

## ПЕРЕХОДНЫЙ ХАОС В СИСТЕМАХ С ЧЕТНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

*В.В. Рождественский, И.Н. Стручков*

Проведено детальное экспериментальное исследование переходного хаоса в автогенераторах со многими степенями свободы и нелинейностью, близкой к четной. Экспериментально подтверждено существование в таких системах переходного хаоса, связанного с граничным кризисом странного аттрактора и ранее открытого в одномерных и двумерных отображениях. Экспериментально установлено существование переходного хаоса с экспоненциальной зависимостью его среднего времени жизни от управляющего параметра  $p$  - бескризисного переходного хаоса. Построено двумерное невазможнооднозначное отображение, демонстрирующее бескризисный переходный хаос.

### Введение

Термином переходный хаос (ПХ) обозначается длительный переходный процесс, имеющий все признаки динамического хаоса (устойчивая функция распределения, непрерывный спектр, локальная неустойчивость и др.), завершающийся быстрым (за время порядка обратной верхней частоты спектра колебаний системы) переходом к регулярному движению (состоянию покоя либо периодическим колебаниям). Согласно современным теоретическим представлениям о природе динамического хаоса, причиной ПХ может быть либо граничный кризис (столкновение странного аттрактора с границей его области притяжения), либо наличие в фазовом пространстве динамической системы стохастического множества, не являющегося аттрактором и отделяющего устойчивую особую точку или предельный цикл (регулярный аттрактор) от неустойчивых элементов фазового портрета (репеллеров).

Исследованию ПХ первого типа посвящено много работ, в основном теоретических, подкрепленных численными экспериментами на простейших отображениях, демонстрирующих стохастическую динамику (см., например [1] и обширную библиографию к ней). Его основной чертой является наличие критического значения управляющего параметра динамической системы  $p_c$ , при котором ПХ сменяется режимом стохастических автоколебаний. Основная закономерность этого ПХ - зависимость среднего времени жизни  $\tau$  от управляющего параметра - имеет вид

$$\begin{aligned} \ln\left[\frac{\tau}{\tau_0}\right] &= -\ln[f(p_c - p)] \text{ при } p < p_c, \\ \tau &= \infty \text{ при } p \geq p_c, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $f$  - монотонная функция,  $f(0)=0$  и  $f(x)>0$  при  $x>0$ . Поведение  $f(p_c - p)$  при  $p \rightarrow p_c$  зависит от размерности аттрактора, рождающегося при  $p=p_c$ , и от свойств

границы его области притяжения. Для гладкой границы асимптотическая формула для  $\tau$  имеет вид

$$\text{Ln}\left[\frac{\tau}{\tau_0}\right] = -\alpha \text{Ln}[p_c - p], \quad (2)$$

где  $\alpha$  - критический показатель скейлинга (2),  $\alpha > 1/2$  [2,3].

Механизм возникновения ПХ второго типа известен в математике уже давно. Например, в трехмерном фазовом пространстве он может вызываться разделительной гомоклиной структурой, отделяющей устойчивый предельный цикл от внешних репеллеров [4]. В качестве другого примера можно привести диффеоморфизм сферы  $S^2$ , включающий конструкцию подковы Смейла [5], отделяющей устойчивую особую точку от источника. Если размерность фазового пространства системы равна или больше четырех, то соответствующие стохастические множества, окружающие устойчивое положение равновесия, могут существовать и для потоков [6]. В динамических системах этого типа фазовая траектория должна как бы "просочиться" через стохастическую "губку", прежде чем она сможет притянуться к устойчивому положению равновесия. Несмотря на то, что гомоклиная структура и подкова Смейла были известны намного раньше, чем странные аттракторы, ПХ второго типа совершенно не исследован. В частности, не известна зависимость среднего времени жизни  $\tau$  от параметра, в качестве которого естественно брать коэффициент сжатия-растяжения в подкове Смейла или вещественную часть собственного числа седла, порождающего гомоклиную структуру. Заметим, что механизм ПХ второго типа, вообще говоря, не предусматривает существования критического значения управляющего параметра.

