

**ИНВАРИАНТНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА  
ЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ  
ХАОТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ**

*А.Ф. Голубенцев*, *В.М. Аникин*

Показано, что нахождение конечного числа собственных функций оператора Перрона – Фробениуса отображения Реньи  $x_{n+1} = \beta x_n \bmod 1$  (в случае равенства вещественного коэффициента числу Фидия  $\beta = \Phi = (1 + \sqrt{5})/2$ ), а также связанных с этим оператором модифицированного эволюционного оператора и оператора Перрона – Фробениуса сопряженного отображения основано на последовательном построении конечномерных инвариантных функциональных подпространств для этих операторов.

**Введение**

Хаотические отображения (нелинейные разностные уравнения со случайными начальными условиями) представляют интерес как простые модельные объекты при решении ряда естественнонаучных задач, в том числе как генераторы шумоподобных сигналов, кодирующих конфиденциальные сообщения (особенно в формате двумерных и трехмерных отображений). Ряд важных свойств отображений определяется видом собственных функций ассоциированного линейного оператора Перрона – Фробениуса и значениями собственных чисел. Сложность задачи нахождения этих характеристик определяется в первую очередь видом отображения. Для симметричных отображений типа сдвигов Бернулли и полученных из него простыми преобразованиями отдельных ветвей новых отображений, собственные функции оператора Перрона – Фробениуса являются полиномами Бернулли (комбинацией полиномов Бернулли и Эйлера) [1]. Для кусочно-линейных отображений, не все ветви которых переводят свои отрезки задания целиком в полную область определения отображения (как правило, единичный интервал), задача нахождения собственных функций в достаточно общем виде еще не решалась. В этой работе развивается аналитический метод нахождения собственных функций оператора Перрона – Фробениу-

са кусочно-линейного  $\Phi$ -отображения, в определение которого входит число Фидия  $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$ ,

$$x_{n+1} = \{\beta x_n\} = \begin{cases} \beta x_n, & 0 \leq x_n \leq \beta^{-1} \\ \beta x_n - 1, & \beta^{-1} < x_n \leq 1 \end{cases} = \quad (1)$$

$$= (\beta x_n) \cdot \mathbf{1}(0 \leq x_n \leq \beta^{-1}) + (\beta x_n - 1) \cdot \mathbf{1}(\beta^{-1} < x_n \leq 1).$$

Символ  $\{\}$  в (1) означает выделение дробной части числа, а иррациональный коэффициент  $\beta = \Phi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1,618$  представляет собой одно из чисел Фидия. Мы сохраняем в записи отображения коэффициент  $\beta$  [2-6], поскольку число Фидия – это лишь одно из возможных значений [6], при котором отображение (1) сохраняет эргодические и перемешивающие свойства [2,3]. Отображение (1) состоит из двух линейных ветвей, из которых только одна переводит область задания  $(0, \beta^{-1})$  на единичный интервал. При записи  $\Phi$ -отображения (1) использованы индикаторные функции отдельных отрезков (интервалов) единичного интервала области определения (1) – соответственно  $(0, \beta^{-1})$  и  $(\beta^{-1}, 1)$ . Индикаторная функция отрезка (например,  $[a, b]$ ) определяется как единично-нулевая функция вида

$$\mathbf{1}(a \leq x \leq b) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases} \quad (2)$$

Оператор Перрона – Фробениуса, ассоциированный с рассматриваемым отображением, имеет вид [4]:

$$Pf(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \left( f\left(\frac{x}{\beta}\right) + f\left(\frac{x+1}{\beta}\right) \right), & 0 \leq x \leq \beta^{-1}, \\ \frac{1}{\beta} f\left(\frac{x}{\beta}\right), & \beta^{-1} < x \leq 1 \end{cases} = \quad (3)$$

$$= \frac{1}{\beta} \left( f\left(\frac{x}{\beta}\right) + f\left(\frac{x+1}{\beta}\right) \cdot \mathbf{1}(0 \leq x \leq \beta^{-1}) \right).$$

Предлагаемый метод нахождения собственных функций оператора (3) заключается в построении конечномерных инвариантных подпространств в функциональном пространстве, соотнесенном с эволюционным оператором, и последующем переходе в этих подпространствах к новому базису. Показано, что собственные числа эволюционного оператора являются знакопеременными отрицательными степенями числа Фидия, а собственные функции представляют собой кусочно-степенные функции, терпящие разрыв первого рода в точке золотого сечения  $1/\Phi = 1 - \Phi \approx 0.618$ . Аналогичную структуру сохраняют собственные числа и собственные функции модифицированного оператора Перрона – Фробениуса и эволюционного оператора сопряженного (к  $\Phi$ -отображению) хаотического преобразования, обладающего равномерным инвариантным распределением (в последнем случае собственные функции терпят разрыв в точке  $1/(1 + \Phi^{-2}) \approx 0.724$ .

## 1. Четырехмерное инвариантное функциональное подпространство

Введем следующие обозначения:  $\psi_n(x)$  –  $n$ -я собственная функция оператора Перрона – Фробениуса  $\Phi$ -отображения,  $\lambda_n$  –  $n$ -е собственное число, соответствующее  $\psi_n(x)$ , ( $n$  изменяется от 0 до  $\infty$ , значению  $n = 0$  отвечает инвариантная плотность).

Рассмотрим результат действия оператора (3) на ряд функций – индикаторную функцию  $\mathbf{1}$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) единичного интервала (0,1), индикаторную функцию  $\Theta(x) = \mathbf{1}$  ( $0 \leq x \leq \beta^{-1}$ ) =  $1 - \mathbf{1}$  ( $\beta^{-1} < x \leq 1$ ) интервала (0,  $\beta^{-1}$ ), независимую переменную  $x$  и комбинацию функций  $x\Theta(x)$ . Соответственно, получим

$$P\mathbf{1} (0 \leq x \leq 1) = \beta^{-1} \cdot \mathbf{1} (0 \leq x \leq \beta) + \beta^{-1} \cdot \mathbf{1} (-1 \leq x \leq \beta^{-1}) \cdot \mathbf{1} (0 \leq x \leq \beta^{-1}), \quad (4)$$

$$P\Theta(x) = \beta^{-1} \mathbf{1} (0 \leq x \leq 1), \quad (5)$$

$$Px = \beta^{-2}x + \beta^{-2}(x+1)\Theta(x) = \beta^{-2}\Theta(x) + \beta^{-2}x + \beta^{-2}x\Theta(x), \quad (6)$$

$$Px\Theta(x) = \beta^{-2}x\Theta\left(\frac{x}{\beta}\right) + \beta^{-2}(x+1)\Theta\left(\frac{x+1}{\beta}\right)\Theta(x) = \beta^{-2}x. \quad (7)$$

Анализируя структуру соотношений (4)-(7), можно сделать вывод, что индикаторная функция единичного отрезка  $\mathbf{1}(x)$ , индикаторная функция  $\Theta(x)$ , линейные функции  $x$  и  $x\Theta(x)$  могут рассматриваться как неортогональный базис четырехмерного инвариантного подпространства интегрируемых функций (линейной оболочки над полем вещественных чисел, порожденной этими векторами) эволюционного оператора. В этой связи целесообразнее перейти к матричной записи уравнений (4)-(7):

$$P \begin{vmatrix} \mathbf{1} \\ \Theta(x) \\ x \\ x \cdot \Theta(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta^{-1} & \beta^{-1} & 0 & 0 \\ \beta^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{-2} & \beta^{-2} & \beta^{-2} \\ 0 & 0 & \beta^{-2} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{1} \\ \Theta(x) \\ x \\ x \cdot \Theta(x) \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} \mathbf{1} \\ \Theta(x) \\ x \\ x \cdot \Theta(x) \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Здесь введена матрица линейного преобразования (3) в базисе  $\mathbf{1}(x)$ ,  $\Theta(x)$ ,  $x$  и  $x\Theta(x)$ :

$$A = \begin{vmatrix} \beta^{-1} & \beta^{-1} & 0 & 0 \\ \beta^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{-2} & \beta^{-2} & \beta^{-2} \\ 0 & 0 & \beta^{-2} & 0 \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Характеристический многочлен матрицы  $A$  имеет вид:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \beta^{-1} & -\beta^{-1} & 0 & 0 \\ -\beta^{-1} & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\beta^{-2} & \lambda - \beta^{-2} & -\beta^{-2} \\ 0 & 0 & -\beta^{-2} & \lambda \end{vmatrix} = \quad (10)$$

$$= (\lambda - 1) (\lambda + \beta^{-2}) (\lambda - \beta^{-1}) (\lambda + \beta^{-3}).$$

Корни характеристического многочлена являются характеристическими числами матрицы  $A$  (то есть собственными числами оператора Перрона – Фробениуса). Приравнявая (10) нулю, получим значения собственных чисел:

$$\lambda_0 = 1, \lambda_1 = -\beta^{-2}, \lambda_2 = \beta^{-1}, \lambda_3 = -\beta^{-3}. \quad (11)$$

Собственное число  $\lambda_0 = 1$  соответствует собственной функции в форме инвариантной плотности отображения.

## 2. Аналитический расчет первых четырех собственных функций

Осуществим теперь переход от базиса  $\mathbf{1}(x), \Theta(x), x, x\Theta(x)$  к новому базису, состоящему из четырех собственных функций  $\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x)$  оператора Перрона – Фробениуса. Для этого необходимо [7] осуществить преобразование подобия

$$A = T^{-1} \Lambda T. \quad (12)$$

Здесь  $T$  – невырожденная матрица перехода к новому базису, определяющая преобразование

$$\| \psi_0(x) \ \psi_1(x) \ \psi_2(x) \ \psi_3(x) \|' = T \| \mathbf{1} \ \Theta(x) \ x \ x\Theta(x) \|', \quad (13)$$

$T^{-1}$  матрица, обратная матрице  $T$ , а  $\Lambda$  – диагональная матрица, описывающая в новом базисе линейные преобразования базисных векторов под действием оператора эволюции. В силу того, что базис составляется из собственных функций оператора, матрица  $\Lambda$  состоит из собственных чисел (11), являющихся инвариантами при преобразованиях подобия [7,8].

Задача диагонализации предопределяет вид матрицы  $T^{-1}$ : она должна состоять из собственных векторов матрицы  $A$ , удовлетворяющих условию  $Ab_i = \lambda_i b_i$ . Найдя эти векторы, можно посредством обращения  $T^{-1}$  найти матрицу  $T$  и, тем самым, решить поставленную задачу.

Для нахождения же собственных векторов матрицы  $A$ , согласно [7], прежде всего нужно построить так называемую присоединенную матрицу  $B(\lambda) = \|b_{ik}(\lambda)\|$ , элементы которой  $b_{ik}(\lambda)$  являются алгебраическими дополнениями величин  $\lambda\delta_{ki} - a_{ki}$  в определителе (10). Эффективный способ вычисления элементов  $b_{ik}(\lambda)$  связан с представлением присоединенной матрицы  $B(\lambda)$  через характеристический многочлен (10). Найдём отношение разности  $\Delta(\lambda) - \Delta(\mu)$  к разности  $\lambda - \mu$

$$\delta(\lambda, \mu) = \frac{\Delta(\lambda) - \Delta(\mu)}{\lambda - \mu} = \mu + (\lambda - \beta^{-1}). \quad (14)$$

Тогда присоединенная матрица [7]

$$B(\lambda) = \delta(\lambda E, A). \quad (15)$$

Подставляя в (14) вместо  $\lambda$  и  $\mu$  матрицы  $\lambda E$  и  $A$ , соответственно, получим из (15)

искомую присоединенную матрицу

$$\begin{aligned}
 & B(\lambda) = \\
 & \begin{array}{cccc}
 \lambda^3 - \beta^{-2}\lambda^2 - \beta^{-4}\lambda & \beta^{-1}\lambda^2 - \beta^{-3}\lambda - \beta^{-5} & 0 & 0 \\
 \beta^{-1}\lambda^2 - \beta^{-3}\lambda - \beta^{-5} & \lambda^3 - \lambda^2 + \beta^{-5}\lambda + \beta^{-5} & 0 & 0 \\
 \beta^{-3}\lambda & \beta^{-2}\lambda^2 - \beta^{-3}\lambda & \lambda^3 - \beta^{-1}\lambda^2 - \beta^{-2}\lambda & \beta^{-2}\lambda^2 - \beta^{-3}\lambda - \beta^{-4} \\
 \beta^{-5} & \beta^{-4}\lambda - \beta^{-5} & \beta^{-2}\lambda^2 - \beta^{-3}\lambda - \beta^{-4} & \lambda^3 - \lambda^2 - \beta^{-4}\lambda + \beta^{-4}
 \end{array} . \\
 & \hspace{20em} (16)
 \end{aligned}$$

Замена в (16) величины  $\lambda$  характеристическими числами матрицы  $A$  (11) дает собственные векторы матрицы  $A$  – ими являются ненулевые столбцы матрицы  $B(\tilde{\lambda})$ , если  $\tilde{\lambda}$  – характеристическое число матрицы  $A$  [7].

Для  $\tilde{\lambda} = \lambda_0 = 1$  имеем

$$B_1(\lambda_0 = 1) = 2\beta^{-3} \begin{vmatrix} 1 & \beta^{-1} & 0 & 0 \\ \beta^{-1} & \beta^{-2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\beta^{-1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\beta^{-2} & \frac{1}{2}\beta^{-3} & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

откуда следует, что вектор

$$b_0 = \begin{vmatrix} 1 & \beta^{-1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\beta^{-2} \end{vmatrix}' \quad (17)$$

– первый собственный вектор матрицы  $A$  (второй столбец матрицы  $B(\lambda_0)$  пропорционален первому).

Для  $\tilde{\lambda} = \lambda_1 = -\beta^{-2}$  имеем

$$B(\lambda_1 = -\beta^{-2}) = \beta^{-4} \begin{vmatrix} -\beta^{-2} & \beta^{-1} & 0 & 0 \\ \beta^{-1} & -1 & 0 & 0 \\ -\beta^{-1} & 1 & 0 & 0 \\ \beta^{-1} & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

то есть

$$b_1 = \begin{vmatrix} \beta^{-1} & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}' \quad (18)$$

– второй собственный вектор матрицы  $A$ .

Аналогично, если

$$B(\lambda_2 = \beta^{-1}) = -\beta^{-3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta^{-1} & 0 & 1 & \beta^{-1} \\ -\beta^{-2} & 0 & \beta^{-1} & \beta^{-2} \end{vmatrix},$$

то третий собственный вектор матрицы (9) суть

$$b_2 = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & \beta^{-1} \end{array} \right\|'. \quad (19)$$

Наконец, поскольку

$$B(\lambda_3 = -\beta^{-3}) = -\beta^{-5} \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta^{-1} & -\beta^{-1}(1 + \beta^{-2}) & -2\beta^{-3} & 2\beta^{-2} \\ -1 & (1 + \beta^{-2}) & 2\beta^{-2} & -2\beta^{-1} \end{array} \right\|,$$

то четвертый собственный вектор матрицы (9) определяется как

$$b_3 = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \beta^{-1} & -1 \end{array} \right\|'. \quad (20)$$

Теперь мы можем записать матрицу  $\Gamma^{-1}$ , обратную искомой преобразующей матрице  $\Gamma$ ; последняя матрица обеспечивает переход к базису в виде собственных функций оператора Перрона – Фробениуса. Матрица  $\Gamma^{-1}$  состоит из только что найденных собственных векторов (17)-(20) матрицы (9)

$$\Gamma^{-1} = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & \beta^{-1} & 0 & 0 \\ \beta^{-1} & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & \beta^{-1} \\ \frac{1}{2}\beta^{-2} & -1 & \beta^{-1} & -1 \end{array} \right\|. \quad (21)$$

Матрицу перехода к новому базису  $\Gamma$  будем искать посредством обращения (21):

$$\Gamma = \left\| \begin{array}{cccc} \frac{1}{1 + \beta^{-2}} & \frac{\beta^{-1}}{1 + \beta^{-2}} & 0 & 0 \\ \frac{\beta^{-1}}{1 + \beta^{-2}} & -\frac{1}{1 + \beta^{-2}} & 0 & 0 \\ -\frac{\beta^{-1}}{1 + \beta^{-2}} & 0 & \frac{1}{1 + \beta^{-2}} & \frac{\beta^{-1}}{1 + \beta^{-2}} \\ -\frac{1}{2} \cdot \frac{\beta}{1 + \beta^{-2}} & \frac{1}{2}\beta & \frac{\beta^{-1}}{1 + \beta^{-2}} & -\frac{1}{1 + \beta^{-2}} \end{array} \right\|. \quad (22)$$

Из соотношения

$$\left\| \begin{array}{cccc} \psi_0(x) & \psi_1(x) & \psi_2(x) & \psi_3(x) \end{array} \right\|' = \Gamma \left\| \begin{array}{cccc} 1 & \Theta(x) & x & x\Theta(x) \end{array} \right\|',$$

определяющего переход к новому базису, находятся четыре первые собственные функции оператора Перрона – Фробениуса (3)  $\Phi$ -отображения:

$$\psi_0(x) = \frac{1}{1 + \beta^{-2}} + \frac{\beta^{-1}}{1 + \beta^{-2}} \cdot \Theta(x), \quad (23)$$

$$\psi_1(x) = \frac{\beta^{-1}}{1 + \beta^{-2}} - \frac{1}{1 + \beta^{-2}} \cdot \Theta(x), \quad (24)$$

$$\psi_2(x) = -\frac{\beta^{-1}}{1 + \beta^{-2}} + \frac{1}{1 + \beta^{-2}} \cdot x + \frac{\beta^{-1}}{1 + \beta^{-2}} \cdot x\Theta(x), \quad (25)$$

$$\psi_3(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\beta}{1 + \beta^{-2}} + \frac{\beta}{2} \cdot \Theta(x) + \frac{\beta^{-1}}{1 + \beta^{-2}} \cdot x - \frac{1}{1 + \beta^{-2}} \cdot x\Theta(x). \quad (26)$$

Собственные функции (23), (24) являются кусочно-постоянными, а функции (25) и (26) – кусочно-линейными (рис. 1). Правильность проведенных расчетов легко проверяется действием оператора Перрона – Фробениуса на функции (23)-(26).

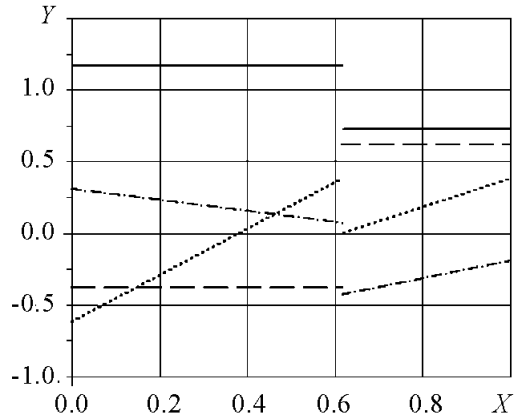


Рис. 1. Кусочно-постоянные и кусочно-линейные собственные функции оператора Перрона – Фробениуса  $\Phi$ -отображения

### 3. Обсуждение результатов и обобщения

Увеличивая размерность инвариантных функциональных подпространств, теоретически можно ставить задачу о нахождении счетного множества собственных функций оператора Перрона – Фробениуса и соответствующих собственных чисел. Успех решения задачи связан с преодолением сложности математических преобразований, серьезно возрастающей с ростом порядка матрицы линейных преобразований  $A$ .

Можно предложить три направления, облегчающие решение сформулированной задачи:

1) переход к модифицированному оператору Перрона – Фробениуса (по инвариантной мере), связанному с определенным выше оператором Перрона – Фробениуса (3) (по мере Лебега) соотношением [9-11]

$$Ug(x) = \frac{1}{\psi_0(x)} P(\psi_0(x)g(x)); \quad (27)$$

2) применение метода неопределенных коэффициентов;

3) построение производящих функций для собственных функций операторов (3) и (27).

Последовательно оценим перспективы этих направлений. Нетрудно увидеть, что инвариантным для оператора (27) является равномерное распределение, собственные числа операторов (3) и (27) совпадают, а собственные функции связаны соотношением:  $\psi_k(x) = \psi_0(x)\psi_{(U),k}(x)$ , где  $\psi_{(U),k}(x)$  – собственные функции модифицированного оператора. Преимуществом «работы» с оператором (27) является более «приятный» вид матриц, возникающих при описанных выше преобразованиях – они являются нижними треугольными матрицами. В результате описывавшихся

уже действий можно получить (при введении шестимерного инвариантного функционального пространства) дополнительные собственные числа  $\lambda_4 = \beta^{-2}$ ,  $\lambda_5 = -\beta^{-4}$  и соответствующие собственные функции оператора Перрона – Фробениуса:

$$\lambda_4 = \beta^2, \quad \tilde{\psi}_4(x) = \frac{1}{2}\beta^{-1} - \frac{1}{2}\beta^{-2}\Theta(x) - 2\beta^{-1}x + 2\beta^{-3}x\Theta(x) + x^2; \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_5(x) = & -\frac{2\beta^2}{3(1+\beta^{-2})} + \frac{2}{1+\beta^{-2}}\Theta(x) + \frac{\beta^2}{1+\beta^{-2}}x - \\ & -\frac{2\beta}{1+\beta^{-2}}x\Theta(x) - \frac{1}{1+\beta^{-2}}x^2 + x^2\Theta(x). \end{aligned} \quad (29)$$

Тем не менее, расчетная процедура остается сложной, но благодаря ей выявляется общая структура собственных чисел и собственных функций: собственные числа – это знакопеременные величины в виде отрицательных степеней числа Фидия, а собственные функции являются кусочно-степенными с разрывом в точке золотого сечения.

Имея такую конструктивную гипотезу, ее можно проверить, используя метод неопределенных коэффициентов. Поясним идею этого метода на тестовом примере, подтвердив полученные выше результаты для четырех собственных функций (на основе знания собственных чисел). Будем искать собственные функции в виде следующих представлений:

$$\psi_n(x) = \mu_1^{(n)} + \mu_2^{(n)}\Theta(x) + \mu_3^{(n)}x + \mu_4^{(n)}x\Theta(x), \quad n = 0, 1, 2, 3. \quad (30)$$

Неизвестные коэффициенты  $\mu_k^{(n)}$  для  $n = 0, 1, 2, 3$ ;  $k = 1, 2, 3, 4$  найдем из уравнения, определяющего собственные числа и функции оператора Перрона – Фробениуса  $\Phi$ -отображения (4.6):

$$P\psi_n(x) = \lambda_n\psi_n(x).$$

При действии оператора Перрона – Фробениуса (3) на функции вида (30) возникают следующие уравнения ( $n = 0, 1, 2, 3$ ):

$$\begin{aligned} P\psi_n(x) = \lambda_n \left( \mu_1^{(n)} + \mu_2^{(n)}\Theta(x) + \mu_3^{(n)}x + \mu_4^{(n)}x\Theta(x) \right) & \equiv \\ \equiv \left( \mu_1^{(n)} + \mu_2^{(n)} \right) \beta^{-1} + \left( \mu_1^{(n)}\beta^{-1} + \mu_3^{(n)}\beta^{-2} \right) \Theta(x) + \left( \mu_3^{(n)} + \mu_4^{(n)} \right) \beta^{-2}x + \mu_3^{(n)}\beta^{-2}x\Theta(x) & \equiv \\ \equiv \lambda_n \left( \frac{\left( \mu_1^{(n)} + \mu_2^{(n)} \right) \beta^{-1}}{\lambda_n} + \frac{\left( \mu_1^{(n)}\beta^{-1} + \mu_3^{(n)}\beta^{-2} \right)}{\lambda_n} \Theta(x) + \right. & \\ \left. + \frac{\left( \mu_3^{(n)} + \mu_4^{(n)} \right) \beta^{-2}}{\lambda_n} x + \frac{\mu_3^{(n)}\beta^{-2}}{\lambda_n} x\Theta(x) \right). & \end{aligned}$$



Приравнивая коэффициенты при 1,  $\Theta(x)$ ,  $x$ ,  $x\Theta(x)$ , найдем следующие непротиворечивые выражения для искомым коэффициентов  $\mu_k^{(n)}$ :

$$\begin{aligned} \lambda_0 = 1 : \quad & \mu_1^{(0)} = \frac{1}{1 + \beta^{-2}}, \quad \mu_2^{(0)} = \beta^{-1}\mu_1^{(0)}, \quad \mu_3^{(0)} = \mu_4^{(0)} = 0; \\ \lambda_1 = \beta^{-1} : \quad & \mu_1^{(1)} = -\mu_4^{(1)}, \quad \mu_2^{(1)} = 0, \quad \mu_3^{(1)} = \beta\mu_4^{(1)}, \quad \mu_4^{(1)} = 1; \\ \lambda_2 = -\beta^{-2} : \quad & \mu_1^{(2)} = 1, \quad \mu_2^{(2)} = -\beta, \quad \mu_3^{(2)} = \mu_4^{(2)} = 0; \\ \lambda_3 = -\beta^{-3} : \quad & \mu_1^{(3)} = \frac{\beta}{2}, \quad \mu_2^{(3)} = -\frac{\beta + \beta^{-1}}{2}0, \quad \mu_3^{(3)} = -\beta^{-1}, \quad \mu_4^{(3)} = 1. \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в (30), придем к выражениям (23)-(26). Можно проводить дальнейшие обобщения, повышая степень независимой переменной в (30) и увеличивая число слагаемых вида  $x^n$  и  $\Theta x^n$  с неопределенными коэффициентами. При этом будет повышаться размерность системы линейных алгебраических уравнений, необходимых для нахождения численных значений коэффициентов  $\mu_k^{(n)}$ .

