



О ДИНАМИКЕ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ЦЕНТР МАСС, ПРИ СУХОМ ТРЕНИИ В ОПОРАХ

В. В. Чистяков

ФГБОУ ВПО Ярославский ГПУ им. К.Д. Ушинского

Рассмотрена динамика вращения твердого тела вокруг неподвижной оси Oz , проходящей через его центр масс C и не являющейся главной осью инерции. Возникающие инерционные пары $M_{x,y}$ (J_{xz} , J_{yz} , ω , ε) обуславливают сухое трение с коэффициентом δ , делающее величину углового ускорения ε и причиной, и следствием действия сил одновременно. Проинтегрированы аналитически уравнения свободного и вынужденного ($M_z = \text{const}$) движений с учетом квадратичного по угловой скорости ω аэродинамического сопротивления, а также численно – колебательного движения под действием гармонического и ангармонических («ступенька», «пила») моментов. Полученные предельные циклы сравниваются с аналогичными при линейных вращательных колебаниях.

Ключевые слова: Астатический ротор, ось инерции, инерционные пары, сухое трение, квадратичное сопротивление, вращательные колебания.

Введение

Если ось вращения проходит через центр масс насаженного тела, но не является для него осью свободного вращения из-за отличных от нуля центробежных моментов инерции J_{xz} и J_{yz} , то поперечные реакции N_O , N_B в опорах (рис. 1) и обусловленный ими тормозящий момент сухого трения $M_{\text{т}}$ появляются лишь при вращении тела и зависят от закона вращения. Потому явление самоотторжения (заклинивания) оси, как это бывает, например, в случае маятника с трением [1], для астатического ротора невозможно в принципе.

В качестве примера такого ротора можно привести знаменитый *кельтский камень* [2], насаженный на поворотную ось 2-го порядка, или нечто, изготовленное по его образцу, например, просверленный вкось через центр однородный эллипсоид с неравными осями.

Для нахождения необходимых сил нормальных реакций в местах контактов тел в самом общем случае движения применяют изложенный в § 7.2 монографии А.И. Лурье [3] метод для определения реакций связи контактирующих

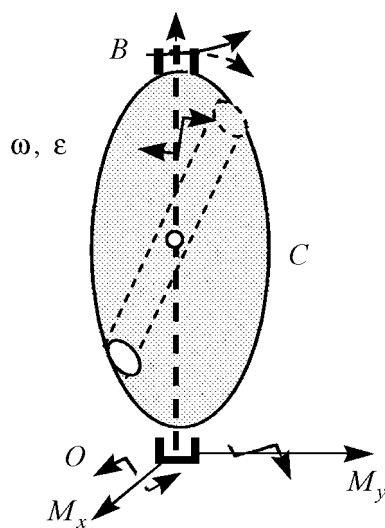


Рис. 1. Астатический ротор с неглавной осью вращения (3D-кельтский камень)

ответственных за поворот вокруг направлений C_x и C_y , [3] даёт то же уравнение динамики, что и использование принципа *Д'Аламбера* для нахождения поперечных реакций N_O , N_B (см. рис. 1) в осях вращающегося тела, а с ними и момента M_{fr} .

Последний при этом будет зависеть не только от угловой скорости ω , но и от углового ускорения ε (!), и при этом вкуче с прочими парами сил определяет само это ускорение. То есть формально величины M_{fr} и ε выступают одновременно и ведущими и ведомыми факторами.

Эта двусторонняя причинно-следственная связь не может не вызывать фундаментального интереса с точки зрения динамики нелинейной, так как в некоторых вырожденных случаях может приводить к несовместным в рамках динамики абсолютно твердого тела (а.т.т.) уравнениям, внося тем самым вклад в копилку парадоксов сухого трения [4].

Кроме того, подобная связь часто реализуется в *социодинамике* (эконофизике), динамике биологических процессов и явлений и т.д., и потому есть смысл исследовать возможный механический аналог столь сложных систем.

Равно как и само незаклинивающее сухое трение, не существующее вне движения и чем-то напоминающее трение жидкостное, представляет чисто практический интерес рассмотрение ситуаций, когда требуется чрезвычайно точное динамическое уравнивание высокоскоростного вращательного устройства (турбины, ротора, вала станка и т.д.), а также в тех случаях, когда такое уравнивание не предполагается. Последнее, как ни печально, может означать аварийную, а в некоторых случаях – катастрофическую ситуацию утраты гидротурбиной, ротором и пр. динамической уравниваемости, когда и вступает в силу вышеозначенное трение и не только оно (см. далее).

Настоящая работа посвящена изучению вопроса, как влияет такое трение в осях на динамику вращения ротора, насколько она схожа или различна с динамикой, описываемой стандартными уравнениями с линейным либо квадратичным трением.

в m точках твердых тел через введение m избыточных обобщенных координат $q_{n+1}, q_{n+2}, \dots, q_{n+m}$. После составления уравнений Лагранжа эти координаты вкуче с обобщенными скоростями принимаются равными нулю.

Так, автор [1] использует данный прием для нахождения выражения для силы нормальной реакции N и самой силы трения Φ в оси колеблющегося маятника с целью последующего составления и решения уравнения нелинейных колебаний с возможностью уже упомянутого самоотторжения, когда маятник «зависает».

