Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 19, № 4, 2011 УДК 517.9

ВЛИЯНИЕ ШУМА НА ОБОБЩЕННУЮ СИНХРОНИЗАЦИЮ ПРОСТРАНСТВЕННО-РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СРЕД, ОПИСЫВАЕМЫХ УРАВНЕНИЯМИ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ

А.А. Короновский, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов

Исследовано влияние шума на обобщенную синхронизацию в пространственно-распределенных средах, описываемых уравнениями Гинзбурга–Ландау, находящихся в режиме пространственно-временного хаоса. Показано, что шум практически не оказывает влияния на порог возникновения синхронного режима в таких системах. Причины возникновения выявленной особенности объяснены при помощи метода модифицированной системы и подтверждены результатами численного моделирования.

Ключевые слова: Пространственно-распределенные среды, уравнения Гинзбурга–Ландау, пространственно-временной хаос, обобщенная синхронизация, шум.

Синхронизация хаотических колебаний представляется в настоящее время одним из фундаментальных нелинейных явлений, активно изучаемых в последнее время [1]. Интерес к этому феномену обусловлен также широким кругом практических приложений, в которых могут быть использованы различные его типы. Например, фазовая синхронизация и синхронизация с запаздыванием могут найти применение в биофизических, физиологических и медицинских задачах [2–4], а обобщенная и полная синхронизация — при осуществлении скрытой передачи информации по каналам связи [7].

Одним из наиболее важных вопросов, связанных с изучением хаотической синхронизации, является влияние шума на установление синхронных режимов [6–14]. Известно, что шум может оказывать как конструктивное, так и деструктивное воздействие на поведение систем. В частности, в случае полной синхронизации шум может привести к потере синхронного режима из-за локальной неустойчивости синхронного многообразия, сопровождающейся возникновением «on–off»-перемежаемости [6, 7]. В то же самое время, общий шум способен синхронизовать две не взаимодействующие, но идентичные системы (стартующие с различных начальных условий). В этом случае диагностируется режим индуцированной шумом синхронизации [15, 16]. В случае фазовой синхронизации внешний шум может привести к сдвигу пороговых значений параметра связи, соответствующих установлению синхронного режима [8]. С другой стороны, шум может играть и конструктивную роль при фазовой синхронизации, усиливая эффект частичного фазового захвата ниже порога возникновения синхронизации в «нешумящей» системе [9].

Влияние шума на обобщенную синхронизацию в настоящее время исследовано слабо. В качестве исключения можно отметить работы [13, 14], посвященные анализу обобщенной синхронизации в присутствии шума в системах с малым числом степеней свободы. Показано, что в двух однонаправленно связанных динамических системах с качественно различной топологией аттрактора шум способен как усилить/вызвать, так и, наоборот, разрушить режим обобщенной синхронизации, в то время как в диссипативно связанных идентичных системах со слегка расстроенными параметрами наблюдается высокая степень устойчивости синхронного режима по отношению к внешним шумам.

Настоящая работа посвящена исследованию влияния шума на обобщенную синхронизацию в системах с бесконечномерным фазовым пространством – пространственно-распределенных средах, описываемых уравнениями Гинзбурга–Ландау, находящихся в режиме пространственно-временного хаоса. Как будет показано ниже, ввиду диссипативного типа связи в такой системе режим обобщенной синхронизации оказывается устойчивым по отношению к внешним шумам.

Под режимом обобщенной синхронизации двух однонаправленно связанных пространственно-распределенных сред, ведущей $\mathbf{u}(x,t)$ и ведомой $\mathbf{v}(x,t)$, понимается такой режим, при котором после завершения переходного процесса устанавливается однозначная функциональная зависимость $\mathbf{F}[\cdot]$ между их состояниями, то есть $\mathbf{v}(x,t) = \mathbf{F}[\mathbf{u}(x,t)]$ [17, 18].

