УДК 51(09)

О СВЯЗИ МЕЖДУ НЕЛИНЕЙНЫМ АНАЛИЗОМ, БИФУРКАЦИЯМИ И НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКОЙ (На примере Воронежской школы нелинейного функционального анализа)

Е. М. Богатов, Р. Р. Мухин

Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова,

филиал Национального исследовательского технологического университета «МИСИС»

Работа посвящена некоторым историческим аспектам интенсивно развивающейся области современной математики – нелинейному функциональному анализу, который представляется как основа математического аппарата нелинейной динамики. Его методы продемонстрированы на примере анализа бифуркаций, рассмотрена исторически первая задача о бифуркациях – задача Эйлера об упругой неустойчивости стержня под действием продольных сжимающих сил. Обсуждается становление Воронежской школы функционального анализа и её роль в развитии нелинейного анализа в целом.

Ключевые слова: Нелинейный функциональный анализ, банахово пространство, нелинейный оператор, бифуркации, теорема Красносельского, неустойчивость, советская математика, Воронежская школа функционального анализа.

Введение

Развитие науки, как и любой исторический процесс, не происходит линейным и непрерывным образом. При ближайшем рассмотрении становятся видны скачки, отходы в сторону, тупиковые направления, влияние случайных факторов. События могут происходить и по следующему сценарию: какая-то область формируется самостоятельно, согласно своим внутренним законам, ее возможности скрыты, находятся в латентной форме. Но проходит время, когда результаты и методы этой области оказываются широко востребованными и находят широкое применение далеко за пределами самой этой области. Таким примером является нелинейный функциональный анализ, который развивался в разных городах Советского Союза, в том числе в Воронеже. Речь идет о Воронежской школе функционального анализа, которая стала заметным явлением математической жизни Советского Союза. Настоящая работа имеет своей целью продемонстрировать богатый потенциал указанной школы на примере теории бифуркаций в контексте параллелей исторического развития нелинейной динамики и топологических методов нелинейного анализа второй половины XX века.

1. Из ранней истории функционального анализа

Функциональный анализ, как раздел математики сложился на рубеже XIX–XX веков. Этому способствовали следующие обстоятельства.

- Появление новых ветвей математического анализа и выявившиеся при этом замечательные аналогии в разных областях алгебры, геометрии и классического анализа (аналогии между конечномерными и бесконечномерными объектами, что привело, например, к теории разложения произвольных функций в ряды Фурье, к построению теории интегральных уравнений).
- Углубление геометрических представлений, превратившее в объекты геометрии пространства более общей природы, и в соединении с теорией множеств Кантора это привело к созданию теории общих абстрактных пространств.
- Развитие теории функций действительного переменного и современной алгебры, что позволило изучать алгебраические операции над объектами произвольной природы (общая теория групп, колец и т.д.) [1, с. 608; 2, с. 644].

Функциональный анализ к середине ушедшего века стал фундаментом и идеологией значительной части математики, он дает возможность установить связи между далекими, на первый взгляд, разделами математики, например, топологией и вариационным исчислением, теорией групп и интегральными уравнениями [1, с. 609].

Бурное развитие функционального анализа в 1920–1930 годах, не в последнюю очередь, было мотивировано физическими задачами. Функциональный анализ лёг в основу математического аппарата квантовой механики, а затем квантовой теории поля. Условной датой рождения функционального анализа можно считать 1932 год, когда появилась монография С. Банаха «Теория линейных операций» [3], где он систематизировал и изложил с единых позиций главные результаты. Тогда всему математическому сообществу стало ясно, что сложилась новая область математики. Значение монографии Банаха можно сравнить с двумя другими великими трудами «Динамические системы» Дж. Биркгофа (1927) и «Теория колебаний» А.А. Андронова, А.А. Витта и С.Э. Хайкина (1937), появление которых ознаменовало рождение новой области науки – нелинейной динамики. В последующее активное распространение функционального анализа весомый вклад внесла отечественная математика. Если даже ограничиться довоенным периодом, то можно привести ставшие классическими работы Н.Н. Боголюбова и Н.М. Крылова, Л.В. Канторовича, С.Л. Соболева, М.Г. Крейна, И.М. Гельфанда и др.

Функциональный анализ развивался не только в главных математических центрах – Москве и Ленинграде, но и в Харькове, Одессе, Киеве, а с 1950-х годов сюда надо добавить и Воронеж.

2. Возникновение Воронежской школы функционального анализа

В 1930-е годы Воронежский университет был очень молодым, он был основан в 1918 году на базе эвакуированного в Воронеж Юрьевского университета (город Юрьев, ныне Тарту, Эстония) [4]. Первые профессора приехали в Воронеж ещё из Юрьева, но в начале 1930-х годов стали вливаться новые силы, и если говорить о математике, то это были молодые воспитанники Московского университета. Ещё большее значение имели приезды ряда самых крупных отечественных математиков, которые читали лекции, выступали на семинарах. Студенты, аспиранты, молодые преподаватели имели возможность получить новейшую информацию «из первых рук», от людей, непосредственно делавших науку. Первым приехал Л.А. Люстерник, затем неоднократно бывали А.Н. Колмогоров, Л.С. Понтрягин, В.В. Степанов, А.Н. Тихонов, В.И. Арнольд; этот список можно продолжить.

Дадим краткую биографическую справку об учёных, которые сыграли, с нашей точки зрения, ключевую роль в образовании воронежской школы нелинейного функционального анализа.

