

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В ГЕНЕРАТОРЕ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ ОТРАЖЕНИЕМ ОТ НАГРУЗКИ

II. Численное исследование*

Ю.В. Новожилова, А.С. Сергеев, С.А. Усачева

Для генератора с малым запаздывающим отражением от нагрузки устойчивость одночастотных колебаний (продольных мод) исследована численно на основе решения характеристического уравнения. При произвольном превышении над порогом генерации в пространстве параметров системы найдены области устойчивости и неустойчивости мод относительно параметрического распада первичной моды на боковые сателлиты, симметрично отстоящие по частоте от частоты первичной моды. Полученные результаты, с одной стороны, совпадают с теоретическими выводами в тех областях параметров, где характеристическое уравнение можно решить аналитически; с другой стороны, хорошо согласуются с результатами численного моделирования процессов перехода между различными модами.

Ключевые слова: Работа генератора на нагрузку, запаздывающее отражение, устойчивость одночастотных решений.

Введение

Исследуем устойчивость одночастотных колебаний (продольных мод)** в генераторе с малым отражением от удаленной нагрузки (см. [1, рис. 1]). Предполагаем, что добротность резонансного контура генератора достаточно велика, а стартовый инкремент мал по сравнению с собственной частотой резонансного контура генератора. При этом одночастотные колебания близки к синусоидальным, а высшими гармониками можно пренебречь, так как они не попадают в полосу контура. Как показано в [1], продольных мод в системе может быть несколько. Их частоты ω_c и фазы запаздывания $\vartheta_c = \omega_c l/c$ определяются уравнением

$$2\vartheta_c = 2\vartheta_0 - r\vartheta_0 \sin(2\vartheta_c). \quad (1)$$

*Статья написана по материалам доклада на IX Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, Россия, 4–9 октября, 2010.

**Эти продольные моды соответствуют одночастотным колебаниям нелинейной системы и, в отличие от мод линейной консервативной системы, не обладают свойствами полноты и ортогональности.

Здесь $r = \delta\eta$ – параметр, пропорциональный коэффициенту отражения $\delta/2$, предполагается $|\delta| \ll 1$, $\eta = 1/Q$ (Q – добротность резонансного контура автогенератора); $\vartheta_0 = \omega_0 l/c$ – фаза запаздывания на собственной частоте контура ω_0 , l – длина линии задержки. Решение уравнения (1) удобно проиллюстрировать графически (см. [1, рис. 2]).

Если на частоте ω_+ возникает возмущение одночастотного состояния, то из-за квадратичной нелинейности активной среды появляется возмущение на симметричной частоте ω_- :

$$2\omega_c = \omega_+ + \omega_-^* \quad (2)$$

Выражение (2) позволяет интерпретировать рост возмущений как параметрический процесс распада двух квантов исходной сильной моды, играющей роль накачки, на кванты боковых сателлитов. Отстройка частоты сателлита от частоты стационарного состояния $\Omega = (\omega_+ - \omega_c)/\omega_0$ может быть найдена из характеристического уравнения

$$\Omega^2 - i\Omega w - i\chi\Omega \cos(2\vartheta_c) - w\chi \cos(2\vartheta_c)/2 - \chi^2/4 = 0, \quad (3)$$

где $\chi = r(1 - e^{-2i\Omega\vartheta_0})$, $w = \mu - \eta + r \cos(2\vartheta_c)$, μ – величина, пропорциональная плотности активной среды, при этом $(\mu - \eta)/\eta = (I - I_{st})/I_{st}$ – относительное превышение тока над стартовым значением. Решение уравнения (3) определяется тремя параметрами: отношением коэффициента отражения ($\delta/2$) к добротности контура $r = \delta/Q = \eta\delta$; фазой запаздывания ϑ_0 на собственной частоте колебательного контура, эта фаза пропорциональна длине линии задержки l ; величиной w , пропорциональной квадрату амплитуды колебаний (см. [1]).

Уравнения (2), (3) допускают случай, когда действительные части частот возмущений совпадают с частотой исходной моды: $\text{Re}\Omega = \omega_c$. Назовем такие возмущения «собственными». Устойчивость мод относительно собственных возмущений исследована аналитически в [1]. Показано, что если мода единственная, то она устойчива. Если мод несколько, то моды, для которых $r \cos 2\vartheta_c > 0$ – устойчивы, моды, для которых $r \cos 2\vartheta_c < 0$ – неустойчивы.

Распад исходной моды на боковые сателлиты ($\text{Re}\Omega \neq \omega_c$) при выполнении условия

$$w \gg |r|, \quad (4)$$

означающего, что относительное превышение тока над стартовым $(I - I_{st})/I_{st}$ существенно больше коэффициента отражения $\delta/2$, также исследован аналитически в [1]. Показано, что неустойчивыми относительно распада на сателлиты могут быть только те моды, частоты которых находятся на краю частотного набора всех мод, при этом число мод должно быть велико.

1. Построение границ областей устойчивости продольных мод относительно распада на сателлиты

При произвольном превышении тока над пороговым значением уравнение (3) решалось численно. Для определенности предполагалось $r > 0$. При изменении знака r все рассуждения сохранятся, если фаза запаздывания $2\vartheta_0$ изменится на π .