Так же, как и в системах с малым числом степеней свободы, диагностика режима обобщенной синхронизации в пространственно-распределенных средах может быть осуществлена при помощи метода ближайших соседей [15], расчета условных ляпуновских экспонент [20, 21] или метода вспомогательной системы [22].

Суть метода вспомогательной системы для пространственно-распределенных систем сводится к следующему: наряду с ведомой системой $\mathbf{v}(x,t)$ рассматривается идентичная ей вспомогательная система $\mathbf{v}_a(x,t)$. Начальные условия для вспомогательной системы $\mathbf{v}_a(x,t_0)$ выбираются отличными от начального состояния ведомой системы $\mathbf{v}(x,t_0)$, однако близкими к нему (для мультистабильных систем). В случае отсутствия режима обобщенной синхронизации между взаимодействующими системами состояния ведомой $\mathbf{v}(x,t)$ и вспомогательной $\mathbf{v}_a(x,t)$ систем в каждой точке пространства являются различными. В режиме обобщенной синхронизации, в силу выполнения соотношений $\mathbf{v}(x,t) = \mathbf{F}[\mathbf{u}(x,t)]$ и, соответственно, $\mathbf{v}_a(x,t) = \mathbf{F}[\mathbf{u}(x,t)]$, после завершения переходного процесса состояния ведомой и вспомогательной систем должны стать идентичными $\mathbf{v}(t) \equiv \mathbf{v}_a(t)$, что является критерием наличия обобщенной синхронизации между ведущей и ведомой системами. Если состояния ведомой и вспомогательной систем оказываются идентичными в отдельных точках пространства, можно говорить о частичной обобщенной синхронизации [18].

Рассмотрим вопрос об устойчивости режима обобщенной синхронизации к шумам в пространственно-распределенных средах, описываемых комплексными уравнениями Гинзбурга–Ландау, находящихся под воздействием пространственно-распределенного источника шума

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u - (1 - i\alpha_d)|u|^2 u + (1 + i\beta_d)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tilde{D}\zeta(x,t), \quad x \in [0, L], \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v - (1 - i\alpha_r)|v|^2 v + (1 + i\beta_r)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \tilde{D}\zeta(x,t) + \varepsilon(u - v), \quad x \in [0, L]. \tag{2}$$

Уравнения (1) и (2) описывают поведение ведущей и ведомой систем, соответственно. Известно [23], что однонаправленно связанные уравнения Гинзбурга–Ландау могут демонстрировать режим обобщенной хаотической синхронизации. Значения управляющих параметров ведущей системы по аналогии с [23] выберем равными $\alpha_d = 1.5$, $\beta_d = 1.5$, а аналогичные параметры ведомой системы будем варьировать в диапазоне $\alpha_r \in [3; 5]$ и $\beta_r \in [3; 5]$. Выбор подобных значений управляющих параметров обеспечивает возникновение в автономных системах режима пространственно-временного хаоса, в то время как параметр ε определяет интенсивность однонаправленной связи между ведущей и ведомой системами. Слагаемое $\tilde{D}\zeta(x,t)$ описывает комплексный источник шума $\zeta(x,t)$ с нулевым средним, подчиняющийся распределению Гаусса

$$\begin{aligned} &\langle\zeta(x,t)\rangle = 0, \\ &\langle\zeta(x,t)\zeta(x',t')\rangle = \delta(x - x')\delta(t - t'), \end{aligned} \tag{3}$$

где $\tilde{D}$ характеризует интенсивность шумового воздействия.

Уравнения (1)–(2) решались для периодических граничных условий $u(x,t) = u(x + L, t)$ и $v(x,t) = v(x + L, t)$; длина L, на которой проводилось рассмотрение, была фиксирована и выбрана равной $L = 40\pi$; начальные условия задавались случайным образом. При решении уравнений использовалась явная численная схема второго порядка точности [24] (метод конечных разностей) с шагами по времени и по пространству $\Delta t = 0.0002$ и $\Delta x = L/1024$, соответственно.

