



## ДИНАМИКА СЕТИ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ФАЗОВЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ДИНАМИЧЕСКИМИ СВЯЗЯМИ

*Д. В. Касаткин, В. И. Некоркин*

Институт прикладной физики РАН

Исследованы динамические состояния, формируемые в сети фазовых осцилляторов, сила взаимодействия между которыми изменяется во времени в зависимости от величины относительной разности фаз осцилляторов. Особенностью рассматриваемой системы является совместная эволюция состояний самих элементов и межэлементных связей. Установлено, что в зависимости от параметров сеть может демонстрировать несколько различных типов поведения: синхронное состояние, двухкластерные и мультикластерные состояния, различные синхронные режимы с фиксированными соотношениями фаз между осцилляторами и асинхронные состояния. Выделены области различных типов динамики в пространстве параметров.

*Ключевые слова:* Фазовые осцилляторы, динамические связи, синхронизация, мультикластерные состояния, фазовые кластеры.

### Введение

Исследование коллективной динамики сетей взаимосвязанных автоколебательных элементов является одной из актуальных задач нелинейной физики. Данная задача важна как для теоретического понимания процессов, наблюдаемых в сложных сетевых системах, так и для широкого круга приложений в различных областях физики, химии, биологии и других дисциплин [1–3]. Одним из распространённых подходов, используемых при моделировании динамики сетей автоколебательных элементов, является подход, основанный на их фазовом описании. Такое описание имеет место в случае, когда связь между элементами является слабой и можно пренебречь изменениями амплитуды колебаний, рассматривая лишь динамику их фаз. В этом случае, следуя подходу, развитому Курамото [1], можно свести задачу к изучению динамики модели в виде сети фазовых осцилляторов, имеющей вид

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i - \frac{1}{N} \sum_j^N \kappa_{ij} F(\phi_i - \phi_j). \quad (1)$$

Здесь  $\phi_i$  и  $\omega_i$  характеризуют, соответственно, фазу и индивидуальную частоту  $i$ -го осциллятора сети ( $i = 1, \dots, N$ ),  $\kappa_{ij}$  описывает силу воздействия, оказываемого со стороны  $j$ -го на  $i$ -й осциллятор, а  $F(\phi)$  – функция связи, зависящая от

разности фаз взаимодействующих элементов. На сегодняшний день существует значительное количество работ (см. обзоры [4, 5] и цитированную там литературу), посвящённых изучению влияния различных факторов на процессы синхронизации сетей автоколебательных элементов в рамках моделей вида (1). В частности, изучено влияние топологии соединений в сети [6, 7], распределений собственных частот осцилляторов [8, 9], неоднородности коэффициентов силы связей между осцилляторами [10, 11], наличия временных задержек в связях [12, 13] и ряд других факторов. При этом подавляющее большинство исследований в этой области посвящены рассмотрению случая, когда коэффициенты связей между различными осцилляторами сети не изменяются во времени.

Сравнительно недавно появились работы [14–18], в которых исследуются сети фазовых осцилляторов с так называемыми динамическими связями, когда сила взаимодействия между осцилляторами эволюционирует в зависимости от состояний взаимодействующих осцилляторов, в частности, от их относительной разности фаз. Другими словами, характерной особенностью данных систем является совместная эволюция состояний самих элементов и межэлементных связей. Такие системы используются, в частности, при моделировании процессов в нейронных сетях, где связи между нейронами обладают свойством пластичности. Простейшая модель, используемая в этих работах для описания динамики коэффициентов связей  $\kappa_{ij}$ , имеет вид

$$\frac{d\kappa_{ij}}{dt} = -\varepsilon G(\phi_i - \phi_j), \quad |\kappa_{ij}| \leq 1, \quad (2)$$

где  $G(\phi)$  –  $2\pi$ -периодическая функция пластичности, определяющая характер изменения силы межэлементных связей в зависимости от состояний взаимодействующих элементов, в частности, от их относительной разности фаз. Дополнительное условие  $|\kappa_{ij}| \leq 1$  в (2) предотвращает неограниченный рост коэффициентов силы связи. В этом случае диапазон значений, которые могут принимать переменные  $\kappa_{ij}$ , ограничен интервалом  $[-1, 1]$ . Другой способ, при котором рост силы связи, в отличие от предыдущего, контролируется динамически, можно реализовать, например, посредством введения в правую часть уравнения (2) дополнительного слагаемого

$$\frac{d\kappa_{ij}}{dt} = -\varepsilon(G(\phi_i - \phi_j) + \kappa_{ij}^{2\mu+1}), \quad (3)$$

где параметр  $\mu \geq 0$  принимает целочисленные значения. Как отмечено в [14], наличие в системе (3) новых переменных  $\kappa_{ij}$  в случае  $\mu \gg 1$  не вносит существенных изменений в её динамику по сравнению с системой (2). Однако динамика системы (3) при достаточно малых значениях  $\mu$  в [14] не рассматривалась.

