряд более сложных явлений, которые рассмотрены ниже.

Уменьшение параметра b ниже критического значения $b = 1.7528$ приводит к тому, что сосуществование популяций в колебательном режиме становится неустойчивым, и единственным устойчивым положением в фазовом пространстве остается равновесие A_1 . Таким образом, снижение репродуктивного потенциала второго вида жертвы (ниже указанного критического уровня), вызванное ухудшениями среды обитания или высокой интенсивностью промысла, приводит к вымиранию его популяции, а вслед за этим и к гибели популяции хищника.

Бифуркационная диаграмма. Явления, наблюдающиеся на интервале $b \in (1.7528; 1.7638)$, наглядно демонстрирует *бифуркационная диаграмма*. Здесь удобно использовать сечение Пуанкаре – полуплоскость $z = \bar{z} = 1/10(5b - 8)$, $y > \bar{y} = 2/25(5b - 6)$. На рис. 2 представлены точки сечения на примере цикла кратности 2 в пространстве (x, y, z) (рис. 2, *a*) и в проекции (x, y) (рис. 2, *б*). Звездочкой на рисунке обозначено равновесие M . На бифуркационной диаграмме (рис. 3) представлены координаты y точек сечения Пуанкаре в зависимости от параметра b . Одна точка соответствует циклу кратности 1, две точки – циклу кратности 2 и так далее.

Рассмотрим аттракторы системы при уменьшении b от 1.7638 до 1.7536. Как уже говорилось, потеря устойчивости равновесия M при $b = 1.7638$ сопровождается рождением устойчивого предельного цикла (бифуркация Хопфа). Соответствующее семейство циклов F_1 обозначено на рис. 3, *a*. При переходе параметра справа налево через значение $b = 1.7536$, предельный цикл семейства F_1 теряет устойчивость.

При $b < 1.7538$ формируется второе семейство аттракторов F_2 , которое на небольшом участке $b \in (1.7536; 1.7538)$ существует одновременно с первым

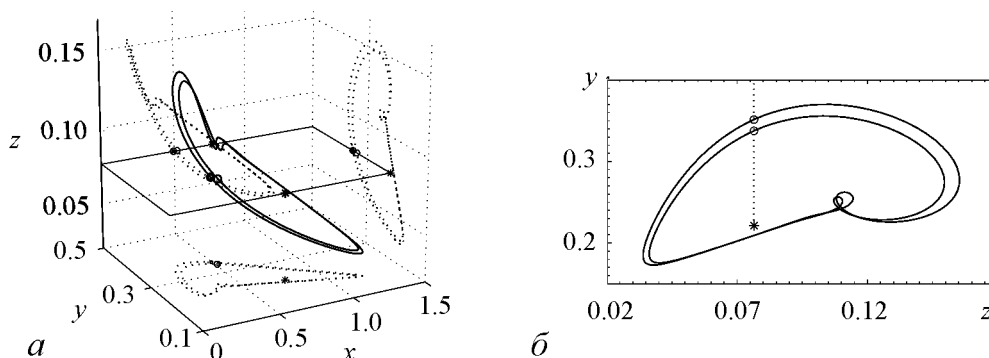


Рис. 2. Построение точек сечения Пуанкаре

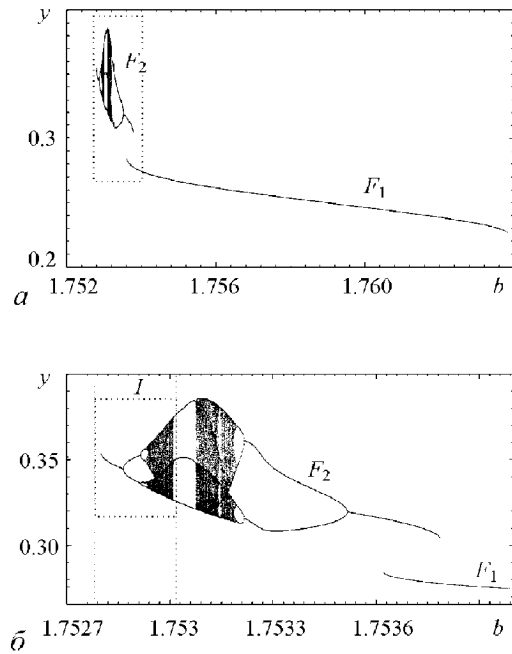


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма системы (1)

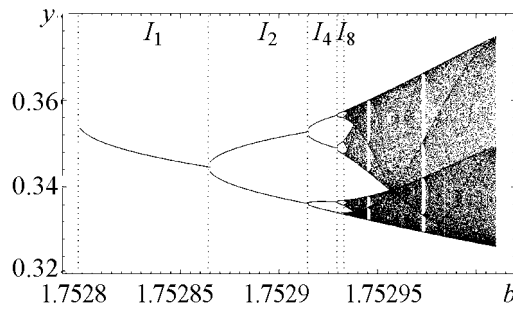


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма интервала I

Таким образом, возникновение и дальнейшее усложнение режима автоколебаний в популяциях животных по мере увеличения промысловой нагрузки может предупреждать нас о приближении биологического сообщества к границе разрушения, когда два из трех видов обречены на вымирание.

