



## НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА КОЛЬЦА ИЗ ТРЕХ ФАЗОВЫХ СИСТЕМ\*

*В.В. Матросов, А.В. Шмелев*

Исследуется нелинейная динамика ансамбля, состоящего из трех фазоуправляемых генераторов, объединенных в кольцо. Путем численного моделирования, основанного на методах теории колебаний, исследуются режимы коллективного поведения генераторов ансамбля, в пространстве параметров выделяются области существования синхронных и квазисинхронных режимов, анализируются перестройки режимов на границах выделенных областей.

*Ключевые слова:* Ансамбли автогенераторов, фазовые системы, динамические режимы, синхронизация, квазисинхронизация, бифуркации, аттракторы, бифуркации.

### Введение

Анализ связанных активных элементов является одной из актуальных задач современной нелинейной науки. Задачи изучения коллективной динамики возникают в различных областях знаний (физика, химия, биология, экономика, социология и т.д.). При изучении нелинейной динамики ансамблей с позиций теории колебаний прежде всего обращают внимание на динамику парциального элемента ансамбля и на способы объединения активных элементов в ансамбль, то есть на типы связей (линейные, нелинейные, локальные, нелокальные, резистивные, диссипативные и т.п.).

Среди активных элементов в особый класс можно выделить динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством, поскольку они обладают более разнообразным типом движений по сравнению с системами, определенными в декартовой системе координат [1]. Часто такие динамические системы называют фазовыми системами, поскольку в динамических уравнениях циклическая (угловая) координата, как правило, ассоциируется с фазой колебаний. Заметим, что при описании динамики нелинейных систем циклические переменные могут входить в них

\*Статья написана по материалам конференции «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, 4–9 октября, 2010.

естественным образом, как, например, в задаче Жуковского о планирующем полете или при описании поведения маятника [2], фазоуправляемых генераторов [3, 4], джозефсоновского контакта [5, 6], так и в результате некоторых преобразований фазовых координат, в частности, при переходе к укороченным уравнениям в системах близких к гармоническому осциллятору [2], либо путем введения понятия фазы для колебаний систем, определенных в декартовой системе координат [7]. Независимо от способа введения фазы модели фазовых систем представляют огромный интерес для понимания общих закономерностей коллективного поведения ансамблей связанных активных элементов, в частности, явления синхронизации колебаний [7–9].

Как показывают исследования, коллективное поведение ансамблей определяется не столько динамикой парциального элемента, сколько структурой связей [10]. Причем многие эффекты коллективной динамики больших ансамблей начинают проявляться в ансамблях, состоящих из небольшого числа активных элементов [11, 12].

Настоящая работа продолжает начатые в [13, 14] исследования кольцевых соединений систем фазовой автоподстройки частоты (ФАП). Сейчас изучена динамика кольца из двух фазоуправляемых генераторов с фильтрами первого порядка. Установлено, что в результате такого объединения у генераторов появляются новые динамические режимы (квазисинхронный и хаотических биений), несвойственные парциальному элементу. Показано, что введение дополнительных связей через сигналы фазовых рассогласований позволяет не только управлять свойствами автоколебательных режимов, но и повышает устойчивость синхронного режима. Здесь рассматривается коллективное поведение ансамбля из трех элементов с регулярной динамикой в отсутствие дополнительных связей. Особое внимание уделяется эффектам, связанным с ростом числа активных элементов в ансамбле.

## 1. Математические модели ансамбля

Уравнения динамики кольца из  $n \geq 3$  систем ФАП и при наличии локальных дополнительных связей через сигналы фазовых рассогласований в символической записи имеют следующий вид [13]:

$$\frac{p\varphi_i}{\Omega_1} = \frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\Omega_1} - b_i K_i(p)[F(\varphi_i) + \kappa_{i+1} F(\varphi_{i+1})] + b_{i-1} K_{i-1}(p)[F(\varphi_{i-1}) + \kappa_i F(\varphi_i)]. \quad (1)$$

Здесь  $p = d/dt$ ;  $\varphi_i(t) = \theta_i(t) - \theta_{i-1}(t)$ , где  $\theta_i(t)$  – фаза колебаний  $i$ -го генератора;  $\omega_i$  – свободная частота колебаний  $i$ -го генератора;  $K_i(p)$  – операторный коэффициент передачи фильтра;  $b_i = \Omega_i/\Omega_1$ ;  $\Omega_i$  – максимальная расстройка частот, которую способна компенсировать цепь управления ФАП $_i$ ;  $F(\varphi_i)$  – нормированная характеристика фазовых дискриминаторов;  $\kappa_i$  – параметр дополнительных связей ( $i = \overline{1, n}$ ;  $i=0=n$ ;  $i=n+1=1$ ). Конкретный вид динамических уравнений получается из уравнений (1) при определении в них коэффициентов фильтров и характеристик дискриминаторов. В случае объединения в кольцо трех идентичных систем ФАП (с одинаковыми полосами удержания  $b_1=b_2=1$  и одинаковыми фильтрами первого порядка –  $K(p) = (1 + Tp)^{-1}$ , где  $T$  – постоянные времени фильтров) с синусоидальной характеристикой фазовых дискриминаторов из (1) получаем следующую

систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\varphi_1}{d\tau} &= y_1, \\
 \varepsilon \frac{dy_1}{d\tau} &= \gamma_1 - y_1 - (1 - \kappa_1) \sin \varphi_1 - \kappa_2 \sin \varphi_2 - \sin(\varphi_1 + \varphi_2), \\
 \frac{d\varphi_2}{d\tau} &= y_2, \\
 \varepsilon \frac{dy_2}{d\tau} &= \gamma_2 - y_2 + \sin \varphi_1 - (1 - \kappa_2) \sin \varphi_2 + \kappa_3 \sin(\varphi_1 + \varphi_2),
 \end{aligned} \tag{2}$$