В настоящей работе исследуются режимы синхронного поведения в сети, состоящей из  $N$  взаимодействующих фазовых осцилляторов с динамическими связями, которая описывается уравнениями (1) и (3) при  $\mu = 0$ . Считаем, что индивидуальные частоты осцилляторов идентичны,  $\omega_i = 1$ , а функции  $F(\phi)$  и  $G(\phi)$  имеют вид  $F(\phi) = \sin(\phi + \alpha)$  и  $G(\phi) = \sin(\phi + \beta)$ , где параметр  $\alpha$  определяет набег фаз, вызванный наличием задержек передачи воздействия, а  $\beta$  контролирует характер изменения силы связи в зависимости от разности фаз взаимодействующих осцилляторов. При

сделанных предположениях система (1),(3) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{d\phi_i}{dt} = 1 - \frac{1}{N} \sum_{j=1, j \neq i}^N \kappa_{ij} \sin(\phi_i - \phi_j + \alpha), \\ \frac{d\kappa_{ij}}{dt} = -\varepsilon(\sin(\phi_i - \phi_j + \beta) + \kappa_{ij}). \end{cases} \quad (4)$$

Мы предполагаем, что связи между осцилляторами изменяются во времени значительно медленнее по сравнению с изменением состояний самих осцилляторов, поэтому будем рассматривать случай  $\varepsilon \ll 1$ . Зафиксируем для определённости параметр  $\varepsilon = 0.01$  и изучим динамику системы (4) в области параметров  $D = \{\alpha, \beta : 0 < \alpha < \pi/2, 0 < \beta < 2\pi\}$ .

### 1. Ансамбль из двух фазовых осцилляторов с динамическими связями

Прежде чем переходить к обсуждению результатов, касающихся поведения большого ансамбля динамически связанных осцилляторов, рассмотрим динамику на примере двух взаимодействующих осцилляторов. Задача исследования динамики системы (4) при  $N = 2$  может быть сведена к рассмотрению системы уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= -\kappa_{12} \sin(\psi + \alpha) + \kappa_{21} \sin(-\psi + \alpha), \\ \frac{d\kappa_{12}}{dt} &= -\varepsilon(\sin(\psi + \beta) + \kappa_{12}), \\ \frac{d\kappa_{21}}{dt} &= -\varepsilon(\sin(-\psi + \beta) + \kappa_{21}), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\psi = \phi_1 - \phi_2$ . Детальное исследование динамики системы (5) проведено в [19]. Приведём здесь лишь краткое описание динамических режимов системы и их бифуркаций, которые в дальнейшем позволят объяснить эффекты, наблюдаемые в больших сетях. В [19] показано, что основным режимом системы (5), как и в случае ансамбля со статическими связями, является режим синхронизации осцилляторов, при котором частоты осцилляторов равны, а разность фаз принимает некоторое постоянное значение. В фазовом пространстве модели этому режиму отвечают устойчивые состояния равновесия. Координаты этих состояний равновесия по переменной  $\psi$  характеризуют фиксированные значения расстройки фаз осцилляторов в режиме синхронизации.

При  $\alpha + \beta \neq \pi m$ , ( $m = 1, 2$ ) система (5) имеет четыре состояния равновесия

$$O_1(\psi = -\frac{\pi}{2}, \kappa_{12} = \cos \beta, \kappa_{21} = -\cos \beta),$$

$$O_2(\psi = 0, \kappa_{12} = -\sin \beta, \kappa_{21} = -\sin \beta),$$

$$O_3(\psi = \frac{\pi}{2}, \kappa_{12} = -\cos \beta, \kappa_{21} = \cos \beta),$$

$$O_4(\psi = \pi, \kappa_{12} = \sin \beta, \kappa_{21} = \sin \beta).$$

Нетрудно заметить, что координаты состояний равновесия по переменной  $\psi$  остаются неизменными при варьировании параметров, а по переменным  $\kappa_{12}$  и  $\kappa_{21}$  зависят только от значения параметра  $\beta$ . Анализ устойчивости этих состояний равновесия показал, что изменение их типа происходит попарно для состояний равновесия  $O_1, O_3$  и  $O_2, O_4$ .

На рис. 1, а приведено разбиение плоскости параметров  $(\beta, \alpha)$  на области с различными динамическими режимами системы (5). Установлено, что в областях параметров  $S_1$  и  $S_2$  аттракторами системы (5) являются пары состояний равновесия  $O_1, O_3$  и  $O_2, O_4$ , соответственно, и все траектории фазового пространства стремятся к ним при  $t \rightarrow +\infty$ . Кривые  $h_1$  и  $h_2$  отвечают смене устойчивости соответствующих состояний равновесия в результате суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа. Кроме того, смена устойчивости состояний равновесия происходит при пересечении бифуркационных кривых  $\alpha + \beta = \pi m$ , ( $m = 1, 2$ ). В данном случае один из характеристических показателей обращается в нуль, а в фазовом пространстве системы (5) формируется линия состояний равновесия

$$L_0 = \{\psi = \psi_0, \kappa_{12} = -\sin(\psi_0 + \beta), \kappa_{21} = \sin(\psi_0 - \beta)\},$$

где  $\psi_0$  изменяется от  $-\pi$  до  $\pi$ .

В области AS (см. рис. 1, а), расположенной между бифуркационными кривыми  $h_1$  и  $h_2$ , система (5) не имеет устойчивых состояний равновесия. При значениях параметров из этой области в фазовом пространстве модели одновременно