Целью нашей работы явилось экспериментальное исследование статистических свойств ПХ. Основное внимание было уделено натурному моделированию с помощью радиофизических средств (по замечанию Дж. Бернала, "схемная радиотехника - это экспериментальная математика"), и лишь в конце работы были проведены контрольные вычислительные эксперименты.

### 1. Автогенератор ПХ и методика эксперимента

Известно, что ПХ наблюдается в системах, содержащих в своем фазовом пространстве наряду с хаотическими притягивающими множествами регулярные аттракторы. Этому условию удовлетворяет выбранный нами автогенератор переходного хаоса (АПХ), построенный по блок-схеме, изображенной на рис.1 [7,8]. Характеристика нелинейного элемента близка к четной, подобно изображенной на рис.2. Управляющим параметром  $p$  служил коэффициент деления потенциометра. Отличием этого генератора от известных является квадратичность нелинейности при малых уровнях входного сигнала, обеспечивающая устойчивость нулевого положения равновесия при любых значениях  $p$ . Характеристическое сопротивление фильтра равнялось  $R$ . Частота среза фильтра выбиралась настолько низкой, чтобы можно было пренебрегать паразитными

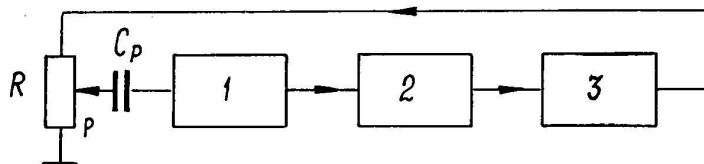


Рис.1. Блок-схема АПХ: 1 - линейный безынерционный усилитель переменного тока, 2 - безынерционный нелинейный элемент, 3 - LC-фильтр нижних частот, R - прецизионный потенциометр

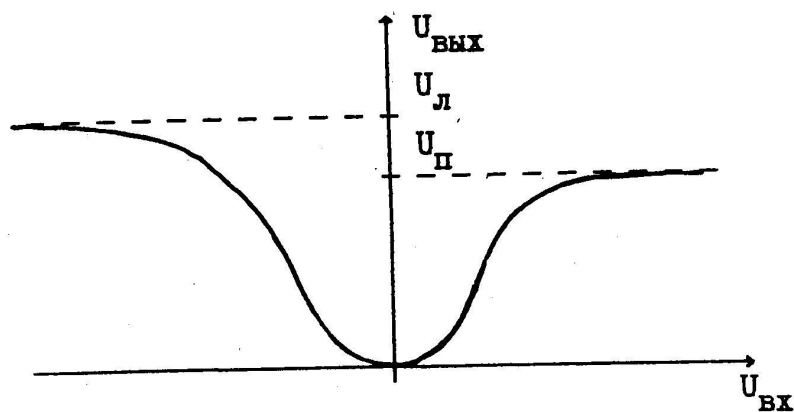


Рис.2. Передаточная характеристика нелинейности с возможной асимметрией амплитудного ограничения

параметрами элементов электронной схемы.

Было испытано четыре различных макета АПХ с разными частотами среза фильтра и с разными способами формирования нелинейной характеристики. В НЧ-макете нелинейная характеристика формировалась парой транзисторов, включенных пушпульно и работавших на общую нагрузку. Частота среза фильтра равнялась 12кГц. В других макетах нелинейность (включая ограничение) формировалась с помощью высокочастотных диодов, поэтому частота среза фильтра в них могла быть увеличена и достигала 650 кГц в ВЧ-макете. Кроме того, в этом макете можно было регулировать степень симметрии нелинейной характеристики путем изменения уровня правого или левого плеча ограничения (см. рис.2). Таким образом можно было устанавливать максимально возможную степень симметрии или вносить контролируемую асимметрию в нелинейную характеристику. Размерность фазового пространства АПХ определялась числом звеньев фильтра, которое составляло для НЧ-макета 8, а в ВЧ-макете могло изменяться с помощью выключателей от 4 до 14.

Подбором разделительной емкости  $C_p$  можно было добиться генерации стохастического режима при любых значениях параметра  $p$ , а также существования широкой области значений  $p$ , в которой наблюдался переходный хаос.