Лазарь Аронович Люстерник (1899–1981) – одна из самых ярких фигур в отечественной математике. У него был широкий диапазон научных интересов, он рано добился крупных успехов. В 1920–1930-е годы Люстерник (совместно с Л.Г. Шнирельманом) заложил основы совершенно новой области – топологических методов нелинейного анализа [5–7]. Итогом их исследований явилось решение классической проблемы Пуанкаре о трех геодезических. Этот результат вошел в число высших мировых достижений прошлого века в математике [8, с. 114]. Весной 1935 года Л.А. Люстерник прочёл в Воронежском университете курс функционального анализа, это был один из первых систематических курсов новой области математики. Эти переработанные лекции изложены в большой статье Л.А. Люстерника, которой открывается первый выпуск только что созданных «Успехов математических наук» [9]. В отсутствие в то время учебников эта статья стала на целые годы основным пособием по функциональному анализу в стране [10, с. 7]. К новой области потянулись способные студенты Воронежского госуниверситета. Пройдя аспирантуру в Москве, они вернулись в Воронеж. Одним из них был аспирант Л.А. Люстерника Владимир Иванович Соболев, которого можно считать организатором Воронежской школы функционального анализа. Именно по его инициативе была приглашена в Воронеж целая группа молодых математиков, главным образом, из Украины. Во главе школы встали М.А. Красносельский и С.Г. Крейн. Первым в 1952 году приехал М.А. Красносельский, затем С.Г. Крейн, Я.Б. Рутицкий, П.А. Соболевский, Ю.Г. Борисович и др. [11, с. 32]. Все это имело решающее значение, в 1950-е годы функциональный анализ пустил в Воронеже глубокие корни.

Марк Александрович Красносельский (1920–1997) после окончания Объединённого украинского университета в городе Кзыл-Орда в 1942 году и затем службы в Советской Армии стал в 1947 году сотрудником Института математики АН УССР в Киеве. Там он попал в обстановку интенсивной научной жизни, слушал лекции и принимал участие в работе семинаров крупнейших математиков, механиков, физиков (назовём лишь несколько имён – Н.Н. Боголюбов, А.Ю. Ишлинский, А.Н. Колмогоров, М.Г. Крейн, М.А. Лаврентьев, А.Г. Курош). Красносельский был учеником Марка Григорьевича Крейна – одной из крупнейших фигур в функциональном анализе. В 1948 году Марк Александрович защитил кандидатскую диссертацию по теории расширения операторов, а в 1950 – докторскую диссертацию по топологическим методам нелинейного анализа [12, с. 215]. С начала 1930-х годов в Институте математики начали интенсивно изучать нелинейные задачи. Н.М. Крылов и Н.Н. Боголюбов заложили основы нелинейной механики. И в последующие десятилетия нелинейная проблематика заняла самое видное место в деятельности Института. Так что обращение Красносельского к нелинейному анализу было неслучайным.

3. О роли топологических методов в функциональном анализе и нелинейной динамике

В математике постоянно идёт конкуренция сменяющих друг друга тенденций: первой – построение наиболее общих теорий и концепций, нового мировоззрения и нового понятийного аппарата; второй – изучение на созданном фундаменте конкретных задач, часто стимулированных другими областями математики и её приложений [13, с. 81]. Сказанное относится и к развитию функционального анализа. К началу 1950-х годов закончился период «бури и натиска» – создание новых теорий, доказательство фундаментальных теорем, формирование принципиально новых методов – и наступил период более спокойного развития. Новые методы последовательно обобщались на более широкий класс объектов, расширялись области применимости. К числу таких обобщений относится нелинейный функциональный анализ, в котором на первый план вышли топологические методы.

Если линейный функциональный анализ в конце 1940-х–начале 1950-х годов являлся хорошо развитой областью, то нелинейный функциональный анализ ещё только формировался. Особое место нелинейного функционального анализа в Советском Союзе было ещё обусловлено влиянием московской топологической школы. К нелинейными задачам относятся исследования П.С. Александрова, В.В. Немыцкого, А.Н. Тихонова по принципам неподвижных точек. В 1928–1930-е годы появились результаты Л.А. Люстерника и Л.Г. Шнирельмана по топологическим методам вариационного исчисления [2, с. 646].

Топология – один из самых абстрактных разделов математики – явилась тем инструментом, который наилучшим образом оказался приспособленным для анализа поведения динамических систем, когда не удаётся в явном виде решить уравнения или даже неизвестны сами уравнения, описывающие систему. Топология изучает свойства фигур и их взаимного расположения, сохраняющиеся при гомеоморфизмах – взаимно-однозначных и непрерывных в обе стороны отображениях. Адекватность топологических методов обусловлена двумя аспектами изучаемых систем. Суть первого из них заключается в том, что внимание концентрируется на глобальных, глубинных свойствах; система рассматривается «в целом», когда можно пренебрегать локальными вариациями. Вследствие этого на первое место выходит качественное поведение, а не количественное различие. Неизбежная потеря части информации – такова цена, которую приходится платить за возможное рассмотрение сложных случаев. Другой аспект, тесно связанный с первым, состоит в том, что от отдельного объекта переходят к изучению целого класса объектов, обладающих какими-либо общими чертами, отсюда унифицирующие, универсальные свойства. Такой в значительной степени является общая тенденция в развитии современной математики и теоретической физики [14, с. 65].

Важнейшую часть качественных методов составляет теория устойчивости, основы которой были заложены А. Пуанкаре и А.М. Ляпуновым. Один из типов глобальной устойчивости изучался Пуанкаре в серии работ в связи с восходящими ещё к Ньютону задачами о фигурах равновесия вращающихся жидких масс. При этом было введено понятие, имеющее общенаучное значение, – *бифуркация*. В общем случае понятие бифуркации возникает в ситуации, когда некоторый объект $D = D(\lambda)$ зависит от параметра λ (не обязательно скалярно) и в любой окрестности некоторого значения λ_0 последнего (*бифуркационное значение*) исследуемые качественные свойства объекта $D(\lambda)$ не являются одинаковыми для всех λ [15, с. 496].

