



## КАК В ЭКСПЕРИМЕНТЕ УВИДЕТЬ ТО, ЧТО РЕАЛЬНО "НЕ ДОЛЖНО СУЩЕСТВОВАТЬ"

*Б.П. Безручко, М.Д. Прохоров, Е.П. Селезнев*

На примере неавтономного осциллятора демонстрируется экспериментальный подход, позволяющий сделать наглядной роль неустойчивости в формировании сложной динамики нелинейной системы. Приводится описание установки для наблюдения нестационарных процессов, с помощью которой можно увидеть на экране осциллографа неустойчивые циклы в фазовом пространстве, сделать количественные оценки устойчивости состояний, исследовать структуру хаотических аттракторов.

### Введение

Любая реальная система, находящаяся в неустойчивом положении, обречена на переход в другое, устойчивое состояние. Карандаш, поставленный вертикально острием на твердую поверхность стола, всегда падает. Становятся невидимыми на экране замкнутые кривые, соответствующие потерявшим устойчивость предельным циклам, при построении фазовых портретов колебательных систем с помощью осциллографа. Как экспериментально исследовать то, что неизбежно должно стать ненаблюдаемым? Ответ, возможно, даже единственный, очевиден: искусственно вновь и вновь возвращать систему в неустойчивое состояние и вести наблюдение до тех пор, пока не произошло существенных изменений. Таким приемом широко пользуются в экспериментальной физике, например, для анализа состояний, неустойчивых из-за тепловых эффектов, когда напряжение на исследуемые образцы или устройства подают импульсно, а наблюдение проводят в течение короткого интервала времени (пока температура объекта близка к исходной).

В предлагаемой статье аналогичный подход используется для исследования нелинейных явлений в колебательном контуре с диодом, с целью сделать более наглядной роль неустойчивых состояний в формировании сложной динамики этой популярной нелинейной радиофизической системы\*. С помощью осциллографа, электронного ключа и устройства для задания начальных условий удастся визуализировать неустойчивые объекты в фазовом пространстве, исследовать бассейны притяжения различных устойчивых состояний, почувствовать структуру хаотических аттракторов.

\* Колебательный контур с варакторным диодом широко используется в радиотехнике в качестве селективного элемента с электрической перестройкой, умножителя и делителя частоты, а также рассматривался в качестве элементной базы для ЭВМ с фазово-частотным представлением информации. После обнаружения в нем хаотического поведения [1] контур активно используется как конструктивный элемент для нелинейного моделирования. При больших амплитудах периодического воздействия эта система демонстрирует широкий набор состояний, включая би- и мультистабильные, переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода, кризисы аттракторов, перемежаемость. Желающим получить более подробную информацию можно порекомендовать статьи [2-5].

## 1. Описание экспериментальной установки

Воспользуемся экспериментальной установкой (рис.1), где исследуемая цепь выделена жирной линией. Будем задавать начальное положение изображающей точки в фазовом пространстве системы и следить за ней в течение некоторого интервала времени. Для этого разорвем цепь с помощью электронного ключа К, подключим диод к дополнительному источнику напряжения - блоку начальных условий, а затем в момент времени  $t = 0$  восстановим цепь столь быстро, чтобы за время срабатывания ключа распределение зарядов в диоде не успело релаксировать к равновесному. В квазистатическом приближении состояние контура при гармоническом воздействии  $V \sin(\omega t - \Delta\varphi)$  определяется током в цепи  $I$ , напряжением на диоде  $U$  и фазой  $\Phi = \omega t - \Delta\varphi$ , т.е. его фазовое пространство трехмерно. Структура этого пространства (наличие аттракторов со своими бассейнами притяжения и неустойчивых объектов) определяется значениями параметров системы, а начальное положение изображающей точки - состоянием диода в момент восстановления цепи и значением  $\Delta\varphi$ . В дальнейшем для упрощения мы будем задавать начальные условия на линии  $\Delta\varphi = \text{const}$ ,  $I \approx 0$ , а для их характеристики используем напряжение  $U_0$  (см. прил., п.3). Для наблюдения за системой используем проекции фазовых траекторий на плоскости  $I-U$ ,  $U-\Phi$ ,  $I-\Phi$ . Проекция на плоскость  $U-I$  получается при подаче сигналов  $U(t)$  и  $I(t)$  на горизонтально и вертикально отклоняющие пластины электронно-лучевой трубки. Проекция на две другие плоскости фактически являются временными реализациями  $U(t)$  и  $I(t)$ , которые фиксируются осциллографом в режиме временной развертки, синхронизированной сигналом гармонического воздействия.