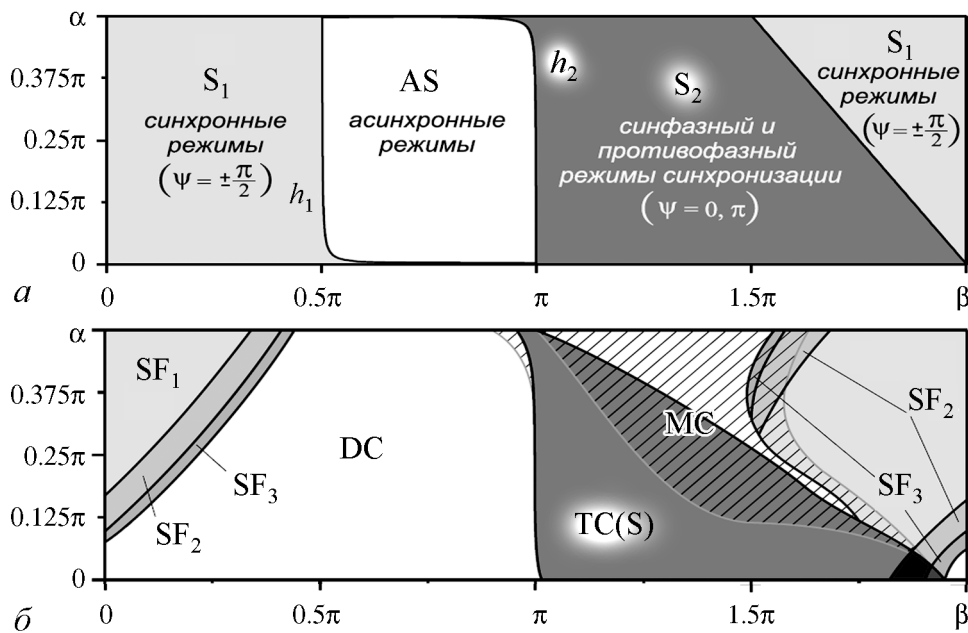


Рис. 1. Диаграммы динамических режимов системы (4) на плоскости параметров  $(\beta, \alpha)$  для различных значений числа взаимодействующих осцилляторов:  $N = 2$  (а),  $N = 200$  (б). Динамические состояния, формируемые в сети: режим глобальной синхронизации S; двухкластерное состояние TC; мультикластерные состояния MC; синхронные состояния с фиксированным соотношением фаз  $SF_i$ , где  $i$  указывает количество формируемых в сети частотных групп; асинхронные состояния DC. Значение параметра  $\varepsilon = 0.01$

существует множество различных колебательных и вращательных аттракторов<sup>1</sup>. Колебательные аттракторы отвечают квазисинхронным режимам системы, когда средняя разность частот осцилляторов равна нулю, а разность фаз колеблется в некоторых ограниченных пределах, не превышающих  $2\pi$ . Аттракторы вращательного типа определяют режимы биений, когда разность фаз непрерывно нарастает, а средняя разность частот отлична от нуля.

Таким образом, в зависимости от параметров два взаимодействующих осциллятора с динамическими связями могут демонстрировать либо синхронное поведение, либо различные асинхронные режимы. Система (5) может иметь четыре различных синхронных режима, различающиеся значениями разности фаз колебаний. При этом всегда одновременно существует пара синхронных режимов, величины относительной разности фаз которых различаются на  $\pi$ .

## 2. Синхронные режимы в сети фазовых осцилляторов с динамическими связями

Рассмотрим теперь динамику сети, состоящей из  $N = 200$  взаимодействующих фазовых осцилляторов с динамическими связями в случае, когда каждый осциллятор изначально воздействует на все остальные осцилляторы сети. При анализе коллективной динамики сети будем использовать случайные начальные условия, где значения  $\phi_i$  в начальный момент времени распределены в интервале  $[0, 2\pi)$ , а значения коэффициентов связей  $\kappa_{ij}$  – в интервале  $(-1, 1)$ .

Диаграмма динамических режимов системы (4) на плоскости параметров  $(\beta, \alpha)$  для  $N = 200$  представлена на рис. 1, б. На этой диаграмме выделены области существования различных динамических режимов, наблюдаемых в системе (4). Прежде чем перейти к подробному рассмотрению этих режимов, следует сказать несколько слов о методике построения данной диаграммы. Она получена в результате усреднения по результатам двадцати численных испытаний, проведённых для различных наборов начальных условий системы (4). В ходе каждого испытания строились двухпараметрические диаграммы ряда характеристик, позволяющих идентифицировать состояния, формируемые в сети в процессе её эволюции. В качестве таких характеристик были выбраны усреднённые по времени параметры порядка

$$\langle R_k \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T R_k dt, \quad \text{где } R_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{-ik\phi_j}, \quad k = 1, 2,$$

а также распределения фаз и частот осцилляторов сети. Анализ данных характеристик проводился на интервале времени  $T = 10^5$ . Для иллюстрации техники определения состояний, формируемых в сети, на рис. 2 представлены зависимости, демонстрирующие изменение рассматриваемых характеристик с ростом параметра  $\beta$  при фиксированном значении  $\alpha = 1$  и заданных начальных условиях. В верхней

<sup>1</sup>В динамических системах с цилиндрическим фазовым пространством различают аттракторы колебательного и вращательного типов. К первым относятся аттракторы, не охватывающие фазовый цилиндр по циклической фазовой переменной (то есть набег по переменной  $\psi < 2\pi$ ). Аттракторы, охватывающие фазовый цилиндр по циклической фазовой переменной, называют вращательными.

части графика на рис. 2 изображены зависимости распределения частот и фаз осцилляторов, отвечающие финальному состоянию сети, которое регистрируется в момент времени  $T$  после завершения всех переходных процессов. При определении фазовых распределений сети анализируется количество осцилляторов сети, значение фаз которых в некоторый фиксированный момент времени принадлежит интервалу  $(\phi_{(l)}, \phi_{(l+1)})$ , где  $\phi_{(l)} = l\Delta\phi$ ,  $(l = 0, \dots, 128)$ , а  $\Delta\phi = 2\pi/128$ . Аналогично устанавливаются распределения частот осцилляторов сети, где диапазон возможных значений частот  $(\Omega_{\min}, \Omega_{\max})$  определяется в ходе предварительного анализа, а минимальный интервал  $\Delta\Omega = (\Omega_{\max} - \Omega_{\min})/100$ . Другими словами, данные характеристики определяют количество различных частотных ( $N_{\Omega}$ ) и фазовых ( $N_{\phi}$ ) групп, на которые разбивается сеть. Нижняя часть графика на рис. 2 иллюстрирует изменение усреднённых по времени параметров порядка  $\langle R_1 \rangle, \langle R_2 \rangle$ .