Указанные задачи привели Ляпунова к первому глубокому исследованию нелинейных интегральных уравнений (1906) [16], которые позднее стали трактоваться как частный случай уравнений вида

$$\varphi = A\varphi, \tag{1}$$

где A – некоторый нелинейный оператор (дифференциальный, интегральный, интегродифференциальный и т.п.).

Непосредственное отношение к важнейшей задаче качественных методов – классификации различных объектов – имеет понятие инвариантов и построение их полной совокупности, позволяющее различать любые два объекта из рассматриваемого множества. Такой подход приводит к понятиям *топологической эквивалентности и топологических инвариантов. Топологическими инвариантами* являются свойства, которые сохраняются при любых гомеоморфизмах одного топологического пространства на другое. К таким инвариантам относятся связность, замкнутость, размерность, компактность и др. Важнейший топологический инвариант, оказавший значительное влияние на развитие нелинейной динамики, был предложен А.А. Андроновым и Л.С. Понтрягиным. Они ввели понятие *грубости* (структурной устойчивости) (1937) [17]. *Грубые системы* – класс динамических систем, у которых топологическая структура фазовых траекторий не меняется при малых изменениях уравнений. Задача для уравнения (1) будет корректно поставлена, если при малых изменениях оператора A мало изменится решение. Отсюда естественным образом вытекает, что каждая корректно поставленная для уравнения (1) задача должна формулироваться в терминах топологических инвариантов [18, с. 13].

Подчеркнём, что топологические методы в нелинейном функциональном анализе возникли в связи с теоремами существования решения нелинейных уравнений (первые результаты в этом направлении принадлежат Дж. Биркгофу и О. Келлогу [19] и Ю. Шаудеру [20]). Начиная с работ М.А. Красносельского, топологические методы становятся универсальным способом решения самых разнообразных нелинейных задач. Итог исследований к началу 1950-х годов был подведён в получившей во всём мире широкую известность монографии М.А. Красносельского «Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений» (1956) [18].

Отметим, что в настоящее время в физике изменилось отношение к теоремам существования и единственности решений уравнений. В сложившейся физической идеологии, которой придерживалось большинство физиков, существование решения обычно считалось само собой разумеющимся, недавно даже само слово «теорема» вообще считалось недопустимым в физических статьях [21, с. 737]. Такая точка зрения являлась вполне оправданной, пока не столкнулись с сильно нелинейными задачами. Здесь положение иное – нельзя быть заранее уверенным, что решение существует, его может совсем не быть в интересующей области. Поэтому доказательство наличия решения представляет совершенно нетривиальную и нередко самую трудную часть решения задачи. Теперь в целом ряде задач нелинейной динамики на первый план выходят теоремы существования и единственности. Так, в фундаментальной нерешённой проблеме макроскопической физики – возникновения турбулентного движения – выяснение вопроса существования и единственности решений уравнений Навье–Стокса явилось бы огромным прогрессом. Топологические методы дают возможность не только установить теоремы существования и единственности решений нелинейных уравнений в самых разных случаях, но и разработать методы оценки числа решений, выяснить структуру множества решений и условия его связности, сходимости приближённых методов и др.

4. Из истории теории бифуркаций

Исаак Ньютон после открытия закона всемирного тяготения задался следующим вопросом: может ли жидкая однородная масса, не зависящая от внешних сил, двигаться как твёрдое тело, так чтобы взаимные расстояния всех её частиц оставались неизменными? Если такое движение существует, то какова будет форма жидкости? Более общий вопрос состоит в изучении возможности движения такого рода и определения фигуры равновесия, если жидкость находится под постоянным внешним давлением. Ответ на вопрос о характере движения прост: центр масс жидкости движется равномерно и прямолинейно, а вся масса вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси, проходящей через центр масс и имеющей постоянное направление, причём эта ось будет одной из главных осей инерции. Что касается определения возможных форм жидкости, эта задача, несмотря на усилия крупнейших математиков и механиков, полностью не решена, не проведён полный нелинейный анализ проблемы.

Кроме самого Ньютона, указанной проблемой занимались К. Маклорен, А. Клеро, Т. Симпсон, П.С. Лаплас, Ж.Л. Лагранж, Ж. Даламбер, А.М. Лежандр, С.Д. Пуассон, Ж. Лиувилль, К.Г. Якоби, П. Дирихле, Б. Риман, В. Томпсон (лорд Кельвин), П. Тэт, П.Л. Чебышев [14, с. 49]. Проблема фигур равновесия вращающейся жидкости привела А.М. Ляпунова к серии замечательных работ по бифуркационной тематике и нелинейным интегральным уравнениям, где им были созданы ставшие классическими методы анализа.

