



Изв. вузов «ПНД», т. 3, № 1, 1995

УДК 536.42+536.75+530.18+517.9

### ТРОЙКА КЕРРОВСКИХ СРЕД В КОЛЬЦЕВОМ ИНТЕРФЕРОМЕТРЕ: РОЛЬ НЕИДЕНТИЧНОСТИ

*А.И. Аришинов, Р.Р. Мударисов, Б.Н. Пойзнер*

Рассмотрена упрощенная модель динамики нелинейной фазовой модуляции в кольцевом интерферометре, содержащем три нелинейные среды, поля в которых взаимосвязаны. Предложена количественная мера неидентичности  $\Theta V$  начальных скоростей процессов в подсистемах. Моделирование показало, что, во-первых, строение аттрактора в фазовом пространстве многокомпонентной системы зависит от величины  $\Theta V$ , и возможны семь вариантов эволюции системы, включающих непериодические, периодические, стационарные процессы; во-вторых, для значений  $\Theta V$  порядка  $10^{-3}$  (и менее) длительность переходного процесса со стационарным фазовым набегом в начале эволюции многокомпонентной системы  $t_s$  зависит от величины  $\Theta V$  по закону:  $t_s = -A \ln \Theta V - B$ , причем минимального значения  $\Theta V$  (вплоть до значений порядка  $10^{-12}$ ) не установлено; в-третьих, непериодические процессы зафиксированы в ограниченном интервале значений  $\Theta V \in ]0,1[$ .

1. Среди объектов, подлежащих исследованию методами нелинейной динамики, выделяются относительно малоизученностью активные многокомпонентные системы. Они представляют собой несколько пространственно разделенных подсистем, связанных в единое целое. В простейшем случае, которым здесь удобно ограничиться, вид нелинейностей подсистем одинаков, а их параметры могут различаться. Тогда правомерны вопросы: как влияет неидентичность параметров подсистем на характер динамики процессов в многокомпонентной системе? С помощью каких характеристик целесообразно описывать это влияние? Каким значениям количественной характеристики неидентичности соответствует тот или иной тип динамики процессов в системе?

В поисках ответов на эти вопросы авторы обратились к простейшей многокомпонентной системе, чьим прототипом является кольцевой интерферометр с керровской нелинейностью, в котором осуществляются мелкомасштабные (по сравнению с диаметром лазерного пучка) и крупномасштабные преобразования световых полей [1,2]. Эксперименты С. А. Ахманова, М. А. Воронцова и др., а также компьютерное моделирование, выполненное нами [3], свидетельствуют: в поперечном сечении пучка на выходе из интерферометра распределение фазового набегу  $U$ , пропорционального интенсивности света, представляет собой эволюционирующие оптические структуры. Авторы работы [1] рассмотрели цепочку из  $N$  нелинейных интерферометров и составили ее математическую модель

$$\tau_j \partial U_j / \partial t + U_j = d_j \Delta_{\perp} U_j + K_j [1 + \gamma_j \cos(U_j + f_{0j})] + F_j(U_j). \quad (1)$$

В обзоре [2] М. А. Воронцова приведены результаты экспериментального изучения активной двухкомпонентной системы для случая, в котором величины  $\tau_1$  и  $\tau_2$  существенно различны, но в задачу автора не входило специальное исследование роли неидентичности.

2. В данной работе рассматривается оптическая схема с параллельным расположением нелинейных сред, как это показано на рис. 1, в противоположность случаю последовательного расположения, исследованного в работе [1, рис. 6.6]. Оптические поля  $E_1, E_2, E_3$  в них взаимодействуют благодаря частичной и/или полной передаче излучения из одной подсистемы в другую с помощью восьми зеркал  $M$  (см. рис.1, короткие толстые линии). Ради простоты и уменьшения числа варьируемых параметров выбран случай пренебрежимо малого мелкомасштабного взаимодействия оптических полей в нелинейной среде, когда коэффициенты диффузии  $d_j = 0$ . При сделанных предположениях модели трёхкомпонентной системы можно придать вид

$$dU_j/dt = K_j [1 + \gamma_j \cos(U_i + f_{0j})]/\tau_j - U_j/\tau_j, \quad (2)$$