Рассмотрим подробнее интервал I (рис. 4). Его можно разделить на подынтервалы структурной устойчивости $I_1, I_2, \dots, I_{2^k}, \dots$, соответствующие циклам $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{2^k}, \dots$. Здесь Γ_{2^k} – цикл кратности 2^k .

Для данной модели $I_1 = (1.7528; 1.75287)$, $I_2 = (1.75287; 1.75291)$, $I_4 = (1.75291; 1.75293)$, $I_8 = (1.75293; 1.752933)$. На рис. 5 представлены предельные циклы кратности 1 ($b = 1.7528$), 2 ($b = 1.7529$) и 4 ($b = 1.752925$), наблюдаемые на интервалах I_1, I_2 и I_4 , и странный аттрактор ($b = 1.753$), а также соответствующие колебания численности популяций во времени. Кривая $x(t)$ обозначена точками, $y(t)$ – пунктиром, $z(t)$ – сплошной линией.

(рис. 3, б). С точки зрения биологии, это означает возможность сосуществования популяций в одном из двух циклических режимов с различной амплитудой колебания численностей.

Семейство F_2 наблюдается на интервале $b \in (1.7528; 1.7538)$. При уменьшении параметра b в пределах интервала $b \in (1.7531; 1.7538)$ в этом семействе происходит серия последовательных бифуркаций удвоения периода предельных циклов, ведущая к установлению хаотического колебательного режима. Затем формируется цикл кратности 3. На бифуркационной диаграмме отчетливо виден соответствующий ему участок. При дальнейшем уменьшении параметра система вновь переходит в состояние хаоса, и весь бифуркационный процесс развивается в обратной последовательности. На интервале $I = (1.7528; 1.75305)$ по мере уменьшения b мы можем наблюдать каскады обратных бифуркаций, при которых период цикла уменьшается в 2 раза. Процесс завершается потерей устойчивости последнего предельного цикла кратности 1 при переходе b справа налево через критическое значение 1.7528. При этом сообщество популяций разрушается, и единственным аттрактором системы (20) остается равновесие A_1 .