Нетрудно показать, что применение данного метода через введение избыточных угловых переменных q_2 и q_3 ,

Проблема решается в рамках классической динамики твердого тела и рассматривает основные типические случаи вращения динамически неуравновешенного астатического ротатора: свободное вращение под действием резистивных факторов; вращение под действием постоянного тягового момента; свободные колебания под действием упругой пары и вращательные колебания под действием вынуждающей гармонической и ангармонической («ступенька», «пила») пар.

1. Тормозящий момент

Решение классической проблемы нахождения динамических реакций в осях вращающегося тела дает следующие выражения для возникающих усилий в подвижной (B) и неподвижной (O) опорах (см., например, [5])

$$\begin{cases} B_y = \frac{\varepsilon J_{xz} - \omega^2 J_{yz}}{h}, \\ B_x = \frac{\varepsilon J_{yz} + \omega^2 J_{zx}}{h}. \end{cases} \quad \begin{cases} O_x = -\frac{\varepsilon J_{yz} + \omega^2 J_{zx}}{h}, \\ O_y = -\frac{\varepsilon J_{xz} - \omega^2 J_{yz}}{h}, \end{cases} \quad h = OB. \quad (1)$$

Эти несимметричные по отношению к обращению времени величины, тем не менее, складываясь своими проекциями по теореме Пифагора, дают пару поперечных сил, не зависящую от направления вращения

$$N_O = N_B = \frac{\sqrt{(J_{xz}^2 + J_{yz}^2)} (\varepsilon^2 + \omega^4)}{h}$$

и вызывающую силы трения с их тормозящим осевым моментом

$$M_{\text{тр}} = -\frac{2\delta \sqrt{(J_{xz}^2 + J_{yz}^2)} (\varepsilon^2 + \omega^4)}{h} = -\alpha \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (2)$$

Размерность коэффициента α здесь совпадает с размерностью инвариантного при повороте эффективного центробежного момента инерции $\sqrt{J_{xz}^2 + J_{yz}^2}$.

Не имеет принципиального значения, какой вид сухого трения имеет место в опорах – качения или скольжения. И в том и в другом случае возникающий момент $M_{\text{тр}}$ пропорционален итоговой силе $N_O + N_B$ нормального давления на опоры.

Отличительной чертой такого трения (назовем его *инерционным*) является необращение его величины в ноль в точке разворота вращения. В этот момент из-за смены направления $M_{\text{тр}}$ следует ожидать скачка ускорения ε и, следовательно, удара.

Что же касается сил аэродинамического сопротивления вращению, то они традиционно описываются квадратичным моментом $M_R = -c|\omega|\omega$, от ускорения не зависят и во времени изменяются плавным образом. Коэффициент пропорциональности c здесь также имеет смысл некоторого момента инерции.

2. Вращение по инерции

Пусть тело имеет угловую скорость ω_0 , когда перестает действовать ведущий момент, и далее оно движется лишь под действием тормозящих пар M_R и $M_{\text{тр}}$. Очевидно, что направление вращения не изменится, и динамика его будет описываться

уравнением

$$J_{zz}\ddot{\varphi} = -\alpha\sqrt{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2} - c\dot{\varphi}^2. \quad (3)$$

Его разрешение относительно старшей производной возможно через перегруппировку и возведение в квадрат

$$J_{zz}^2\ddot{\varphi}^2 + 2cJ_{zz}\ddot{\varphi}\dot{\varphi}^2 + c^2\dot{\varphi}^4 = \alpha^2\ddot{\varphi}^2 + \alpha^2\dot{\varphi}^4,$$

и оно неоднозначно

$$\ddot{\varphi} = \frac{-cJ_{zz} \pm \alpha\sqrt{J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2}\dot{\varphi}^2.$$

Знак перед радикалом выбирается из очевидного условия

$$J_{zz}\ddot{\varphi} + c\dot{\varphi}^2 = \alpha\frac{\pm J_{zz}\sqrt{J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2} - c\alpha}{J_{zz} - \alpha} \leq 0. \quad (4)$$

Тогда при $J_{zz} > \alpha$ должен быть выбран «-»:

$$\ddot{\varphi} = -\dot{\varphi}^2\frac{cJ_{zz} + \alpha\sqrt{J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2} \equiv -\gamma\dot{\varphi}^2. \quad (5)$$

Уравнение можно представить как

$$J_{zz}\ddot{\varphi} = -c\dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}^2\frac{c\alpha^2 + \alpha J_{zz}\sqrt{J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2}, \quad (6)$$

и момент трения, согласно А. И. Лурье [3], определится квадратичным выражением

$$M_{fr}(\omega) = -\frac{c\alpha^2 + \alpha J_{zz}\sqrt{J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2}\omega^2. \quad (7)$$

В самом общем случае параметров уравнение легко интегрируется и дает верное решение

$$-\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}^2} = \gamma \Leftrightarrow \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega_0} = \gamma t \Rightarrow \omega(t) = \frac{\omega_0}{1 + \omega_0\gamma t}, \quad \varphi(t) = \frac{\ln(1 + \omega_0\gamma t)}{\gamma}. \quad (8)$$

Здесь, в отличие от классического линейного по ω сопротивления и от тормозящего постоянного момента, угловой путь до полной остановки логарифмически расходится со временем из-за медленно убывающей угловой скорости.

