



## ВРАЩАТЕЛЬНАЯ ДИНАМИКА В СИСТЕМЕ ДВУХ СВЯЗАННЫХ МАЯТНИКОВ

*Л. А. Смирнов<sup>1,2</sup>, А. К. Крюков<sup>1</sup>, Г. В. Осипов<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Институт информационных технологий, математики и механики, ННГУ

<sup>2</sup>Институт прикладной физики Российской академии наук

Исследованы особенности динамики двух нелинейно связанных маятников. При наличии затухания и постоянного внешнего воздействия в такой системе наряду с состояниями равновесия может существовать синфазное предельное периодическое движение. С помощью прямого численного моделирования показано, что при некоторых значениях параметра, характеризующего связь между маятниками, данное синфазное предельное вращение становится неустойчивым. В пределе малой диссипации построена асимптотическая теория, объясняющая причины потери устойчивости синфазного вращательного предельного цикла. Найдены аналитические выражения для границ зоны этой неустойчивости. В ходе численных расчетов установлено, что есть интервал значений силы связи, внутри которого в рассматриваемой системе помимо устойчивого синфазного имеются также два (устойчивый и неустойчивый) несинфазных вращательных предельных цикла. Таким образом, для нелинейно связанных маятников продемонстрировано наличие бистабильности их предельных периодических движений. Подробно проанализированы бифуркации, приводящие к возникновению и исчезновению несинфазных предельных режимов вращения.

*Ключевые слова:* Синхронизация, осциллятор, нелинейная динамика

### Введение

Два связанных маятника являются одной из базовых моделей в различных областях физики. Она адекватно описывает не только механические объекты, но и разнообразные процессы в электрических цепях, полупроводниковых структурах, молекулярной биологии и т. д. [1–3]. В частности, эта модель применяется для анализа систем фазовой синхронизации [4, 5]. Ее используют при теоретическом рассмотрении связанных джозефсоновских контактов [6–11] и гранулированных сверхпроводников [12]. Аналогия с маятниками играет особую роль, когда речь идет об изучении вращательных колебаний оснований молекул ДНК [3] и формировании так называемых открытых состояний [13–15], являющихся важным и необходимым элементом функционирования такой молекулы [16].

Имея представление о поведении двух связанных нелинейных осцилляторов, можно сделать обобщение на цепочки маятников типа и продвинуться в понимании их динамических свойств. Интерес к данным проблемам вызван большим количеством физических сред, для описания которых применима модель Френкеля–Конторовой или ее модификации [2, 17, 18]. Кроме приведенных выше примеров можно еще выделить цепочки взаимодействующих спинов в ферромагнетиках [19–21] и скручивания цепочки в полимерных кристаллах [22–24]. Стоит отметить, что обсуждаемые в данной работе вопросы могут быть интересны в приложении к системам глобально связанных фазовых осцилляторов с инерцией [25–27], поведение которых в настоящее время активно обсуждается в литературе [28–37].

В предлагаемой статье исследованы особенности вращательной динамики двух нелинейно связанных маятников. В разделе 1 (п. 1.1) описана исходная модель и сформулирована постановка решаемой задачи. Затем (п. 1.2) в пределе малой диссипации построена асимптотическая теория, объясняющая причины неустойчивости предельного синфазного режима вращения маятников. Найдены аналитические выражения для границ интервала значений силы связи между маятниками, внутри которого данное синфазное предельное периодическое движение теряет свою устойчивость. В ходе дальнейшей разработки асимптотического подхода (п. 1.3) продемонстрировано, что на нелинейной стадии развития такой неустойчивости формируется несинфазный вращательный предельный цикл. В разделе 2 приведены результаты расчетов в рамках исходной модели, подтверждающие теоретические построения. Подробно проанализированы бифуркации, приводящие к возникновению и исчезновению несинфазных предельных режимов вращения, и показано наличие бистабильности для предельных периодических движений в рассматриваемой системе. В Заключении подводятся итоги работы и формулируются основные выводы.

## 1. Неустойчивость предельного синфазного режима вращения двух связанных идентичных маятников

**1.1. Исходная модель. Постановка задачи.** Рассмотрим два связанных идентичных маятника, описываемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + \lambda \frac{d\varphi_1}{dt} + \sin \varphi_1 = \gamma + K \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (1)$$

$$\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + \lambda \frac{d\varphi_2}{dt} + \sin \varphi_2 = \gamma + K \sin(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (2)$$

Здесь:  $\lambda$  – коэффициент затухания, ответственный за диссипативные процессы; постоянное внешнее воздействие на каждый из маятников учтено посредством  $\gamma$ ; параметр  $K$  характеризует силу связи между элементами. На рис. 1 приведены примеры механических систем, поведение которых подчиняется уравнениям (1), (2). В этом нетрудно убедиться, написав выражение для диссипативной функции Рэля и применив формализм классической механики Лагранжа [38, 39].

В рассматриваемом случае несложно найти состояния равновесия, приравняв нулю первые и вторые производные функций  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  по времени  $t$ . В зави-

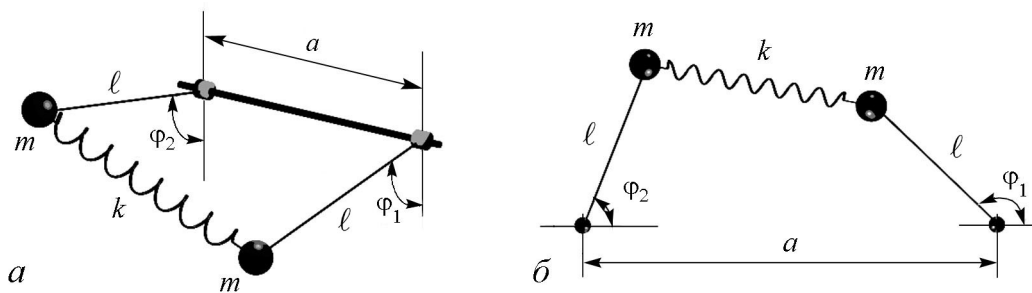


Рис. 1. *a* – два маятника с равными массами  $m$ , упруго связанные между собой с помощью пружины жесткости  $k$ , совершают индивидуальные движения (в присутствии силы тяжести  $mg$ ) строго в плоскостях, перпендикулярных линии подвеса; положение маятников соответственно характеризуется углами отклонения от вертикальной оси  $\varphi_1, \varphi_2$ ; в этом случае параметр  $K$ , входящий в систему уравнений (1), (2), пропорционален  $k$  и равен  $K = 2k\ell/g$ . *б* – два маятника с равными массами  $m$ , упруго связанные между собой с помощью пружины жесткости  $k$ , вращаются в плоскости рисунка по окружностям одинакового радиуса  $\ell$ ; в данной ситуации коэффициент  $K$  не зависит от  $k$  и определяется только длинами  $\ell$  и  $a$  ( $K = \ell/a$ ), однако жесткость пружины  $k$  задает частоту малых синхронных колебаний, на которую нормировано время в уравнениях (1), (2)

симости от соотношений между  $\gamma$  и  $K$ , у системы (1), (2) может быть от шести состояний равновесия (когда  $\gamma < 1$  и  $4\gamma K < 1$ ) до нуля (когда  $\gamma > 1$  и  $4\gamma K > 1$ ). Эти состояния равновесия (если они есть) представляют собой или устойчивые фокусы (узлы), или седла, что является достаточно естественным. Однако в ряде ситуаций движение двух связанных маятников выходит на предельные режимы вращения. Именно о них и пойдет речь в данной работе.

Прежде всего отметим, что когда в любой момент времени  $t$  координаты  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  совпадают друг с другом, то есть  $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi(t)$ , два связанных маятника движутся синфазно и их динамика описывается одним уравнением нелинейного осциллятора с затуханием, находящегося под действием постоянной внешней силы:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \lambda \frac{d\varphi}{dt} + \sin \varphi = \gamma. \quad (3)$$

Поведение такого осциллятора хорошо изучено [40, 41]. На рис. 2 показана плоскость параметров  $\lambda, \gamma$ . Она разбита на три области  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$  и  $\mathcal{D}_3$  с помощью прямой  $\gamma = 1$  и бифуркционной кривой  $\mathcal{T}$ , которую часто называют кривой Трикоми [40–42]. Данные области соответствуют различным структурно устойчивым фазовым портретам системы, подчиняющейся уравнению (3). Для значений параметров  $\lambda, \gamma$  из области  $\mathcal{D}_1$  у нелинейного осциллятора имеются только два состояния равновесия (на цилиндре), а именно, седло и фокус (узел). Для точек  $\lambda, \gamma$  из сектора  $\mathcal{D}_2$  устойчивый вращательный предельный цикл сосуществует с устойчивым фокусом (узлом), область притяжения которого ограничивается устойчивыми сепаратрисами седла. При значениях параметров  $\lambda, \gamma$  из полуплоскости  $\mathcal{D}_3$  состояния равновесия отсутствуют, и осциллятор всегда стремится выйти на предельное периодическое движение, являющееся единственным аттрактором.

