



МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

С.В. Алюков

В статье рассматриваются вопросы моделирования динамических систем с кусочно-линейными характеристиками. Предложены новые методы аппроксимации кусочно-линейных, в частности, ступенчатых функций, не имеющие недостатков традиционного разложения в ряды Фурье. Исследуются вопросы сходимости и погрешности аппроксимации.

Ключевые слова: Моделирование, аппроксимация, кусочно-линейные функции, сходимость, погрешность.

Введение

Математическое моделирование динамики сложных систем с переменными характеристиками часто связано с применением кусочно-линейных функций. С помощью таких функций, например, описывают ударные воздействия, передачу сигналов, динамику механических систем с нелинейными упругостями, с нагрузками типа «сухое трение» и другие процессы.

Широкое применение кусочно-линейных функций объясняется простотой их структуры, особенно по участкам. На каждом участке эти функции представляют собой прямые линии и их отрезки, что позволяет во многих случаях получать решения, пользуясь методами теории линейных систем. Вместе с тем, часто возникают проблемы при построении решений на всей области определения кусочно-линейной функции, увязки решений по участкам с необходимостью применения специальных математических методов. Для упрощения расчетов при работе с кусочно-линейными функциями во многих случаях прибегают к методам аппроксимации. Одним из наиболее широко используемых методов аппроксимации кусочно-линейных функций является разложение этих функций с помощью рядов Фурье $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$, где $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots\}$ – ортогональная система в функциональном гильбертовом пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ измеримых функций с интегрируемыми по Лебегу квадратами, $f \in L_2[-\pi, \pi]$, $c_k = (f, \varphi_k) / \|\varphi_k\|^2$. В качестве ортогональной системы

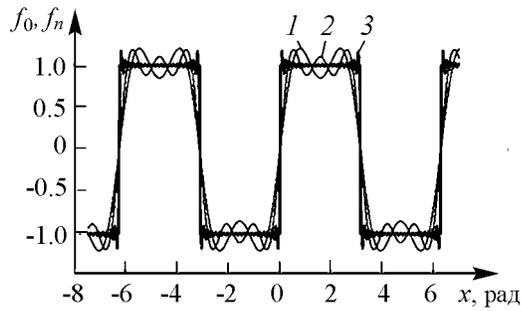


Рис. 1. Погрешности аппроксимации с помощью разложения в ряд Фурье

функции, что приводит к достаточно большой погрешности аппроксимации. На рис. 1 кривые 1 и 2 иллюстрируют этот недостаток.

Более того, и при большом числе слагаемых в разложении с помощью ряда Фурье существуют характерные скачки аппроксимирующей функции в окрестности точек разрыва $O_\delta(x_0)$ исходной функции. Для таких точек $\sup_{x \in O_\delta(x_0)/\{x_0\}} |f(x) - S_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A \neq 0$, где $S_n(x)$ – частичная сумма ряда Фурье [1]. Например, для функции

$$f_0(x) = \text{sign}(\sin x) \quad (1)$$

с прямоугольными импульсами точка $x = \pi/m$, где $m = 2[(n+1)/2]$ и $[A]$ – целая часть числа A , является точкой максимума частичной суммы $S_n(f_0)$ тригонометрического ряда Фурье [2], причем $S_n(f_0, \pi/m) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (2/\pi) \int_0^\pi (\sin t/t) dt \approx 1.17898$. То есть величина абсолютной погрешности $|f_0(\pi/m) - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f_0, \pi/m)| > 0.178$, а относительная погрешность составляет более 17% независимо от числа слагаемых в частичной сумме ряда Фурье.

На рис. 1 кривая 3 соответствует графику аппроксимирующей функции $f_n(x) = \sum_{n=1}^{20} c_n \varphi_n$ и иллюстрирует повышенную погрешность аппроксимации в окрестности точек разрыва исходной функции (1). В этом проявляется так называемый эффект Гиббса [2], причем с ростом числа гармоник эффект Гиббса не исчезает, что ведет к крайне негативным последствиям использования аппроксимирующей функции.

Эффект Гиббса носит общий характер, проявляется для любой функции, имеющей ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$, с изолированной точкой разрыва $x_0 \in (a, b)$. Для таких функций выполняется условие [2]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, x_0 + \pi/m) = f(x_0 + 0) + \frac{d}{2} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt - 1 \right),$$

где $d = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$.