Таким образом, кельтский камень, закрепленный на проходящей через центр масс, то есть на *центральной* оси с трением в опорах, вращается по инерции точно так же, как и в отсутствие такового трения, но при наличии квадратичного момента сопротивления. Но множитель такого сопротивления помимо аэродинамических величин определяется также коэффициентом трения δ , центробежными моментами инерции и расстоянием между опорами

$$c^* = \frac{cJ_{zz}^2 + \alpha J_{zz}\sqrt{J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2}, \quad \alpha = \frac{2\delta\sqrt{J_{xz}^2 + J_{yz}^2}}{h} \quad (9)$$

и не обращается в нуль даже в безвоздушном пространстве ($c = 0$).

Последнее означает, что инерционное трение при значительном своем коэффициенте α поддерживает квадратичность диссипативной пары для астатического ротатора вплоть до очень малых оборотов, несмотря на то, что в аэродинамике на малых скоростях ньютоновский квадратичный закон переходит в линейный стоксовый.

Стоит отметить, что в частных (вырожденных) ситуациях, например $J_{zz} = \alpha = c$, уравнение (3) решения не имеет при начальном условии $\omega(0) = \omega_0 \neq 0$. Также бессмысленно решение (8) с уходом угловой скорости в бесконечность при $\gamma < 0$, то есть когда осевой момент инерции ротатора $J_{zz} < \alpha$.

По мнению Пэнлеве [4], подобные ситуации свидетельствуют о неэффективности динамики а.т.т. и законов Кулона–Амонтона в решении механических проблем, связанных с сухим трением. Эти и им подобные частные случаи требуют особого подхода (в печати), учитывающего связанное с конечностью скорости звука в материале ротатора запаздывание углового ускорения $\varepsilon(t - \tau)$ (и скорости $\omega(t - \tau)$), определяющего динамические реакции, от ускорения $\varepsilon(t)$, задающего темп изменения осевого кинетического момента ротатора K_z . Другими словами, подхода, так или иначе уводящего проблему в область динамики реального деформируемого тела.

3. Вращение под действием постоянного разгоняющего момента

Пусть постоянный во времени осевой (O_z) момент M приложен к неподвижному телу в момент времени $t = 0$. Соответствующее уравнение разгона тела вокруг этой центральной оси будет отличаться от (5) постоянным слагаемым в правой части

$$J_{zz}\ddot{\varphi} = M - \alpha\sqrt{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2} - c\dot{\varphi}^2. \quad (10)$$

Предельная скорость разгона ω_∞ определится из условия $\ddot{\varphi} \rightarrow 0$

$$M - c\dot{\varphi}^2 - \alpha\sqrt{\dot{\varphi}^4} = 0 \Rightarrow \omega_\infty = \sqrt{\frac{M}{c + \alpha}}. \quad (11)$$

Аналогичным образом оно неоднозначно разрешится относительно старшей производной

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}^2 (J_{zz}^2 - \alpha^2) - 2\ddot{\varphi}J_{zz} (M - c\dot{\varphi}^2) + \dot{\varphi}^4 (c^2 - \alpha^2) + M^2 - 2c\dot{\varphi}^2 M &= 0 \Rightarrow \\ \ddot{\varphi} &= \frac{J_{zz} (M - c\dot{\varphi}^2) \pm \sqrt{J_{zz}^2 (M - c\dot{\varphi}^2)^2 - (J_{zz}^2 - \alpha^2) (\dot{\varphi}^4 (c^2 - \alpha^2) - 2c\dot{\varphi}^2 M + M^2)}}{J_{zz}^2 - \alpha^2} \Rightarrow \\ \ddot{\varphi} &= \frac{J_{zz} (M - c\dot{\varphi}^2) - \alpha\sqrt{\dot{\varphi}^4 (J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2) - 2c\dot{\varphi}^2 M + M^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Отрицательный знак при $J_{zz} > \alpha$ выбирается аналогичным (4) образом.

Анализ данного уравнения по методу А.И. Лурье

$$\begin{aligned} J_{zz}\ddot{\varphi} &= (M - c\dot{\varphi}^2) - (M - c\dot{\varphi}^2) + \\ &+ \frac{J_{zz}^2 (M - c\dot{\varphi}^2) - \alpha J_{zz} \sqrt{\dot{\varphi}^4 (J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2) - 2c\dot{\varphi}^2 M + M^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2} \Leftrightarrow \\ J_{zz}\ddot{\varphi} &= M - c\dot{\varphi}^2 + \alpha \frac{(M - c\dot{\varphi}^2) - J_{zz} \sqrt{\dot{\varphi}^4 (J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2) - 2c\dot{\varphi}^2 M + M^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2} \end{aligned}$$

дает выражение для момента трения

$$M_{\text{fr}}(\omega, M) = \alpha \frac{\alpha(M - c\omega^2) - J_{zz} \sqrt{(M - c\omega^2)^2 + J_{zz}^2 \omega^4}}{J_{zz}^2 - \alpha^2} \quad (13)$$