Таким образом, при некоторых соотношениях между  $\lambda$  и  $\gamma$ , в четырехмерном фазовом пространстве  $\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2$  заведомо существует синфазный вращательный предельный цикл. Как показали, выполненные непосредственно в рамках системы уравнений (1), (2) численные расчеты (см. ниже раздел 2), этот цикл в ряде ситуаций может терять устойчивость в конечном интервале значений силы связи  $K$ .

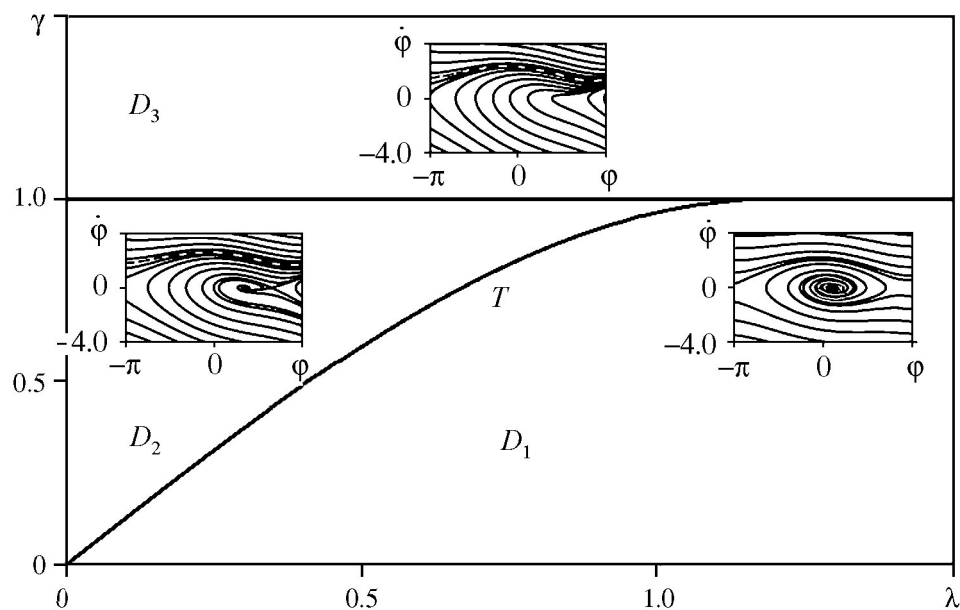


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма (плоскость параметров  $\lambda$  и  $\gamma$ ) и структурно устойчивые фазовые портреты системы, подчиняющейся уравнению (3), при значениях  $\lambda = 0.2, \gamma = 0.3$  (правая вставка),  $\lambda = 0.9, \gamma = 0.4$  (левая вставка) и  $\lambda = 1.2, \gamma = 0.6$  (центральная вставка). В области  $D_1$  имеются только два состояния равновесия (на цилиндре). В секторе  $D_2$  наряду с состояниями равновесия существует устойчивый вращательный предельный цикл. В полуплоскости  $D_3$  в фазовом пространстве есть единственный аттрактор, соответствующий предельному периодическому движению. Линия  $T$  представляет собой бифуркационную кривую Трикоми, при переходе через которую у нелинейного осциллятора возникает предельный режим вращения, отмеченный штриховыми линиями на левой и центральной вставках с характерными соответственно для областей  $D_2$  и  $D_3$  фазовыми портретами уравнения (3)

**1.2. Асимптотическое описание неустойчивости синфазного вращательного предельного цикла.** Проанализируем подробно случай малой диссипации, когда  $\lambda \ll 1$ . Предположим также, что характеризующее внешнюю силу значение  $\gamma$  лежит на плоскости  $\lambda, \gamma$  достаточно далеко от кривой Трикоми, то есть будем считать, что величина  $\gamma$ , как минимум, близка к единице. В этой ситуации удастся построить формализованную асимптотическую теорию, объясняющую причины возникновения наблюдаемой при прямом численном моделировании системы уравнений (1), (2) неустойчивости синфазного предельного режима вращения двух связанных маятников. Развитый ниже аналитический подход основан на наличие в задаче малого параметра  $\varepsilon$ , пропорционального квадрату коэффициента затухания  $\lambda$ , то есть  $\varepsilon \propto \lambda^2 \ll 1$ . Однако, прежде чем приступить к изложению наших теоретических представлений, отметим, что, как показывают численные расчеты, область применимости полученных результатов простирается до значений  $\lambda \sim 0.5$ .

Для начала перейдем от координат маятников  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  соответственно к их полусумме и полуразности

$$\eta = (\varphi_1 + \varphi_2) / 2, \quad \xi = (\varphi_1 - \varphi_2) / 2. \quad (4)$$

Кроме того, для удобства дальнейших рассуждений введем новое безразмерное время

$$\tau = \gamma t / \lambda. \quad (5)$$

В итоге, исходная система уравнений (1), (2) преобразуется к виду

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \varepsilon\kappa\gamma \frac{d\eta}{d\tau} + \varepsilon\kappa \sin \eta \cos \xi = \varepsilon\kappa\gamma, \quad (6)$$

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \varepsilon\kappa\gamma \frac{d\xi}{d\tau} + \varepsilon\kappa \sin \xi \cos \eta = -\varepsilon\kappa K \sin 2\xi, \quad (7)$$

где вместо отношение  $\lambda^2/\gamma^2$  используется обозначение

$$\varepsilon\kappa = \lambda^2/\gamma^2. \quad (8)$$

Как обсуждалось выше, для  $\lambda$  и  $\gamma$  из интересующих нас диапазонов значений параметров рассматриваемой системы при синфазном движении двух связанных маятников (когда в каждый момент времени  $t$  координаты  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  совпадают друг с другом, а значит,  $\xi(\tau) = 0$ ) существует вращательный предельный цикл. Для того, чтобы исследовать устойчивость такого синфазного режима вращения двух маятников, будем считать, что между ними имеется отличная от нуля слабая расстройка  $\xi(\tau)$ , которая остается в течение продолжительного временного отрезка (на протяжении нескольких периодов вращения) малой величиной, не превосходящей по порядку  $\varepsilon$ . Другими словами, предполагается, что

$$\xi(\tau) = \varepsilon\xi_0(\tau) + o(\varepsilon^2), \quad (9)$$

где символом  $o(\varepsilon^2)$  обозначены члены, имеющие порядок  $\varepsilon^2$  и выше.

В свою очередь, функцию  $\eta(\tau)$  представим в виде суммы двух слагаемых

$$\eta(\tau) = \phi(\tau) + \psi(\tau). \quad (10)$$

Первое слагаемое, а именно,  $\phi(\tau)$  характеризует непосредственно синфазный вращательный предельный цикл, который устойчив в отсутствие связанных с  $\xi(\tau)$  возмущений и удовлетворяет уравнению движения, находящегося под действием постоянной внешней силы нелинейного осциллятора с затуханием

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} + \varepsilon\kappa\gamma \frac{d\phi}{d\tau} + \varepsilon\kappa \sin \phi = \varepsilon\kappa\gamma. \quad (11)$$

Второе слагаемое  $\psi(\tau)$  описывает: во-первых, процесс постепенного (в течение нескольких оборотов маятников на  $2\pi$ ) установления предельного периодического движения, то есть выход на предельный вращательный цикл из расположенной вблизи него произвольной точки фазового пространства; во-вторых, влияние расстройки  $\xi(\tau)$  между координатами  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  на их полусумму  $\eta(\tau)$ . Из соотношений (6), (10) и (11) вытекает, что поведение функции  $\psi(\tau)$  подчиняется уравнению

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \varepsilon\kappa\gamma \frac{d\psi}{d\tau} + \varepsilon\kappa \cos \xi \cos \phi \sin \psi + \varepsilon\kappa (\cos \xi \cos \psi - 1) \sin \phi = 0. \quad (12)$$

При наличии малого параметра  $\varepsilon$  в синфазном вращательном предельном цикле  $\phi(\tau)$ , то есть периодическом на цилиндре решении уравнения (11), можно выделить основную монотонно растущую во времени часть и малые поправки к ней

$$\phi(\tau) = (\tau - \tau_0) + \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon^j \phi_j(\tau). \quad (13)$$

Здесь постоянная  $\tau_0$  определяется начальными условиями, а каждый член  $\phi_j(\tau)$  ( $j = 1, 2, \dots, +\infty$ ) асимптотического по  $\varepsilon$  ряда представляет собой ограниченную периодически изменяющуюся функцию переменной  $\tau$ . По теории возмущений непосредственно из уравнения (11) нетрудно найти, что

$$\phi_1(\tau) = \kappa \sin(\tau - \tau_0) = \frac{\lambda^2}{\varepsilon \gamma^2} \sin\left(\frac{\gamma}{\lambda} t - \tau_0\right). \quad (14)$$

Рассматриваемая нами система достаточно долго находится вблизи синфазного вращательного предельного цикла, поэтому решение уравнения (12) для  $\psi(\tau)$  формально можно искать в виде следующего асимптотического по  $\varepsilon$  разложения:

$$\psi(\tau) = \varepsilon^{1/2} \psi_0(\varepsilon\tau) \left[ 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon^{(j+1)/2} \psi_j(\tau) \right], \quad (15)$$