Если продольная мода единственная (при малых значениях произведения $|r|\vartheta_0 < 1$ [1]), то, как показывают результаты аналитического [1] и численного решения характеристического уравнения (3), она устойчива. Фазы запаздывания на частоте этой моды и на собственной частоте колебательного контура лежат в одном и том же интервале. Для определенности предположим, что это интервал $\{(2n-1)\pi; 2n\pi\}$ (если это соседний интервал: $\{2n\pi; (2n+1)\pi\}$, то можно провести аналогичное рассмотрение). С ростом коэффициента отражения при $|r|\vartheta_0 \geq 1$ появляются новые продольные моды, у которых фазы запаздывания лежат в других интервалах: $2\vartheta_{c\text{new}} < (2n-1)\pi$ или $2\vartheta_{c\text{new}} > 2n\pi$ (см. [1, рис. 2]). Относительно распада на сателлиты новые моды могут оказаться неустойчивыми, но «исходная» мода (с фазой, лежащей в интервале $(2n-1)\pi \leq 2\vartheta_{c\text{orig}} \leq 2n\pi$) останется устойчивой.

Для того чтобы в рассматриваемом интервале фаз запаздывания $(2n-1)\pi \leq 2\vartheta_c \leq 2n\pi$ могли возникнуть моды, неустойчивые относительно распада на сателлиты, фаза запаздывания на собственной частоте колебательного контура должна быть меньше нижней границы этого интервала: $2\vartheta_0 < (2n-1)\pi$. Тогда при некотором значении $|r|\vartheta_0 > 1$ в интервале $(2n-1)\pi \leq 2\vartheta_c \leq 2n\pi$ появляется вырожденная мода. Дальнейшее возрастание $|r|\vartheta_0$ приводит к распаду этой вырожденной моды на две моды, подобные модам В и С на рис. 2, б в [1]. Вырожденная мода и две возникшие из нее моды могут оказаться неустойчивыми к росту сателлитов.

На рис. 1 при достаточно большой надпороговости $w \gg |r|$ построен фрагмент сечения границы неустойчивости плоскостью $\vartheta_0 = \text{const}$ для вырожденной моды и двух возникших из нее мод. Этот фрагмент соответствует случаю, исследованному аналитически в [1, п. 6], и иллюстрирует совпадение численных и аналитических результатов. При некотором значении параметра $r = \hat{r}$ появляется новая вырожденная мода, нейтральная относительно «собственной» неустойчивости.

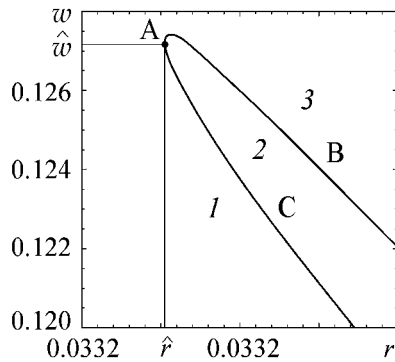


Рис. 1. Границы областей устойчивости относительно распада на сателлиты при $2\vartheta_0 = 318.2\pi$ для мод, фазы запаздывания которых лежат в интервале $323\pi < 2\vartheta_c < 324\pi$. Эти моды обозначены А, В, С, подобно модам в [1, на рис. 2, б]. При $r < \hat{r}$ продольных мод с фазами запаздывания $323\pi < 2\vartheta_c < 324\pi$ нет. Вырожденная мода А появляется при $r = \hat{r}$. При $w = \hat{w}$ она нейтральна; при $w > \hat{w}$ – устойчива, при $w < \hat{w}$ – неустойчива. При $r > \hat{r}$ (в областях 1, 2, 3) существуют две моды: В и С. В области 1 моды В и С неустойчивы; в области 2 мода В неустойчива, мода С устойчива; в области 3 обе моды устойчивы

При $w = \hat{w}$ у этой моды возникают две пары вырожденных сателлитов на действительной частоте, то есть мода нейтральна и относительно сателлитной неустойчивости. Если $w > \hat{w}$, сателлиты этой моды затухают, если $w < \hat{w}$, сателлиты нарастают – мода неустойчива. При возрастании коэффициента отражения в случае, когда длина линии и превышение над порогом не меняются ($\mu, \eta, \vartheta_0 = \text{const}$), вырожденная нейтральная мода распадается на две моды, а на плоскости $w(r)$ происходит смещение из точки $r = \hat{r}, w = \hat{w}$ либо в области 2, 3 – для высокочастотной моды С (в этих областях мода С устойчива относительно распада на сателлиты), либо в области 1, 2 для низкочастотной моды В (в этих областях мода В неустойчива относительно распада на сателлиты). Относительно роста «собственных» возмущений мода В неустойчива, мода С устойчива во всех областях [1, п. 5].

При произвольном соотношении параметров w , $|r|$ сечения границ областей устойчивости плоскостями $\vartheta_0 = \text{const}$ и $r = \text{const}$ показаны на рис. 2 и рис. 3. Рис. 2 и кривые в левой части рис. 3 построены для мод с такими же фазами запаздывания $(2n - 1)\pi \leq 2\vartheta_c \leq 2n\pi$, как и для которых построен рис. 1. В правой части рис. 3 показаны сечения границ областей устойчивости для мод, фазы которых лежат в соседнем интервале $(2n - 2)\pi \leq 2\vartheta_c \leq (2n - 1)\pi$. В областях, где величина w выше граничных значений $w > w_{\text{bound}}$ для какой-либо моды, соответствующая мода устойчива, в областях $w < w_{\text{bound}}$ – неустойчива. Так как коэффициент отражения мал, то и параметр r мал (см. обозначения после (1)). Расчеты проводились для $r \leq 0.034$. При достаточно большой надпороговости $w \gg r$ численные результаты совпадают с аналитическими: рис. 1 является фрагментом рис. 2. При тех значениях r , ϑ_0 , для которых построены границы на рис. 1, исследуемые моды являются крайними по частоте в частотном наборе всех мод. Если при этих значениях r увеличивается длина линии (фаза ϑ_0), то моды $(2n - 1)\pi \leq 2\vartheta_c \leq 2n\pi$ перестают быть крайними по частоте: частоты этих мод сверху приближаются к единице (см. (1)). При этом граница устойчивости сдвигается в область $w \sim r$ (см. рис. 2, 3). Неустойчивость исследуемых мод возможна до тех пор, пока $2\vartheta_0 \leq (2n - 1)\pi$. Нижние части кривых на рис. 2 и в левой части рис. 3 соответствуют более высокочастотным модам типа С, верхние – низкочастотным модам типа В (см. рис. 1 и [1, рис. 2, б]).