Эксперименты по измерению статистических свойств заключались в измерении длительности ПХ после запуска колебаний АПХ цугом импульсов длительностью 1мс (параметры запускающего сигнала были выбраны произвольно, но поддерживались всегда постоянными, равно как и место подачи запускающего цуга в автогенератор). Завершение ПХ фиксировалось с помощью детектора, момент появления нулевого сигнала на выходе которого соответствовал окончанию ПХ. Длительность ПХ носила при этом случайный характер и после достаточного количества запусков можно было построить гистограмму распределения длительностей ПХ. Другой режим работы использовался при определении зависимости среднего времени жизни  $\tau(p)$  от управляющего параметра  $p$ . В нем АПХ перезапускался автоматически сразу после окончания очередного ПХ, и электронный счетчик подсчитывал число запусков в течение определенного времени. Время жизни находилось делением этого полного времени на число запусков. Длительности отдельных реализаций ПХ изменялись в процессе экспериментов от десятка миллисекунд до десятков минут, т.е. примерно в 60 000 раз. Для определения  $\tau(p)$  производилось усреднение не менее

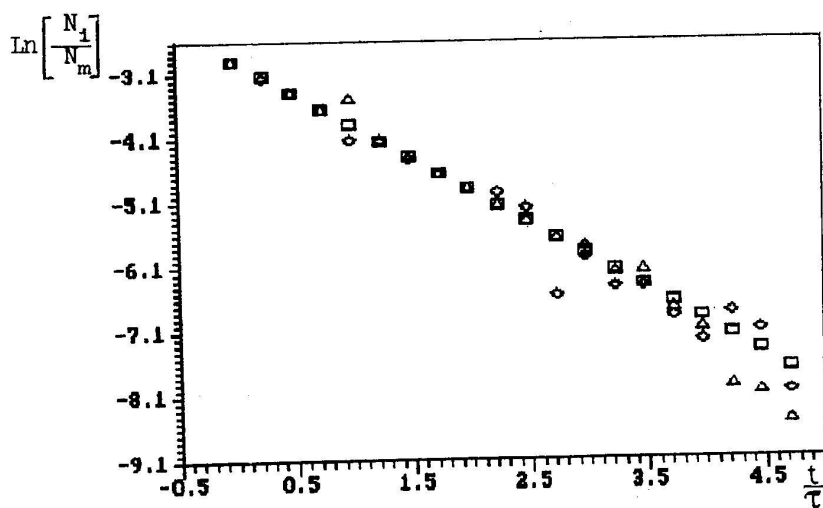
чем по 500 запускам, так что достоверные измерения  $\tau$  заключались в пределах от  $\approx 30$ мс до  $\approx 60$ с (в диапазоне трех с половиной декад). При проведении измерений были приняты все необходимые меры для обеспечения стационарности (стабилизация питания, экранировка, прецизионный проволочный потенциометр), и статистическая обработка нескольких массивов данных, проведенная с помощью критериев Кокса - Стюарта и Валлиса - Мура [9], подтвердила статистическую устойчивость и отсутствие тренда экспериментальных данных.

## 2. Результаты измерений

Измерение гистограммы функции распределения длительностей ПХ при фиксированном  $p$  для всех исследованных макетов АПХ дало одинаковые результаты. В случае, когда произведение среднего времени жизни ПХ  $\tau$  на частоту среза фильтра  $f_b$  превышало  $10^4$ , гистограммы описывались экспонентой (как и в ранее исследованных системах с переходным хаосом):

$$N(t) = N_m \exp\left[-\frac{t}{\tau}\right]. \quad (3)$$

Для примера на рис.3 приведены гистограммы распределения времен жизни ПХ для ВЧ-макета с 11 звеньями в фильтре при трех различных значениях



$p \times 10^3$	532	563	584
$\tau, \text{мс}$	14.72	126	1115
объем выборки	30076	3927	897
СИМВОЛ	□	△	◇

Рис.3. Нормированные гистограммы относительно времен генераций  $\frac{N[t, (p)]}{N_m}$  в полулогарифмическом масштабе для АПХ ( $N=11$ )

управляющего параметра. Зависимость среднего времени жизни  $\tau$  от управляющего параметра  $p$  были разными. Для НЧ-макета эта зависимость описывалась формулой (2), характерной для ПХ, порожденного граничным кризисом. Типичный график приведен на рис.4,а. Критическое значение  $p_c$  управляющего параметра  $p$  находилось внутри области регулировки, и при  $p > p_c$  ПХ в автогенераторе обнаружен не был.