и его начального и предельного значений –

$$M_{\text{fr}}(0, M) = -\frac{\alpha M}{J_{zz} + \alpha}, \quad M_{\text{fr}}(\omega_{\infty}, M) = -\frac{M\alpha}{c + \alpha}. \quad (14)$$

Само уравнение разгона (12) автономно, и оно решается стандартным методом перехода к переменной $\omega = \dot{\varphi}(\varphi)$

$$\omega \frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{J_{zz}(M - c\omega^2) - \alpha \sqrt{\omega^4 (J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2) - 2c\omega^2 M + \alpha^2 M^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2}.$$

Последнее эквивалентно уравнению

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{(J_{zz}^2 - \alpha^2) \omega}{J_{zz}(M - c\omega^2) - \alpha \sqrt{\omega^4 (J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2) - 2c\omega^2 M + \alpha^2 M^2}}, \quad (15)$$

решение которого в параметрической форме –

$$\varphi(\omega) = \int_0^{\omega} \frac{(J_{zz}^2 - \alpha^2) \omega' d\omega'}{J_{zz}(M - c\omega'^2) - \alpha \sqrt{\omega'^4 (J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2) - 2c\omega'^2 M + \alpha^2 M^2}}, \quad (16)$$

$$t(\omega) = \int_0^{\omega} \frac{(J_{zz}^2 - \alpha^2) d\omega'}{J_{zz}(M - c\omega'^2) - \alpha \sqrt{\omega'^4 (J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2) - 2c\omega'^2 M + \alpha^2 M^2}}. \quad (17)$$

Выражение (16) для угла поворота в принципе может быть проинтегрировано после цепочки стандартных замен как рациональная дробь со знаменателем 4-го порядка. Что касается интеграла (17), то он может быть сведен к эллиптическому.

Численное интегрирование дает в общем-то стандартную кинетику разгона ротатора (рис. 2). Однако при одинаковых тяговых моментах и одинаковых предельных скоростях темп разгона при наличии только квадратичного аэродинамического сопротивления представляется более быстрым, нежели когда такое сопротивление дополняется еще инерционным трением.

Без учета квадратичной добавки интегрирование (12) дает фазовый портрет системы на плоскости (φ, ω)

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) = & \frac{2\sqrt{J_{zz}^2 - \alpha^2}}{\alpha} \ln \left(\left| \frac{\sqrt{\omega^4 (J_{zz}^2 - \alpha^2) + M^2} - M - \omega^2 \sqrt{J_{zz}^2 - \alpha^2}}{\sqrt{\omega^4 (J_{zz}^2 - \alpha^2) + M^2} - M + \omega^2 \sqrt{J_{zz}^2 - \alpha^2}} \right| \right) - \\ & \frac{4 \left(\sqrt{\omega^4 (J_{zz}^2 - \alpha^2) + M^2} - M \right)}{\alpha \omega^2} - \\ & - 4 \frac{J_{zz} - \alpha}{J_{zz} + \alpha} \ln \left(\left| \frac{\sqrt{\omega^4 (J_{zz}^2 - \alpha^2) + M^2} - M - \omega^2 (J_{zz} - \alpha)}{\sqrt{\omega^4 (J_{zz}^2 - \alpha^2) + M^2} - M + \omega^2 (J_{zz} - \alpha)} \right| \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Примечательно, что требование астатичности ротатора в рассмотренной задаче не является обязательным. Даже при наличии статических составляющих в реакциях опор и вызванных ими дополнительных сил трения решение (16), (17) не изменится по существу. Просто это дополнительное постоянное по величине и направлению трение может быть включено со знаком минус в разгоняющий момент M .

Вообще же реально при высоких оборотах вращения и резких разгонах и торможениях наличие статических реакций в опорах и связанного с ними трения не является проблемой, и может быть учтено как малое возмущение.

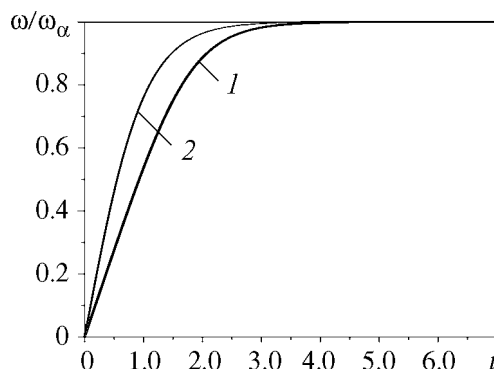


Рис. 2. Зависимость угловой скорости от времени при постоянном тяговом моменте при наличии (1) и отсутствии (2) сухого трения

4. Вращательные колебания (гармонический момент)

При наличии возвращающего упругого момента $M_{el}(\varphi) = -\kappa\varphi$ такой ротатор способен совершать колебания как свободные, так и вынужденные под действием гармонически изменяющейся со временем пары $M_{ind}(t) = A_0 \sin(\Omega t)$. Первый тип без учета квадратичной добавки описывается уравнением

$$J_{zz}\ddot{\varphi} = -\text{sign}(\dot{\varphi})\alpha\sqrt{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2} - \kappa\varphi. \quad (19)$$