Возникает вопрос, а нельзя ли создать некий «самораспаковывающийся архив», который в компактной форме содержал бы (и генерировал!) значения собственных функций и собственных чисел оператора? Речь идет о производящей функции для собственных функций и собственных чисел оператора [1]. К этому вопросу (в случае Ф-отображения) мы надеемся обратиться специально. А сейчас просто продемонстрируем реальность этой идеи (указав вид производящих функций) для двух пилообразных отображений (с нечетным и четным числом ветвей), полученных инверсией четных ветвей из сдвигов Бернулли  $x_{n+1} = Mx_n \bmod 1$  ( $M$  – целое число). Для этого введем производящие функции для полиномов Бернулли  $B_k(x)$  и Эйлера  $E_k(x)$  [12], соответственно

$$B(x, t) = \frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x) \frac{t^k}{k!}, \quad (31)$$

$$E(x, t) = \frac{2e^{xt}}{e^t + 1} = \sum_{k=0}^{\infty} E_k(x) \frac{t^k}{k!}, \quad (32)$$

( $t$  – параметр). Нам понадобятся выражения для производящих функций полиномов Бернулли с четными номерами и полиномов Эйлера с нечетными номерами

$$B_e(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k}(x) \frac{t^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{2} (B(x, t) + B(x, -t)) = \frac{(t/2)}{\text{sh}(t/2)} \text{ch}(x - 1/2)t, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} E_o(x, t) &= E(x, t) - E(x, -t) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E_{2k+1}(x) \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{t/2}{\text{sh}(t/2)} \text{sh}(x - 1/2)t. \end{aligned} \quad (34)$$

Рассмотрим два отображения

$$\begin{aligned}
x_{n+1} = \phi_1(x_n) &= 5x_n \mathbf{1}(0 \leq x_n < 1/5) + (2 - 5x_n) \mathbf{1}(1/5 \leq x_n < 2/5) + \\
&+ (5x_n - 2) \mathbf{1}(2/5 \leq x_n < 3/5) + (4 - 5x_n) \mathbf{1}(3/5 \leq x_n < 4/5) + \\
&+ (5x_n - 4) \mathbf{1}(4/5 \leq x_n \leq 1),
\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
x_{n+1} = \phi_2(x_n) &= 6x_n \mathbf{1}(0 \leq x_n < 1/6) + (2 - 6x_n) \mathbf{1}(1/6 \leq x_n < 1/3) + \\
&+ (6x_n - 2) \mathbf{1}(1/3 \leq x_n < 1/2) + (4 - 6x_n) \mathbf{1}(1/2 \leq x_n < 2/3) + \\
&+ (6x_n - 4) \mathbf{1}(2/3 \leq x_n < 5/6) + (6 - 6x_n) \mathbf{1}(5/6 \leq x_n < 1),
\end{aligned}$$

соответственно характеризующие операторами Перрона – Фробениуса

$$P_1 f(x) = \frac{1}{5} \left( f\left(\frac{x}{5}\right) + f\left(\frac{2-x}{5}\right) + f\left(\frac{2+x}{5}\right) + f\left(\frac{4-x}{5}\right) + f\left(\frac{4+x}{5}\right) \right), \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
P_2 f(x) &= \frac{1}{6} \left( f\left(\frac{x}{6}\right) + f\left(\frac{2-x}{6}\right) + f\left(\frac{2+x}{6}\right) + f\left(\frac{4-x}{6}\right) + \right. \\
&\left. + f\left(\frac{4+x}{6}\right) + f\left(\frac{6-x}{6}\right) \right).
\end{aligned} \tag{37}$$

Поддействовав оператором (37) на функцию (33) с аргументом  $x/2$  и используя элементарные свойства гиперболических функций, найдем

$$P_2 B_e(x/2, t) = \frac{t/12}{\text{sh}(t/12)} \text{ch}((x - 1/2)(t/12)) = B_e(x/2, t/6),$$

а это означает, что собственными функциями оператора Перрона – Фробениуса (37) являются полиномы Бернулли  $B_{2k}(x/2)$  с собственными числами  $\lambda_k = 1/6^{2k}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Аналогично, действуя оператором (36) на функции (33) и (34), получим

$$P_1 B_e(x, t) = \frac{t/10}{\text{sh}(t/10)} \text{ch}((x - 1/2)(t/5)) = B_e(x, t/5), \tag{38}$$

$$P_1 E_o(x, t) = \frac{1}{5} \frac{1}{\text{ch}(t/10)} \text{sh}((x - 1/2)t/5) = \frac{1}{5} E_o(x, t/5). \tag{39}$$

Результаты (38) и (39) означают, что собственными функциями оператора Перрона – Фробениуса (36) являются четные (по порядку) полиномы Бернулли и нечетные полиномы Эйлера. Собственные числа  $\lambda_k = 1/5^{2k}$  имеют кратность 2. Собственные числа становятся простыми для отображения, инверсного (35) ( $\tilde{\phi}_1(x_n) = 1 - \phi_1(x_n)$ ), поскольку в этом случае собственные числа становятся знакопеременными.

#### 4. Зачем радиофизику оператор Перрона – Фробениуса

Спектральные характеристики оператора Перрона – Фробениуса определяют перемешивающие свойства отображения, другими словами, скорость установления в системе равновесного распределения и расщепления корреляций. Продемонстрируем значимость первых собственных функций этого оператора на примере хаотического отображения, сопряженного  $\Phi$ -отображению, то есть полученного из него посредством кусочно-линейной замены переменной

$$x = \begin{cases} \beta^{-1} (1 - \beta^{-2}) \alpha, & 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{1 + \beta^{-2}}, \\ (1 + \beta^{-2}) \alpha - \beta^{-2}, & \frac{1}{1 + \beta^{-2}} < \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (40)$$

Данная замена переменной приводит к кусочно-линейному отображению, имеющему равномерное инвариантное распределение

$$\alpha_{n+1} = g(\alpha_n) = \begin{cases} \beta \alpha_n, & 0 \leq \alpha_n \leq \frac{\beta^{-1}}{1 + \beta^{-2}}, \\ \alpha_n + \frac{\beta^{-2}}{1 + \beta^{-2}}, & \frac{\beta^{-1}}{1 + \beta^{-2}} < \alpha_n \leq \frac{1}{1 + \beta^{-2}}, \\ \beta^2 \alpha_n - \frac{\beta^2}{1 + \beta^{-2}}, & \frac{1}{1 + \beta^{-2}} < \alpha_n \leq 1. \end{cases} \quad (41)$$

Не представляет труда записать оператор Перрона – Фробениуса для (41):

$$P_g f(\alpha) = f\left(\alpha - \frac{\beta^{-2}}{1 + \beta^{-2}}\right) + \left(\beta^{-1} f(\beta^{-1}\alpha) + \beta^{-2} f\left(\beta^{-2}\alpha - \frac{1}{1 + \beta^{-2}}\right) - f\left(\alpha - \frac{\beta^{-2}}{1 + \beta^{-2}}\right)\right) \cdot \Theta_1(\alpha), \quad (42)$$

где  $\Theta_1(\alpha) = \mathbf{1}\left(0 \leq \alpha \leq \frac{1}{1 + \beta^{-2}}\right)$ .

Собственные числа сопряженных отображений являются инвариантами, а собственные функции пересчитываются с учетом (40) по четкому правилу [1]. Поэтому первые собственные функции для оператора (42) будут иметь вид

$$\lambda_0 = 1, \quad \psi_0(\alpha) = 1, \quad (43)$$

$$\lambda_1 = -\beta^{-2}, \quad \psi_1(\alpha) = (1 - (1 + \beta^{-2}) \Theta(\alpha)), \quad (44)$$

$$\lambda_2 = \beta^{-1}, \quad \psi_2(\alpha) = \left(-\frac{1}{1 + \beta^{-2}} + \frac{\beta^{-1}}{1 + \beta^{-2}} \Theta(\alpha) + \alpha - \beta^{-2} \alpha \Theta(\alpha)\right), \quad (45)$$

$$\lambda_3 = -\beta^{-3}, \quad \psi_3(\alpha) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{1 + \beta^{-2}} + \frac{2}{1 + \beta^{-2}} \Theta(\alpha) + \alpha - 2\beta^{-1} \alpha \Theta(\alpha)\right). \quad (46)$$

Автокорреляционная функция для орбит отображения вычисляется исходя из определения [13]

$$R(n) = \overline{\alpha_n \alpha_0} - \bar{\alpha}_n \cdot \bar{\alpha}_0 = \int_0^1 g^{(n)}(\alpha) \alpha d\alpha - \int_0^1 g^{(n)}(\alpha) d\alpha \int_0^1 \alpha d\alpha, \quad (47)$$

где  $g^{(n)}(\alpha)$  –  $n$ -я итерация отображения. Произведение интегралов в правой части (47) с очевидностью равно  $1/4$  (случайные величины  $\alpha_n$  и  $\alpha_0$  при расчете считаются одинаково распределенными – по инвариантному закону). Полугрупповые свойства дискретных отображений, сохраняющих меру, позволяют представить  $n$ -ю итерацию в форме различных итерационных композиций, в том числе и в виде  $g^{(n)}(\alpha) = g^{(n-1)}(\phi(\alpha))$ ,  $n$ -кратное применение которого в (47) ведет к изящной формуле для расчета автокорреляционной функции

$$R(n) = \int_0^1 \alpha (P_g^n \alpha) d\alpha - \frac{1}{4}. \quad (48)$$

Эта важная формула особенно удобна и полезна, если переменную  $\alpha$  представить в виде линейной комбинации собственных функций оператора Перрона – Фробениуса<sup>1</sup>. Тогда и результат многократного действия этого оператора на переменную  $\alpha$  будет представлять собой линейную комбинацию собственных функций. Выберем для такого представления собственные функции (45) и (46). Пусть

$$\begin{aligned} \alpha = a\psi_2(\alpha) + b\psi_3(\alpha) + c = & \left( -\frac{a}{1+\beta^{-2}} - \frac{b}{2} - \frac{b}{1+\beta^{-2}} + c \right) + \\ & + \frac{\beta^{-1}a + 2b}{1+\beta^{-2}} \Theta(\alpha) + (a+b)\alpha - (\beta^{-2}a + 2\beta^{-1}b)\alpha \Theta(\alpha). \end{aligned} \quad (49)$$

Тогда переменная  $\alpha$  может быть представлена в виде

$$\alpha = \frac{2}{1+\beta^{-2}} \psi_2(\alpha) - \frac{\beta^{-1}}{1+\beta^{-2}} \psi_3(\alpha) + \frac{1}{2}. \quad (50)$$

Теперь легко найти результат многократного действия оператора Перрона – Фробениуса изучаемого отображения на  $\alpha$ :

$$P\alpha = \frac{2}{1+\beta^{-2}} \beta^{-1} \psi_2(\alpha) - \frac{\beta^{-1}}{1+\beta^{-2}} (-\beta^{-3}) \psi_3(\alpha) + \frac{1}{2}. \quad (51)$$

<sup>1</sup>Не менее изящна формула для расчета автокорреляционной функции орбит сопряженного хаотического отображения с неравномерным инвариантным распределением [14]:

$$R(n) = \int_0^1 \alpha P^n h(\alpha) d\alpha - \left( \int_0^1 h(\alpha) d\alpha \right)^2,$$

где  $P$  – оператор отображения с равномерным инвариантным распределением,  $h(\alpha)$  – сопрягающая функция.

$$P^n \alpha = \frac{2\beta^{-n}}{1 + \beta^{-2}} \left( \psi_2(\alpha) - \frac{1}{2} (-1)^n \beta^{-2n-1} \psi_3(\alpha) \right) + \frac{1}{2}. \quad (52)$$

Подстановка (51) в (48) после ряда элементарных вычислений позволяет записать точное выражение для автокорреляционной функции орбит хаотического отображения (41):

$$R(n) = \frac{1}{12(1 + \beta^{-2})^4} \cdot (4\beta^{-1}(1 + \beta^{-7}) + (-1)^n (1 + \beta^{-5})\beta^{-2n}) \beta^{-n}. \quad (53)$$

Часто выражение для автокорреляционной функции  $R(n)$  записывают, вводя ляпуновский показатель  $\Lambda$ . Учитывая, что в нашем случае  $\beta^{-1} = e^{-\Lambda}$ , получим эквивалентную форму записи для (53)

$$R(n) = \frac{1}{12(1 + e^{-2\Lambda})^4} (4(1 + e^{-7\Lambda})e^{-\Lambda} + (-1)^n (1 + e^{-5\Lambda})e^{-2\Lambda n}) e^{-\Lambda n}. \quad (54)$$

Характер затухания нормированной автокорреляционной функции  $r(n) = R(n)/R(0)$  отражает рис. 2. Что касается  $\Phi$ -отображения, выражение для его автокорреляционной функции приведено в [5]:

$$\begin{aligned} r(n) &= \left[ 1 - \frac{\beta^{-1}}{2} (1 - (-1)^n \beta^{-\Lambda n}) \right] \beta^{-\Lambda n} = \\ &= \left[ 1 - \frac{1}{2\beta} (1 - (-1)^n e^{-\Lambda n}) \right] e^{-\Lambda n}. \end{aligned}$$

Для сравнения рядом приводится график функции  $\exp(-\Lambda n)$ . Видно, что динамика расщепления корреляций в динамической системе в форме базового отображения, определяется не только показателем Ляпунова (собственным числом  $\beta^{-1} = e^{-\Lambda}$ ), но и вторым собственным числом  $\beta^{-2} = e^{-2\Lambda}$ .

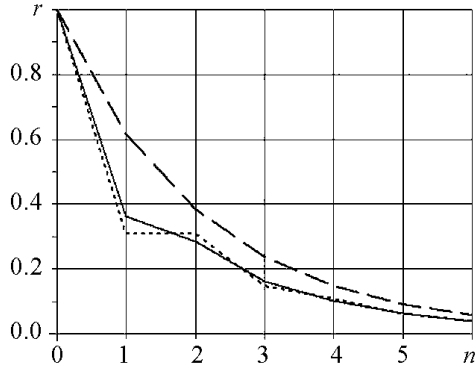


Рис. 2. Автокорреляционная функция орбит  $\Phi$ -отображения (точечная линия) и сопряженного ему отображения с равномерным инвариантным распределением (сплошная линия). Прерывистая линия отражает зависимость  $e^{-\Lambda n}$

### Заключение

В общем контексте нелинейной динамики значимость данной работы состоит в том, что она раскрывает некоторую вычислительную «кухню», связанную с анализом спектральных свойств оператора Перрона – Фробениуса. Знание его собственных чисел и собственных функций позволяет с «открытыми глазами» делать заключения о динамике установления равновесного распределения в динамической системе, прогнозе ее поведения, среднестатистическом характере расщепления корреляций, что в целом способствует полноценному выяснению характеристик хаотических моделей, предлагаемых для аппроксимации различных реальных процессов.

Автор благодарен рецензенту за обсуждение работы.

## Библиографический список

1. Голубенцев А.Ф., Аникин В.М., Аркадакский С.С. О некоторых свойствах оператора Фробениуса-Перрона для сдвигов Бернулли // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 2. С. 67-73.
2. Renyi A. Representation for real numbers and their ergodic properties // Acta. Math. Acad. Sc. Hungar. 1957. Vol. 8. P. 477-493.
3. Рохлин В.А. Точные эндоморфизмы пространства Лебега // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1961. Т. 25. С. 499-530.
4. Гельфонд А.О. Об одном общем свойстве систем счисления // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1959. Т. 23. С. 800-814.
5. Mori H., So B.-Ch., Ose T. Time-correlation functions of one-dimensional transformations // Progress in Theor. Physics. 1981. Vol. 66. No. 4. P. 1266-1283.
6. Аникин В.М., Аркадакский С.С. Кусочно-линейные отображения с неравномерным инвариантным распределением // Радиотехника. 2005. № 4. Специальный выпуск «Ученые России: Александр Федорович Голубенцев». С. 78-85.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с.
8. Окунев Л.Я. Высшая алгебра. М.: Просвещение, 1966. 336 с.
9. Бланк Л.М. Устойчивость и локализация в хаотической динамике. М.: МЦНМО, 2001. 352 с.
10. Lasota A., Mackey M.C. Probabilistic properties of deterministic systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. 360 с.
11. Iosifescu M., Kraaikamp C. Metrical theory of continued fractions. Kluwer Boston Inc., 2002. 346 pp.
12. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970. Гл. 21.
13. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 240 с.
14. Anikin V.M., Goloubentsev A.F. Analysis of biological chaotic rythmes // Proc. SPIE. Complex Dynamics, Fluctuations, Chaos, and Fractals in Biomedical Photonics / Ed. V.V. Tuchin, 2004. Vol. 5330. P. 167-177.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 15.11.2004

## INVARIANT SUBSPACES FOR LINEAR EVOLUTION OPERATORS OF CHAOTIC MAPS

A.F. Goloubentsev, V.M. Anikin

Invariant functional subspaces for the Perron-Frobenius operator of a piece-wise linear chaotic Renyi map is constructed to find its first eigenfunctions.



*Голубенцев Александр Федорович* (1933 – 2003) – доктор физико-математических наук, профессор. Заведовал кафедрой вычислительной физики и автоматизации научных исследований СГУ. Автор 7 монографий, 7 учебных пособий и 150 статей по статистической электронике и радиофизике, нелинейной динамике.



*Аникин Валерий Михайлович* – родился в Аткарске Саратовской области (1947). Окончил Саратовский университет (1970). После окончания СГУ работал в Научно-исследовательском институте механики и физики СГУ, с 1984 года - на кафедре вычислительной физики и автоматизации научных исследований СГУ. Кандидат физико-математических наук, доцент. Область научных интересов - математическое моделирование стохастических и хаотических процессов. Один из авторов монографий «Статистические модели квазирегулярных радиофизических и оптических структур», «Математические модели контактов организма человека с чужеродными агентами», а также учебных пособий по вычислительным методам и программированию. Ученый секретарь докторского диссертационного совета СГУ по специальностям радиофизика, оптика, физика полупроводников и диэлектриков. E-mail: Anikinvm@info.sgu.ru



### **ВЛИЯНИЕ ХАОСА НА ВРЕМЯ УДЕРЖАНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В МАГНИТНОЙ ЛОВУШКЕ**

*В.Б. Байбурин, А.В. Юдин*

Проведено численное моделирование поведения заряженной частицы в магнитном поле ловушки открытого типа. Показана связь между временем удержания заряженной частицы в ловушке и степенью хаотичности ее траектории. На основе исследования фурье-спектров представлены области существования хаотических колебательных режимов. Построены карты динамических режимов в плоскостях фазовых переменных системы.

Идея магнитного удержания плазмы активно исследуется в первую очередь применительно к осуществлению управляемой реакции термоядерного синтеза [1-6 и др.]. Сложный характер переноса частиц и энергии, приводящий к уходу заряженных частиц на стенки камеры до сих пор мало изучен и затрудняет осуществление самоподдерживающейся термоядерной реакции. Для магнитного удержания плазмы применяют так называемые «магнитные ловушки», которые обычно разделяют на открытые, область удержания в которых ограничена в направлении силовых линий магнитного поля, и замкнутые, где область удержания имеет форму тора. Традиционные достоинства открытых ловушек – простота геометрии, возможность получения высокого давления плазмы в умеренном магнитном поле, стационарность и др. [4]. Это позволяет проводить исследования коллективных свойств плазмы в магнитных ловушках открытого типа. Однако малоизученным остается характер отдельных траекторий заряженных частиц в условиях удерживающего магнитного поля.

В известной работе [7] уравнения движения заряда сводятся к одномерному уравнению возмущенного линейного осциллятора. Однако в реальных устройствах траектории зарядов безусловно имеют трехмерный характер. В работе [8] была показана возможность существования хаотических колебательных режимов в системе «заряд в скрещенных электромагнитных полях» в условиях однородного и радиально изменяющегося магнитных полей. В ловушках открытого типа силовые линии



магнитного поля имеют существенно более сложную структуру, поэтому представляет интерес исследование траекторий заряженных частиц в условиях магнитных полей, имеющих место в типичных конструкциях магнитных ловушек.

Движение заряженной частицы в магнитном поле описывается уравнением

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{e}{m}(\mathbf{V} \times \mathbf{B}), \quad (1)$$

где  $\frac{e}{m}$  – заряд и масса исследуемой частицы,  $\mathbf{V}$  – вектор скорости и  $\mathbf{B}$  – вектор индукции магнитного поля. В прямоугольной системе координат  $(x, y, z)$  данное уравнение можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{e}{m}(B_z \frac{dy}{dt} - B_y \frac{dz}{dt}), \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{e}{m}(B_x \frac{dz}{dt} - B_z \frac{dx}{dt}), \\ \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{e}{m}(B_y \frac{dx}{dt} - B_x \frac{dy}{dt}). \end{cases} \quad (2)$$

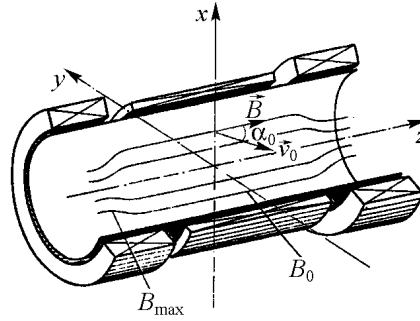


Рис. 1. Постановка моделируемой задачи. В прямоугольной системе координат указаны величина и направление вектора индукции магнитного поля и начальные значения фазовых переменных

Системе (2) соответствует фазовое пространство с переменными  $x, y, z, V_x = dx/dt, V_y = dy/dt, V_z = dz/dt$ . Само магнитное поле в ловушках открытого типа имеет трехмерную пространственную структуру. Типичные силовые линии поля и магнитная система, их формирующая, представлены на рис. 1. Выражения для модуля вектора индукции магнитного поля, соответствующего рисунку, и для угла между вектором индукции  $\mathbf{B}$  и осью  $z$  могут быть записаны следующим образом:

$$|\mathbf{B}| = \begin{cases} B_0, & \text{при } |z| < z_a, \\ B_{\max}, & \text{при } |z| > z_b, \\ B_0 + (B_{\max} - B_0) \frac{|z| - z_a}{z_b - z_a}, & \text{при } z_a < |z| < z_b, \end{cases}$$

$$\hat{(\mathbf{B}, \mathbf{Z})} = -\arctg \left( \pi \frac{C \sin A \sqrt{x^2 + y^2}}{(C \cos A + \frac{B_{\max}}{B_0} + 1)(z_b - z_a)} \right), \quad (3)$$

$$A = \pi \frac{|z| - z_a}{z_b - z_a}, \quad C = \frac{B_{\max}}{B_0} - 1,$$

где  $x, y, z$  – координаты точки пространства, в которой рассчитывается магнитное поле;  $z_a, z_b$  – координаты начала и конца области «магнитного зеркала»;  $B_0$  – значение магнитного поля внутри ловушки;  $B_{\max}$  – значение магнитного поля за пределами ловушки. Для численного решения поставленной задачи и определения величин фазовых переменных использовался метод Рунге – Кутты.

Была рассмотрена система со следующими параметрами:  $B_0 = 0.5$  Тл,  $B_{\max} = 1.0$  Тл, продольный размер ловушки  $h = 0.1$  м. Начальные значения фазовых переменных соответствовали условиям инжекции заряженной частицы в центр магнитной ловушки под углом к линиям магнитного поля ( $x_0 = 0.01$  м,  $y_0 = z_0 = 0$  м,  $Vx_0 = -|\mathbf{V}| \sin \alpha$ ;  $Vy_0 = 0$ ;  $Vz_0 = |\mathbf{V}| \cos \alpha$ ). Значения модуля вектора скорости заряженной частицы  $|\mathbf{V}|$  и угла между вектором скорости и линиями магнитного поля  $\alpha$  варьировались. Соотношение  $\frac{e}{m} = 9.57 \cdot 10^7$ , что соответствует иону водорода.