Покажем, что абсолютная $\Delta = \Delta(x)$ и относительная $\delta = \delta(x)$ погрешности аппроксимации в окрестности точек разрыва могут быть сколь угодно большими.

часто берут тригонометрическую систему 2π -периодических функций $\{1, \sin nx, \cos nx; n \in \mathbb{N}\}$.

Применение рядов Фурье имеет и определенные недостатки. Например, при относительно небольшом числе слагаемых в ряде Фурье, используемых для разложения кусочно-линейной функции, аппроксимирующая функция имеет ярко выраженный волнообразный характер даже в пределах одного прямолинейного участка кусочно-линейной

Действительно,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(x_0 + \pi/m) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| S_n(f, x_0 + \pi/m) - f(x_0 + \pi/m) \right| = \\ &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0 + \pi/m) - \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0 + \pi/m) \right| = \\ &= \left| f(x_0 + 0) + \frac{d}{2} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt - 1 \right) - f(x_0 + 0) \right| = \\ &= \left| \frac{d}{2} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt - 1 \right) \right| = \Delta(d). \end{aligned}$$

Функция $\Delta(d)$ является бесконечно большой величиной, так как $\forall M > 0 \exists d = d^*(M) > 0 \forall d : |d| > d^* \Rightarrow \Delta(d^*) = |(d^*/2) \cdot ((2/\pi) \int_0^\pi (\sin t)/t dt - 1)| > M$. В качестве d^* можно взять, например, $[2M\pi / (2 \int_0^\pi (\sin t)/t dt - \pi)] + 1$, где $[A]$ – целая часть числа A .

Для относительной погрешности $\delta(x) = \Delta(x)/|f(x)|$ доказательство аналогично. Более того, даже при фиксированном значении $d \in \mathbb{R}$ ($d \neq 0$) для любого $M > 0$ можно подобрать такую функцию $f(x) \in L_2[a, b]$, для которой $\delta(x_0 + 0, d) = \Delta(x_0 + 0, d)/|f(x_0 + 0)| > M$. В качестве такой функции, например, можно взять функцию, у которой $|f(x_0 + 0)| < \Delta(x_0 + 0, d)/M$, $f(x_0 + 0) \neq 0$. Заметим, что даже на множестве непрерывных функций $C[-\pi, \pi]$ ряд Фурье, как известно, еще не обязан сходиться в каждой точке.

1. Описание метода

Для устранения отмеченных недостатков предложено аппроксимировать исходную ступенчатую функцию (1) последовательностью рекурсивных периодических функций [3]

$$\{f_n(x) | f_n(x) = \sin((\pi/2)f_{n-1}(x)), f_1(x) = \sin x; n - 1 \in \mathbb{N}\} \subset C^\infty[-\pi, \pi]. \quad (2)$$

Аппроксимация (2) основана на использовании тригонометрических выражений, но не в форме слагаемых, как в рядах Фурье, а в форме вложений. Для этого случая на рис. 2 представлены графики ступенчатой функции (1) и четырех ее последовательных приближений.

Следует отметить, что уже при относительно небольших значениях n при использовании процедуры (2) график аппроксимирующей функции дает достаточно хорошее приближение исходной функции (1). В случае предложенного метода аппроксимации синусоида как бы растягивается вдоль прямых участков графика исходной

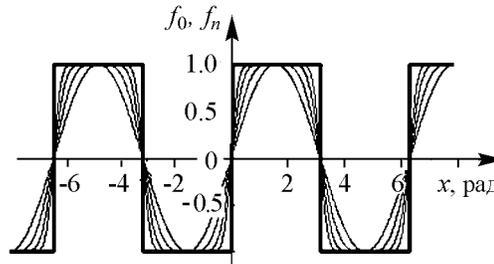


Рис. 2. Графики ступенчатой функции и четырех ее последовательных приближений с помощью вложенных функций

функции. При этом никаких колебаний аппроксимирующей функции в рамках прямолинейных участков исходной ступенчатой функции не происходит. Полностью отсутствует также эффект Гиббса.

2. Сходимость и погрешность аппроксимации

Рассмотрим некоторые вопросы сходимости и погрешности аппроксимации (2).