описывающую динамические процессы рассматриваемого ансамбля. Система (2) определена в четырехмерном цилиндрическом фазовом пространстве  $U: \{\varphi_1(\text{mod } 2\pi), y_1, \varphi_2(\text{mod } 2\pi), y_2\}$  с двумя циклическими переменными  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Здесь  $\tau = \Omega_1 t$  – безразмерное время,  $\varphi_1(\varphi_2)$  – разности фаз колебаний первого и третьего (второго и первого) генераторов,  $y_1(y_2)$  – соответствующие разности частот. В (2) все параметры безразмерные:  $\gamma_1 = (\omega_1 - \omega_3)/\Omega_1$  и  $\gamma_2 = (\omega_2 - \omega_1)/\Omega_1$  – относительные начальные частотные расстройки,  $\varepsilon = \Omega_1 T$  – инерционность фильтров,  $\kappa_{1,2,3}$  – дополнительные связи. Из модели (2) исключены уравнения, описывающие поведение фазовой переменной  $\varphi_3$ , поскольку  $\varphi_3 = -(\varphi_2 + \varphi_1)$ . Задачей исследования динамики ансамбля по модели (2) является: анализ особых траекторий модели (2), в частности, аттракторов; установление соответствия между аттракторами и динамическими режимами ансамбля; изучение бифуркаций аттракторов; выделение в пространстве параметров областей с различным динамическим поведением. Ниже представлены результаты такого исследования [15–17].

## 2. Классификация динамических режимов ансамбля

Между аттракторами модели (2) и динамическими режимами рассматриваемого ансамбля существует взаимно однозначное соответствие. Наличие у модели (2) двух циклических координат приводит к большому разнообразию допустимых режимов коллективного поведения ансамбля. Для динамических режимов ансамбля введем следующую классификацию, связав ее с типом аттрактора в фазовом пространстве математической модели (2).

- *Устойчивое состояние равновесия*  $O_1$  с координатами  $\varphi_1^*, y_1^*, \varphi_2^*, y_2^*$  обуславливает режим *синхронизации* генераторов ансамбля. В этом режиме частоты колебаний генераторов равны, рассогласования колебаний по фазе характеризуют координаты  $\varphi_1^*, \varphi_2^*, \varphi_3^* = -(\varphi_1^* + \varphi_2^*)$ . Значения  $\varphi_1^*, \varphi_2^*, \varphi_3^*$  определяют фазовые ошибки режима синхронизации.

- *Колебательный аттрактор* – аттрактор, ограниченный по фазовым координатам  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , обуславливает режим *глобальной квазисинхронизации* генераторов ансамбля. В этом режиме частоты колебаний генераторов ансамбля различаются, но равны нулю усредненные разности частот колебаний любых генераторов ( $\langle y_1 \rangle = \langle y_2 \rangle = 0, \langle y_3 \rangle = \langle y_1 \rangle + \langle y_2 \rangle = 0$ ). Колебательные аттракторы модели (2) могут быть регулярными (предельные циклы), квазирегулярными (инвариантные торы) и хаотическими. Отсюда режимы глобальной квазисинхронизации подразделя-

ются на *регулярные, квазирегулярные и хаотические режимы глобальной квазисинхронизации*.

- *Колебательно-вращательный аттрактор* – аттрактор, ограниченный по фазовой координате  $\varphi_1$  или  $\varphi_2$ , обуславливает режим *частичной квазисинхронизации* генераторов ансамбля. Этот режим характеризуется обращением в ноль усредненных разностей частот колебаний отдельных пар генераторов ( $\langle y_1 \rangle = 0, \langle y_2 \rangle = 0$ ). Также как колебательные аттракторы колебательно-вращательные аттракторы модели (2) могут быть регулярными, квазирегулярными и хаотическими. Аналогично режиму глобальной квазисинхронизации режимы частичной квазисинхронизации подразделяются на *регулярные, квазирегулярные и хаотические режимы частичной квазисинхронизации*.

- *Вращательный аттрактор* – аттрактор, неограниченный ни по координате  $\varphi_1$ , ни по координате  $\varphi_2$ , определяет асинхронный режим или *режим биений*. Вращательные аттракторы модели (2) могут быть регулярными, квазирегулярными или хаотическими, следовательно определяют *регулярные, квазирегулярные или хаотические режимы биений*.

- Особенностью рассматриваемого ансамбля является то, что разность частот  $y_3$  колебаний первого и третьего генераторов определяется равенством  $y_3 = -(y_1 + y_2)$ , из которого следует, что усредненная разность частот  $\langle y_3 \rangle = -(\langle y_1 \rangle + \langle y_2 \rangle)$  может обращаться в ноль при  $\langle y_1 \rangle \neq 0$  и  $\langle y_2 \rangle \neq 0$ , если  $\langle y_1 \rangle = -\langle y_2 \rangle$ . Вращательные аттракторы модели (2), на которых переменные  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  вращаются в среднем с одинаковой скоростью, но в разных направлениях, соответствуют режиму частичной квазисинхронизации, в частности, первого и третьего генераторов ансамбля. Установленное выше соответствие между динамическими режимами коллективного поведения ансамбля и аттракторами модели (2) позволяет перейти к анализу динамики ансамбля посредством изучения особых траекторий в фазовом пространстве  $U$  и анализу бифуркаций этих движений в зависимости от параметров модели. Далее рассматривается случай, когда дополнительные связи по цепям управления отсутствуют ( $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 0$ ).

### 3. Динамика ансамбля генераторов с малоинерционными цепями управления

Допустим, что цепи управления систем ФАП являются малоинерционными, то есть модель (2) имеет малый параметр при производных  $dy_1/dt$  и  $dy_2/dt$  ( $\varepsilon \ll 1$ ). В этом случае движения в фазовом пространстве  $U$  разделяются на «быстрые» и «медленные». Поверхность медленных движений  $V$ , определяемая уравнениями

$$Q_1(\varphi_1, \varphi_2, y_1) \equiv \gamma_1 - y_1 - \sin \varphi_1 - \sin(\varphi_1 + \varphi_2) = 0, \quad (3)$$

$$Q_2(\varphi_1, \varphi_2, y_2) \equiv \gamma_2 - y_2 + \sin \varphi_1 - \sin \varphi_2 = 0,$$