где  $j = 1, 2, 3, i = 2, 3, 1$ . Согласно [1],  $\tau_j$  - время релаксации нелинейной части показателя преломления;  $U_j$  - фазовый набег волны в  $j$ -й нелинейной среде;  $n_j = n_{0j} + n_{2j}|E_j(t)|^2$ ;  $K_j = n_{2j}I_{\text{вх}j}kL_j(1-R_j)$  - параметр нелинейности;  $k$  - волновое число;  $L_j$  - длина среды;  $I_{\text{вх}j}$  - интенсивность излучения на входе в  $j$ -ю среду;  $R_j$  - коэффициент отражения зеркал интерферометра для излучения в  $j$ -м канале;  $\gamma_j$  - контрастность, зависящая от потерь излучения в контуре обратной связи и в  $j$ -й среде;  $f_{0j} = kL_j n_{0j}$  - постоянный фазовый набег. Поскольку в устройстве используется керровская среда, для которой  $n_2 > 0$ , параметр  $K_j$  и фазовый набег  $U_j$  положительны.

Следуя схеме [4] элементарного анализа свойств динамической системы применительно к устройству, изображенному на рис. 1, можно сделать следующие замечания.

Во-первых, динамическая система, описываемая уравнениями (2), является диссипативной, и для нее изменение объема в фазовом пространстве происходит по закону

$$\dot{v} = \Omega v, \quad \text{где } \Omega = \sum_j \partial \dot{U}_j / \partial U_j = - \sum_j \tau_j^{-1} \quad (3)$$

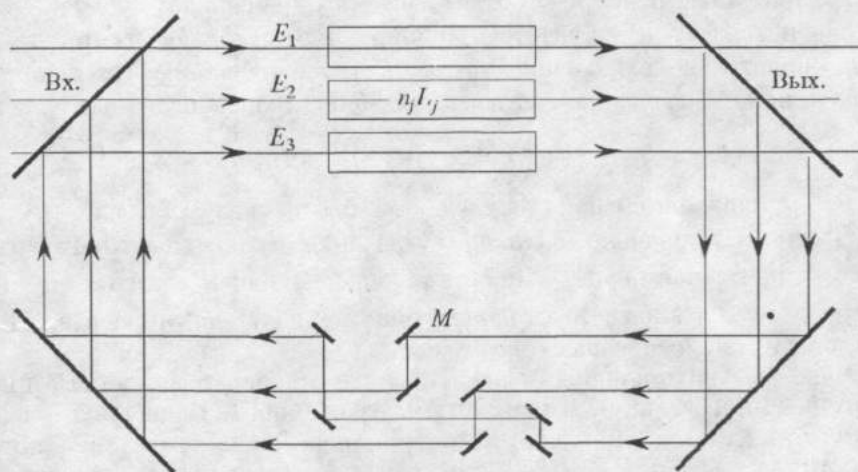


Рис. 1 Оптическая схема с параллельным расположением нелинейных сред:  $E_1, E_2, E_3$  - оптические поля;  $M$  - зеркала

Во-вторых, хотя оптико-физические схемы устройств в [1, рис. 6.6] и на рис. 1 отличаются в конструктивном отношении, вид обоих уравнений (1) и (2) инвариантен относительно замены индексов

$$U_j \rightarrow U_i \rightarrow U_q, \quad q = 3, 1, 2, \quad (4)$$

если выполняется условие

$$\tau_j = \tau, \quad K_j = K, \quad \gamma_j = \gamma, \quad f_{0j} = f_0. \quad (5)$$

В-третьих, благодаря вышеуказанному свойству инвариантности уравнений (2) относительно замены индексов (4) в схеме, приведенной на рис. 1, возможно реализовать такое расположение зеркал, для которого направление обхода подсистем в интерферометре противоположно рассмотренному.