В совокупности рассматриваемые характеристики позволяют определить состояние, реализуемое в сети при данных значениях параметров и начальных условий. В качестве примера рассмотрим характеристики динамического режима системы, наблюдаемого в диапазоне значений параметра  $\beta \in (3.6, 4.05)$ , представленные на рис. 2. Для рассматриваемого интервала значений параметра  $\beta$  значение параметра порядка  $\langle R_1 \rangle \sim 0.05$ , а  $\langle R_2 \rangle$  варьируется в интервале от 0.75 до 0.96. Это может свидетельствовать о том, что в системе сформировался частичный двухкластерный режим. Дополнительный анализ характеристик распределения фаз и частот осцилляторов (см. рис. 2, вверху) свидетельствует о том, что в сети формируются четыре фазовых кластера ( $N_{\phi} = 4$ ), при этом частота осцилляторов может принимать одно из двух возможных значений ( $N_{\Omega} = 2$ ). Следовательно, можно утверждать, что при данных начальных условиях в рассматриваемом диапазоне параметров в системе формируется мультикластерное состояние.

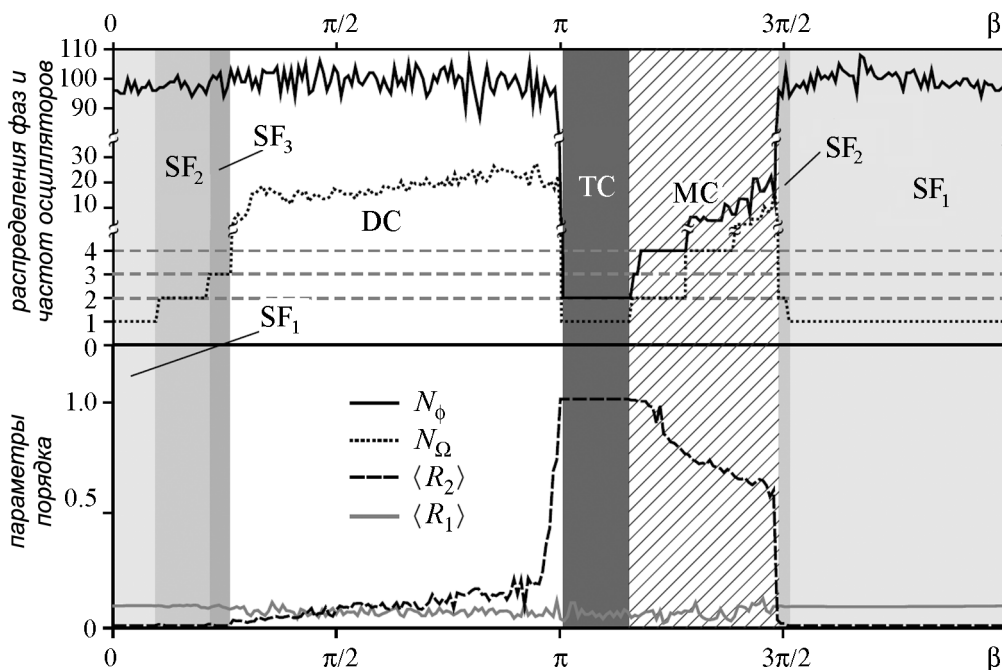


Рис. 2. Зависимости распределения частот ( $N_{\Omega}$ ) и фаз ( $N_{\phi}$ ) осцилляторов сети, а также усреднённых по времени параметров порядка  $R_1, R_2$  от параметра  $\beta$ . Значения параметров системы (4):  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 1$

В результате проведённого анализа области параметров  $D$  (см. рис. 1, б) установлено, что рассматриваемая сеть может демонстрировать несколько различных типов динамического поведения: режим глобальной синхронизации сети  $S$ , двухкластерные ТС и мультикластерные МС состояния, различные синхронные режимы ( $SF_i$ ) с фиксированным соотношением фаз между осцилляторами сети, а также асинхронное DC поведение сети. Далее рассмотрим подробнее свойства синхронных режимов, обнаруженных в ходе изучения системы (4).

Сначала рассмотрим подробнее свойства *двухкластерного состояния* сети, в котором формируются две группы (кластера) синхронизованных осцилляторов. При этом осцилляторы, принадлежащие к различным кластерам, находятся в противофазе друг относительно друга, о чем свидетельствует распределение фаз осцилляторов, приведённое на рис. 3, а. Существуют две группы синхронизованных осцилляторов с фазами  $\phi^*$  и  $\phi^* + \pi$ . Нетрудно заметить, что величины переменных силы связи между произвольными двумя осцилляторами сети  $i$  и  $j$ , находящимися внутри одного кластера, принимают некоторое положительное значение  $\kappa_{ij} = \kappa_{ji} = \kappa^* > 0$ , а для осцилляторов, принадлежащих разным кластерам – отрицательное значение  $\kappa_{ij} = \kappa_{ji} = -\kappa^* < 0$ . Соотношение числа осцилляторов, образующих различные кластеры, зависит от начальных условий.

Частным случаем данного режима является ситуация, когда формируется один кластер, то есть имеет место режим глобальной синхронизации сети. Данный режим реализуется либо в случае, когда в начальный момент времени фазы осцилляторов выбраны из некоторого ограниченного диапазона значений (почти синхронизованы), либо когда начальные значения переменных сил связи распределены преимущественно в области положительных значений, при этом распределение фаз в начальный момент времени может быть случайным.