При дальнейшем росте длины $2\vartheta_0 > (2n - 1)\pi$, как отмечалось выше, рассматриваемые продольные моды с фазами запаздывания $(2n - 1)\pi \leq 2\vartheta_c < 2n\pi$ становятся устойчивыми,

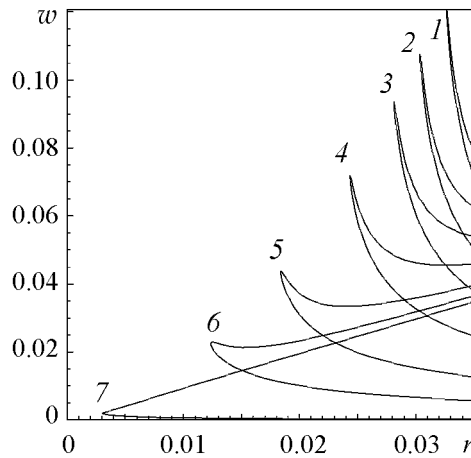


Рис. 2. Сечения границ областей устойчивости плоскостями $\vartheta_0 = \text{const}$ для мод, фазы запаздывания которых лежат в интервале $323\pi \leq 2\vartheta_c \leq 324\pi$. Нижние части кривых соответствуют более высокочастотной моде типа С, верхние части – более низкочастотной моде типа В. $2\vartheta_0 = 318.3\pi$ (1); 318.6π (2); 319π (3); 319.6π (4); 320.54π (5); 321.49π (6); 322.95π (7)

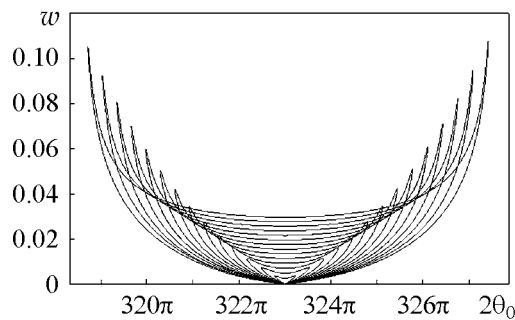


Рис. 3. Сечения границ областей устойчивости плоскостями $r = \text{const}$. Левые части кривых соответствуют модам $323\pi \leq 2\vartheta_c \leq 324\pi$, правые части – модам $322\pi \leq 2\vartheta_c \leq 323\pi$. В левой части нижние кривые соответствуют более высокочастотной моде типа С, верхние – более низкочастотной моде типа В (см. рис. 1 и [1, рис. 2, б]). И наоборот: в правой части рисунка нижние кривые соответствуют более низкочастотной моде типа С', верхние – более высокочастотной моде типа В' (см. [1, рис. 4]). Значение параметра r , соответствующее разным кривым, меняется от 0.002 (для кривой с минимальным разбросом значений ϑ_0) до 0.0028 (для кривой с максимальным разбросом значений ϑ_0) с шагом 0.002

а неустойчивыми могут быть моды с фазами запаздывания в интервале $(2n - 2)\pi < 2\vartheta_c \leq (2n - 1)\pi$, расположенные в нижней части синусоиды (1) (подобно модам B' , C' в [1, рис. 4]). Для этих мод сечения границ областей устойчивости плоскостями $r = \text{const}$ (правые части кривых на рис. 3) выглядят почти симметричными относительно прямой $2\vartheta_0 = (2n - 1)\pi$, однако точной симметрии нет. Отсутствие симметрии объясняется тем, что при изменении ϑ_0 и неизменном r меняется произведение $|r|\vartheta_0$ (хотя и незначительно, поскольку ϑ_0 велико), а это произведение определяет фазу запаздывания (см. (1)). Верхние кривые на рис. 3 построены для моды, обозначенной цифрой «1» на рис. П1, б (Приложение 1). Заметим, что для нижних кривых на рис. 3 при $2\vartheta_0 = (2n - 1)\pi$ находится излом. Это связано с тем, что левая и правая части нижних кривых построены для разных продольных мод. Нижние кривые в левой части рис. 3 (при $2\vartheta_0 < (2n - 1)\pi$) построены для моды, обозначенной цифрой «2» на рис. П1, б, а в правой части рис. 3 (при $2\vartheta_0 > (2n - 1)\pi$) – для моды «3» на рис. П1, б. Действительно, если фаза запаздывания на собственной частоте контура начинает превышать $2\vartheta_0 = (2n - 1)\pi$, то центральная мода «1» (см. рис. П1, б) смещается в область меньших фаз запаздывания: $2\vartheta_{c1} < (2n - 1)\pi$, то есть в правую часть рис. 3. При этом соседняя продольная мода «2» (рис. П1, б) с фазой запаздывания $2\vartheta_{c2} > (2n - 1)\pi$ становится устойчивой, так как при $2\vartheta_0 = (2n - 1)\pi$ для нее $w_{\text{bound}} = 0$ (см. Приложение 1), а неустойчивой может быть мода «3».