3. Возможны различные варианты количественных характеристик, которые пригодны для описания влияния степени отлгчия параметров подсистем и начальных условий  $U_{0j}$  на характер динамики процессов. По-видимому, наиболее просто учесть указанные величины в совокупности, воспользовавшись стартовыми скоростями процессов в подсистеме  $V_j = dU_j/dt|_{t=0}$ , равными значениям правых частей уравнений (2) при  $t=0$ . Неодинаковость стартовых скоростей  $V_j$  можно описывать, используя соотношения между ними. Простейшей количественной характеристикой степени неидентичности может служить величина  $\Theta V = N - (V_1/V_2 + V_2/V_3 + V_3/V_1)$  или  $\Theta V = 1/\{(N+1) - (V_1/V_2 + V_2/V_3 + V_3/V_1)\}$ , где  $N$  - число подсистем. В этом случае  $\Theta V$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Можно предложить иную разновидность этой характеристики, в которой фигурируют только модули отношений  $V_j/V_i$ .

Еще одним вариантом характеристики различия стартовых скоростей  $V_j$  может служить нормированная мера их неидентичности, которой и будем оперировать в дальнейшем. Для  $N = 3$  она имеет вид

$$\Theta V = \frac{3[(|V_1| - |V_2|)^2 + (|V_2| - |V_3|)^2 + (|V_3| - |V_1|)^2]^{1/2}}{|V_1| + |V_2| + |V_3|}. \quad (6)$$

Очевидно, что в случае идентичности параметров подсистем (5) и начальных условий ( $U_{0j} = U_0$ ), согласно (6), величина  $\Theta V \equiv 0$ . Строгое равенство  $\Theta V$  нулю имеет место лишь в этом случае. Наоборот, при неидентичных параметрах подсистем даже при подборе соответствующих начальных условий достичь строгого равенства ( $\Theta V \equiv 0$ ) не удастся. Причина, на наш взгляд, состоит в том, что эта задача сводится к нахождению таких значений начальных условий  $U_{0j}$ , для которых величины  $V_j$ , входящие во взаимосвязанные трансцендентные уравнения

$$V_j = K_j [1 + \gamma_j \cos(U_{0i} + f_{0j})] / \tau_j - U_{0j} / \tau_j$$

строго, а не приближенно, равны между собой, обеспечивая, согласно (6), строгое равенство нулю  $\Theta V$ . Однако, решение указанных трансцендентных уравнений получается с неустранимой погрешностью, определяющей отличие  $\Theta V$  от нуля. Заметим, что здесь задаваемые параметры  $K_j$ ,  $\gamma_j$ ,  $f_{0j}$ ,  $\tau_j$  и неизвестные  $U_{0j}$  положительны в силу их физического смысла.

С целью выяснить влияние неидентичности стартовых скоростей процессов  $V_j$  на динамику многокомпонентной системы уравнения (2) решались численным методом Рунге - Кутты - Мерсона [5], и строились проекции фазовых портретов на плоскости  $U_1, U_2$  и  $U_3, U_2$ . Относительная погрешность вычислений не превышала  $10^{-12}$ . При интегрировании (2) начальными условиями служили задаваемые величины  $U_{0j}$ . Если  $U_{0j}$  заданы и все параметры в (2) известны, то тем самым заданы и стартовые скорости  $V_j$ , вычисляемые как правые части уравнений



(2) при  $t=0$ . В свою очередь знание величины  $V_j$  позволяет рассчитать по формуле (6) значение меры неидентичности  $\Theta V$ .

**1 тип динамики.** Моделирование показало, что при выполнении соотношений (5) и начальных условиях  $U_{0j} = U_0$  (то есть при идентичности стартовых скоростей процессов в подсистемах, когда  $\Theta V=0$ ) в трехкомпонентной системе возникает только стационарное движение. В этом тестовом случае значения фазовых набегов  $U_j$ , естественно, одинаковы.

