Изв. вузов "ПНД", т.1,№1,№2,1993 УДК 621.317

ПОИСК ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ И ОПИСАНИЕ АТТРАКТОРА ПО ВРЕМЕННЫМ РЕАЛИЗАЦИЯМ

Д.М. Сонечкин

Описываются результаты расчетов размерностей и поиска периодических траекторий по временным рядам метеорологических данных, рассматриваемых как реализации траекторий хаотической динамической системы.

В последнее время достигнут значительный прогресс в описании структуры притягивающих множеств (аттракторов) хаотических динамических систем (ДС), в том числе их метрических и динамических свойств, таких как размерности аттрактора, энтропии ДС и ляпуновские показатели траекторий, принадлежащих ее аттрактору. Развиты вычислительные алгоритмы, пригодные для расчета этих характеристик, независимо от того, известны ли эволюционные уравнения рассматриваемой ДС или нет.

Наиболее популярным, широко используемым в зарубежных и отечественных приложениях теории ДС является алгоритм оценки размерности аттракторов и энтропии, предложенный П. Грассбергером и И. Прокаччиа. Он связан с вычислением значений корреляционного интеграла по временному ряду значений одной или нескольких фазовых координат, характеризующему вероятности наблюдения двух состояний ДС, различающихся друг от друга не более чем на заданную величину. Численными экспериментами с очень простыми ДС было показано, что этот алгоритм позволяет оценить размерность аттрактора и энтропию даже по временным рядам сравнительно небольшой длительности в тех случаях, когда истинная размерность аттрактора очень невелика. При этом алгоритм оказался малочувствителен к изменению своих параметров.

Эти обнадеживающие результаты стимулировали попытки применения алгоритма Грассбергера - Прокаччиа к исследованию притягивающих множеств, которые предполагались существующими в динамике заведомо многомерных ДС, являющихся математическими моделями реальных процессов. В том числе, со второй половины 80-х годов стали появляться работы по оценке размерностей погодных и климатических аттракторов (первой из них была работа [1]). Авторы работ приходили к выводу, что разномерность погодных и климатических аттракторов очень невелика (от 3 до примерно 8). Однако к тому времени уже стало известно, что оценки по алгоритму Грассбергера-Прокаччиа весьма чувствительны к выбору параметров алгоритма (объему выборки, способу ее дискретизации, построению вектора состояния, выбору размерности вложения). В частности, коррелированность исходного ряда данных по времени, его конечность и неизбежное присутствие в данных измерительных шумов приводят к систематическим смещениям в оценках размерности аттрактора по этому алгоритму. Все это заставило Грассбергера [2] усомниться в состоятельности выводов о маломерности климатического аттрактора. Совсем недавно Э. Лоренц [3] указал на еще одну проблему, возникающую при оценках размерностей аттракторов моделей атмосферных движений из-за сложности нелинейных взаимодействий между разными фазовыми переменными этих моделей. На примере цепочки связанных осцилляторов он продемонстрировал, что реконструкция фазового портрета по ряду переменной, непосредственно связанной со сравнительно малым числом осцилляторов, приводит к довольно малым величинам размерности аттрактора, а по другим переменным, зависящим от состояний всех осцилляторов, - к большим величинам. Последние кажутся более реалистическими. Тем самым Лоренц присоединился к мнению Грассбергера о невозможности существования маломерного климатического аттрактора. Заметим, что еще в 1985 г. на семинаре по численным методам теории бифуркаций в г. Пущино (см.также [4]) автор статьи и Н.Е. Зимин на примере 30-летнего ряда ежедневных данных о зональном переносе воздуха в тропосфере умеренных широт северного полушария Земли продемонстрировали, что размерность погодного аттрактора очень велика и по алгоритму Грассбергера - Прокаччиа можно оценить только "грубозернистую" размерность, получаемую в качестве функции числа шаров фиксированного радиуса, покрывающих исследуемый аттрактор. Эта оценка оказалась убывающей с ростом "грубозернистости" описания аттрактора из чего был сделан вывод, что для практических целей, когда деталями атмосферной динамики можно пренебречь (например, в задаче долгосрочного прогноза погоды), можно надеяться на создание сравнительно простых в смысле числа степеней свободы атмосферных моделей. Это прямо противоположно господствующему среди метеорологов мнению, что с ростом заблаговременности прогноза прогностическая модель должна усложняться. Методически наш вывод совпал с тем, что сказал в своей работе Лоренц [3]: оценки размерностей и других характеристик атмосферных аттракторов несмотря на формальную ошибочность делавшихся на их основе выводов, являются полезными, ибо помогают представить все многообразие разномасштабных атмосферных процессов как совокупность взаимодействующих подсистем, число степеней свободы некоторых из них может быть очень невелико. Следовательно, параметризуя взаимодействие выделенной подсистемы с другими, можно надеяться на создание конструктивных моделей долгопериодной динамики атмосферы.