Насколько известно авторам, *первая* задача о бифуркациях восходит к XVIII веку и была решена Леонардом Эйлером. Это задача об упругой неустойчивости стержня, подверженного воздействию продольных сжимающих сил. Уравнения равновесия сжатого стержня даются в виде

$$
\begin{aligned}
&I_2 E X''' - T X' - K_x = 0,\\
&I_1 E Y''' - T Y' - K_y = 0,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где X, Y – компоненты единичного вектора, направленного по касательной к стержню; производные берутся по переменной z, направленной вдоль стержня; I_1, I_2 – главные моменты инерции сечения стержня; E – модуль Юнга; T – продольная сила. При отсутствии поперечных изгибающих внешних сил K_x, K_y уравнения равновесия (2) имеют очевидное решение $X = Y = 0$, что соответствует стержню, остающемуся при воздействии продольной силы прямолинейным. Такое устойчивое равновесие возможно лишь до тех пор, пока сжимающая сила $|T|$ будет меньше некоторого критического значения, то есть при $|T| < T_{\text{кр}}$ прямолинейная форма стержня устойчива по отношению к малым возмущениям. Но при $|T| > T_{\text{кр}}$ прямолинейная форма отвечает *неустойчивому* равновесию, при бесконечно малом воздействии (изгибе) это равновесие нарушается и происходит сильный изгиб стержня [23, с. 118, с. 124].

Степан Тимошенко, одна из крупнейших фигур в области механики XX века, писал, что внимание Леонарда Эйлера к задачам теории упругости привлёк Даниил Бернулли [24, с. 42]. Основные результаты Эйлера о равновесии упругих стержней и пластинок приведены в обширном приложении «Об упругих кривых» в его книге [25]. До Эйлера подобными задачами занимался Якоб Бернулли. Как известно, Эйлер является одним из основоположников вариационного исчисления. Используя созданные им вариационные методы, Эйлер вывел уравнение упругой линии (ранее полученное Бернулли), которое в привычных нам обозначениях имеет вид [24, с. 452; 23, с. 45]

$$C\frac{y'}{(1+y'^2)^{3/2}} = P_x, \tag{3}$$

где P_x – нагрузка; C – постоянная («абсолютная упругость»), зависящая от упругих свойств материала. В отличие от Я. Бернулли, Эйлер не ограничился случаем малых деформаций и рассмотрел задачу в общем виде. Тогда в знаменателе (3) уже нельзя пренебречь членом y'^2 по сравнению с единицей, что значительно осложняет задачу. Эйлер отыскал приближённое решение с помощью разложения в ряд и определил значение предельной нагрузки, при превышении которой происходит продольный изгиб стержня. Здесь было главным учесть все принципиально важные, даже самые малые члены, определяющие эффект.

Подобные ситуации повторялись и в дальнейшем. Вспомним, что А. Пуанкаре при изучении фигур равновесия жидкой массы искал решение в виде поправок к известному решению (в данном случае к эллипсоидам Якоби). Пуанкаре решил задачу во втором приближении, но получение конкретных результатов требовали сложных численных расчётов по общим формулам Пуанкаре. Это было сделано английским астрономом Джорджем Дарвином (сыном Чарльза Дарвина), который пришёл к выводу об устойчивости получающихся грушевидных форм равновесия. Полученный результат составлял краеугольный камень космогонической теории Дарвина об эволюции и дальнейшем распаде грушевидных фигур на несколько частей. Отсюда можно было объяснять образование двойных звёзд и планетных систем. А.М. Ляпунов пришёл к противоположному заключению, при этом он исходил из точных формул, а не ограничивался, как Дарвин, вторым приближением. Разгорелась полемика, продолжившаяся несколько лет. Она утихла лишь после того, как Дж. Джинс повторил вычисления Дарвина с учётом третьего приближения и показал, что в этом случае грушевидные фигуры равновесия неустойчивы, в соответствии с результатами Ляпунова [14, с. 50].

Из сказанного видна сложность и деликатность бифуркационных задач. Умение «поймать эффект» оказывалось в определённой степени искусством, доступным далеко не каждому. Было необходимо разработать чёткие критерии алгоритмического характера на прочном математическом фундаменте, чтобы решение бифуркационных задач стало доступным для широких масс. Один из путей решения проблемы был проложен методами нелинейного функционального анализа.

5. Теорема Красносельского и её использование

Для изучения заданного конкретного нелинейного оператора оказывается полезным построить функциональное пространство, в котором этот оператор обладает «хорошими» свойствами (непрерывность, дифференцируемость и т.д.); эта идея восходит ещё к Шаудеру [18, с. 20]. Для многих задач нелинейного анализа и его приложений таким пространством является *банахово пространство* – полное линейное нормированное пространство, которое представляет собой глубокое обобщение на бесконечномерный случай пространства Минковского, лежащего в основе теории относительности. Элементы банахова пространства называют точками или векторами. Нулевой вектор будем обозначать через θ.

Вернёмся к уравнению (1) $\varphi = A\varphi$ или, что равноценно, к векторному полю $\varphi - A\varphi$. Для его исследования требуется изучить топологические инварианты геометрических объектов, которые могут быть поставлены в соответствие указанному уравнению. Обратим внимание на следующее обстоятельство. Существование решения у уравнения будет эквивалентно существованию неподвижной точки при некотором преобразовании или существовании нулевого вектора у некоторого векторного поля.

Для иллюстрации существования решений (1) будем использовать теорию бифуркаций, для чего нам понадобится несколько понятий.

Для наших целей особое значение имеют вполне непрерывные операторы, преобразующие ограниченные множества в компактные[1], поскольку в банаховых пространствах теория разрешимости уравнения $\varphi - A\varphi = \psi$ аналогична теории, созданной для конечномерного случая.

Ещё одно необходимое понятие – дифференцирование оператора по Фреше.

Пусть оператор A действует из банахова пространства E в банахово пространство E_1 и

$$A(x_0 + h) - A(x_0) = B(x_0)h + (x_0, h), \tag{4}$$

где $B(x_0)$ – линейный ограниченный оператор из E в E_1 и $\lim\limits_{||h||\to 0} \dfrac{||\omega(x_0, h)||}{||h||} = 0$. Тогда оператор $B(x_0)$ называют *производной Фреше* оператора A в точке x_0.