Теорема. В пространстве измеримых функций $L_1[0, \pi/2]$ и функциональном гильбертовом пространстве $L_2[0, \pi/2]$ последовательность аппроксимирующих функций $f_n(x)$ сходится по норме к исходной функции $f_0(x)$.

Доказательство. Введем последовательность минорантных относительно последовательности $f_n(x)$ функций $\{\varphi_n(x) \mid \varphi_n(x) = 1 - \exp(-(\pi/2)^{n-1}x), n \in \mathbb{N}\} \subset C^\infty[0, \pi/2]$. Можно показать, что $f_n(x) \geq \varphi_n(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \pi/2]$. Заметим, что мера множества точек разрыва функции $f_0(x)$ равна нулю. Тогда, учитывая знаконеотрицательность и ограниченность функций $f_n(x)$ и $\varphi_n(x)$ на рассматриваемом отрезке, в пространстве $L_1[0, \pi/2]$ получим

$$\begin{aligned} \|f_0(x) - f_n(x)\|_{L_1[0, \pi/2]} &= \int_0^{\pi/2} (1 - f_n(x)) dx \leq \int_0^{\pi/2} (1 - \varphi_n(x)) dx = \\ &= (2/\pi)^{n-1} (1 - \exp(-(\pi/2)^n)). \end{aligned}$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} (2/\pi)^{n-1} (1 - \exp(-(\pi/2)^n)) = 0$, то $\|f_0(x) - f_n(x)\|_{L_1[0, \pi/2]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

В функциональном гильбертовом пространстве $L_2[0, \pi/2]$ с метрикой $\rho(x, y) = \left(\int_0^{\pi/2} (x(t) - y(t))^2 dt \right)^{1/2}$ имеем

$$\begin{aligned} \|f_0(x) - f_n(x)\|_{L_2[0, \pi/2]} &= \left(\int_0^{\pi/2} (1 - f_n(x))^2 dx \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^{\pi/2} (1 - \varphi_n(x))^2 dx \right)^{1/2} = \\ &= \left(\frac{(2/\pi)^{n-1}}{2} (1 - \exp(-2(\pi/2)^n)) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} ((2/\pi)^{n-1} (1 - \exp(-2(\pi/2)^n))/2)^{1/2} = 0$, получим, что и в этом пространстве $\|f_0(x) - f_n(x)\|_{L_2[0, \pi/2]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Последовательность (2) сходится в среднем к исходной функции (1). ■

Таким образом, последовательность аппроксимирующих функций $f_n(x)$ (2) в пространствах $L_1[-\pi, \pi]$ и $L_2[-\pi, \pi]$ является фундаментальной. В пространстве $C[-\pi, \pi]$ последовательность $f_n(x)$ фундаментальной не является.

Для оценки погрешности аппроксимации воспользуемся соотношением $\varphi_n(x) \leq f_n(x) \leq \psi_n(x)$ (рис. 3), где $\psi_n(x) = (\pi/2)^{n-1} \cdot x$, $x \in [0, \pi/2]$, $n \in \mathbb{N}$. Функции $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$ построены из условия равенства производных в нуле $\varphi'_n(0) = \psi'_n(0) = f'_n(0)$, что позволяет получить узкий интервал для оценки погрешности аппроксимации.

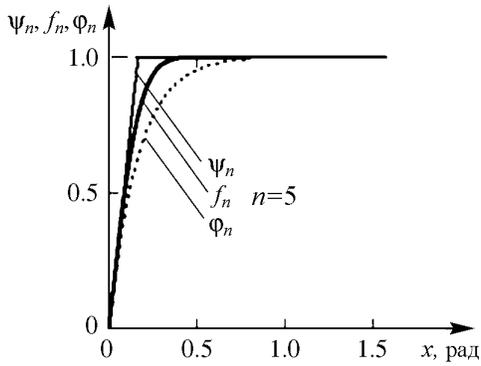


Рис. 3. Графики ограничивающих функций

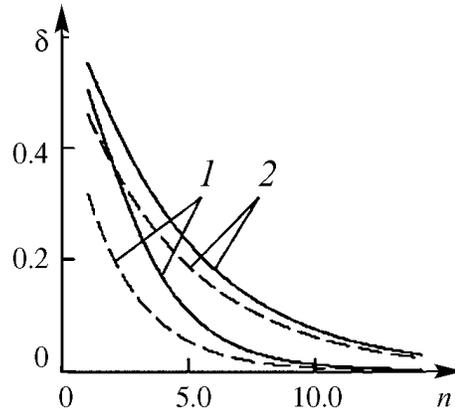


Рис. 4. Графики оценок относительной погрешности

В пространстве $L_1[0, \pi/2]$ оценки для абсолютной и относительной погрешности, соответственно, будут