Возможно, подобный вывод будет справедлив для широкого класса ДС как моделей реальных физических процессов. При этом полезно иметь в виду следующее.

Общая форма эволюционных уравнений реальных процессов имеет вид

$$\varepsilon_1 \frac{dx}{dt} = X(x,y,z,f), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x,y,z,f), \quad \frac{dz}{dt} = \varepsilon_2 Z(x,y,z,f), \tag{1}$$

где x - "быстрые" и z - "медленные" переменные относительно непосредственно интересующих исследователя переменных y; x, y, z заданы в многомерном или даже бесконечномерном гильбертовом пространстве с соответствующими начальными и краевыми условиями; ε_1 и ε_2- малые параметры, введенные так, что в масштабе времени t переменные x приспосабливаются к y ($x \cong X^{-1}(x,y,z,f)$), а переменные z примерно постоянны ($z \cong z_0$), f - внешние силы. В выделенном временном масштабе эволюционная система (1) может быть тогда аппроксимирована ДС:

$$\frac{dy}{dt} = Y(X^{-1}(x,y,z_0,f), y, z_0, f). \tag{2}$$

Последняя, при условии ее диссипативности, имеет аттрактор, который может быть вложен в конечномерное многообразие, называемое инерциальным [5]. Ясно, что для оценки размерности инерциального многообразия и самого аттрактора ДС (2) можно воспользоваться временным рядом реализации (1) для переменных y длиной не более ε_2^{-1} , а число отсчетов реализации на единицу времени должно быть порядка ε_1^{-1}. В противном случае на геометрии наблюдаемого фазового портрета ДС будут заметно сказываться короткопериодные осцилляции, обусловленные взаимодействием x с y, и/или долгопериодные "тренды", обусловленные взаимодействием y с переменными z. Таким образом, в реальных системах эффективная длина временного ряда исходных данных всегда ограничена. За это время трудно рассчитывать на наблюдение всех тонких деталей динамики (1). Аттрактор ДС (2) может быть поэтому реконструирован только в своих основных чертах. Во всяком случае, из-за "тренда" рассчитывать на наблюдение его канторовской структуры вряд ли приходится. Скорее, можно говорить только о реконструкции по ряду структуры инерциального многообразия и даже только его, наиболее часто посещаемой, части. Наша гипотеза состоит в том, что многообразие является "толстым" фракталом, т.е. имеет положительную меру и целую размерность, а наиболее важной структурной его характеристикой является лакунарность, для оценки которой надо вычислять весь спектр обобщенных размерностей фрактала.

Известно, что при использовании конечного временного ряда данных для расчета корреляционного интеграла оценка последнего в зависимости от радиуса покрывающих шаров оказывается ступенчатой функцией. Это препятствует оценке корреляционной размерности путем предельного перехода к нулевому радиусу. Кроме того, для расчета обобщенных размерностей необходимо [6] возводить в разные степени, в том числе отрицательные, поточечные значения корреляционного интеграла, некоторые из них при этом оказываются нулевыми. Это приводит в обобщенном алгоритме Грассбергера - Прокаччиа к делению на нуль. Поэтому алгоритм Грассбергера - Прокаччиа мало подходит для оценок размерностей в этих условиях. В меньшей степени проявляются отмеченные недостатки у другого алгоритма оценки характеристик аттрактора эксплуатирующего скейлинговые свойства расстояния от произвольной точки аттрактора до ее 1-2-,...,k-го ближайшего соседа в конечной выборке. Этот скейлинг проявляется по номеру "k" и, для фиксированного номера, по длине выборки [7,8]:

$$D_k\overline{\ln r(k,N)} = \Psi(k) - \ln N, \tag{3}$$

где $\overline{\ln r(k,N)}$ - среднее по выбранным референц-точкам аттрактора значение логарифма расстояния от каждой из них до k-го ближайшего соседа, рассчитанное по ряду из N точек аттрактора; если принять $\Psi(k)=\ln k$, это приведет к смещению оценки размерности; если же согласно [8] принять $\Psi(k) = \dfrac{d\ln\Gamma(k)}{dk}$, то эта замена даст несмещенную оценку. Аналогичные (3) формулы легко выписываются для всего спектра обобщенных размерностей путем замены логарифма расстояния, которое всегда ненулевое, на его q-ю степень. Но не будем рассматривать весь спектр размерностей, а укажем лишь более простой способ учета неоднородности аттрактора через посредство нормировки $\ln r(k,N)$ на $\ln r(\max,N)$ - логарифм расстояния от референц-точки до наиболее удаленной от нее точки из выборки. Этот способ опирается на кажущееся разумным предположение, что внутренние части аттрактора посещаются типичной фазовой траекторией, составляющей выборку данных, чаще, чем граничные части аттрактора. Поэтому для референц-точки внутри аттрактора расстояния до ее ближайших соседей и до самых удаленных точек выборки будут меньше, чем соответствующие расстояния для близких к границам аттрактора референц-точек. Нормировка уменьшает вариации расстояний до ближайших соседей от одной референц-точки к другой.

Этот алгоритм был применен к анализу рядов временных колебаний полей среднемесячной температуры воздуха на территории бывшего СССР и зарубежной Европы в течение XX века. Так как температура воздуха имеет годовой ход, данные каждого месяца анализировались отдельно, т.е. как бы бралось отображение Пуанкаре на секущей по периоду внешней силы. Исходные данные на 55-ти метеостанциях предварительно преобразовывались во временные ряды коэффициентов разложения по так называемым естественным ортогональным составляющим (собственным векторам ковариационной матрицы изменчивости аномалий температурного поля на станциях относительно норм соответствующих месяцев года, что известно в радиофизике как разложение Карунена - Лоева, а в теории ДС - как сингулярный анализ).

Фазовый вектор составляли несколько первых, отвечающих наибольшим собственным числам матрицы, коэффициентов за два последовательных месяца. Детали всей процедуры предварительной обработки данных приведены в [9], где описано также их использование в схеме долгосрочного прогноза поля температуры методом "аналогов", а именно: за "прогноз" принимается поле температуры месяца, следующего сразу после месяца (данные по его полю температур берутся из архива), являющегося ближайшим соседом текущего месяца. Этот метод прогноза очень близок к описанным в [10-12].

Число коэффициентов, по которым подбирались для прогноза аналоги из архива, определялось по размерности аттрактора, оцененной предварительно величиной около шести по алгоритму Грассбергера - Прокаччиа. Однако хорошей сходимости этой оценки при увеличении размерности пространства вложения вплоть до 30 не получалось. Для уточнения оценки, а также для распространения метода прогноза на поля температуры с двух-, трех- и шестимесячным осреднением, был использован алгоритм (3), причем рассматривались первые семь ближайших соседей и оценка размерности делалась поточечно, т.е. отдельно для каждого года за период 1985-1991.

В логарифмических координатах графики зависимости расстояния до k-го соседа как функции "k" оказались для каждого года довольно заметно отличными от прямых линий и сильно смещенными по ординате относительно друг друга: для одних годов удалось найти в архиве очень хорошие аналоги, для других - нет. Но после того как была введена нормировка на величину расстояния до наиболее удаленной точки из архива (метеорологи называют ее лучшим антилогом) и за абсциссу графиков была взята логарифмическая производная гамма-функции, графики сблизились между собой и стали почти прямыми линиями. После же усреднения по годам средний график стал почти идеально прямой линией. Значит скейлинг по номеру соседа имеет место. Угол наклона среднего графика к оси абсцисс варьируется от месяца к месяцу, что вполне естественно, ибо картина отображения Пуанкаре зависит от выбора секущей (например, для одномесячного осреднения оценка размерности по наклону варьируется от 4.18 при подборе аналогов для прогноза на январь до 6.24 при прогнозе на август). Похожие оценки получились для данных с другими осреднениями температуры. Все эти расчеты были сделаны при размерности вложения, равной шести, а затем - двенадцати. В последнем случае отдельные поточечные размерности, например, для данных с трехмесячным осреднением в прогнозе на февраль - март - апрель в среднем за 1981-1991 гг. дали заметно большие величины - 9.90.

