



НЕЛИНЕЙНОЕ МНОГОМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА–ПЛАНКА В ПРИБЛИЖЕНИИ СРЕДНЕГО ПОЛЯ ДЛЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СИСТЕМ РЕАКЦИОННО-ДИФфуЗИОННОГО ТИПА

С. Е. Курушина^{1,2}, Л. И. Громова¹, Е. А. Шаповалова¹

¹Самарский государственный аэрокосмический университет

²Самарский государственный университет путей сообщения

Приближение среднего поля развито для многокомпонентных стохастических систем реакционно-диффузионного типа. Получено многомерное нелинейное самосогласованное уравнение Фоккера–Планка, определяющее плотность вероятности состояния системы, которая описывает широко известную модель автокаталитической химической реакции (брюсселятор) с пространственно коррелированным мультипликативным шумом. Изучена эволюция плотности вероятности и статистические характеристики этой системы в области бифуркации Тьюринга. Численное исследование решений полученного уравнения для стохастического брюсселятора показывает, что при увеличении интенсивности шума в области бифуркации Тьюринга существуют различные типы решений: одномодальное решение, временная бимодальность и решение, при котором происходит многократная «перекачка» плотности вероятности через бимодальность.

Ключевые слова: Приближение среднего поля, системы реакционно-диффузионного типа, нелинейное самосогласованное уравнение Фоккера–Планка, численное решение уравнения Фоккера–Планка.

Введение

Приближение среднего поля является эффективным инструментом для изучения динамики систем различной природы под действием шума и шумоиндуцированных явлений [1]. Оно успешно применено для исследования шумоиндуцированного разделения фаз в консервативных системах с параметром порядка [2], механизма образования структур под действием шума [3], внутренних шумоиндуцированных фазовых переходов [4], неравновесных фазовых переходов первого рода, индуцированных аддитивным [5] и мультипликативным [6,7] шумами, шумоиндуцированных реентерабельных переходов в нелинейных цепочках [8], чисто индуцированных шумом неравновесных реентерабельных фазовых переходов второго порядка [9], реентерабельных фазовых переходов беспорядок–порядок–беспорядок и порядок–беспорядок–порядок с фазовой диаграммой, имеющей седловую точку [10].

В квантовой механике приближение среднего поля предполагает замену многочастичного гамильтониана взаимодействия одночастичным. Приближение среднего поля для пространственно распределенных систем предполагает, что взаимодействие между некоторой пространственной точкой и ее ближайшими соседями происходит посредством среднего поля, значение которого соответствует статистически среднему в данной точке. При этом подходящим способом осуществляется дискретизация пространства исходной распределенной системы и для значений поля в точках полученной регулярной решетки записывается уравнение Фоккера–Планка (УФП) для многомерной плотности распределения вероятности. Интегрирование полученного УФП по значениям поля во всех точках, кроме данной, приводит к УФП для одномерной плотности распределения вероятности значения поля в данной точке. В последнем уравнении условные средние значения поля в соседних точках заменяются безусловным средним в данной точке [2].

Многие реальные физические, химические, биологические и т.д. системы являются многокомпонентными и их моделируют посредством систем дифференциальных уравнений в частных производных. Однако в [1–10] рассматриваются только однокомпонентные пространственно распределенные системы с аддитивным, мультипликативным или обоими видами шумов. Поэтому цель настоящей работы – развить МФТ для многокомпонентных стохастических реакционно-диффузионных систем, являющихся частным, но чрезвычайно важным случаем пространственно распределенных систем, и применить разработанный подход к исследованию эволюции плотности вероятности и статистических характеристик в процессе формирования пространственных структур в модели «брюсселятор» [11], в которую включены флуктуации параметра.

1. Приближение среднего поля для многокомпонентных стохастических реакционно-диффузионных систем

Одной из математических моделей, описывающих пространственно-временную динамику реальных многокомпонентных пространственно распределенных систем, находящихся под влиянием внешней флуктуирующей среды, и учитывающих внутренние шумы, является система стохастических уравнений реакционно-диффузионного типа [12]

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = f_i(x_1, \dots, x_n) + g_i(x_1, \dots, x_n)\xi_i(\mathbf{r}, t) + \eta_i(\mathbf{r}, t) + D_i \nabla^2 x_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

В уравнении (1) x_i – функции, определяющие состояние системы, содержащей n компонентов; $f_i(x_1, \dots, x_n)$, $g_i(x_1, \dots, x_n)$ – нелинейные функциональные зависимости, определяющие взаимодействие и эволюцию компонентов x_i в пространстве и во времени; D_i – коэффициенты диффузии компонентов. Аддитивные случайные гауссовы поля $\eta_i(\mathbf{r}, t)$ с нулевым средним и корреляционными функциями $K[\eta_i(\mathbf{r}, t), \eta_{i'}(\mathbf{r}', t')] = 2\zeta_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t')\delta_{ii'}$ моделируют внутренние белые шумы, при наличии которых и в отсутствие мультипликативных шумов система демонстрирует равновесные свойства. Интенсивности внутренних шумов измеряются параметрами ζ_i . Здесь и далее для корреляционной функции используется обозначение $K[F_1, F_2]$, определяемое равенством $K[F_1, F_2] = \langle F_1 F_2 \rangle - \langle F_1 \rangle \langle F_2 \rangle$. Мультипликативные случайные поля $\xi_i(\mathbf{r}, t)$ моделируют внешние шумы, которые уведут систему от равновесия. Они также гауссовы [13] с нулевым средним, но предполагается, что они однородны и изотропны в пространстве и могут иметь некоторую пространственную структуру: $K[\xi_i(\mathbf{r}, t), \xi_{i'}(\mathbf{r}', t')] = 2\theta_i \Phi_i(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)\delta(t - t')\delta_{ii'}$, где

$\Phi_i(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ – пространственная корреляционная функция внешних шумов с интенсивностями θ_i . Далее для определенности будем использовать экспоненциальные пространственные корреляционные функции $\Phi_i(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \exp[-k_{fi}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)]$. Параметры k_{fi} характеризуют корреляционные длины r_{fi} шумов: $r_{fi} = 1/k_{fi}$.

В [2] изложены главные аспекты приближения среднего поля в приложении к неконсервативным системам с параметром порядка (модель А в терминах литературы критических явлений). Проведем дискретизацию непрерывного d -мерного пространства системы (1) и получим регулярную d -мерную решетку с размером ячейки Δr и точками, положение которых будем характеризовать векторами \mathbf{r}_l , $l = 1, \dots, p$. Таким образом, независимо от размерности решетки каждой точке решетки будет соответствовать только один индекс. Предполагаем, что взаимодействие осуществляется только между ближайшими соседями, что позволяет аппроксимировать оператор Лапласа конечно-разностным выражением с разностью второго порядка. В результате дискретизации система (1) заменяется на систему $n \times p$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx_{il}}{dt} &= F_{il}(t), \quad i = 1, \dots, n; \quad l = 1, \dots, p, \\ F_{il}(t) &= f_{il} + g_{il}\xi_{il}(t) + \eta_{il}(t) + \frac{D_i}{2d(\Delta r)^2} \sum_{l'} \Lambda_{ll'} x_{il'}. \end{aligned} \quad (2)$$