Разрешение его относительно второй производной дает

$$\ddot{\varphi} = \frac{-J_z\kappa\varphi - \text{sign}(\dot{\varphi})\alpha\sqrt{\dot{\varphi}^4(J_z^2 - \alpha^2) + \kappa^2\varphi^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2}. \quad (20)$$

Для вынужденных колебаний, соответственно

$$\ddot{\varphi} = \frac{-J_z(\kappa\varphi - A_0 \sin \Omega t)}{J_{zz}^2 - \alpha^2} - \frac{\text{sign}(\dot{\varphi})\alpha\sqrt{-2\kappa A_0\varphi \sin \Omega t + A_0^2 \sin^2 \Omega t + \dot{\varphi}^4(J_z^2 - \alpha^2) + \kappa^2\varphi^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2}. \quad (21)$$

Простым преобразованием правой части можно выделить член, ответственный за трение в осях и величину поперечных усилий в опорах O и B :

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= \frac{-\kappa\varphi + A_0 \sin \Omega t}{J_z} + \frac{\kappa\varphi - A_0 \sin \Omega t}{J_z} + \frac{-J_z(\kappa\varphi - A_0 \sin \Omega t)}{J_{zz}^2 - \alpha^2} - \\ &= \frac{\text{sign}(\dot{\varphi})\alpha\sqrt{-2\kappa A_0\varphi \sin \Omega t + A_0^2 \sin^2 \Omega t + \dot{\varphi}^4(J_z^2 - \alpha^2) + \kappa^2\varphi^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow J_z\ddot{\varphi} &= -\kappa\varphi + A_0 \sin \Omega t + \frac{\alpha^2(A_0 \sin \Omega t - \kappa\varphi)}{J_{zz}^2 - \alpha^2} - \\ &= \frac{\alpha \text{sign}(\dot{\varphi}) J_z \sqrt{-2\kappa A_0\varphi \sin \Omega t + A_0^2 \sin^2 \Omega t + \dot{\varphi}^4(J_z^2 - \alpha^2) + \kappa^2\varphi^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{fr}(\varphi, \omega, t) = \frac{\alpha^2 (A_0 \sin \Omega t - \kappa \varphi)}{J_{zz}^2 - \alpha^2} - \\ \frac{\alpha \operatorname{sign}(\omega) J_z \sqrt{\kappa^2 \varphi^2 - 2\kappa A_0 \varphi \sin \Omega t + A_0^2 \sin^2 \Omega t + \omega^4 (J_z^2 - \alpha^2)}}{J_{zz}^2 - \alpha^2}, \\ N_O = N_B = \frac{M_{fr}}{2\delta}. \end{array} \right. \quad (22)$$

Достоинно внимания то, что своей плавной, не зависящей от угловой скорости частью, момент M_{fr} может значительно усиливать консервативную возвращающую и вынуждающую гармоническую пары при примерном равенстве характеристик J_{zz} и α .

Что же касается разрывной части с множителем $\operatorname{sign}(\omega)$, то она ответственна за удар, амплитуда которого

$$I_m = \frac{2\alpha J_z |\kappa \varphi_m - A_0 \sin \Omega t|}{J_{zz}^2 - \alpha^2}$$

помимо соотношения между J_{zz} и α зависит также от углового положения точки разворота φ_m (в установившемся режиме – просто угловой амплитуды) и от сдвига фаз между $\varphi(t)$ и $A_0 \sin \Omega t$. Как поперечная сила этот удар будет передаваться обоим опорам O и B с множителем $1/(2\delta)$ (22).

Уравнения (20) и (21) в принципе можно приближенно проинтегрировать одним из принятых в теории нелинейных колебаний способов (см. например [6]). В частности, при помощи теории возмущений, рассматривая в качестве такового всё или только разрывную часть M_{fr} .

Численный расчет (Maple 15) дает при высоких значениях коэффициента трения зависимости для угла и скорости, существенно отличающиеся по форме от свободных линейных колебаний (рис. 3). Так, для кривой $\omega(t)$ характерны изломы в точках разворота, тем ярче выраженные, чем больше параметр α . Примечательно также, что затухание идет существенно быстрее, чем в линейных системах с аналогичными параметрами (штрихпунктир).

У вынужденных колебаний ангармоничность также сильнее выражена при высоких показателях трения (рис. 4).