устойчива, так как

$$\frac{\partial Q_1(\varphi_1, \varphi_2, y_1)}{\partial y_1} + \frac{\partial Q_2(\varphi_1, \varphi_2, y_2)}{\partial y_2} = -2 < 0,$$

$$\frac{\partial Q_1(\varphi_1, \varphi_2, y_1)}{\partial y_1} \frac{\partial Q_2(\varphi_1, \varphi_2, y_2)}{\partial y_2} - \frac{\partial Q_1(\varphi_1, \varphi_2, y_1)}{\partial y_2} \frac{\partial Q_2(\varphi_1, \varphi_2, y_2)}{\partial y_1} = 1 > 0.$$

Поведение системы (2) в малой окрестности  $V$  описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dt} &= \gamma_1 - \sin \varphi_1 - \sin(\varphi_1 + \varphi_2), \quad (4) \\ \frac{d\varphi_2}{dt} &= \gamma_2 + \sin \varphi_1 - \sin \varphi_2, \end{aligned}$$

определенной на фазовом торе  $U_1: \{\varphi_1(\text{mod } 2\pi), \varphi_2(\text{mod } 2\pi)\}$  и зависящей от параметров  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Исследование особых траекторий проведено путем компьютерного моделирования с использованием комплекса программ ДНС [18], реализующего алгоритмы, базирующиеся на качественной теории динамических систем и теории бифуркаций.

На рис. 1 приведено разбиение плоскости параметров  $(\gamma_1, \gamma_2)$  модели (4) на области с различным динамическим поведением. Здесь пунктирной линией выделена область  $D_S$  существования состояний равновесия. Внутри этой области система (4) может иметь шесть, четыре или два состояния равновесия. Области с различным числом состояний равновесия разделены штрихпунктирными линиями. При нулевых частотных расстройках  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$  система (4) имеет шесть состояний равновесия (рис. 2, *a*):  $O_1$  – устойчивое;  $O_2, O_4, O_6$  – седловые;  $O_3, O_5$  – полностью неустойчивые. С увеличением начальных частотных расстройок число состояний равновесия в системе (4) уменьшается сначала до четырех, потом до двух. При выходе из области с шестью состояниями равновесия: через штрихпунктирную *линию 1* происходит слияние и исчезновение состояний равновесия  $O_2$  и  $O_3$ ; *линию 2* –  $O_4$  и  $O_5$ ; *линию 3* –  $O_6$  и  $O_3$ ; *линию 4* –  $O_2$  и  $O_5$ ; *линию 5* –  $O_4$  и  $O_3$ ; *линию 6* –  $O_6$  и  $O_5$ . Таким образом, внутри области  $D_S$  бифуркации состояний равновесия не затрагивают устойчивого состояния равновесия  $O_1$ , определяющего синхронный режим работы ансамбля. Область  $D_S$  является областью существования синхронного режима. Эти бифуркации перераспределяют фазовые потоки, тем самым влияют на длительность переходных процессов к режиму синхронизации.

Движения на торе, каким является фазовое пространство модели (4), принято характеризовать числом вращения  $\nu$  [19], которое для периодических траекторий либо рационально, либо равно  $\pm\infty$ , для квазипериодических траекторий число  $\nu$  иррационально. Число вращения можно представить в виде отношения двух чисел  $\nu = i/j$ , где  $i$  и  $j$  определяют число оборотов, совершаемых фазовой траекторией по переменным  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Нарастание переменных  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  характеризуют положительные значения  $i$  и  $j$ , убывание – отрицательные. Таким образом, числа вращения устойчивых предельных циклов, определяющих регулярный режим частичной квазисинхронизации, имеют следующие значения:  $\nu = 0/1, 0/-1, 1/0, -1/0, 1/-1, -1/1$ . На рис. 1 серым цветом выделены области параметров, где существуют режимы частичной квазисинхронизации. Фазовые портреты модели (4) для значений параметров из областей существования квазисинхронных режимов представлены на рис. 2, *б, в, д, е, з, и*. Система (4) инвариантна относительно преобразования  $\Pi: (\gamma_1, \gamma_2, \varphi_1, \varphi_2) \rightarrow (-\gamma_1, -\gamma_2, -\varphi_1, -\varphi_2)$ , поэтому фазовые портреты приведены лишь

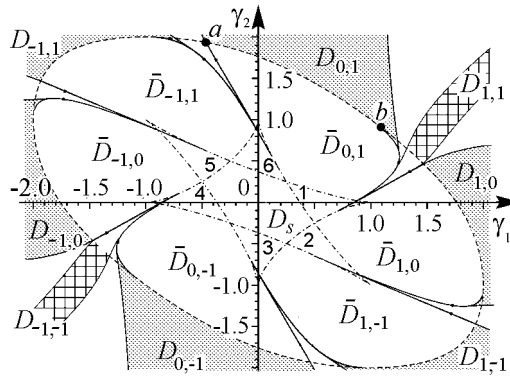


Рис. 1. Структура плоскости параметров  $(\gamma_1, \gamma_2)$  модели (4)