Типичный вид траекторий заряда представлен на рис. 2. В однородном магнитном поле заряд совершает движения по спирали с радиусом, равным ларморовскому радиусу заряженной частицы. В магнитных ловушках открытого типа магнитное поле неоднородно и возрастает по краям ловушки, в области так называемых магнитных зеркал. При попадании в область магнитных зеркал продольная скорость частицы уменьшается (за счет увеличения перпендикулярной составляющей скорости) и частица либо отражается от магнитного зеркала и движется в обратном направлении, либо покидает магнитную ловушку. Поведение заряженных частиц после отражения от краев магнитной ловушки позволяет разделить их на два больших класса: движущихся по регулярной траектории и движущихся по хаотической траектории. Для регулярных частиц после отражения от магнитного зеркала характеристики траектории (радиус орбиты и траектория центра) практически не изменяются – частица продолжает движение по траектории с прежним ларморовским радиусом и вдоль

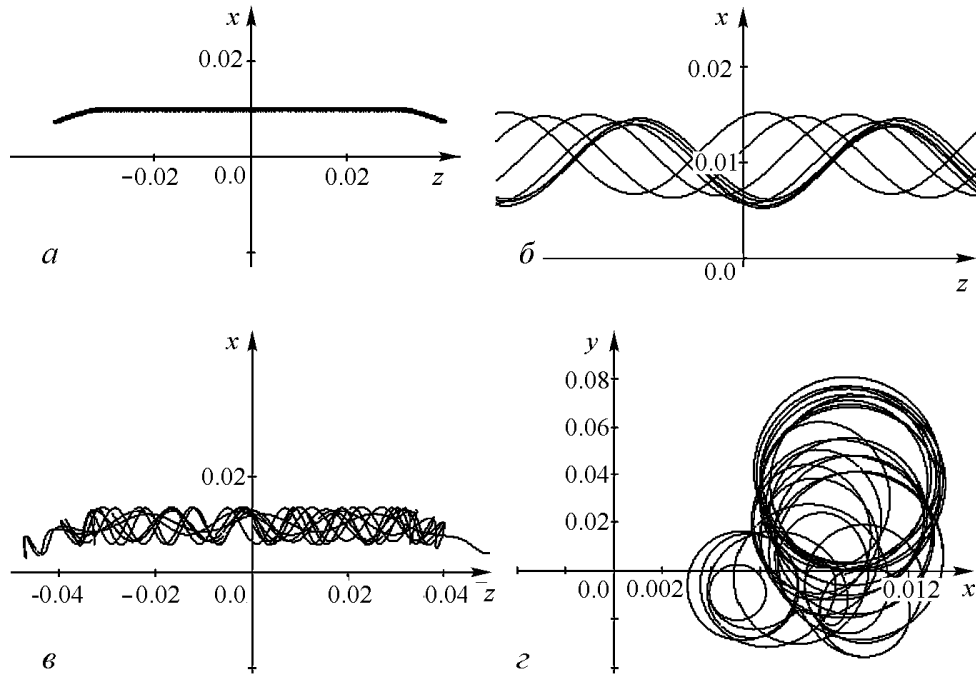


Рис. 2. Типичные траектории зарядов для системы с магнитными зеркалами  $z \approx \pm 0.05$ : *a* – регулярные траектории ( $\alpha = 45^\circ$ ;  $|\mathbf{V}| = 10000$ ); *b* – регулярные траектории в увеличенном масштабе; *в* – хаотические траектории ( $\alpha = 45^\circ$ ;  $|\mathbf{V}| = 100000$ ); *г* – вид на хаотические траектории со стороны оси  $z$  (вдоль линий магнитного поля)

прежней траектории центра (при длительном наблюдении имеет место медленное вращение центра спирали вокруг продольной оси магнитной ловушки). Для хаотических частиц характеристики траектории после отражения меняются непредсказуемо и существенно: ларморовский радиус частицы может увеличиться или уменьшиться в несколько раз и центр спирали может сместиться в произвольном направлении. Хаотичность заряженной частицы определяется уже на начальном этапе траектории и сохраняется во времени. Расчеты также показали, что время удержания частицы в ловушке зависит от степени хаотичности ее движения, а именно, хаотически движущаяся заряженная частица достаточно быстро покидает магнитную ловушку.

На рис. 3 показана зависимость времени удержания заряженной частицы в магнитной ловушке от параметров инжектирования. Видно, что длительное удержание возможно лишь при небольших значениях модуля вектора скорости, при которых наблюдаются регулярные траектории. Согласно [1, 2], условием длительного удержания заряженной частицы в ловушке является

$$\sin \alpha_0 > \sqrt{B_0/B_{\max}}. \quad (4)$$

Рис. 3, б подтверждает, что при выбранных параметрах подобным критическим значением является  $\alpha_0 = 45^\circ$ .

Для того чтобы определить, каким образом изменяется степень хаотичности траектории частицы для различного времени удержания, необходимо ввести некий критерий оценки степени хаотичности. Традиционно используемый в таких случаях расчет показателей Ляпунова не подходит, так как он основывается на скорости расхождения фазовых траекторий, исходящих из близких фазовых точек, но в условиях однородного магнитного поля (в которых происходит инжекция частиц) даже существенно удаленные друг от друга фазовые траектории не будут расходиться. В качестве возможного критерия оценки степени хаотичности траектории удобно использовать оценку числа экстремумов спектра мощности.

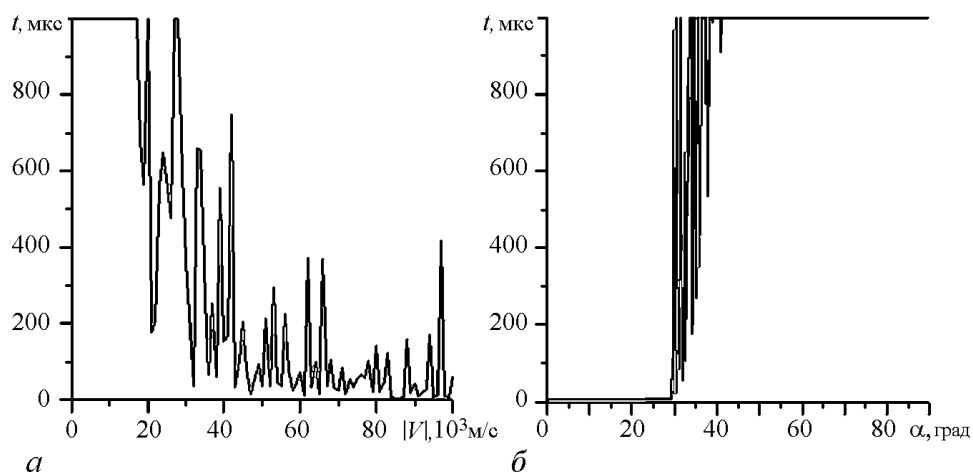


Рис. 3. Зависимость времени удержания заряда в магнитной ловушке от параметров системы: а – от модуля вектора скорости  $|V|$ ; б – от угла  $\alpha$  между вектором скорости и линиями магнитного поля

На рис. 4 представлены примеры спектров мощности для различных начальных значений фазовых переменных. Расчеты показывают, что при произвольных величинах угла инжекции и модуля скорости траектории зарядов остаются регулярными до первого отражения от зеркал (при этом спектр мощности аналогичен рис. 4, а).

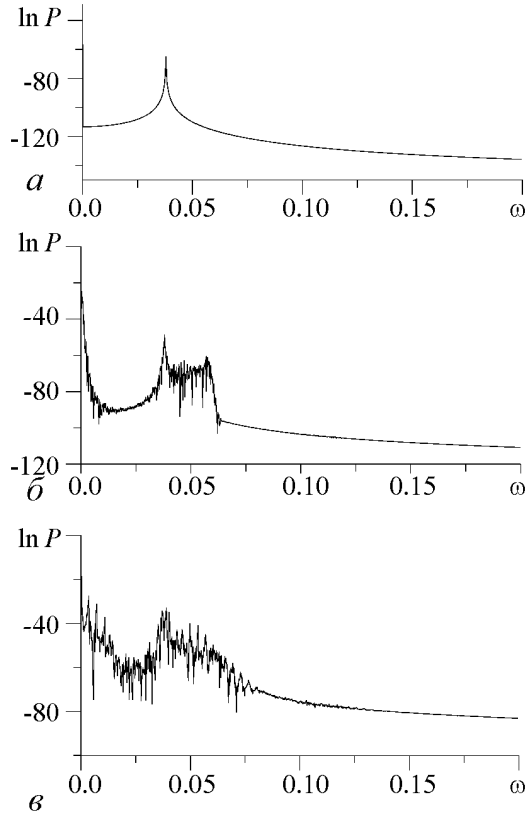


Рис. 4. Вид спектральных характеристик при различных  $|\mathbf{V}|$ : 1000 (а), 10000 (б), 100000 (в)

Разделение траекторий зарядов на регулярные и хаотические происходит в области магнитных зеркал, где возрастает кривизна силовых магнитных линий и увеличивается значение модуля напряженности магнитного поля. Если в пределах ларморовской орбиты кривизна силовых линий магнитного поля меняется несущественно, то происходит отражение заряда от магнитного зеркала, и его движение в обратном направлении идет практически по той же траектории. Если же кривизна силовых магнитных линий меняется существенно, то в процессе отражения также существенно изменяются указанные выше параметры траектории. Траектория становится хаотической и ей соответствует спектр мощности, аналогичный рис. 4, в. Видно, что при возрастании степени хаотичности траектории число пиков спектра мощности увеличивается. Для расчета спектральных характеристик использовалось изменение модуля радиуса-вектора спирали траектории вдоль одной из координат.

Как видно из рис. 3 и 5, зависимость степени хаотичности от начальных значений фазовых переменных (рис. 5) согласуется с зависимостью времени удержания от этих же параметров (рис. 3). «Регулярные» спектры мощности (то есть спектры с малым числом пиков, получаемые для регулярных траекторий), так же как и длительное удержание, возможны только при небольших значениях модуля вектора скорости. Малым углом между вектором скорости и линиями магнитного поля соответствуют регулярные спектры, так как не выполняется критерий (4) и частица вылетает из магнитной ловушки, ни разу не отразившись. При больших углах  $\alpha_0$  спектр имеет также регулярный вид, так как из-за малой величины продольной составляющей скорости заряженная частица вращается практически на одном месте и отражается от магнитного зеркала очень быстро, не успев войти в область сильного магнитного поля.

Представилось целесообразным построить карты динамических режимов в плоскостях различных параметров системы для демонстрации взаимосвязи степени хаотичности спектра мощности траектории и времени удержания заряженной частицы в ловушке. На рис. 6, а, 7, а, 8, а представлены карты степени хаотичности.

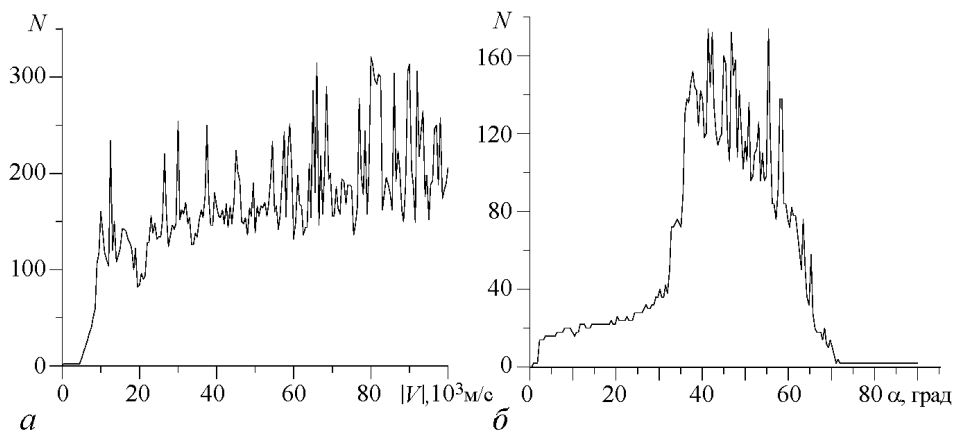


Рис. 5. Зависимость степени хаотичности траекторий заряда от параметров системы:  $a$  – от модуля вектора скорости  $|\mathbf{V}|$ ;  $b$  – от угла  $\alpha$  между вектором скорости и линиями магнитного поля

Белый цвет на них соответствует регулярному спектру мощности, градации серого и черный цвет – многочастотным и хаотическим колебаниям. Для расчета спектров мощности использовались траектории за период времени, достаточный для 3-4 отражений частицы от магнитных зеркал, поскольку степень хаотичности, характерная для исследуемой частицы, устанавливается уже на начальном этапе траектории. На рис. 6,  $b$ , 7,  $b$ , 8,  $b$  показаны карты времени удержания. Черный цвет на них соответствует частицам, вылетевшим из ловушки, а белый – частицам, не покинувшим магнитную ловушку за период времени наблюдения. Для построения карт времени удержания траектория заряженной частицы рассчитывалась в течение времени, достаточного для 100-500 отражений частицы. Видно, что карты, построенные на расчете степени хаотичности и времени удержания, топологически совпадают. Исключение составляют области с малым углом  $\alpha_0$ , однако здесь, как указывалось выше, причиной выхода частицы из ловушки является не возникновение хаоса.

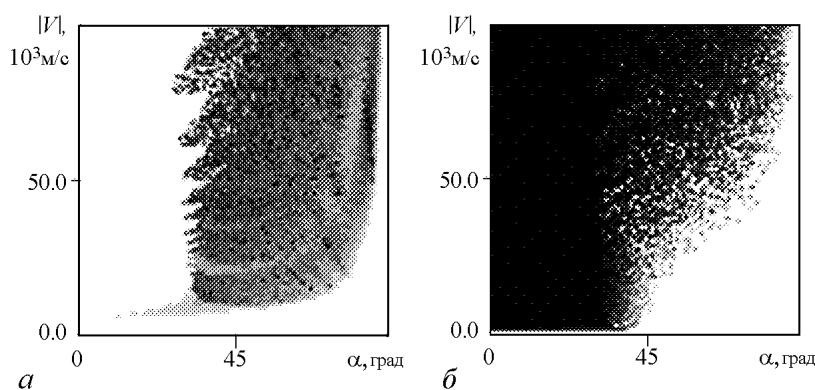


Рис. 6. Карты динамических режимов в плоскости параметров  $|\mathbf{V}|, \alpha$ :  $a$  – степень хаотичности;  $b$  – время удержания в ловушке

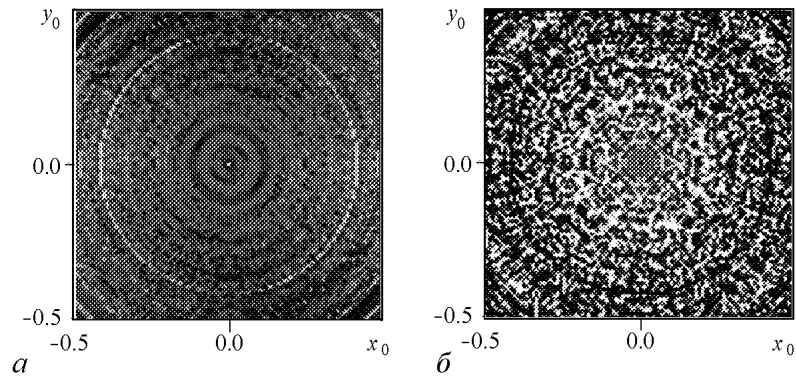


Рис. 7. Карты динамических режимов в плоскости начальных координат  $(x_0, y_0)$ :  $a$  – степень хаотичности;  $b$  – время удержания в ловушке

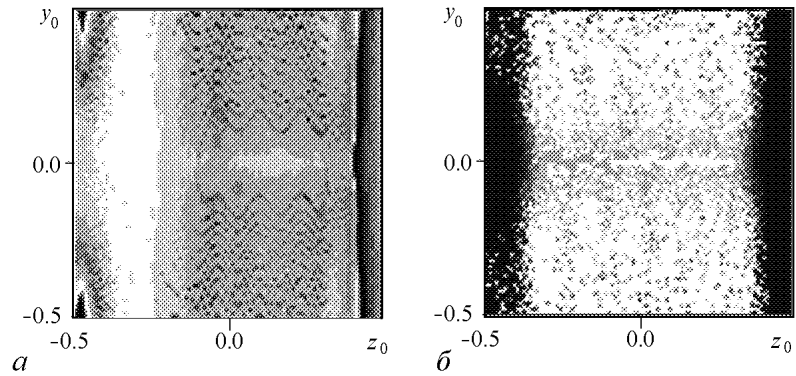


Рис. 8. Карты динамических режимов в плоскости начальных координат  $(y_0, z_0)$ :  $a$  – степень хаотичности;  $b$  – время удержания в ловушке

Для понимания характера хаотических колебаний в моделируемой системе важно рассмотреть еще несколько видов зависимостей. На рис. 9 показано изменение ларморовского радиуса заряженной частицы во времени. Видно, что, за исключением сложного поведения в области магнитных зеркал, частица, движущаяся по регулярной траектории, практически не меняет свой ларморовский радиус. Хаотические частицы, напротив, движутся по спирали с постоянно изменяющимся радиусом. Аналогичное поведение подтверждает рис. 10. Для регулярных траекторий время пролета заряженной частицы между зеркалами остается неизменным на протяжении всего периода наблюдения за системой; частица, движущаяся по хаотической траектории, преодолевает расстояние между магнитными зеркалами каждый раз за различное время. В этом и состоит основная особенность хаоса, возникающего в магнитных ловушках открытого типа: параметры хаотической траектории меняются при каждом отражении заряженной частицы от магнитного зеркала. Частица будет находиться в ловушке до тех пор, пока после очередного отражения перестанет выполняться критерий (4) и частица пройдет сквозь магнитное зеркало.

Таким образом, проведенные расчеты показали, что продолжительность удержания заряженной частицы в ловушке связана со степенью хаотичности траекто-

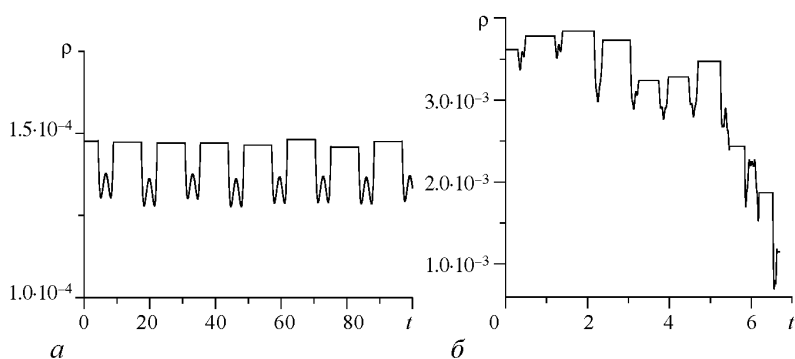


Рис. 9. Изменение ларморовского радиуса заряженной частицы со временем: *a* – для регулярной траектории; *б* – для хаотической траектории

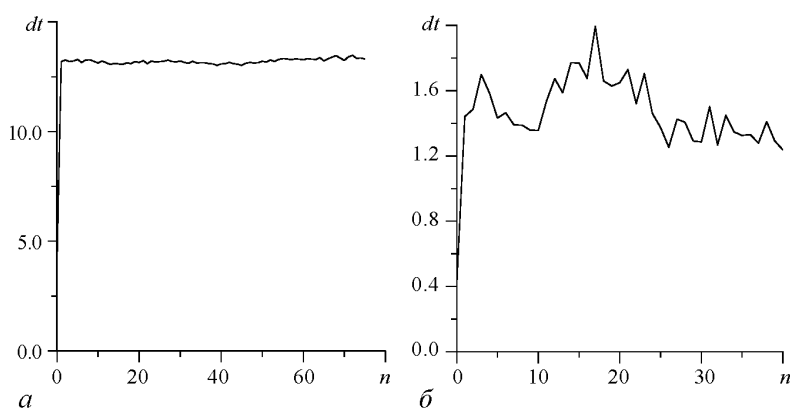


Рис. 10. Изменение времени пролета частицы между зеркалами: *a* – для регулярной траектории; *б* – для хаотической траектории

рии частицы и, следовательно, регуляризация колебаний способна увеличить время удержания в магнитной ловушке. Необходимо отметить, что в реальных устройствах силы, действующие на заряженную частицу в магнитной ловушке (поля пространственного заряда, кулоновское взаимодействие заряженных частиц), усложняют траекторию отдельной частицы. Однако можно ожидать, что и в этих условиях связь между хаотическим движением заряда и временем удержания частицы сохранится.

### Библиографический список

1. Арцимович Л.А. Элементарная физика плазмы. М.: Атомиздат, 1969.
2. Арцимович Л.А., Лукьянов С.Ю. Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях. М.: Наука, 1978.
3. Ленерт Б. Динамика заряженных частиц / Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1967.
4. Рюттов Д.Д. Открытые ловушки // УФН. 1988. Т. 154, № 4. С. 565.
5. Леонтович М.А., Кадомцев Б.Б. Вопросы теории плазмы. М.: Энергоиздат, 1982.
6. Рожанский В.А. Удержание плазмы в магнитных ловушках // Соросовский образовательный журнал. 2000. Т. 6, № 10. С. 80.

7. Заславский Г.М., Сагдеев Р. З., Усиков Д.А., Черников А.А. Слабый хаос и квазирегулярные структуры. М.: Наука, 1991.
8. Байбурин В.Б., Мантуров А.О., Юдин А.В. Хаотическое поведение зарядов в скрещенных полях // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т. 10, № 6. С. 62.
9. Поршнев С.В. Динамическая неустойчивость движения заряженных частиц в постоянном неоднородном магнитном поле // Журнал радиоэлектроники. 2000. № 11.
10. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988.
11. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
12. Воронев Г.С. Штурм термоядерной крепости. М.: Наука, 1985.

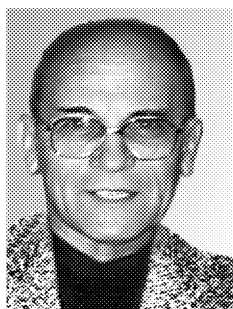
Саратовский государственный  
технический университет

Поступила в редакцию 15.12.2004

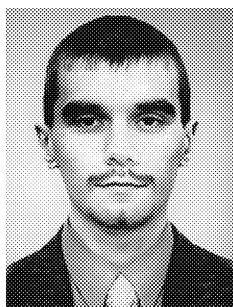
### INFLUENCE OF CHAOS FOR CONFINEMENT PERIOD OF CHARGED PARTICLES IN MAGNETIC TRAP

*V.B.Bayburin, A.V.Yudin*

Numerical modeling of behavior of the charged particle in a magnetic field of an open trap is carried out. Correlation between confinement period of charged particle in a trap and degree of a randomness of trajectory is shown. On the basis of study of power spectra domains of existence of chaotic oscillatory modes are submitted. Maps of dynamic modes are constructed in the phase variables planes.



*Байбурин Вил Бариевич* – родился в Оренбурге (1935). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1957). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1969) и доктора физико-математических наук в ИРЭ РАН в Москве (1984) в области электроники СВЧ. Заведующий кафедрой Саратовского государственного технического университета, профессор, заслуженный деятель науки РФ, действительный член РАЕН. Области научных интересов - компьютерное моделирование, электроника СВЧ, сканирующая зондовая микроскопия, применение СВЧ-энергии в технологических процессах. Автор более 300 научных публикаций, в том числе 6 монографий.



*Юдин Андрей Витальевич* – родился в Саратове (1981). Окончил факультет электронной техники и приборостроения Саратовского государственного технического университета (2003). Аспирант кафедры программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем СГТУ. Области научных интересов – компьютерное моделирование физических явлений, интерактивная машинная графика.





## МЕХАНИЗМЫ ФАЗОВОЙ МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТИ ПРИ СИНХРОНИЗАЦИИ 3D-ОСЦИЛЛЯТОРОВ

*Д.Э. Постнов, А.М. Некрасов*

На примере математической модели генератора с инерционной нелинейностью мы исследуем механизмы формирования фазовой мультистабильности при синхронизации диффузионно связанных трехмерных осцилляторов. Результаты показывают, что помимо формы колебаний осцилляторов в формировании набора одновременно устойчивых синхронных режимов важную роль играет направление вектора диффузионной связи, а также свойства неизохронности осциллятора.

### Введение

Мультистабильность, или одновременная устойчивость нескольких режимов является одним из типичных эффектов в нелинейных динамических системах. Важным частным случаем, возникающим при синхронизации колебаний связанных осцилляторов, является так называемая фазовая мультистабильность, активное изучение которой началось применительно к задаче о синхронизации систем с удвоениями периода. Как было установлено в [1,2], субгармонический каскад бифуркаций в связанных системах сопровождается ростом числа устойчивых синхронных режимов, как регулярных, так и хаотических, которые различаются между собой величиной сдвига фаз колебаний. В последующих работах [3–5] была изучена структура разбиения пространства параметров и типичные бифуркации сосуществующих семейств режимов. В [6] показано, что на плоскости параметров расстройка – степень связи явлению фазовой мультистабильности для систем с удвоениями отвечает структура вложенных областей синхронизации, берущих начало в одной и той же точке по параметрам. В [7] отмечено, что клювы синхронизации могут быть также сдвинуты по отношению друг к другу.

Перечисленные выше результаты «работают» в поддержку гипотезы, согласно которой при заданных характеристиках диффузионной связи (достаточно слабой) ко-

личество сосуществующих синхронных режимов определяется прежде всего формой колебаний взаимодействующих осцилляторов в проекции на переменную, по которой осуществляется связь. А именно, наличие локальных минимумов и максимумов на периоде колебаний приводит (в случае идентичных или близких по частотам осцилляторов) к тому, что среднее за период значение связи также имеет несколько минимумов в зависимости от сдвига фаз колебаний. Это, в свою очередь, и обуславливает появление нескольких синхронных режимов.

Однако попытка проанализировать с этих позиций синхронизацию так называемых *bursting*-колебаний, которые представляют собой периодически повторяющиеся цуги быстрых импульсов-спайков, потерпела неудачу. Главный вывод работы [8], по сути, в том, что нельзя подходить к анализу взаимодействия *bursting*-колебаний с учетом одной их формы. Такой подход к анализу фазовой мультистабильности следует считать идеализацией, далеко не всегда допустимой.