Для диагностики режима обобщенной хаотической синхронизации в уравнениях Гинзбурга–Ландау использовался метод вспомогательной системы, когда помимо ведущей и ведомой систем рассматривалась еще и вспомогательная система $v_a(t)$, также описываемая уравнением (2), при этом случайные сигналы $\tilde{D}\zeta(x,t)$, воздействующие на ведомую и вспомогательную системы, были идентичными. В качестве критерия наличия режима обобщенной синхронизации использовалось условие

$$\frac{1}{T}\int_T \int_0^L |v(x,t) - v_a(x,t)|^2 < \delta, \tag{4}$$

где $\delta = 10^{-5}$.

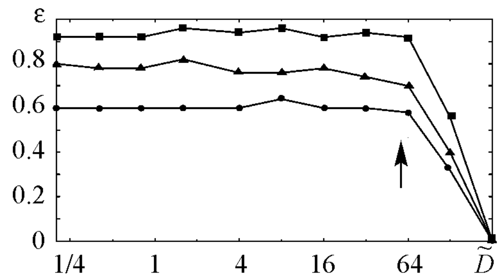


Рис. 1. Граница режима обобщенной хаотической синхронизации в двух однонаправленно связанных активных средах, описываемых комплексными уравнениями Гинзбурга-Ландау, на плоскости параметров $(\tilde{D}, \varepsilon)$ для различных значений управляющих параметров ведомой системы: $\alpha_r = 3$, $\beta_r = 3$ (●), $\alpha_r = 4, \beta_r = 4$ (▲), $\alpha_r = 5$, $\beta_r = 5$ (■). Критическое значение интенсивности шума $\tilde{D}_c$, до которого наблюдается устойчивость режима обобщенной синхронизации к шумам, показано стрелкой

На рис. 1 приведена зависимость порога возникновения режима обобщенной синхронизации от интенсивности шумового воздействия для различных значений управляющих параметров ведомой системы. Видно, что в диапазоне $\tilde{D} \in [0; 64]$ граница синхронного режима в пространственно-распределенных системах практически не изменяется с увеличением интенсивности шума. Поведение однонаправленно связанных пространственно-распределенных сред до и после порога возникновения режима обобщенной синхронизации в отсутствие и при наличии шума иллюстрирует рис. 2, где приведены соответствующие пространственно-временные диаграммы. Рисунки (*а, е*) характеризуют поведение ведущей системы, а остальные соответствуют ведомой системе до (*б, ж*) и после (*г, и*) порога возникновения обобщенной синхронизации. На рис. 2, *в, д, з, к* показаны распределения во времени и пространстве модуля разности состояний ведомой и вспомогательной систем $|v - v_a|$ для случаев отсутствия (*в, з*) и наличия (*д, к*) режима обобщенной синхронизации. Нетрудно заметить, что в последних случаях (*д, к*) разность состояний ведомой и вспомогательной систем после включения связи стремится к нулю в каждой точке пространства, что означает наличие обобщенной синхронизации между ведущим и ведомым уравнениями Гинзбурга–Ландау. Необходимо отметить, что длительность переходного процесса, предшествующего возникновению режима обобщенной синхронизации, оказывается немного больше в случае наличия шума, в то время как пороговое значение параметра связи оказывается одинаковым в обоих случаях. Кроме того, нетрудно видеть, что пространственно-временные диаграммы, характеризующие поведение ведомой системы, оказываются похожими в случаях наличия и отсутствия шума (ср. рис. (*б, г*) и (*ж, и*), соответственно). Такое поведение пространственно-распределенных систем в режиме обобщенной синхронизации в присутствии шума может быть объяснено при помощи метода модифицированной системы [25]. Известно, что порог возникновения режима обобщенной синхронизации в такой системе определяется, прежде всего, свойствами модифицированного уравнения Гинзбурга–Ландау

$$\frac{\partial v_m}{\partial t} = v_m - (1 - i\alpha_r)|v_m|^2 v_m + (1 + i\beta_r)\frac{\partial^2 v_m}{\partial x^2} - \varepsilon v_m, \quad x \in [0, L], \tag{5}$$