В уравнении (2) введены следующие обозначения: $f_{il} = f_i(x_{1l}, \dots, x_{nl})$, $g_{il} = g_i(x_{1l}, \dots, x_{nl})$. $\sum_{l'} \Lambda_{ll'}$ – дискретный аналог оператора Лапласа [2] $\sum_{l'} \Lambda_{ll'} = \sum_{l'} (\delta_{nn(l),l'} - 2d\delta_{l,l'})$, где $nn(l)$ – совокупность индексов всех точек, являющихся ближайшими соседями точки с индексом l . Дискретные шумы $\eta_{il}(t)$, $\xi_{il}(t)$ имеют корреляционные функции

$$\begin{aligned} K[\eta_{il}(t), \eta_{i'l'}(t')] &= 2\xi_i \frac{\delta_{ll'}}{(\Delta r)^d} \delta(t - t') \delta_{ii'} \quad \text{и} \\ K[\xi_{il}(t), \xi_{i'l'}(t')] &= 2\theta_i \Phi_{i,|l-l'|} \delta(t - t') \delta_{ii'}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь использован тот факт, что непрерывная дельта-функция $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ может быть обычным способом заменена отношением, содержащим дельта-символ Кронекера и шаг решетки $\delta_{ll'}/(\Delta r)^d$, и $\Phi_{i,|l-l'|}$ – соответствующая дискретизация функции $\Phi_i(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$. Необходимые далее значения $\Phi_{i,0}$ могут быть найдены численно [14].

Соответствующее уравнениям (2) уравнение Фоккера–Планка в интерпретации Стратоновича [15] для многомерной плотности вероятности $\tilde{w}(x_{11}, \dots, x_{1l}, \dots, x_{1p}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nl}, \dots, x_{np}; t) = \tilde{w}(\{x_1, \dots, x_n\}, t)$ для всех точек решетки будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}(\{x_1, \dots, x_n\}, t)}{\partial t} &= \\ &= - \sum_{i=1}^n \sum_{l'=1}^p \frac{\partial}{\partial x_{il'}} \left\{ \left(\langle F_{il'}(t) \rangle + \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^p \int_{-\infty}^0 K \left[\frac{\partial F_{il'}(t)}{\partial x_{jm}} \right], F_{jm}(\tau) \right) d\tau \right\} \tilde{w} + \\ &+ \sum_{i,j=1}^n \sum_{m,l'=1}^p \frac{\partial^2}{\partial x_{il'} \partial x_{jm}} \left\{ \left(\int_{-\infty}^0 K [F_{il'}(t), F_{jm}(\tau)] d\tau \right) \tilde{w} \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

С учётом (2) входящие в уравнение (4) корреляторы легко вычисляются:

$$\begin{aligned}
K\left[\frac{\partial F_{il'}(t)}{\partial x_{jm}}, F_{jm}(\tau)\right] &= \frac{\partial g_{il'}}{\partial x_{jm}} g_{jm} K[\xi_{il'}(t), \xi_{jm}(\tau)] \delta_{ij} \delta_{ml'}, \quad m = l, nn(l), \\
K[F_{il'}(t), F_{jm}(\tau)] &= \\
&= \left(g_{il'} g_{jm} K[\xi_{il'}(t), \xi_{jm}(\tau)] + K[\eta_{il'}(t), \eta_{jm}(\tau)]\right) \delta_{ij} \delta_{ml'}, \quad m = l, nn(l).
\end{aligned} \tag{5}$$

После подстановки в уравнение (4) корреляторов (3), (5) и некоторых простых преобразований уравнение для многомерной плотности вероятности $\tilde{w}(\{x_1, \dots, x_n\}, t)$ примет вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{w}(\{x_1, \dots, x_n\}, t)}{\partial t} &= \\
&= - \sum_{i=1}^n \sum_{l'=1}^p \frac{\partial}{\partial x_{il'}} \left[f_{il'} + \frac{D_i}{2d(\Delta r)^2} \left(\sum_{m=nn(l')} x_{im} - 2dx_{il'} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{m=l', nn(l')} \left(\xi_i \frac{\partial}{\partial x_{im}} - \theta_i g_{il'} \Phi_{i, |l'-m|} \frac{\partial}{\partial x_{im}} g_{im} \right) \right] \tilde{w}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Выберем одну точку с индексом l . Чтобы получить многомерную плотность вероятности $w(x_{1l}, \dots, x_{il}, \dots, x_{nl}, t) = w(\{x\}, t)$ для одной точки, необходимо проинтегрировать $\tilde{w}(x_{11}, \dots, x_{1l}, \dots, x_{1p}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nl}, \dots, x_{np}; t)$ по всем переменным, исключая $x_{1l}, \dots, x_{il}, \dots, x_{nl}$:

$$\begin{aligned}
w(x_{1l}, \dots, x_{il}, \dots, x_{nl}; t) &= \\
&= \int \tilde{w}(x_{11}, \dots, x_{1l}, \dots, x_{1p}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nl}, \dots, x_{np}; t) \left[\prod_{k \neq l} dx_{1k} \dots dx_{ik} \dots dx_{nk} \right].
\end{aligned}$$

Используем свойство плотности вероятности исчезать на бесконечности: $\tilde{w}(\{x_1, \dots, x_n\}, t) \rightarrow 0$ при $x_{il} \rightarrow \pm\infty$, $i = 1, \dots, n$; $l = 1, \dots, p$. Тогда

$$\int \frac{\partial}{\partial x_{im}} (g_{im} \tilde{w}) \left[\prod_{k \neq l} dx_{1k} \dots dx_{ik} \dots dx_{nk} \right] = \begin{cases} 0, & m \neq l, \\ \frac{\partial}{\partial x_{il}} [g_{il} w(\{x\}, t)], & m = l. \end{cases} \tag{7}$$

Согласно определению условной вероятности,

$$\begin{aligned}
\int x_{im} \tilde{w} \left[\prod_{k \neq l} dx_{1k} \dots dx_{ik} \dots dx_{nk} \right] &= \int x_{im} w(x_{1l}, \dots, x_{im}, x_{il}, \dots, x_{nl}; t) dx_{im} = \\
&= \left[\int x_{im} w(x_{im} | x_{1l}, \dots, x_{il}, \dots, x_{nl}; t) dx_{im} \right] w(x_{1l}, \dots, x_{il}, \dots, x_{nl}; t) = \\
&= w(\{x\}; t) E(x_{im} | x_{1l}, \dots, x_{il}, \dots, x_{nl}; t).
\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $E(x_{im} | x_{1l}, \dots, x_{il}, \dots, x_{nl}; t)$ – условное математическое ожидание в соседних с l точках.