С другой стороны, имеется информация о том, что даже при простой форме колебаний и слабой диффузионной связи модели нейронных осцилляторов могут синхронизоваться в противофазе [9–11], либо иметь два одновременно устойчивых режима [12, 13], что обусловлено рядом эффектов, порожденных неоднородностью поля фазовой скорости, или иными словами, высокой степенью релаксационности колебаний в таких моделях.

В данной работе мы рассматриваем задачу о развитии фазовой мультистабильности в системе двух связанных трехмерных осцилляторов с учетом обоих упомянутых выше подходов. В качестве математической модели нелинейных трехмерных осцилляторов выбран генератор с инерционной нелинейностью [3, 4] как одна из хорошо изученных систем с разнообразными динамическими режимами, от квазигармонических до хаотических. С использованием как аналитических в своей основе методов (нахождение функции эффективной связи), так и численных характеристик (построение отображения сдвига фаз), мы рассмотрим, каким образом два фактора, то есть форма колебаний и свойства неизохронности осциллятора влияют на формирование набора сосуществующих синхронных режимов.

## 1. Исследуемая система и методы анализа фазовой мультистабильности

**1.1. Взаимодействующие 3D-осцилляторы и вектор диффузионной связи.** Общий вид уравнений для диффузионно связанных идентичных трехмерных осцилляторов:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f(x_1, y_1, z_1) + K_x(x_2 - x_1), & \dot{x}_2 &= f(x_2, y_2, z_2) + K_x(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_1 &= g(x_1, y_1, z_1) + K_y(y_2 - y_1), & \dot{y}_2 &= g(x_2, y_2, z_2) + K_y(y_1 - y_2), \\ \dot{z}_1 &= h(x_1, y_1, z_1) + K_z(z_2 - z_1), & \dot{z}_2 &= h(x_2, y_2, z_2) + K_z(z_1 - z_2), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x_i, y_i, z_i$  – фазовые переменные, а  $f()$ ,  $g()$  и  $h()$  – функции, задающие конкретный вид нелинейности. Разностные члены в конце каждого уравнения задают диффузионную (выравнивающую) связь по каждой из переменных с коэффициентами  $K_x, K_y, K_z$ . Общим случаем является анизотропия  $K_x \neq K_y \neq K_z$ .

С точки зрения фазового пространства системы (1),  $K_x$ ,  $K_y$  и  $K_z$  задают *направление* взаимодействия связанных подсистем по отношению к координатам (переменным) каждой из связанных подсистем. Связь, таким образом, выступает в виде дополнительной «силы», смещающей траекторию в ту или иную сторону.

По этим причинам параметр связи удобно рассматривать в виде вектора  $\mathbf{K}$  с координатами  $K_x, K_y, K_z$ , причем

$$K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = |\mathbf{K}|^2. \quad (2)$$

Для выбранного значения модуля коэффициента связи  $|\mathbf{K}|$ , можно записать

$$K_x = |\mathbf{K}| \cos \beta \cos \alpha,$$

$$K_y = |\mathbf{K}| \cos \beta \sin \alpha,$$

$$K_z = |\mathbf{K}| \sin \beta,$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – значения углов, задающих направление вектора связи в фазовом пространстве. Очевидно, при соответствующем выборе  $\alpha$  и  $\beta$  легко прийти к частным случаям связи через одну из переменных,  $x$ ,  $y$ , или  $z$ :  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ ;  $\alpha = \pi/2$ ,  $\beta = 0$ ; или  $\beta = \pi/2$ , соответственно.

В качестве представительной модели трехмерного осциллятора в данной работе мы используем генератор с инерционной нелинейностью, разнообразная динамика которого содержит все типичные режимы для трехмерных систем с одним состоянием равновесия, включая каскад бифуркаций удвоения, хаотический аттрактор, а также режимы автомодуляции (генерация цугов колебаний) [14–17], [3,4]. Этой модели соответствует выбор нелинейностей:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= mx - zx + y - bx^3, \\ g(x, y, z) &= -x, \\ h(x, y, z) &= -gz + gx(x + |x|)/2. \end{aligned} \quad (3)$$

где  $m$ ,  $b$ , и  $g$  – управляющие параметры, отвечающие за диссипацию, а также за безынерционное и инерционное ограничение амплитуды колебаний, соответственно.

**1.2. Метод фазовой редукции.** Как известно, применительно к динамике ансамбля взаимодействующих осцилляторов при определенных условиях может быть с успехом использовано фазовое описание. Такой подход, в частности, систематически изложен в [18]. Для выявления характера взаимодействия осцилляторов вводится понятие «эффективной функции связи». Предполагается, что наличие связи между осцилляторами вызывает пренебрежимо малые возмущения предельного цикла в каждом из них. В этом случае анализ динамики связанных осцилляторов может быть сведен к рассмотрению поведения фазы вдоль предельного цикла. Фаза  $\phi$  точки на предельном цикле  $V_0 \in R^N$  определяется как  $d\phi/dt = 1$ .

Следуя понятию изохрон (поверхностей равной фазы), определенных как подмножество начальных условий, асимптотически сходящихся к той же самой точке (то есть к той же самой фазе) на предельном цикле, описание фазы может быть

расширено на некоторую окрестность предельного цикла. Кроме того, можно предположить, что для достаточно малой окрестности предельного цикла упомянутое подмножество есть плоская поверхность, трансверсальная к предельному циклу в данной точке.

При малом возмущении предельного цикла  $P(V)$  выражение для фазы приобретает вид:

$$\frac{d\phi}{dt} = 1 + Z(\phi)P(V), \quad (4)$$

Где  $Z(\phi) = (grad_{\nu} \phi)_{\nu=\nu_0}$  - функция чувствительности, которая показывает реакцию фазы на некоторое (произвольно направленное) возмущение  $V$ .

С точки зрения диагностики режимов синхронизации связанных осцилляторов интерес представляет *антисимметричная часть*  $\Gamma_a^{eff}(\Delta\phi)$  *эффективной функции связи*  $\Gamma^{eff}(\Delta\phi)$ , которая, в свою очередь, определяется соотношением

$$\Gamma^{eff}(\Delta\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Z(\phi)p(\phi, \Delta\phi)d\phi. \quad (5)$$

Здесь  $\Delta\phi$  обозначает фазовый сдвиг между колебаниями осцилляторов, а  $p(\phi, \Delta\phi)$  имеет смысл возмущения вследствие действия связи, величина которого зависит как от разности фаз, так и от абсолютного значения (позиции на предельном цикле).

Возможные синхронные режимы, как устойчивые так и неустойчивые, определяются из условия

$$\Gamma_a^{eff}(\Delta\phi) = 0. \quad (6)$$

Их устойчивость характеризует значение производной  $\{\Gamma_a^{eff}(\Delta\phi)\}'$  в точках, определяемых условием (6), причем отрицательное значение соответствует устойчивости синхронного режима и наоборот.

Для ограниченного числа задач описанные выше характеристики могут быть найдены аналитически. Однако, как правило, построение  $\Gamma_a^{eff}(\Delta\phi)$  включает нахождение функции чувствительности  $Z(\Delta\phi)$  численными методами. Подобный подход был применен в ряде работ [7, 10, 11, 19].

**1.3. Отображение фазового сдвига.** Когда связь становится достаточно сильной для того, чтобы изменить геометрию предельного цикла, метод фазовой редукции не может использоваться. В этом случае нами применялся численный метод, позволяющий построить отображение разности фаз. Он основан на введении в качестве начального условия некоторого временного сдвига между колебаниями подсистем и последующего анализа динамики взаимных фаз генераторов. Если с течением времени устанавливается синхронный режим, то сдвиг фаз стабилизируется на некотором значении. Это значение может быть различным в зависимости от начальных условий, что и говорит о наличии фазовой мультистабильности. Перебором начальных условий можно аппроксимировать поведение системы для всего диапазона изменения разности фаз.

Отображая эти результаты в виде графика зависимости  $\Delta\phi(t + \tau)$  от  $\Delta\phi(t)$  (где  $\tau$  – интервал между измерениями фазы), получаем одномерное отображение сдвига фаз, соответствующее дискретному временному шагу  $\tau$ . Очевидно, каждая устойчивая точка такого отображения должна соответствовать устойчивому синхронному

режиму колебаний, а их бифуркации должны отражать изменения в количестве и устойчивости таких синхронных режимов.

Заметим, что отображение разности фаз можно выразить и через  $\Gamma_a^{eff}$ . Для двух связанных идентичных осцилляторов поведение разности фаз удовлетворяет соотношению [18]

$$\frac{d(\Delta\phi)}{dt} = 2\Gamma_a^{eff}(\Delta\phi). \quad (7)$$

Принимая  $dt = \tau$  и  $d(\Delta\phi) = (\Delta\phi_{t+\tau} - \Delta\phi_t)$  для достаточно малых, но конечных  $\tau$ , получим:

$$\Delta\phi_{t+\tau} \approx \Delta\phi_t + \tau 2\Gamma_a^{eff}(\Delta\phi_t). \quad (8)$$

Полученное выражение соответствует тем результатам, которые дает численное построение отображения разности фаз в пределе слабой связи.

## 2. Фазовая мультистабильность при субгармоническом каскаде: влияние вектора связи

По мере увеличения параметра  $m$  в системе (3) наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода, завершающийся рождением хаотического аттрактора. Как ранее было показано в [1,2], в таких связанных через  $x$ -переменную идентичных системах при этом формируется набор сосуществующих синхронных режимов, количество которых (при достаточно слабой связи) равно  $2^N$ , где  $N$  - номер бифуркации удвоения. То есть циклу удвоенного периода соответствует два устойчивых режима, циклу периода 4 - четыре устойчивых режима и т.д. Нас интересует, какие изменения произойдут при вариации направления связи двух систем. На рис. 1 приведены фазовые портреты и временные реализации колебаний удвоенного и учетверенного периода, а также рассчитанные для этих режимов графики функции эффективной связи для случаев, когда системы взаимодействуют только через одну из переменных,  $x$ ,  $y$  или  $z$ .

Как можно видеть, фазовый портрет таких колебаний в обоих случаях представляет собой многооборотную петлю вокруг состояния равновесия в начале координат. Временные реализации вскрывают различие между переменными: тогда как по  $x$  имеется несколько хорошо видимых локальных максимумов на периоде (их число удваивается с каждой бифуркацией удвоения периода), переменная  $z$  выглядит более сглаженной, она всюду неотрицательна, а упомянутые локальные максимумы выражены слабо.

Исходя из формы колебаний, естественно ожидать, что фазовая мультистабильность при связи по  $z$ -переменной будет менее развита. Однако результаты расчета функции эффективной связи неожиданны. Как следует из рис.1, *д*, в случае колебаний удвоенного периода при связи по  $z$  имеется единственный устойчивый синхронный режим, и этот режим - противофазный. Для колебаний учетверенного периода (рис.1, *е*), функция эффективной связи имеет шесть точек пересечения с осью абсцисс. Это соответствует наличию трех неустойчивых и трех устойчивых режимов, причем на этот раз противофазный устойчивый режим дополнен двумя режимами с симметричным сдвигом по фазе.

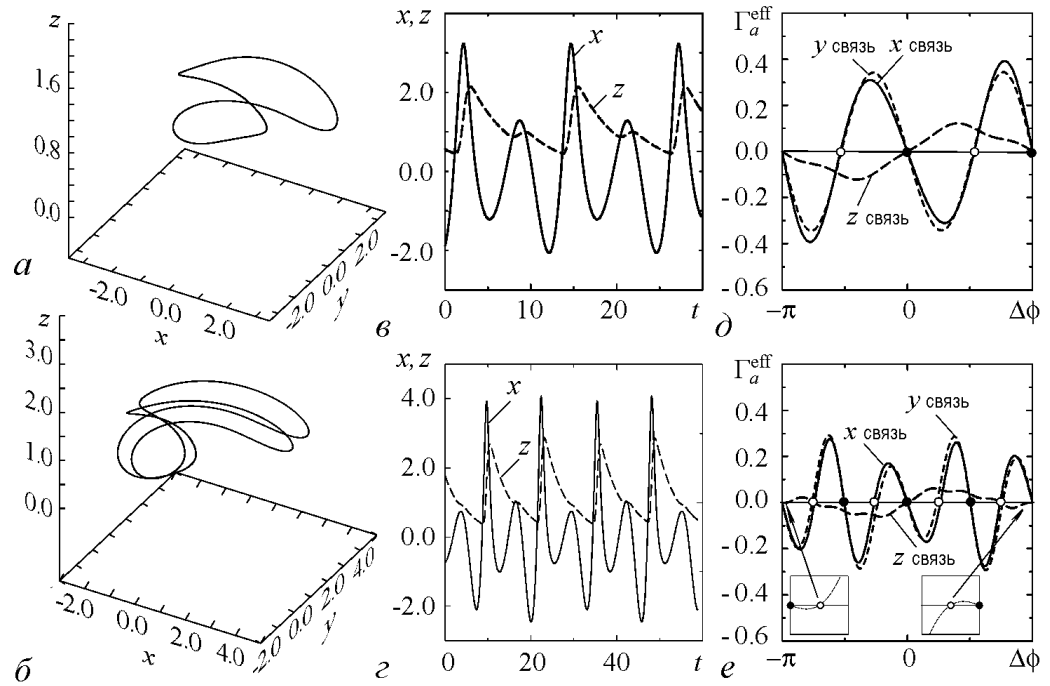


Рис. 1. Колебания с удвоенным (*a, в, д* –  $m = 1.1, g = 0.2, b = 0.001$ ) и с учетверенным (*б, з, е* –  $m = 1.33, g = 0.2, b = 0.001$ ) периодом в модели (3). *a, б* – фазовый портрет в пространстве переменных  $(x, y, z)$ ; *в, з* – временные реализации переменных  $x, z$ ; *д, е* – функция эффективной связи  $\Gamma_a^{eff}$  для связанных по одной из указанных переменных идентичных подсистем

Диаграммы на рис. 2 вскрывают закономерности изменения числа устойчивых режимов при плавном изменении направления вектора связи двух осцилляторов. Три вершины сектора диаграммы соответствуют трем случаям связи через одну из переменных. Произвольной точке на поле диаграммы соответствует случай взаимодействия осцилляторов с некоторым фиксированным соотношением между  $K_x, K_y$  и  $K_z$ . Как можно видеть из рис. 2, *a*, большая часть диаграммы однородна и соответствует синхронным режимам, которые получаются при связи по переменным  $x$  или  $y$ . Таким образом, вариация направления вектора связи между этими двумя переменными практически не влияет на динамику связанных осцилляторов. Однако увеличение относительного вклада связи по  $z$  переменной (сдвиг в верхнюю часть диаграммы) приводит к существенным изменениям в наборе синхронных режимов. На рис. 2, *б* эта область показана более детально.

На линии раздела между областями диаграммы происходит перестройка, связанная с исчезновением синфазного устойчивого режима. Еще более сложно ведут себя связанные осцилляторы в случае колебаний учетверенного периода (рис. 2, *в*): исходное количество режимов (четыре) по мере движения в сторону  $z$ -связи сначала уменьшается до трех, затем увеличивается до пяти, а затем вновь возвращается к трем.

Очевидно, обнаруженные факты не укладываются в гипотезу, хорошо работающую для случаев  $x$ - и  $y$ -связи, согласно которой форма колебаний на периоде определяет количество возможных синхронных режимов. Согласно такому подходу,

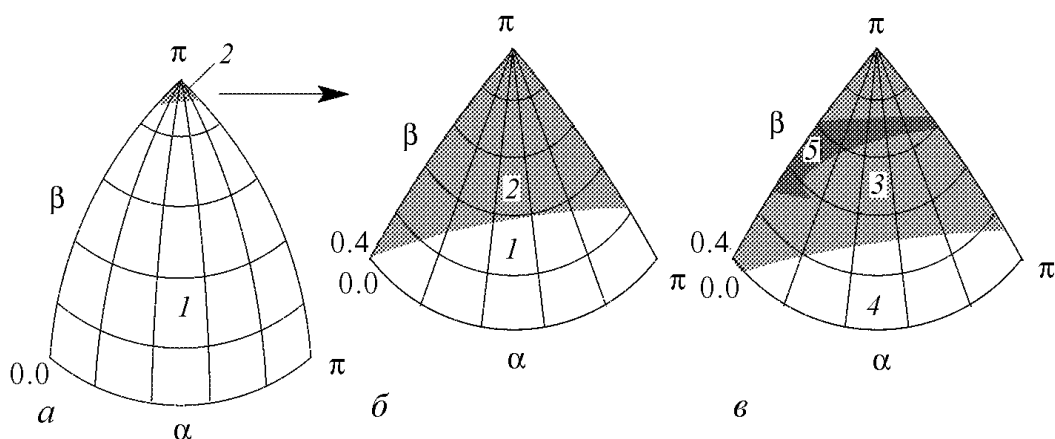


Рис. 2. Диаграммы, характеризующие зависимость числа сосуществующих режимов от направления вектора диффузионной связи. Цифрами обозначено количество сосуществующих режимов. Верхний угол ( $\beta = \pi$ ) соответствует связи только по  $z$ -переменной, на нижней кромке диаграммы (при  $\beta = 0$ ) левый угол ( $\alpha = 0$ ) соответствует связи только по  $x$ -переменной, а правый угол ( $\alpha = \pi$ ) – связь только по  $y$ -переменной. *a* – полная диаграмма для  $m = 1.1$ ,  $g = 0.2$ ,  $b = 0.001$  (цикл удвоенного периода); *б* – увеличенный фрагмент верхней части диаграммы для тех же значений параметров; *в* – аналогичный фрагмент диаграммы, но для цикла учетверенного периода при  $m = 1.33$ ,  $g = 0.2$ ,  $b = 0.001$

при связи осцилляторов через более сглаженную переменную  $z$  возможно уменьшение числа синхронных режимов в случае, если часть локальных максимумов окажется недостаточно выраженной. Мы же наблюдали переход к режиму противофазной синхронизации. Более того, при увеличении периода цикла от удвоенного к учетверенному, количество синхронных режимов изменилось от одного до трех, что также не соответствует ожидаемому поведению. При субгармоническом каскаде возникающие длиннопериодические режимы синхронизируются синфазно по основной гармонике, соответствующей начальному режиму - циклу периода один. Поэтому в наборах синхронных режимов всегда присутствует синфазный, когда колебания двух осцилляторов совпадают во времени. При связи через  $z$ -переменную это нарушено, единственный синхронный режим в случае двухтактного цикла - противофазный. Вероятно, здесь и следует искать объяснение наблюдаемым эффектам.

Ситуации, когда слабая диффузионная связь по одной переменной приводит к неустойчивости синфазного режима, были обнаружены для двумерных моделей нейронов в [9] и исследованы в [10, 11]. Как оказалось, наличие в окрестности предельного цикла индивидуальной системы седлового состояния равновесия может в определенных условиях приводить к резкому ускорению либо замедлению фазовой траектории при взаимодействии осцилляторов. Этот эффект получил название «dephasing». Говоря более общими словами, определенные типы неоднородности поля фазовой скорости могут слабо проявляться в индивидуальной динамике осциллятора, но играют важную роль в случае взаимодействия таких систем. Существенно, что по своей природе эффект dephasing локален (связан с определенным участком предельного цикла) и чувствителен к направлению возмущения траектории, то есть к направлению вектора диффузионной связи двух осцилляторов. На фазовой плоскости сравнительно не сложно провести исчерпывающий анализ неоднородности поля

фазовой скорости такой системы, что и было проделано в упомянутых работах. Для трехмерных моделей такой анализ значительно сложнее. Имеются работы по связанным моделям нейронов [20] и  $\beta$ -клеток [8], где наличие эффекта dephasing привлекается для объяснения результатов численного моделирования, однако работы, содержащие систематический анализ подобных явлений для трехмерных осцилляторов, на момент написания данной работы авторам не известны.

Не ставя перед собой задачу детального анализа эффектов, связанных с неоднородностью поля фазовой скорости в модели (3) (это потребовало бы отдельного исследования), попробуем все же показать, что различия в поведении связанных осцилляторов (3) при связи по  $x, y$  и по  $z$  переменной обусловлены эффектами, подобными dephasing. Для этого нужно показать относительно большую чувствительность периода предельного цикла к возмущению именно по  $z$  направлению и локальный характер ускорения либо замедления траекторий.

Полезную информацию также может дать расчет расстояния от предельного цикла до объекта, предположительно, ответственного за наличие неоднородности поля фазовой скорости (см., например, [8]).

На рис. 3 и 4 приведены результаты исследования свойств модели (3) по отношению к возмущению по переменным  $x$  и  $z$ . Для этого в соответствующее уравнение добавлялась небольшая постоянная величина  $\bar{x}$  или  $\bar{z}$ , смещающая предельный цикл в нужном направлении и, в некоторой степени, имитирующая действие связи в системе (1).

Как следует из рис. 3, *a*, период цикла удвоенного периода практически не чувствителен к возмущению по  $x$ -переменной, тогда как сдвиг по  $z$  меняет его значительно. Рис. 3, *б* содержит график изменения фазовой скорости вдоль траектории предельного цикла, выраженной в значениях фазы, и его отклик на внесенное постоянное возмущение. Как можно видеть, смещение по  $x$  практически не меняет фазовую скорость на всем протяжении цикла, тогда как  $z$ -смещение вызывает замет-

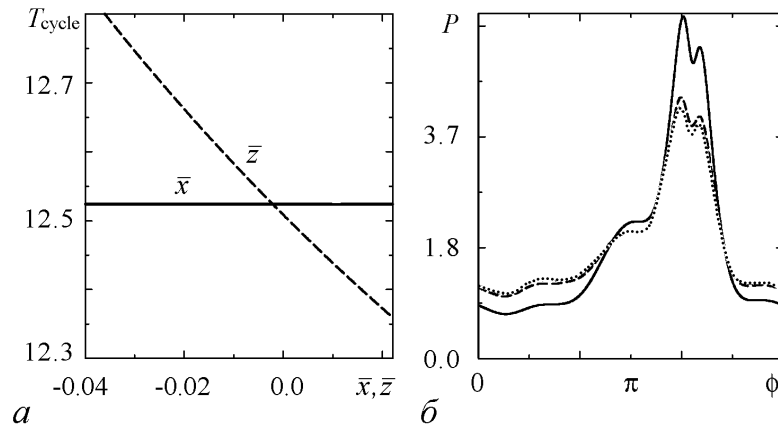


Рис. 3. Реакция системы (3) при  $m = 1.1$ ,  $g = 0.20005$ ,  $b = 0.0$  на внешнее возмущение - малую постоянную добавку по одной из переменных,  $\bar{x}$  или  $\bar{z}$ . *a* - изменение периода колебаний; *б* - изменения в распределении фазовой скорости вдоль предельного цикла: штриховая линия соответствует  $\bar{x} = 0.0$ ,  $\bar{z} = 0.0$ ; пунктирная линия -  $\bar{x} = -0.037$ ,  $\bar{z} = 0.0$ ; сплошная -  $\bar{x} = 0.0$ ,  $\bar{z} = -0.037$ ;



ное ускорение траектории на участке фазы от  $1.3\pi$  до  $1.9\pi$  и уменьшение фазовой скорости на остальном протяжении предельного цикла. Наконец, рис. 4 показывает, что с увеличением параметра  $m$  расстояние от предельного цикла до состояния равновесия меняется немонотонно, достигая своего максимума в момент первой бифуркации удвоения и далее «отзываясь» увеличением крутизны спада на каждую последующую бифуркацию.

Совокупность представленных на рис. 3 и 4 результатов позволяет утверждать, что особенности в поведении связанных систем (3) при связи по переменной  $z$  с высокой степенью вероятности обусловлены тем, что даже малые возмущения предельного цикла в этом направлении приводят к существенному изменению его свойств. В условиях связи по всем трем переменным, результирующие свойства связанных систем будут определяться балансом между «обычным» поведением связанных осцилляторов, когда диффузионная связь приводит к синфазной синхронизации, и аномальным поведением, связанным с реакцией предельного цикла на малые возмущения. Как следует из рис. 4, степень проявления таких аномалий должна возрастать с увеличением параметра  $m$  по мере приближения аттрактора к состоянию равновесия в начале координат, что и подтверждают диаграммы на рис. 2.

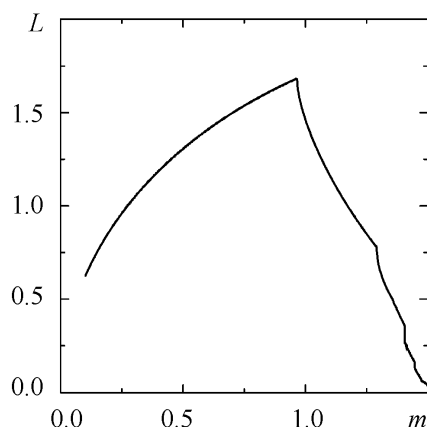


Рис. 4. Изменение расстояния  $L$  между предельным циклом и состоянием равновесия системы (3) при  $g = 0.2000$ ,  $b = 0.0$  и вариации параметра  $m$ . Максимум кривой соответствует первой бифуркации удвоения при  $m = 0.96586$ , последующие точки излома приурочены к следующим бифуркациям удвоения

### 3. Фазовая мультистабильность в режиме резонансной автомодуляции

Помимо каскада бифуркаций удвоения и перехода к хаосу, отличительной особенностью трехмерных осцилляторов является наличие режимов автомодуляции, то есть, квазипериодических колебаний. Как известно, структурно устойчивым при этом является резонансный режим, когда две частоты находятся в рациональном соотношении. Во временной реализации колебаний при этом имеется несколько локальных максимумов на периоде. Очевидно, синхронизация осцилляторов в таком режиме также может сопровождаться развитием фазовой мультистабильности.