получающегося из уравнения (2) в случае отсутствия шума ($\tilde{D} = 0$) путем приравнивания нулю сигнала ведущей системы $u = 0$ (см., например, [23, 26]). Следует обратить внимание, что слагаемое $(-\varepsilon v_m)$ фактически вносит дополнительную диссипацию в модифицированное уравнение Гинзбурга–Ландау (5). Шумовой сигнал

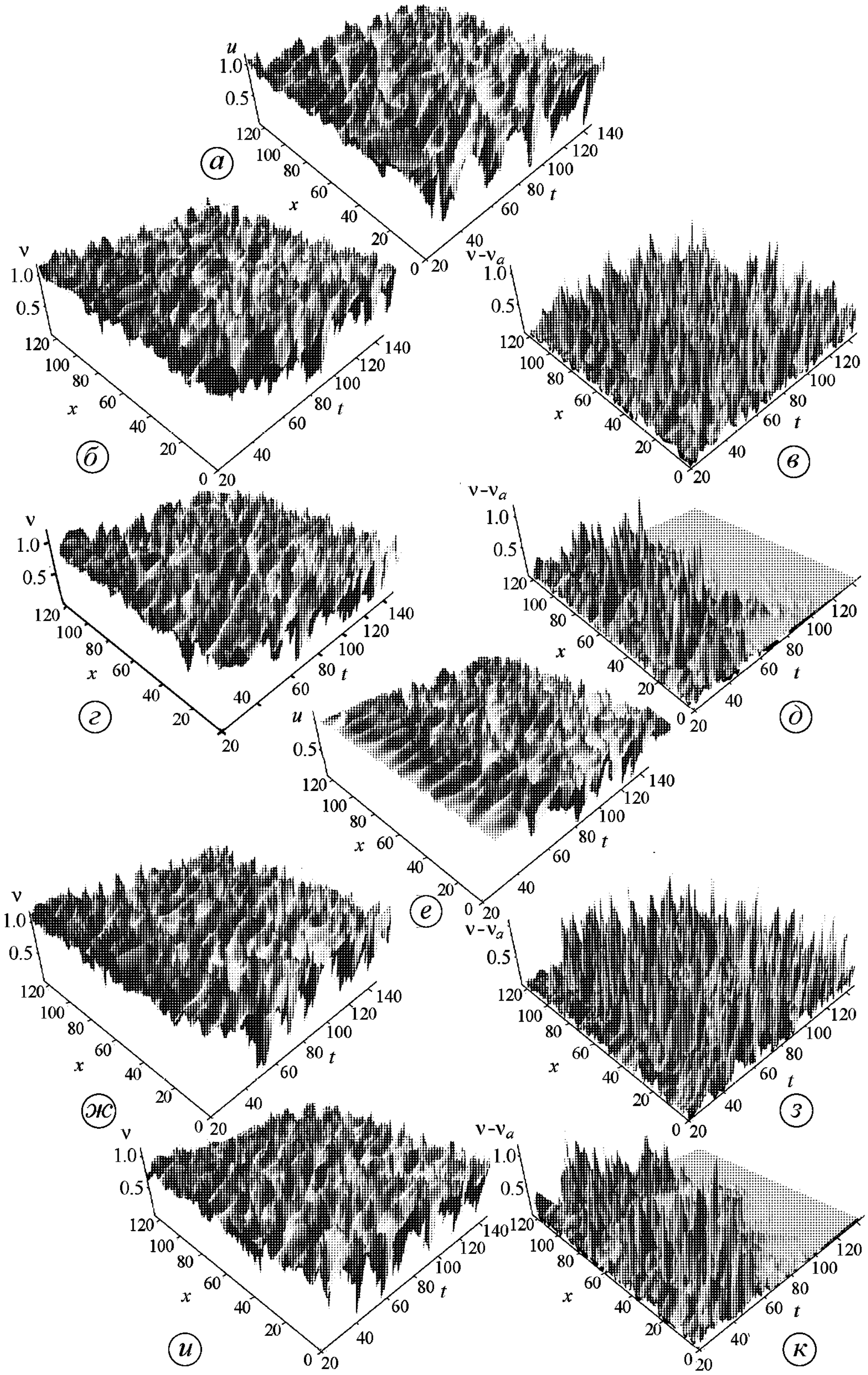


Рис. 2. Пространственно-временные диаграммы, характеризующие поведение ведущей (*а,е*) и ведомой (*б,г,ж,и*) систем (1)–(2), а также зависимости модуля разности состояний ведомой и вспомогательной систем $|v - v_a|$ (*в,д,з,к*) для случаев отсутствия (*в,з*) ($\varepsilon = 0.2$) и наличия (*д,к*) ($\varepsilon = 0.8$) обобщенной синхронизации во времени t и пространстве x. Значения управляющих параметров для ведомой системы были выбраны равными $\alpha_r = \beta_r = 3$. В моменты времени $t = 40$ включалась связь между ведущей и ведомой системами. Рисунки (*а–д*) соответствуют случаю отсутствия шума ($\tilde{D} = 0$), (*е–к*) – наличию шума интенсивности $\tilde{D} = 0.4$

достаточно большой амплитуды практически не влияет на характеристики модифицированного уравнения Гинзбурга–Ландау (и, как следствие, на характеристики ведомого) и, соответственно, величина параметра связи, при которой возникает режим обобщенной синхронизации, также не претерпевает существенных изменений. В то же самое время, граница обобщенной синхронизации может сдвигаться в сторону больших/меньших значений по параметру связи ε при воздействии шума очень большой интенсивности $\tilde{D} > 64$. Как видно из рис. 1, при таких значениях интенсивности шума пороговое значение режима обобщенной синхронизации начинает уменьшаться. При очень больших интенсивностях $\tilde{D}$ значение параметра связи ε_{GS}, соответствующее границе обобщенной синхронизации, стремится к нулю для любых значений