где общий множитель  $\psi_0(\varepsilon\tau)$  является медленной функцией нового времени  $\tau$  (5). Приравнивая друг другу слагаемые одного порядка малости, получаем

$$\psi_1(\tau) = \varepsilon \kappa \cos(\tau - \tau_0) = \frac{\lambda^2}{\varepsilon \gamma^2} \cos\left(\frac{\gamma}{\lambda} t - \tau_0\right). \quad (16)$$

Принимая во внимание также медленность изменения функции  $\psi_0(\varepsilon\tau)$  и используя процедуру усреднения, находим

$$\psi_0(\varepsilon\tau) = \Psi_0 \exp(-\varepsilon \kappa \gamma \tau) = \Psi_0 \exp(-\lambda t), \quad (17)$$

где  $\Psi_0$  – постоянная величина, которая, как и  $\tau_0$ , определяется начальными условиями. Из (15) и (17) видно, что возмущения, описываемые с помощью  $\psi(\tau)$ , затухают на временах порядка  $\lambda^{-1}$ . Другими словами, для интересующих нас процессов с длительностью, превышающей  $\lambda^{-1}$ , слагаемое  $\psi(\tau)$  в соотношении (10) можно не учитывать. При этом основное влияние на поведение расстройки  $\xi(\tau)$  между координатами  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  будет оказывать явным образом выделенная в их полусумме  $\eta(\tau)$  функция  $\phi(\tau)$ , непосредственно характеризующая только синфазный вращательный предельный цикл.

Предположим, что с момента начала движения двух связанных маятников прошло достаточное количество времени ( $\Delta t \gtrsim \lambda^{-1}$ ). Основываясь на выше сказанном, учтем в уравнении (7) основные значимые в иерархии по малому параметру  $\varepsilon$  члены. В итоге для расстройки  $\xi(\tau)$  получаем уравнение, которое можно воспринимать как уравнение с периодическими меняющимися коэффициентами. Теперь естественно предположить, что при изменении величины  $K$ , ответственной за связь между двумя

маятниками, в поведении функции  $\xi(\tau)$  возможно проявление эффектов параметрической неустойчивости [39, 43].

Действительно, рассмотрим такие  $K$ , для которых квадрат частоты  $\omega_s = 1$  синфазного вращательного предельного цикла слабо отличается от квадрата удвоенной частоты

$$\omega_0 = \sqrt{2\varepsilon\kappa K} = \sqrt{2K\lambda}/\gamma \quad (18)$$

собственных линейных осцилляций  $\xi(\tau)$ , то есть разность  $\omega_s^2 - 4\omega_0^2$  является малой величиной порядка  $\varepsilon$

$$2\varepsilon\Omega = \omega_s^2 - 4\omega_0^2 = 1 - 8\varepsilon\kappa K = 1 - 8K\lambda^2/\gamma^2, \quad (19)$$

где  $2\Omega \sim 1$ . Фактически, мы находимся в окрестности первой зоны предполагаемой параметрической неустойчивости [39, 43]. Это означает также, что нас интересуют достаточно большие значения  $K$ , и можно считать, что выполняется условие  $K^{-1} \sim \varepsilon$ .

Будем искать решение уравнения (7) в виде (9), где основное слагаемое  $\xi_0(\tau)$  представим как

$$\xi_0(\tau) = \text{Re} \left[ \Xi(\varepsilon\tau) \exp(i(\tau - \tau_0)/2) \right]. \quad (20)$$

Здесь  $\Xi(\varepsilon\tau)$  – комплексная амплитуда, плавно изменяющаяся во времени  $\tau$ . Приравняем друг другу члены одного порядка малости и, воспользовавшись медленностью функции  $\Xi(\varepsilon\tau)$ , усредним полученное в порядке  $\varepsilon^2$  соотношение по периоду предельного синфазного вращения двух маятников. В итоге придем к следующему укороченному уравнению для  $\Xi(\varepsilon\tau)$ :

$$\frac{2}{\varepsilon} \frac{d\Xi}{d\tau} = -(\kappa\gamma + i\Omega) \Xi + i\kappa \Xi^*. \quad (21)$$

Здесь верхний индекс \* указывает на комплексно-сопряженную величину. Несложно найти общее решение данного уравнения и убедиться в том, что

$$\Xi \propto \exp(p_{1,2}\tau) = \exp\left(\frac{\gamma}{\lambda} p_{1,2}t\right), \quad (22)$$

где показатели экспонент соответственно равны

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= \frac{\varepsilon}{2} \left( -\kappa\gamma \pm \sqrt{\kappa^2 - \Omega^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2\gamma^2} \left( -\lambda^2\gamma \pm \sqrt{\lambda^4 - \gamma^2 \left( \gamma - 2\sqrt{2K\lambda} \right)^2} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Как видно из выражений (23),  $p_1$  является действительной положительной величиной, когда параметр связи  $K$  лежит в интервале  $K_1 < K < K_2$ , где

$$K_{1,2} = \frac{1}{8} \left( \frac{\gamma^2}{\lambda^2} \mp 2\sqrt{1 - \gamma^2} \right). \quad (24)$$

Это означает, что расстройка  $\xi(\tau)$  экспоненциально нарастает во времени с инкрементом  $p_1$  на начальном этапе, то есть развивается своеобразная параметрическая

неустойчивость до тех пор, пока ее не остановят нелинейные эффекты, которые не учитывались в ходе изложенного выше рассмотрения. Максимально быстрый рост возмущений  $\xi(\tau)$  с показателем

$$p_{1\max} = \frac{\lambda^2}{2\gamma^2} (1 - \gamma) \quad (25)$$

происходит при значении  $K_* = \gamma^2/8\lambda^2$ , соответствующем центральной точке интервала  $K_1 < K < K_2$ . Особо отметим, что согласно выражениям (24) и (25) параметрическая неустойчивость возможна только при  $\gamma < 1$ . Данный вывод согласуется с расчетами, выполненными в рамках уравнений (1), (2).

**1.3. Рождение несинфазного вращательного предельного цикла на нелинейной стадии развития неустойчивости.** Как было показано в предыдущем параграфе, при значениях силы связи  $K$  из интервала  $K_1 < K < K_2$  синфазный предельный режим вращения двух маятников становится неустойчивым, когда их координаты  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  совпадают друг с другом. При этом, согласно развитым теоретическим представлениям, расстройка  $\xi(t)$  между  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  нарастает во времени  $t$  экспоненциально с инкрементом  $\gamma p_1/\lambda$ . Однако данный рост не может продолжаться бесконечно. Его должны остановить неучтенные нами ранее нелинейные эффекты, которые играют принципиальную роль в теории параметрических колебаний и обычно приводят к стабилизации неустойчивости [39, 44]. Только приняв во внимание неизохронность поведения удовлетворяющей уравнению (7) функции  $\xi(\tau)$ , можно определить характер установившегося режима движения двух маятников, сила связи  $K$  между которыми близка к критическому значению  $K_* = \gamma^2/8\lambda^2$ .

Для того, чтобы как минимум качественно проанализировать влияние нелинейных эффектов на развитие описанной выше параметрической неустойчивости синфазного вращательного предельного цикла, предположим, что расстройка  $\xi(\tau)$  увеличилась на столько, что ее можно считать по порядку величины сравнимой с  $\sqrt{\varepsilon}$ . Другими словами, пусть теперь

$$\xi(\tau) = \sqrt{\varepsilon}\xi_0(\tau) + \varepsilon\xi_1(\tau) + o(\varepsilon^{3/2}), \quad (26)$$

где символом  $o(\varepsilon^{3/2})$  обозначены члены имеющие порядок  $\varepsilon^{3/2}$  и выше. При этом основные слагаемые в асимптотическом разложении функции  $\eta(\tau)$  останутся неизменными и будут удовлетворять тем же самым формулам, которые выписаны в п. 1.2,

$$\eta(\tau) = [\tau - \tau_0 + \varepsilon\phi_1(\tau) + \dots] + \sqrt{\varepsilon}\psi_0(\varepsilon\tau) [1 + \psi_1(\tau)], \quad (27)$$

где  $\phi_1(\tau)$ ,  $\psi_1(\tau)$  и  $\psi_0(\varepsilon\tau)$  соответственно определяются выражениями (14), (16) и (17). Аналогично тому, как было сделано раньше, представим  $\xi_0(\tau)$  в виде (20) и подставим соотношения (26) и (27) в уравнение (7). Далее, приравняем друг другу члены одного порядка малости и, воспользовавшись медленностью функции  $\Xi(\varepsilon\tau)$ , усредним полученное в порядке  $\varepsilon^{3/2}$  соотношение по периоду предельного синфазного вращения двух маятников. В итоге, придем к следующему укороченному уравнению для  $\Xi(\varepsilon\tau)$ :

$$\frac{2}{\varepsilon} \frac{d\Xi}{d\tau} = -(\kappa\gamma + i\Omega)\Xi + i\kappa\Xi^* - i\omega_0^2 |\Xi|^2 \Xi. \quad (28)$$



В отличие от (21) в (28) присутствует нелинейное слагаемое, которое становится существенным, когда расстройка  $\xi(\tau)$  нарастет до величины порядка  $\sqrt{\varepsilon}$ .