В модели (3) в области малых значений параметра  $g$  при вариации остальных управляющих параметров могут быть найдены режимы резонансной автомодуляции с различным соотношением частот быстрой и медленной мод колебаний. Для целей нашего исследования был выбран режим, характеристики которого приведены на рис. 5, *a*, *б*. Как можно видеть, на один период колебаний приходится шесть периодов колебаний быстрой моды. В трехмерном фазовом пространстве модели (3) предельный цикл имеет сложную форму, с выраженным быстрым вращением в плоскости  $(x, y)$  и относительно медленным изменением переменной  $z$ .

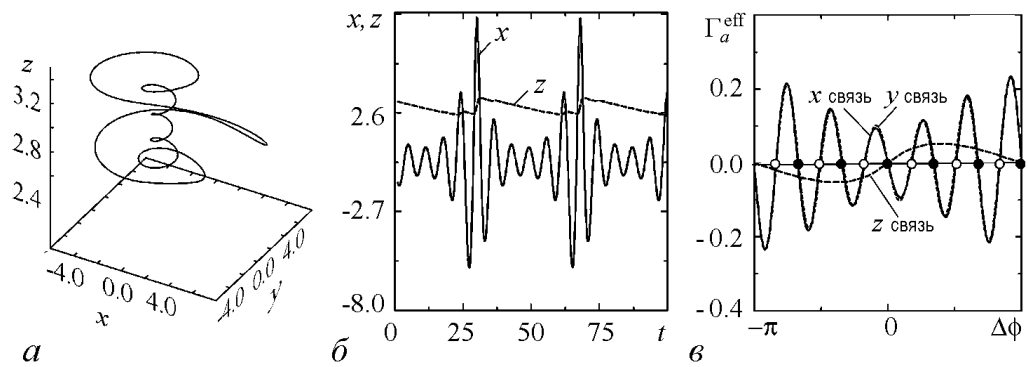


Рис. 5. Характеристики режима резонансной автомодуляции 1:6 при  $m = 2.90328$ ,  $g = 0.012505$ ,  $b = 0.00005$ : фазовый портрет (а); временные реализации переменных  $x$  и  $z$  (б); антисимметричная часть функции эффективной связи, рассчитанная для идентичных систем (3), связанных по различным переменным (в)

Различный характер поведения по различным переменным находит отражение и в свойствах эффективной функции связи, результаты расчета которой приведены на рис. 5, в. Как можно видеть, при связи осцилляторов по переменной  $x$  или  $y$  имеется шесть (по числу локальных максимумов) устойчивых синхронных режимов, тогда как связь по  $z$ -переменной приводит к единственному синхронному режиму, причем колебания осцилляторов при этом находятся в противофазе.

Изменения в наборе синхронных режимов при вариации направления вектора связи двух осцилляторов охарактеризованы на рис. 6. Видно, что при смещении в сторону связи по переменной  $z$  график  $\Gamma_a^{eff}$  деформируется, приближаясь к форме, показанной на рис. 5, в, при этом количество синхронных режимов последовательно уменьшается. Отметим, что точки  $\Gamma_a^{eff}$ , соответствующие устойчивым синхронным режимам с не кратным  $\pi$  сдвигом фаз, исчезают парами, в правой и левой части графика, разом уменьшая число устойчивых синхронных режимов на два, в отличие

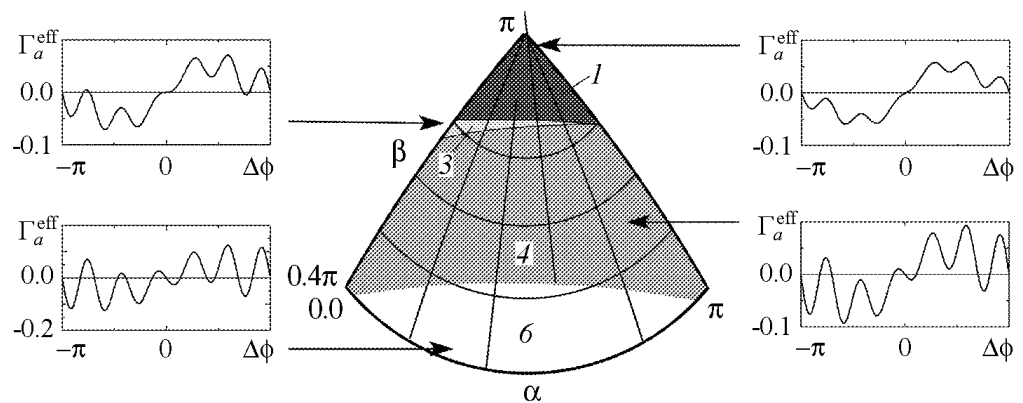


Рис. 6. Фрагмент диаграммы на плоскости  $(\alpha, \beta)$ , характеризующий изменение числа сосуществующих режимов в режиме резонансной автомодуляции. На вставках: характерный вид графика  $\Gamma_a^{eff}(\Delta\phi)$  для различных областей диаграммы

от точки синфазного режима  $\Delta\phi = 0$ , потеря устойчивости которым соответствует изменению числа сосуществующих синхронных режимов с 4 до 3. Подмеченные закономерности согласуются со свойствами систем с симметрией, так как взаимодействующие осцилляторы идентичны. Очевидно, при введении того или иного различия между осцилляторами будет наблюдаться более общий случай, когда синхронные режимы теряют устойчивость поодиночке.

Так как расчет функции эффективной связи дает информацию о поведении осцилляторов в приближении бесконечно слабого взаимодействия, представляет интерес проверить полученные результаты при малой, но конечной силе связи. График рис. 5, *в* дает шесть значений сдвига фаз, которым должны соответствовать шесть сосуществующих синхронных режимов. Используя эти значения для задания начальных условий и интегрируя уравнения модели в течение времени, достаточного для выхода на аттрактор, можно найти соответствующие режимы колебаний для случая конечной связи. Полученные таким образом режимы приведены на рис. 7. Как можно видеть, все обнаруженные синхронные режимы характеризуются синфазными колебаниями осцилляторов на быстрой моде колебаний, тогда как фазовый сдвиг по полному периоду колебаний дает значения, практически совпадающие с результатами расчета функции эффективной связи.

Из представленных на рис. 7 временных реализаций, можно сделать вывод, что для  $K_x = 0.0005$  результаты численного интегрирования и расчета функции

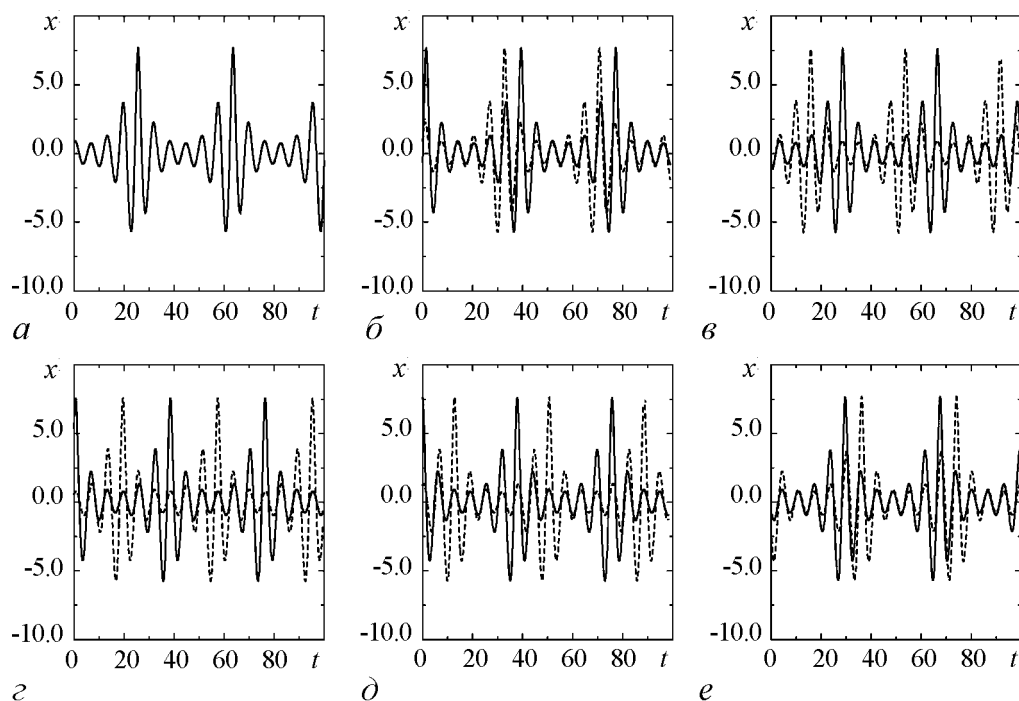


Рис. 7. Временные реализации 6-ти устойчивых синхронных режимов с фазовым сдвигом  $\Delta\phi$ : *a* – 0.0, *б* –  $1.6553\pi$ , *в* –  $1.3134\pi$ , *г* –  $0.9928\pi$ , *д* –  $0.6710\pi$ , и *е* –  $0.3425\pi$ , для режима резонансной автомодуляции 1:6 при  $K_x = 0.0005$ ,  $K_y = 0$ ,  $K_z = 0$ .

эффективной связи хорошо согласуются между собой. В случае более сильной связи достоверную информацию может дать построение отображения разности фаз. На рис. 8, *a* видно, что при  $K_x = 0.0005$  такое отображение имеет шесть устойчивых неподвижных точек, соответствующих шести устойчивым синхронным режимам.

Помимо увеличения степени связи, несомненный интерес представляет также рассмотрение того, каким образом существование набора одновременно устойчивых синхронных режимов соотносится с возможной неидентичностью взаимодействующих осцилляторов. Как известно, применительно к задачам синхронизации основным параметром неидентичности является различие в индивидуальных частотах колебаний осцилляторов. Простейший способ ввести расстройку по частотам, сохранив при этом зависимость режима колебаний от управляющих параметров, – это ввести множитель  $1/\omega_i$  при производных для каждой из связанных систем (1), где  $i = 1, 2$  – номер системы. Полагая  $\omega_1 = 1.0$ , вариацией  $\omega_2$  можно задавать различные соотношения частот осцилляторов.

В классическом случае взаимодействия квазигармонических осцилляторов увеличению расстройки по частотам соответствует выход из области резонанса и рассинхронизация колебаний, чему соответствует седлоузловая бифуркация устойчивого и седлового циклов, лежащих на поверхности тора. Для отображения окружности, аналогом которого в некотором смысле является рассчитанное нами численно отображение разности фаз, такой переход соответствует слиянию и исчезновению пары неподвижных точек. В случае, когда имеется несколько сосуществующих синхронных режимов, сценарий рассинхронизации сложнее.

На рис. 8, *б* видно, что увеличение частоты колебаний одного из осцилляторов до значения  $\omega_2 = 1.001$  приводит к исчезновению трех из шести пар неподвижных точек. То есть исчезновение одного из синхронных режимов приводит лишь к то-

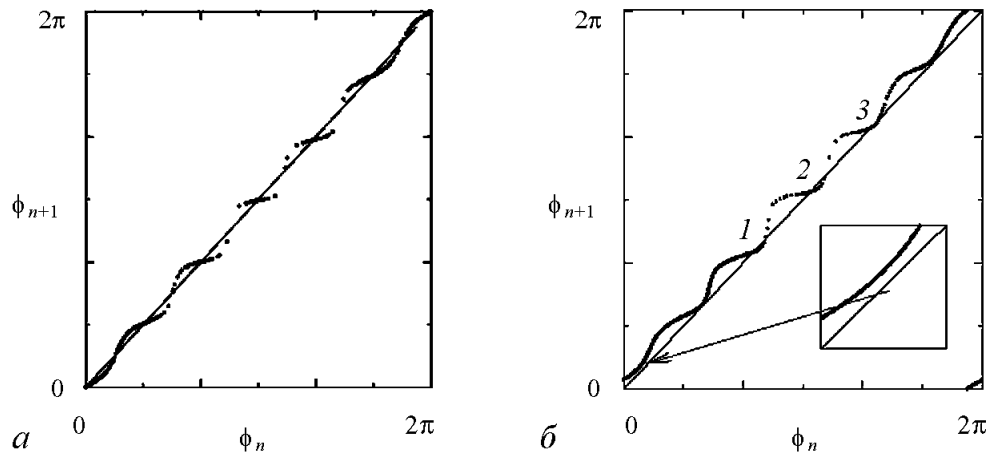


Рис. 8. Отображение разности фаз для режима резонансной автомодуляции 1:6, содержащее 6 устойчивых точек для идентичных связанных осцилляторов (*a*). При введении расстройки (частота второго осциллятора  $\omega_2$  увеличена до 1.001) остаются только три устойчивых точки (*б*). Параметры связи составляли  $(K_x, K_y, K_z) = (0.0005, 0, 0)$

му, что динамическая система «находит» ближайший устойчивый режим, оставаясь при этом в области синхронизации. Очевидно, при плавном увеличении степени расстройки по частотам, чему на рис. 8 соответствует сдвиг отображения вверх либо вниз, количество неподвижных точек последовательно уменьшается. Слияние и исчезновение последней пары неподвижных точек соответствует рассинхронизации осцилляторов.

Таким образом, при вариации расстройки по частотам, набор синхронных режимов должен соответствовать набор областей синхронизации, или языков Арнольда. На рис. 9 такой набор построен по результатам расчета границ устойчивости для каждой из пар неподвижных точек отображения разности фаз при связи осцилляторов по  $x$ -переменной.

Как можно видеть из рисунка, каждому из сосуществующих синхронных режимов действительно соответствует своя область синхронизации треугольной формы, причем все такие области берут начало в одной и той же точке по параметрам. В области небольших  $K_x$  по мере движения по параметру расстройки вправо или влево от значения 1.0, пересечению каждой из линий соответствует уменьшение числа сосуществующих синхронных режимов. Пересечению последней линии соответствует рассинхронизация взаимодействующих осцилляторов. Увеличение параметра связи  $K_x$  в пределах каждой из областей приводит к потере устойчивости синхронным режимом через бифуркацию удвоения периода. Последующий (при дальнейшем увеличении  $K_x$ ) сценарий усложнения колебаний и перехода к хаотическому аттрактору изучался в большом количестве работ и не является предметом нашего исследования.

С точки зрения свойств фазовой мультистабильности, диаграмма на рис. 9 интересна еще и тем, что шесть областей синхронизации не просто вложены одна в другую по своим границам (как это было показано в [6] для синхронизации систем с удвоениями периода), но расположены со сдвигом одна относительно другой. При интерпретации такой структуры в терминах резонансного тора и бифуркаций циклов на нем это означает, что на правой и левой границе области синхронизации устойчивый цикл претерпевает седлоузловую бифуркацию с участием двух различных седловых циклов. То есть в данном случае мы имеем дело не с вложенными языками Арнольда, а с аналогичной, но несколько более сложной структурой. Детальное изучение ее устройства представляет интерес для дальнейших исследований.

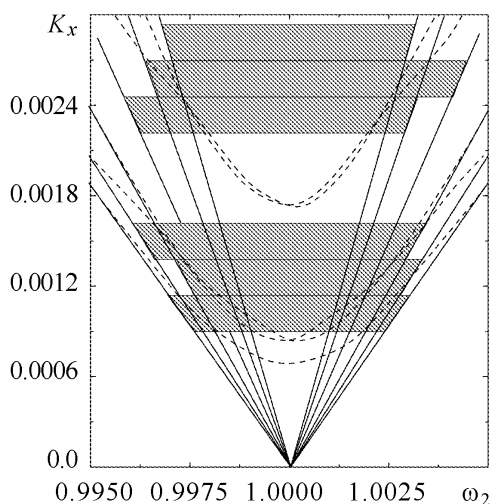


Рис. 9. Диаграмма устойчивости сосуществующих синхронных режимов на плоскости параметров расстройка – степень связи для режима резонансной автомодуляции 1:6, при  $m = 2.90328$ ,  $g = 0.012505$ ,  $b = 0.00005$ . Пунктиром обозначены бифуркации удвоения периода

#### 4. Выводы

Основным результатом нашей работы является более ясное понимание того факта, что при анализе фазовой мультистабильности в диффузионно связанных трехмерных осцилляторах необходимо учитывать не только форму колебаний (как это делалось в подавляющем большинстве предшествующих работ), но и особенности неизохронности данной конкретной математической модели осциллятора, которые проявляют себя по-разному при связи через различные переменные. Этот фактор в полной мере присутствует в пределе бесконечно слабой связи, и потому является не дополнительным «осложняющим обстоятельством», но равноправным механизмом формирования фазовой мультистабильности. То, что в ряде случаев хорошо работает подход, основанный на анализе формы колебаний осцилляторов (см., например, [6, 21, 22]), объясняется, скорее, удачным выбором модельных систем, нежели общей закономерностью.

Важным итогом работы можно считать и выявленные особенности структуры областей синхронизации в режиме резонансной автомодуляции, а именно, перекрытие со сдвигом зон устойчивости различных режимов. Детальное исследование того, что при этом происходит на поверхности резонансного тора, позволило бы обогатить привычные представления о бифуркационных сценариях, сопутствующих синхронизации.

*Работа частично поддержана грантом РФФИ (04-02-16769). А.М. Некрасов благодарит за поддержку грант CRDF REC-006.*

#### Библиографический список

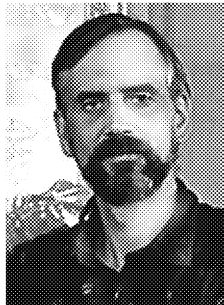
1. Астахов В.В., Безручко Б.П., Гуляев Ю.В., Селезнев Е.П. Мультистабильные состояния диссипативно связанных фейгенбаумовских систем // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 15, вып. 3. С. 60-64.
2. Астахов В.В., Безручко Б.П., Ерастова Е.Н., Селезнев Е.П. Виды колебаний и их эволюция в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах// ЖТФ. 1990. Т. 60, вып. 10. С. 19-26.
3. Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E., and Safonova M.A. Synchronization of chaos //Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng. 1992. Vol. 2. P. 633.
4. Anishchenko V.S. Dynamical Chaos – Models and Experiments: Appearance Routes and Structure of Chaos in Simple Dynamical Systems. World Scientific, Singapore, 1995.
5. Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.V., Balanov A.G., and Astakhov V.V. Phase multistability of Synchronous Chaotic Oscillations // Discrete Dynamics in Nature and Society. 2000. Vol. 4. P. 231.
6. Postnov D.E., Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.V., Balanov A.G., and Mosekilde E. Role of multistability in the transition to chaotic phase synchronization // Chaos. 1999. Vol. 9. P. 227.

7. *Postnov D.E., Sosnovtseva O.V., Nekrasov A.M., Mosekilde E., and Holstein-Rathlou N.-H.* Phase multistability of self-modulated oscillations // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 66. P. 0362.
8. *Postnov D.E., Sosnovtseva O.V., Malova S.Y., and Mosekilde E.* Complex phase dynamics in coupled bursters // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 67. P. 016215.
9. *Sherman A. and Rinzel J.* // *Proc. Nat. Acad. Sci. (USA).* 1992. Vol. 89. P. 2471.
10. *Han S.K., Kurrer C., and Kuramoto Y.* Dephasing and bursting in coupled neural oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 75. P. 3190.
11. *Postnov D., Han S.K., Kook H.* Synchronization of diffusively coupled oscillators near the homoclinic bifurcation // *Phys. Rev. E.* 1999. Vol. 60. P. 2799.
12. *Постнов Д.Э., Хан С.К.* Механизм противофазной синхронизации в моделях нейронов. // *Письма в ЖТФ.* 1999. Т. 25, № 4. С. 11-18.
13. *Izhikevich Eugene M.* Phase equations for relaxation oscillators // *SIAM J. Appl. Math.* 2000. Vol. 60, № 5. P. 1989-1805.
14. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. Механизмы возникновения, структура и свойства хаоса в радиофизических системах. М.: Наука, 1990.
15. *Теодорчик К.Ф.* Автоколебательные системы с инерционной нелинейностью // *ЖТФ.* 1946. Т. 16, вып. 7. С. 845-854.
16. *Капцов Л.Н., Сенаторов К.Я.* О работе RC-генератора пилообразных колебаний с инерционным активным двухполюсником // *Радиотехника и электроника.* 1964. Т. 9, вып. 10. С. 1757.
17. *Капцов Л.Н.* Возникновение пикового режима в неавтономном генераторе с инерционной нелинейностью // *Радиотехника и электроника.* 1975. Т. 20, вып. 12. С. 2496.
18. *Kuramoto Y.* *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence.* Springer-Verlag, New York, 1984.
19. *Park S.H., Kim S., Pyo H.-B., and Lee S.* Multistability analysis of phase locking patterns in an excitatory coupled neural system // *Phys. Rev. E.* 1999. Vol. 60. P. 2177-2181.
20. *Wang X.-J.* Genesis of bursting oscillations in the Hindmarsh-Rose model and homoclinicity to a chaotic saddle // *Physica D.* 1993. Vol. 62. P. 263-274.
21. *Баланов А.Г., Вадивасова Т.Е., Постнов Д.Э., Сосновцева О.В.* Бифуркация синхронизации хаоса в осцилляторе Ресслера с гармоническим воздействием // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1997. Т. 5, № 5. С. 31-43.
22. *Vadivasova T.E., Balanov A.G., Sosnovtseva O.V., Postnov D.E., and Mosekilde E.* Synchronization in driven chaotic system: diagnostics and bifurcations // *Phys. Lett. A.* 1999. Vol. 253. P. 66-74.

## MECHANISMS OF PHASE MULTISTABILITY DEVELOPMENT IN INTERACTING 3D-OSCILLATORS

*D. Postnov, A. Nekrasov*

We study the formation of multiple synchronous states for weakly diffusively coupled 3D-oscillators. As a representative 3D-model we use the equations for generator with inertial nonlinearity. It is shown that oscillations multi-crest waveform is not the factor that solely defines the number of multiple synchronous states, but dephasing-like effects have to be taken into account.



*Постнов Дмитрий Энгелевич* – профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Доктор физико-математических наук (2001). Область научных интересов - сложная динамика математических моделей биологических систем, индуцированные шумом эффекты в нелинейных динамических системах. Автор 56 научных статей и книги «Chaotic Synchronization. Application to Living Systems» (World Scientific, 2002). E-mail: postnov@chaos.ssu.runnet.ru



*Некрасов Александр Михайлович* – родился в Саратове (1979). Окончил Саратовский государственный университет, кафедру радиофизики и нелинейной динамики. В настоящее время аспирант третьего года обучения. Научные интересы - нелинейная динамика, фазовая мультистабильность синхронных режимов, исследование фазовой мультистабильности в диффузионно связанных осцилляторах. Автор 2 научных публикаций, участник 4 международных конференций, проводимых в Саратове и Санкт-Петербурге. E-mail: sasha@chaos.ssu.runnet.ru





## КОМПРЕССИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ИМПУЛЬСОВ В ЛИНЕЙНОЙ ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

*А.А. Галишиников, А.В. Кожевников, Ю.А. Филимонов*

В рамках подхода, основанного на втором приближении теории дисперсии, рассмотрено изменение ширины радиоимпульса на полувывоте в процессе его распространения в линейной диспергирующей среде. Для входных импульсов по форме близких к прямоугольным показано, что в отсутствие начальной фазовой модуляции ширина импульса меняется с расстоянием немонотонно и достигает 50–60% от первоначальной на длине компрессии, составляющей примерно 0.44 от дисперсионной длины. Показано, что указанная компрессия вызвана частотной модуляцией, наведенной на плоской части огибающей за счет дисперсионного возмущения фронтов. Представлены результаты эксперимента по изучению компрессии немодулированных прямоугольных радиоимпульсов поверхностных магнитостатических волн в пленке железонитридевого граната, которые хорошо согласуются с расчетами.