Надо отметить, что экстремально теплые зимы последнего десятилетия, связываемые некоторыми метеорологами с "парниковым эффектом", в терминах модели (1), (2) можно интерпретировать как климатический "тренд", меняющий аттрактор в целом. Чтобы проверить эту интерпретацию, против альтернативы, что наблюдаемый рост размерности (и потепление зим) обусловлен попаданием реализующейся в реальности траектории погодного аттрактора в его редкопосещаемую часть, были рассчитаны расстояния от 1-до 7-го лучших аналогов и лучшего антилога по рядам разной длительности: до 1920 г. с референц-точками за 1921-31 гг., до 1940 г. с референц-точками за 1941-51 гг. и т.д. до 1960 г. и 1980г. Оказалось, что для размерности вложения шесть скейлинг по длине ряда по формуле (3) действительно существует даже без нормировки по антилогу. Он дает среднюю размерность, например, для подбора аналогов при прогнозе на февраль - март - апрель, равную 5.30 по 1-му аналогу и 3.30 - по 7-му. Эти цифры свидетельствуют о том, что по мере роста длины архива данных с 20 - до 80-ти и более лет расстояния от референц-точки до ее ближайших соседей убывают. Это вполне естественно, если только ряд не слишком нестационарен, когда эти расстояния не должны зависеть от длины архива. После нормировки на расстояние до антилога эти цифры уменьшились до 2.90 и 1.75 соответственно, так как при росте архива расстояния до лучшего антилога росли и относительные расстояния до лучших аналогов убывали еще более быстро, чем абсолютные расстояния.

При увеличении размерности вложения до 12-ти, однако, из-за данных за 80-е годы скейлинг по объему архива нарушился для абсолютных расстояний до ближайших соседей. Это навело на мысль, что климатический "тренд" все же проявляется в 80-е годы. Но при введении нормировки и эти данные показали вполне удовлетворительный скейлинг. По 1-му аналогу получилась оценка размерности 4.37, а по 7-му - 4.84. Из этого можно сделать вывод об отсутствии в рассматриваемых температурных рядах климатических "трендов".
Аномально теплые зимы 80-х годов более вероятно считать проявлением внутренней изменчивости атмосферы, а именно: попаданием текущей фазовой траектории в ранее редко посещаемую часть аттрактора при сохранении неизменной его формы в целом, что доказывается сохранением его скейлинговых свойств в течение всего XX века.

Коль скоро температурный ряд данных за XX век можно считать порожденным фазовой траекторией атмосферного аттрактора, допустимо поставить вопрос о его топологической структуре. Как известно [13-15], странный аттрактор есть замыкание счетного множества периодических траекторий. Т.е. сколь угодно близко к любой точке аттрактора проходит какая-либо периодическая траектория. Типичная траектория аттрактора блуждает между периодическими траекториями, поочередно притягиваясь к одной из них и копируя ее в течение некоторого промежутка времени, после чего покидает ее окрестность и притягивается к другой периодической траектории. Такую типичную траекторию можно аппроксимировать дугами периодических траекторий, окрестности которых она посетила за рассматриваемый период времени. Сами периодические траектории не очень долгого периода можно экстрагировать из наблюденного временного ряда данных хаотической ДС [14]. В общем случае число периодических траекторий странного аттрактора растет с ростом длины их периода и по асимптотике этого роста даже можно оценить размерность аттрактора. Но для систем типа (1), (2), где аттрактор наблюдаем только на конечном временном интервале, трудно рассчитывать на наблюдение большого числа периодических траекторий. Очень долгопериодные траектории просто не имеют смысла, ибо их период превосходит временной масштаб, необходимый для перехода системы (1), (2) к стационарному состоянию.

Используя алгоритм экстрагирования периодических траекторий из ряда хаотических данных типа, описанного в [14], мы исследовали периодичности временного ряда коэффициентов разложения по естественным составляющим поля средних температур воздуха на территории бывшего СССР и зарубежной Европы в холодный период года (с октября по март). Признаком периодической траектории было замыкание отрезка временного ряда, т.е. уменьшение расстояния в реконструированном фазовом пространстве между некоторой начальной и некоторой конечной точкой отрезка заданной длины до первой предписанной величины. Последняя варьировалась от эксперимента к эксперименту. Все найденные отрезки одного и того же периода считались относящимися к окрестности одной периодической траектории, если при каком-то фазовом сдвиге их относительно друг друга они оказывались различающимися не более чем на вторую предписанную величину. Из совпавших по этому признаку отрезков траектории вычислялась средняя - эталон соответствующей периодической траектории. Совокупность всех эталонов для всех периодов служит алфавитом для кодирования всего температурного ряда и аппроксимации его дугами эталонов.