Данный режим наблюдается в области параметров, где в случае модели двух взаимосвязанных осцилляторов одновременно существовали синфазный и противофазный режимы синхронизации (см. рис. 1, а и б). Данное поведение реализуется и на уровне большого ансамбля, то есть в зависимости от начальных условий осцилляторы распределяются таким образом, что внутри кластера между осцилляторами устанавливается состояние синфазной синхронизации, а между осцилляторами различных кластеров – состояние противофазной синхронизации.

Следует отметить, что данный режим наблюдался также в модели сети с «жёстким» ограничением значений силы межэлементных связей, рассмотренной в работе [14]. Вместе с тем, выбранная нами модель межэлементного взаимодействия позволяет получить новые состояния сети, не наблюдавшиеся в [14].

В частности, обнаружено появление *мультикластерных состояний*, при которых в сети образуется несколько групп синхронизованных осцилляторов. Среди данных групп можно выделить пары, осцилляторы которых находятся в противофазе по отношению друг к другу. При этом частоты осцилляторов, принадлежащих к различным парам синхронных групп, различаются между собой. Мультикластерные состояния сети наблюдаются на границах области существования двухкластерного режима (см. рис. 1, б). Обнаружено, что процесс формирования таких состояний сети состоит из нескольких этапов, последовательно распределённых во времени. На первом этапе часть осцилляторов сети образует две синхронные группы (находящиеся в противофазе друг относительно друга), а осцилляторы другой части сети

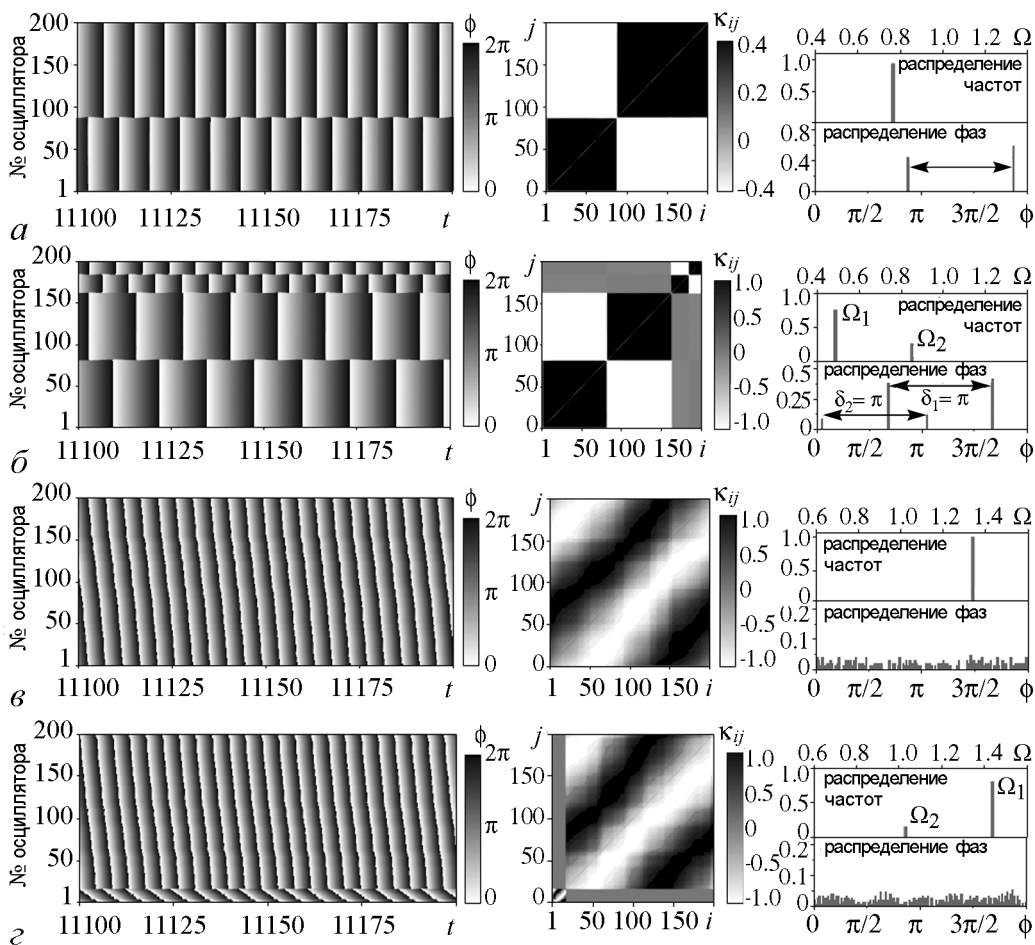


Рис. 3. Динамические состояния сети (4) для  $N = 200$ . Слева – Эволюция фаз осцилляторов сети. Индексы осцилляторов расположены в порядке возрастания значений их частот и фаз в предшествующий момент времени  $t = 10000$ . В центре – Матрица коэффициентов связей  $\kappa_{ij}$  в момент времени  $t = 11150$ . Индексы  $i$  и  $j$  расположены в порядке возрастания значений частот и фаз осцилляторов. Справа – Распределение частот и фаз осцилляторов в момент времени  $t = 11150$ . Значения параметров системы (4):  $\varepsilon = 0.01$ ;  $\alpha = 1$ ;  $\beta = 3.5$  (а),  $\beta = 4.9$  (б),  $\beta = 0.2$  (в),  $\beta = 0.65$  (г)