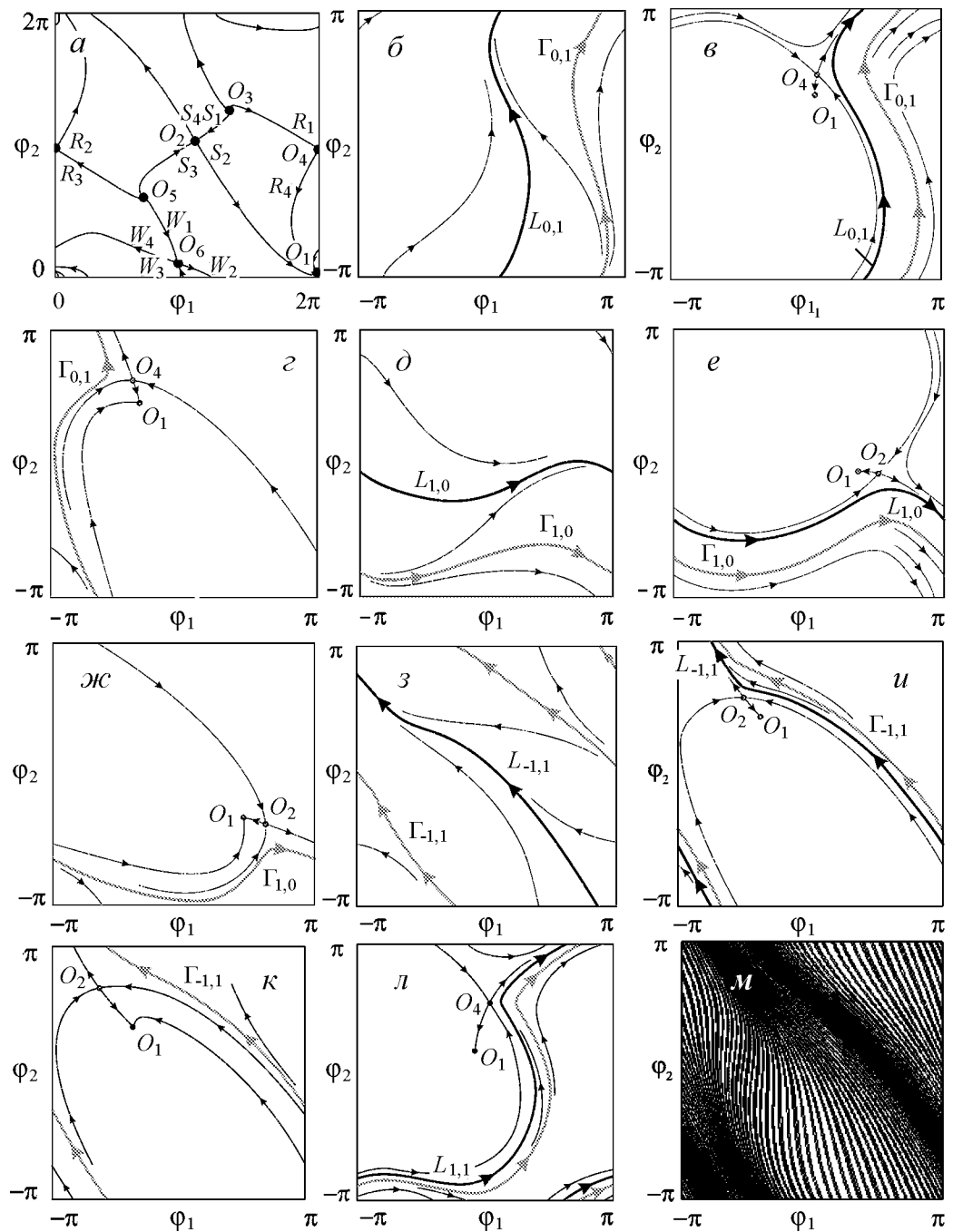


Рис. 2. Фазовые портреты модели (4) в областях  $D_Z$  (а),  $D_{0,1}$  (б,в),  $\bar{D}_{0,1}$  (г),  $D_{1,0}$  (д,е),  $\bar{D}_{1,0}$  (ж),  $D_{1,-1}$  (з,и),  $\bar{D}_{1,-1}$  (к),  $D_{1,1}$  (л), квазирегулярного режима биений (м)

для областей расположенных в области положительных значений  $\gamma_1$ . Области существования режимов частичной квазисинхронизации имеют одинаковую структуру, их границами служат бифуркационные кривые петель сепаратрис седел и седло-узлов, а также двукратных предельных циклов [20].

Рассмотрим структуру областей существования режимов частичной квазисинхронизации и трансформацию соответствующих этим областям фазовых портретов

на примере области  $D_{0,1}$  (см. рис. 1). При значениях параметров вне области  $D_S$  фазовый портрет системы (4) содержит два предельных цикла: устойчивый  $L_{0,1}$  и неустойчивый  $\Gamma_{0,1}$  (см. рис. 2, б). При выходе из области  $D_{0,1}$  через левую или правую границу предельные циклы сливаются и исчезают в результате касательной бифуркации. При выходе из области  $D_{0,1}$  через пунктирную линию, между точками  $a$  и  $b$ , в результате бифуркации петли сепаратрис седло-узла исчезает цикл  $L_{0,1}$ , неустойчивый цикл  $\Gamma_{0,1}$  сохраняется (см. рис. 2, б). Из бифуркационного анализа следует, что области квазисинхронных режимов могут проникать в область  $D_S$ , порождая тем самым области с бистабильным поведением – совместного существования синхронного и квазисинхронного режимов. Области бистабильного поведения имеют клинообразный вид, границами этих областей служат бифуркационные кривые «устойчивых» петель сепаратрис (с отрицательной седловой величиной  $\sigma < 0$ ) и двукратного предельного цикла, которые соединяются в точке, где  $\sigma = 0$ . На рис. 1 точки, где седловая величина  $\sigma$  обращается ноль, отмечены звездочкой.

На рис. 1 отмечены области  $\bar{D}_{0,1}$ ,  $\bar{D}_{0,-1}$ ,  $\bar{D}_{-1,1}$ ,  $\bar{D}_{1,-1}$ ,  $\bar{D}_{1,0}$ ,  $\bar{D}_{-1,0}$ , где в фазовом пространстве модели (4) состояния равновесия существуют совместно с неустойчивыми предельными циклами (рис. 2, г, ж, к). Отмеченные области ограничены бифуркационными кривыми «неустойчивых» ( $\sigma > 0$ ) петель сепаратрис седловых или седло-узловых состояний равновесия. Неустойчивые циклы не оказывают влияния на устойчивость системы, их роль в динамике модели (4) сводится к распределению фазовых потоков, а в ансамбле – к влиянию на процессы установления режима синхронизации. Вне областей  $D_S$ ,  $D_{0,1}$ ,  $D_{0,-1}$ ,  $D_{-1,1}$ ,  $D_{1,-1}$ ,  $D_{1,0}$ ,  $D_{-1,0}$  в фазовом пространстве модели (4) существуют периодические и квазипериодические движения, соответствующие регулярным и квазирегулярным режимам биений. На рис. 1 штриховкой выделены области  $D_{1,1}$  и  $D_{-1,-1}$  существования устойчивых вращательных предельных циклов  $L_{1,1}$  и  $L_{-1,-1}$ . На рис. 2, л приведен фазовый портрет, характерный для области  $D_{1,1}$ ; видно, что регулярные асинхронные режимы могут существовать совместно с синхронным режимом. Области асинхронных режимов узкими клиньями проникают в область  $D_S$ . Структура таких клиньев аналогична структуре областей совместного существования синхронных и квазисинхронных режимов – их границами служат бифуркационные кривые устойчивых петель сепаратрис и двойных предельных циклов, исходящих из точки, где  $\sigma = 0$ .