В комплексной функции  $\Xi(\tau)$  выделим явным образом амплитуду  $\rho(\tau)$  и фазу  $\vartheta(\tau)$

$$\Xi(\tau) = \rho(\tau) \exp[\vartheta(\tau)]. \quad (29)$$

Тогда для действительных функций  $\rho(\tau)$  и  $\vartheta(\tau)$  переменной  $\tau$  из (28) получим систему автономных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{2}{\varepsilon} \frac{d\rho}{d\tau} = -\kappa\gamma\rho + \kappa\rho \sin 2\vartheta, \quad (30)$$

$$\frac{2}{\varepsilon} \frac{d\vartheta}{d\tau} = -\Omega + \kappa \cos 2\vartheta - \omega_0^2 \rho^2. \quad (31)$$

Если правые части уравнений (30) и (31) одновременно обратятся в нуль, то  $\rho(\tau)$  и  $\vartheta(\tau)$  примут соответственно равновесные значения  $R_0$  и  $\Theta_0$  и не будут в дальнейшем меняться с течением времени  $\tau$ . При этом согласно формуле (20) расстройка  $\xi_0(\tau)$  будет совершать гармонические колебания с постоянной амплитудой  $R_0$  и фиксированной фазой  $(\Theta_0 - \tau_0/2)$  на частоте  $\omega_d = \omega_s/2$ , в два раза меньшей частоты  $\omega_s = \gamma/\lambda$  синфазного вращательного предельного цикла.

Равновесные значения  $R_0$  и  $\Theta_0$  удовлетворяют соотношениям

$$R_0 \sin 2\Theta_0 = \gamma R_0, \quad \omega_0^2 R_0^2 = \kappa \cos 2\Theta_0 - \Omega. \quad (32)$$

У системы трансцендентных алгебраических уравнений (32) есть тривиальное решение, когда  $R_0 = 0$ . Оно отвечает нулевой расстройке  $\xi_0(\tau)$ , то есть синхронному вращению двух связанных маятников. Кроме того, система уравнений (32) при определенных условиях имеет и стационарные решения с конечной амплитудой  $R_0$ . Если  $\gamma < 1$ , то, исключив  $\Theta_0$  из второго соотношения (32), находим

$$R_0^\pm = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{-\Omega \pm \kappa \sqrt{1 - \gamma^2}} = \sqrt{\frac{8K\lambda^2 - \gamma^2 \pm 2\lambda^2 \sqrt{1 - \gamma^2}}{4\varepsilon\lambda^2 K}}. \quad (33)$$

Решение  $R_0^+$  существует при параметре связи  $K \geq K_1$ , а решение  $R_0^-$  реализуется только в области  $K \geq K_2$ . Что касается постоянной  $\Theta_0$  (поправки к фазе установившихся колебаний расстройки  $\xi_0(\tau)$ ), то для нее из соотношений (32) легко находятся соответствующие  $R_0^+$  и  $R_0^-$  значения

$$\Theta_0^+ = 0.5 \arcsin \gamma, \quad \Theta_0^- = 0.5 (\pi - \arcsin \gamma). \quad (34)$$

Для полноты картины обсудим теперь устойчивость найденных стационарных решений укороченного уравнения (28). Прежде всего отметим, что для равновесного состояния с  $R_0 = 0$  данный вопрос по сути уже разобран в п. 1.2. Было установлено, что такое состояние неустойчиво относительно малых возмущений при значениях коэффициента связи  $K$  между маятниками из интервала  $K_1 < K < K_2$ .

Для того чтобы проанализировать устойчивость стационарных решений с конечными амплитудами  $R_0^-$  и  $R_0^+$ , рассмотрим поведение поправки  $\varepsilon \xi_1(\tau)$  к основному слагаемому в асимптотическом разложении (26) для расстройки  $\xi(\tau)$ . Будем

искать  $\xi_1(\tau)$  в аналогичной соотношению (20) форме

$$\xi_1(\tau) = \text{Re} \left[ \zeta(\varepsilon\tau) \exp(i(\tau - \tau_0)/2) \right], \quad (35)$$

где  $\zeta(\varepsilon\tau)$  – медленно изменяющаяся во времени  $\tau$  комплексная функция. В итоге во втором порядке малости по  $\varepsilon$  получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение для  $\zeta(\tau)$

$$\frac{2}{\varepsilon} \frac{d\zeta}{d\tau} + (\kappa\gamma + i\Omega + 2i\omega_0^2 |\Xi_0|^2) \zeta + (i\omega_0^2 \Xi_0^2 - i\kappa) \zeta^* = -\varepsilon \Xi_0 \psi_0(\varepsilon\tau). \quad (36)$$

Здесь и далее предполагается, что  $\Xi_0$  комплексное число, которое принимает одно из двух значений

$$\Xi_0^\pm = R_0^\pm \exp(i\Theta_0^\pm) \quad (37)$$

в зависимости от того, вблизи какого из равновесных состояния (с амплитудой  $R_0^+$  или  $R_0^-$ ) мы находимся.

Удовлетворяющую неоднородному уравнению (36) функцию  $\zeta(\tau)$  можно представить в виде суммы его частного решения  $\zeta_p(\tau)$  и общего решения  $\zeta_g(\tau)$  однородного уравнения (36) без правой части

$$\zeta(\tau) = \zeta_p(\tau) + \zeta_g(\tau). \quad (38)$$

В качестве  $\zeta_p(\tau)$  возьмем

$$\zeta_p(\tau) = \mathcal{A} \psi_0(\tau), \quad (39)$$

где  $\mathcal{A}$  – комплексная постоянная, которую легко найти путем непосредственной подстановки (39) в соотношение (36). В свою очередь,  $\zeta_g(\tau)$  можно разложить по собственным функциям линейного дифференциального оператора  $\hat{L}$

$$\hat{L}\zeta = \frac{2}{\varepsilon} \frac{d\zeta}{d\tau} + (\kappa\gamma + i\Omega + 2i\omega_0^2 |\Xi_0|^2) \zeta + (i\omega_0^2 \Xi_0^2 - i\kappa) \zeta^*. \quad (40)$$

Естественно данное разложение зависит от того, какое из двух значений  $\Xi_0^+$  и  $\Xi_0^-$  будет выбрано за  $\Xi_0$ .

В первом случае асимптотическое поведение  $\zeta_g(\tau)$  определяется функциями

$$\sigma_{1,2}^+(\tau) = \exp(q_{1,2}^+ \tau) \quad (41)$$

и комплексно сопряженными к ним. Здесь

$$q_{1,2}^+ = -\kappa\gamma \pm \sqrt{\kappa^2\gamma^2 - 4\omega_0^2 R_0^2 \kappa \sqrt{1 - \gamma^2}} \quad (42)$$

являются собственными значениями оператора  $\hat{L}$  с  $\Xi_0 = \Xi_0^+$ . Из выражения (42) видно, что действительные части  $q_{1,2}^+$  всегда отрицательные. Таким образом, равновесное состояние с амплитудой  $R_0^+$  устойчиво относительно малых возмущений  $\varepsilon \xi_1(\tau)$ .

Во втором случае асимптотическое поведение  $\zeta_g(\tau)$  определяется функциями

$$\sigma_{1,2}^-(\tau) = \exp(q_{1,2}^- \tau) \quad (43)$$

и комплексно сопряженными к ним. Здесь

$$q_{1,2}^- = -\kappa\gamma \pm \sqrt{\kappa^2\gamma^2 + 4\omega_0^2 R_0^2 \kappa \sqrt{1 - \gamma^2}} \quad (44)$$

представляют собой собственные значения оператора  $\hat{L}$  с  $\Xi_0 = \Xi_0^-$ . Нетрудно заметить, что оба числа  $q_{1,2}^-$  действительные, причем одно всегда положительное, а другое всегда отрицательное. Это означает, стационарное решение укороченного уравнения (28) с амплитудой  $R_0^-$  является неустойчивым (седловым).

Итак, на основе развитого асимптотического подхода можно сделать следующие выводы об установившихся предельных вращательных режимах движения двух маятников, сила связи  $K$  между которыми близка к значению  $K_* = \gamma^2/8\lambda^2$ . В области  $K \leq K_1$  существует единственное устойчивое равновесное состояние с  $R_0 = 0$ , а именно, есть только один синфазный вращательный предельный цикл. В интервале  $K_1 < K < K_2$  данный режим вращения теряет свою устойчивость, а у укороченного уравнения (28) появляется стационарное решение с амплитудой  $R_0 = R_0^+$ , отвечающее устойчивому предельному вращательному движению с конечной расстройкой  $\xi(t)$  между координатами  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$ . Это означает, что развитие параметрической неустойчивости синфазного вращательного предельного цикла заканчивается установлением несинфазного предельного вращения двух маятников. Как уже отмечалось выше, механизм насыщения неустойчивости связан с неизохронностью осцилляций переменной  $\xi(\tau)$ . Поскольку частота собственных колебаний расстройки  $\xi(\tau)$  зависит от энергии, с ростом амплитуды она изменяется и резонансные условия нарушаются. В теории параметрических колебаний этот механизм носит название расстройного [39, 44]. Наконец, в области  $K \geq K_2$  сосуществуют два устойчивых равновесных состояния с  $R_0 = 0$  и  $R_0 = R_0^+$  и одно неустойчивое с  $R_0 = R_0^-$ . Другими словами, наблюдается бистабильность вращательных предельных циклов: движение маятников может выйти как на синфазный, так и на несинфазный режимы вращения. При  $K \geq K_2$  следует ожидать, что возможен жесткий переход от синфазного вращательного предельного цикла к несинфазному: малые возмущения  $\xi(t)$  затухают, тогда как расстройки  $\xi(t)$  с достаточной большой амплитудой нарастают и в результате переходного процесса устанавливается несинфазное предельное вращение. Данная ситуация, в каком-то смысле, аналогична жесткому возбуждению автоколебаний [40].