Если же параметры подсистем идентичны (то есть соотношения (5) выполняются), а начальные условия  $U_{0j}$  различны, либо наоборот, параметры подсистем неидентичны (то есть хотя бы одно из соотношений (5) не выполняется), а начальные условия  $U_{0j}$  одинаковы, то в зависимости от величины  $\Theta V$  возможны еще шесть типов эволюции многокомпонентной системы.

**2-4 типы динамики.** При  $0 < \Theta V < 0.001$  сперва реализуется начальный процесс установления  $U_j$ , затем - переходный процесс со стационарным (постоянным и одинаковым) значением фазовых набегов  $U_j = U_{st}$  (ППСФ). В качестве критерия идентификации ППСФ использовалось следующее условие:

$$|dU_j/dt|/U_j < 0.01. \quad (7)$$

Как показало моделирование, длительность  $t_s$  ППСФ по критерию (7) зависит от степени неидентичности  $\Theta V$  стартовых скоростей по закону

$$t_s = -A \ln \Theta V - B, \quad (8)$$

который получен аппроксимацией зависимости, показанной на рис. 2 кривой 3. Здесь величина  $t_s$  нормирована на единицу времени; для удобства построения на оси абсцисс приведены значения величины  $\Theta V^{1/5}$ ; величина  $\Theta V$  изменялась заданием значения  $U_{01}$ .

Необходимо подчеркнуть, что ППСФ возможен в кольцевом интерферометре не только с тремя керровскими средами, но также и с другим их числом. Соотношение (8) в таких случаях сохраняет силу, изменяются лишь входящие в него константы. Для сравнения на рис. 2 приведены кривая 1 (случай двух и четырех сред) и кривая 2 (случай пяти сред).

В случае трех керровских сред после завершения ППСФ возможны три альтернативных варианта динамики фазового набегания: неперриодический, периодический, стационарный «разноуровневый» процессы. При этом значения  $U_j$  различны, что отличает «разноуровневый» стационарный процесс от ППСФ.

Порога неидентичности, то есть минимального значения  $\Theta V$ , начиная с которого стационарность процесса сохраняется как угодно долго, не выявлено вплоть до значения  $\Theta V \sim 10^{-12}$ . Этот факт согласуется с установленной зависимостью (8) (см. кривую 3 на рис. 2).

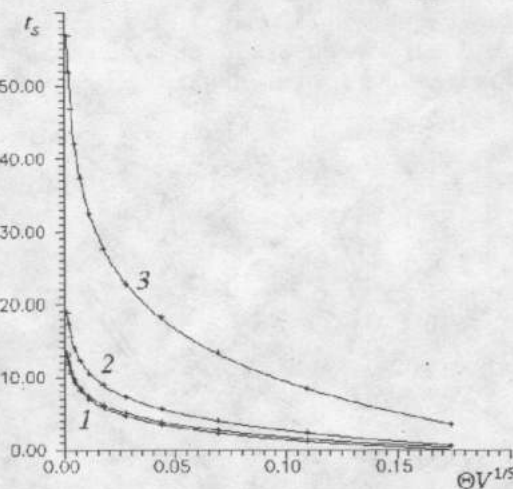


Рис. 2. Зависимость длительности  $t_s$  ППСФ от меры неидентичности  $\Theta V$  стартовых скоростей: при значениях параметров  $\tau_j=1c$ ,  $\gamma_j=0.8$ ,  $K_j=5$ ,  $f_{0j}=U_{02}=U_{03}=0$  для случаев: 1 - двух ( $A=0.50$ ,  $B=4.45$ ) и четырех ( $A=0.51$ ,  $B=4.11$ ) сред; 2 - пяти сред,  $A=0.72$ ,  $B=5.63$ ; 3 - трех сред,  $A=2.09$ ,  $B=14.77$