### Введение

Одним из интересных эффектов, наблюдающимся при распространении импульсов в диспергирующих средах, является их сжатие. В линейной диспергирующей среде, характеризуемой коэффициентом дисперсии  $\beta = \partial^2\omega/\partial k^2$ , ( $\omega$  – частота,  $k$  – волновое число), наиболее эффективно сжимаются радиоимпульсы с модуляцией фазы  $\theta$  по квадратичному закону  $\theta = (\omega - \alpha t)t$ , если скорость изменения частоты  $\alpha$  выбрана таким образом, что в головной части импульса содержатся спектральные компоненты с меньшим значением скорости распространения, чем в хвостовой части [1-4]. Для компрессии импульса в средах с аномальной дисперсией  $\beta < 0$  необходимо, чтобы вблизи фронта импульса располагались высокочастотные спектральные компоненты ( $\alpha > 0$ ), а при  $\beta > 0$  необходимо обеспечить рост частоты

спектральных компонент от фронта к срезу импульса ( $\alpha < 0$ ). При условии  $\beta\alpha < 0$  входной импульс длительностью  $T_0$  сначала сжимается, достигая минимальной длительности на некотором расстоянии  $L_c$ , называемом длиной компрессии, а затем расширяется. Можно определить относительную длительность  $W(x) = T(x)/T_0$ . Отметим, что если входной импульс имеет форму отличную от гауссовой, то величина  $W(x)$  будет существенно зависеть от способа определения длительности импульса: по полувысоте, по уровню  $1/e$  или с использованием среднеквадратичной длительности импульса  $T_{ck}(x)$  [5,6]

$$T_{ck}^2(x) = \langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2, \quad (1)$$

где  $\langle t^n \rangle = \varepsilon^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n |A(x, t)|^2 dt$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\varepsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} |A(x, t)|^2 dt$ ,  $A(x, t)$  – безразмерная комплексная огибающая импульса. Такая чувствительность длительности импульса с формой отличной от гауссовой к способу определения обусловлена изменением формы огибающей  $|A(x, t)|$  таких импульсов в процессе распространения<sup>1</sup>. При этом может оказаться, что значения  $W(x)$ , определенные по уровню  $1/2$  ( $W_{1/2}(x)$ ) и через среднеквадратичные длительности ( $W_{ck}(x)$ ), будут качественно различаться.

Поскольку для  $T_{ck}(x)$  в большинстве случаев можно получить аналитическое выражение, эту величину удобно использовать для оценки скорости передачи информации в волоконно-оптических линиях связи. Например, для немодулированного по частоте супергауссова импульса  $N$ -го порядка вида

$$A(x = 0, t) = A_0 \exp \left[ - (2t/T_0)^{2N} \right] \quad (2)$$

изменение среднеквадратичной длительности импульса с расстоянием  $x$  при  $N \gg 1$  можно записать в виде [2]

$$W_{ck}(x) = \left\{ 1 + 32N (x/L_D)^2 \right\}^{1/2}, \quad (3)$$

где  $L_D = T_0^2 V_g^3 / 8 |\beta|$  – дисперсионная длина, на которой гауссов импульс ( $N = 1$ ) становится шире в  $\sqrt{2}$  раз. Из (3) можно видеть, что при  $N \gg 1$ , то есть с приближением формы импульса (2) к прямоугольной, среднеквадратичная длительность импульса монотонно увеличивается с ростом  $x$ , причем значительно быстрее, чем для гауссова импульса.

Однако в экспериментах по исследованию распространения импульсов в дисперсионных средах о сжатии или расплывании импульса судят, как правило, путем сравнения длительностей входного и выходного импульсов, измеренных на полувысоте [7,8]. Цель данной работы показать, что характер зависимости  $W_{1/2}(x)$  для супергауссовых импульсов ( $N \geq 2$ ) принципиально отличается от (3), а именно: в

<sup>1</sup>В случае гауссова импульса форма огибающей во втором приближении теории дисперсии при распространении сохраняется.

отсутствие начальной фазовой модуляции может наблюдаться сжатие импульсов и образование минимума зависимости  $W_{1/2}(x)$ . Механизм указанного сжатия идентичен механизму компрессии фазово-модулированных импульсов. Однако, в отличие от импульсов с начальной фазовой модуляцией, в данном случае модуляция обусловлена дисперсионным возмущением фронтов импульса. При этом входные импульсы с формой близкой к прямоугольной уменьшают свою ширину почти в два раза на длине компрессии  $L_c \approx 0.44L_D$ .

Понятно, что для наблюдения компрессии немодулированных по частоте импульсов помимо их прямоугольности необходимо, чтобы длина пробега импульса  $S$  была не меньше длины компрессии  $S \geq L_c \approx 0.44L_D$ . Такое условие может выполняться, в частности, для СВЧ-импульсов магнитостатических волн (МСВ) в пленках железиттриевого граната (ЖИГ). Действительно, в экспериментах с МСВ расстояние  $S$  между входным и выходным микрополосками составляет, как правило,  $S \approx 0.3 - 1.0$  см. С другой стороны, при длительности импульса МСВ  $T_0 \approx 10 - 50$  нс, групповой скорости МСВ  $V_g \approx (3 - 10) \cdot 10^6$  см/с и коэффициенте дисперсии  $\beta \approx (0.5 - 5) \cdot 10^4$  см<sup>2</sup>/с, которые типичны, например, для экспериментов по наблюдению солитонов огибающей в пленках ЖИГ толщиной  $d \approx 5 - 15$  мкм, дисперсионная длина составляет  $L_D \approx 0.1 - 10$  см. В данной работе мы покажем на примере распространения прямоугольных импульсов поверхностных магнитостатических волн (ПМСВ) в пленке ЖИГ, что при расстоянии между антеннами равном длине компрессии ( $S \approx L_c \approx 0.44L_D$ ) выходной импульс по уровню 1/2 имеет ширину почти в два раза меньше, чем входной импульс.

Отметим, что задача о прохождении прямоугольных радиоимпульсов в линии задержки на основе МСВ, с точки зрения создания устройств обработки импульсных СВЧ-сигналов, является актуальной. Ранее такая задача аналитически рассматривалась в работе [9]. Однако возможность компрессии прямоугольных импульсов МСВ в этой работе не обсуждалась.

## 1. Компрессия прямоугольных импульсов в линейной диспергирующей среде

Рассмотрим распространение супергауссовых импульсов вида (2), бегущих вдоль оси  $x$  в линейной диспергирующей среде. Считаем, что волновой пакет характеризуется узким спектром

$$\Delta\omega \ll \omega, \quad (4a)$$

$$\Delta k \ll k. \quad (4б)$$

Тогда, во втором приближении теории дисперсии, эволюция входного импульса  $A_0(t)$  в системе координат  $(x, \tau = t - x/V_g)$  описывается уравнением [1]

$$A(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{-2\pi i \gamma x}} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(\eta) \exp \left[ -\frac{i}{2\gamma x} (\tau - \eta)^2 \right] d\eta, \quad (5)$$

где  $\gamma = -\beta/V_g^3 = \partial^2 k/\partial\omega^2$ . Рассмотрим основные моменты эволюции супергауссова импульса вида (2), взяв для определенности  $N = 2$ . При этом для облегчения анализа будем сравнивать основные моменты его эволюции с поведением частотно-модулированного гауссова импульса вида

$$A(x=0, t) = A_0 \exp[-(4/T_0^2 + \alpha i)t^2]. \quad (6)$$

Как известно [1], импульс (6) достигает минимальной длительности

$$T_{\min}^{N=1} = \frac{2T_0}{\sqrt{16 + (\alpha T_0^2)^2}} \quad (7)$$

на длине компрессии

$$L_c^{N=1} = \frac{4\alpha T_0^2}{16 + (\alpha T_0^2)^2} L_D. \quad (8)$$

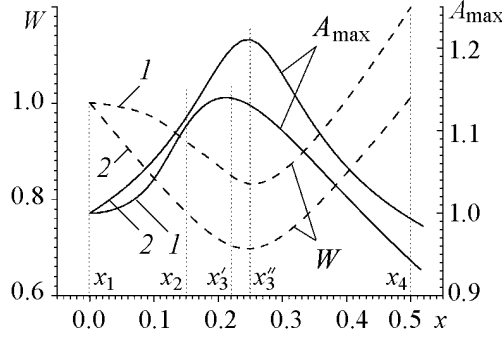


Рис. 1. Зависимости пиковой амплитуды  $A$  (сплошная линия) и длительности выходного импульса  $W$  (штриховая) от координаты  $x$ , см для супергауссова импульса  $N = 2$  (кривые 1) и модулированного по частоте гауссова импульса (кривые 2). Пунктиром показаны выбранные точки для анализа фазы. Значения параметров принимались равными:  $\gamma = 1 \text{ c}^2/\text{см}$ ,  $V_g = 1 \text{ см/с}$ ,  $A_0 = 1$ ,  $T_0 = 2 \text{ с}$ ,  $\alpha = 1 \text{ c}^{-2}$

пulses составляют величины  $W \approx 0.84$  и  $A_{\max} \approx 1.1$ , соответственно. Отметим, что отношение координат  $x_3$  компрессии импульсов дает для длины компрессии супергауссова импульса  $L_c^{N=2}$  выражение

$$L_c^{N=2} \approx \frac{L_D}{2} \cdot \frac{x_3'}{x_3''} \approx 0.44 \cdot L_D. \quad (9)$$

Для того чтобы разобраться в механизме компрессии супергауссова импульса, сопоставим поведение фазы  $\theta$  импульсов (2) и (6) от времени  $\tau$  на четырех характерных, с точки зрения эволюции импульсов, расстояниях  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ .

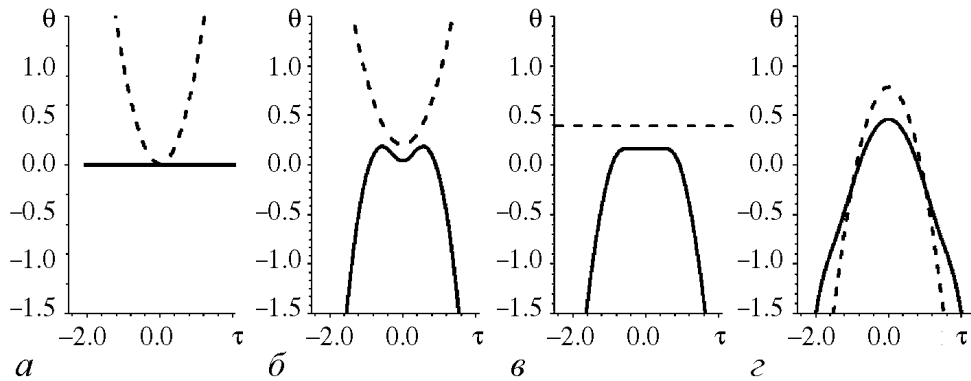


Рис. 2. Зависимости фазы  $\theta$ , рад от безразмерного времени  $\tau$  для супергауссова импульса  $N = 2$  (сплошная линия) и модулированного по частоте гауссова импульса (штриховая) в выбранных точках (пунктир на рис. 1):  $a - x_1 = 0$  (точка входа);  $б - x_2 = 0.15$  см;  $в - x_3' = 0.22$  см для супергауссова импульса и  $x_3'' = 0.25$  см для гауссова – точка максимального сжатия;  $г - x_4 = 0.5$  см

На рис. 2,  $a$  приведены импульсы на входе. У супергауссова импульса частотной модуляции нет, у гауссова – модуляция соответствует по знаку его компрессии.

На участке до точки компрессии, где по мере распространения амплитуда обоих импульсов растет, а ширина уменьшается, супергауссов импульс приобретает модуляцию. Причем характер модуляции на вершине супергауссова импульса оказывается идентичен случаю частотно-модулированного гауссова импульса (рис. 2,  $б$ ).

Точка  $x_3$  отвечает максимальному сжатию импульсов (рис. 2,  $в$ ). При этом у гауссова импульса модуляция пропадает, а у супергауссова – участок фазы, приводящий к компрессии, также становится плоским<sup>2</sup>.

По мере дальнейшего распространения фаза импульсов приобретает модуляцию, соответствующую расплыванию: амплитуда падает, ширина увеличивается (рис. 2,  $г$ ).

Таким образом, компрессия супергауссова импульса вызвана частотной модуляцией, которая наводится на плоской части импульса в первые моменты его эволюции в диспергирующей среде. Чтобы объяснить такое поведение фазы супергауссова импульса, обратимся к эволюционному уравнению для огибающей, которое во втором приближении теории дисперсии и в координатах  $(x, \tau)$  имеет вид [1]

$$\frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{i}{2} \gamma \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2}. \quad (10)$$

Как видно, изменение амплитуды огибающей в пространстве определяется второй производной по времени, стоящей в правой части уравнения (10). Поскольку в начале эволюции  $\partial^2 A / \partial \tau^2 \rightarrow 0$  на вершине входного импульса (2), то некоторое время амплитуда и, что более важно, фаза остаются практически неизменными. В это время

<sup>2</sup>Для супергауссова импульса координата  $x_3 = 0.22$  см с точностью не хуже 5% отвечает максимуму амплитуды и минимуму ширины импульса по уровню 1/2.

фронт и срез импульса эволюционируют независимо. При этом из-за их дисперсионного расплывания на центральную часть импульса «наползают» с фронта медленные гармоники, а со среза импульса – быстрые. Из-за требования непрерывности фаза импульса в его центральной части приобретает модуляцию, соответствующую компрессии импульса (см. рис. 2, б).

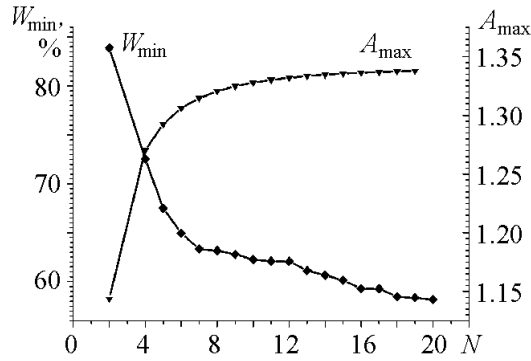


Рис. 3. Зависимость максимальной пиковой амплитуды  $A_{\max}$  и минимальной длительности  $W_{\min}$  супергауссова импульса от его степени  $N$

уровню  $1/2$  эти импульсы демонстрируют сжатие. На рис. 3 показаны зависимости пиковой амплитуды и относительной ширины импульса (2) от  $N$ . Видно, что с ростом  $N$  максимальная пиковая амплитуда вырастает от 114% для  $N = 2$  до 134% для  $N \rightarrow \infty$ , минимальная ширина при этом меняется в пределах от 77% до 56% от ширины входного импульса.

Следует отметить, что величина пиковой амплитуды импульса в точке компрессии не зависит от коэффициента дисперсии  $\gamma$  и длительности входного импульса  $T_0$ . Действительно, заменой переменных  $x \rightarrow \tilde{x}/\gamma$ ,  $t \rightarrow \tilde{t}/T_0$  можно перейти к беспараметрической записи уравнения (10) и граничного условия к нему (2). В свою очередь, это означает, что длина компрессии, характеризующая пространственный масштаб и связанный с ним через групповую скорость временной масштаб системы, определяется дисперсией  $\gamma$  и длительностью  $T_0$ , а от формы импульса зависит постольку, поскольку от формы зависит ширина спектра импульса. Однако зависимость эта слабая, и в приближении ширины спектра импульса  $\Delta\omega \approx 1/T_0$  ею можно пренебречь. Для супергауссовых импульсов положение точки компрессии с точностью не хуже 5% оставалось неизменным для любых  $N$ .

## 2. Длина компрессии прямоугольных импульсов

Получим аналитическое выражение для компрессионной длины. Поскольку компрессионная длина слабо зависит от формы импульса, возьмем прямоугольный импульс

$$A(x=0, t) = \begin{cases} A_0, & t \leq T_0, \\ 0, & t > T_0. \end{cases} \quad (11)$$

В этом случае интеграл (5) можно получить в аналитическом виде

$$A(x, \tau) = \frac{A_0}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{(1+i)\tau}{2\sqrt{\gamma x}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{(1+i)(\tau - T_0)}{2\sqrt{\gamma x}} \right) \right]. \quad (12)$$

Вспользуемся далее тем, что в точке максимального сжатия импульса амплитуда импульса достигает максимума. Положим  $\tau = T_0/2$ , что соответствует середине импульса и где естественно ожидать образование максимума. Для нахождения экстремума продифференцируем по  $x$  и приравняем полученное выражение нулю. После преобразования можно получить уравнение

$$C \left( \frac{\sqrt{X}}{2\sqrt{\pi}} \right) \cos \left( \frac{X}{8} \right) + S \left( \frac{\sqrt{X}}{2\sqrt{\pi}} \right) \sin \left( \frac{X}{8} \right) = 0, \quad (13)$$

где  $C(x)$  и  $S(x)$  – интегралы Френеля, определяемые как

$$C(x) = \int_0^x \cos \left( \frac{\pi}{2} t^2 \right) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin \left( \frac{\pi}{2} t^2 \right) dt, \quad (14)$$

$$X = \frac{T_0^2}{\gamma x}. \quad (15)$$

Уравнение (12) разрешить в явном виде относительно  $X$  нельзя, однако нам достаточно численного решения

$$X = 18.37951658985 \dots \approx 18.4. \quad (16)$$

Это решение не является единственным, оно выбрано исходя из предположения, что, несмотря на сложное поведение импульса и образования множества локальных максимумов в процессе эволюции, после точки компрессии импульс монотонно расплывается, то есть решение (16) соответствует максимально удаленному от входа экстремуму. Такое предположение подтверждается при графическом анализе зависимости (12). Из (15), (16) получаем компрессионную длину

$$L_c \approx \frac{T_0^2}{18.4|\gamma|} = \frac{T_0^2 V_g^3}{18.4|\beta|}. \quad (17)$$

С учетом выражения для дисперсионной длины выражение (17) с точностью не хуже 2% перейдет в (9). Подставляя (16) в (12) можно получить максимальное пиковое значение амплитуды огибающей для прямоугольного входного импульса

$$A_{\max} = 1.34A_0. \quad (18)$$

### 3. Экспериментальное исследование компрессии прямоугольных импульсов ПМСВ в пленках ЖИГ

Экспериментально исследовалось прохождение импульсов ПМСВ через макет линии задержки, образованный входным и выходным преобразователями, расположенными на поверхности пленки ЖИГ. Расстояние  $S$  между преобразователями могло меняться в диапазоне  $S \approx 0.4 \dots 1.2$  см. Использовалась пленка ЖИГ с параметрами: толщина  $d = 19$  мкм, намагниченность насыщения  $4\pi M_0 = 1750$  Гс, ширина линии ферромагнитного резонанса  $\Delta H = 0.35$  Э. Макет помещался во внешнее намагничивающее поле, которое менялось в пределах  $H = 654\text{--}730$  Э и было направлено вдоль микрополосковых преобразователей.

Подаваемые на входной преобразователь СВЧ-импульсы получались путем модуляции непрерывного сигнала с помощью скоростного pin-диодного переключателя. Частота несущей  $f_{\Gamma} = 4100$  МГц, мощность сигнала  $P_0 = 10$  мВт. Длительности фронта  $T_{\phi}$  и среза  $T_c$  импульса не превышали  $T_{\phi} \leq 5$  нс и  $T_c \leq 2$  нс, соответственно, что позволяло уже при длительности импульсов  $T_0$  по полувысоте более 7 нс получать импульсы с плоским участком на вершине. С выхода макета сигнал через усилитель и детекторную головку поступал на один из входов осциллографа. Для наблюдения огибающей входного импульса сигнал с ответвителя детектировался и подавался на второй вход осциллографа.

**3.1. Методика эксперимента.** Методика эксперимента по обнаружению компрессии немодулированных импульсов основывалась на использовании, с одной стороны, связи длины компрессии импульса  $L_c$  (17) с длительностью входного импульса  $T_0$  и дисперсионными характеристиками среды  $\beta$  и  $V_g$ , а с другой – на ожидаемом росте амплитуды импульса в точке компрессии (18). Действительно, при фиксированных величинах расстояния между микрополосками  $S$ , магнитного поля  $H$  и частоте генератора  $f_{\Gamma}$  равенство длин компрессии импульса  $L_c$  и расстояния  $S$  будет достигаться при некотором значении  $T_0 = T_0^c(S)$ :  $L_c(T_0^c) = S$ . При условии  $L_c(T_0^c) = S$  следует ожидать, что длительность  $T_0$  выходного импульса по уровню 1/2 и относительная длительность импульса  $W$  будут минимальны<sup>3</sup>, а пиковая амплитуда импульса  $A_{\max}$  максимальна.

Понятно, что при условии  $L_c \gg S$  (реализуется уже при  $T_0 \geq 3T_0^c(S)$ ) влияние компрессии импульса будет слабым и длительность выходного импульса  $T$  будет близка к длительности входного импульса  $T_0$ . При этом значения  $A_{\max}$  будут стремиться к некоторому стационарному значению  $A^*$ , отвечающему уровню выходного сигнала в непрерывном режиме возбуждения ПМСВ.

С другой стороны, при  $T_0 < T_0^c(S)$  длина компрессии окажется меньше расстояния между преобразователями ( $L_c < S$ ), и за счет эффектов дисперсионного

<sup>3</sup>Длительность немодулированного гауссова импульса на длине пробега  $S$  также немонотонно зависит от  $T_0$ , достигая минимальной длительности  $T_{\min} = 2(|\gamma| S)^{1/2}$  при условии  $S = L_D$ , чему отвечает длительность входного импульса  $T_0 = (2|\gamma| S)^{1/2}$  [1]. При этом  $T_{\min} > T_0$ .



расплывания следует ожидать как уширения импульса относительно входного, так и падения его пиковой амплитуды относительно случая  $T_0 = T_0^c(S)$ .

С учетом сказанного, рассмотрим поведение относительной длительности  $W$  и пиковой амплитуды  $A_{\max}$ , нормированной на амплитуду сигнала  $A^*$ , выходного импульса с изменением  $T_0$  в исследуемом макете при величине магнитного поля  $H = 721$  Э и расстоянии между преобразователями  $S = 11$  мм (рис. 4). На вставке показаны серии осциллограмм для огибающих входного и выходного импульсов для различных  $T_0$ . Точками отмечены значения, соответствующие огибающим на вставке. Можно видеть, что по мере уменьшения длительности входного импульса амплитуда выходного импульса растет, а его длительность по уровню 1/2 уменьшается. При значении  $T_0 = T_0^c \approx 18$  нс длительность выходного импульса составляет  $T \approx 11.5$  нс, что соответствует  $W \approx 64\%$ . При этом пиковая амплитуда импульса

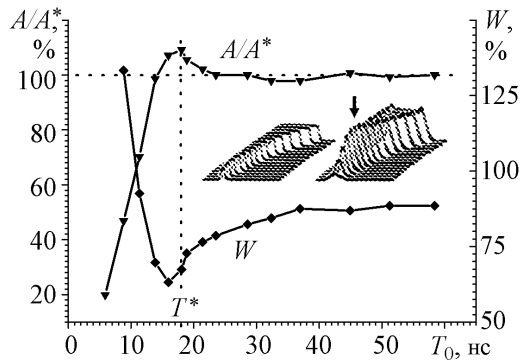


Рис. 4. Экспериментальные зависимости нормированной пиковой амплитуды и длительности выходного импульса от длительности  $T_0$ , нс входного импульса. Горизонтальный пунктир – уровень сигнала, соответствующий непрерывному режиму возбуждения волны, вертикальный – точка компрессии. На вставке серия огибающих входного (слева) и выходного (справа) импульсов при  $T_0$ , соответствующих точкам на графике. Стрелкой показана точка компрессии

вырастает в 1.1 раза относительно уровня сигнала  $A^*$ . При длительности входных импульсов  $T_0 < T_0^c \approx 18$  нс ширина выходных импульсов по уровню 1/2 резко возрастает, а пиковая амплитуда убывает. Отметим, что именно такое поведение характерно для гауссова импульса по мере уменьшения его длительности [1]. В целом, зависимости  $W(T_0)$  и  $A_{\max}(T_0)$  на рис. 4 показывают, что поведение импульса ПМСВ отвечает представлениям о сжатии супергауссовых импульсов (см. рис. 1).

**3.2. Исследование связи длины компрессии и дисперсии волны.** Покажем теперь, что значение длительности импульса  $T_0 = T_0^c(S)$ , отвечающее компрессии импульса по уровню 1/2 на расстоянии  $S$ , удовлетворительно описывается выражением (17). Коэффициент дисперсионного расплывания  $\beta$  и групповая скорость  $V_g$  могут быть получены из результатов измерений закона дисперсии или непосредственно из дисперсионного уравнения для ПМСВ, которое имеет вид [10]

$$\omega^2 = \omega_H^2 + \omega_m \omega_H + \frac{\omega_m^2}{4} (1 - \exp(-2kd)), \quad (19)$$

где  $\omega_H = g \cdot H$ ,  $\omega_m = g \cdot 4\pi M_0$ ,  $g$  – гиромагнитное отношение для электрона.

Закон дисперсии ПМСВ при некотором значении поля  $\omega = \omega(k, H)$  определялся с помощью фазочастотной характеристики макета линии задержки по стандартной методике [11]. При этом набег  $\Delta\Phi$  фазы ПМСВ с частотой  $\omega = 2\pi f$  на длине пробега  $S$  связан с волновым числом  $k$  ПМСВ соотношением  $k = \Delta\Phi/S$ .

На рис. 5 точками показаны результаты измерений законов дисперсии ПМСВ при значениях поля  $H_1 = 654$  Э и  $H_2 = 721$  Э. Результаты измерений зависимостей  $\omega = \omega(k, H)$  хорошо согласуются с решениями дисперсионного уравнения (19), если при расчетах ввести поправку к полю  $\delta H$ , которая для значений полей  $H_1$  и  $H_2$  составила  $\delta H_1 \approx 49$  Э и  $\delta H_2 \approx 58$  Э, соответственно. Необходимость введения поправок к экспериментальным значениям магнитных полей  $H^* = H + \delta H$  следует связать, прежде всего, с влиянием магнитной анизотропии пленок ЖИГ, которая в уравнении (19) не учитывается.