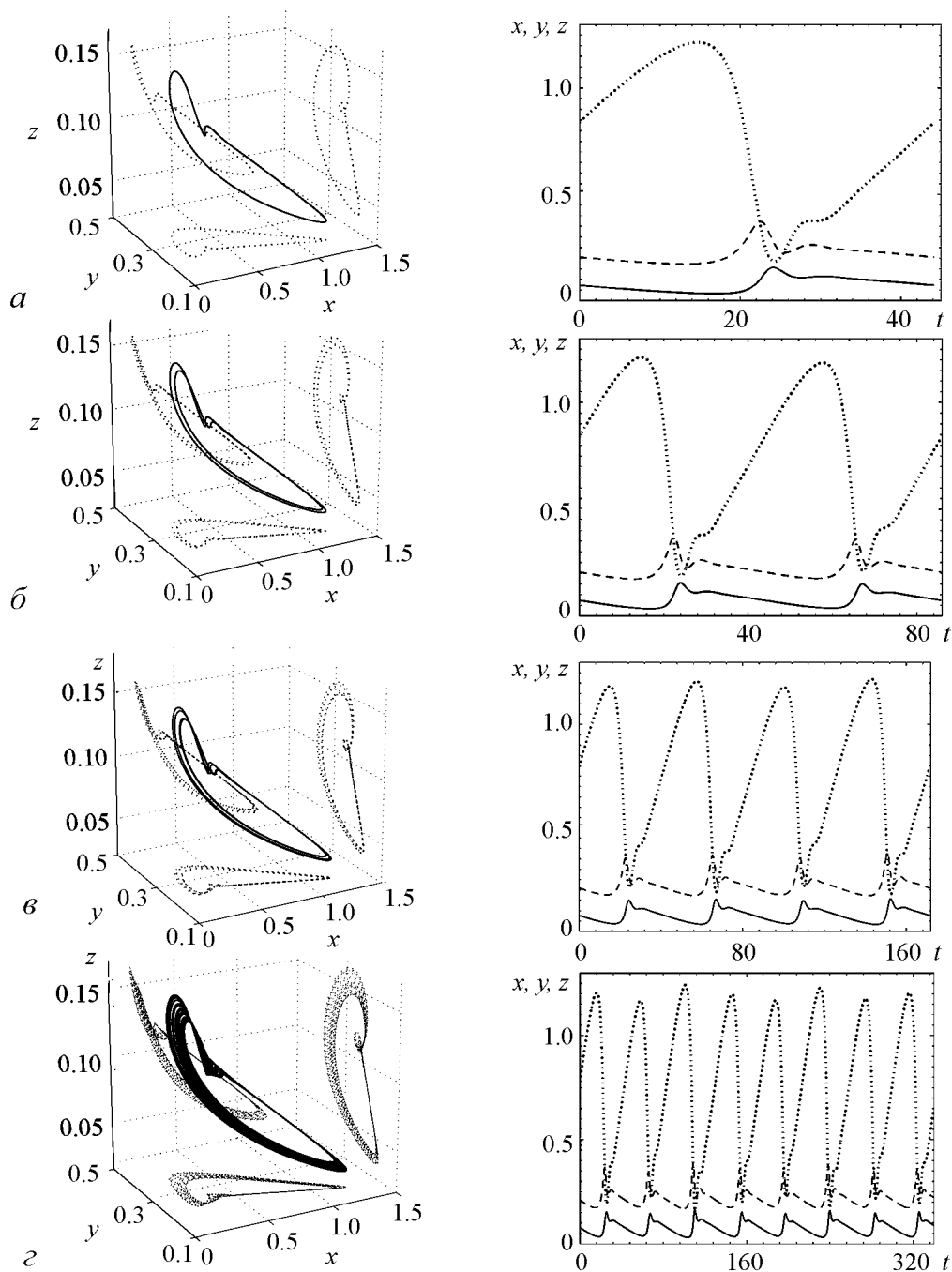


Рис. 5. Аттракторы интервала I (слева) и соответствующие колебания численности популяций (справа: x – точки, y – пунктир, z – сплошная линия) для значений b : 1.7528 (*a*); 1.7529 (*б*); 1.752925 (*в*); 1.753 (*г*)

Анализ детерминированной устойчивости циклов. Проследим зависимость мультипликаторов от параметра b . На рис. 6 показаны значения старшего и младшего мультипликаторов в зонах I_1 , I_2 , I_4 и I_8 . Как можно видеть из рисунка, реакция мультипликаторов на приближение параметра к точке бифуркации слева носит один и тот же характер внутри каждой зоны: старший мультипликатор становится близким

к нулю, значение младшего стремится к (-1) . При переходе через бифуркационное значение, в момент удвоения периода цикла, старший мультипликатор принимает значение около 1, а младший – значение, близкое к нулю.

Это позволяет использовать мультипликаторы как числовую характеристику, определяющую приближение параметра к бифуркационным значениям, и позволяет определить тот момент, в который происходит бифуркация.

Любопытно, что в зоне I_4 на небольшом интервале $b \in (1.752921; 1.752922)$ мультипликаторы становятся комплексными. График модуля мультипликаторов на этом участке представлен на рис. 7.

Рис. 8 демонстрирует поведение показателя детерминированной устойчивости $r(b)$ на интервалах I_1, I_2, I_4 и I_8 . Наименьшие значения $r(b)$ соответствуют предельным циклам, наиболее устойчивым к малому начальному возмущению. В каждом из интервалов I_{2^k} можно выделить локальный минимум $r_k = \min_{b \in I_{2^k}} r(b)$, достигающийся при некотором значении параметра $b = b_k$. Предельный цикл, соответствующий этому значению параметра, будет максимально устойчивым к однократному

начальному возмущению среди всех циклов интервала I_{2^k} . Назовем его *детерминированным 2^k -суперциклом* [41]. Значения b_k и r_k представлены в табл. 1.

Как можно видеть, устойчивость суперциклов в различных интервалах структурной устойчивости отличается незначительно.

Таблица 1
Характеристики устойчивости детерминированных суперциклов

I_{2^k}	I_1	I_2	I_4	I_8
b_k	1.752811	1.752887	1.752917	1.752931
r_k	0.055	0.045	0.026	0.042

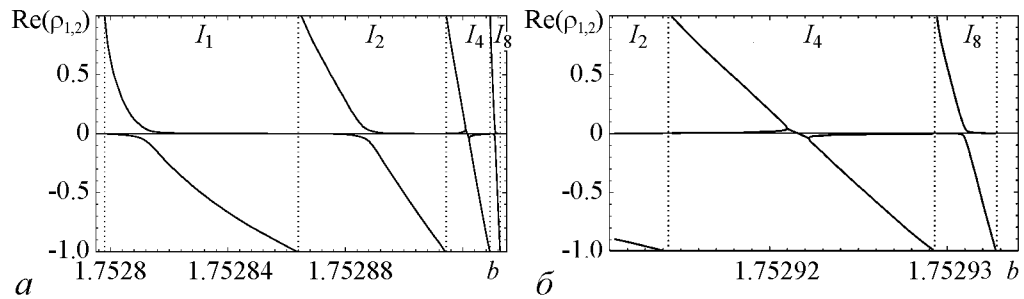


Рис. 6. Мультипликаторы на интервалах I_1, I_2, I_4 и I_8

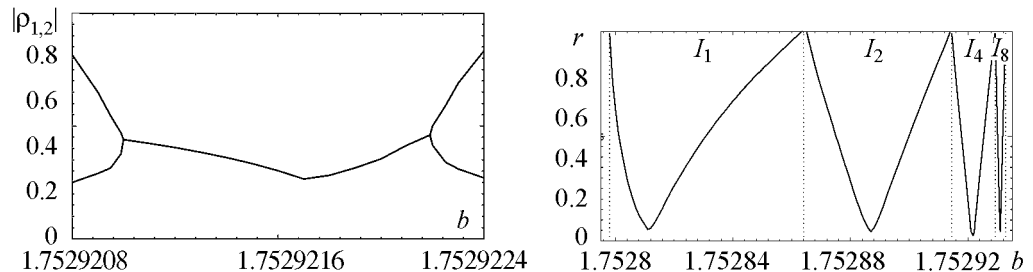


Рис. 7. Модуль мультипликаторов на участке интервала I_4

Рис. 8. Показатель детерминированной устойчивости на интервалах I_1, I_2, I_4 и I_8

3. Модель под воздействием аддитивных шумов

Реальные биологические системы постоянно находятся под влиянием неконтролируемых или слабо контролируемых внешних воздействий. Чтобы учесть эти воздействия, следует добавить в уравнения системы дополнительные стохастические слагаемые.