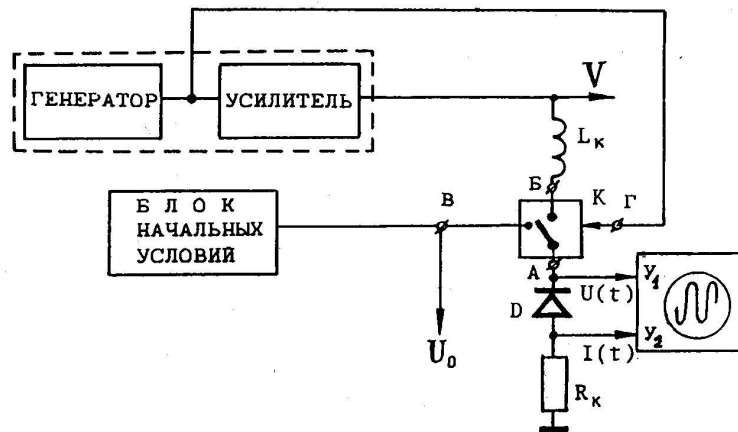


Рис.1. Исследуемая цепь  $L_k R_k D$  и блок-схема экспериментальной установки

## 2. Экспериментальные результаты

В качестве иллюстрации возможностей предлагаемого экспериментального подхода рассмотрим рис.2, на котором приведена плоскость  $V-U_0$ . Амплитуда внешнего воздействия  $V$  является параметром исследуемой системы, а значение  $U_0$  характеризует начальные условия. Сплошные линии на рисунке соответствуют условиям попадания начального положения изображающей точки в фазовом пространстве в близкие окрестности устойчивых циклов, штриховые линии - в