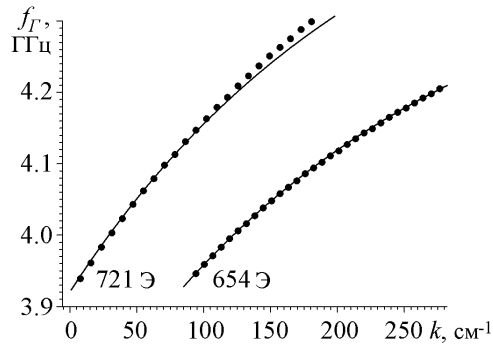


Рис. 5. Измеренные (кружки) и рассчитанные по уравнению Дэймона - Эшбаха (19) (сплошные линии) дисперсионные зависимости для использованной пленки ЖИГ при разных значениях намагничивающего поля

Изменении подмагничивающего поля  $H$ . Значения  $V_g$  и  $\beta$  получались дифференцированием как уравнения Дэймона - Эшбаха (19) при подстановке значения полей  $H^* = H + \delta H$ , так и непосредственно из экспериментальных кривых<sup>4</sup>  $\omega(k)$  (треугольники и кружки на рис. 6, соответственно). Экспериментальные и рассчитанные зависимости  $V_g$  и  $\beta$  совпадали с точностью не хуже 50%. Причем значения групповой скорости с точностью 5% совпадали со значениями  $V_g$ , измеренными по задержке импульса (см. звездочки на рис. 6).

На рис. 7, а и 7, б показаны измеренные и рассчитанные с помощью (17) зависимости длины компрессии  $L_c$  от длительности входного импульса  $T_0$  при значениях магнитного поля  $H_1 = 654$  Э и  $H_2 = 721$  Э. Для построения экспериментальных зависимостей  $L_c(T_0)$  использовалась методика обнаружения эффекта компрессии, изложенная выше. При этом расстояние  $S$  между преобразователями менялось с шагом  $\delta S \approx 1$  мм от  $S = 4$  мм до  $S = 12$  мм. Значения  $T_0 = T_0^c(S)$ , при которых достигалось условие  $L_c(T_0^c) = S$  и наблюдалась компрессия импульса, затем подставлялись в (17) для расчета  $L_c$ . Экспериментальная зависимость  $L_c(T_0^c)$  обозначена на рис. 7 квадратиками, соединенными сплошной линией. Треугольники и кружки соответствуют значениям, полученным по формуле (17) с использованием коэффициентов  $\beta$  и  $V_g$ , обозначенных на рис. 6 треугольниками и кружками, соответственно.

<sup>4</sup>При дифференцировании зависимости аппроксимировались квадратичными парабололами.

Следует, однако, отметить, что в тех случаях, когда частоте  $f_G = 4.1$  ГГц отвечает возбуждение длинноволновых ПМСВ, не удается получить хорошего совпадения измеренного и рассчитанного законов дисперсии  $\omega = \omega(k, H)$  только за счет поправок к магнитному полю (см. результаты для поля  $H_2 = 721$  Э на рис. 5). Причину этого расхождения мы видим в отличии реального макета линии задержки от модели изолированной и безграничной ферритовой пленки, заложенной в (19).

На рис. 6 показаны результаты расчетов групповой скорости  $V_g$  и коэффициента дисперсии  $\beta$  на выбранной частоте возбуждения ПМСВ  $f_G = 4.1$  ГГц при изменении подмагничивающего поля  $H$ .

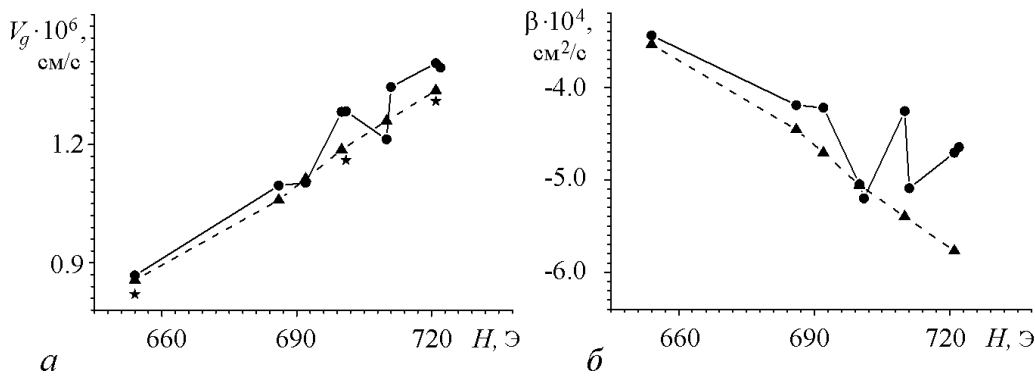


Рис. 6. Зависимости групповой скорости и дисперсионного коэффициента от намагничивающего поля, полученные дифференцированием измеренных дисперсионных зависимостей (кружки) и уравнения Дэймона – Эшбаха (19) с учетом поправок к полю (треугольники). Звездочками указаны значения групповой скорости, измеренные по задержке импульса

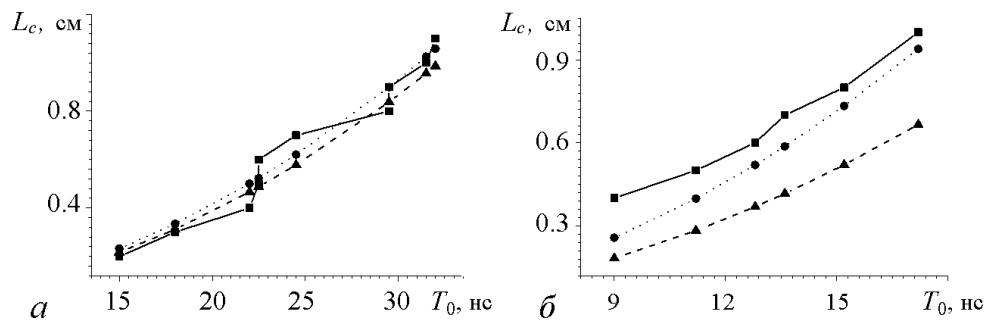


Рис. 7. Зависимости компрессионной длины от длительности входного импульса, измеренные экспериментально (квадратики) и полученные по формуле (17) (кружки и треугольники) с использованием коэффициентов, приведенных на рис. 6.  $H_1 = 654$  Э (а) и  $H_2 = 721$  Э (б)

Рассмотрим теперь влияние величины поля  $H$  на длительность входных импульсов  $T_0^c(H)$ , отвечающих при некотором заданном расстоянии  $S$  между антеннами достижению условия компрессии выходного импульса  $L_c(T_0^c) = S$ . На рис. 8 для расстояния  $S = 10$  мм квадратами, соединенными сплошной линией, показана экспериментальная зависимость  $T_0^c(H)$ . Кружки и треугольники отвечают зависимостям  $T_0^c(H)$ , рассчитанным по (17) при подстановке  $L^c = S = 10$  мм и значений  $\beta$  и  $V_g$ , обозначенных на рис. 6 треугольниками и кружками, соответственно.

Из рис. 7, 8 можно видеть, что экспериментальные и рассчитанные зависимости  $L_c(T_0)$  и  $T_0^c(H)$  совпадают с точностью не хуже 50%. Наибольшее расхождение наблюдается при параметрах эксперимента, отвечающих компрессии входных импульсов малой длительности  $T_0$ . Понятно, что одна из причин указанного расхождения связана с отклонением формы импульса при малых  $T_0$  от прямоугольной из-за

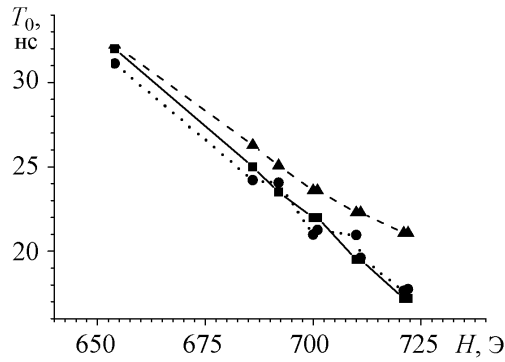


Рис. 8. Зависимости длительности входного импульса от намагничивающего поля, измеренные экспериментально (квадратики) и полученные по формуле (17) (кружки и треугольники) с использованием коэффициентов, приведенных на рис. 6, при расстоянии между преобразователями  $S = 10$  мм

конечной длительности фронта  $T_f$  и среза  $T_c$  импульса. Другая причина заключается в широком пространственном спектре импульсов ПМСВ при малых  $T_0$ . Действительно, импульс  $T_0 = 10$  нс имеет ширину спектра  $\Delta f \sim 1/T_0 = 100$  МГц. При поле  $H_2 = 721$  Э для рассмотренной пленки ширина спектра волновых чисел составит  $\Delta k \approx 47$  см $^{-1}$  при волновом числе несущей  $k = 70$  см $^{-1}$ . Как видно, ширина пространственного спектра сравнима с волновым числом в рабочей точке, что приводит к нарушению условия (46), определяющего применимость использованного подхода. Следствием этого становится неоднородность  $V_g$  и  $\beta$  по спектру импульса.

Отметим, что в эксперименте спектр импульса может сужаться за счет неравномерности по частоте как эффективности возбуждения ПМСВ микрополосковым преобразователем, так и потерь ПМСВ в линии задержки – эффект фильтрации [12]. Этот эффект также может давать вклад в расхождение результатов эксперимента с расчетом.

**3.3. Оценка влияния нелинейных эффектов на результаты эксперимента.** Отметим, что помимо дисперсионных эффектов на распространение импульсов МСВ в пленках ЖИГ значительное влияние могут оказывать нелинейные явления, связанные с процессами трех- и четырехмагнотного взаимодействия [13,14]. Для выбранных частоты возбуждения ПМСВ  $f_T = 4.1$  ГГц и диапазона полей подмагничивания  $H = 654 \div 730$  Э процессы трехмагнотного распада в пленках ЖИГ запрещены законами сохранения и наиболее вероятными оказываются процессы четырехмагнотного взаимодействия. Причем последние могут быть связаны как с эффектами параметрического возбуждения спиновых волн, так и с эффектами самовоздействия ПМСВ.

Для анализа вклада указанных нелинейных эффектов в результаты эксперимента оценим амплитуду высокочастотной намагниченности ПМСВ  $|m_{\text{ПМСВ}}|$ . Для этого воспользуемся связью  $|m_{\text{ПМСВ}}|$  с мощностью волны  $P_{\text{ПМСВ}}$ , которую можно представить в виде [15]

$$P_{\text{ПМСВ}} = |m_{\text{ПМСВ}}|^2 V_g \cdot d \cdot w, \quad (20)$$

где  $w$  – ширина пленки ЖИГ, которая составляла в нашем случае 4 мм. Учтем далее, что используемые в наших экспериментах микрополосковые преобразователи обеспечивали при параметрах эксперимента возбуждение ПМСВ с мощностью  $P_{\text{ПМСВ}}$  не более 20% от уровня падающей  $P_0 = 10$  мВт:  $P_{\text{ПМСВ}} \leq 2$  мВт. Групповая скорость

ПМСВ в условиях экспериментов принимала значения  $V_g \approx (9 - 15) \cdot 10^6$  см/сек (см. рис. 5). Тогда из (20) получим, что амплитуда высокочастотной намагниченности ПМСВ в наших экспериментах не превышала величины  $|m_{\text{ПМСВ}}| < 1.6$  Гс.

Рассмотрим возможность параметрического возбуждения спиновых волн импульсами ПМСВ с амплитудой намагниченности  $|m_{\text{ПМСВ}}| < 1.6$  Гс и длительностью  $T_0 \approx 10 \dots 60$  нс. Для этого следует принять во внимание, что процесс параметрического возбуждения спиновых волн характеризуется конечным временем развития  $t^*$  [16]

$$1/t^* \approx (2\pi g \Delta H_k) \left( \frac{|m_{\text{ПМСВ}}|^2}{|m_{\text{th}}|^2} - 1 \right)^{1/2}, \quad (21)$$

где  $m_{\text{th}}$  пороговая амплитуда намагниченности, при которой оказывается возможным возбуждение параметрических спиновых волн (ПСВ) непрерывным сигналом ПМСВ,  $\Delta H_k$  – скорость релаксации ПСВ с волновым числом  $k$ . Очевидно, что возбуждение ПСВ импульсным сигналом возможно, если, во-первых, амплитуда намагниченности превышает порог

$$|m_{\text{ПМСВ}}| > |m_{\text{th}}| \quad (22a)$$

и, во-вторых, длительность импульса превышает время  $t^*$

$$T_0 > t^*. \quad (22b)$$

Пороговое значение  $m_{\text{th}}$  можно оценить с помощью соотношения [16]

$$m_{\text{th}} = M_0 \sqrt{\frac{g \Delta H_k \cdot f_{\Gamma}}{\tilde{f}_H (\tilde{f}_H + f_m)}}, \quad (23)$$

где  $\tilde{f}_H = f_H + f_m \cdot D \cdot k_{\text{ПМСВ}}^2$ ,  $D = 3 \cdot 10^{-11}$  см<sup>2</sup> – обменная жесткость в ЖИГ. Если принять, что  $\Delta H_k \approx \Delta H \approx 0.35$  Э,  $k_{\text{ПМСВ}} \approx 10^5$  см<sup>-1</sup>, то из (23) получим  $m_{\text{th}} \approx 1.5$  Гс и при амплитуде намагниченности в волне  $|m_{\text{ПМСВ}}| \approx 1.6$  Гс условие (22a) выполняется. С другой стороны, как нетрудно видеть из (21), данной величине порога и намагниченности в волне отвечает время развития параметрической неустойчивости  $t^* \approx 430$  нс. Понятно, что при длительности импульсов ПМСВ  $T_0 \approx 10 \dots 60$  нс условие (22b) не выполняется. Следовательно, при выбранных параметрах импульсов ПМСВ возбуждение ПСВ невозможно. Отметим, что подтверждение сказанному можно видеть в отсутствии характерного скола в хвостовой части импульса ПМСВ при максимальных длительностях  $T_0 \approx 30 \dots 60$  нс (см. рис. 4).

Процессы нелинейного самовоздействия ПМСВ в нашем случае также несущественны. Во-первых, ввиду нарушения для ПМСВ условия Лайтхилла на образование солитонов [17], они не могут приводить к наблюдаемому в эксперименте сжатию импульсов. Кроме того, связанный с такими процессами вклад в поведение комплексной амплитуды ПМСВ оказывается существенным на длине нелинейности [14]

$$L_H = \frac{V_g M_0^2}{|\chi| \cdot |m_{\text{ПМСВ}}|^2} \approx 10 \text{ см}, \quad (24)$$

где  $\chi \approx 10^{10} \text{ сек}^{-1}$  коэффициент нелинейности для ПМСВ [17]. Полученное значение длины нелинейности на порядок превышает максимальное расстояние между преобразователями в эксперименте. Ясно, что вкладом эффектов самовоздействия ПМСВ в результаты измерения также можно пренебречь.

### Заключение

Таким образом, в рамках подхода, основанного на втором приближении теории дисперсии, рассмотрено изменение ширины супергауссовых и трапециевидных импульсов на половинной высоте в процессе их распространения в линейной диспергирующей среде. Показано, что в отсутствие начальной фазовой модуляции ширина таких импульсов по уровню 1/2 меняется с расстоянием немонотонно и может оказаться меньше ширины входного импульса на длине компрессии, составляющей примерно половину от дисперсионной длины ( $L_c \approx 0.44 \cdot L_D$ ). Показано, что указанная компрессия вызвана частотной модуляцией, которая на начальном этапе эволюции импульса наводится на плоской части огибающей за счет дисперсионного возмущения фронтов. Экспериментально показано, что указанный механизм компрессии реализуется при распространении импульсов поверхностных магнитостатических волн в пленках железиттриевого граната. Последнее обстоятельство показывает, что рассмотренный эффект сжатия прямоугольных импульсов магнитостатических волн в пленках железиттриевого граната следует учитывать как при разработке устройств по обработке импульсных сигналов СВЧ на основе эффектов распространения магнитостатических волн, так и при интерпретации результатов экспериментов по изучению солитонов огибающей импульсов магнитостатических волн.

*Работа поддержана грантами РФФИ № 04-02-17537, CRDF № REC-006, а также грантом Фонда содействия отечественной науке за 2005 год.*

### Библиографический список

1. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1990.
2. *Ахманов С.А., Выслоух В.А., Чиркин А.С.* Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. М.: Наука, 1988.
3. *Сухоруков А.П.* Оптика сверхкоротких импульсов // Соросовский образовательный журнал. Физика. 1997.
4. *Вайнштейн Л.А.* Распространение импульсов // УФН. 1976. Т. 118, вып. 2. С. 339.
5. *Agrawal G.P., Potasek M.J.* Effect of frequency chirping on the performance of optical communication systems // Optics Letters. 1986. Vol. 11, №5. P. 318.
6. *Anderson D., Lisak M.* Propagation characteristics of frequency-chirped super-Gaussian optical pulses // Optics Letters. 1986. Vol. 11, № 9. P. 569.
7. *Iwashita K., Nakagawa K., Nakano Y., Suzuki Y.* Chirp pulse transmission through a single-mode fibre // Electronics Lett. 1982. Vol. 18, № 20. P. 873.

8. *Kalinikos B.A., Kovshikov N.G., Slavin A.N.* Observation of dipole spin wave envelope solitons in ferromagnetics films // IEEE Trans. on magnetics. 1990. Vol. 26, №5. P. 1477.
9. *Кудинов Е.В., Шабунин А.П.* Прохождение сигналов в линии задержки на основе магнитостатических волн (МСВ) // Радиотехнические устройства. Киевск. политехн. ин-т, 1987. С.4.
10. *Гуревич А.Г., Мелков Г.А.* Магнитные колебания и волны. М.: Наука, 1994.
11. *Медведев В.В., Фетисов Ю.К.* Вопросы кибернетики. Устройства и системы. М.: МИРЭА, 1983. С.171.
12. *Костылев М.П., Ковшиков Н.Г.* Возбуждение, формирование и распространение солитоноподобных импульсов спиновых волн в ферромагнитных пленках (численный расчет и эксперимент) // ЖТФ. 2002. Т. 72, вып.11. С. 5.
13. *Synogach V.T., Fetisov Yu.K., Mathieu Ch., Patton C.E.* Ultra short magnetostatic surface wave pulse formation due to three magnon splitting // IEEE Intermag. Canada, Toronto 9-13 April 2000. P. GC-06.
14. *Filimonov Yu.A., Marcelli R., Nikitov S.A.* Non-linear magnetostatic surface waves pulse propagation in ferrite-dielectric-metal structure // IEEE Trans. on magn. 2002, September. Vol. 38, №5. P. 3105.
15. *Казаков Г.Т., Кожевников А.В., Филимонов Ю.А.* Четырехмагنونный распад поверхностных магнитостатических волн в пленках железиттриевого граната // ФТТ. 1998. Т. 39. С. 330.
16. *Чиркин В.И., Шильников Ю.Р., Челищев Н.И.* Время возбуждения спиновых волн для нелинейных процессов первого и второго порядков // ФТТ. 1968. Т. 10, вып.6. С. 1876.
17. *Звездин А.К., Попков А.Ф.* К нелинейной теории магнитостатических спиновых волн // ЖЭТФ. 1983. Т. 84, вып.2. С. 606.

*Саратовский филиал Института  
радиотехники и электроники РАН*

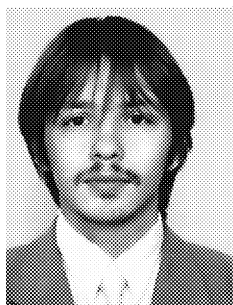
*Поступила в редакцию  
После доработки*

*4.11.2004  
7.02.2005*

## **RECTANGULAR PULSE COMPRESSION IN LINEAR DISPERSIVE MEDIA**

*A.A. Galishnikov, A.V. Kozhevnikov, Yu.A. Filimonov*

Based on the parabolic differential equation solution behaviour of the pulse width at half-height in linear second order dispersion media was analyzed. It was shown that rectangular non-chirped pulse width varies non-monotonously with distance and reaches 50–60% initial width at compression length that is equal to 0.44 dispersive length. This compression was shown to be caused by dispersive pulse-edges perturbations that lead to frequency chirp on pulse top. The results of experiment with non-chirped rectangular surface magnetostatic wave pulses in yttrium iron garnet film are presented and are in qualitative agreement with the theoretical results.



*Галитников Александр Александрович* – родился в 1980 году в Саратове. Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (1997). По окончании поступил в аспирантуру Института радиотехники и электроники РАН. Работает в Саратовском филиале того же института в должности младшего научного сотрудника. Область научных интересов - нелинейная динамика распределенных систем, магнитостатические волны в ферритовых планарных структурах.



*Кожевников Александр Владимирович* – 1962 года рождения, окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1984). Научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники. Область научных интересов - физика твердого тела, нелинейная динамика распределенных систем, магнитостатические волны в ферритовых планарных структурах.



*Филимонов Юрий Александрович* – родился в 1955 году. Окончил Московский физико-технический институт (1979), кандидат физико-математических наук, директор Саратовского филиала ИРЭ РАН. Область научных интересов - волновые явления в магнитных пленках. E-mail: [fil@sfire.san.ru](mailto:fil@sfire.san.ru)





## ВОССТАНОВЛЕНИЕ НЕГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ДВИЖЕНИЯ ОБЪЕКТА ПО СИГНАЛУ ПОЛУПРОВОДНИКОВОГО ЛАЗЕРА, РАБОТАЮЩЕГО В АВТОДИННОМ РЕЖИМЕ

*А.В. Скрипаль, О.И. Чанилов, Д.А. Усанов, А.С. Камышанский*

Рассмотрена возможность восстановления сложной негармонической функции движения объекта с помощью автодинной интерференционной системы. Приведены результаты эксперимента по определению параметров сложного негармонического движения отражателя. Показано, что применение многоступенчатой цифровой фильтрации полученного в ходе эксперимента автодинного сигнала позволяет снизить влияние шумовых искажений на восстанавливаемый сигнал.

### Введение

Известны гомодинные методы измерения параметров движения колеблющегося отражателя, в которых интерференционная система базируется на схемах интерферометров Фабри – Перо, Майкельсона и Маха – Цендера. Регистрируемый в этих системах сигнал имеет сложную форму и подвержен шумовым искажениям из-за большой длины оптических плеч, создающих разность хода отраженного и опорного лучей.

В качестве интерференционной системы представляет интерес использование автодинной системы с полупроводниковым лазером вследствие предельной простоты ее конструкции. Ранее было показано [1], что при малом значении коэффициента обратной оптической связи ( $C \ll 1$ ) изменение интенсивности излучения, генерируемого автодинной интерференционной системой, подчиняется тем же законам, что и изменение интенсивности излучения в гомодинных системах с развязкой.

Однако фиксируемый автодинный сигнал имеет сложную форму и сильно подвержен шумовым искажениям, возникающим из-за высокой чувствительности автодинной интерференционной системы к вибрациям, а также к помехам в цепях

питания. В связи с этим важную роль играют методы обработки и фильтрации получаемого в ходе эксперимента сигнала.

Целью данной работы является применение автодинной системы для решения задачи о восстановлении негармонической функции движения отражателя и разработка методов фильтрации, позволяющих очистить получаемый в ходе эксперимента интерференционный сигнал от внешних шумовых воздействий.

## 1. Описание эксперимента

Схема экспериментальной установки изображена на рис. 1. С выхода звуковой платы персонального компьютера 1 через кабель 2 на пьезокерамическую пластинку 3 с закрепленным на ней зеркалом подавался заданный негармонический сигнал.

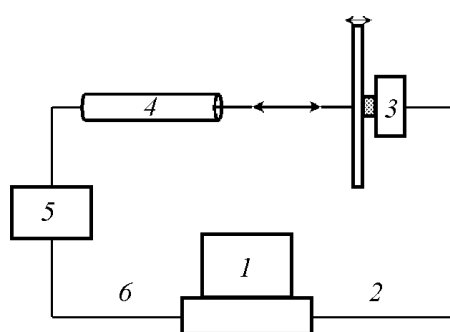


Рис. 1. Схема экспериментальной установки

Пьезокерамическая пластина 3 вместе с оптическим автодином 4 была закреплена на оптической скамье. В автодине в качестве источника излучения оптического диапазона использовался лазерный диод типа RLD-650 на квантоворазмерных структурах с дифракционно-ограниченной одиночной пространственной модой, имеющий следующие характеристики: мощность излучения 5 мВт, длина волны 652 нм, пороговый ток 20 мА. С автодина на колеблющуюся пластину был направлен лазерный луч. Полученный автодинный сигнал через усилитель 5 подавался по кабелю 6 на аналого-цифровой преобразователь персонального компьютера 1. После записи автодинного сигнала производилась его обработка с целью восстановления закона колебания отражателя.

В качестве закона, которым описываются колебания отражателя, была выбрана временная зависимость в виде последовательности, каждая из составляющих которой является гармонической функцией, модулированной по амплитуде убывающей экспоненциальной функцией, что примерно соответствует случаю периодического возбуждения колебаний в контуре с потерями. Экспериментально такая зависимость напряжения от времени реализовалась подачей сигнала описанной формы с выхода звуковой карты персонального компьютера на пьезокерамическую пластину 2, что вызывало механическое смещение по тому же закону закрепленного на пластине зеркала.