Для ВЧ-макета с максимально симметричной характеристикой нелинейности  $\tau(p)$  экспоненциально росло при увеличении  $p$  во всей доступной для измерения области значений  $\tau(p)$  без каких-либо признаков отклонения  $\ln[\frac{\tau}{\tau_0}]$  от линейной зависимости и, следовательно, без каких-либо признаков существования критического значения  $p_c$  (соответствующий график приведен на рис.4,б):

$$\tau = \tau_0 \exp[C_0 p]. \quad (4)$$

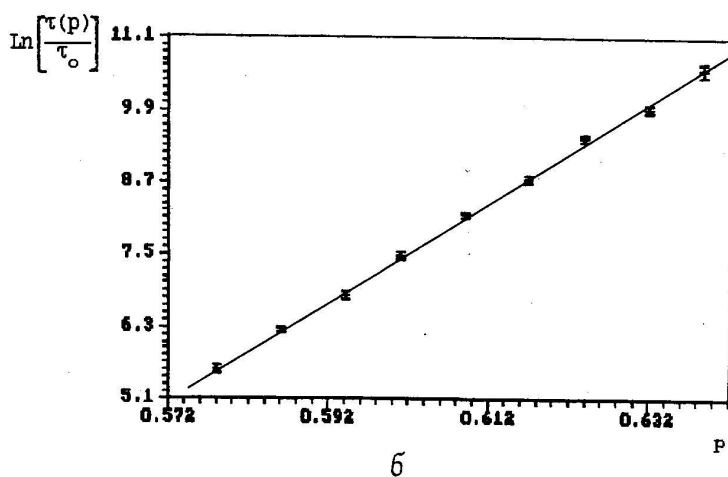
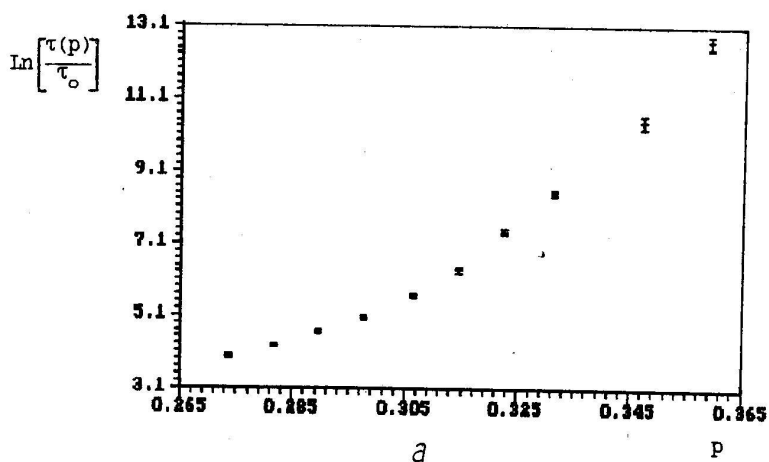


Рис.4. Экспериментальные зависимости  $\ln[\frac{\tau(p)}{\tau_0}]$  ( $\tau_0=1\text{мс}$ ) от  $p$ : а - для НЧ-макета (8 звеньев), б - для ВЧ-макета (9 звеньев)

С целью выяснения причин разного поведения зависимости  $\tau(p)$  для НЧ- и ВЧ-макетов были произведены измерения этой зависимости для ВЧ-макета, в характеристику нелинейности которого вносилась контролируемая асимметрия.