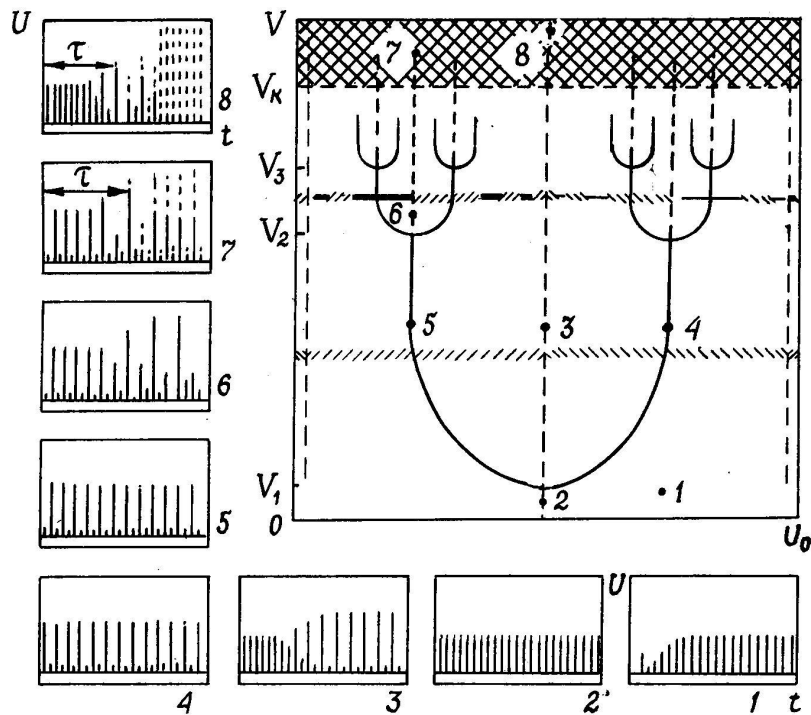


Рис.2. Плоскость  $V - U_0$  для контура с диодом. Штриховкой и сплошными горизонтальными линиями различной толщины обозначены бассейны притяжения мультистабильных циклов, двойной штриховкой - область хаоса. Рисунки осциллограмм выполнены с фотографий, а их номера соответствуют номерам точек на плоскости

окрестности неустойчивых циклов. Осциллограммы иллюстрируют качественный вид проекций фазовой траектории на плоскость  $U-\Phi$  для некоторых характерных точек, отмеченных на рисунке. Эти проекции наиболее удобны для идентификации колебательных состояний, так как зависимость  $U(t)$  имеет вид острых пиков обратной для диода полярности, а минимальное расстояние между соседними пиками равно периоду внешнего воздействия.

При  $V < V_1$  в фазовом пространстве контура существует один устойчивый цикл периода внешнего воздействия (периода 1). Траектория попадает на него из любых начальных точек, а вид и длительность переходного процесса зависят от  $V$  и  $U_0$  (см. точки 1,2, конечные участки на осциллограммах идентичны, пики повторяются через период воздействия). Минимальное время переходного процесса соответствует попаданию начальной точки непосредственно на цикл (точка 2). Ситуация качественно меняется при  $V \geq V_1$ , где  $V_1$  соответствует первой бифуркации удвоения периода, когда цикл периода 1 теряет устойчивость, а в его окрестности рождается цикл периода 2. Теперь, если задать начальные условия вблизи пунктирной линии (точка 3), колебания некоторое время сохраняют все признаки цикла периода 1, а затем система переходит к одному из двух возможных колебательных состояний периода 2, т.е. имеет место бистабильность. Осциллограммы бистабильных состояний периода 2 отличаются друг от друга только сдвигом во времени на период внешнего воздействия (точки 4 и 5). Значения  $U_0$ , при которых система попадает на тот или иной цикл, выделены для одного фиксированного значения  $V$  из интервала  $V_1 < V < V_2$  различной штриховкой. Весь бассейн притяжения бистабильного цикла можно представить,

продолжив штриховку на области, ограниченные сверху линией  $V=V_2$ , снизу - линией  $V=V_1$ , а слева и справа - приведенными на рис. 2 штриховыми линиями (они соответствуют условиям попадания изображающей точки на неустойчивый цикл периода 1). После второй бифуркации удвоения периода ( $V_2 < V < V_3$ ) в системе существует четыре мультистабильных состояния периода 4, области притяжения которых выделены на рисунке для одного из значений параметра, взятого в интервале  $V_2 < V < V_3$ . Помещая начальную точку на правой и левой границах областей бассейнов их притяжения (на рис.2 штриховыми линиями обозначены лишь некоторые из них), можно убедиться, что вид фазовой траектории какое-то время близок к потерявшим устойчивость циклам периода 2 и 1 (точки 5, 6). Сравнимая области притяжения мультистабильных состояний в интервалах  $V_1 < V < V_2$  и  $V_2 < V < V_3$ , можно убедиться, что после бифуркации удвоения каждая из областей меньшего периода дробится на большое число областей притяжения двух мультистабильных состояний удвоенного периода, размеры которых уменьшаются с приближением к границам разделившейся области. При дальнейшем увеличении параметра  $V$  наряду с устойчивыми циклами большого периода при подборе начальных условий в фазовом пространстве системы можно обнаружить все неустойчивые циклы меньшего периода. Причем эта особенность сохраняется и в закритической области  $V > V_k$ , где  $V_k$  соответствует переходу к хаосу.