На рис. 4 показаны границы областей устойчивости относительно роста сателлитов в пространстве параметров $(r, 2\vartheta_0, w)$ для тех же двух продольных мод, для которых построены проекции на рис. 1, 2 и в левой части рис. 3. Фазы запаздывания этих мод лежат в интервале $323\pi \leq 2\vartheta_c \leq 324\pi$. Граничные поверхности

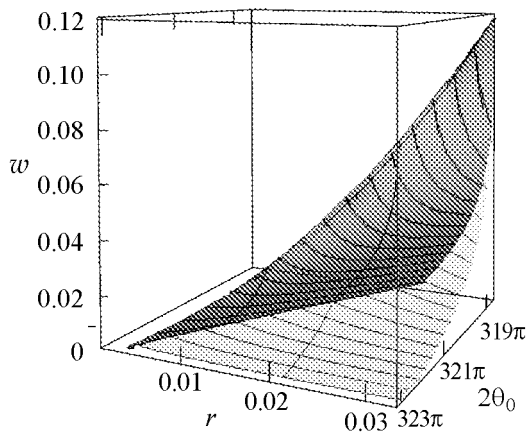


Рис. 4. Двухлистная поверхность – граница областей устойчивости относительно роста сателлитов в пространстве параметров r, ϑ_0, w при $2\vartheta_0 < 323\pi$ для мод, фаза запаздывания которых находится в интервале $323\pi \leq 2\vartheta_c < 324\pi$. Верхний лист поверхности соответствует более низкочастотной моде В, нижний – моде С (см. рис. 1 и [1, рис. 2, б]). Появлению вырожденной моды А соответствует сгиб поверхности. Между листами поверхности мода В неустойчива, мода С устойчива. Сверху над обоими листами поверхности (при $w > w_{\text{bound}}$) обе моды устойчивы, снизу под обоими листами (при $w < w_{\text{bound}}$) – обе неустойчивы

расположены в области $|r|\vartheta_0 \geq 1$, при этом исследуемые моды – не единственные в системе. При $|r|\vartheta_0 < 1$ граничных поверхностей нет, так как в исследуемом интервале существует только одна мода, и она устойчива. Общая линия поверхностей (сгиб) на рис. 4 соответствует появлению вырожденной моды (см. также рис. 1–3). Проекция сгиба на любую из плоскостей $w = \text{const}$ – кривая $r(\vartheta_0)$. Вблизи точки $r = 1/323\pi, \vartheta_0 = 323\pi, w = 0$, из которой расходятся листы поверхности, производная $r'(\vartheta_0)$ равна бесконечности (Приложение 2). При возрастании $|r|\vartheta_0$ вырожденная мода распадается на две моды, подобные модам В и С на рис. 1 или в [1 на рис. 2, б]. Моде В соответствует верхняя поверхность, моде С – нижняя. Над каждой поверхностью при $w > w_{\text{bound}}$ находится область устойчивости соответствующей моды, при $w < w_{\text{bound}}$ – область неустойчивости. Края поверхностей лежат в плоскости $2\vartheta_0 = 323\pi$.

Для продольных мод, фазы запаздывания которых лежат в интервале $322\pi \leq 2\vartheta_c < 323\pi$, двулистные поверхности должны быть почти симметричны изображенным на рис. 4. Эти близкие к симметричным поверхности показаны на рис. 5, а сечения их плоскостями $r = \text{const}$ – в правой части рис. 3.

Для продольных мод, фазы запаздывания которых лежат в других интервалах, граничные поверхности подобны изображенным на рис. 4, 5, но расходятся они из других точек, с координатами $2\vartheta_0 = (2n - 1)\pi$, $r = 2/((2n - 1)\pi)$, $w = 0$. Сечения нескольких таких поверхностей плоскостью $r = \text{const}$ показаны на рис. 6. При $r < 0$ граничные поверхности представляют собой аналогичный набор двулистных поверхностей, расходящихся с ростом $|r|$ из точек с координатами $2\vartheta_0 = 2\pi n$, $r = 1/(\pi n)$, $w = 0$.

На всех рассмотренных рисунках (рис. 1–6) найдены границы областей устойчивости продольных мод относительно роста сателлитов, ближайших по частоте к частоте исходной моды. Для более дальних сателлитов границы устойчивости расположены при меньших значениях w . Эти границы представляют собой двулистные поверхности, расходящиеся из тех же точек с координатами $2\vartheta_0 = (2n - 1)\pi$, $r = 2/((2n - 1)\pi)$, $w = 0$, как и поверхности на рис. 4, 5, но расположены они ниже показанных на этих рисунках поверхностей.

Рассмотрим форму краев поверхности, изображенной на рис. 4. Верхний край соответствует центральной моде «1» на рис. П1, б, нижний край – моде «2» на том же рисунке. Края находятся в плоскости $2\vartheta_0 = 323\pi$. При этом на удвоенной длине линии укладывается целое число полувольт на собственной частоте колебательного контура генератора $2\vartheta_0 = \pi n$, частоты продольных мод симметричны относительно частоты

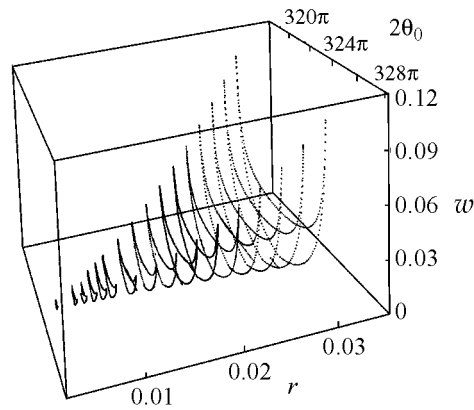


Рис. 5. Точки на двулистной поверхности соответствуют границе областей устойчивости относительно роста сателлитов в пространстве параметров r , ϑ_0 , w для мод, фазы запаздывания которых находятся в интервале $322\pi \leq 2\vartheta_c < 324\pi$. Верхний лист поверхности при $2\vartheta_0 \leq 323\pi$ соответствует моде В, нижний – моде С (см. [1, рис. 1, рис. 2, б]); при $2\vartheta_0 \geq 323\pi$ верхний лист соответствует моде В', нижний – моде С' (см. [1, рис. 4]). Появлению вырожденных мод соответствуют сгибы поверхности. Между листами поверхности мода, которой соответствует верхний лист, неустойчива, мода, которой соответствует нижний лист, устойчива. Сверху над обоими листами поверхности обе моды устойчивы, снизу под обоими листами – обе неустойчивы