управляющих параметров α и β пространственно-распределенных сред. Такое поведение границы обобщенной синхронизации связано с наступлением режима индуцированной шумом синхронизации [27, 28], являющейся проявлением обобщенной синхронизации в случае, когда стохастический сигнал вместо детерминированного воздействует на ведомую систему [29].

Тем не менее, шум достаточно большой амплитуды практически не меняет пороговое значение параметра связи между однонаправленно связанными уравнениями Гинзбурга–Ландау. Можно ожидать, что аналогичное поведение будет характерно для широко класса пространственно-распределенных автоколебательных систем с однонаправленной диссипативной связью.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-02-00047) и Президентской программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-3407.2010.2). А.А.К. благодарит также ФНП «Династия» за финансовую поддержку.

Библиографический список

1. *Boccaletti S., Kurths J., Osipov G.V., Valladares D.L., and Zhou C.S.* The synchronization of chaotic systems // Physics Reports. 2002. Vol. 366. P. 1.
2. *Glass L.* Synchronization and rhythmic processes in physiology// Nature (London). 2001. Vol. 410. P. 277.
3. *Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I., Gridnev V.I., Bodrov M.B., and Bespyatov A.B.* Synchronization between main rhytmic processes in the human cardiovascular system // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 68. P. 041913.
4. *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E., Yip K.P., Holstein-Rathlou N.H., and Marsh D.J.* Synchronization among mechanisms of renal autoregulation is reduced in hypertensive rats // American Journal of Physiology (Renal Physiology). 2007. Vol. 293. P. F1545.
5. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации // Успехи физических наук. 2009. Т. 179, № 12. С. 1281.