остаются несинхронизованными. Два кластера, формируемые на первом этапе, как правило, имеют наибольшие размеры и не изменяются в процессе последующей эволюции сети. На втором этапе в «несинхронной» части сети формируется пара или несколько пар синхронных групп, а часть осцилляторов сети по-прежнему остаются несинхронизованными. При этом частоты осцилляторов, принадлежащих кластерам, сформированным на втором этапе, отличаются от частот кластеров, образованных на первом этапе. Далее описанные процессы продолжают, пока все элементы сети не синхронизируются, сформировав финальное мультикластерное состояние. На рис. 3, б приведены графики, иллюстрирующие свойства описываемых режимов на примере четырехкластерного состояния сети. Вид пространственно-временной диаграммы, а также распределения частот и фаз осцилляторов (рис. 3, б) свидетельствует о том, что в сети сформировались четыре фазовых кластера, при этом частота осцилляторов может принимать одно из двух значений  $\Omega_1$  или  $\Omega_2$ . В установившемся мультикластерном режиме часть переменных силы связей, характеризующих взаимодействие



между определёнными осцилляторами в сети, принимают значения, близкие к нулю (то есть можно считать, что данные соединения отсутствуют), тем самым модифицируя конфигурацию соединений в сети. Таким образом, особенностью данного динамического режима является то, что в результате совместной эволюции переменных, описывающих состояние осцилляторов и силу связей, в сети возникает некоторая топология соединений, отличная от изначально определённой (глобально связанная сеть). Следует также отметить, что в рассматриваемой модели мультикластерные состояния формируются в сети без какой либо дополнительной модификации функции пластичности.

Обнаружено, что исследуемая модель может также демонстрировать синхронное поведение, отличное от описанных выше, в которых осцилляторы организуются в фазовые кластеры. Один из примеров такого синхронного поведения приведен на рис. 3, в. В данном случае в сети устанавливается состояние, когда частоты всех осцилляторов одинаковы, а относительные фазовые сдвиги между различными осцилляторами сети принимают некоторые фиксированные значения, которые не изменяются в процессе последующей эволюции сети ( $\phi_i(t) - \phi_j(t) = \Delta\phi_{ij}^* = \text{const}$ ). Значения коэффициентов связей между любыми двумя осцилляторами сети  $i$  и  $j$  удовлетворяют условию  $\kappa_{ij} = -\sin(\Delta\phi_{ij}^* + \beta)$ . В дальнейшем такой режим будем называть – *синхронное состояние с фиксированным соотношением фаз*. На диаграмме, представленной на рис. 1, б, области существования данных режимов обозначены  $SF_i$ , где индекс  $i$  указывает количество формируемых в сети частотных групп. В частности, на рис. 3, в представлен случай, когда формируется одна частотная группа, то есть частоты всех осцилляторов сети идентичны. Об этом свидетельствует вид графика, иллюстрирующего распределение частот на рис. 3, в. Распределение фаз является почти равномерным и не имеет ярко выраженных пиков. Такое поведение ансамбля реализуется в области значений параметров (см. рис. 1), где в случае модели двух фазовых осцилляторов одновременно существовали режимы синхронизации с относительными фазовыми сдвигами  $\pi/2$  и  $-\pi/2$ . Для этих режимов в модели (5) характерно наличие противоположного по знаку воздействия одного осциллятора на другой (см. координаты соответствующих состояний равновесия в предыдущей главе), что объясняется свойствами функции пластичности в рассматриваемой области параметров. Так, при  $\beta = 0$  функция пластичности принимает вид  $G(\phi) = \sin(\phi)$  и, следовательно, коэффициент связи  $\kappa_{ij}$  стремится к некоторому значению  $\kappa_{ij} = -\kappa^*$  при  $\Delta\phi > 0$  и  $\kappa_{ij} = \kappa^*$  при  $\Delta\phi < 0$ , где  $\kappa^* = -\sin(\Delta\phi)$ ,  $\Delta\phi = \phi_i - \phi_j$ . Аналогичные соотношения между относительными значениями фаз осцилляторов и коэффициентами связей реализуются также для большого ансамбля (4) в окрестности значений параметра  $\beta = 0$  ( $\beta = 2\pi$ ).

На рис. 3, г приведен пример синхронного состояния с фиксированным соотношением фаз, когда в сети образуется несколько частотных групп. В частности, рис. 3, г иллюстрирует эволюцию фаз осцилляторов в случае образования двух частотных групп (см. область  $SF_2$  на рис. 1, б). В этом случае сеть разбивается на две несвязанные (или слабо связанные) между собой подсети (см. рис. 3, г). Элементы внутри каждой подсети имеют одинаковые частоты и фиксированные фазовые соотношения. Частоты осцилляторов, принадлежащих к различным подсетям, различны, а относительная разность фаз между ними непрерывно изменяется во времени. Процесс формирования частотных групп аналогичен наблюдаемому в случае мульт-

тикластерного режима. Сначала формируется высокочастотная группа ( $\Omega_1$ ), которая, как правило, имеет наибольшие размеры (см. рис. 3, *з*). Затем остальные элементы сети образуют вторую частотную группу ( $\Omega_2$ ). Такое поведение (режимы  $SF_i, i > 1$ ) система демонстрирует при значениях параметров в окрестности границ области существования режима  $SF_1$  (см. рис. 1, *б*).

В области DC (см. рис. 1, *б*) наблюдаются режимы *асинхронного поведения* системы (4). В этом случае в сети формируются состояния, когда частоты осцилляторов не одинаковы и относительная разность фаз между различными осцилляторами сети непрерывно изменяется во времени. Сравнение диаграмм, приведённых на рис. 1, позволяет сделать вывод, что данный режим реализуется преимущественно в области параметров, отвечающей области с мультистабильным поведением (квази-синхронные режимы и режимы биений) в случае модели двух взаимодействующих осцилляторов.