Фактор случайных миграций особей в популяцию и вне её может быть описан при помощи аддитивных возмущений. Для изучения влияния на модель аддитивных стохастических шумов рассмотрим соответствующую возмущенную систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2.4 - x - 6y - 4z) + \varepsilon \dot{w}_1, \\ \dot{y} = y(b - x - y - 10z) + \varepsilon \dot{w}_2, \\ \dot{z} = -z(1 - 0.25x - 4y + z) + \varepsilon \dot{w}_3, \end{cases} \quad (21)$$

где ε – интенсивность возмущения, w_1 , w_2 и w_3 – стандартные независимые винеровские процессы.

Под воздействием шумов бифуркационная диаграмма системы размывается, тем сильнее, чем выше уровень шума (рис. 9). Случайные траектории покидают детерминированный аттрактор и формируют вокруг него стационарно распределенный пучок. На рис. 10 (слева) изображены стохастические циклы, образованные случайными траекториями системы (21) при $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-7}$.

Из рисунков видно, что разброс случайных траекторий вокруг детерминированного цикла неравномерен. Перепад дисперсии, соответствующий циклам кратности 1, 2 и 4, представлен на рис. 10 (справа), где изображены графики функции стохастической чувствительности $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ для этих циклов.

На рис. 11 представлены графики показателя стохастической чувствительности $m(b)$ в зонах I_1 , I_2 , I_4 и I_8 . Значения $m(b)$ устремляются в бесконечность при приближении параметра к границам интервалов структурной устойчивости. Это означает, что вблизи бифуркационных значений параметра система становится максимально чувствительной к возмущениям.

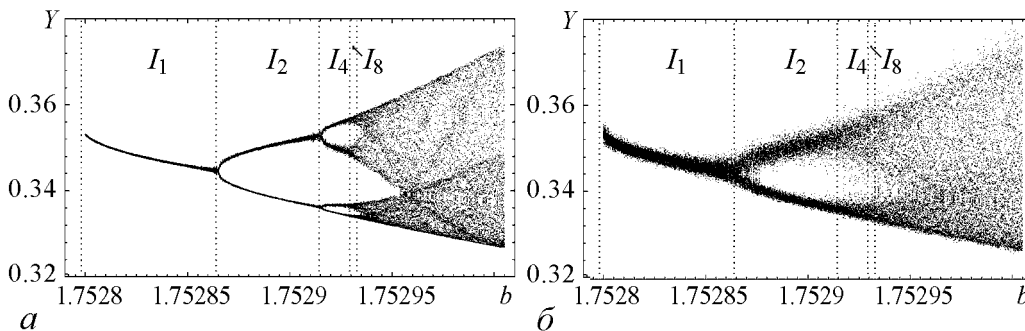


Рис. 9. Бифуркационная диаграмма стохастически возмущенной системы (4) для интервала I при ε : $a = 5 \cdot 10^{-8}$, $\bar{b} = 5 \cdot 10^{-7}$