Более того, рассматривая текущий холодный период как самую последнюю референц-точку хаотического ряда, среди эталонов можно найти тот, какая-то фаза которого является ближайшим соседом текущей референц-точки. Расстояние может считаться с учетом устойчивости продолжения референц-точки относительно эталона, что можно использовать в целях прогноза более содержательного, чем вышеупоминавшиеся прогнозы по "аналогии" текущего состояния атмосферы.

Эксперименты по поиску периодических траекторий температурных рядов были проведены сначала в шестимерном фазовом пространстве вложения и для контроля - в девятимерном пространстве. В целом они согласуются между собой. Не вдаваясь в детали полученных результатов, укажем, что наиболее надежно из ряда данных выделились периодические траектории с периодами 3, 7, 11, 9 (3x3) и 14 (2x7) лет. Их природа согласно численным экспериментам с малокомпонентными атомосферными моделями связана с субгармоническими резонансами годового хода притока тепла к атмосфере с колебаниями, возбуждаемыми при разрушении, так называемой, бароклинной неустойчивости атмосферы. Резонансы описываются на бифуркационной диаграмме атмосферных моделей [16] "чертовой лестницей" чередования рациональных и иррациональных значений для отношений частот годового хода притока тепла и бароклинной неустойчивости, вычисляемой по правилу Фейри. Алфавит выделенных периодических траекторий согласно [15] полезно дополнить информацией о числах вращения траекторий относительно друг друга, что может быть использовано как в целях прогноза, так и для обнаружения нарушений стационарности временного ряда. В настоящее время указанная работа для температурных рядов данных находится в стадии выполнения.

Библиографический список

1. *Nicolis C., Nicolis G.* Is there a climatic attractor? // Nature. 1984. Vol.311. P.529.

2. *Grassberger P.* Do climatic attractor exist? // Nature. 1986. Vol. 323. P.609.

3. *Lorenz E.N.* Dimension of weather and climatic attractors // Nature. 1991. Vol. 353. P.241.

4. *Сонечкин Д.М.* Об оценке числа степеней свободы крупномасштабных атмосферных процессов // Тр. Гидрометцентра СССР. 1987. Вып. 290. С.27.

5. *Temam R.* Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics // Applied Mathem. Sciences, Springer, 1988. Vol. 68.

6. *Pawelzik K., Schuster H.G.* Generalized dimensions and entropies from a measured time series // Phys. Rev. A. 1987. Vol. 35. N 1. P.481.

7. *Badii R., Politi A.* Hausdorf dimension and uniformity factor of strange attractors // Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 52. N 19. P.1661.

8. *Grassberger P.* Finite sample corrections to entropy and dimension estimates // Phys. Lett. A. 1988. Vol. 128. N 6,7. P. 369.

9. *Виноградская А.А., Зимин Н.Е., Сонечкин Д.М.* Предельные возможности долгосрочного прогноза погоды по архивным данным // Метеорология и гидрология. 1990. N 10. C.5.

10. *Farmer J.D., Sidorowich J.J.* Predicting chaotic time series // Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 59. N 8. P.845.

11. *Sugihara G., May R.M.* Nonlinear forecasting as a way of distinguishing chaos from measurement error in time series // Nature. 1990. Vol. 344. P.734.

12. *Abarbanel H.D.I., Brown R., Kadtke J.B.* Prediction in chaotic nonlinear systems: methods for time series with broadband Fourier spectra // Phys. Rev. A. 1990. Vol. 41. N 4. P.1782.

13. *Procaccia I.* Universal propeties of dynamically complex systems: the organization of chaos // Nature. 1988. Vol. 333. P.618.

14. *Auerbach D.* et al. Exploring chaotic motion through periodic orbits // Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 58. N 23. P.2387.

15. *Mindlin G.B.* et al. Classification of strange attractors by integers // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64. N 20. P.2350.

16. *Виноградская А.А.* и др. Теория годового хода зональной циркуляции атмосферы. 2. Четырнадцатимодовая модель суб- и супергармонических резонансов // Тр. Гидрометцентра СССР. 1988. Вып. 297. С. 166.

Гидрометцентр России
Москва

IDENTIFICATION OF THE PERIODIC TRAJECTORIES AND ATTRACTORS DESCRIPTION BY TIME SERIES

D.M. Sonechkin

The results of calculation of dimensions and identification of periodic trajectories by time series of meteorological data considered as series of trajectories of chaotic dynamic system are described.