Отметим, что при  $V < V_k$  осциллограммы на рис.2 имеют достаточно высокую четкость, хотя они получены в режиме периодической развертки и представляют собой наложение друг на друга большого числа временных реализаций процесса (равному частному от деления времени экспозиции при фотографировании изображения на экране на период развертки осциллографа). Это свидетельствует о затухании начальных микровозмущений, так как точность, с которой в реальной системе может быть задано начальное состояние, и возможность его повторения в эксперименте ограничены естественными и техническими флуктуациями. Ситуация качественно меняется в области хаоса ( $V > V_k$ , на рис.2 обозначена двойной штриховкой), для которой характерна неустойчивость фазовых траекторий на аттракторе, а следовательно, и экспоненциальный рост возмущений. В этой части плоскости осциллограммы сохраняют четкость только на начальном участке, длительность которого  $t$  зависит от  $V$  и  $U_0$  (осциллограммы 7, 8). По времени  $t$ , за которое различие в траекториях изображающей точки при последовательном запуске достигнет макроуровня (заметного на глаз), можно сделать некоторые количественные оценки. Например, в [6]  $t$  использовалось для экспериментальной оценки порядка величины ляпуновского характеристического показателя.

Анализ осциллограмм хаотических колебаний (7,8) показывает, что отдельные их фрагменты похожи на циклы, потерявшие устойчивость с ростом параметра. Это отмечается на всем протяжении колебательного процесса, в чем можно убедиться, перейдя к наблюдению стационарного режима (замкнув ключ К в положении Б, используя одноразовую развертку и запоминающий осциллограф, см.рис.1). О том, что это не случайное совпадение формы траектории в фазовом пространстве, а отражение факта включения потерявших устойчивость циклов в структуры объекта, соответствующего хаотическим колебаниям исследуемой системы, свидетельствуют результаты, приведенные на рис.2: пары точек 3 и 8, 5 и 7, в которых при  $t = 0$  система оказывается на одном цикле, устойчивом или потерявшем устойчивость, лежат на общей линии, т.е. связаны "исторически". Таким образом, в хаотическом режиме изображающая точка, покинув один неустойчивый цикл, попадает в окрестность другого неустойчивого цикла и т.д. Естественно, что флуктуации накладывают ограничения на возможности анализа структуры аттрактора реальной системы. В частности, не исключено, что описанный характер хаотической реализации может быть результатом воздействия шума на систему с большим числом устойчивых циклов, имеющих узкие бассейны притяжения.

Перечисленные моменты не исчерпывают возможностей предлагаемой установки для исследования колебаний в контуре с диодом. Меняя параметры в этой системе, можно обнаружить еще целый ряд интересных эффектов. Но наиболее впечатляющим для нас осталось наблюдение давно потерявших устойчивость циклов периода 1 и при существенном по сравнению с приведенным на рис.2 увеличении параметра. Система "помнит" о них, даже когда демонстрирует переход к хаосу через удвоение других циклов, имеющих очень большой исходный период.

### Приложение

Остановимся на некоторых технических моментах, которые могут оказаться полезными для экспериментаторов.

1. Принципиальная схема ключа, использованного нами, приведена на рис.3. Она включает в себя непосредственно аналоговый ключ DA1 (микросхема КР590КН7), формирователь импульсов (в качестве него использовался стандартный генератор импульсов Г5-56, работающий в режиме внешнего запуска), делитель частоты (микросхемы DD1 и DD2 типа К155ИЕ5). Переключатель К2 меняет коэффициент деления и длину наблюдаемой временной реализации, а К1 позволяет зафиксировать ключ в положении Б и рассматривать установившиеся колебания. Гармонический сигнал постоянной амплитуды поступает с генератора (см. рис.1) на вход формирователя, который вырабатывает прямоугольные импульсы положительной полярности с частотой внешнего воздействия  $f_0$ . Импульсы формирователя поступают на вход делителя частоты, с выхода которого управляющий импульсный сигнал подается на управляющий вход Г ключа и внешнюю синхронизацию осциллографа. Сквужность импульсов равна 2, а частота следования  $f_i = f_0/N$ , где  $f_0$  - частота генератора сигнала воздействия,  $N=16, 32, 64, 128, 256$  - коэффициент деления. В режиме наблюдения переходных процессов (К1 в положении 1) ключ управляется импульсами делителя частоты, а в режиме стационарных колебаний (К1 в положении 2) на управляющий вход DA1 подается постоянное напряжение +5В. Микросхема КР590КН7 содержит два нормально замкнутых и два нормально разомкнутых ключа. В момент паузы к диоду через развязку подключается блок задания начальных условий (контакты 1-16 и 8-9 микросхемы DA1 замкнуты), а в момент прихода импульса ключ присоединяет катушку индуктивности  $L_x$  (замкнуты контакты 3-4 и 5-6 микросхемы DA1). Время включения микросхемы КР590КН7 не более 0.3 мкс, сопротивление ключа в открытом состоянии 14 Ом.