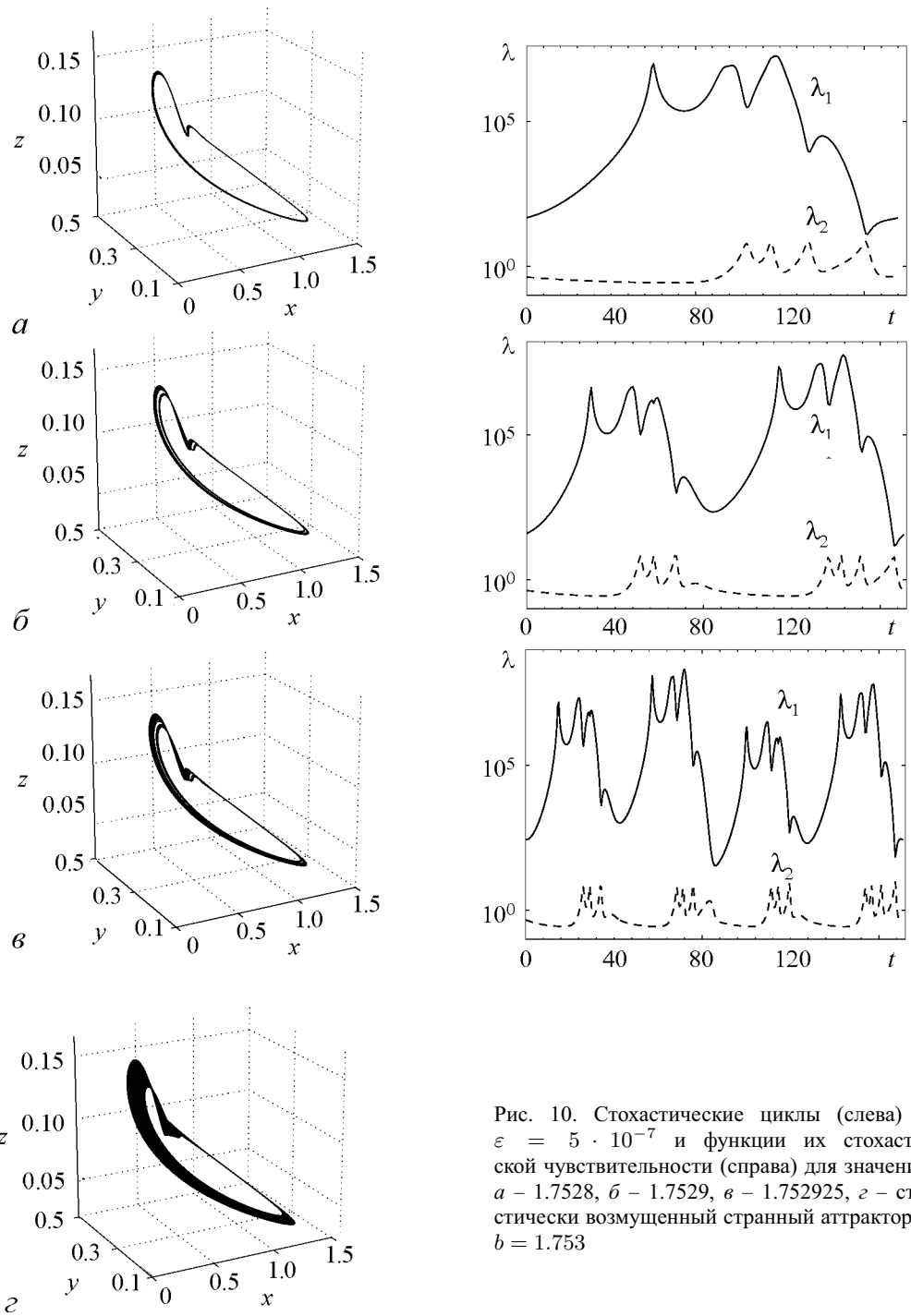


Рис. 10. Стохастические циклы (слева) при $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-7}$ и функции их стохастической чувствительности (справа) для значений b : $a - 1.7528$, $\bar{b} - 1.7529$, $\varepsilon - 1.752925$, z - стохастически возмущенный странный аттрактор при $b = 1.753$

Внутри каждого интервала I_{2^k} можно выделить локальный минимум $m_k = \min_{b \in I_{2^k}} m(b)$, который достигается при некотором значении параметра $\bar{b}_k = \arg \min_{b \in I_{2^k}} m(b)$. Соответствующий предельный цикл будет наименее чувствительным к стохастическим возмущениям среди всех циклов кратности 2^k . Мы будем называть его *стохастическим 2^k -суперциклом*.

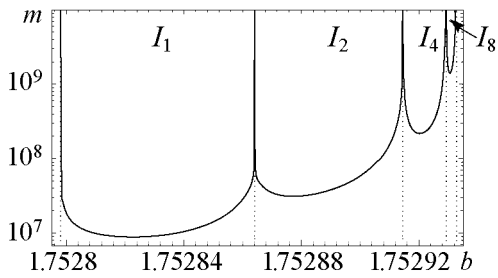


Таблица 2

Характеристики стохастической чувствительности суперциклов системы (21)

I_{2^k}	I_1	I_2	I_4	I_8
\bar{b}_k	1.752821	1.75288	1.75292	1.752931
m_k	$9.09 \cdot 10^6$	$3.41 \cdot 10^7$	$2.18 \cdot 10^8$	$1.42 \cdot 10^9$

Таблица 3

Значения коэффициентов d_k

k	0	1	2
d_k	3.754	6.387	6.499

Рис. 11. Показатель стохастической чувствительности циклов в зонах I_1 , I_2 , I_4 и I_8 для системы (21)

Значения m_k и b_k представлены в табл. 2. Последовательность m_k быстро возрастает при увеличении k . Это означает, что стохастическая чувствительность циклов быстро увеличивается по мере удвоения периода циклов при переходе системы к состоянию хаоса.

Рассмотрим коэффициенты $d_k = m_{k+1}/m_k$. Они определяют скачок чувствительности при переходе от 2^k -суперцикла к 2^{k+1} -суперциклу. Значения коэффициентов d_k представлены в табл. 3. Последовательность этих коэффициентов с возрастанием k стабилизируется.

Сравнивая детерминированный и стохастический анализ, следует отметить, что по мере приближения системы к состоянию хаоса детерминированные и стохастические характеристики дают различные результаты. Детерминированная устойчивость циклов практически не меняется, в то время как стохастическая чувствительность значительно возрастает и стремится к бесконечности.