## 2. Бифуркации удвоения периода и возникновение бистабильности вращательных предельных циклов в системе двух связанных идентичных маятников

На рис. 3 наглядно продемонстрировано, как развивается параметрическая неустойчивость в случае, когда  $\lambda = 0.16$ ,  $\gamma = 0.99$ , а параметр связи  $K = 4.7625$  лежит внутри соответствующего интервала значений  $K_1 \approx 4.7503777 < K < K_2 \approx 4.8209114$ . При численном моделировании в качестве начальных условий случайным образом выбирались координаты точки  $\varphi_{10}, \dot{\varphi}_{10}, \varphi_{20}, \dot{\varphi}_{20}$ , лежащей близко к синфазному предельному циклу в фазовом пространстве рассматриваемой системы.

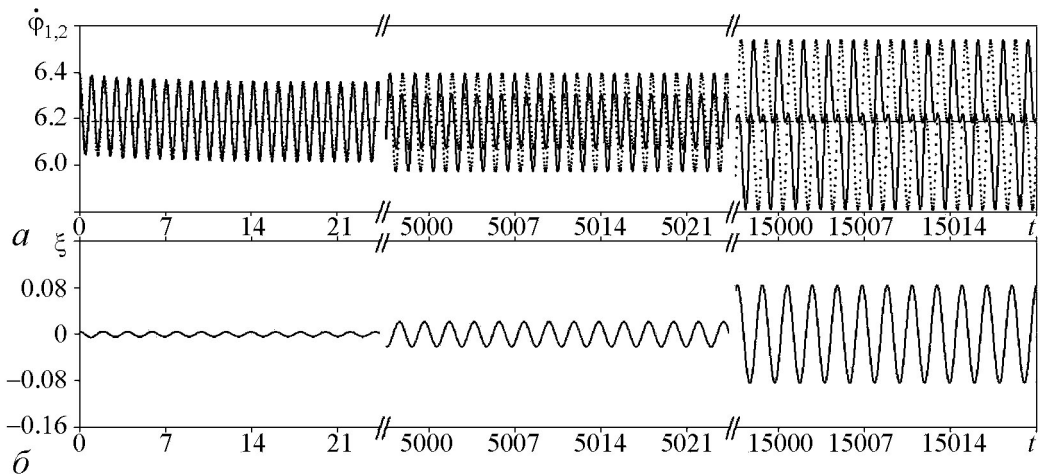


Рис. 3. *a* – изменение во времени обобщенных скоростей  $\dot{\varphi}_1(t)$  (сплошная линия) и  $\dot{\varphi}_2(t)$  (пунктирная линия) двух маятников; *б* – изменение во времени расстройки  $\xi(t)$  между их координатами  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$ . Численное моделирование поведения системы выполнено в рамках уравнений (1), (2) при  $\lambda = 0.16$ ,  $\gamma = 0.99$  и  $K = 4.7625$

В частности, для изображенной на рис. 3 ситуации имеем

$$\varphi_{10} = 2.6472 \times 10^{-3}, \quad \dot{\varphi}_{10} = 6.3850902,$$

$$\varphi_{20} = -8.0492 \times 10^{-3}, \quad \dot{\varphi}_{20} = 6.3904578.$$

Начальные значения  $\xi(t=0)$  и  $\dot{\xi}(t=0)$  расстройек между координатами двух маятником и их производными малы и соответственно равны

$$\xi_0 = 5.3483 \times 10^{-3}, \quad \dot{\xi}_0 = -2.6838 \times 10^{-3}. \quad (45)$$

Из рис. 3 видно, что на промежутке времени  $0 \leq t \leq 21$  функции  $\dot{\varphi}_1(t)$  и  $\dot{\varphi}_2(t)$  практически совпадают друг с другом. Они выходят на режим колебаний, которые происходят вблизи значения  $\omega_s = \gamma/\lambda = 6.1875$ , а именно, у  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  есть монотонный рост со скоростью  $\omega_s$ , совпадающей с визуальной частотой квазипериодических изменений. Это означает, что, пока расстройка  $\xi(t)$  мала и почти не оказывает влияние на динамику системы, постепенно (за  $\Delta t \sim \lambda^{-1} = 6.25$ ) устанавливается предельное квазисинфазное вращение двух маятником с периодом  $T_s = 2\pi\lambda/\gamma \approx 1.0154643$ .

На втором приведенном на рис. 3 этапе, когда  $5000 \leq t \leq 5021$ , становится заметна расфазировка в движении двух маятников из-за развития параметрической неустойчивости их предельного синфазного режима вращения. Графики функций  $\dot{\varphi}_1(t)$  и  $\dot{\varphi}_2(t)$  здесь уже значительно разошлись, так как стал существенным вклад расстройки  $\xi(t)$ , растущей с характерным инкрементом  $\gamma p_1/\lambda \approx 0.461 \times 10^{-3}$ . Визуальный период изменения  $\dot{\varphi}_1(t)$  и  $\dot{\varphi}_2(t)$  увеличился в два раза и начал совпадать с периодом колебаний переменной  $\xi(t)$ . Отметим, что на данной стадии проявляются нелинейные эффекты [39, 44]. Их влияние прежде всего приводит к замедлению роста амплитуды колебаний расстройки  $\xi(t)$ .

С течением времени нелинейные эффекты становятся настолько значительными, что полностью останавливают развитие параметрической неустойчивости и стабилизируют протекающие процессы. На временном интервале  $15000 \leq t \leq 15021$  движение маятников уже вышло на новое предельное вращение, в котором координаты  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  меняются несинфазно. Другими словами, когда параметр связи  $K$  становится равным  $K_1$ , при превышении которого развивается описанная выше параметрическая неустойчивость, в системе двух связанных маятников возникает еще один предельный цикл, характеризующийся несинфазным вращением с частотой повторения  $\omega_d$  в два раза меньшей по сравнению с  $\omega_s$ . Можно сказать, что происходит своеобразная бифуркация удвоения периода, так как период  $T_d$  установившегося несинфазного предельного цикла в два раза больше, чем период  $T_s$  синфазного вращательного предельного цикла, вблизи которого были выбраны начальные значения. Такая динамика обусловлена тем, что нарастающая из-за развития параметрической неустойчивости расстройка  $\xi(t)$  колеблется согласно условию синхронизма с частотой  $\omega_d$ . Данные выводы, основанные на результатах расчетов, полностью согласуются с развитыми в разделе 1 теоретическими представлениями.

На рис. 4 приведена бифуркационная диаграмма, полученная путем прямого численного моделирования системы уравнений (1), (2). На ней показана амплитуда установившихся в результате всех переходных процессов колебаний расстройки  $\xi(t)$ . Горизонтальная линия  $A_1$  соответствует устойчивому состоянию с  $\xi_{max} = 0$ , когда синфазный вращательный предельный цикл притягивает к себе расположенные

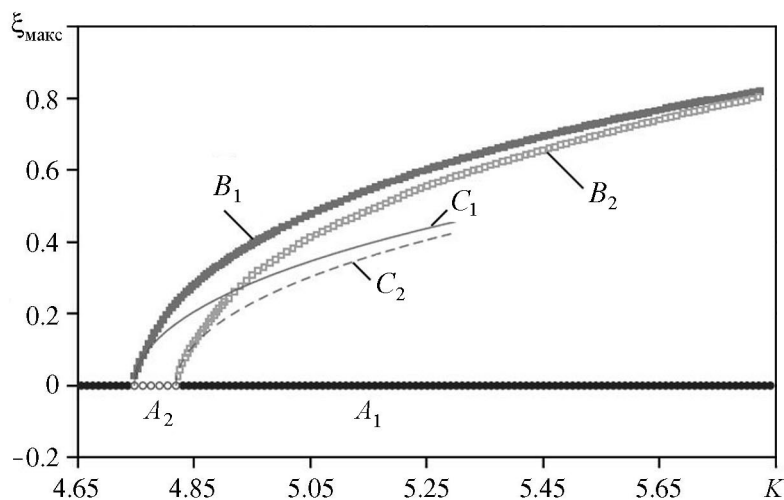


Рис. 4. Зависимость амплитуды установившихся колебаний расстройки  $\xi(t)$  между координатами  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  маятников от параметра связи  $K$  при фиксированных  $\gamma = 0.99$  и  $\lambda = 0.16$ . Горизонтальная прямая  $\xi_{max} = 0$  (показана жирными маркерами  $A_1$  и светлыми маркерами  $A_2$ ) отвечает синфазному вращательному предельному циклу. Светлыми маркерами  $A_2$  отмечены значения  $K$ , при которых данный цикл неустойчив согласно расчетам, выполненным непосредственно в рамках системы уравнений (1), (2). Крайние точки отрезка  $A_2$  практически совпадают с границами найденного в п. 1.2 интервала  $K_1 < K < K_2$  параметрической неустойчивости синфазного предельного режима вращения. Линии  $B_1$  и  $B_2$  (показаны жирными и светлыми квадратными маркерами) соответствуют устойчивому и неустойчивому несинфазным вращательным предельным циклам, полученным в ходе прямого численного моделирования. Сплошная  $C_1$  и штриховая  $C_2$  линии представляют собой аналитические оценки на основе формулы (33) для максимума расстройки  $\xi(t)$  при устойчивом и неустойчивом несинфазных предельных режимах вращения двух маятников