Степень асимметрии характеризовалась величиной параметра  $\alpha = \frac{U_n - U_p}{U_n + U_p}$  (см. рис.2). Оказалось, что внесение асимметрии иногда разрушает зависимость (4) и вызывает более быстрый, чем линейный, рост  $\text{Ln}[\tau(p)]$  при увеличении  $p$ . При  $|\alpha| = 0.08$  экспериментальные кривые  $\tau(p)$  уже удовлетворительно описываются формулой (2) (соответствующий график приведен на рис.5).

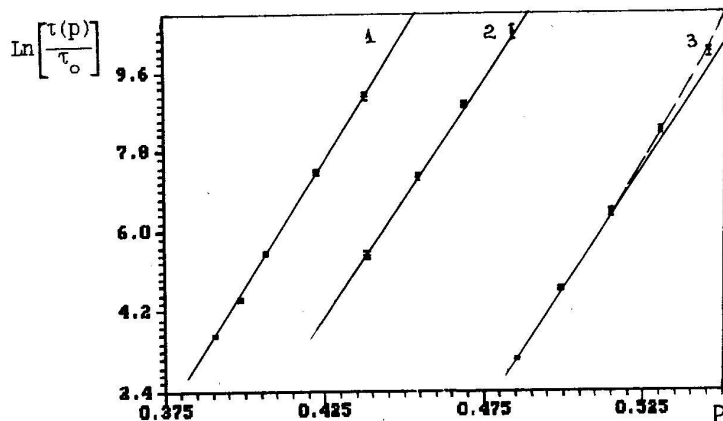


Рис.5. Экспериментальные зависимости  $\text{Ln}[\frac{\tau(p)}{\tau_0}]$  ( $\tau_0 = 1\text{мс}$ ) от  $p$  для ВЧ-макета (4 звена) при различных величинах асимметрии нелинейности: 1 -  $\alpha=0.0$ , 2 -  $\alpha=0.03$ , 3 -  $\alpha=0.08$

### 3. Численный эксперимент

Контрольные численные эксперименты были предприняты на упрощенной математической модели АПХ, в которой фильтр моделировался задержкой и парой RC-цепей (дифференцирующей и интегрирующей). Такая модель описывается дифференциальным уравнением второго порядка с запаздыванием [8]:

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = K \frac{d}{dt} \{f[x(t-1)]\} . \quad (5)$$

Функция  $f(x)$  моделировала нелинейность АПХ и описывалась формулой

$$f[x] = \frac{2x^2(1 + \alpha \text{sign}[x])}{1 + 2x^2} . \quad (6)$$

С помощью параметра  $\alpha$  моделировалась асимметрия нелинейности. Численное интегрирование (5) производилось при  $\gamma = 0.85$ ,  $\omega_0^2 = 0.56$  в соответствии с параметрами реального АПХ. Параметр  $K$  был пропорционален  $p$ :  $K = \Delta p$ , где  $\Delta = \gamma + [\gamma^2 - \omega_0^2]^{0.5}$ . Численный эксперимент проводился на ПЭВМ IBM PC AT и заключался, как и натурный эксперимент, в вычислении зависимости  $\tau(p)$  и

построении гистограмм времен ПХ. При этом модель (5) показала наличие ПХ, качественные черты которого совпадали с аналогичными для ПХ в натурном эксперименте. Однако естественные ограничения по времени вычислений не позволили получить зависимость  $\tau(p)$  в настолько широкой области значений  $\tau(p)$ , чтобы можно было с уверенностью говорить о ее типе.

Если отказаться от моделирования реальных АПХ и рассмотреть (5) при  $\tau \gg 1 > \omega_0$  (последнее неравенство соответствует очень сильному различию верхней и нижней частот пропускания или отсутствию подавления низких частот в полосе пропускания АПХ), то тогда оно может быть приближенно заменено двумерным, в общем случае необратимым, отображением (его вывод дан в приложении):

$$\begin{cases} \bar{x} = Ax + B[f(x) - s], \\ \bar{s} = C[x + \bar{x}] + s, \end{cases} \quad (7)$$