4. Модель под воздействием параметрических шумов

Рассмотрим также и фактор случайных флуктуаций в рождаемости и смертности особей, который может быть описан при помощи параметрического (мультипликативного) шума. Добавим в модель (21) параметрический шум, действующий на параметр b : $b \rightarrow b + \tilde{\varepsilon}\dot{w}_4$. Здесь $\tilde{\varepsilon} = c \cdot \varepsilon$, w_4 – стандартный винеровский процесс, независимый от w_i ($i = 1, 2, 3$). При этом уравнения системы примут следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2.4 - x - 6y - 4z) + \varepsilon\dot{w}_1, \\ \dot{y} = y(b - x - y - 10z) + \varepsilon(\dot{w}_2 + cy\dot{w}_4), \\ \dot{z} = -z(1 - 0.25x - 4y + z) + \varepsilon\dot{w}_3. \end{cases} \quad (22)$$

На рис. 12 представлены графики функций стохастической чувствительности для цикла кратности 1 ($b = 1.7528$) под воздействием только аддитивного шума – сплошная линия, и с добавлением параметрического шума с коэффициентом $c = 10$ – пунктирная линия. Влияние мультипликативного шума отчетливо заметно на графике младшего собственного числа λ_2 . При этом поведение старшего собственного числа λ_1 практически не претерпевает изменений. Повышаются только числовые характеристики функции чувствительности.

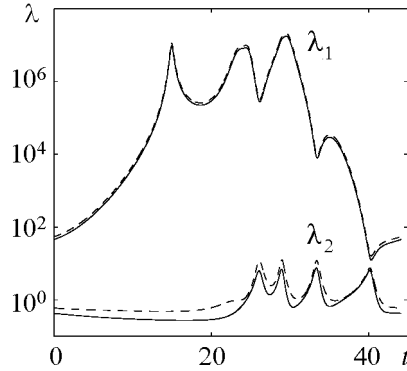


Рис. 12. Сравнение при $b = 1.7528$ функций стохастической чувствительности предельных циклов систем (21) – сплошная линия и (22) ($c = 10$) – штриховая линия

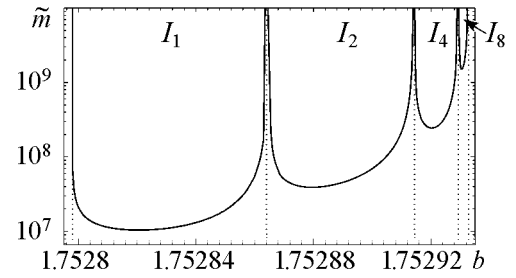


Рис. 13. Показатель стохастической чувствительности циклов в зонах I_1 , I_2 , I_4 и I_8 системы (22) ($c = 10$)

Таблица 4

Характеристики чувствительности суперциклов системы (22) при $c = 10$

I_{2^k}	I_1	I_2	I_4	I_8
\tilde{b}_k	1.752821	1.75288	1.75292	1.752931
\tilde{m}_k	$1.04 \cdot 10^7$	$3.9 \cdot 10^7$	$2.44 \cdot 10^8$	$1.51 \cdot 10^9$

Таблица 5

Значения коэффициентов \tilde{d}_k

k	0	1	2
\tilde{d}_k	3.285	6.387	6.499

График показателя стохастической чувствительности $\tilde{m}(b)$ для параметрически возмущенного цикла в зонах I_1 , I_2 , I_4 и I_8 изображен на рис. 13. Как можно видеть из рисунка, введение в систему параметрического шума не влечет качественных изменений в поведении показателя стохастической чувствительности. При приближении параметра к точкам бифуркации значения показателя чувствительности так же, как и в случае только аддитивного шума, устремляются в бесконечность, но с более высокой скоростью. Это говорит том, что вблизи точек бифуркаций система более чувствительна к параметрическим шумам, чем к аддитивным.

Минимумы показателя стохастической чувствительности $\tilde{m}_k = \min_{b \in I_{2^k}} \tilde{m}(b)$ и значения параметра $\tilde{b}_k = \arg \min_{b \in I_{2^k}} \tilde{m}(b)$, при которых они достигаются, представлены в табл. 4. Как мы можем видеть, $\tilde{b}_i = \tilde{b}_j$ при $i = j$. Отсюда можно сделать вывод, что стохастические суперциклы не зависят от вида действующего на систему шума.

Значения коэффициентов роста чувствительности $\tilde{d}_k = \tilde{m}_{k+1}/\tilde{m}_k$ представлены в табл. 5. Последовательность \tilde{d}_k стабилизируется с ростом k .

Заключение

В данной работе исследованы детерминированная устойчивость и стохастическая чувствительность предельных циклов нелинейных динамических систем в цепочке бифуркаций удвоения периода циклов. Для стохастических циклов излагаются необходимые теоретические сведения по аппроксимации и исследованию соот-

ветствующих вероятностных распределений, использующие конструкцию функции стохастической чувствительности.