### Заключение

В работе исследованы состояния, формируемые в сети динамически связанных фазовых осцилляторов. Особенностью рассматриваемой системы является совместная эволюция состояний осцилляторов и коэффициентов силы связи между ними. Показано, что, как и в случае сети осцилляторов [14], межэлементное взаимодействие в которой описывается системой (2), рассматриваемая нами модель также может демонстрировать следующие основные режимы поведения: двухкластерное состояние, синхронное состояние с фиксированным соотношением фаз и асинхронное поведение. Установлено, что рассмотренная модификация модели (2) межэлементного взаимодействия, в которой обеспечивается динамический контроль роста силы связи, позволяет получить новые режимы, такие как мультикластерные режимы и синхронные режимы с фиксированным соотношением фаз и формированием нескольких частотных групп. Возможность формирования этих режимов объясняется более разнообразной структурой соединений, формируемых в сети в результате совместной эволюции состояний элементов и межэлементных связей. При образовании таких режимов часть переменных связей, характеризующих взаимодействие между определёнными осцилляторами в сети, принимают значения, близкие к нулю (то есть можно считать, что данные соединения отсутствуют), тем самым модифицируется конфигурация соединений в сети. По сравнению с существующими результатами исследований сетей осцилляторов с адаптивными связями, в рассматриваемой модели мультикластерные состояния формируются без какой-либо специальной модификации функции пластичности.

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИПФ РАН (проект № 0035-2014-0007).*

### Библиографический список

1. Kuramoto Y. Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. Berlin: Springer, 1984. 158 p.
2. Strogatz S.H. Exploring complex networks // Nature. 2001. Vol. 410. P. 268–276.

3. *Dörfler F., Bullo F.* Synchronization in complex networks of phase oscillators: A survey // *Automatica*. 2014. Vol. 50. P. 1539–1564.
4. *Acebron J.A., Bonilla L.L., Perez Vicente C.J., Ritort F. and Spigler R.* The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena // *Reviews of Modern Physics*. 2005. Vol. 77, № 1. P. 137.
5. *Pikovsky A., Rosenblum M.* Dynamics of globally coupled oscillators: Progress and perspectives // *Chaos*. 2015. Vol. 25, № 9. P. 097616.
6. *Gomes-Gardenes J., Moreno Y., Arenas A.* Synchronizability determined by coupling strengths and topology on complex networks // *Physical Review E*. 2007. Vol. 75, № 6. P. 066106.
7. *Stout J., Whiteway M., Ott E., Girvan M., Antonsen T.M.* Local synchronization in complex networks of coupled oscillators // *Chaos*. 2011. Vol. 21, № 2. P. 025109.
8. *Strogatz S.H., Mirollo R.E.* Stability of incoherence in a population of coupled oscillators // *J. of Statistical Physics*. 1991. Vol. 63, № 3–4. P. 613.
9. *Brede M.* Synchronizability determined by coupling strengths and topology on complex networks // *Physics Letters A*. 2008. Vol. 372, № 15. P. 2618.
10. *Hong H., Strogatz S.H.* Kuramoto model of coupled oscillators with positive and negative coupling parameters: An example of conformist and contrarian oscillators // *Physical Review Letters*. 2011. Vol. 106, № 5. P. 054102.
11. *Kloumann I.M., Lizarraga I.M., Strogatz S.H.* Phase diagram for the Kuramoto model with van Hemmen interactions // *Physical Review E*. 2014. Vol. 89, № 1. P. 012904.
12. *Earl M.G., Strogatz S.H.* Synchronization in oscillator networks with delayed coupling: A stability criterion // *Physical Review E*. 2003. Vol. 67, № 3. P. 036204.
13. *Nordenfelt A., Wagemakers A., Sanjuan M.A.F.* Frequency dispersion in the time-delayed Kuramoto model // *Physical Review E*. 2014. Vol. 89, № 3. P. 032905.
14. *Aoki T., Aoyagi T.* Self-organized network of phase oscillators coupled by activity-dependent interactions // *Physical Review E*. 2011. Vol. 84, № 6. P. 066109.
15. *Gutierrez R., Amann A., Assenza S., Gomes-Gardenes J., Latora V., Boccaletti S.* Emerging meso- and macroscales from synchronization of adaptive networks // *Physical Review Letters*. 2011. Vol. 107, № 23. P. 234103.
16. *Assenza S., Gutierrez R., Gomes-Gardenes J., Latora V., Boccaletti S.* Emergence of structural patterns out of synchronization in networks with competitive interactions // *Scientific Reports*. 2011. Vol. 1. P. 1–8.
17. *Chandrasekar V.K., Sheeba J.H., Subash B., Lakshmanan M., Kurths J.* Adaptive coupling induced multi-stable states in complex networks // *Physica D*. 2014. Vol. 267. P. 36.
18. *Ren Q., He M., Yu X., Long Q., Zhao J.* The adaptive coupling scheme and heterogeneity in intrinsic frequency and degree distributions of the complex networks // *Physics Letters A*. 2014. V. 378, № 3. P. 139.
19. *Касаткин Д.В., Некоркин В.И.* Динамика фазовых осцилляторов с пластичными связями // *Известия вузов. Радиофизика*. 2015. (в печати)

## DYNAMICS OF A NETWORK OF INTERACTING PHASE OSCILLATORS WITH DYNAMIC COUPLINGS

*D.V. Kasatkin, V.I. Nekorkin*

Institute of Applied Physics, RAS

We investigate dynamical states formed in a network of coupled phase oscillators in which strength of interactions between oscillators evolve dynamically depending on their relative phases. The feature of the system is co-evolution of coupling weights and states of elements. It is ascertained that depending on the parameters the network exhibit several types of behavior: globally synchronized state, two-cluster and multi-cluster states, various synchronized states with a fixed phase relationship between oscillators and desynchronized state.