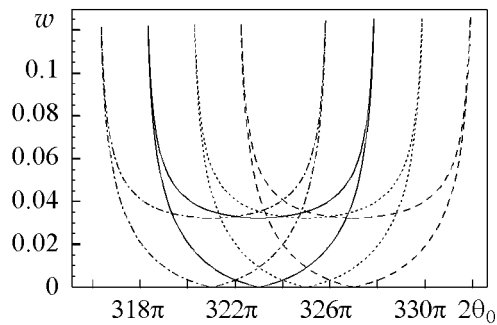


Рис. 6. Сечения границ областей устойчивости плоскостью $r = 0.03255$ для широкого набора продольных мод. Для штрихпунктирной линии левые части кривых соответствуют модам $321\pi \leq 2\vartheta_c \leq 322\pi$, правые – модам $320\pi \leq 2\vartheta_c \leq 321\pi$; для сплошной линии левые части – модам $323\pi \leq 2\vartheta_c \leq 324\pi$, правые части – модам $322\pi \leq 2\vartheta_c \leq 323\pi$; для линии, показанной точками, левые части соответствуют модам $325\pi \leq 2\vartheta_c \leq 326\pi$, правые – модам $324\pi \leq 2\vartheta_c \leq 325\pi$; для штриховой линии левые части – модам $327\pi \leq 2\vartheta_c \leq 328\pi$, правые – модам $326\pi \leq 2\vartheta_c \leq 327\pi$

центральной моды (см. (1)) и для любого соотношения параметров r, w удается аналитически методом D-разбиения исследовать устойчивость центрального состояния $2\vartheta_c = 2\vartheta_0 = \pi n$ (см. Приложение 1). Если при $r > 0$ на удвоенной длине линии укладывается нечетное число полувольт ($2\vartheta_0 = \pi(2n - 1)$) и центральная мода $2\vartheta_c = 2\vartheta_0 = \pi(2n - 1)$ не единственная: $r\vartheta_0 > 1$, то она неустойчива относительно «собственных» возмущений [1]. При этом, если надпороговость достаточно мала (см. Приложение 1)

$$w < w_{\text{bound}} = r(1 - \cos(2\Omega\vartheta_0))/2, \quad (5)$$

эта мода неустойчива также относительно распада на сателлиты. Как следует из Приложения 1, на границе неустойчивости $w = w_{\text{bound}}$ отстройка частоты сателлитов действительна и имеет значение

$$\Omega = r \sin(2\Omega\vartheta_0)/2, \quad (6)$$

то есть сателлиты центральной моды совпадают по частоте с соседними продольными модами (см. (1) при $2\vartheta_0 = \pi(2n + 1)$). Если $r\vartheta_0 \gg 1$, то число мод велико. При этом $\cos(2\Omega\vartheta_0) \approx -1$ (см.(6)), и зависимость (5) близка к линейной: $w_{\text{bound}}(r) \approx r$ (см. рис. 2, рис. 4 при $2\vartheta_0 \approx 323\pi$). Эта зависимость (5) соответствует верхнему краю поверхности при $2\vartheta_0 \approx 323\pi$ на рис. 4.

Граница устойчивости для соседней моды (моды «2» на рис. П1, б) при $2\vartheta_0 \approx 323\pi$ – это прямая $w_{\text{bound}} = 0$ (см. Приложение 3), которая является нижним краем поверхности на рис. 4. При любых $w > 0$ мода устойчива.

Заключение

В работе численными методами найдены границы устойчивости продольных мод генератора с запаздывающим отражением от нагрузки относительно распада на сателлиты. Для случаев, допускающих аналитическое исследование (при достаточно высокой надпороговости (4) или при такой длине линии запаздывания, которая равна целому числу полувольт на собственной частоте колебательного контура генератора), полученные численные результаты совпадают с выводами работы [1].

Если продольная мода неустойчива, и первоначально колебания происходят на этой моде, то можно ожидать, что с течением времени система перейдет в соседнее, устойчивое состояние. При неустойчивости относительно распада на сателлиты выход из неустойчивого состояния должен происходить в виде нарастающих биений, а при неустойчивости относительно возмущений на собственной частоте переходный процесс должен носить экспоненциальный характер. Если мода неустойчива относительно обоих типов возмущений, преобладающим должен быть тот процесс, которому соответствует больший инкремент. Как показало исследование переходных процессов на основе численного решения исходного уравнения с запаздыванием [2], эти процессы происходят в точном соответствии с приведенными в данной работе и в [1] результатами исследования устойчивости относительно обоих типов возмущений.

Авторы выражают благодарность М.И. Петелину и Н.М. Рыскину за постоянное внимание к работе и полезные замечания.

Работа С.А. Усачевой поддержана грантом программы «Развитие научного потенциала высшей школы» № 2.1.1/1738.