$$(2/\pi)^{n-1}/2 \leq \|f_n(x) - f_0(x)\|_{L_1[0, \pi/2]} \leq (2/\pi)^{n-1}(1 - \exp(-(\pi/2)^n));$$

$$\frac{(2/\pi)^n}{2} \leq \left(\|f_n(x) - f_0(x)\|_{L_1[0, \pi/2]} \right) / (\pi/2) \leq (2/\pi)^n(1 - \exp(-(\pi/2)^n)).$$

Для пространства $L_2[0, \pi/2]$ эти оценки принимают, соответственно, вид

$$\left(\frac{(2/\pi)^{n-1}}{3} \right)^{1/2} \leq \|f_n(x) - f_0(x)\|_{L_2[0, \pi/2]} \leq \left((2/\pi)^{n-1} \frac{1 - \exp(-2(\pi/2)^n)}{2} \right)^{1/2};$$

$$\left(\frac{(2/\pi)^n}{3} \right)^{1/2} \leq \left(\|f_n(x) - f_0(x)\|_{L_2[0, \pi/2]} \right) / (\pi/2)^{1/2} \leq \left((2/\pi)^n \frac{1 - \exp(-2(\pi/2)^n)}{2} \right)^{1/2}.$$

Графики верхних и нижних оценок относительной погрешности δ в зависимости от $n \in \mathbb{N}$ для пространства $L_1[0, \pi/2]$ (кривые 1) и пространства $L_2[0, \pi/2]$ (кривые 2) изображены на рис. 4.

3. Примеры аппроксимации

В последовательности аппроксимирующих функций (2) в качестве постоянного множителя использовалось число $\pi/2$, хотя понятно, что возможно взять и другой множитель. Более того, множитель может быть и переменным. Вместо синуса в предложенном методе аппроксимации может быть использован косинус и другие тригонометрические функции, а также их комбинации. Например, используя процедуру $f(x) = \cos(S(S...(S(x))))$, где $S(x) = (\pi/2) \sin x$, мы можем получить последовательность аппроксимирующих функций, описывающих кратковременные импульсы (рис. 5).

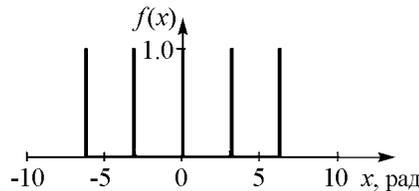


Рис. 5. График аппроксимирующей функции, описывающей импульсные процессы

Заметим, что, несмотря на существенно нелинейный вид графика, аппроксимирующие функции являются аналитическими и, следовательно, допускают применение аналитических методов исследования. Эти функции могут быть использованы для математических моделей, описывающих передачу сигналов, механические системы с ударными взаимодействиями и т.д.

Предложенные методы аппроксимации позволяют также аппроксимировать ступенчатые функции с разной длиной промежутков, соответствующих положительным и отрицательным значениям исходной ступенчатой зависимости. Например, если в качестве начальной функции мы возьмем $f_1(x) = -0.7 + \sin x$, то, используя аппроксимирующую процедуру (2), мы получим последовательность функций, графики которых изображены на рис. 6. Заметим при этом, что можно построить аппроксимации для ступенчатых функций с любым соотношением промежутков, соответствующих положительным и отрицательным значениям исходной ступенчатой функции.

На рис. 7 приводятся примеры аппроксимации непериодических ступенчатых функции с помощью предложенной процедуры.