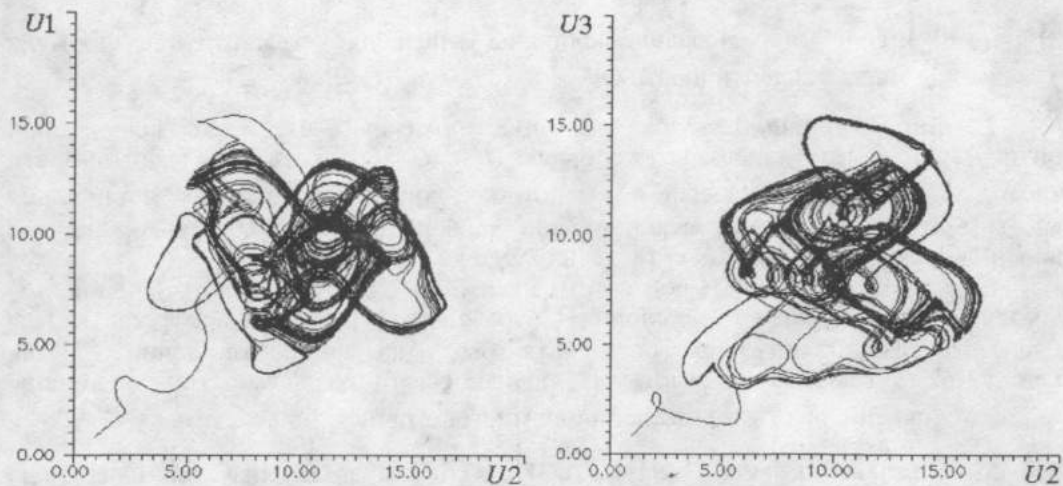


Рис. 3. Проекция фазовых портретов для неперидического процесса при  $\Theta V = 0.1515$  и значениях параметров  $\tau_j = 1\text{с}$ ,  $\gamma_j = 1$ ,  $U_{0j} = f_{0j} = 0$ ,  $K_1 = 9$ ,  $K_2 = 10$ ,  $K_3 = 9$

**5-7 типы динамики.** Для значений  $\Theta V \in [0.001, 1]$  после начального процесса установления  $U_j$  переходный процесс со стационарным (и одинаковым) значением  $U_j = U_{st}$  (с ограниченной длительностью  $t_s$ ) не зафиксирован. В зависимости от степени неидентичности стартовых скоростей процессов в подсистемах реализуется либо неперидический процесс (примеры проекций фазовых портретов приведены на рис. 3, 4), либо перидический (пример проекций фазовых портретов приведен на рис. 5), либо «разноуровневый» стационарный, то есть с разными значениями  $U_j$ .

Значение  $\Theta V = 1$  служит своего рода границей, поскольку при  $\Theta V > 1$  во всех проведенных вычислительных экспериментах неперидические процессы не зафиксированы. Пример проекций фазовых портретов перидического процесса приведен на рис. 6. О перидичности процессов приходилось судить по виду проекций фазовых портретов, изображенных на рис. 5, 6 и идентифицированных как предельные циклы.

Естественно было бы ожидать, что при «сильной» неидентичности стартовых скоростей динамика многокомпонентной системы далека от перидичности и наоборот. Но представляется продуктивным использование