*Keywords:* Phase oscillators, dynamic couplings, synchronization, multi-cluster states, phase clusters.

### References

1. *Kuramoto Y.* Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. Berlin: Springer, 1984. 158 p.
2. *Strogatz S.H.* Exploring complex networks // *Nature*. 2001. Vol. 410. P. 268–276.
3. *Dörfler F., Bullo F.* Synchronization in complex networks of phase oscillators: A survey // *Automatica*. 2014. Vol. 50. P. 1539–1564.
4. *Acebron J.A., Bonilla L.L., Perez Vicente C.J., Ritort F. and Spigler R.* The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena // *Reviews of Modern Physics*. 2005. Vol. 77, № 1. P. 137.
5. *Pikovsky A., Rosenblum M.* Dynamics of globally coupled oscillators: Progress and perspectives // *Chaos*. 2015. Vol. 25, № 9. P. 097616.
6. *Gomes-Gardenes J., Moreno Y., Arenas A.* Synchronizability determined by coupling strengths and topology on complex networks // *Physical Review E*. 2007. Vol. 75, № 6. P. 066106.
7. *Stout J., Whiteway M., Ott E., Girvan M., Antonsen T.M.* Local synchronization in complex networks of coupled oscillators // *Chaos*. 2011. Vol. 21, № 2. P. 025109.
8. *Strogatz S.H., Mirollo R.E.* Stability of incoherence in a population of coupled oscillators // *J. of Statistical Physics*. 1991. Vol. 63, № 3-4. P. 613.
9. *Brede M.* Synchronizability determined by coupling strengths and topology on complex networks // *Physics Letters A*. 2008. Vol. 372, № 15. P. 2618.
10. *Hong H., Strogatz S.H.* Kuramoto model of coupled oscillators with positive and negative coupling parameters: An example of conformist and contrarian oscillators // *Physical Review Letters*. 2011. Vol. 106, № 5. P. 054102.
11. *Kloumann I.M., Lizarraga I.M., Strogatz S.H.* Phase diagram for the Kuramoto model with van Hemmen interactions // *Physical Review E*. 2014. Vol. 89, № 1. P. 012904.
12. *Earl M.G., Strogatz S.H.* Synchronization in oscillator networks with delayed coupling: A stability criterion // *Physical Review E*. 2003. Vol. 67, № 3. P. 036204.
13. *Nordenfelt A., Wagemakers A., Sanjuan M.A.F.* Frequency dispersion in the time-delayed Kuramoto model // *Physical Review E*. 2014. Vol. 89, № 3. P. 032905.

14. *Aoki T., Aoyagi T.* Self-organized network of phase oscillators coupled by activity-dependent interactions // *Physical Review E*. 2011. Vol. 84, № 6. P. 066109.
15. *Gutierrez R., Amann A., Assenza S., Gomes-Gardenes J., Latora V., Boccaletti S.* Emerging meso- and macroscales from synchronization of adaptive networks // *Physical Review Letters*. 2011. Vol. 107, № 23. P. 234103.
16. *Assenza S., Gutierrez R., Gomes-Gardenes J., Latora V., Boccaletti S.* Emergence of structural patterns out of synchronization in networks with competitive interactions // *Scientific Reports*. 2011. Vol. 1. P. 1–8.
17. *Chandrasekar V.K., Sheeba J.H., Subash B., Lakshmanan M., Kurths J.* Adaptive coupling induced multi-stable states in complex networks // *Physica D*. 2014. Vol. 267. P. 36.
18. *Ren Q., He M., Yu X., Long Q., Zhao J.* The adaptive coupling scheme and heterogeneity in intrinsic frequency and degree distributions of the complex networks // *Physics Letters A*. 2014. V. 378, № 3. P. 139.
19. *Kasatkin D.V., Nekorkin V.I.* Dynamics of phase oscillators with plastic couplings // *Radiophysics and Quantum Electronics*. 2015. (in press)

*Поступила в редакцию 10.09.2015*



*Касаткин Дмитрий Владимирович* – родился в Нижнем Новгороде (1978), окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (2001). С 2002 года работает в Институте прикладной физики РАН. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (2004, ННГУ). Область научных интересов – теория нелинейных колебаний и волн, теория синхронизации, динамический хаос, нейродинамика. Имеет более 50 научных публикаций по указанным направлениям.

603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46  
Институт прикладной физики РАН  
E-mail: [kasatkin@neuron.appl.sci-nnov.ru](mailto:kasatkin@neuron.appl.sci-nnov.ru)



*Некоркин Владимир Исаакович* – родился в 1948 году, окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (1971). Доктор физико-математических наук (1992), профессор кафедры теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ, заведующий отделом нелинейной динамики Института прикладной физики РАН, лауреат премии им. А.А. Андропова 2012 года. Область научных интересов – динамика нелинейных систем, нейродинамика, теория синхронизации, пространственно-временной хаос, структурообразование и нелинейные волны. Имеет более 250 научных публикаций в отечественных и зарубежных изданиях, в том числе 4 книги и 2 патента.

603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46  
Институт прикладной физики РАН  
E-mail: [vnekorkin@neuron.appl.sci-nnov.ru](mailto:vnekorkin@neuron.appl.sci-nnov.ru)