Окончательно, с учетом (7), (8) для многомерной плотности вероятности в одной точке получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(\{x\}, t)}{\partial t} = & \\ = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{il}} \left[f_{il} + \frac{D_i}{2d(\Delta r)^2} \left(\sum_{m=nn(l)} E(x_{im}|x_{1l}, \dots, x_{il}, \dots, x_{nl}; t) - 2dx_{il} \right) - \right. & (9) \\ & \left. - \zeta_i \frac{\partial}{\partial x_{il}} - \theta_i \Phi_{i,0} g_{il} \frac{\partial}{\partial x_{il}} g_{il} \right] w. \end{aligned}$$

Учитывая, что x_{il} связаны уравнениями (2), считаем, что приближение среднего поля заключается в предположении, что условные средние $E(x_{im}|x_{1l}, \dots, x_{il}, \dots, x_{nl}; t)$ в уравнении (9) могут быть заменены на условное среднее $E(x_{il}|x_{1l}, \dots, x_{i-1l}, x_{i+1l}, \dots, x_{nl}; t)$:

$$E(x_{im}|x_{1l}, \dots, x_{il}, \dots, x_{nl}; t) = E(x_{il}|x_{1l}, \dots, x_{i-1l}, x_{i+1l}, \dots, x_{nl}; t), \quad (10)$$

$$E(x_{il}|x_{1l}, \dots, x_{i-1l}, x_{i+1l}, \dots, x_{nl}; t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_{il} w(x_{il}|x_{1l}, \dots, x_{i-1l}, x_{i+1l}, \dots, x_{nl}; t) dx_{il},$$

$$w(x_{il}|x_{1l}, \dots, x_{i-1l}, x_{i+1l}, \dots, x_{nl}; t) = w(\{x\}; t) / \int_{-\infty}^{+\infty} w(x_{1l}, \dots, x_{il}, \dots, x_{nl}; t) dx_{il}. \quad (11)$$

В таком приближении точное УФП (9) преобразуется в приближенное

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(\{x\}, t)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{il}} \left[f_{il} + \frac{D_i}{(\Delta r)^2} (E(x_{il}|x_{1l}, \dots, x_{i-1l}, x_{i+1l}, \dots, x_{nl}; t) - x_{il}) - \right. & \\ & \left. - \zeta_i \frac{\partial}{\partial x_{il}} - \theta_i \Phi_{i,0} g_{il} \frac{\partial}{\partial x_{il}} g_{il} \right] w. \end{aligned} \quad (12)$$

Далее индекс l опустим для простоты записи.

Уравнения (10)–(12) образуют самосогласованную систему, для которой в отличие от одномерного случая невозможно аналитически записать стационарное решение даже в неявном виде. Численное решение (10)–(12) можно получить, используя работы [16–19].

2. Пространственно распределенный стохастический брюсселятор

Применим подход, развитый в разделе 1, к исследованию эволюции плотности вероятности системы, описывающей широко известную модель автокаталитической химической реакции (брюсселятор [11]) с пространственно коррелированным мультипликативным шумом. Одновременно изучим изменение некоторых статистических характеристик первого и второго порядков этой системы при увеличении интенсивности внешнего шума. В этой работе рассматривается область параметров, при которых в детерминированной системе возникает бифуркация Тьюринга.

Брюсселятор – модель простой автокаталитической химической реакции, имеющей тримолекулярный шаг [11]. Концентрации исходных и конечных веществ в этой реакции поддерживаются постоянными. Влияние внешнего флуктуирующего

окружения может привести к тому, что концентрации исходных и конечных веществ сами станут случайными функциями. Это, в свою очередь, приводит к необходимости включения шумов в кинетические уравнения детерминированной модели. Предположим, что наиболее подвержено влиянию внешней случайной среды исходное вещество, имеющее концентрацию B_{in} . Тогда кинетические уравнения рассматриваемой реакции будут иметь вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1}{\partial t} &= A + x_1^2 x_2 - (B + 1 + \xi_1(\mathbf{r}, t))x_1 + D_1 \nabla^2 x_1, \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} &= -x_1^2 x_2 + (B + \xi_2(\mathbf{r}, t))x_1 + D_2 \nabla^2 x_2,\end{aligned}\quad (13)$$

где x_1, x_2 – концентрации промежуточных компонентов, D_1, D_2 – их коэффициенты диффузии; A, B_{in} – концентрации исходных веществ, причем $B_{in} = B + \xi_i(\mathbf{r}, t)$. Параметр B – пространственно-временное среднее концентрации исходного вещества B_{in} . Убыль концентрации x_1 происходит за счет двух распадов: с образованием одного из конечных веществ и с образованием промежуточного вещества x_2 и второго конечного вещества. Эти распады имеют различные скорости реакций, на которые внешние шумы влияют различным образом. Это учтено в уравнениях (13) включением в них различных некоррелированных между собой полей $\xi_i(\mathbf{r}, t)$. Статистические свойства полей $\xi_i(\mathbf{r}, t)$ описаны в разделе 1.

Система уравнений (13) является частным случаем уравнения (1) при $n = 2$. Поэтому, используя уравнение (12), для модели (13) немедленно можно записать многомерное одноточечное нелинейное самосогласованное УФП в интерпретации Стратоновича:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w(x_1, x_2, t)}{\partial t} &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ [-A - x_1^2 x_2 + (B + 1 + \theta_1)x_1 - D_1(E(x_1|x_2) - x_1)] w + \theta_1 \Phi_{1,0} x_1^2 \frac{\partial w}{\partial x_1} \right\} + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ [x_1^2 x_2 - Bx_1 - D_2(E(x_2|x_1) - x_2)] w + \theta_2 \Phi_{2,0} x_1^2 \frac{\partial w}{\partial x_2} \right\},\end{aligned}\quad (14)$$

$$E(x_1|x_2, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 w(x_1|x_2, t) dx_1,$$

$$E(x_2|x_1, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 w(x_2|x_1, t) dx_2,$$

$$w(x_1|x_2, t) = w(x_1, x_2, t) \Big/ \int_{-\infty}^{+\infty} w(x_1, x_2, t) dx_1,$$

$$w(x_2|x_1, t) = w(x_1, x_2, t) \Big/ \int_{-\infty}^{+\infty} w(x_1, x_2, t) dx_2.$$

Численные решения уравнения (14) получены с помощью конечно-разностной схемы [16].

На рис. 1–4 представлены характерные виды решений (14), полученных при различных значениях параметров задачи и интенсивности шума. Начальное