Теперь можно привести классический результат М.А. Красносельского (*теорема Красносельского*) в теории бифуркаций.

Пусть A – вполне непрерывный оператор, имеющий в точке θ производную Фреше B и $A\theta = \theta$. Предполагается также, что оператор A можно представить в виде

$$A = B + C + D, \tag{5}$$

где B – линейный оператор, C – члены следующего порядка малости, D – члены высшего порядка малости.

Тогда каждое характеристическое значение λ_0 нечётной кратности оператора B является точкой бифуркации оператора A, причём этой точке соответствует непрерывная ветвь собственных векторов оператора A, а само множество точек бифуркации дискретно [18, с. 199; 25, с. 104].

---

[1]Множество точек называется компактным, если из всякого его бесконечного подмножества можно выделить последовательность, сходящуюся к некоторой точке пространства.

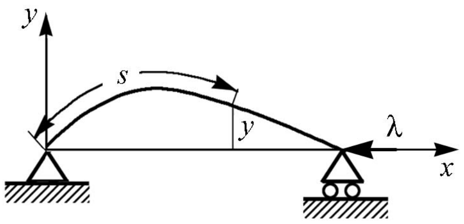


Рис. Изгиб стержня сосредоточенной силой [26, с. 203]

Таким образом, для изучения точек бифуркации об уравнениях требуется лишь информация весьма общего характера – знание свойств линеаризованных в нуле уравнений.

До работ М.А. Красносельского при отыскании точек бифуркации нелинейного оператора A задачу обычно линеаризовывали и считали точками бифуркации собственные значения оператора B. Однако были известны случаи, когда собственные значения оператора B не являются точками бифуркации. Было полная неясность, когда же такая линеаризация будет законной [22, с. 102]. Теорема Красносельского расставила все точки над «и».

Рассмотрим задачу о бифуркации сжатого стержня с применением топологических методов нелинейного анализа, исходя из работ М.А. Красносельского [18, гл. 4; 27, с. 338]. Пусть A – нелинейный вполне непрерывный оператор, действующий в вещественном банаховом пространстве. Уравнение

$$\varphi = \lambda A\varphi \tag{6}$$

имеет нулевое решение θ при всех значениях параметра λ. Для нас интересен вопрос, при каких значениях λ уравнение (6) имеет малые ненулевые решения. Форма сжатого стержня единичной длины и переменной жёсткости $\rho(s)$ под воздействием силы λ (рис.) определяется из краевой задачи

$$y'(s) + \lambda\rho(s)y(s)\sqrt{1-y'^2(s)} = 0, y(0) = y(1) = 0. \tag{7}$$

Введём обозначение $y'(s) = -\varphi(s)$. Краевую задачу (7) можно свести к нелинейному интегральному уравнению (см., например, [28, гл. 5, часть 14])

$$\varphi(s) = \lambda\rho(s)\int_0^1 K(s,t)\varphi(t)dt\sqrt{1-\left[\int_0^1 K'_s(s,t)\varphi(t)dt\right]^2}, \tag{8}$$

где $K(s,t)$ – функция Грина.

Уравнение (8) имеет нулевое решение при всех значениях параметра λ. При некоторых значениях нагрузки λ уравнение может иметь ненулевые решения, которые определяют формы потери устойчивости. Нагрузка λ_0 будет *критической нагрузкой Эйлера*, если при некоторых близких к λ_0 нагрузках уравнение (8) имеет малые ненулевые решения, то есть λ_0 будет точкой бифуркации для уравнения изгиба стержня.

Для дальнейшего анализа задачу требуется линеаризовать, что приводит к уравнению

$$\varphi(s) = \lambda\rho(s)\int_0^1 K(s,t)\varphi(t)dt. \tag{9}$$

Если $l(s)$ – ненулевое решение уравнения (9) при $\lambda = \lambda_0$, то функция

$$y(s) = \int_0^1 K(s,t)l(t)dt \tag{10}$$

будет решением уравнения

$$y''(s) + \lambda_0 \rho(s) y(s) = 0 \tag{11}$$

с нулевыми граничными условиями. Каждое характеристическое значение линеаризованного уравнения является простым и, следовательно, будет точкой бифуркации. Соответствующие значения λ дают критические нагрузки.

Оператор C (см. (5)) представляется в виде

$$C(x(s), \lambda) = -\frac{\lambda \rho(s)}{2} \int_0^1 K(s,t)x(t)dt \left[\int_0^1 K'_s(s,t)x(t)dt \right]^2 \tag{12}$$

и имеет третий порядок малости ($k = 3$). Величина

$$x = -\frac{1}{2} \int_0^1 e^2(s) \left[\int_0^1 K'_s(s,t)x(t)dt \right]^2 ds \tag{13}$$

отрицательна, вследствие чего ненулевые решения появляются при $\lambda > \lambda_0$. Это соответствует физическому смыслу задачи: потеря устойчивости происходит при превышении критического значения нагрузки.

Обратим внимание на следующий факт. Иногда в задаче об изгибе стержня пренебрегают при малых деформациях продольным сдвигом точек стержня [27, с. 339]. Тогда $y(s)$ определяется из краевой задачи

$$\begin{aligned} &y'(x) + \lambda \rho(x) y(x) [1 + y'^2(x)]^{3/2} = 0, \\ &y(0) = y(1) = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь y выражена не как функция длины дуги s, а как функция координаты x. При этом приближённо считается, что $\rho(s) = \rho(x)$, и в граничных условиях не учитывается изменение координаты незакреплённого конца стержня, представляющее собой величину третьего порядка малости по сравнению с прогибом стержня. Однако эта величина третьего порядка сказывается на знаке координаты x, задаваемой в этом случае выражением

$$x = \frac{3}{2} \int_0^1 e^2(x) \left[\int_0^1 K(x,u)e(u)du \right] dx > 0. \tag{15}$$

Это приводит к появлению у соответствующего интегрального уравнения ненулевых решений при $\lambda > \lambda_0$, что противоречит физическому смыслу задачи. Указанный факт ещё раз подтверждает справедливость тезиса о сложности и нетривиальности бифуркационных задач.