где  $f(x)$  дается выражением (6), а

$$A = \frac{2\exp[-2\gamma] - (1 - \exp[-2\gamma])\omega_0^2}{2 + (1 - \exp[-2\gamma])\omega_0^2},$$

$$B = \frac{2(1 - \exp[-2\gamma]) [\gamma + [\gamma^2 - \omega_0^2]^{1/2}]}{2 + (1 - \exp[-2\gamma])\omega_0^2} p,$$

$$C = \frac{\omega_0^2}{2 [\gamma + [\gamma^2 - \omega_0^2]^{1/2}]} p^{-1}.$$

Отображение (7) позволяет исследовать ПХ в диапазоне  $\tau(p)$  не только существенно более широком, чем для уравнения (5), но даже более широком, чем в натурном эксперименте. Разумеется, отображение (7) можно рассматривать и независимо от уравнения (5) при любых значениях коэффициентов.

На рис.6 приведены зависимости  $\text{Ln} [\tau(p)]$  при трех значениях параметра асимметрии  $\alpha$  (0.0,  $\pm 0.1$ ) и  $\gamma = 0.85$ ,  $\omega_0^2 = 0.56$ . Каждое значение  $\tau(p)$  определялось как среднее по 100 завершившимся (притянувшимся к нулевому положению равновесия) переходным процессам (7) с различными начальными условиями  $(x_0; s_0)$ , равномерно распределенными в интервале  $[-2; 2]$ .

Таким образом, отображение (7) демонстрирует ПХ, прерываемый окнами периодических колебаний. Среднее время жизни ПХ экспоненциально зависит от управляющего параметра. Следует отметить, что даже в окнах периодичности существуют начальные условия, при которых отображение (7) демонстрирует ПХ, сходящийся к нулевому положению равновесия.

\* \* \*

Перечислим следующие основные результаты:

1) впервые проведено детальное экспериментальное исследование ПХ в автогенераторах со многими степенями свободы и нелинейностью, близкой к четной;

2) экспериментально подтверждено существование в таких системах ПХ, связанного с граничным кризисом странного аттрактора, обнаруженного ранее в одномерных и двумерных отображениях;

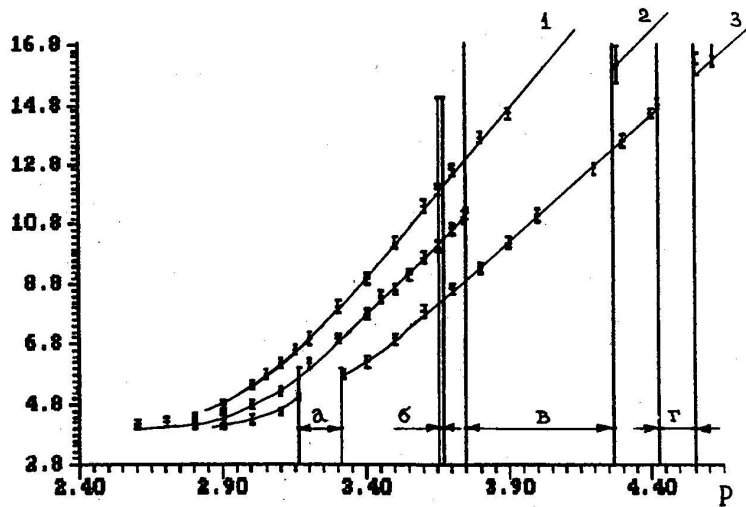


Рис.6. Зависимости  $\text{Ln}[\langle n \rangle]$  для ПХ в отображении (7) при различных величинах асимметрии нелинейности (6): 1 -  $\alpha = -0.1$ , 2 -  $\alpha = 0.0$ , 3 -  $\alpha = 0.1$ ; вертикальными полосами показаны окна периодичности: а -  $\Delta_1$  ( $\alpha = 0.1$ ), б -  $\Delta_2$  ( $\alpha = -0.1$ ), в -  $\Delta_3$  ( $\alpha = 0.0$ ), г -  $\Delta_4$  ( $\alpha = 0.1$ )