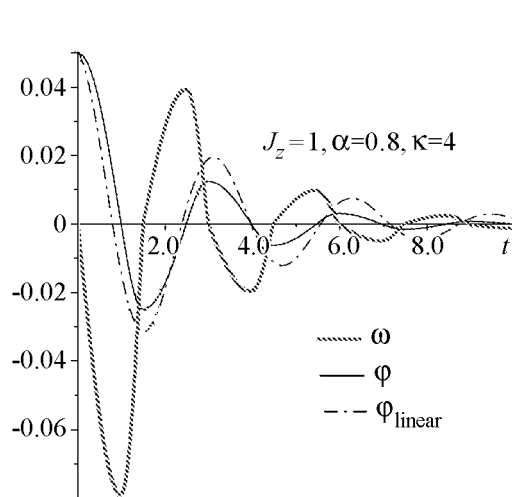


Рис. 3. Кинетика свободных колебаний

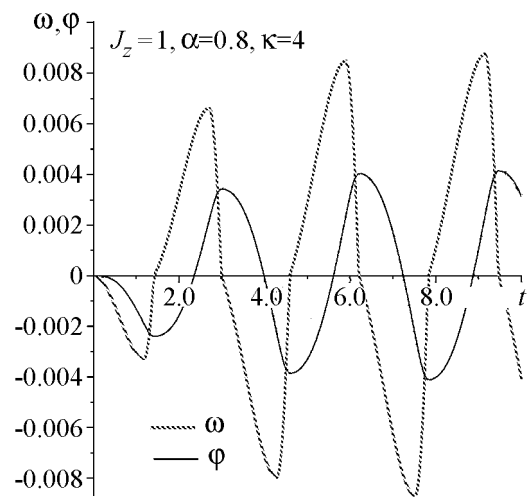


Рис. 4. Вынужденные колебания

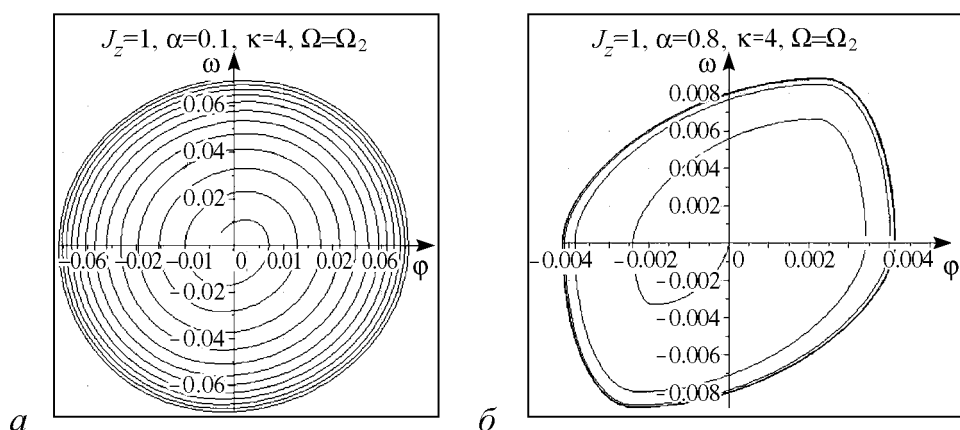


Рис. 5. Фазовый портрет системы при малых (а) и больших (б) параметрах трения α

Интересен фазовый портрет таких колебаний с характерной неправильностью предельного цикла (рис. 5), однако сохраняющего центральную симметричность. Примечательно, что максимальная угловая скорость на этом цикле достигается вдали от положения равновесия, скорее ближе к поворотным точкам.

При малых параметрах α и вид колебаний, и предельный цикл близки по форме к соответствующим кривым линейных вынужденных колебаний.

5. Колебания под действием ангармонического момента

5.1. «Ступенька». В ряде чисто технических проблем представляет интерес движение ротора при чередующихся по направлению постоянных внешних моментах, то есть когда периодическое внешнее воздействие имеет в идеале ступенчатую форму. Последнюю можно описать сингулярной формулой

$$M_{\text{ind}}(t) = A_0 \text{sign}(\sin \Omega t). \quad (23)$$

Каким образом наличие инерционного трения влияет на форму вынужденных колебаний, на портрет системы на фазовой плоскости? Чтоб ответить на этот вопрос, необходимо исследовать динамическое уравнение, имеющее вид

$$\ddot{\varphi} = \frac{-J_z (\kappa \varphi - A_0 \text{sign}(\sin \Omega t))}{J_{zz}^2 - \alpha^2} - \frac{\text{sign}(\dot{\varphi}) \alpha \sqrt{-2\kappa A_0 \varphi \text{sign}(\sin \Omega t) + A_0^2 + \dot{\varphi}^4 (J_z^2 - \alpha^2) + \kappa^2 \varphi^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2}. \quad (24)$$

Его решение можно получить аналитически из (16) путем сшивки в особых точках, а также и численно для конкретных значений параметров.

Помимо двух, по закону положенных изломов в точках изменения полярности момента на квазипериоде кривой $\omega(t)$ (рис. 6), есть еще два, соответствующие точке разворота. Изломы наблюдаются и на предельном цикле (рис. 7) в фазовой плоскости.

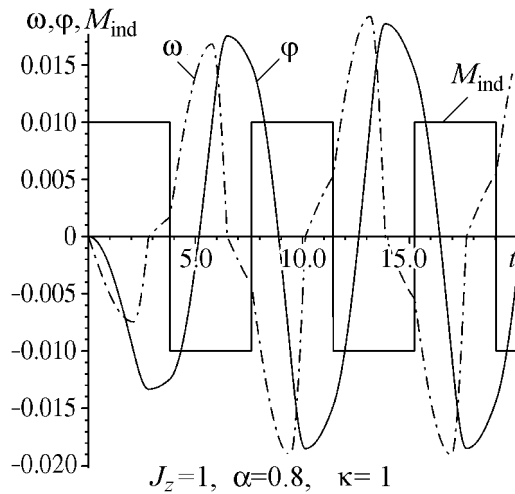


Рис. 6. Кинетика $\varphi(t)$ и $\omega(t)$ при больших трениях при действии ступенчатого момента