6. *Heagy J.F., Carroll T.L., and Pecora L.M.* Desynchronization by periodic orbits // Physical Review E. 1995. Vol. 52, № 2. P. R1253.
7. *Gauthier D.J. and Bienfang J.C.* Intermittent loss of synchronization in coupled chaotic oscillators: Toward a new criterion for high-quality synchronization // Physical Review Letters. 1996. Vol. 77, № 9. P. 1751.
8. *Zhu L., Raghu A., and Lai Y.C.* Experimental observation of superpersistent chaotic transients // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 86, № 18. P. 4017.
9. *Zhou C.S., Kurths J., Kiss I.Z., and Hudson J.L.* Noise-enhanced phase synchronization of chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 89, № 1. P. 014101.
10. *Kim S.Y., Lim W., Jalnine A., and Kuznetsov S.P.* Characterization of the noise effect on weak synchronization // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 67, № 1. P. 016217.
11. *Zhou C.S., Kurths J., Allaria E., Boccaletti S., Meucci R., and Arecchi F.T.* Noise–enhanced synchronization of homoclinic chaos in a CO_2 laser // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 67. P. 015205(R).
12. *Goldobin D.S. and Pikovsky A.S.* Synchronization and desynchronization of self-sustained oscillators by common noise // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 71, № 4. P. 045201(R).
13. *Guan S., Lai Y.C., and Lai C.H.* Effect of noise on generalized chaotic synchronization // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 73. P. 046210.
14. *Москаленко О.И., Овчинников А.А.* Исследование влияния шума на обобщенную хаотическую синхронизацию в диссипативно связанных динамических системах: устойчивость синхронного режима по отношению к внешним шумам и возможные практические приложения // Радиотехника и электроника. 2010. Т. 55, № 4. С. 436.
15. *Maritan A. and Banavar J.R.* Chaos, noise and synchronization // Phys. Rev. Lett. 1994. Vol. 72, № 10. P. 1451.
16. *Toral R., Mirasso C.R., Hernández-Garsia E., and Piro O.* Analytical and numerical studies of noise–induced synchronization of chaotic systems // Chaos. 2001. Vol. 11, № 3. P. 665.
17. *Попов П.В., Филатов Р.А., Короновский А.А., Храмов А.Е.* Синхронизация пространственно-временного хаоса в пучково-плазменных системах со сверхкритическим током // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31, № 6. С. 9.
18. *Короновский А.А., Попов П.В., Храмов А.Е.* Обобщенная хаотическая синхронизация в связанных уравнениях Гинзбурга–Ландау // ЖЭТФ. 2006. Т. 130, № 4(10). С. 748.
19. *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., and Abarbanel H.D.I.* Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems // Phys. Rev. E. 1995. Т. 51, № 2. С. 980.
20. *Pyragas K.* Conditiuonal Lyapunov exponents from time series // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 56, № 5. P. 5183.

21. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Фролов Н.С., Храмов А.Е.* К вопросу о спектре пространственных ляпуновских показателей нелинейной активной среды, описываемой комплексным уравнением Гинзбурга–Ландау // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36, № 14. С. 19.
22. *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., and Sushchik M.M.* Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53, № 5. P. 4528.
23. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., and Popov P.V.* Generalized synchronization in coupled Ginzburg–Landau equations and mechanisms of its arising // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72, № 3. P. 037201.
24. *García-Ojalvo J. and Sancho J.M.* Noise in Spatially Extended Systems. New York: Springer, 1999.
25. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* Generalized synchronization: A modified system approach // Phys. Rev. 2005. E. Vol. 71, № 6. 067201.
26. *Короновский А.А., Попов П.В., Храмов А.Е.* Обобщенная синхронизация и механизм ее возникновения в связанных автоколебательных средах // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31, № 22. С. 9.
27. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., and Popov P.V.* Incomplete noise-induced synchronization of spatially extended systems // Phys. Rev. E. 2008. Vol. 77, № 2. P. 036215.
28. *Короновский А.А., Попов П.В., Храмов А.Е.* Индуцированная шумом синхронизация пространственно-временного хаоса в уравнении Гинзбурга–Ландау // ЖЭТФ. 2008. Т. 134, № 5(11). С. 1048.
29. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., and Moskalenko O.I.* Are generalized synchronization and noise-induced synchronization identical types of synchronous behavior of chaotic oscillators? // Phys. Lett. A. 2006. Vol. 354, № 5–6. P. 423.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию *15.03.2011*
После доработки *23.04.2011*