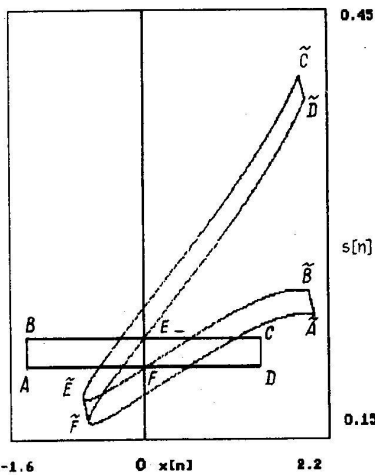


Рис.7. Преобразование отображением (7) узкого прямоугольника  $ABCD = \{x \in [-1.4; 1.4], s \in [0.2; 0.22]\}$  в криволинейный прямоугольник  $A'B'C'D'$  ( $\omega_0^2 = 0.56$ ,  $\gamma = 0.85$ ,  $H = 0.0$ ,  $p = 4.0$ )

узких горизонтальных прямоугольников (рис.7). При увеличении управляющего параметра (коэффициента усиления АПХ) плотность этой "стохастической сети" растет, что вызывает рост среднего времени жизни ПХ. При нарушении симметрии характеристики нелинейности в недрах стохастического множества может рождаться аттрактор (странный, либо, как в случае отображения (7), регулярный), и тогда система будет демонстрировать ПХ гранично-кризисного типа.

3) экспериментально установлено существование бескризисного ПХ с экспоненциальной зависимостью среднего времени жизни от управляющего параметра  $p$ :  $\tau(p) = \tau_0 \exp[C_0 p]$ ;

4) построено двумерное неважнооднозначное отображение, демонстрирующее бескризисный ПХ.

Анализ результатов натурального и численного исследования АПХ с нелинейностью, близкой к четной, позволяет составить следующую правдоподобную картину возникновения ПХ. Благодаря неважнооднозначности и симметричности характеристики нелинейности в фазовом пространстве системы возникает сложно устроенное стохастическое множество (типа гомоклиной структуры или подковы Смейла), отделяющее устойчивое положение равновесия от неустойчивой бесконечности и вызывающее ПХ бескризисного типа. Подтверждением этому может служить характер преобразования отображением (7)



Вывод отображения (7)

Отображение (7) получается в приближении сильной диссипации:  $\gamma \gg 1$  из следующей эквивалентной уравнению (5) системы уравнений [8]

$$\begin{cases} \epsilon \dot{x}(t) = f[x(t-1)] - \{kx(t) + s(t)\}, \\ \dot{s}(t) = \omega_0^2 \epsilon x(t), \end{cases}$$

где  $\epsilon = 1/K$ ,  $k = 2\gamma\epsilon$ . Действительно, перепишем первое уравнение этой системы, сгруппировав в левой его части члены, линейные по  $x(t)$ ,

$$\dot{x}(t) + 2\gamma x(t) = K[f[x(t-1)] - s(t)]$$

( $K$  - то же, что и в (5)), и введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} x_n(\eta) &\equiv x(n + \eta), \quad x_n \equiv x(t \equiv n); \\ s_n(\eta) &\equiv s(n + \eta), \quad s_n \equiv s(t \equiv n). \end{aligned}$$

С учетом того, что отклик  $h(\xi)$  на  $\delta$ -импульс левой части последнего уравнения равен  $\exp[-2\gamma\xi]$ , получим с помощью интеграла Дюамеля систему уравнений

$$\begin{cases} x_n(\eta) = x_n \exp[-2\gamma\eta] + K \int_0^\eta [f[x_n(\xi-1)] - s_n(\xi)] \exp[2\gamma(\xi-\eta)] d\xi, \\ s_n(\eta) = s_n + \omega_0^2 \epsilon \int_0^\eta x_n(\xi) d\xi. \end{cases}$$

Для  $\eta = t_{зад} = 1$  последнюю систему можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} x_{n+1} = qx_n + K[I_1 - I_2], \\ s_{n+1} = s_n + \omega_0^2 I_3, \end{cases} \quad (\text{П.1})$$

где  $q = h(1) \equiv \exp[-2\gamma]$ ,  $I_1 \equiv \int_0^1 f[x_n(\xi-1)] \exp[2\gamma(\xi-1)] d\xi$

$$I_2 \equiv \int_0^1 s_n(\xi) \exp[2\gamma(\xi-1)] d\xi, \quad I_3 \equiv \int_0^1 \epsilon x_n(\xi) d\xi.$$