#### 4. Влияние параметров инерционности на динамику ансамбля

В отсутствие дополнительных связей динамика рассматриваемого ансамбля зависит от трех параметров  $\gamma_1, \gamma_2$  и  $\varepsilon$ . Зафиксируем  $\gamma_1 = 0$  и рассмотрим эволюцию аттракторов системы (4), а также областей их существования при увеличении параметра  $\varepsilon$  (рис.3). При  $\gamma_1 = 0$ ,  $\varepsilon \ll 1$  в фазовом пространстве модели (4) могут реализоваться два типа аттракторов: состояние равновесия  $O_1$  и предельный цикл  $L_{0,1}$ .

Координаты состояний равновесия модели (2) не зависят от параметра  $\varepsilon$ , поэтому число состояний равновесия и области их существования у моделей (2) и (4) совпадают (см. рис. 1). Однако область  $D_S$  существования синхронного режима при увеличении  $\varepsilon$  видоизменяется, эти изменения обусловлены сменой устойчивости

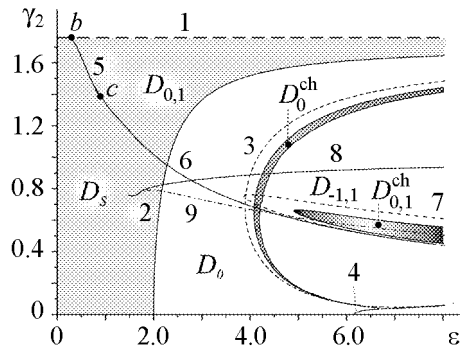


Рис. 3. Структура плоскости параметров  $(\epsilon, \gamma_2)$  модели (2) при  $\gamma_1 = 0$

Область синхронизации  $D_S$ , где состояние равновесия  $O_1$  модели (2) локально устойчиво, с одной стороны ограничена бифуркационной кривой двукратного состояния равновесия (штриховая линия 1), с другой стороны – сплошной линией 2.

При увеличении  $\epsilon$  устойчивый предельный цикл  $L_0$  трансформируется в колебательный хаотический аттрактор  $S_0$ . Хаотизация  $L_0$  может развиваться по двум сценариям. Один сценарий определяется каскадом бифуркаций удвоения периода цикла  $L_0$ , другой – разрушением двумерного инвариантного тора  $T_0$ , который появляется при смене устойчивости цикла  $L_0$  в результате бифуркации Неймарка–Саккера. На рис.3 отмечены области  $D_0$  и  $D_0^{ch}$  существования регулярного и хаотического колебательных аттракторов, пунктирная линия 3 отражает первую бифуркацию удвоения периода цикла  $L_0$ , линия 4 – бифуркацию Неймарка–Саккера. На рис. 4 приведены проекции колебательных аттракторов модели (2) при  $\gamma_1=0$ : инвариантного тора  $T_0$  (рис.4, а) и хаотических аттракторов  $S_0$  с ляпуновской размерностью  $D_L = 2.04$  (рис. 4, б),  $D_L = 3.14$  (рис. 4, в) и  $D_L = 2.33$  (рис. 4, г). Аттракторы на рис. 4, б, в являются результатом разрушения инвариантного тора; на рис. 4, г – бифуркаций удвоения периода цикла  $L_0$ . Дальнейшее увеличение  $\epsilon$  приводит к разрушению хаотического колебательного аттрактора и переходу (2) на колебательно-вращательный или вращательный аттракторы, то есть в ансамбле режим хаотической глобальной квазисинхронизации сменяется режимом частичной квазисинхронизации или режимом биений.

Колебательно-вращательные аттракторы типа  $[0,1]$  (с индексом вращения  $[0,1]$ ) [11] существуют в области  $D_{0,1}$ . Эта область ограничена бифуркационными кривыми: петли сепаратрис седло-узла – линия 1, расположенная слева от точки  $b$ ; устойчивой петли сепаратрис седла (седло-фокуса)  $O_4$  – линия 5; двукратного колебательно-вращательного предельного цикла – линия 6. При изменении параметров вдоль линии 5 седловая величина седло-фокуса  $O_4$  в точке  $C$  обращается в ноль. Согласно [21] параметрический портрет (2) содержит бесконечное число бифуркационных линий, отвечающих кратным циклам и многообходным петлям сепаратрис. Эти линии сходятся сложным образом к точке  $C$ . В численном эксперименте удалось зафиксировать несколько различных линий. Одна из обнаруженных бифуркационных кривых двукратного предельного цикла (крайняя) выбрана в качестве границы области  $D_{0,1}$  (линия 6). Часть кривой, соответствующей бифуркации петли сепаратрис

состояния равновесия  $O_1$ . Смена устойчивости  $O_1$  происходит в результате бифуркации Андронова–Хопфа на линии 2 (см. рис. 3). Первая ляпуновская величина на бифуркационной кривой отрицательна, поэтому с ростом  $\epsilon$  при пересечении линии 2 в фазовом пространстве модели (2) мягко рождается устойчивый колебательный предельный цикл  $L_0$ . В результате в ансамбле синхронный режим сменяет регулярный режим глобальной квазисинхронизации.