На примере популяционной модели «хищник – две жертвы» показан классический сценарий перехода динамической системы к состоянию хаоса путем бесконечной серии бифуркаций удвоения периодов предельного цикла. Построена детальная бифуркационная диаграмма, демонстрирующая этот процесс. Определены границы интервалов структурной устойчивости для циклов кратности 1, 2, 4 и 8.

При помощи мультипликаторов получены характеристики устойчивости системы к однократному начальному возмущению. Исследован характер изменения мультипликаторов в цепи удвоений периода на интервалах структурной устойчивости. При приближении параметра к точке бифуркации слева, значение старшего мультипликатора стремится к 0, а младшего к (-1) . После прохождения этой границы происходит резкий скачок значений мультипликаторов – старший из них становится равным 1, а младший – 0.

Кроме того, при помощи показателя детерминированной устойчивости в каждом из рассмотренных интервалов структурной устойчивости определено значение параметра, соответствующее детерминированному суперциклу – предельному циклу, имеющему наибольшую устойчивость среди циклов своего интервала. Значения показателя устойчивости суперциклов разной кратности различаются незначительно.

При добавлении в модель стохастического возмущения поведение траекторий системы становится случайным. Вокруг детерминированного цикла системы формируется стохастический аттрактор – стационарно распределенный пучок случайных траекторий. Разброс траекторий в этом пучке описан при помощи функции стохастической чувствительности. Для трехмерного цикла функция стохастической чувствительности задается двумя собственными числами матрицы ковариации, которые характеризуют разброс случайных состояний в нормальной циклу гиперплоскости по направлению соответствующих собственных векторов.

Как для аддитивных, так и для параметрических шумов показано характерное устремление в бесконечность показателя стохастической чувствительности при приближении параметра к границам интервалов структурной устойчивости, демонстрирующее нам высокую чувствительность системы к шумам в этих зонах.

Для интервалов структурной устойчивости 1-, 2-, 4- и 8-кратных циклов определены стохастические суперциклы и найдены показатели их стохастической чувствительности. Показано, что по мере роста кратности суперциклов показатель чувствительности увеличивается, причем индекс роста чувствительности увеличивается в геометрической прогрессии.

Выявлено, что по мере перехода системы к состоянию хаоса детерминированные и стохастические характеристики ведут себя различным образом. Детерминированная устойчивость аттракторов практически не меняется, в то время как стохастическая чувствительность неограниченно возрастает с увеличением кратности циклов.

Работа частично поддержана грантами РФФИ 09-01-00026, 09-08-00048, 10-01-96022урал, ФЦП 02.740.11.0202.

Библиографический список

1. Колмогоров А.Н. Качественное изучение математических моделей динамики популяций // В кн.: Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1972. Вып. 25. С. 100.
2. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978.
3. Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. М.: Наука, 1985.
4. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическая биофизика. М.: Наука, 1984.
5. Turchin P. Complex population dynamics: a theoretical/empirical synthesis. Princeton University Press, 2003.
6. Morozov A., Petrovskii S., Li B.-L. Bifurcations and chaos in a predator-prey system with the Allee effect // Proc. Royal Soc. London Series B–Biol. Sci. 2004. Vol. 271. P. 1407.
7. Krivan V. Optimal foraging and predator-prey dynamics // Theoretical Population Biology. 1996. Vol. 49. P. 265.
8. Arneodo A., Couillet P., Tresser C. Occurrence of strange attractors in three dimensional Volterra equations // Phys. Lett. A. 1980. Vol. 79. P. 423.
9. Xiao D., Li W. Limit cycles for competitive three dimensional Lotka–Volterra system // J. Diff. Eqns. 2000. Vol. 164. P. 1.
10. Анонина Е.А., Анонин Ю.М., Базыкин А.Д. Анализ сложного динамического поведения в модели «хищник – две жертвы» // Проблемы экологического мониторинга и моделирования экосистемы. Л. : Гидрометеиздат, 1982. Т. 5. С. 163.
11. Feigenbaum M.J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // J. of Stat. Phys. 1978. Vol. 19, № 1. P. 25.
12. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow // J. Atmos. Sci. 1963. Vol. 20. P. 130.
13. Roessler O.E. An equation for continuous chaos // Phys. Lett. 1976. Vol. 35a. P. 397.
14. Chua L. O., Komuro M., Matsumoto T. The double scroll family // IEEE Trans. Circuits Syst. 1986. Vol. CAS-33, № 11. P. 1072.
15. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
16. Arnold L. Random Dynamical Systems. Springer-Verlag, 1998.
17. Бланк М. Л. Конечномерные стохастические аттракторы бесконечномерных динамических систем // Функц. анализ и его прил. 1986. Т. 20:2. С.54.
18. Scheutzow M. Comparison of various concepts of a random attractor: A case study // Arch. Math. 2002. Vol.78. P. 233.
19. Schmalfuss B. The random attractor of the stochastic Lorenz system // ZAMP. 1997. Vol. 48. P. 951.
20. Billings L., Schwartz I.B. Exciting chaos with noise: unexpected dynamics in epidemic outbreaks // J. Math. Biol. 2002. Vol. 44. P. 31.
21. Schenk-Hoppe K.R. Bifurcations of the randomly perturbed logistic map // Discussion Paper № 353, University of Bielefeld: Department of Economics, 1997.
22. Sieber M., Malchow H., Schimansky-Geier L. Constructive effects of environmental noise in an excitable prey-predator plankton system with infected prey // Ecological Complexity. 2007. Vol. 4. P. 223.