Заметим, что доказанная ранее теорема носит общий характер, справедлива для произвольной ступенчатой функции. Так, например, произвольную периодическую ступенчатую функцию можно представить в виде линейной комбинации $f(x) = \sum_{i=1}^k h_i f_{0i}(x)$, $h_i \in \mathbb{R}$ сдвинутых по фазе и по оси ординат сигнум-функций $f_{0i}(x) = \text{sign}(\sin(l_i x - x_i))$, $l_i, x_i \in \mathbb{R}$. Согласно доказанной теореме, в пространствах $L_1[-\pi, \pi]$ и $L_2[-\pi, \pi]$ существует сходимость $\|f_{0i}(x) - f_{ni}(x)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \forall i$, поэтому функция $f_n(x) = \sum_{i=1}^k h_i f_{ni}(x)$ сходится по норме к функции $f(x)$, так как

$$\|f(x) - f_n(x)\| = \left\| \sum_{i=1}^k h_i f_{0i}(x) - \sum_{i=1}^k h_i f_{ni}(x) \right\| \leq \sum_{i=1}^k |h_i| \cdot \|f_{0i}(x) - f_{ni}(x)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

В данной работе предлагаются также и некоторые другие методы аппроксимации кусочно-линейных функций. Например, функцию $f(x) = ((P-1)/A(x)) \cos((\pi/2)x)$, где $A(x) = (P^2 - (P-1)^2 \sin^2((\pi/2)x))^{1/2}$, при достаточно больших значениях параметра P можно использовать для аппроксимации ступенчатых функций. Функции $f_1(x) = (2/\pi) \arcsin((1 - (1/P)) \sin((\pi/2)x))$ и $f_2(x) = (2/\pi) \arcsin((1 - (1/P)) \times \sin((\pi/2)x f(x)))$ можно использовать для аппроксимации пилообразных кусочно-

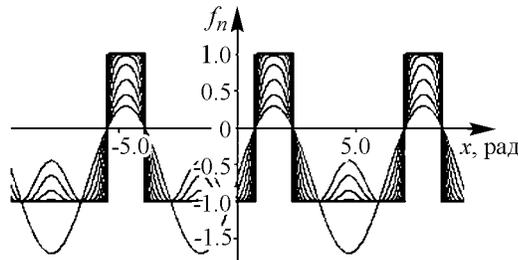


Рис. 6. Аппроксимация периодической ступенчатой функции с различной длиной промежутков знакопостоянства функции

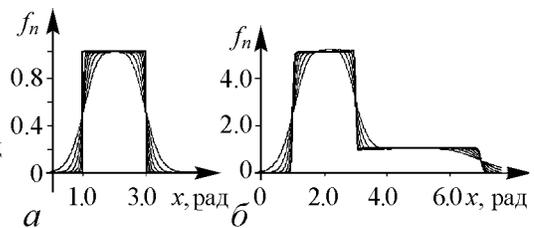


Рис. 7. Примеры аппроксимации ступенчатых непериодических функций

линейных функций. Для аппроксимации функции $f(x) = |x|$ можно использовать такие аналитические функции, как

$$f(x) = (B^2(x) + 2P) / 2PB(x) \text{ и } f(x) = x + 2/B(x), \text{ где } B(x) = Px + ((Px)^2 + 2P)^{1/2}.$$

4. Численная проверка

Численную проверку предложенной аппроксимирующей процедуры проведем на примере исследования динамики инерционно-импульсной бесступенчатой передачи. Известно [4], что из конструкции инерционно-импульсной бесступенчатой передачи на основе планетарной передачи с неуравновешенными сателлитами можно исключить слабые звенья (механизмы свободного хода) при условии, что момент сопротивления, действующий на ведомый вал, является знакопеременным. Динамику такой передачи можно описать существенно нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка

$$A_1 \ddot{\beta} + A_2 (\omega - \dot{\beta})^2 - A_3 \omega^2 = -M_C,$$

где $A_1 = B_1 + b_1 \cos \psi$; $A_2 = a_2 \sin \psi$; $A_3 = a_3 \sin \psi$, $\psi = q(\omega t - \beta)$; B_1, b_1, a_2, a_3, q – постоянные коэффициенты, включающие параметры передачи; $M_C = M_1 \text{sign}(\dot{\beta}) + M_0$ – момент сопротивления, действующий на ведомый вал ($M_0, M_1 \equiv \text{const}$); $\omega \equiv \text{const}$ – угловая скорость ведущего вала; β – угол поворота ведомого вала, « \cdot » $\equiv d/dt$ – оператор дифференцирования по времени t . Сигнум-функция $\text{sign}(\dot{\beta})$ является существенно нелинейной, что затрудняет проведение аналитических исследований динамики инерционно-импульсной передачи. Кроме того, эта функция не является периодической. С помощью предложенных методов (2) аппроксимируем сигнум-функцию, например, аналитической функцией вида $\text{sign}(\dot{\beta}) \approx f_6(\dot{\beta}/10)$.