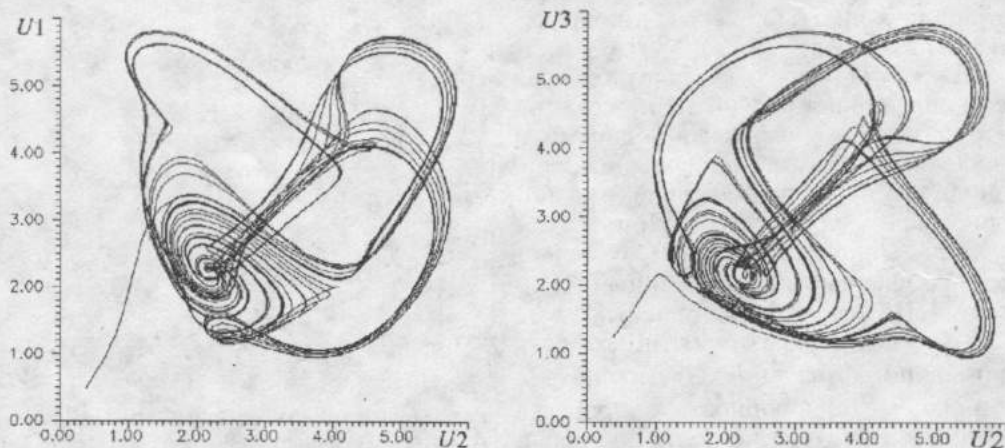


Рис. 4. Проекция фазовых портретов для неперидического процесса при  $\Theta V = 0.1938$  и значениях параметров  $\tau_j = 1\text{с}$ ,  $\gamma_j = 1$ ,  $f_{0j} = 0$ ,  $K_j = 5$ ,  $U_{01} = U_{02} = 0$ ,  $U_{03} = 0.785$  рад



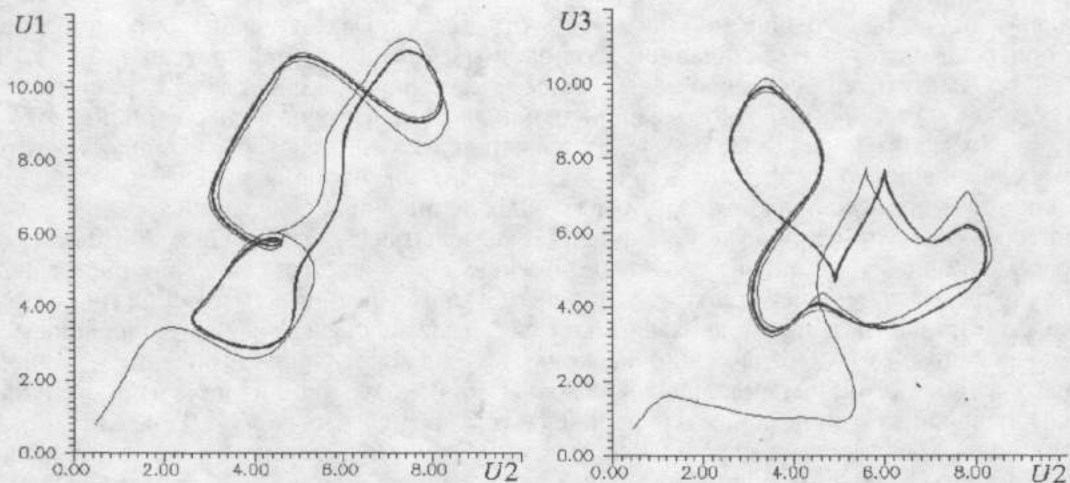


Рис. 5. Проекция фазовых портретов для периодического процесса при  $\Theta V = 0.606$  и значениях параметров  $\tau_j = 1$ ,  $\gamma_j = 1$ ,  $U_{0j} = f_{0j} = 0$ ,  $K_1 = 8$ ,  $K_2 = 5$ ,  $K_3 = 8$

некоторой аналогии между многокомпонентной системой (2) и биологическими объектами\*, для которых еще в 1966 г. был сформулирован «принцип наименьшего действия». Согласно принципу, каждая подсистема в организме реагирует так, чтобы взаимодействие с другими подсистемами, отличными от нее, было минимальным. На основе этого принципа объясняется тот факт, что динамика взаимосвязи между отличающимися подсистемами приобретает повторяющийся, циклический характер, то есть наступает синхронизация колебательных процессов во взаимосвязанных подсистемах [6]. При «сильной» неидентичности, когда  $\Theta V > 1$ , типичными динамическими состояниями системы, согласно результатам моделирования, оказываются периодические и стационарные процессы, что можно интерпретировать как синхронное взаимодействие подсистем.