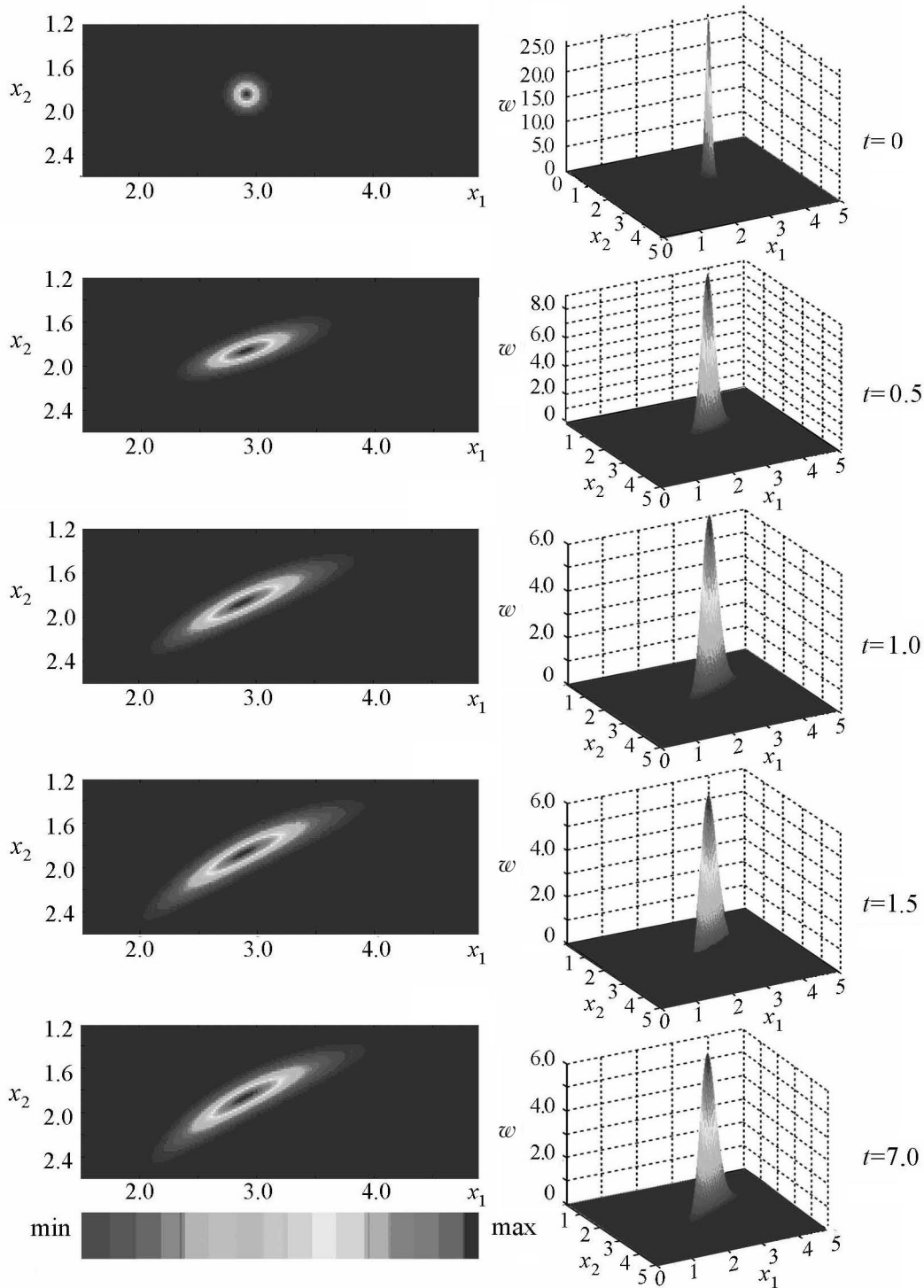


Рис. 1. Эволюция плотности вероятности (14) для модели (13) – одномодальное распределение (слева вид сверху). Градиент цвета, представленный на рисунке, визуализирует изменение $w(x_1, x_2, t)$ от минимума к максимуму. Параметры модели: $B = 5.5$, $\theta_1 = \theta_2 = 0.005$. Момент $t = 7$ соответствует установлению стационарного состояния

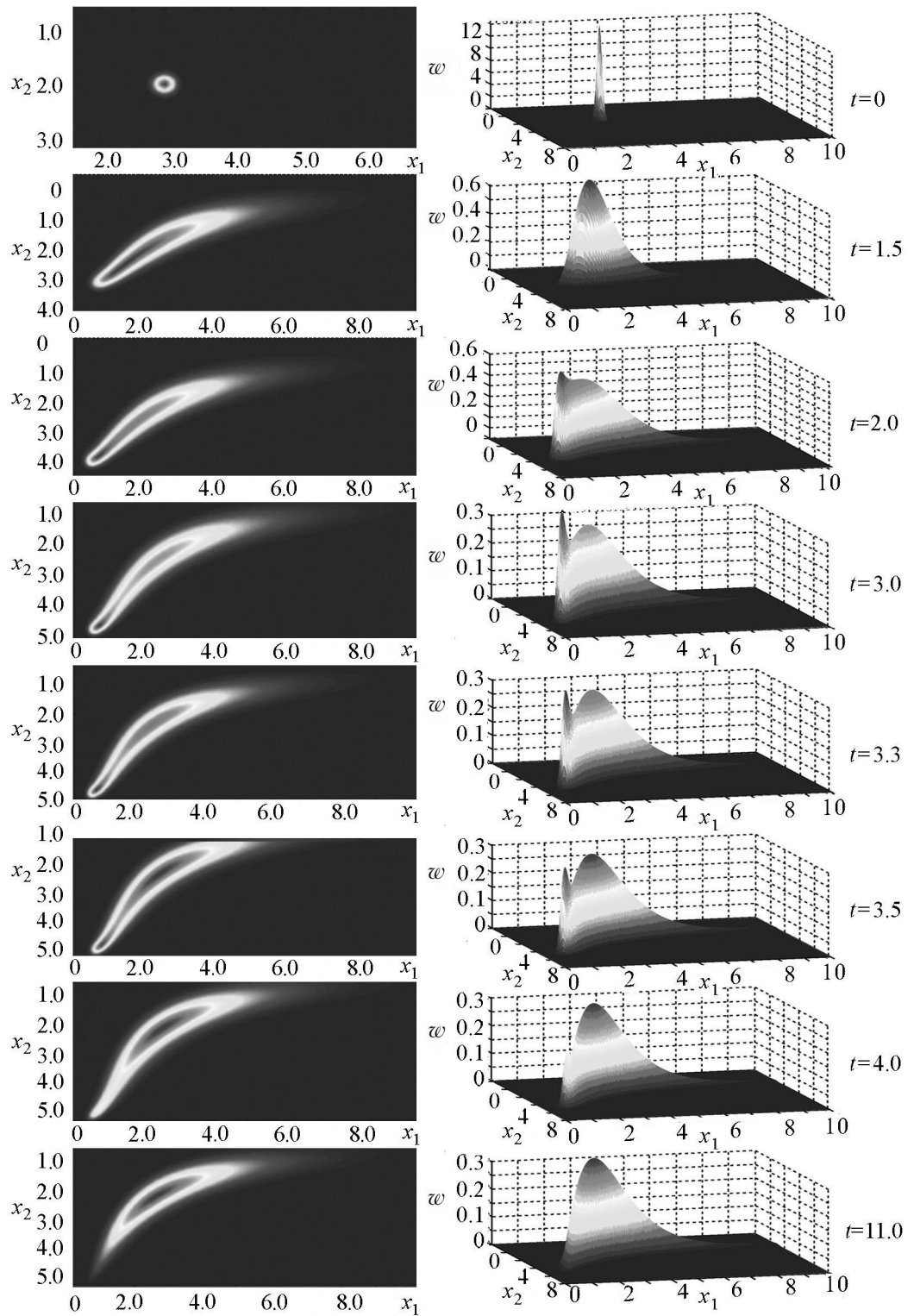


Рис. 2. Эволюция плотности вероятности (14) для модели (13). Временная бимодальность наблюдается в интервале времени $t \in [1.5, 4]$. Параметры модели: $B = 6.0$, $\theta_1 = \theta_2 = 0.09$. Момент $t = 11$ соответствует установлению статистически стационарного состояния