Заключение

В настоящее время нелинейный функциональный анализ является интенсивно развивающейся областью как в математическом плане, так и в отношении приложений; он составляет существенную часть математического аппарата при исследовании нелинейных систем[2].

[2]Об этом свидетельствует, к примеру, очень представительный симпозиум по нелинейному функциональному анализу и его приложениям, проходивший в Беркли [29].

Немалая часть результатов в этой области была получена в рамках научной школы М.А. Красносельского во второй половине XX века [30]. Среди них можно выделить следующие результаты:

- исследование ветвления решений нелинейных уравнений и бифуркаций вариационными и топологическими методами анализа;
- нахождение точных и приближенных решений нелинейных операторных уравнений с вполне непрерывными и положительными операторами;
- исследование нелинейных интегральных уравнений – доказательство существования решений уравнений Гаммерштейна, Урысона;
- развитие теории функциональных пространств, интерполяции и пространства Орлича;
- изучение абстрактных нелинейных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах с неограниченными операторами;
- решение нелинейных задач теории колебаний; исследование периодических, почти периодических, ограниченных решений;
- развитие теории систем с гистерезисом, устойчивости дискретных рассинхронизованных систем.

В качестве наиболее характерных приложений работ Красносельского, помимо вышеупомянутых по упруго-механическим задачам, можно привести следующие приложения [31]:

- моделирование периодических колебаний и ограниченных режимов в различных нелинейных системах;
- моделирование электрических цепей с диодными нелинейностями;
- моделирование нелинейных почти периодических колебаний с приложениями к теории маятников, задачам авторегулирования;
- применение теории уравнений с вогнутыми операторами при анализе процессов в атомных реакторах.

В связи с проблемой вычисления вращения векторных полей, порождаемых динамической системой, М.А. Красносельским был предложен метод *направляющих функций*, обобщающий метод функций Ляпунова в теории устойчивости [32].

Имя М.А. Красносельского неизменно ассоциируется с нелинейным функциональным анализом и теорией бифуркаций не только в республиках бывшего СССР, но и во всём научном мире [33, с. 46; с. 348], [34, с. 341; с. 546]. Его многочисленные ученики и последователи продолжают обогащать нелинейную науку новыми открытиями, расширяя горизонты познания и находя новые интересные приложения математическим теориям.

Библиографический список

1. *Крейн М.Г., Люстерник Л.А.* Функциональный анализ // Математика в СССР за 30 лет. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948.
2. История отечественной математики. В 4-х т.,в 5-и кн.; кн. 1. Киев: Наукова думка, 1970.
3. *Banach S.* Théorie des opérations linéaires. Warszawa, 1932.
4. *Карпачёв М.Д.* Воронежский университет. Воронеж: Изд-во ВГУ, 2003.
5. *Люстерник Л.А., Шнирельман Л.Г.* Топологические методы в вариационных задачах // Труды научно-исслед. инст. математики и механики, 1930. Отд. издание.

6. *Lusternik L., Schnirelmann L.* Existence des trois lignes géodésiques fermées sur la chaque surface de genre 0 // Comp. Ren. 1929. Vol. 188. P. 534.
7. *Lusternik L., Schnirelmann L.* Sur la problém des trois géodésiques fermées sur la chaque surface de genre 0 // Comp. Ren. 1929. Vol. 189. P. 269.
8. *Тихомиров В.М.* Из «Созвездия полубогов» (К 100-летию Л.А.Люстерника) // Истор.-матем. исследования. II серия, вып. 5 (40). М.: «Янус-К», 2000. С. 112.
9. *Люстерник Л.А.* Основные понятия функционального анализа// УМН 1936. № 1. С. 77.
10. Лазарь Аронович Люстерник (К 80-летию со дня рождения) // УМН. 1980. Т. 35, вып. 6. С.3.
11. *Бахтин И.А.* Об основных направлениях работы М.А. Красносельского // Материалы к истории математического факультета ВГУ. Воронеж, 1998.
12. Марк Александрович Красносельский (К 60-летию со дня рождения) // УМН. 1981. Т. 36, вып. 2. С. 215.
13. *Вершик А.М.* Жизнь и судьба функционального анализа в XX веке // Математические события XX века. М.: ФАЗИС, 2003. С.81.
14. *Мухин Р.Р.* Очерки по истории динамического хаоса. М.: URSS, 2012.
15. *Аносов Д.В., Треногин В.А.* Бифуркация // Мат. энциклопедия. Т.1. М.: Сов. Энциклопедия, 1977. С. 496.
16. *Liapounoff A.M.* Sur les figures d’équilibre pen différentes des ellipsoids d’une masse liquid’de homogéne doulée d’un mouvement de rotation. I partie. Etude générale du probléme // St.-Pbg. Imprim. de l’Acad. des Sc.-1906. IV+225p.
17. *Андронов А.А., Понтрягин Л.С.* Грубые системы // ДАН СССР. 1937. Т. 14, № 5. С. 247.
18. *Красносельский М.А.* Топологические методы в теории интегральных уравнений. М.: ГИТЛ, 1956.
19. *Birkhoff G.D., Kellog O.D.* Invariant points in function space // Trans. AMS. 1922. Vol. 23. P. 96.
20. *Schauder J.* Der Fixpunktsatz in Funktinalraumen // Studia Math. 1930. № 2. S. 171.
21. *Арнольд В.И.* От суперпозиций до теории КАМ // В.И. Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997.
22. *Красносельский М.А.* Некоторые задачи нелинейного анализа // УМН. 1954. Т. 9, вып. 3. С.57.
23. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1965.
24. *Тимошенко С.П.* История науки о сопротивлении материалов. М.: ГИТТЛ, 1957.
25. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле Леонарда Эйлера, королевского профессора и члена Императорской Петербургской Академии наук. М.-Л.: ГТТИ, 1934.
26. *Красносельский М.А.* Рассмотрение спектра нелинейного оператора в окрестности точки бифуркации и применение к задаче о продольном изгибе сжатого стержня // УМН. 1957. Т.12, вып. 1. С. 203.
27. *Забрейко П.П., Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б.* Нелинейные интегральные уранения // Функциональный анализ. Под ред. С.Г. Крейна. М.: Наука, 1972.

28. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т.1. М.-Л.: ГТТИ, 1933.
29. Nonlinear functional analysis and its applications. Proceedings of symposia in pure mathematics. Berkley, California. July 11–29, 1983. Providence, Rhode Island, 1986.
30. Памяти М.А. Красносельского URL: http://www.aha.ru/ amkr/obitrus.html (дата обращения 05.11.15)
31. *Красносельский М.А., Бурд В.Ш., Колесов Ю.С.* Нелинейные почти периодические колебания. М.: Наука, 1970.
32. *Борисович Ю.Г.* М.А. Красносельский – выдающийся ученый и педагог URL: http://nan.vstu.edu.ru/research-1.htm (дата обращения 05.11.15)
33. *Ziedler E.* Nonlinear Functional Analysis and Its Applications. I: Fixed-Point Theorems. New York: Springer-Verlag, 1986.
34. *Ziedler E.* Nonlinear Functional Analysis and Its Applications. III: Variational Methods and Optimization. New York : Springer-Verlag, 1985.

Поступила в редакцию 25.05.2015
После доработки 21.12.2015

THE RELATION BETWEEN THE NONLINEAR ANALYSIS, BIFURCATIONS AND NONLINEAR DYNAMICS (On the example of Voronezh school of nonlinear functional analysis)

E. M. Bogatov, R. R. Mukhin
Stary Oskol Technological Institute named after A.A.Ugarov,
the Branch of National Research Technological University «MISIS»

The paper is devoted to some historical aspects of the rapidly developing field of modern mathematics – nonlinear functional analysis, which is presented as the basis of the mathematical apparatus of nonlinear dynamics. Its methods are demonstrated on the example of bifurcation. The first bifurcations problem – Euler problem on elastic instability rod under longitudinal compressive forces is considered. The formation of Voronezh school of functional analysis and its role in the development of nonlinear analysis in general is also discussed.

Keywords: Nonlinear functional analysis, Banach space, nonlinear operator, bifurcation, instability, Voronezh school of functional analysis, Soviet mathematics, Krasnosel'skii theorem.

References

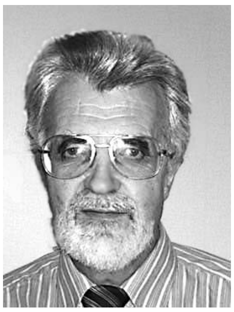
1. *Krein M.G., Lyusternik L.A.* Functional analysis // Mathematics in the USSR for 30 Years. Moscow–Leningrad: GITTL, 1948 (in Russian).
2. Istoriya Otechestvennoy Matematiki. V 4 Tomah, 5 Knigah. Kniga 1. Kiev: Naukova dumka, 1970 (in Russian).
3. *Banach S.* Théorie des opérations linéaires. Warszawa, 1932.
4. *Karpachev M.D.* Voronezh University. Voronezh: Izd-vo VGU, 2003 (in Russian).