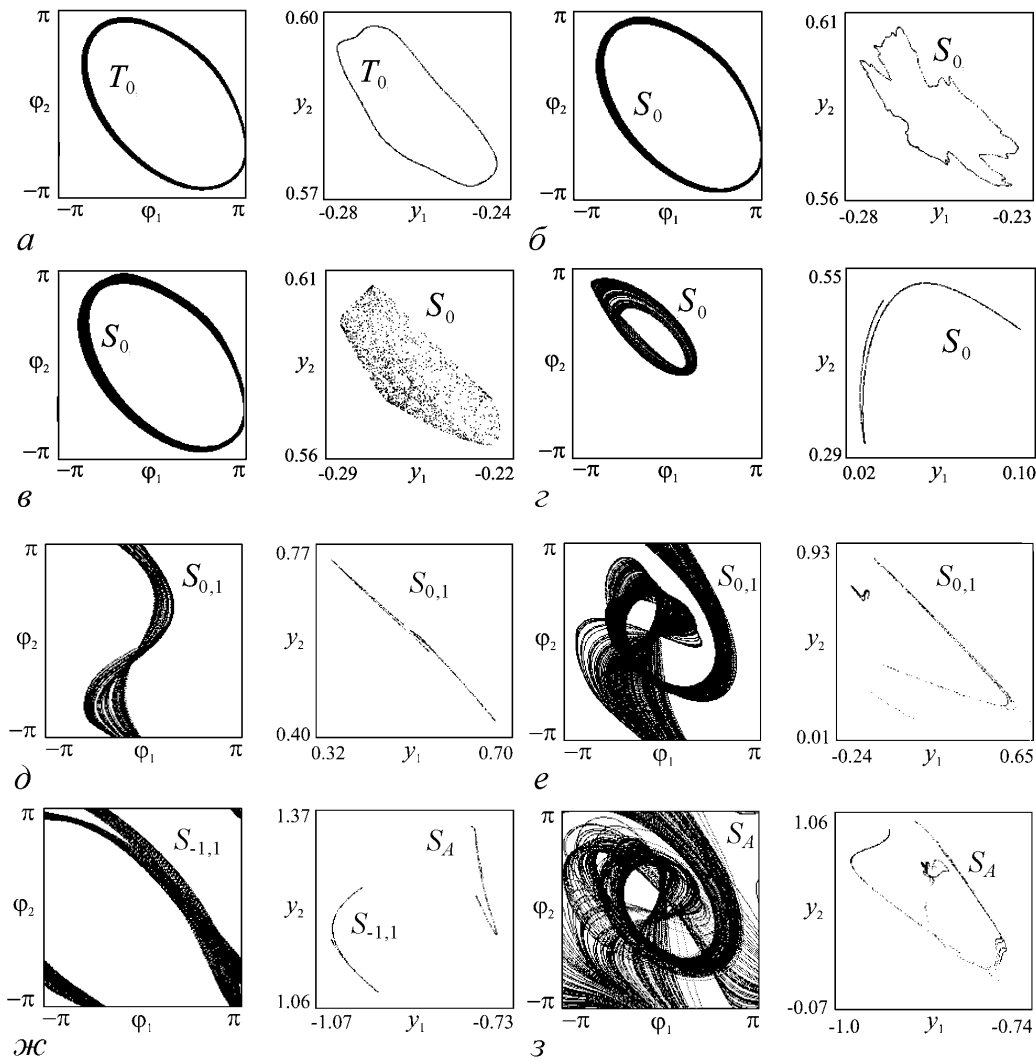


Рис. 4. Проекция фазовых портретов и отображений Пуанкаре аттракторов модели (2), соответствующие квазисинхронным режимам: глобальным квазирегулярным при  $\gamma_2 = 0.04$ ,  $\varepsilon = 0.7$  (а); глобальным хаотическим при  $\gamma_2 = 0.04$ ,  $\varepsilon = 0.704$ ,  $0.707$  (б, в);  $\gamma_2 = 0.9$ ,  $\varepsilon = 4.35$  (з); хаотическим типа  $[0,1]$  при  $\gamma_2 = 0.626$ ,  $\varepsilon = 6$ , (д) и  $\gamma_2 = 0.322$ ,  $\varepsilon = 9.15$  (е); хаотическим типа  $[-1,1]$  при  $\gamma_2 = 0.606$ ,  $\varepsilon = 4$  (жэ); хаотическому режиму биений при  $\gamma_2 = 0.2$ ,  $\varepsilon = 7.6$  (з)

седло-фокуса с положительной седловой величиной, проходит внутри области  $D_{0,1}$ . Согласно [22], в окрестности гомоклинической траектории существует нетривиальное гиперболическое множество, содержащее счетное число периодических движений. Кроме седловых движений, здесь также существуют устойчивые периодические движения, смена устойчивости которых сопровождается бифуркацией рождения периодического решения удвоенного периода. Таким образом, при значениях параметров из области  $D_{0,1}$  в фазовом пространстве могут реализоваться различные предельные циклы типа  $[0,1]$ . Эти предельные циклы в результате каскада бифуркаций удвоения периода могут трансформироваться в хаотические аттракторы  $S_{0,1}$  типа  $[0,1]$ . На рис. 4, д, е представлены проекции хаотических аттракторов типа  $[0,1]$ , сформированные на базе разнообразных предельных циклов типа  $[0,1]$ . Хаотические аттракторы  $S_{0,1}$  на рис. 4, д и рис. 4, е имеют соответственно размерности  $D_L = 2.61$  и  $D_L = 2.56$ .

В области  $D_{-1,1}$  существуют аттракторы типа  $[-1,1]$ . Сверху эту область ограничивает линия 8 – двукратного предельного цикла. При пересечении этой линии сверху вниз в фазовом пространстве  $U$  рождается устойчивый предельный цикл  $L_{-1,1}$ , который при уменьшении  $\gamma_2$  через серию бифуркаций удвоения периода трансформируется в хаотический аттрактор  $S_{-1,1}$  (рис. 4, ж). При дальнейшем уменьшении  $\gamma_2$  хаотический аттрактор разрушается и система (2) в зависимости от параметров переходит либо на режимы, описанные выше, либо на режимы биений. На рис. 3 штрих-пунктирная линия 9 отвечает за первую бифуркацию удвоения периода цикла  $L_{-1,1}$ . Области существования циклов  $L_{-1,1}^{(2)}$  удвоенного,  $L_{-1,1}^{(4)}$  учетверенного и периодов большей кратности, также как и хаотического аттрактора  $S_{-1,1}$ , в рассматриваемом случае малы, поэтому они на рис. 3 не выделены. Рис. 5 дает представление о структуре пространства параметров модели (2) в сечении плоскостью  $(\gamma_1, \gamma_2)$ . При рассмотренном значении  $\varepsilon = 4.3$  динамика ансамбля характеризуется высокой степенью мультистабильности, поэтому разбиение плоскости  $(\gamma_1, \gamma_2)$  представлено в виде двух отдельных картин: для синхронного режима и режимов глобальной квазисинхронизации (рис. 5, а), и для режимов частичной квазисинхронизации и режимов биений (рис. 5, б). Объединение рисунков определяет структуру пространства параметров ансамбля из трех фазовых систем с инерционными цепями управления. Обозначения областей и кривых на рис. 5 аналогичны обозначениями, принятым на рис. 3. Отметим некоторые особенности динамики ансамбля, обусловленные инерционностью цепей управления систем ФАП (параметр  $\varepsilon$ ).