Однако, если на биосистему воздействуют «слабо» отличающиеся «сигналы», то наиболее вероятен случай десинхронизации динамического состояния биосистемы, нарушения взаимодействия ее частей [6]. Определенную

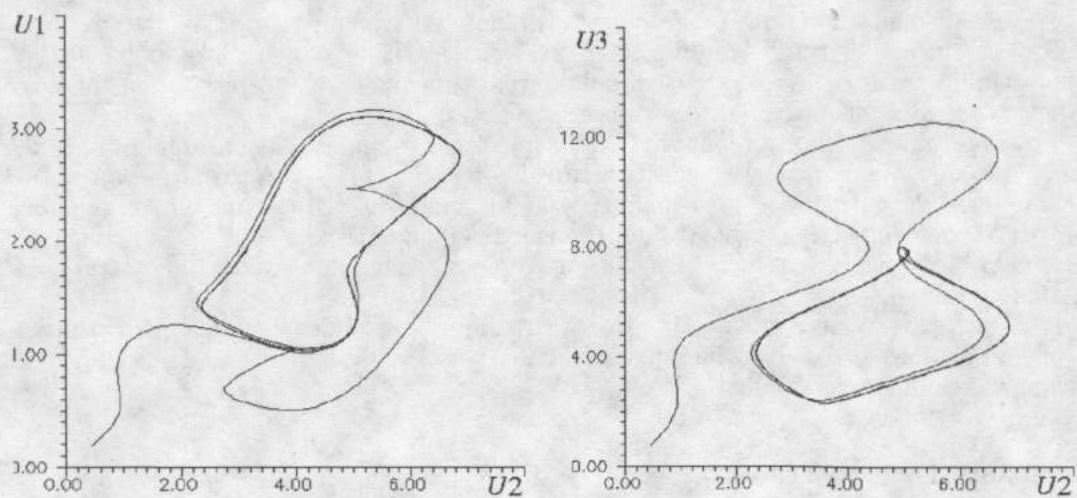


Рис. 6. Проекция фазовых портретов для периодического процесса при  $\Theta V = 1.4696$  и значениях параметров  $\tau_j = 1$ ,  $\gamma_j = 1$ ,  $U_{0j} = f_{0j} = 0$ ,  $K_1 = 2$ ,  $K_2 = 5$ ,  $K_3 = 8$

\* На эту аналогию внимание авторов обратил И. В. Мигалкин.

аналогию такой ситуации можно усмотреть в том, что при  $\Theta V < 1$  непериодические процессы могут являться финалом эволюции трехкомпонентной системы.

Отметим, что, согласно результатам моделирования, интервал ]0,1[ значений  $\Theta V$ , в котором динамика многокомпонентной системы сложна, относительно узок.

4. Таким образом, в работе сделана попытка посредством компьютерного моделирования выяснить влияние степени неидентичности  $\Theta V$  начальных скоростей процессов в трех взаимосвязанных нелинейных подсистемах кольцевого интерферометра на динамику нелинейных фазовых набегов  $U_j$ . Применительно к рассмотренному варианту оптико-физической схемы, в приближении пренебрежимо малого мелкомасштабного взаимодействия оптических полей в каждой из подсистем, для динамической системы, описываемой (2), вычислена ее дивергенция (3). Предложено несколько численных характеристик отличия параметров подсистем и начальных условий. На основе одной из них (6) проведена классификация типов динамики нелинейных фазовых набегов  $U_j$ . Показано, что величина  $U_j$  влияет на строение аттрактора, причем возможны семь вариантов эволюции трехкомпонентной системы, включающие непериодические, периодические и стационарные (двух типов) процессы. При  $\Theta V < 10^{-3}$  реализуется переходный процесс - по критерию (7) - со стационарным (и одинаковым) значением фазовых набегов, длительность которого зависит от  $\Theta V$  по закону (8). Такой процесс имеет место также в двух-, четырех- и пятикомпонентных системах при  $0 < \Theta V < 10^{-2}$  (см. рис. 2), что позволяет считать ППСФ признаком «слабой» неидентичности стартовых скоростей процессов в подсистемах. Отсутствие при  $\Theta V > 1$  непериодических процессов можно объяснить, исходя из «принципа наименьшего действия», справедливого для многокомпонентных биологических систем [6]. Завершение эволюции трехкомпонентной системы непериодическим процессом возможное при  $\Theta V < 1$  предлагается интерпретировать, также исходя из аналогии с биосистемой [6].