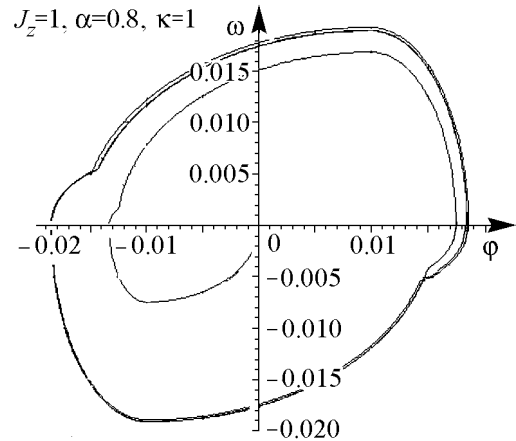


Рис. 7. Фазовый портрет астатичного ротора при больших α

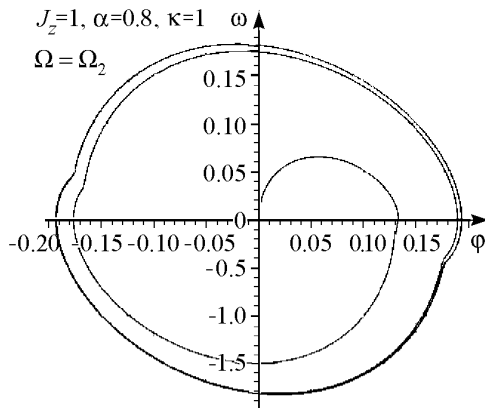


Рис. 8. Фазовый портрет стандартной линейной системы с большим трением («ступенька»)

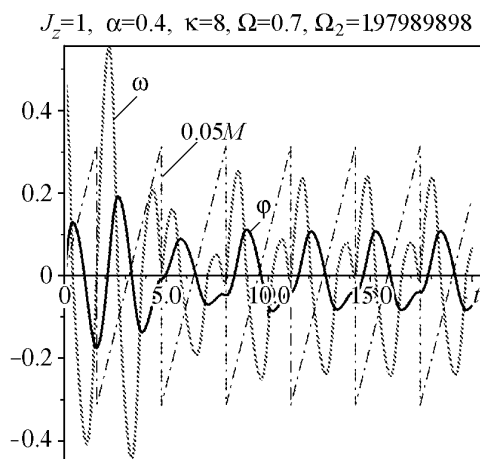


Рис. 9. Кинетика φ и ω при подаче пилообразного вынуждающего момента

Однако аналогичные изломы имеют место и на предельном цикле линейной колебательной системы, диссипативный момент в которой пропорционален угловой скорости (рис. 8).

Что касается вынуждающей частоты, то для обеих систем она выбиралась равной резонансной для линейной системы $\Omega_2 = \sqrt{\kappa/J_{zz} (1 - \alpha^2/J_{zz}^2)}$. Уже упомянутая сдвоенность изломов на кривой угловой скорости свидетельствует о вдвойне опасных ударных воздействиях на ось в случае наличия инерционного трения.

5.2. «Пила». Периодический пилообразный момент моделировался формулой

$$M(t) = M_0 \cos(\arccos(\Omega t)) \operatorname{sign}(\sin(\Omega t)). \quad (25)$$

Частоты Ω выбирались как близкие, так и далекие от «резонанса» Ω_2 , начальные условия – по типу «отклонение» и «толчок» (импульс).

При различных значениях вынуждающей частоты Ω установившаяся кинетика угла поворота и угловой скорости ротора практически совпа-

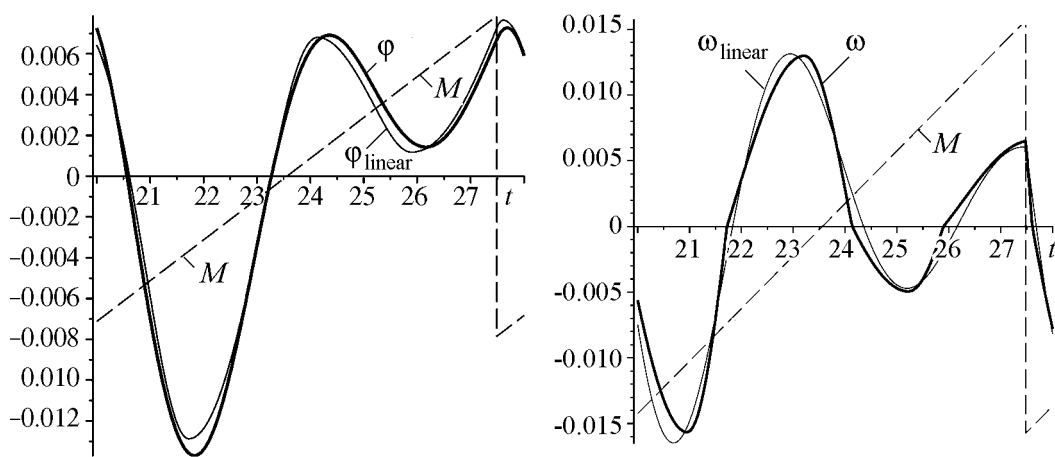


Рис. 10. Кинетика угла поворота (а) и угловой скорости (б) у астатичного ротатора и классического линейного осциллятора при $J_z = 2.0$, $\alpha = 0.9$, $\kappa = 4$, $\Omega = 0.4\Omega_2$

дала с аналогичной кинетикой классической линейной системы с тем же моментом инерции J_{zz} , но диссипативным моментом $M_{\text{тр}}(t) = -\alpha \cdot 1 \cdot \omega$ (множитель 1 с^{-1} – для нужной размерности), отличаясь только дополнительными изломами $\omega(t)$ в точках разворота.