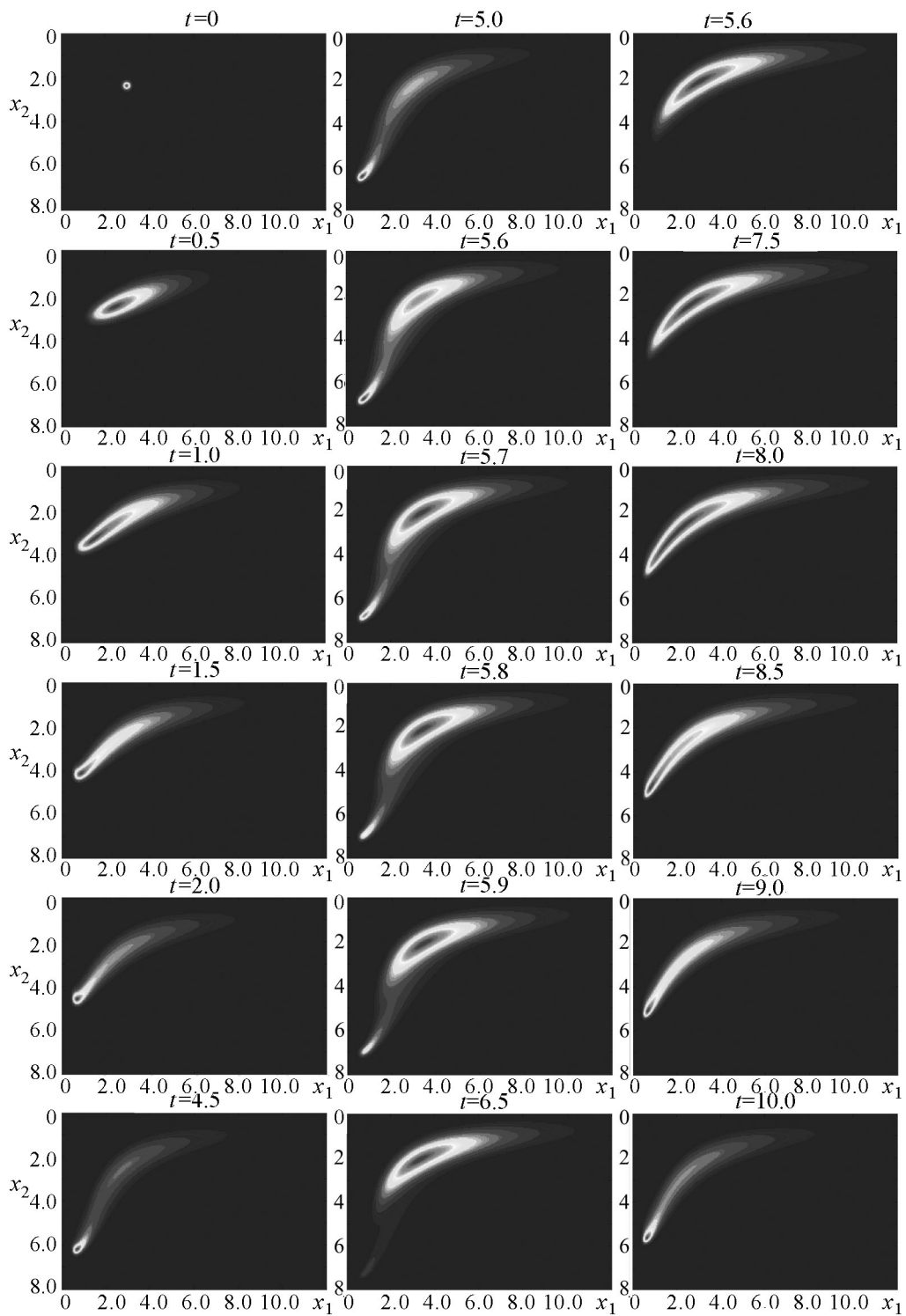


Рис. 3. Эволюция плотности вероятности (14) для модели (13) – «перекачка» плотности вероятности через бимодальность (вид сверху). Параметры модели: $B = 7.0$, $\theta_1 = \theta_2 = 0.1$. На рисунке представлен один «период» «перекачки». Последовательности кадров слева и справа соответствуют одномодальному распределению, в центре – бимодальному

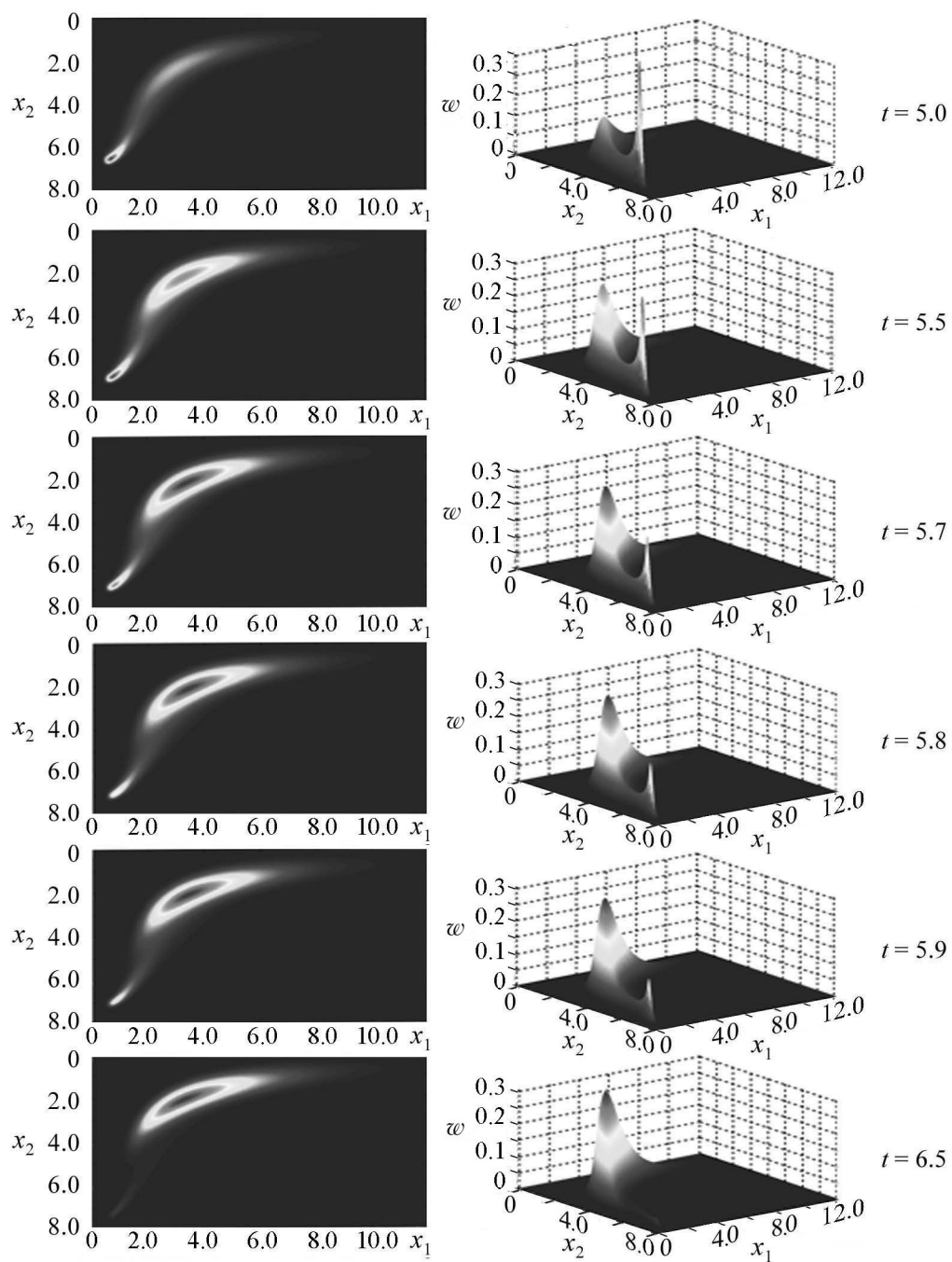


Рис. 4. «Перекачка» плотности вероятности через бимодальность (соответствует центральному ряду рис. 3)

распределение – гауссово с дисперсиями θ_1 и θ_2 и математическими ожиданиями, равными стационарным значениям x_{10} и x_{20} в отсутствие шума. Выбраны следующие, остающиеся постоянными при наших вычислениях, параметры для численного интегрирования (14): $A = 3$, $D_1 = 1$, $D_2 = 5$, $\Phi_{1,0} = \Phi_{2,0} = 1$. Остальные параметры указаны под рисунками. При данных A , D_1 и D_2 в детерминированном случае критическое значение параметра $B_c = 5.4833$.