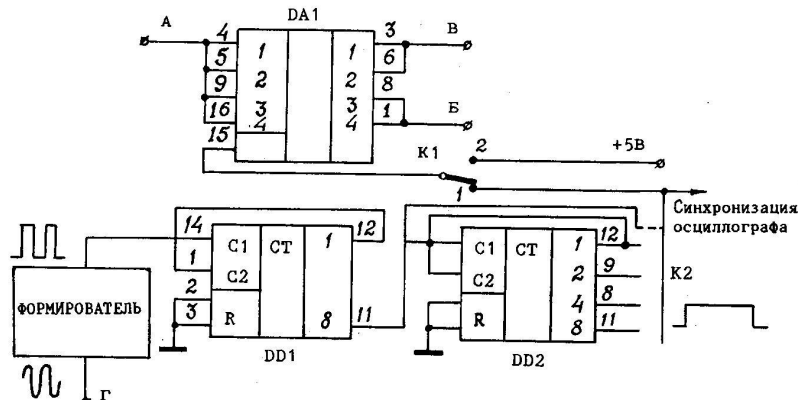


Рис.3. Схема электронного ключа (обозначения клемм соответствуют приведенным на рис.1)

2. В эксперименте в качестве нелинейного элемента использовался диод типа Д242, катушка  $L$  имела 200 витков провода ПЭЛШО 0.1 и помещалась в броневой сердечник СБ2000НМ17. Линейная резонансная частота колебательного контура  $f_p$  равна 33 кГц, добротность - 22. Таким образом, время переключения ключа значительно меньше характерных временных масштабов процессов, наблюдаемых в контуре.

3. Для задания начальных условий использовался регулируемый, стабилизированный источник ТЭС-14 с дополнительной RC-цепью развязки. При этом состояние диода на плоскости  $U - I$  перед отключением от блока соответствует статической вольтамперной характеристике. При обратной для диода полярности напряжения  $U_0$  значение тока мало и можно считать, что начальная точка на плоскости  $U - I$  находится на оси напряжения. Для более произвольного выбора положения начальной точки может быть использован источник переменного напряжения регулируемой частоты и амплитуды.

4. Изменить  $\Delta\varphi$  можно сдвигом во времени импульсов на выходе формирователя относительно запускающего сигнала. Величина  $\Delta\varphi$  определяет наклон линий на плоскости  $V - U_0$ .

5. Амплитуда сигнала внешнего воздействия  $V$  измерялась непосредственно на выходе усилителя. Нами использовались генераторы типа ГЗ-112, усилитель с низким (менее 1 Ом) выходным сопротивлением типа У7-5, осциллографы С1-103, С1-122, вольтметры типа В7-34.

Выражаем признательность В.В. Астахову и А.П. Кузнецову за полезное обсуждение работы.