вблизи траектории в фазовом пространстве. Однако, как видно из рис. 4, линия  $A_1$  терпит разрыв. Участок разрыва  $A_2$  на бифуркационной диаграмме соответствует интервалу неустойчивости синфазного предельного цикла. Данный отрезок на рис. 4 практически весь лежит внутри интервала  $K_1 < K < K_2$ . Как показано выше в ходе асимптотического рассмотрения (см. п. 1.2), именно при значениях параметра связи  $K$  из этого интервала развивается параметрическая неустойчивость синфазного предельного цикла. Совпадение с хорошей степенью точности численных и аналитических результатов свидетельствует о справедливости развитых в п. 1.2 теоретических построений.

Линия  $B_1$  (см. рис. 4) соответствует устойчивому предельному вращению с отличной от нуля расстройкой  $\xi(t)$  ( $\xi(t) \neq 0$ ) между координатами  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  маятников. Видно, что линия  $B_1$  берет свое начало из точки с абсциссой  $K \approx K_1$  (там, где синфазное вращение становится неустойчивым), продолжается в затемненной области параметрической неустойчивости, а затем выходит достаточно далеко за ее границы, то есть за точку  $K \approx K_2$ . Таким образом, при  $K_2 \leq K \leq K_3$  ( $K_3 \approx 5.8275$  для выбранных значений параметров  $\lambda = 0.16$  и  $\gamma = 0.99$ ) одновременно сосуществуют два устойчивых вращательных предельных цикла, один из которых можно охарактеризовать синфазным движением двух маятников, а второй – несинфазным. Возникает своеобразная бистабильность вращательных предельных циклов в рассматриваемой системе, описываемой уравнениями (1), (2).

Как показывают расчеты, помимо устойчивых предельных режимов вращения в диапазоне  $K_2 \leq K \leq K_3$  есть еще и неустойчивый несинфазный вращательный предельный цикл, период которого совпадает с  $T_d$ , а значит, в два раза превосходит  $T_s$ . Этот неустойчивый цикл (см. линию  $B_2$  на рис. 4), рождается из неустойчивого синфазного предельного периодического движения в окрестности точки  $K \approx K_2$  в результате субкритической бифуркации удвоения периода. При  $K = K_3$  устойчивый и неустойчивый вращательные предельные циклы сливаются друг с другом, что приводит к их исчезновению через седлоузловую бифуркацию. В итоге приведенная на рис. 4 бифуркационная диаграмма имеет гистерезисный характер.

Отметим, что наличие бистабильности вращательных предельных циклов было предсказано в п. 1.3, где получены оценки для амплитуд  $\xi_{\max}$  колебаний расстройки  $\xi(t)$  при предполагаемых устойчивом и неустойчивом несинфазных режимах вращения двух маятников. Согласно развитыми теоретическим представлениям, имеем  $\xi_{\max}^{\pm} \approx \sqrt{\varepsilon} R_0^{\pm}$ . Зависимости  $\xi_{\max}^{\pm}$  от силы связи  $K$  изображены на бифуркационной диаграмме (см. рис. 4) соответственно с помощью сплошной и штриховой кривых  $C_1$  и  $C_2$ . Видно, что маркеры  $B_1$  и  $B_2$  достаточно хорошо ложатся на данные линии только вблизи критического значения параметра связи  $K_* = \gamma^2/8\lambda^2 \approx 4.7856445$ . Как только  $K$  начинает отличаться от  $K_*$  на величину, превосходящую по порядку  $\varepsilon$ , или амплитуда  $\xi_{\max}$  становится в несколько раз больше, чем  $\sqrt{\varepsilon}$ , различия между линиями  $B_1$  и  $C_1$ , а также между линиями  $B_2$  и  $C_2$  существенно увеличиваются. Это связано с тем, что при построении аналитической оценки для  $\xi_{\max}$  в п. 1.3 использовалось предположение о малости нелинейных эффектов, позволившее ограничиться в уравнении (28) лишь кубичной по амплитуде расстройки  $\xi(t)$  поправкой.

На рис. 5 представлены проекции на плоскость  $\dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_1$  фазовых траекторий соответствующих вращательным предельным циклам при различных значениях па-

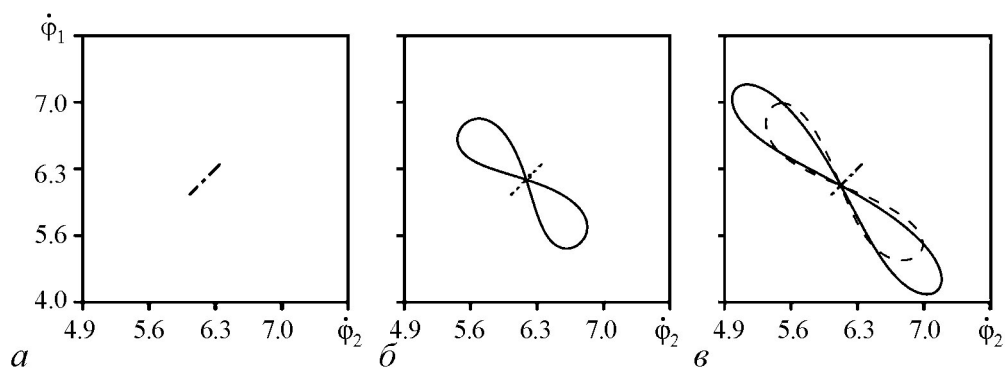


Рис. 5. Проекция на плоскость  $\dot{\phi}_2, \dot{\phi}_1$  фазовых траекторий вращательных предельных циклов при различных значениях параметра связи  $K$ :  $a - 4.7$ ,  $b - 4.8$  и  $v - 4.9$  при  $\gamma = 0.99$ ,  $\lambda = 0.16$ . Штрихпунктирными и сплошными линиями показаны устойчивые режимы вращения, а пунктирной (см. фрагмент  $b$ ) и штриховой (см. фрагмент  $v$ ) линиями – неустойчивые предельные периодические движения. Сплошные и штриховые линии соответствуют несинфазным вращательным предельным циклам, а штрихпунктирные (см. фрагменты  $a$  и  $v$ ) и пунктирная (см. фрагмент  $b$ ) линии – синфазным предельным вращениям

раметра связи  $K$ . Когда  $K = 4.7$ , у маятников существует лишь синфазный предельный режим вращения (штрихпунктирная линия на рис. 5,  $a$ ). Видно, что образ такого движения представляет собой отрезок, так как  $\dot{\phi}_1(t)$  и  $\dot{\phi}_2(t)$  – периодические функции, которые совпадают друг с другом во все моменты времени  $t$ .

На рис. 5,  $b$  синфазный предельный режим вращения отмечен пунктирной линией, при  $K = 4.8$  он становится неустойчивым. Здесь же сплошной линией изображена проекция на плоскости  $\dot{\phi}_2, \dot{\phi}_1$  фазовой траектории устойчивого несинфазного вращательного предельного цикла. Его образ похож на наклонную восьмерку. Каждой из петель этой линии соответствует проход по пунктирному отрезку от начала до конца и обратно, то есть один период  $T_s$  синфазного предельного цикла. В свою очередь, чтобы обойти восьмерку полностью, требуется время  $T_d = 2T_s$ . Другими словами, возникновение замкнутой восьмерки на фазовой плоскости  $\dot{\phi}_2, \dot{\phi}_1$  является наглядной иллюстрацией бифуркации удвоения периода, которая происходит в результате параметрической неустойчивости синфазного предельного цикла.