Рис. 1 демонстрирует эволюцию плотности вероятности $w(x_1, x_2, t)$ в окрестности детерминированной точки бифуркации при малой интенсивности шума. Из рисунка видно, что симметрия начального распределения в процессе эволюции нарушается. Оно «размывается» и становится негауссовым. Распределение остается одномодальным в течение всего времени до достижения стационарного состояния. Следовательно, несмотря на шум, состояние системы (13) остается упорядоченным.

Соответствующие зависимости дисперсии концентраций x_1 и x_2 от времени при увеличении интенсивности шума показаны на рис. 5. Из рисунка видно, что чем больше интенсивность внешнего шума, тем быстрее возрастет дисперсия и тем больше ее значение в статистически стационарном состоянии. Зависимости среднего и наиболее вероятного значений от времени при разных интенсивностях шума демонстрирует рис. 6. Увеличение интенсивности шума приводит к увеличению разности между средним и соответствующим наиболее вероятным в статистически стационарном состоянии. Это более наглядно демонстрирует рис. 7.

Все приведенные выше результаты вполне ожидаемы.

Совершенно иная картина наблюдается при удалении от детерминированной точки бифуркации. На рис. 2 представлен более сложный тип эволюции плотности вероятности $w(x_1, x_2, t)$. Мы видим, что сначала сохраняется одномодальное распределение, но оно

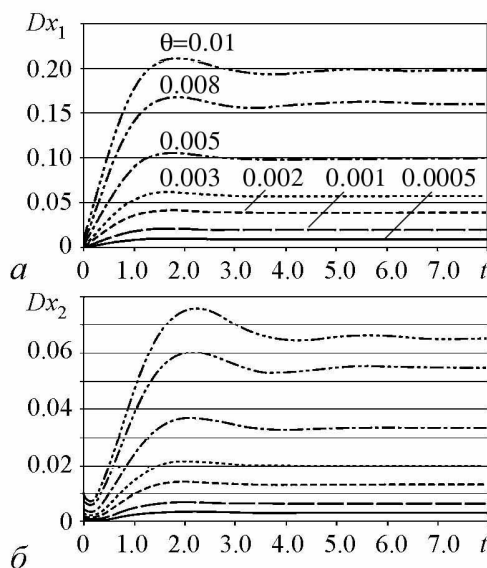


Рис. 5. Зависимости дисперсии Dx концентраций $x_{1,2}$ от времени при увеличении интенсивности шума первого компонента (а), второго компонента (б). Значения $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ указаны над соответствующими линиями. $B = 5.5$

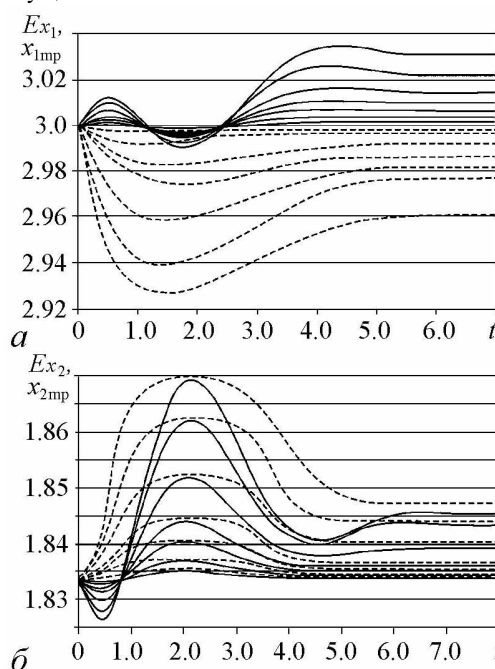


Рис. 6. Зависимости среднего Ex (сплошные линии) и наиболее вероятного x_{mp} (пунктирные линии) значений от времени при увеличении интенсивности шума для первого вещества (а) и второго вещества (б). $B = 5.5$; θ_1, θ_2 – как на рис. 5. Чем больше интенсивность шума, тем больше отклонение значений Ex и x_{mp} от стационарных значений x_{10} и x_{20} ($t = 0$)

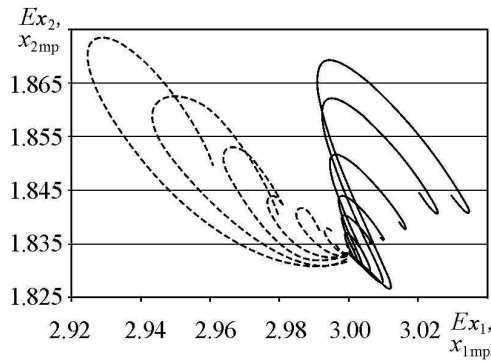


Рис. 7. Изменение среднего Ex (сплошные линии) и наиболее вероятного x_{mp} (пунктирные линии) значений x_1 и x_2 при увеличении интенсивности шума для одномодального распределения. $B = 5.5$; θ_1, θ_2 – как на рис. 5. Чем больше интенсивность шума, тем больше размер «витка» кривой

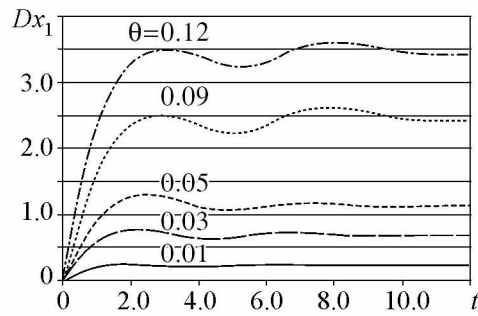


Рис. 8. Зависимости дисперсии Dx_1 концентрации x_1 от времени при увеличении интенсивности шума. Значения $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ указаны над соответствующими линиями. $B = 6.0$

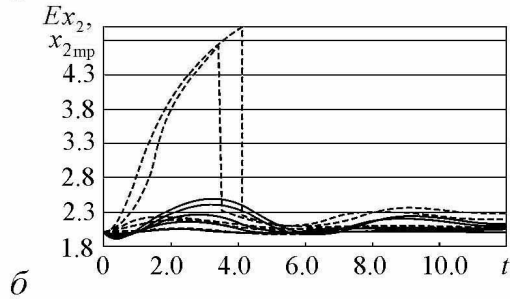
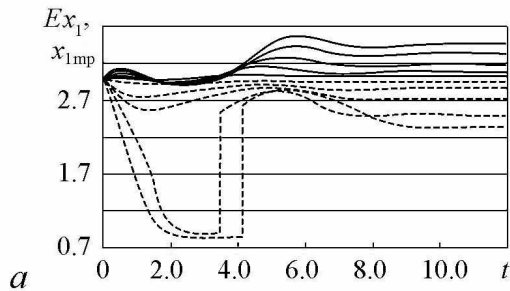