Увеличение инерционности приводит к смене устойчивости синхронного режима и возникновению режима регулярной глобальной квазисинхронизации. Область существования режима глобальной квазисинхронизации на плоскости начальных частотных расстройк зарождается в точке нулевых частотных расстроек и далее распространяется к границам области существования состояний равновесия, повторяя ее форму (см. рис. 5, а). В результате область  $D_S$  существования синхронного режима приобретает форму кольца, которое сужается с ростом  $\varepsilon$ .

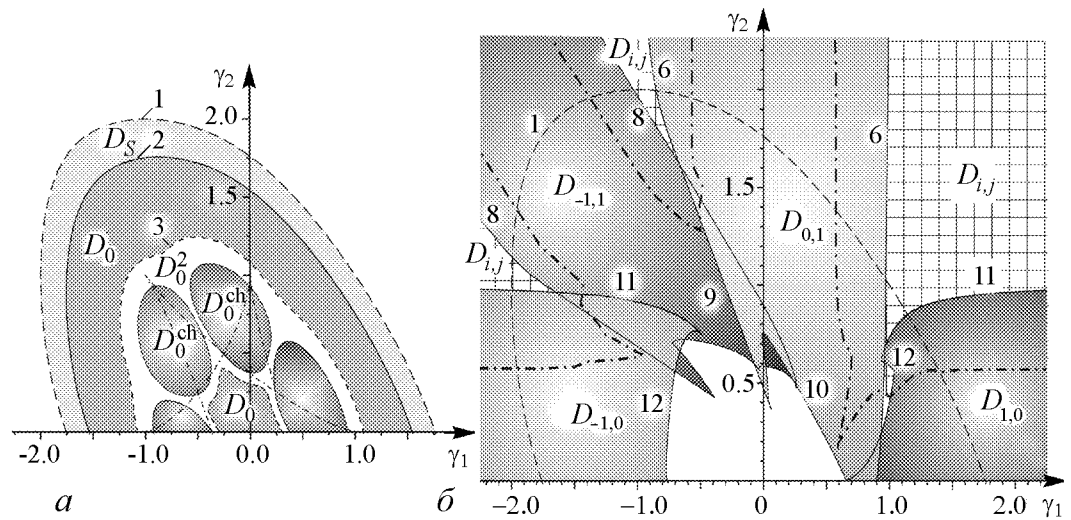


Рис. 5. Структура плоскости параметров  $(\gamma_1, \gamma_2)$  модели (2) при  $\varepsilon = 4.3$ : области существования синхронного режима и режимов глобальной квазисинхронизации (а); области существования режимов частичной квазисинхронизации и режимов биений (б)

Режим регулярной глобальной квазисинхронизации с ростом  $\varepsilon$  теряет устойчивость в результате бифуркации удвоения периода. Каскад бифуркаций удвоения периода приводит к возникновению режима хаотической глобальной квазисинхронизации. Область существования режима хаотической глобальной квазисинхронизации на плоскости  $(\gamma_1, \gamma_2)$  сначала имеет форму кольца, которое при увеличении  $\varepsilon$  преобразуется в шесть изолированных областей  $D_0^{ch}$  (см. рис. 5, а). Здесь  $D_0$  есть области существования режима регулярной глобальной квазисинхронизации.

Изменения областей  $D_{0,1}, D_{0,-1}, D_{-1,1}, D_{1,-1}, D_{1,0}$  и  $D_{-1,0}$  частичной регулярной квазисинхронизации с ростом  $\varepsilon$  аналогичны. Во-первых, они увеличиваются в размере; во-вторых, все больше проникают в область существования состояний равновесия; наконец, области существования квазисинхронных режимов различных типов, а также асинхронных режимов начинают пересекаться, порождая высокую степень мультистабильности. Следует обратить внимание еще на один факт, который усложняет коллективную динамику ансамбля. Ранее, при  $\varepsilon \ll 1$ , области  $\bar{D}_{0,1}, \bar{D}_{0,-1}, \bar{D}_{-1,1}, \bar{D}_{1,-1}, \bar{D}_{1,0}$  и  $\bar{D}_{-1,0}$  отвечали за существование неустойчивых циклов  $\Gamma_{0,1}, \Gamma_{0,-1}, \Gamma_{-1,1}, \Gamma_{1,-1}, \Gamma_{1,0}$  и  $\Gamma_{-1,0}$ , соответственно. Эти области были ограничены бифуркационными кривыми петель сепаратрис седел (седло-узлов) с положительной седловой величиной. Выход из этих областей не приводил к возникновению новых аттракторов, а лишь обуславливал перераспределение фазовых потоков и изменения в переходных процессах к режиму синхронизации. Увеличение  $\varepsilon$  превращает седла в седло-фокусы, что, согласно [23], влечет за собой появление в пространстве параметров новых бифуркационных кривых, а в фазовом пространстве – сложной динамики, вплоть до хаотической. При  $\varepsilon$  не малых границы областей существования квазисинхронных режимов имеют сложную структуру, обусловленную большим количеством аттракторов одного типа (с одинаковым индексом вращения). На рис. 5, б такими границами являются *линии 9, 10, 12*. Эти линии не связаны с какой-либо бифуркацией аттрактора системы (2), а являются интегральной оценкой области существования колебательно-вращательных аттракторов, либо вращательных аттракторов типа  $[1,-1]$  или  $[-1,1]$ .

Области существования режимов биений  $D_{i,j}$  с ростом  $\varepsilon$  расширяются, пересекаются между собой и все глубже проникают в области существования квазисинхронных и синхронных режимов. На рис. 5, б границы областей существования режимов биений проведены штрих-пунктирными линиями, а сами области отмечены штриховкой. Эволюция областей существования предельных циклов  $L_{i,j}$  аналогична трансформациям областей существования периодических движений, определяющих режимы частичной квазисинхронизации.