В случае сильной диссипации ( $2\gamma \gg 1$ ) ядро  $h(\xi)$  интеграла Дюамеля является быстро затухающей функцией, существенно отличной от нуля лишь в малой окрестности  $\xi=0$ . Вследствие этого допустимы следующие оценки интегралов  $I_1$ ,  $I_2$ :

$$I_1 = \int_0^1 f[x_n(0)] \exp[2\gamma(\xi-1)] d\xi \equiv f[x_n] (1-q), \quad (\text{П.2})$$

$$I_2 = \int_0^1 s_n(1) \exp[2\gamma(\xi-1)] d\xi \equiv s_{n+1} (1-q). \quad (\text{П.3})$$

Последняя оценка особенно хорошо "работает" в приближении квазистатистичности  $s(t)$  (по сравнению с  $x(t)$ ) при  $\omega_0^2 \ll 1$ . Для получения из системы (П.1) искомого отображения, воспользуемся следующей аппроксимацией  $I_3$ :

$$I_3 = \varepsilon \frac{1}{2} [x_n + x_{n+1}] . \quad (\text{П.4})$$

Подстановка формул (П.2)-(П.4) в уравнения (П.1) дает следующее двумерное отображение:

$$\begin{cases} \bar{x} = qx + \tilde{B} [f(x) - \bar{s}] , \\ \bar{s} = s + \tilde{C} [x + \bar{x}] , \end{cases} \quad (\text{П.5})$$

где  $\tilde{B} \equiv K(1-q) \gg 1$ ,  $\tilde{C} \equiv \frac{1}{2} \omega_0^2 \varepsilon \ll 1$ . Искомое отображение (7) получается из системы (П.5) после подстановки в первое уравнение второго и приведения коэффициентов при подобных членах.

#### Библиографический список

1. Grebogi C., Ott E., Yorke J.A. Crisis, sudden changes in chaotic attractors and transient chaos//Physica D. 1983. Vol.7, N 1. P.181.
2. Grebogi C., Ott E., Yorke J.A. Critical exponent of chaotic transients in nonlinear dynamical systems//Phys. Rev. Lett. 1986. Vol.57, N 11. P.1284.
3. Пиковский А.С., Рожественский В.В. Размерность и время переходного процесса при переходах типа кризис в хаосе//ЖТФ. 1987. Т.57, N 1. С.1401.
4. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972.
5. Палис Ж.В., ду Мелу. Геометрическая теория динамических систем. М.: Мир, 1986.
6. Берже П., Помо И., Вигаль К. Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991.
7. Рожественский В.В., Стручков И.Н.//Тез. докл. конф. "Радиофизическая информатика", 27-29 нояб. 1990 г. М., 1990.
8. Рожественский В.В., Стручков И.Н. Переходный хаос в автогенераторе стохастических колебаний с жестким возбуждением и четной нелинейностью//ЖТФ. 1992, N 8 (в печати).
9. Закс Л. Статистическое оценивание/Пер. с нем. М.: Статистика, 1976.

Московский физико-технический институт  
Долгопрудный

#### CHAOTIC TRANSIENTS IN SYSTEMS WITH NEARLY EVEN NONLINEARITY

V.V. Rozhdestvensky, I.N. Struchkov

We study the chaotic transients observed in radiophysical autogenerators with many degrees of freedom and nearly even nonlinearity. The existence of chaotic transients, associated with the boundary crisis and earlier observed in one- and two-dimensional maps, was experimentally confirmed for the first time in such systems. There were also discovered the chaotic transients of a new type (so-called "uncrisis" chaotic transients), whose average lifetime depends upon the system parameter  $p$  (autogenerators amplifying factor) via  $\tau(p) = \tau_0 \exp(c_0 p)$ , with  $\tau_0$ ,  $c_0$  - some constants. The two-dimensional non one-to-one map is examined, which demonstrated uncrisis chaotic transients. Such maps were unknown earlier.