Рис. 9. Зависимости среднего Ex (сплошные линии) и наиболее вероятного x_{mp} (пунктирные линии) значений от времени при увеличении интенсивности шума для первого вещества (а) и второго вещества (б). $B = 6.0$; θ_1, θ_2 – как на рис. 8. Чем больше интенсивность шума, тем больше отклонение значений Ex и x_{mp} от стационарных x_{10} и x_{20} ($t = 0$). Исчезновению бимодальности соответствует скачок наиболее вероятного (разрыв первого рода)

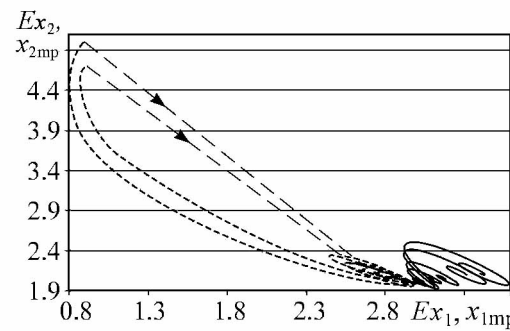


Рис. 10. Изменение среднего Ex (сплошная линия) и наиболее вероятного x_{mp} (пунктирная линия) концентраций x_1 и x_2 при увеличении интенсивности шума. $B = 6.0$, остальные параметры модели как на рис. 8. Исчезновению бимодальности соответствует срыв с витка кривой $x_{2mp}(x_{1mp})$, показанный на рисунке линией с длинным штрихом и стрелкой

сильно «размывается» и максимум плотности дрейфует от начального положения. Затем в некоторый момент времени происходит расщепление плотности с образованием двух максимумов. Бимодальное распределение вероятности «живет» в течение определенного промежутка времени. При этом между максимумами происходит конкурентная борьба, в результате которой один из максимумов подавляет другой. Распределение вновь становится одномодальным. То есть в упорядоченной фазе наблюдается временная бимодальность (transient bimodality).

Поведение статистических характеристик при увеличении интенсивности шума также изменяется. Зависимости дисперсии Dx_1 концентрации первого вещества от времени при увеличении интенсивности шума показано на рис. 8. Соответствующие изменения средних и наиболее вероятных демонстрируют рис. 9 и 10. При шумах $\theta_1, \theta_2 < 0.09$ зависимости $Dx_1(t)$, $Ex_i(t)$, $x_{imp}(t)$, аналогичны зависимостям, приведенным на рис. 5–7. Распределение остается одномодальным. При $\theta_1, \theta_2 \geq 0.09$ в зависимости $Dx_1(t)$ наблюдается хорошо выраженный «провал», соответствующий исчезновению временной бимодальности. При этом в зависимостях от времени наиболее вероятных значений x_1 и x_2 наблюдается разрыв первого рода. На рис. 10 исчезновению временной бимодальности соответствует срыв с вилка кривой $x_{2mp}(x_{1mp})$.

Неожиданное решение (14) появляется при дальнейшем удалении от детерминированной точки бифуркации (рис. 3, 4, 11, 12). Сначала плотность дрейфует от начального положения к границе области интегрирования. Затем, как и при временной бимодальности, происходит расщепление плотности при $t \sim 5$ (см. рис. 3, 4).

Наблюдается своеобразная «перекачка» плотности вероятности из одного максимума в другой через бимодальность до момента времени $t \sim 6.5$ (см. рис. 4). Можно заметить, что длительности существования одно- и бимодального распределений сравнимы по порядку величины. Потом снова происходит дрейф к границе. Процесс повторяется до установления статистически стационарного состояния, при этом происходит постепенное уменьшение размера вилка кривой $Ex_2(Ex_1)$ (см. рис. 12). На рис. 12 показаны два срыва с вилка кривой $x_{2mp}(x_{1mp})$, что соответствует двукратному появлению и исчезновению «перекачки» плотности вероятности через бимодальность. Такое поведение плотности вероятности свидетельствует о многократном проявлении в упорядоченной фазе другого состояния (другой фазы), которой соответствует бимодальное распределение. Можно предположить, что наблюдается своего рода «переменяемость» фаз. Этот шумоиндуцированный эффект более подробно будет представлен в нашей будущей работе.

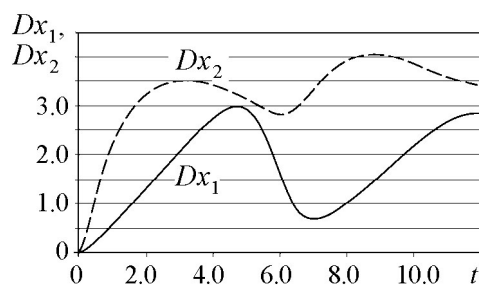


Рис. 11. Зависимости дисперсий Dx_1 и Dx_2 от времени при $B = 7.0$, $\theta_1 = \theta_2 = 0.1$. На рисунке представлен один «период» «перекачки»

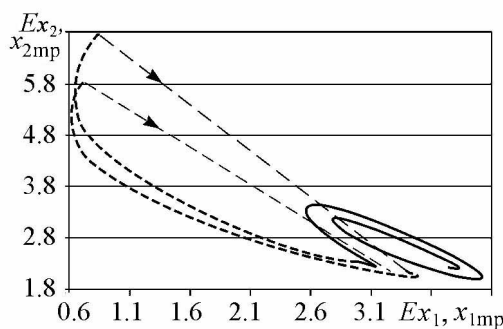


Рис. 12. Изменение среднего (сплошная линия) и наиболее вероятного (пунктирная линия) значений x_1 и x_2 при «перекачке». Представлены два «периода»

Таким образом, в результате численного изучения решений уравнения (14) мы обнаружили, что в области бифуркации Тьюринга при возрастании интенсивности внешнего шума могут возникать различные типы решений: одномодальное распределение, одномодальное распределение с временной бимодальностью и сложное распределение, при котором происходит чередование одно- и бимодального распределений до установления статистически стационарного состояния. Иными словами, при малой интенсивности шума наблюдается только упорядоченная фаза. Увеличение интенсивности шума приводит к появлению временной бимодальности (разупорядоченной фазы) в упорядоченной фазе. Дальнейший рост интенсивности шума еще больше нарушает упорядоченность: наблюдается «переменяемость» фаз, которая как бы «раскачивает» упорядоченное состояние.

Заключение

Приближение среднего поля развито для исследования состояния многокомпонентных стохастических реакционно-диффузионных систем. Мы полагаем, что в этом случае справедливо равенство (10). При этом учитывается нетривиальная пространственная структура, пространственная однородность и изотропность мультипликативных шумов. В таком приближении получено многомерное одноточечное нелинейное самосогласованное уравнение Фоккера–Планка для плотности вероятности состояния систем рассматриваемого типа.

Ограничения применения уравнений (10)–(12) возникают или вследствие ограничений применения приближения среднего поля, которые обсуждаются в работе [20], или вследствие ограничений применения уравнения Фоккера–Планка, которые сформулированы в работе [15].

Приближение среднего поля применено к исследованию эволюции системы, описывающей широко известную модель автокаталитической химической реакции с пространственно коррелированным мультипликативным шумом. В этой работе рассматривается область параметров, при которых в детерминированной системе возникает бифуркация Тьюринга.