5. *Lyusternik L.A., Shnirelman L.G.* Proceedings of the Scientific-Research. Inst. Math. and Mech., 1930 (in Russian).
6. *Lyusternik L., Schnirelmann L.* Existence des trois lignes géodésiques fermées sur la chaque surface de genre 0 // Comp. Ren. 1929. Vol. 188. P. 534.
7. *Lyusternik L., Schnirelmann L.* Sur la problém des trois géodésiques fermées sur la chaque surface de genre 0 // Comp. Ren. 1929. Vol. 189. P. 269.
8. *Tikhomirov V.M.* Hist. and Mathemat. Studies. 2 Ser., Iss. 5 (40). Moscow: Yanus-K, 2000. P. 112 (in Russian).
9. *Lyusternik L.A.* // Uspekhi Mat. Nauk. 1936. Vol. 1. P. 77 (in Russian).
10. *Aleksandrov P.S., Vishik M.I., Ditkin V.A., Kolmogorov A.N., Lavrent'ev M.A., Oleinik O.A.* Lazar' Aronovich Lyusternik (To the 80th Birthday) // Uspekhi Mat. Nauk. 1980. Vol. 35, Iss. 6(216). P. 3 (in Russian).
11. *Bakhtin I.A.* Materials to the history of mathematical department of VSU. Voronezh, 1998 (in Russian).
12. *Bogolyubov N.N., Ishlinskii A.Yu., Kantorovich L.V., Sadovskii B.N., Sobolev S.L., Trapeznikov V.A., Bobylev N.A.* // Uspekhi Mat. Nauk 1981. Vol. 36, Iss. 2(218). P. 215 (in Russian).
13. *Vershik A.M.* The Life and Fate of Functional Analysis in the Twentieth Century. Mathematical Events of the Twentieth Century. Springer-PHASIS, 2006. P. 437.
14. *Mukhin R.R.* Essays on the History of Dynamic Chaos. Moscow: URSS, 2012 (in Russian).
15. *Anosov D.V., Trenogin V.A.* Bifurcation // Math. Encyclopedia. Vol. 1. Moscow: Sov. Encyclopedia, 1977. P. 496 (in Russian).
16. *Liapounoff A.M.* Sur les figures d'équilibre pen différentes des ellipsoids d'une masse liquid'de homogéne doulée d'un mouvement de rotation. I partie. Etude générale du probléme // St.-Pbg. Imprim. de l'Acad. des Sc.1906. IV+225p.
17. *Andronov A.A., Pontryagin L.S.* Rough systems // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1937. Vol. 14, № 5. P. 247 (in Russian).
18. *Krasnosel'skii M.A.* Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations. Oxford: Pergamon Press, 1964.
19. *Birkhoff G.D., Kellog O.D.* Invariant points in function space // Trans. AMS. 1922. Vol.23. P. 96.
20. *Schauder J.* Der Fixpunktsatz in Funktinalraumen // Studia Math. 1930. № 2. S. 171.
21. *Arnold V.I.* From Superpositions to the KAM Theory // V.I. Arnold. Selected Works – 60. Moscow: PHASIS, 1997 (in Russian).
22. *M. A. Krasnosel'skii* // Uspekhi Mat. Nauk. 1954. Vol. 9, Iss. 3(61). P. 57 (in Russian).
23. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Theory of Elasticity: Vol. 7 of a Course of Theoretical Physics. Pergamon Press, 1970.
24. *Timoshenko S.P.* The History of the Science of Strength of Materials. Moscow: GITTL, 1957 (in Russian).
25. A Method for Finding Curves Having the Properties of Maximum or Minimum or Isoperimetric Problem Decision, Taken in the Broadest Sense of Leonhard Euler, a Royal Professor and Member of the St. Petersburg Imperial Academy of Sciences. Moscow-Leningrad: GTTI, 1934 (in Russian).

26. *Krasnosel'skii M. A.* // Uspekhi Mat. Nauk. 1957. Vol. 12, Iss. 1(73). P. 203 (in Russian).
27. *Krasnosel'skii M.A. and colleagues*. Functional Analysis. Wolters-Noordhoff Publ., Groningen, 1972. 379p.
28. *Curant R., Hilbert D.* Methods of Mathematical Physics. Vol. 1. John Wiley & Sons Inc, 1953.
29. Nonlinear functional analysis and its applications // Proc. of symposia in pure math. California, Berkley, July 11-29, 1983. Providence, Rhode Island, 1986.
30. To the Memory of M.A. Krasnosel'skii [Online] http://www.aha.ru/ amkr/obitrus.html (accessed 05.11.15) (in Russian).
31. *Krasnosel'skii M.A., Burd V.Sh., Kolesov Yu.S.* Nonlinear Almost Periodic Oscillations. New York: Wiley & Sons, 1973.
32. *Borisovitch, Yu.G.* M.A. Krasnosel'skii – an Outstanding Scientist and Educator [Online] URL: http://nan.vstu.edu.ru/research-1.htm (accessed 05.11.15) (in Russian).
33. *Ziedler E.* Nonlinear Functional Analysis and Its Applications. I: Fixed-Point Theorems. New York: Springer-Verlag, 1986.
34. *Ziedler E.* Nonlinear Functional Analysis and Its Applications. III: Variational Methods and Optimization. New York : Springer-Verlag, 1985.

Богатов Егор Михайлович – родился в Волгограде (1974). Окончил Воронежский государственный университет (1997). После окончания ВГУ работал преподавателем в Воронежской государственной архитектурно-строительной академии и в ВГУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (ВГУ, 2000) по специальности «Дифференциальные уравнения». После защиты диссертации работает на кафедре высшей математики Старооскольского технологического института им. А.А. Угарова (филиал) Национального исследовательского технологического университета «МИСИС» в должности доцента. Автор учебника «Организация эксперимента» (в соавторстве с В.П. Соловьёвым). Руководитель научного проекта РФФИ по теме «Математическое моделирование процессов теплопереноса в нелинейных периодических двухфазных средах вида газ–металл» (2006–2008). Опубликовал более 30 научных статей по дифференциальным уравнениям и их приложениям. Имеет сертификат инструктора Wolfram Research Mathematica по обучению пакетам компьютерной математики в странах Восточной Европы. Область научных интересов: математическое моделирование физических процессов в неоднородных средах, история функционального анализа.

309516 Белгородская обл., Старый Оскол, мкр-н Макаренко, 42
Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова,
филиал Национального исследовательского технологического университета «Московский институт стали и сплавов»
E-mail: embogatov@inbox.ru



Мухин Равиль Рафкатович – родился в Челябинской области (1947), окончил Московский инженерно-физический институт (1976). Защитил кандидатскую диссертацию по химической физике (1991, Институт органического синтеза и углехимии АН Казахстана) и докторскую диссертацию по истории динамического хаоса (2011, ИИЕТ РАН). Автор монографии «Очерки по истории динамического хаоса» (2007, 2012). Область научных интересов: история физико-математических наук. В настоящее время профессор Старооскольского технологического института (НИТУ МИСиС).

309516 Белгородская обл., Старый Оскол, мкр-н Макаренко, 42
Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова, филиал
Национального исследовательского технологического университета
«Московский институт стали и сплавов»
E-mail:mukhiny@mail.ru