Таким образом, можно заключить, что в исследованной многомерной области параметров как при гармоническом вынуждающем воздействии, так и при различных ангармонических исследуемый ротатор, в основном, ведет себя как линейная осциллирующая система, отличаясь лишь в деталях второго порядка.

Разумеется, проблема схожести предельного поведения астатичного колебательного ротатора и линейного осциллятора с инерционным трением требует более глубокой проработки и выходит за рамки настоящей статьи. Однако полученные предварительные результаты оправдывают повсеместное применение простой и удобной линейной модели для демонстрации принципиальных свойств колебательного устройства.

Выводы

Изучено как свободное, так и вынужденное движение важной динамической системы, весьма близкой по физическим свойствам к реальной: астатического ротатора с неглавной осью вращения. Примечательным свойством такой системы является возникновение инерционного трения в оси, а вместе с ним и двусторонней причинно-следственной связи между угловым ускорением и тормозящим моментом такого трения.

Показано: а) свободное вращение по инерции эквивалентно движению с квадратичным по угловой скорости сопротивлением; б) вынужденные колебания под действием как гармонического, так и различных ангармонических моментов по основным характеристикам схожи с аналогичными колебаниями простых линейных систем с диссипацией.

Различие с последними выражается в наличии дополнительных ударных воздействий на ось в поворотных точках, где скачком изменяется момент сухого трения $M_{\text{тр}}$.

Изучение таких ударов представляет практический интерес в плане анализа и моделирования хода и последствий аварийных ситуаций, связанных с развитием у ротатора (вращательного осциллятора) динамической неуравновешенности.

Кроме того, несмотря на схожесть предельного поведения с классической линейной системой, рассмотренный ротатор с часовой пружиной и трением может быть включен в библиотеку нелинейных колебательных моделей для существующих компьютерных имитационных программ типа Nonlinear Oscillations (Physics Academic Soft) и др.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ по теме «Разработка компетентностно-ориентированной модели обучения физике в общеобразовательной средней школе», № государственной регистрации 01201261999.

Библиографический список

1. Смирнов Ю.П. Об уравнениях динамики систем с трением // Сборник научно-методических статей по теоретической механике. Вып. 11. М.: Высшая школа, 1981. С. 184.
2. Borisov A.V., Jalnin A.Yu., Kuznetsov S.P., Sataev I.R., Sedova J.V. Dynamical phenomena occurring due to phase volume compression in nonholonomic model of the rattleback // Regular and Chaotic Dynamics. 2012. Vol. 17, № 6. P. 512.
3. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Наука, 1961.
4. Painlevé P. Leçons sur le frottement. Paris: Hermann, 1895. (Пэнлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954.)
5. Маркеев А.П. Теоретическая механика: Учебник для университетов. М.: ЧеРо, 1999.
6. Батъ М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию 20.01.2014
После доработки 3.02.2014

ABOUT ROTATIONAL DYNAMICS OF A RIGID BODY AROUND NON-PRINCIPAL AXIS PASSING THROUGH THE CENTER OF MASS UNDER DRY FRICTION ACTING

V. V. Chistyakov

Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky

The dynamics is studying for rigid body rotating around fixed axis Oz being central but not principal. Therefore the inertial torques M_x and M_y arose depending both on mass geometry J_{xz} , J_{yz} and on angular velocity ω and acceleration ε . Dry friction acting on axis's supports with coefficient δ leads to that the value of ε serves as the reason and result of the motion simultaneously. There were integrated numerically and/or analytically the dynamical equations of free and forced motion including rotational harmonic and

inharmonic oscillations too. The results obtained are comparing with those following from the standard linear equations.

Keywords: Astatic rotator, axis of inertia, inertial torque, dry friction, quadratic drag, rotational oscillations.



Чистяков Виктор Владимирович – родился в городе Буй Костромской области (1957), окончил факультет общей и прикладной физики Московского физико-технического института (1981). После окончания МФТИ работал инженером-программистом в НИИ Вычислительных Комплексов (Москва). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1992, НИФХИ им. Л.Я. Карпова, Москва). Работал в учреждениях науки и высшего образования Ярославля. Автор более 60 научных и научно-методических трудов и изобретений. Последние 4 года работал в области динамики резистивного движения, опубликовал цикл работ по интегрированию динамических уравнений в условиях, приближенных к реальным. В настоящее время доцент Ярославского ГПУ им. К.Д. Ушинского, Ярославской ГСХА и ЯФ ЛГУ им А.С. Пушкина.

150000 Россия, Ярославль, ул. Республиканская, 108
ФГБОУ ВПО Ярославский ГПУ им. К.Д. Ушинского
E-mail: v.chistyakov@yarcx.ru, chistiakov_v_v@rambler.ru