В результате численного изучения решений многомерного одноточечного нелинейного самосогласованного уравнения Фоккера–Планка для стохастического пространственно распределенного брюсселятора мы обнаружили, что при малой интенсивности шума наблюдается только одномодальное распределение (упорядоченная фаза). Увеличение интенсивности шума приводит к появлению временной бимодальности (разупорядоченной фазы) в упорядоченной фазе. Дальнейший рост интенсивности шума еще больше нарушает упорядоченность: наблюдается «переменяемость» одномодального и бимодального распределений, то есть «переменяемость» фаз, которая «раскачивает» упорядоченное состояние. Изучено поведение во времени дисперсии, мат. ожидания и наиболее вероятного функций, определяющих состояние системы, при увеличении интенсивности внешнего шума и бифуркационного параметра. Показано, что при исчезновении временной бимодальности наиболее вероятное значение испытывает скачок первого рода.

Работа поддержана Минобрнауки РФ, государственное задание на выполнение работ на 2014–2016 годы, проект № 608 и грантами РФФИ 13-01-97005 p_поволжье_a, 13-01-97001 p_поволжье_a и 14-02-97030 p_поволжье_a.

Библиографический список

1. *Lindnera B., García-Ojalvo J., Neimand A., Schimansky-Geier L.* Effects of noise in excitable systems // *Physics Reports*. 2004. Vol. 392. 321.
2. *Ibañes M., García-Ojalvo J., Toral R., Sancho J.M.* Noise-induced phase separation: Mean-field results // *Phys. Rev. E*. 1999. Vol. 60. 3597.
3. *Buceta J., Ibañes M., Sancho J.M., Lindenberg K.* Noise-driven mechanism for pattern formation // *Phys. Rev. E*. 2003. Vol. 67. 021113.
4. *Carrillo O., Ibañes M., García-Ojalvo J., Casademunt J., Sancho J.M.* Intrinsic noise-induced phase transitions: Beyond the noise interpretation // *Phys. Rev. E*. 2003. Vol. 67. 046110.
5. *Zaikin A.A., García-Ojalvo J., Schimansky-Geier L.* Nonequilibrium first-order phase transition induced by additive noise // *Phys. Rev. E*. 1999. Vol. 60. R6275.
6. *Muller R., Lippert K., Kühnel A., Behn U.* First-order nonequilibrium phase transition in a spatially extended system // *Phys. Rev. E*. 1997. Vol. 56. 2658.
7. *Carrillo O., Ibañes M., Sancho J.M.* Noise induced phase transitions by nonlinear instability mechanism // *Fluct. Noise Lett.* 2002. Vol. 2. L1.
8. *Landa P.S., Zaikin A.A., Schimansky-Geier L.* Influence of additive noise on noise-induced phase transitions in nonlinear chains // *Chaos, Solitons and Fractals*. 1998. Vol. 9. 1367.
9. *Van den Broeck C., Parrondo J.M.R., Toral R., Kawai R.* Nonequilibrium phase transitions induced by multiplicative noise // *Phys. Rev. E*. 1997. Vol. 55. 4084.
10. *Buceta J., Parrondo J.M.R., and de la Rubia F.J.* Random Ginzburg–Landau model revisited: Reentrant phase transitions // *Phys. Rev. E*. 2001. Vol. 63. 031103.
11. *Prigogine I., Lefever R.* Symmetry breaking instabilities in dissipative systems. II. // *J. Chem. Phys.* 1968. Vol. 48. 1695.
12. *Kurushina S.E., Maximov V.V., Romanovskii Yu.M.* Spatial pattern formation in external noise: Theory and simulation // *Phys. Rev. E*. 2012. Vol. 86. 011124.
13. *Horsthemke W., Lefever M.* Noise-Induced Transition. Berlin, Springer, 1984.
14. *García-Ojalvo J., Lacasta A.M., Sancho J.M., Toral R.* Phase separation driven by external fluctuations // *Europhys. Lett.* 1998. Vol. 42. 125.
15. *Stratonovich R.L.* Topics in the Theory of Random Noise. New York, Gordon and Breach, 1963, Vol. 1; 1967, Vol. 2.
16. *Karetkina N.V.* An unconditionally stable difference scheme for parabolic equations containing first derivatives // *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1980. Vol. 20. 257.
17. *Samarskii A.A.* On an economical difference method for the solution of a multi-dimensional parabolic equation in an arbitrary region // *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1963. Vol. 2. 894.
18. *Samarskii A.A.* Local one dimensional difference schemes on non-uniform nets // *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1963. Vol. 3. 572.
19. *Samarskii A.A.* Homogeneous difference schemes on non-uniform nets for equations of parabolic type // *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1963. Vol. 3. 351.
20. *Van den Broeck C., Parrondo J.M.R., Toral R.* Noise-induced nonequilibrium phase transition // *Phys. Rev. Lett.* 1994. 73. 3395.

Поступила в редакцию 15.06.2014
После доработки 6.11.2014

NONLINEAR MULTIVARIATE SELF-CONSISTENT FOKKER–PLANCK EQUATION FOR MULTICOMPONENT REACTION-DIFFUSION SYSTEMS

S. E. Kurushina^{1,2}, L. I. Gromova¹, Eu. A. Shapovalova¹

¹Samara State Aerospace University named after S.P. Korolyov

²Samara State Transport University

Mean field approximation is extended to multicomponent stochastic reaction-diffusion systems. A multivariate nonlinear self-consistent Fokker–Planck equation defining the probability density of the state of the system, which describes a well-known model of autocatalytic chemical reaction (Brusselator) with spatially correlated multiplicative noise, is obtained. The evolution of probability density and statistical characteristics of the system in the region of Turing bifurcation are studied. Numerical study of the equation solutions for a stochastic brusselator shows that in the region of Turing bifurcation several types of solutions exist if noise intensity increases: unimodal solution, transient bimodality, and an interesting solution which involves multiple «repumping» of probability density through bimodality.

Keywords: Mean field approximation, reaction-diffusion systems, nonlinear self-consistent Fokker–Planck equation, numerical solution of Fokker–Planck equation.



Курушина Светлана Евгеньевна – родилась в Куйбышеве (1971), окончила Самарский государственный университет (1994). После окончания СамГУ работает в Самарском государственном аэрокосмическом университете. С февраля 2014 года заведует кафедрой «Высшая математика» Самарского государственного университета путей сообщения. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГАУ (2002) по специальности 01.04.05 – Оптика и доктора физико-математических наук в СГАУ (2010) по специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Опубликовала 65 научных работ. Область научных интересов: оптика; теория колебаний, волн, структур; динамика нелинейных стохастических систем; теория самоорганизации; прикладная математика; стохастические уравнения.

443066 Россия, Самара, Первый безымянный переулок, 18,
Самарский государственный университет путей сообщения
443086 Россия, Самара, Московское шоссе, 34,
Самарский государственный аэрокосмический университет
E-mail: kurushina72@gmail.com



Громова Лидия Ивановна – родилась в Москве (1938), окончила Куйбышевский государственный педагогический институт (1961). В настоящее время работает в Самарском государственном аэрокосмическом университете. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в КГПИ (1969) в области магнитных явлений в твердых телах. Опубликовала более 70 научных работ. Область научных интересов: теория колебаний, волн, структур; теория самоорганизации.

443086 Россия, Самара, Московское шоссе, 34,
Самарский государственный аэрокосмический университет



Шаповалова Евгения Александровна – родилась в Самаре в 1993 году, окончила бакалавриат Самарского государственного аэрокосмического университета в 2014 году. После окончания бакалавриата учится в магистратуре СГАУ.

443086 Россия, Самара, Московское шоссе, 34,
Самарский государственный аэрокосмический университет
E-mail: geun@inbox.ru