Фазовые траектории на рис. 5,  $v$  демонстрируют, как располагаются друг относительно друга три предельных вращательных цикла, сосуществующих вместе в системе двух связанных маятников при  $K = 4.9$ . Синхронный вращательный предельный цикл, вновь ставший устойчивым (сплошная линия), не изменил своего положения по сравнению с ситуациями, изображенными на фрагментах ( $a$ ) и ( $b$ ). В данном случае амплитуда колебаний устойчивого несинфазного режима вращения выросла, увеличилась длина восьмерки, являющаяся проекцией его фазовой траектории на плоскость  $\dot{\phi}_2, \dot{\phi}_1$ . Центр наклонной восьмерки сместился к краю отрезка, соответствующего синфазному вращательному предельному циклу. Здесь же штриховой линией показано неустойчивое несинфазное предельное периодическое движение. Видно, что амплитуда колебаний такого движения меньше, чем в случае устойчивого несинфазного предельного вращения. Однако центр восьмерок устойчивого и неустойчивого несинфазных вращательных предельных циклов совпадают. При увеличении параметра связи  $K$  фазовые траектории данных циклов все ближе подходят друг к другу. Когда  $K$  становится равным критическому значению  $K_3$ , они

сливаются. При этом общий центр их проекций на плоскость  $\dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_1$  в виде восьмерок подойдет к концу отрезка (штрихпунктирная линия), изображающего синфазный вращательный предельный цикл.

### Заключение

В работе подробно исследована вращательная динамика двух нелинейно связанных идентичных маятников, совместное поведение которых описывается системой уравнений (1), (2). С помощью прямого численного моделирования и теоретического рассмотрения показано: когда ответственная за постоянное внешнее воздействие безразмерная величина  $\gamma$  меньше единицы, при определенных значениях параметра  $K$ , характеризующего связь между маятниками, синфазный предельный режим вращения становится неустойчивым. Найден аналитические выражения для границ зоны  $K_1 < K < K_2$  этой неустойчивости. Расчеты показали, что в рассматриваемой системе происходит рождение несинфазных вращательных предельных циклов в окрестностях точек  $K = K_1$  и  $K = K_2$ . При первой бифуркации, когда  $K \approx K_1$ , возникает устойчивое несинфазное предельное периодическое движение, а синфазный вращательный предельный цикл теряет свою устойчивость. Вблизи  $K = K_2$  происходит вторая бифуркация, в ходе которой формируется неустойчивый несинфазный вращательный предельный цикл и возвращается устойчивость к синфазному предельному режиму вращения. Другими словами, для двух нелинейно связанных маятников продемонстрировано наличие бистабильности их предельных периодических движений. С дальнейшим ростом параметра связи  $K$  (при критическом значении  $K = K_3$ , которое определяется только вычислениями) происходит слияние и полное исчезновение несинфазных вращательных предельных циклов.

*Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-12-00811).*

### Библиографический список

1. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge University Press, 2001.
2. *Braun O., Kivshar Yu.S.* The Frenkel-Kontorova model: Concepts, Methods, and Applications. Springer, 2004.
3. *Yakushevich L.V.* Nonlinear Physics of DNA. 2nd Edition. Wiley-Vch, 2004.
4. *Afraimovich V.S., Nekorkin V.I., Osipov G.V., Shalfeev V.D.* Stability, structures and chaos in nonlinear synchronization network. Singapore: World Scientific, 1994.
5. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Кузнецов С.П., Селезнев Е.П.* Особенности возникновения квазипериодических движений в системе диссипативно связанных нелинейных осцилляторов под внешним периодическим воздействием // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14, вып. 1. С. 37.
6. *Leeman C., Lereh P., Racine G. A., Martinoli P.* Vortex dynamics and phase transitions in a two-dimensional array of Josephson junctions // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56, № 12. P. 1291.



7. *Ryu S., Yu W., Stroud D.* Dynamics of an underdamped Josephson-junction ladder // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 53, № 3. P. 2190.
8. *Kim B.J., Kim S., Lee S.J.* Defect motions and smearing of Shapiro steps in Josephson-junction ladders under magnetic frustration // *Phys. Rev. B.* 1995. Vol. 51, № 13. P. 8462.
9. *Kim J., Choe W.G., Kim S., Lee H.J.* Dynamics of Josephson-junction ladders // *Phys. Rev. B.* 1994. Vol. 49, № 1. P. 459.
10. *Denniston C., Tang C.* Phases of Josephson-junction ladders // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 75, № 21. P. 3930.
11. *Qian M., Weng J.-Z.* Transitions in two sinusoidally coupled Josephson-junction rotators // *Annals of Physics.* 2008. Vol. 323. P. 1956.
12. *Fishman R.S., Stroud D.* Role of long-range Coulomb interactions in granular superconductors // *Phys. Rev. B.* 1988. Vol. 38, № 1. P. 290.
13. *Yakushevich L.V., Gapa S., Awrejcewicz J.* Mechanical analog of the DNA base pair oscillations // *Dynamical Systems. Theory and Applications* / Eds. by J. Awrejcewicz et al. Lodz: Left Grupa, 2009. P. 879.
14. *Якушевич Л.В.* Биомеханика ДНК: Вращательные колебания оснований // Компьютерные исследования и моделирование. 2011. Т. 3, № 3. С. 319.
15. *Аврейцевич Я., Млынарска С., Якушевич Л.В.* О нелинейных колебаниях пар оснований ДНК // *Прикладная математика и механика.* 2013. Т. 77, № 4. С. 1.
16. *Krueger A., Protozanova E., Frank-Kamenetskii M.* Sequence-dependent basepair opening in DNA double helix // *Biophys. J.* 2006. Vol. 90. P. 3091.
17. *Takeno S., Peyrard M.* Nonlinear modes in coupled rotator models // *Physica D.* 1996. Vol. 92. P. 140.
18. *Zhang F.* Kink shape modes and resonant dynamics in sine-lattices // *Physica D.* 1997. Vol. 110. P. 51.
19. *Kosterlitz J.M., Thouless D.J.* Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems // *J. Phys. C. Solid State Phys.* 1973. Vol. 6. P. 1181.
20. *Antoni M., Ruffo S.* Clustering and relaxation in Hamiltonian long-range dynamics // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 52, № 3. P. 2361.
21. *Wang X.Y., Taylor P.L.* Devil's staircase, critical thickness, and propagating fingers in antiferroelectric liquid crystals // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76, № 4. P. 640.
22. *Fillaux F., Carlile C.J.* Inelastic-neutron-scattering study of methyl tunneling and the quantum sine-Gordon breather in isotopic mixtures of 4-methyl-pyridine at low temperature // *Phys. Rev. B.* 1990. Vol. 42, № 10. P. 5990.
23. *Fillaux F., Carlile C.J., Kearley G.J.* Inelastic-neutron-scattering study at low temperature of the quantum sine-Gordon breather in 4-methyl-pyridine with partially deuterated methyl groups // *Phys. Rev. B.* 1991. Vol. 44, № 22. P. 12280.
24. *Zhang F., Collins M.A., Kivshar Yu.S.* Kinks and conformational defects in nonlinear chains // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 51, № 4. P. 3774.
25. *Acebrón J.A., Bonilla L.L., Pérez Vicente C.J., Ritort F., Spigler R.* The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena // *Rev. Mod. Phys.* 2005. Vol. 77, № 1. P. 137.
26. *Tanaka H.-A., Lichtenberg A.J., Oishi S.* First order phase transition resulting from

- finite inertia in coupled oscillator systems // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78, № 11. P. 2104.
27. *Tanaka H.-A., Lichtenberg A.J., Oishi S.* Self-synchronization of coupled oscillators with hysteretic responses // *Physica D. Nonlin. Phenom.* 1997. Vol. 100, № 3–4. P. 279.
  28. *Rohden M., Sorge A., Timme M., Witthaut D.* Self-organized synchronization in decentralized power grids // *Phys. Rev. Lett.* Vol. 109, № 6. P. 064101(1).
  29. *Rohden M., Sorge A., Witthaut D., Timme M.* Impact of network topology on synchrony of oscillatory power grids // *Chaos.* 2014. Vol. 24, № 1. P. 013123(1).
  30. *Olmi S., Navas A., Boccaletti S., Torcini A.* Hysteretic transitions in the Kuramoto model with inertia // *Phys. Rev. E.* 2014. Vol. 90, № 4. P. 042905(1).
  31. *Olmi S., Martens E.A., Thutupalli S., Torcini A.* Intermittent chaotic chimeras for coupled rotators // *Phys. Rev. E.* 2015. Vol. 92, № 3. P. 030901(1).
  32. *Ha S.-Y., Kim Y., Li Z.* Large-time dynamics of Kuramoto oscillators under the effects of inertia and frustration // *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 2014. Vol. 13, № 1. P. 466.
  33. *Gupta S., Campa A., Ruffo S.* Nonequilibrium first-order phase transition in coupled oscillator systems with inertia and noise // *Phys. Rev. E.* 2014. Vol. 89, № 2. P. 022123(1).
  34. *Komarov M., Gupta S., Pikovsky A.* Synchronization transitions in globally coupled rotors in the presence of noise and inertia: Exact results // *Europhysics Letters.* 2014. Vol. 106, № 4. P. 40003(1).
  35. *Ji P., Peron T.K.DM., Menck P.J., Rodrigues F.A., Kurths J.* Cluster explosive synchronization in complex networks // *Phys. Rev. Lett.* 2013. Vol. 110, № 21. P. 218701(1).
  36. *Ji P., Peron T.K.DM., Menck P.J., Rodrigues F.A., Kurths J.* Analysis of cluster explosive synchronization in complex networks // *Phys. Rev. E.* 2014. Vol. 90, № 6. P. 062810(1).
  37. *Peron T.K. DM., Ji P., Rodrigues F.A., Kurths J.* Effects of assortative mixing in the second-order Kuramoto model // *Phys. Rev. E.* 2015. Vol. 91, № 5. P. 052805(1).
  38. *Goldstein G.* Classical Mechanics. 3rd Edition. Addison–Wesley, 2001.
  39. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. 5-е издание. М.: Физматлит, 2004.
  40. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Наука, 1981.
  41. *Belykh V.N., Pedersen N.F., Soerensen O.H.* Shunted–Josephson-junction model. I. The autonomous case // *Phys. Rev. B.* 1977. Vol. 16, № 11. P. 4853.
  42. *Tricomi F.* Integrazioni di un'equazione differenziale presentatasi in elettrotecnica // *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze.* 1933. Vol. 2, № 1. P. 1. 4 (2014).
  43. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987.
  44. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. 2-е изд. М.: Наука, 1974.