### Заключение

Рассмотрена динамика кольцевого соединения трех фазовых систем. Установлено соответствие между режимами коллективного поведения ансамбля и аттракторами динамической модели. В пространстве параметров выделены области с различным динамическим поведением. Изучены бифуркационные механизмы возникновения режимов глобальной и частичной квазисинхронизации, сценарии хаотизации

регулярных колебаний. Показано, что рассматриваемый ансамбль обладает высокой степенью мультистабильности и демонстрирует гистерезисные явления при вариациях параметров.

Заметим, что рассмотренное кольцо из трех фазоуправляемых генераторов с фильтрами первого порядка без дополнительных связей, в рамках введенной классификации динамических режимов, демонстрирует все возможные типы режимов: синхронные, регулярные и хаотические режимы глобальной и частичной квазисинхронизации, регулярные и хаотические режимы биений. Следовательно, введение дополнительных связей, а также увеличение числа элементов ансамбля не будет характеризоваться появлением новых режимов.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 10-02-00865, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (контракты № П2308, № 02.740.11.0565, № 02.740.11.0075).*

### **Библиографический список**

1. Барбашин Е.А., Табуева В.А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969.
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.
3. Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А. Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972.
4. Линдсей В. Системы синхронизации в связи и управлении / Пер. с англ. под ред. Ю.Н. Бакаева и М.В. Капранова. М.: Сов. радио, 1978.
5. Бароне А., Патерно Дж. Эффект Джозефсона: Физика применения / Пер. с англ. М.: Мир, 1984.
6. Лихарев К.К. Введение в динамику джозефсоновских переходов. М.: Наука, 1985.
7. Пиковский А., Роземблум М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
8. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Стрелкова Г.И. Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008.
9. Кузнецов А.П., Емельянова Ю.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В. Синхронизация в задачах. Саратов: ООО Изд. центр «Наука», 2010.
10. Афраймович В.С., Некоркин В.И., Осипов Г.В., Шалфеев В.Д. Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации. Горький: Изд-во ИПФАН, 1989.
11. Матросов В.В., Касаткин Д.В. Динамические режимы связанных генераторов с фазовым управлением // Радиотехника и электроника. 2003. Т. 48, № 6. С. 637.
12. Крюков А.К., Осипов Г.В., Половинкин А.В. Мультистабильность синхронных режимов в ансамблях идентичных осцилляторов: два элемента // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 2. С. 16.

13. *Матросов В.В., Шмелев А.В.* Нелинейная динамика ансамбля из двух фазоуправляемых генераторов с кольцевым типом объединения // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 4. С. 67.
14. *Матросов В.В., Шмелев А.В.* Особенности динамики кольцевого соединения двух фазовых систем, синхронизованных в противофазе // Вестник ННГУ. 2011. № 1. С.12
15. *Шмелев А.В., Матросов В.В.* Синхронные и квазисинхронные режимы кольцевого соединения трех фазовых систем // Тезисы докладов конференции молодых ученых. Фундаментальные и прикладные задачи нелинейной физики. XV Научная школа «Нелинейные волны – 2010». Н.Новгород, 2010. С. 134.
16. *Шмелев А.В., Матросов В.В.* Бифуркационный анализ динамики трех фазовых систем, объединенных в кольцо // Труды 14-й Научной конференции по радиоп физике, посвященная 80-й годовщине со Дня рождения Ю.Н. Бабанова / Ред. С.М. Грач, А.В. Якимов. Н. Новгород: ННГУ, 2010. С.123.
17. *Шмелев А.В.* Моделирование динамики фазовых систем в пакете ADS // Материалы 9-й Международной школы «Хаотические автоколебания и образование структур», 4–9 октября 2010. Саратов, Россия. С. 72.
18. *Матросов В.В.* Динамика нелинейных систем. Программный комплекс для исследования нелинейных динамических систем с непрерывным временем. Н. Новгород: ННГУ, 2002.
19. *Аносов Д.В., Арансон С.Х., Бронштейн И.У., Гринес В.В.* Гладкие динамические системы. II. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.1. Итоги науки и техники. ВИНТИ АН СССР. М., 1985.
20. *Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.* Тория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967.
21. *Беляков Л.А.* О структуре бифуркационных множеств в системах с петлей сепаратрисы седло-фокуса // Тез. докл. IX Международной конференции по нелинейным колебаниям. Киев, 1981. С. 57.
22. *Шильников Л.П.* Теория бифуркаций и модель Лоренца // Марсден Дж., МакКракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. С. 317.
23. *Беляков Л.А.* О бифуркационном множестве в системе с гомоклинической кривой седла // Матем. заметки. 1980. Т. 28, № 6. С. 911.

*Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского*

*Поступила в редакцию  
После доработки*

*17.12.2010  
9.02.2011*

## NONLINEAR DYNAMICS OF A RING OF THREE PHASE SYSTEMS

*V.V. Matrosov, A.V. Shmelev*

Nonlinear dynamics of the ensemble consisting of three phase-locked generators, which are coupled in a ring, is discovered. By force of computational modeling, which is based on the theory of oscillations, the regimes of the generators collective behavior is

examined; the districts of synchronous and quasi-synchronous regimes are distinguished in the parameter space; the restructuring of the dynamics behavior on the boards of the distinguished districts is analyzed.

*Keyword:* Ensemble of oscillators, phase systems, dynamic regimes, synchronization, quasi-synchronization, beats, attractors, bifurcations.



*Матросов Валерий Владимирович* – родился в 1960 году, окончил Горьковский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (1982) по специальности «прикладная математика». Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1994), доктора физико-математических наук (2007). С 1999 года работает на радиофизическом факультете ННГУ, в настоящее время профессор кафедры теории колебаний и автоматического регулирования. Область научных интересов – динамика нелинейных систем, динамический хаос, синхронизация и управление хаосом, математическое моделирование. Имеет более 100 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях, является соавтором двух монографий и трех учебных пособий.

603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
E-mail: matrosov@rf.unn.ru



*Шмелев Алексей Вячеславович* – родился в 1986 году, окончил Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (2008). Аспирант кафедры теории колебаний и автоматического регулирования радиофизического факультета ННГУ. Область научных интересов – кольцевые ансамбли систем фазовой автоподстройки частоты, моделирование динамики нелинейных систем. Имеет 9 публикаций.

603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
E-mail: bzzz2004@bk.ru