Приложение 1

Исследование устойчивости относительно распада на сателлиты мод с фазами запаздывания $2\vartheta_c = \pi n$

Предположим, что на удвоенной длине системы укладывается целое число полуволн, соответствующих собственной частоте колебательного контура автогенератора. Тогда для центральной моды фаза запаздывания равна $2\vartheta_c = 2\vartheta_0 = 2\pi n$ или $2\vartheta_c = 2\vartheta_0 = (2n - 1)\pi$. Для определенности считаем, что $r > 0$. Все результаты, справедливые при $r > 0$ для моды $2\vartheta_c = 2\pi n$, при $r < 0$ будут справедливы для моды $2\vartheta_c = (2n - 1)\pi$, и наоборот. Как следует из (3),

$$\Omega = \left(i(w + \chi \cos(2\vartheta_c)) \pm \sqrt{\chi^2 \sin^2(2\vartheta_c) - w^2} \right) / 2. \quad (\text{П1.1})$$

При $2\vartheta_c = 2\pi n$ (рис. П1, а) $\sin(2\vartheta_c) = 0$, $\cos(2\vartheta_c) = 1$. Из (П1.1) получим

$$\Omega = i(w + \chi \pm w) / 2. \quad (\text{П1.2})$$

Воспользуемся методом D-разбиения для нахождения границы устойчивости. В соответствии с (П1.2) возможны два случая.

I. $\Omega = iw + i\chi/2$. Значение Ω действительно, если (см. обозначения после (3))

$$w + r(1 - \cos(2\Omega\vartheta_0)) / 2 = 0. \quad (\text{П1.3})$$

Поскольку мода существует только при $w > 0$, условие (П1.3) не выполняется.

II. $\Omega = i\chi/2$. Значение Ω действительно, если

$$r(1 - \cos(2\Omega\vartheta_0)) = 0, \quad (\text{П1.4})$$

то есть при $\cos(2\Omega\vartheta_0) = 1$. При этом

$$\Omega = -r \sin(2\Omega\vartheta_0) / 2. \quad (\text{П1.5})$$

Единственное решение (П1.4), (П1.5) – это $\Omega = 0$, то есть сателлитов на действительной частоте нет.

Таким образом, для стационарного состояния $2\vartheta_c = 2\pi n$ знак мнимой части частоты $\text{Im}\Omega$ не меняется в разных областях параметров. В случае I при достаточно большой надпороговости $\Omega \approx iw$ сателлиты затухают, следовательно, они затухают при любом соотношении параметров w, r . В случае II для действительной и мнимой частей $\Omega = i\chi/2$ справедливы уравнения, подобные приведенным в [1, (П1.3), (П1.4)], и по аналогии с [1, Приложение 1], можно прийти к выводу, что мода $2\vartheta_c = 2\pi n$ устойчива относительно роста боковых сателлитов.

При $2\vartheta_c = \pi(2n - 1)$ (см. рис. П1, б) $\sin 2\vartheta_c = 0$, $\cos 2\vartheta_c = -1$. Из (П1.1) получим

$$\Omega = i(w - \chi \pm w) / 2, \quad (\text{П1.6})$$

то есть возможны два случая.

I. $\Omega = iw - i\chi/2$. Согласно методу D-разбиения, сателлиты на действительной частоте существуют, если

$$w = w_{\text{bound}} = r(1 - \cos(2\Omega\vartheta_0))/2. \quad (\text{П1.7})$$

При этом отстройка частоты сателлитов действительна и имеет значение

$$\Omega = r \sin(2\Omega\vartheta_0)/2. \quad (\text{П1.8})$$

Как следует из (П1.8), сателлиты на действительной частоте могут существовать, только если $r\vartheta_0 > 1$, когда в системе несколько продольных мод. Сравнение (П1.8) с (1) при $2\vartheta_c = (2n - 1)\pi$ показывает, что частота сателлитов совпадает с частотой соседних мод. Поскольку выше границы (П1.7), при $w \gg r$, находится область устойчивости моды $2\vartheta_c = (2n - 1)\pi$ [1, Приложение 2], то ниже границы (при $w < w_{\text{bound}}$) эта мода неустойчива.

II. $\Omega = i\chi/2$. Следуя методу D-разбиения, находим условие существования сателлитов на действительной частоте

$$r(1 - \cos(2\Omega\vartheta_0)) = 0. \quad (\text{П1.9})$$

При этом действительная частота определяется уравнением (П1.8). Единственное решение (П1.8), (П1.9) – это $\Omega = 0$. Следовательно, сателлитов на действительной частоте нет, и характер устойчивости при изменении параметров не меняется. Уравнения для мнимой и действительной частей уравнения $\Omega = i\chi/2$ подобны приведенным в [1, (П1.3), (П1.4)], и по аналогии с [1, Приложение 1] придем к выводу, что мода $2\vartheta_c = \pi(2n - 1)$ устойчива относительно роста боковых сателлитов.

Приложение 2

Исследование зависимости $r(\vartheta_0)$ для вырожденных мод, фаза запаздывания которых близка к $2\vartheta_c = \pi(2n - 1)$

Как следует из (1), новые вырожденные моды появляются при касании прямой $y_1(2\vartheta_c) = 2\vartheta_c$ и синусоиды $y_2(2\vartheta_c) = 2\vartheta_0 - r\vartheta_0 \sin(2\vartheta_c)$

$$r\vartheta_0 \cos(2\vartheta_c) = -1. \quad (\text{П2.1})$$

Если на удвоенной длине системы укладывается нечетное число длин полуволн, соответствующих собственной частоте колебательного контура автогенератора $2\vartheta_0 = \pi(2n - 1)$, и, если центральная мода $\vartheta_c = \vartheta_0$ является вырожденной, то

произведение $r\vartheta_0$ минимально и равно единице. При возрастании r и неизменной длине линии появляются две новые моды, симметрично отстоящие по частоте относительно центральной.