Полученные результаты дают аргументы в пользу постановки задачи о синтезе многокомпонентной системы с заданным типом динамики путем выбора степени неидентичности параметров пространственно разделенных подсистем и их начальных состояний. Следует отметить, что связь между неидентичностью частей и характером поведения целого составляет одно из направлений исследования эволюционной диатропики - учения о разнообразии. Согласно Ю.В. Чайковскому, для самоорганизации системы, формирующей собственную среду, необходимо высокое разнообразие элементов и их связей. Но всякое разнообразие не формально, то есть не может быть полностью упорядочено алгоритмом, а, значит, оно случайно с алгоритмической точки зрения [7].

Актуальной представляется проверка полученных закономерностей на экспериментальной основе, созданной авторами работы [1]. Тем самым удалось бы исключить естественные подозрения относительно того, что описанные явления могут существовать - по точному выражению Л. О. Чуа - «лишь в математических абстракциях и в компьютерных экспериментах с придуманными уравнениями» [8].

Авторы благодарны И. В. Мигалкину за обсуждение результатов моделирования и А. Л. Магазинникову - за помощь в исследовании двух- и четырехкомпонентных систем.

#### Библиографический список

1. Ахманов С. А., Воронцов М. А., Иванов В. Ю. Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей // Новые принципы оптической обработки информации/ Под ред. С.А. Ахманова и М.А. Воронцова. М.: Наука, 1990. С. 263.



2. Воронцов М.А. Нелинейная волновая пространственная динамика световых полей // Изв. РАН. Сер. физ., 1992. Т. 56, № 4. С 7.
3. Аршинов А.И., Мударисов Р.Р., Поизнер Б.Н. Формообразование в интерферометре с керровской нелинейностью: вычислительный эксперимент // Изв. вузов. Сер. Физика. 1994. № 6. С.102.
4. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику: Учеб. руководство. М.: Наука, 1990. С. 122.
5. Мудров А. Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. Томск : МП «РАСКО», 1991.
6. Мигалкин И.В., Каложин В.А., Карташев А.Г. Некоторые закономерности влияния магнитных полей на сбраживание глюкозы дрожжевыми грибами// Живые системы в электромагнитных полях. Томск, 1979. Вып. 2. С. 65.
7. Чайковский Ю.В. К общей теории эволюции // Путь. 1993. № 4. С.101.
8. Чуа Л.О. Генезис схемы Чуа // Изв. вузов. Сер. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1, № 3-4. С. 5.

Томский государственный  
университет

Поступила в редакцию 5.07.94  
после переработки 25.01.95

### THREE KERR NONLINEAR MEDIUMS IN THE RING INTERFEROMETER: THE IMPORTANCE OF NONIDENTITY

*A.I. Arshinov, R.R. Mudarisov, B.N. Poizner*

The simplified dynamics model of the nonlinear phase modulation in the ring interferometer, containing three nonlinear mediums, whose light fields are interdependent is considered. The quantitative measure of nonidentity of start velocities  $\Theta V$  of the processes in the subsystems is proposed. The computer imitation has shown: 1 - attractor structure in phase space of multicomponent system depends on value of  $\Theta V$ , and seven alternatives of system dynamics including nonperiodic, periodic, stationary processes are possible; 2 - when value of  $\Theta V$  is order  $10^{-3}$  or less then duration  $t_s$  of transitive stationary process in early evolution of multicomponent system depends on the value of  $\Theta V$  as  $t_s = -A \ln \Theta V - B$ , in so doing the minimal value of  $\Theta V$  (up to and including  $10^{-12}$ ) was not found; 3 - nonperiodic processes were disclosed only in the limited interval ]0,1[ of values  $\Theta V$ .



*Аршинов Алексей Иванович* - родился в 1967 году в Томске. Аспирант радиофизического факультета Томского университета. Области научных интересов: нелинейная динамика пространственно разделенных систем, моделирование процессов оптической морфогенетики.