23. *Понтрягин Л.С., Андронов А.А., Витт А.А.* О статистическом рассмотрении динамических систем // ЖЭТФ. 1933. Т. 3, вып. 3. С. 165.
24. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.
25. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
26. *McDonnell M. D., Stocks N. G., Pearce C. E. M., Abbott D.* Stochastic resonance: From Suprathreshold Stochastic Resonance to Stochastic Signal Quantization. Cambridge University Press, 2008.
27. *Хорстхемке В., Лефевр Р.* Индуцированные шумом переходы. М: Мир, 1987.
28. *Gassmann F.* Noise-induced chaos-order transitions // Phys. Rev. E. 1997. Vol.55. P. 2215.
29. *Gao J. B., Hwang S. K., Liu J. M.* When can noise induce chaos? // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol.82. P.1132.
30. *Bashkirtseva I. A., Ryashko L. B.* Sensitivity analysis of the stochastically and periodically forced Brusselator// Physica A. 2000. Vol. 278. P.126.
31. *Fedotov S., Bashkirtseva I., Ryashko L.* Stochastic dynamo model for subcritical transition // Phys. Rev.E. 2006. Vol. 73. 066307.
32. *Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.
33. *Баширцева И.А., Ряшко Л.Б.* Метод квазипотенциала в анализе чувствительности автоколебаний к стохастическим возмущениям // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, № 5. С. 19.
34. *Баширцева И.А., Ряшко Л.Б.* Метод квазипотенциала в исследовании локальной устойчивости предельных циклов к случайным возмущениям // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2001. Т. 9, № 6. С. 104.
35. *Баширцева И.А., Карпенко Л.В., Ряшко Л.Б.* Анализ аттракторов стохастически возмущенной модели «хищник – жертва» // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 2. С. 37.
36. *Ито К.* О стохастических дифференциальных уравнениях// Математика I. 1957. № 1. С.78.
37. *Bashkirtseva I. A., Ryashko L. B.* Stochastic sensitivity of 3D-cycles // Mathematics and computers in simulation. 2004. Vol. 66. P. 55.
38. *Hofbauer J., Sigmund K.* On the stabilizing effect of predators and competitors on ecological communities // J. Math. Biol. 1989. Vol. 27 (5). P. 537.
39. *Paine R. T.* Food web complexity and species diversity // Amer. Natur. 1966. Vol. 100. P. 65.
40. *Vance R. R.* Predation and resource partitioning in one predator-two prey model communities // Amer. Natur. 1978. Vol. 112. P. 797.
41. *Шустер Г.* Детерминированный хаос: Введение. М.: Мир, 1988.

Уральский государственный
университет им. А.М. Горького

Поступила в редакцию 25.06.2010
После доработки 25.09.2010

STOCHASTIC SENSITIVITY OF LIMIT CYCLES FOR «PREDATOR – TWO PREYS» MODEL

I.A. Bashkirtseva, L.V. Karpenko, L.B. Ryashko

We consider the population dynamics model «predator – two preys». A deterministic stability of limit cycles of this three-dimensional model in a period doubling bifurcations zone at the transition from an order to chaos is investigated. Stochastic sensitivity of cycles for additive and parametrical random disturbances is analyzed with the help of stochastic sensitivity function technique. Thin effects of stochastic influences are demonstrated. Growth of stochastic sensitivity of cycles for period doubling under transition from order to chaos is shown. For the index of sensitivity growth the universality low is established.

Keywords: Population dynamics, limit cycle, period doubling, stochastic sensitivity.



Башкирцева Ирина Адольфовна – родилась в 1965 году. Окончила Уральский госуниверситет (1987). Кандидат физико-математических наук (1997), доцент кафедры математической физики Уральского госуниверситета. Область научных интересов – асимптотический анализ и численное моделирование нелинейных стохастических систем.

620083 Екатеринбург, Ленина, 51
Уральский государственный университет им. А.М. Горького
E-mail: irina.bashkirtseva@usu.ru



Карпенко Лариса Владимировна – родилась в 1985 году. Окончила Уральский госуниверситет (2008). Аспирант кафедры математической физики Уральского госуниверситета. Область научных интересов – стохастические модели популяционной динамики.

620083 Екатеринбург, Ленина, 51
Уральский государственный университет им. А.М. Горького
E-mail: karpenkolarisa@mail.ru



Ряшко Лев Борисович – родился в 1953 году. Окончил Уральский госуниверситет (1975). Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики Уральского госуниверситета. Область научных интересов – устойчивость, стабилизация и управление стохастическими системами. Автор ряда статей по данной тематике.

620083 Екатеринбург, Ленина, 51
Уральский государственный университет им. А.М. Горького
E-mail: lev.ryashko@usu.ru