#### Библиографический список

1. *Linsay P.S.* Period doubling and chaotic behaviour in a driven anharmonic oscillator // *Phys. Rev. Lett.* 1981. Vol.47, N19. P.1349.
2. *Buskirk R., Jeffries C.* Observation of chaotic dynamics of coupled nonlinear oscillators // *Phys. Rev. A.* 1985. Vol. 31, N5. P.3332.
3. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Селезнев Е.П.* Исследование динамики нелинейного колебательного контура при гармоническом воздействии // *Радиотехника и электроника.* 1987. Т.32, N12. С.2558.
4. *Купчатов А.А.* Неоднозначность поведения неавтономного нелинейного контура // *Изв. вузов. Сер. Радиофизика.* 1989. Т.33, N2. С.182.
5. *Baxter J.H., Bocko M.F., Douglass D.H.* Behaviour of a nonlinear resonator driven at subharmonic frequencies // *Phys. Rev. A.* 1990. Vol.41, N2. P.619.
6. *Безручко Б.П., Булгакова Л.В., Кузнецов С.П., Трубецков Д.И.* Стохастические автоколебания и неустойчивость в лампе обратной волны // *Радиотехника и электроника.* 1983. Т.28, N6. С.1136.

Саратовский филиал ИРЭ РАН

#### HOW OBJECTS WHICH "MUST NOT EXIST REALLY" CAN BE SEEN IN EXPERIMENT

*B.P. Bezruchko, M.D. Prokhorov, E.P. Seleznev*

Using nonautonomous nonlinear oscillator, we demonstrate the experimental approach, which permit to illustrate the role of instability in complicated dynamics formation of nonlinear systems. The experimental system for observation of nonequilibrium processes is described, which permits to see on oscilloscop the unstable cycles in fase space, to estimate the stability of states, to investigate the structure of chaotic attractors.



Изв. вузов "ПНД", т.1, №1, №2, 1993

В разделе "Методические заметки" мы планируем помещать также задачи по теории колебаний, волн, нелинейной динамике и хаосу. Думаем, что они будут полезны студентам и аспирантам, изучающим нелинейную теорию колебаний и волн. Структура задачников обычно копирует традиционное деление физики на механику, электричество, оптику и т.д., при этом задачи по теории колебаний попадают в различные разделы, что не способствует формированию единого "колебательного" мышления. Кроме того, бурное развитие нелинейной динамики требует непрерывного методического осмысливания все новых и новых результатов.

Надеемся, что преподаватели вузов поделятся своим опытом на страницах нашего журнала. В этом номере помещена задача, которая, хотя и может быть решена строго, допускает изящное приближенное решение.

*Редакционная коллегия*

### ЗАДАЧА

Маятник в виде жесткого невесомого стержня длиной  $l$ , на конце которого укреплен массивный шарик, отклонили на малый угол  $\alpha$  от неустойчивого положения равновесия и отпустили без начальной скорости. Используя малость  $\alpha$ , определите, через какое время маятник пройдет нижнее положение равновесия.

*Саратовский филиал ИРЭ РАН*

*А.П.Кузнецов  
С.П.Кузнецов*

### PROBLEMS ON NONLINEAR DYNAMICS

In "Methodical Notes" we plan to present, particularly, the problems on oscillations, waves, nonlinear dynamics and chaos. We hope that it will be useful for students and postgraduates studying these fields. Usually, the Books of Problems have a structure copying that of physical courses subdivided into Mechanics, Electricity, Optics and so on. Thus, the problems on oscillations and waves fit into different parts. This fact isn't favorable for the formation of united "oscillatory" manner of thought. Moreover, the fast development of nonlinear studies demands permanently to gain a deeper methodical understanding of new results. We hope that the higher school lecturers will contribute their progressive educational findings to our Journal. In this issue we publish the problem which may be solved rigorously, but admits an elegant approximate solution.

Editors

### PROBLEM

A pendulum being a rigid weightless rod with a massive little ball at the end, is deflected from the upper equilibrium point at a very small angle  $\alpha$  and released without initial velocity. Evaluate the time of going through the lower equilibrium point. The pendulum length is  $l$ .

*Kuznetsov A.P.  
Kuznetsov S.P.*