С целью сравнения проведем численное решение дифференциального уравнения движения с сигнум- и аппроксимирующей функциями для конкретных параметров передачи по методу Рунге–Кутты. Фазовые траектории на фазовой плоскости $(\beta, \dot{\beta})$ с выходом на периодическое решение изображены на рис. 8. Здесь сплошной линией изображено решение, полученное при использовании в математической модели передачи разрывной сигнум-функции, пунктирной линией – при использовании аналитической аппроксимации. Утолщенная линия на рис. 8 соответствует периодическому решению. Погрешность результатов, судя по рисунку, является невысокой, что говорит о хорошей сходимости предложенных аппроксимирующих процедур. Более того, погрешность аппроксимации можно уменьшить до сколь угодно малой величины, увеличивая число вложенных функций.

Описанные методы аппроксимации лишены недостатков разложения функций

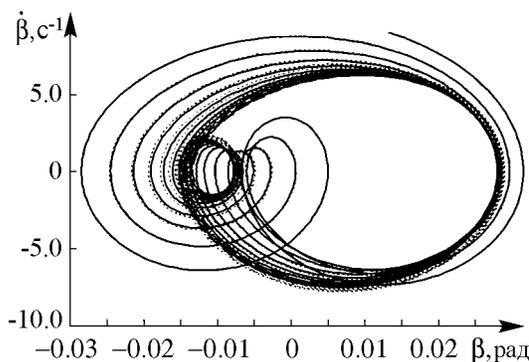


Рис. 8. Фазовые траектории при использовании сигнум-функции и её аппроксимации

в ряды Фурье и могут найти широкое применение в решении прикладных задач. Аппроксимация ступенчатых функций производится с помощью тригонометрических функций, которые стандартным образом реализуются в компьютерных программах.

Заметим также, что предложенные аппроксимирующие функции являются непрерывными и аналитическими и даже в большей степени, чем ступенчатые функции, отвечают реальным процессам, так как в действительности даже скачкообразные процессы происходят хоть и за короткие, но не нулевые промежутки времени.

Библиографический список

1. *Helmberg G.* The Gibbs phenomenon for Fourier interpolation // *J. Approx. Theory.* 1994. Vol. 78. P. 41.
2. *Жук В.В., Натансон Г.И.* Тригонометрические ряды Фурье и элементы теории аппроксимации. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983. 188 с.
3. *Алюков С.В.* Аппроксимация ступенчатых функций в задачах математического моделирования // *Математическое моделирование.* 2011. Т. 23, № 3. С. 75.
4. *Алюков С.В.* Динамика инерционного трансформатора вращающего момента без механизмов свободного хода. Владимир: ВПИ, 1983, автореферат диссертации... канд. техн. наук.

*Южно-Уральский государственный
университет, Челябинск*

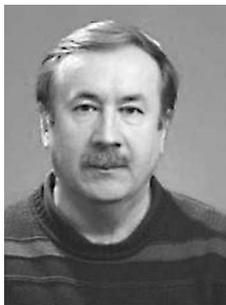
*Поступила в редакцию 26.04.2011
После доработки 11.07.2011*

MODELLING OF DYNAMIC PROCESSES WITH PIECEWISE LINEAR CHARACTERISTICS

S.V. Alyukov

Some problems of modelling of dynamic systems with piecewise linear characteristics are considered. New methods of approximation of the piecewise linear functions, in particular, step functions without disadvantages of the traditional Fourier series expansions are suggested. Some questions of convergence and error estimation of the approximation are explored.

Keywords: Modelling, approximation, piecewise linear functions, convergence, error of approximation.



Алюков Сергей Викторович – родился в городе Карталы Челябинской области (1957). Окончил Челябинский политехнический институт (1978), Уральский государственный университет (1986), Bowling Green State University (USA, 2007). После окончания ЧПИ работает в Южно-Уральском государственном университете доцентом. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук во Владимирском политехническом институте (1983) в области машиноведения, систем приводов, нелинейной динамики, математического моделирования, теории нелинейных колебаний. Опубликовал свыше 60 научных статей по направлениям, указанным выше. Автор восьми изобретений.

454080 Челябинск, пр. Ленина, 76
Южно-Уральский государственный университет
E-mail: alysergey@gmail.com