Рассмотрим вырожденные моды, близкие к центральной. Для них значения $r, \vartheta_0, \vartheta_c$ связаны соотношениями (1), (П2.1), и они слегка отличаются от $\bar{\vartheta}_0 = \pi(2n-1)/2, \bar{r} = 1/\bar{\vartheta}_0, \bar{\vartheta}_c = \vartheta_0$, соответствующих центральной вырожденной моде

$$r = \bar{r} + \Delta r, \quad \vartheta_0 = \bar{\vartheta}_0 + \varphi, \quad \vartheta_c = \bar{\vartheta}_c + \psi, \quad \Delta r \ll \bar{r}, \quad |\varphi, \psi| \ll 1. \quad (\text{П2.2})$$

Значения $r, \vartheta_0, \vartheta_c$ не зависят от параметра надпороговости w . Заметим, что приращение Δr должно быть положительно, при отрицательных Δr вырожденных мод нет (мы рассматриваем случай $r > 0$).

В (1), (П2.1) разложим в ряд $\cos(2\vartheta_c), \sin(2\vartheta_c)$ с точностью до ψ^3

$$\varphi + \Delta r \psi \bar{\vartheta}_0 + \varphi \psi \bar{r} - 2\psi^3/3 = 0, \quad \psi = \pm \sqrt{(\Delta r \bar{\vartheta}_0 + \varphi \bar{r})/2}, \quad (\text{П2.3})$$

и подставим второе равенство (П2.3) в первое

$$\varphi = \pm \frac{2}{3\sqrt{2}} (\Delta r \bar{\vartheta}_0 + \varphi \bar{r})^{3/2}. \quad (\text{П2.4})$$

Поскольку вблизи центрального состояния слагаемое $(\varphi \bar{r})$ мало по сравнению с $\varphi^{2/3}$, преобразуем (П2.4) к виду

$$\varphi = \pm \frac{2}{3\sqrt{2}} (\Delta r \bar{\vartheta}_0)^{3/2}. \quad (\text{П2.5})$$

В соответствии с (П2.5) все вырожденные состояния с фазами запаздывания $(2n-2) < 2\vartheta_c < 2\pi n$ лежат на кривой $r(\vartheta_0)$, которая имеет в точке $2\vartheta_0 = \pi(2n-1)$ особенность

$$r'(\vartheta_0)|_{2\vartheta_0=\pi(2n-1)-0} = \Delta r'(\varphi)|_{2\vartheta_0=\pi(2n-1)-0} = -\infty, \quad (\text{П2.6})$$

$$r'(\vartheta_0)|_{2\vartheta_0=\pi(2n-1)+0} = \Delta r'(\varphi)|_{2\vartheta_0=\pi(2n-1)+0} = +\infty.$$

При $2\vartheta_0 = \pi(2n-1)$, $r = 1/\vartheta_0$ граничное значение параметра надпороговости $w_{\text{bound}} = 0$ (см. (П1.7), (П1.8)). Следовательно, точка $w = 0$, $2\vartheta_0 = \pi(2n-1)$, $r = 1/\vartheta_0$ является пересечением сгибов двух граничных двулистных поверхностей (см. рис. 5). Сгибы поверхностей соответствуют вырожденным состояниям. Одна из двулистных поверхностей при $2\vartheta_0 \leq \pi(2n-1)$ соответствует границе области устойчивости для мод $(2n-1)\pi \leq 2\vartheta_c \leq 2n\pi$. Эта поверхность показана на рис. 4. Другая поверхность соответствует модам $(2n-2)\pi \leq 2\vartheta_c \leq (2n-1)\pi$ при $2\vartheta_0 \geq \pi(2n+1)$.

Пересечение граничными поверхностями плоскости $w = 0$

Покажем, что, если граница устойчивости относительно распада на сателлиты для какой-либо моды проходит через нуль $w_{\text{bound}}(r, \vartheta_0) = 0$, то на удвоенной длине линии укладывается целое число полувольт на собственной частоте колебательного контура $2\vartheta_0 = \pi n$, а мода, для которой граница устойчивости проходит через $w = 0$, не является центральной.

Как следует из (П1.1), при $w = 0$

$$\Omega = i\chi e^{\pm 2i\vartheta_c} / 2. \quad (\text{П3.1})$$

Уравнение (П3.1) допускает два случая.

I. $\Omega = ir(1 - e^{-2i\Omega\vartheta_0})e^{-2i\vartheta_c} / 2$. Следуя методу D-разбиения, находим, что сателлиты на действительной частоте существуют, если выполнены условия

$$\begin{aligned} 2\Omega \cos(2\vartheta_c) &= -r \sin(2\Omega\vartheta_0), \\ (1 - \cos(2\Omega\vartheta_0)) \cos(2\vartheta_c) &= -\sin(2\Omega\vartheta_0) \sin(2\vartheta_c). \end{aligned} \quad (\text{П3.2})$$

Отсюда

$$\text{tg}(\Omega\vartheta_0) = -\text{tg}(2\vartheta_c). \quad (\text{П3.3})$$

Уравнение (П3.3) допускает два решения.

I.A. $\sin(2\vartheta_c) = \sin(\Omega\vartheta_0)$, $\cos(2\vartheta_c) = -\cos(\Omega\vartheta_0)$. Тогда, как следует из (П3.2),

$$\Omega = r \sin(\Omega\vartheta_0) = r \sin(2\vartheta_c). \quad (\text{П3.4})$$

Сравнение (П3.4) с (1) показывает, что при этом

$$\Omega = -2\alpha, \quad 2\vartheta_0 = \pi(2n - 1), \quad (\text{П3.5})$$

где $\alpha = (\omega_c - \omega_0) / \omega_0$. Поскольку по определению $\Omega > 0$, граница $w = 0$ соответствует моде, обозначенной индексом «3» на рис. П1, б, а частота правого сателлита совпадает с частотой моды, обозначенной индексом «2» на этом же рисунке.