EFFECT OF NOISE ON GENERALIZED SYNCHRONIZATION OF SPATIALLY EXTENDED SYSTEMS DESCRIBED BY GINZBURG–LANDAU EQUATIONS

A.A. Koronovskii, O.I. Moskalenko, A.E. Hramov

Effect of noise on generalized synchronization in spatially extended systems described by Ginzburg–Landau equations being in the spatio-temporal chaotic regime is studied. It is shown, that noise does not affect the synchronous regime threshold in such systems. The reasons of the revealed particularity have been explained by means of the modified system approach and confirmed by the results of numerical simulation.

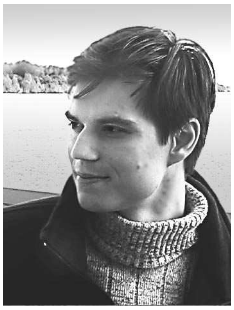
Keywords: Spatially extended systems, Ginzburg–Landau equations, spatio-temporal chaos, generalized synchronization, noise.

Короновский Алексей Александрович – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995), доктор физико-математических наук (2007), профессор кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой деятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. Автор ряда статей в центральной печати, а также монографий (в соавторстве) «Нелинейная динамика в действии» и «Непрерывный вейвлетный анализ», вышедших в Издательстве ГосУНЦ «Колледж», двухтомной монографии «Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот» (М.: Физматлит, 2009, под редакцией А.А. Короновского, А.А. Кураева, Д.И. Трубецкова и А.Е, Храмова), монографии «Моделирование нелинейной динамики глобальных процессов» (М.: Изд-во МГУ, 2010, под редакцией С.И. Ильина и Д.И. Трубецкова) и др.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: alkor@nonlin.sgu.ru

Москаленко Ольга Игоревна – родилась в Саратове (1984). Окончила факультет нелинейных процессов Саратовского госуниверситета (2006), кандидат физико-математических наук (2008). Доцент кафедры физики открытых систем СГУ, старший научный сотрудник лаборатории физики нелинейных явлений отделения физики нелинейных систем НИИ Естественных наук СГУ. Область научных интересов – исследование классической и хаотической синхронизации в нелинейных системах; применение непрерывного вейвлет- и фурье-анализа к проблеме хаотической синхронизации в системах с малым числом степеней свободы и пространственно-распределенных средах; изучение обобщенной синхронизации в системах с однонаправленной и взаимной связью и ее возможных приложений; влияние шума на установление синхронных режимов; применение хаотической синхронизации для скрытой передачи информации; исследование кооперативных явлений в сетях со сложной топологией; анализ хаотической синхронизации в сложных сетях. Автор более 40 статей в центральных реферируемых отечественных и зарубежных научных журналах.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: moskalenko@nonlin.sgu.ru



Храмов Александр Евгеньевич – окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1996). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1999) и доктора (2006) физ.-мат. наук. Профессор, заместитель заведующего кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов – радиофизика в той ее части, которая связана со взаимодействием свободных электронов с электромагнитными полями, нелинейная динамика распределенных активных сред, методы анализа и моделирования динамических систем. Опубликовал (в соавторстве) книгу «Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков» (Т. 1, М.: Физматлит, 2003; Т. 2, М.: Физматлит, 2004), монографию «Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения» (Москва: Наука, Физматлит, 2003), двухтомную коллективную монографию «Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот» (М.: Физматлит, 2009), коллективную монографию «Моделирование нелинейной динамики глобальных процессов» (М.: Изд-во МГУ, 2010) и др.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: aeh@nonlin.sgu.ru