*Поступила в редакцию* 19.11.2015  
*После доработки* 15.12.2015

© Л.А. Смирнов, А.К. Крюков, Г.В. Осипов  
Изв. вузов «ПНД», т. 23, № 5, 2015

## ROTATIONAL DYNAMICS IN THE SYSTEM OF TWO COUPLED PENDULUMS

*L. A. Smirnov<sup>1,2</sup>, A. K. Kryukov<sup>1</sup>, G. V. Osipov<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Institute of Information Technology, Mathematics and Mechanics of Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod

<sup>2</sup>Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences

We consider dynamics in a pair of nonlinearly coupled pendulums. With existence of dissipation and constant torque such system can demonstrate in-phase periodical rotation in addition to the stable state. We have shown in numerical simulations that such in-phase rotation becomes unstable at certain values of coupling strength. In the limit of small dissipation we have created an asymptotic theory that explains instability of the in-phase cycle. Found analytical equations for coupling strength values corresponding to the boundaries of the instability area. Numerical simulations show that there is a coupling strength interval where the system can have a pair of stable and unstable non in-phase cycles in addition to the stable in-phase motion. Therefore, we demonstrated that nonlinearly coupled pendulums have a bi-stability of the limit cycles. Analysed bifurcations which lead to originating and disappearing of non in-phase cycles.

*Keywords:* Synchronization, oscillator, nonlinear dynamics

### References

1. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge University Press, 2001.
2. *Braun O., Kivshar Yu.S.* The Frenkel–Kontorova model: Concepts, Methods, and Applications. Springer, 2004.
3. *Yakushevich L.V.* Nonlinear Physics of DNA. 2nd Edition. Wiley-Vch, 2004.
4. *Afraimovich V.S., Nekorkin V.I., Osipov G.V., Shalfeev V.D.* Stability, structures and chaos in nonlinear synchronization network. Singapore: World Scientific, 1994.
5. *Astakhov V.V., Bezruchko B.P., Kuznetsov S.P., Seleznyov E.P.* // ZhETF Letters. 1988. Vol. 14, № 1. P. 37.
6. *Leeman C., Lereh P., Racine G. A., Martinoli P.* // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56, № 12. P. 1291.
7. *Ryu S., Yu W., Stroud D.* // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53, № 3. P. 2190.
8. *Kim B. J., Kim S., Lee S. J.* // Phys. Rev. B. 1995. Vol. 51, № 13. P. 8462.
9. *Kim J., Choe W. G., Kim S., Lee H. J.* // Phys. Rev. B. 1994. Vol. 49, № 1. P. 459.
10. *Denniston C., Tang C.* // Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 75, № 21. P. 3930.
11. *Qian M., Weng J.-Z.* // Annals of Physics. 2008. Vol. 323. P. 1956.
12. *Fishman R. S., Stroud D.* // Phys. Rev. B. 1988. Vol. 38, № 1. P. 290.
13. *Yakushevich L.V., Gapa S., Awrejcewicz J.* Mechanical analog of the DNA base pair oscillations // Dynamical Systems. Theory and Applications / Eds. by J. Awrejcewicz et al. Lodz: Left Grupa, 2009. P. 879.

14. *Yakushevich L.V.* // Computer Research and Modeling. 2011. Vol. 3, № 3. P. 319.
15. *Avreytsevich Y., Mlynarska S., Yakushevich L.V.* // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2013. Vol. 77, № 4. P. 1.
16. *Krueger A., Protozanova E., Frank-Kamenetskii M.* // Biophys. J. 2006. Vol. 90. P. 3091.
17. *Takeo S., Peyrard M.* // Physica D. 1996. Vol. 92. P. 140.
18. *Zhang F.* // Physica D. 1997. Vol. 110. P. 51.
19. *Kosterlitz J.M., Thouless D.J.* // J. Phys. C: Solid State Phys. 1973. Vol. 6. P. 1181.
20. *Antoni M., Ruffo S.* // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 52, № 3. P. 2361.
21. *Wang X.Y., Taylor P.L.* // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76, № 4. P. 640.
22. *Fillaux F., Carlile C.J.* // Phys. Rev. B. 1990. Vol. 42, № 10. P. 5990.
23. *Fillaux F., Carlile C. J., Kearley G. J.* // Phys. Rev. B. 1991. Vol. 44, № 22. P. 12280.
24. *Zhang F., Collins M. A., Kivshar Yu. S.* // Phys. Rev. E. 1995. V. 51, № 4. P. 3774.
25. *Acebrón J. A., Bonilla L. L., Pérez Vicente C. J., Ritort F., Spigler R.* // Rev. Mod. Phys. 2005. Vol. 77, № 1. P. 137.
26. *Tanaka H.-A., Lichtenberg A. J., Oishi S.* // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78, № 11. P. 2104.
27. *Tanaka H.-A., Lichtenberg A. J., Oishi S.* // Physica D: Nonlin. Phenom. 1997. Vol. 100, № 3–4. P. 279.
28. *Rohden M., Sorge A., Timme M., Witthaut D.* // Phys. Rev. Lett. Vol. 109, № 6. P. 064101(1).
29. *Rohden M., Sorge A., Witthaut D., Timme M.* // Chaos. 2014. Vol.24, №1.P. 013123(1).
30. *Olmi S., Navas A., Boccaletti S., Torcini A.* //
31. *Olmi S., Martens E. A., Thutupalli S., Torcini A.* // Phys. Rev. E. 2015. Vol. 92, № 3. P. 030901(1).
32. *Ha S.-Y., Kim Y., Li Z.* // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2014. Vol. 13, № 1. P. 466.
33. *Gupta S., Campa A., Ruffo S.* // Phys. Rev. E. 2014. Vol. 89, № 2. P. 022123(1).
34. *Komarov M., Gupta S., Pikovsky A.* // Europhysics Letters. 2014. Vol. 106, № 4. P. 40003(1).
35. *Ji P., Peron T.K. DM., Menck P.J., Rodrigues F.A., Kurths J.* // Phys. Rev. Lett. 2013. Vol. 110, № 21. P. 218701(1).
36. *Ji P., Peron T.K. DM., Menck P.J., Rodrigues F.A., Kurths J.* // Phys. Rev. E. 2014. Vol. 90, № 6. P. 062810(1).
37. *Peron T.K. DM., Ji P., Rodrigues F. A., Kurths J.* // Phys. Rev. E. 2015. Vol. 91, № 5. P. 052805(1).
38. *Goldstein G.* Classical Mechanics. 3rd Edition. Addison–Wesley, 2001.
39. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Mechanics. 5rd Edition. Moscow: Physmatlit, 2004.
40. *Andronov A.A., Vitt A.A., Khaikin S.E.* Theory of Oscillations. Moscow: Science, 1981.
41. *Belykh V.N., Pedersen N.F., Soerensen O.H.* // Phys. Rev. B. 1977. Vol. 16, № 11. P. 4853.
42. *Tricomi F.* Integrazioni di un'equazione differenziale presentatasi in elettrotecnica // Annalidella Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze. 1933. Vol. 2, № 1. P. 1. 4 (2014).

43. *Yakubovich V.A., Starzhinskiy V.M.* Parametric resonance in linear systems. Moscow: Science, 1987.
44. *Bogolyubov N.N., Mitropolsky Y.A.* Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations. Moscow: Science, 1974.



*Смирнов Лев Александрович*, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела нелинейной электродинамики Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федерального исследовательского центра Института прикладной физики Российской академии наук» (ИПФ РАН), старший преподаватель кафедры теории управления и динамики систем федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».

603950, ГСП-120, г. Нижний Новгород, ул. Ульянова, д. 46  
 Институт прикладной физики Российской академии наук  
 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23  
 Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
 E-mail: smirnov\_lev@appl.sci-nnov.ru



*Крюков Алексей Константинович*, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории управления и динамики систем федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».

603950 г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
 Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
 E-mail: alkryukov@gmail.com



*Осипов Григорий Владимирович*, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории управления и динамики систем федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».

603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
 Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
 E-mail: grosipov@gmail.com