I.B. $\sin(2\vartheta_c) = -\sin(\Omega\vartheta_0)$, $\cos(2\vartheta_c) = \cos(\Omega\vartheta_0)$. Тогда, как следует из (П3.2),

$$\Omega = -r \sin(\Omega\vartheta_0) = r \sin(2\vartheta_c). \quad (\text{П3.6})$$

Сравнение (П3.6) с (1) показывает, что при этом

$$\Omega = -2\alpha, \quad 2\vartheta_0 = 2\pi n, \quad (\text{П3.7})$$

то есть граница $w = 0$ существует для моды, обозначенной индексом «3» на рис. П1, а, частота правого сателлита совпадает с частотой моды, обозначенной индексом «2» на этом же рисунке.

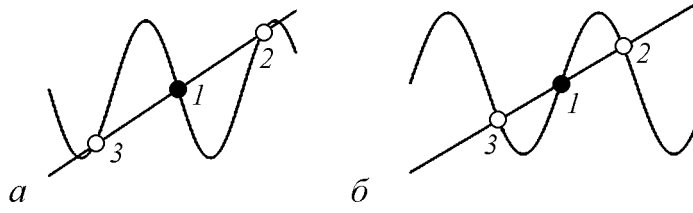


Рис. П1. Фрагмент рис. 2, б из [1]: цифрой 1 обозначена мода $2\vartheta_c = 2\pi n$ (а); $2\vartheta_c = \pi(2n - 1)$ (б); 2, 3 – соседние моды

II. $\Omega = ir(1 - e^{-2i\Omega\vartheta_0})e^{2i\vartheta_c}/2$. Следуя методу D-разбиения, находим, что сателлиты на действительной частоте существуют, если выполнены условия

$$\begin{aligned} 2\Omega \cos(2\vartheta_c) &= -r \sin(2\Omega\vartheta_0), \\ (1 - \cos(2\Omega\vartheta_0)) \cos(2\vartheta_c) &= \sin(2\Omega\vartheta_0) \sin(2\vartheta_c). \end{aligned} \quad (\text{П3.8})$$

Отсюда

$$\text{tg}(\Omega\vartheta_0) = \text{tg}(2\vartheta_c). \quad (\text{П3.9})$$

Возможны два варианта.

II.A. $\sin(2\vartheta_c) = \sin(\Omega\vartheta_0)$, $\cos(2\vartheta_c) = \cos(\Omega\vartheta_0)$. Тогда, как следует из (П3.8),

$$\Omega = -r \sin(\Omega\vartheta_0) = -r \sin(2\vartheta_c). \quad (\text{П3.10})$$

Сравнение (П3.10) с (1) показывает, что при этом

$$\Omega = 2\alpha, \quad 2\vartheta_0 = 2n\pi, \quad (\text{П3.11})$$

граница $w = 0$ соответствует моде «2» на рис. П1, а, частота левого сателлита совпадает с частотой моды «3» на этом же рисунке.

II.B. $\sin(2\vartheta_c) = -\sin(\Omega\vartheta_0)$, $\cos(2\vartheta_c) = -\cos(\Omega\vartheta_0)$. Тогда, как следует из (П5.4),

$$\Omega = r \sin(\Omega\vartheta_0) = -r \sin(2\vartheta_c). \quad (\text{П3.12})$$

Сравнение (П3.12) с (1) показывает, что при этом

$$\Omega = 2\alpha, \quad 2\vartheta_0 = \pi(2n - 1), \quad (\text{П3.13})$$

то есть граница $w = 0$ соответствует моде «2» на рис. П1, б, частота левого сателлита совпадает с частотой моды «3» на этом же рисунке.

Из приведенного выше анализа следует, что краю нижней поверхности на рис. 4 ($w_{\text{bound}} = 0$) при $2\vartheta_0 = 323\pi$ соответствует последний случай, (II.B).

Библиографический список

1. Новожилова Ю.В. Параметрическая неустойчивость в генераторе с запаздывающим отражением от нагрузки. I. Теория // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19, № 2. С. 112.

2. Новожилова Ю.В., Рыскин Н.М., Усачева С.А. Нестационарные процессы в генераторе с запаздывающим отражением от нагрузки // Журнал технической физики (направлено в печать)

Институт прикладной физики РАН,
Саратовский госуниверситет

Поступила в редакцию 28.01.2011

PARAMETRIC INSTABILITY OF AUTOOSCILLATOR COUPLED WITH REMOTE LOAD

II. Numerical simulation

Yu.V. Novozhilova, A.S. Sergeev, S.A. Usacheva

At the autooscillator with small reflection from the remote load the mode stability relative to decay into two side satellites was studied by numerical simulation of characteristic equation. At arbitrary exceed over oscillation threshold the stability regions was founded in the space of system parameters. The results are in a good agree, from the one hand, with theory in the parameter space where characteristic equation can be solved analytically, from the other hand, with the results of numerical simulation of transient processes between modes.

Keywords: Autooscillator operation at the load, delayed reflection, one-frequency modes stability.



Сергеев Александр Сергеевич – родился в Горьком (1957), окончил механико-математический факультет Горьковского государственного университета (1980). Кандидат физико-математических наук (1997), ведущий научный сотрудник Института прикладной физики (Н. Новгород). Область научных интересов – математическое моделирование процессов электронно-волнового взаимодействия. Имеет около 200 публикаций.

603950 Н. Новгород
Институт прикладной физики РАН
E-mail: sergeev@appl.sci-nnov.ru



Усачева Светлана Александровна – родилась в Саратове (1987), окончила факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2009). Аспирант факультета нелинейных процессов СГУ по специальности «Радиофизика». Область научных интересов – нелинейная динамика многомодовых автоколебательных систем, в том числе, распределенных систем с запаздыванием.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет
E-mail: usasva@mail.ru