Для снижения влияния шумов электрической сети на регистрируемый сигнал в качестве источника питания лазера, работающего в автодинном режиме, использовалась аккумуляторная батарея. Коэффициент отражения колеблющейся пластины и расстояние от пластины до источника излучения были подобраны таким образом, чтобы для коэффициента обратной оптической связи  $C$  выполнялось условие  $C \ll 1$ . Фрагмент зарегистрированного фотоприемником сигнала приведен на рис. 2. Из рисунка видно, что сигнал сильно зашумлен. Это, по-видимому, вызвано помехами в электрической сети и механическими колебаниями экспериментальной установки. Для снижения влияния шума был проведен отдельный эксперимент на той же

установке, когда колебания на пьезокерамическую пластину не подавались. Сигнал, записанный в ходе этого эксперимента, был подвергнут так называемому кратковременному или оконному преобразованию Фурье. По данным кратковременного преобразования Фурье были выделены гармоники, присутствующие в зарегистрированном сигнале на всем протяжении времени, в течение которого регистрировался сигнал. Описанные гармоники были изъяты из спектра автодинного сигнала, полученного от колеблющегося отражателя. Для окончательной фильтрации полученного от колеблющегося отражателя автодинного сигнала использовался цифровой фильтр Савицкого – Голея [2]. Вид отфильтрованного по вышеописанному алгоритму автодинного сигнала приведен на рис. 3.

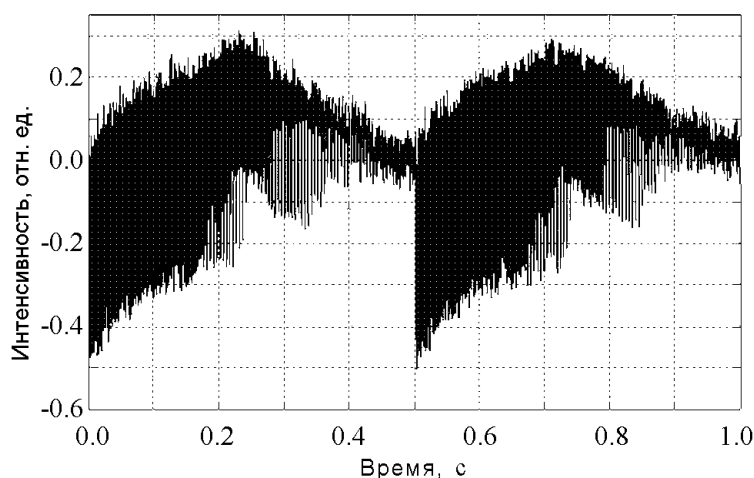


Рис. 2. Фрагмент зарегистрированного автодинного сигнала

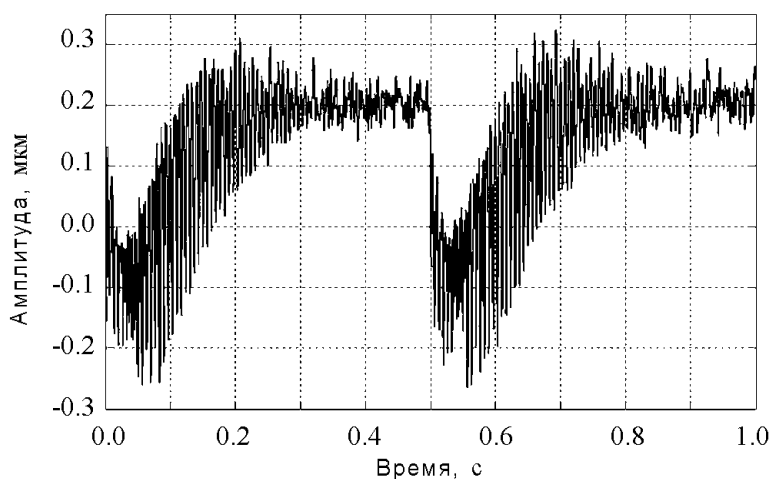


Рис. 3. Фрагмент зарегистрированного автодинного сигнала после его фильтрации

В ряде работ [3-6] предложены различные методы дешифровки выходного интерференционного сигнала гомодинной интерференционной системы. Большинство из этих методов строится в предположении, что исследуемый объект колеблется по гармоническому закону. В работе [7] изложен метод восстановления функции движения объекта в гомодинной системе, позволяющий по интерференционному сигналу восстанавливать закон движения объекта, имеющий полигармонический характер, а также продемонстрирована возможность восстановления параметров движения зеркала, колеблющегося по бигармоническому закону. В настоящей работе рассмотрена возможность использования такого метода для восстановления функции движения колеблющегося объекта, описанной заданным выше законом.

## 2. Метод восстановления функции движения колеблющегося объекта

Рассмотрим нормированную переменную составляющую интерференционного сигнала, полученного в гомодинной лазерной системе с колеблющимся внешним отражателем. Как показано в работах [7, 8], ее можно записать в следующем виде:

$$U(t) = \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{\lambda} f(t)\right), \quad (1)$$

где  $t$  – время;  $\theta$  – фаза сигнала;  $\lambda$  – длина волны лазера;  $f(t)$  – функция, характеризующая продольные движения объекта

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\nu) \exp(i2\pi\nu t) d\nu. \quad (2)$$

Здесь  $\nu$  – частота,  $c(\nu)$  – комплексные коэффициенты Фурье-разложения функции  $f(t)$ .

Проведя дифференцирование интерференционного сигнала (1) с учетом представления (2), введем в рассмотрение функцию  $S(t)$ , такую чтобы ее спектр с точностью до постоянного множителя соответствовал спектру восстанавливаемого сигнала

$$S(t) = \frac{dU/dt}{\sqrt{1 - U^2(t)}}. \quad (3)$$

Используя интегральное представление (2), можно показать, что

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} i \frac{8\pi^2\nu}{\lambda} c(\nu) \exp(i2\pi\nu t) d\nu. \quad (4)$$

Для определения знака функции  $\pm\sqrt{1 - U^2(t)}$  можно использовать следующую процедуру. По функции  $U(t)$  вычисляются значения  $\sqrt{1 - U^2(t)}$ . В первой точке знак квадратного корня задается произвольно. Затем определяется знак функции  $dU/dt$ , и при построении  $\pm\sqrt{1 - U^2(t)}$  ее знак меняется на противоположный в тех точках, где  $dU/dt$  равна нулю. Если полученная таким образом функция имеет разрывы, тогда на участке между разрывами знак функции изменяется на противоположный. Выполнение этой процедуры ведет к получению непрерывной функции  $\pm\sqrt{1 - U^2(t)}$  с учетом знака.

Сравнив интегральные представления функций  $f(t)$  и  $S(t)$  (выражения (2) и (4), соответственно), можно заметить, что спектральные плотности этих функций отличаются множителем  $i\frac{8\pi^2v}{\lambda}$ . Таким образом, построив на основе экспериментальных данных функцию  $S(t)$ , можно определить комплексные коэффициенты Фурье-разложения функции  $f(t)$

$$c(v) = i\frac{8\pi^2v}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) \exp(-i2\pi v\tau) dt \quad (5)$$

и, воспользовавшись представлением (2), восстановить функцию  $f(t)$ .

Необходимо отметить, что в приведенном алгоритме определения знака функции  $\sqrt{1 - U^2(t)}$  делается произвольное предположение об ее знаке в нулевой момент времени. Это приводит к тому, что мы можем определить вид функции, описывающей только движение объекта, но не направление движения. Поэтому описанный метод может быть с успехом использован в случаях, когда интерес представляет только зависимость величины смещения объекта от времени, а направление движения не является существенным.

### 3. Численное моделирование

Для проверки описанного выше способа восстановления функции движения объекта нами было проведено численное моделирование восстановления заданной функции движения внешнего отражателя. В ходе моделирования задавалась функция  $f(t)$ , по которой с учетом выражения (1) и рассчитывался интерференционный сигнал  $U(t)$ . Затем вычислялась функция  $S(t)$  и решалась обратная задача: проводилось восстановление сигнала с использованием изложенной выше методики.

В качестве тестовой задачи была задана функция движения объекта  $f(t)$ , состоящая из трех гармоник на частотах 5, 17 и 30 Гц. В ходе моделирования по этой функции вычислялся нормированный интерференционный сигнал, относительно которого затем решалась обратная задача.

Основная трудность, возникшая в ходе численного моделирования восстановления закона движения объекта, заключалась в наличии разрывов у конструируемой из интерференционного сигнала функции  $S(t)$ . На рис. 4 приведен вид функции  $S(t)$ , рассчитанной в ходе моделирования по формуле (3). Из рисунка видно, что  $S(t)$  имеет разрыв в некоторые моменты времени  $t_0$ . Эти разрывы обусловлены обращением в нуль функции  $\pm\sqrt{1 - U^2(t)}$ . Использование такой  $S(t)$  приводит к неправильно-му восстановлению искомого сигнала. Для корректного восстановления  $f(t)$  нами применялись алгоритмы фильтрации и сглаживания к функции  $S(t)$ . В ходе моделирования последовательно использовалась фильтрация сигнала по амплитуде (сигнал обращался в нуль в тех точках, в которых его значение по модулю превышало заданное значение, определенное по участкам функции  $S(t)$ , не имеющим разрывов), медианная фильтрация по пяти точкам и последующее сглаживание кубическими сплайнами. На рис. 5 приведен вид функции  $S(t)$  после обработки вышеуказанным способом. Видно, что применение описанной цифровой обработки сигнала позволяет в рассматриваемом случае получить непрерывную функцию  $S(t)$ .

Далее в ходе моделирования по непрерывной функции  $S(t)$  с использованием выражений (5) и (2) производилось восстановление искомого функции движения

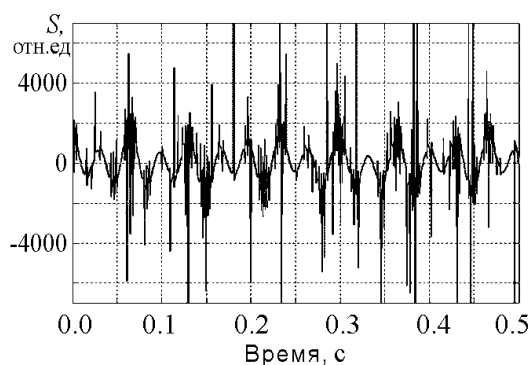


Рис. 4. Вид функции  $S(t)$  до фильтрации

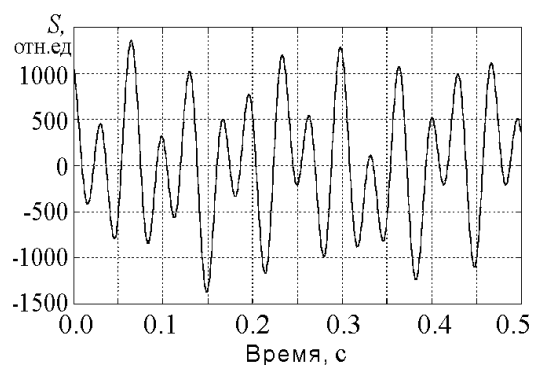


Рис. 5. Вид функции  $S(t)$  после фильтрации

объекта и сравнение восстановленной функции с заранее заданной. Сравнение показывает, что отклонения значений восстановленной функции движения отражателя от значений заранее заданной функции не превышают 6 процентов. На наш взгляд, обсуждаемая погрешность вызвана применением интерполяции значений функции  $S(t)$  в местах ее разрывов.

Таким образом, результаты численного моделирования показали возможность применения описанного выше метода решения обратной задачи в гомодинной интерференционной системе для случая, когда восстанавливаемая функция движения объекта имеет более сложный, чем это было описано в [7], вид.

#### 4. Результаты обработки экспериментального автодинного сигнала

Зафиксированный в ходе эксперимента интерференционный сигнал после цифровой фильтрации был подвергнут описанным выше преобразованиям с целью решения обратной задачи – восстановления функции движения отражателя. Вид исходного и восстановленного сигналов показан на рис. 6, 7, соответственно. Сравнение ча-

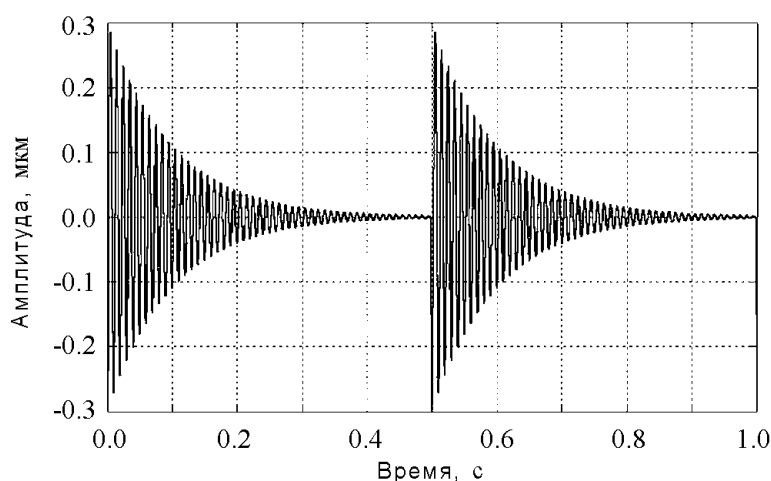


Рис. 6. Исходный закон движения отражателя

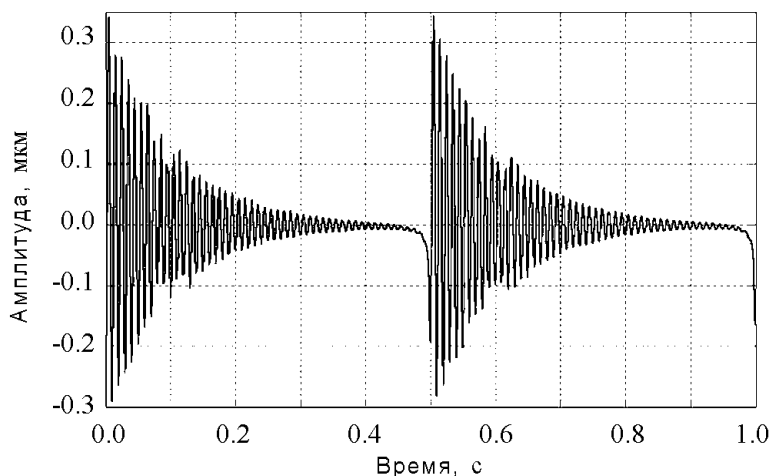


Рис. 7. Восстановленный закон движения отражателя

стоты экспоненциально убывающих гармонических колебаний исходного и восстановленного сигналов показало, что разность частот находится в пределах погрешности измерений. На рис. 8 представлены зависимости логарифмического декремента затухания  $d = \ln\left(\frac{A_n}{A_{n+1}}\right)$ , где  $A_n$  и  $A_{n+1}$  – амплитудные значения экстремумов исследуемой функции исходного и восстановленного сигналов, соответственно, от номера максимума  $n$  для первых 47 максимумов. Из рисунка видно, что декремент затухания восстановленного сигнала осциллирует относительно декремента затухания исходного сигнала. При этом среднее значение декремента затухания восстановленного сигнала, вычисленное по всем максимумам, отличается от среднего значения декремента исходного сигнала на 4,3 процента. Таким образом, можно сделать вывод, что восстановленный сигнал с высокой степенью точности соответствует исходному.

Наибольшая погрешность восстановления относится к тем моментам времени, когда уровень сигнала становился сравнимым с уровнем шумов измерительной системы, а также в начальные моменты возбуждения колебаний. При этом погрешности восстановления в начальные моменты связаны с тем, что при восстановлении формы колебаний производилась фильтрация и интерполяция функции  $S(t)$  в целях исключения ее разрывов, что вызвало сглаживание обсуждаемой функции в моменты возбуждения колебаний. Такое сглаживание функции  $S(t)$  вызвало искажение восстановленного сигнала по сравнению с исходным в обсуждаемые моменты времени.

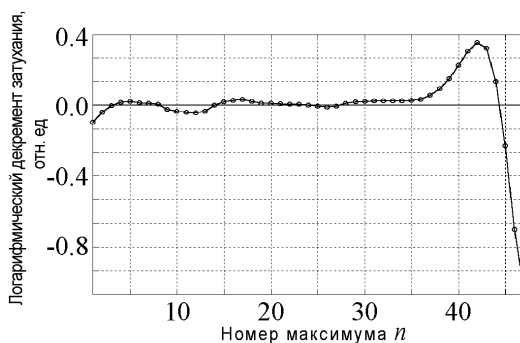


Рис. 8. Зависимость логарифмического декремента затухания для исходного (сплошная линия) и восстановленного (линия с кружками) сигналов от номера максимума

## Заклучение

Таким образом, показана возможность определения вида функции движения внешнего отражателя с помощью автодинной системы с полупроводниковым лазером для случая, когда колебания представляют собой последовательность, каждая из составляющих которой является гармонической функцией, модулированной по амплитуде экспоненциально убывающей функцией. Предложено использовать предварительную фильтрацию автодинного сигнала от шумов для повышения точности восстановления функции, описывающей движение объекта, имеющее сложный характер. Использование описанных методов очистки от шумов автодинного сигнала и его обработки позволяет с высокой степенью точности восстанавливать сложное негармоническое движение объекта, имеющее периодический характер. Показано, что восстановленный по результатам измерений сигнал имеет высокую степень соответствия исходному.

## Библиографический список

1. *Усанов Д. А., Скрипаль Ал. В., Скрипаль Ан. В.* Физика полупроводниковых радиочастотных и оптических автодинов. Саратов. 2003. 308 с.
2. *Savitzky A., Golay M.* // Anal. Chem. 1964. Vol.36, № 8. P. 1627-1635.
3. *Suemoto Y.* Laser heterodyne and homodyne measurements of impulsive displacement // Opt. Commun. 1990. Vol. 75, № 3-4. P. 201-208.
4. *Усанов Д. А., Скрипаль А. В., Вагарин В. А., Васильев М. Р.* Гомодинные методы измерения // Зарубеж. радиоэлектрон. 1995. № 6. С. 135-141.
5. *Jin W., Zhang L. M., Uttamchandani D., Culshaw B.* Modified J1 ... J4 method for linear readout of dynamic phase changes in a fiber-optic homodyne interferometer // Appl. Opt. 1991. Vol. 30, № 31. P. 4496-4502.
6. *Wang Y., Chiang F.-P.* New moire interferometry for measuring three dimensional displacements // Opt. Eng. 1994. Vol. 33, № 8. P. 2654-2661.
7. *Гагнус С. В., Скрипаль А. В., Усанов Д.А.* Определение параметров движения объекта с помощью оптического гомодинного метода // Автометрия. 1999. № 1. С. 31-37.
8. *Wang Z., Graca M. S., Bryanston Cross P. J., Whitehouse D. J.* Phase-shifted image matching algorithm for displacement measurement // Opt. Eng. 1996. Vol. 35, № 8. P. 2327-2331.

*Саратовский государственный  
университет*

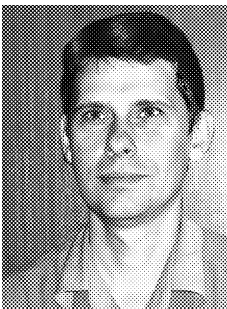
*Поступила в редакцию 12.11.2004*

## RECONSTRUCTION OF UNHARMONIC MOTION FUNCTION OF SUBJECT BY SEMICONDUCTOR LASER SIGNAL OPERATING IN AUTODYNE REGIME

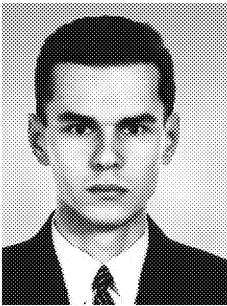
*A.V. Skripal, O.I. Chanilov, D.A. Usanov, A.S. Kamyshanskiy*

The possibility of reconstruction of complex unharmonic motion function of subject was investigated using autodyne interference system. Experimental results of parameter determination of complex unharmonic motion of reflector were presented. It was shown that application of manystages digital filtration of autodyne experimental signal allows to decrease influence of noise distortion on reconstruction signal.

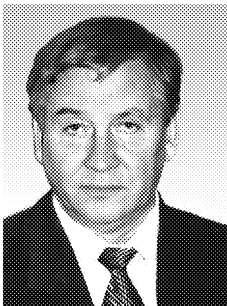




*Скрипаль Анатолий Владимирович* – родился в Саратове (1960). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1982), защитил диссертацию на звание кандидата физико-математических наук по специальности «Оптика» (1991) и доктора физико-математических наук (1998). Профессор кафедры физики твердого тела Саратовского государственного университета. Автор более 100 научных трудов в области когерентной оптики, вибродиагностики и квантовой электроники.



*Чанилов Олег Игоревич* – родился в Саратове (1980), окончил Саратовский государственный университет (2002). Аспирант кафедры физики твердого тела физического факультета СГУ. Автор 6 публикаций в отечественной и зарубежной печати. Область научных интересов - интерферометрия, цифровая обработка сигналов.



*Усанов Дмитрий Александрович* – родился в г. Менделеевске (1943), окончил Саратовский государственный университет (1965), куда после нескольких лет службы на предприятии электронной промышленности поступил на работу и где работает заведующим кафедрой физики твердого тела по настоящее время. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в области физики полупроводников и диэлектриков (1972) и доктора физико-математических наук в области радиофизики, включая квантовую радиофизику (1989). Профессор СГУ, академик МАН ВШ, заслуженный деятель науки РФ. Область научных интересов - твердотельная СВЧ-электроника, радиоволновые и оптические методы контроля, применение нелинейной динамики в полупроводниковой электронике СВЧ. Автор многих статей, патентов и изобретений по указанным выше направлениям.  
E-mail: UsanovDA@info.sgu.ru



*Камышианский Антон Сергеевич* – родился в Саратове (1980), окончил Саратовский государственный университет (2003). Аспирант кафедры физики твердого тела физического факультета СГУ. Автор 9 публикаций в отечественной и зарубежной печати. Область научных интересов - лазерная физика, лазерные автодинные системы и их применение, медицинская диагностика.



## ИССЛЕДОВАНИЕ АВТОЭМИССИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ФРАКТАЛЬНЫХ УГЛЕРОДНЫХ СТРУКТУР

*Ю.В. Гуляев, Ю.А. Григорьев, В.Н. Король, Г.А. Рехен*

Исследованы эмиссионные характеристики автоэммиттеров с различным рельефом поверхности. Экспериментально показано, что уменьшение зазора в микродиодных устройствах неизбежно приводит к значительному росту макроскопической напряженности электростатического поля при заданной величине автоэмиссионного тока. Проведены экспериментальные исследования и предложен приближенный подход на основе фрактальной геометрии к анализу автоэмиссионных характеристик многоуровневых углеродных острижных и лезвийных структур, дающий возможность сформулировать требования к конфигурации технологически воспроизводимых холодных источников электронов с заданными свойствами. Данные исследований позволяют утверждать, что перспективной конфигурацией автоэммиттерной структуры является углеродная фрактальная решетка лезвийного типа с протяженными границами. Предложен углеродный автоэммиттер лезвийного типа с развитой фрактальной поверхностью (фигура Пеано – Госпера).

### Введение

Создание новых экономичных источников электронных потоков, продолжает оставаться актуальной задачей электровакуумного приборостроения. В последние годы все больший научный и практический интерес приобретают исследования автоэмиссионных свойств различных углеродных микро- и наноструктур [1-7]. Это связано с рядом неоспоримых преимуществ модификаций углеродных материалов по сравнению с тугоплавкими металлами. Отметим, следуя Б. Мандельброту [8], что реальная форма поверхности, на вершинах которой размещены центры автоэлектронной эмиссии, настолько неправильна и фрагментирована, что в сравнении с обычной евклидовой геометрией имеет место не просто более высокая степень сложности, но совершенно *иной уровень сложности*. Введенное в геометрии сложных систем понятие фрактала дает возможность описать многие реальные микроструктуры, представляющие практический интерес для современной электроники.

Фрактальные системы образуют многообразный мир явлений и объектов, которые в отличие от непрерывных систем имеют разреженную структуру и, как правило, дробную размерность. В конце XX века в физике возникло новое направление, связанное с исследованием фрактальных кластеров, образующихся при слипании движущихся по определенному закону твердых частиц [8, 9]. Привлечение принципов фрактальной геометрии [8] к изучению автоэмиссии углеродных структур позволяет более точно подойти к закономерности в распределении эмиссионных центров, оценить эффективную площадь эмиссии, непосредственно с которой совершается автоэмиссионный процесс, и достигаемую при этом плотность тока.

## 1. Объект исследования и методика эксперимента

В качестве объекта для экспериментального исследования процессов автоэмиссии рассматривались дисковые углеродные автоэммиттеры на основе стеклоглуглерода СУ-2000 и углеродные нанокластерные пленочные структуры, полученные методом вакуумного пиролиза углеводородов. Исследовались структуры с высокой степенью чистоты поверхности и регулярные углеродные решетки из стеклоглуглерода с плотностью упаковки  $N = 10^5\text{-}10^6\text{см}^{-2}$ . Предполагалось, что все углеродные материалы имеют работу выхода 4.5 эВ. Предварительно, перед снятием вольт-амперных характеристик (ВАХ), микродиоды на основе указанных материалов подвергались высоковакуумному обезгаживанию путем прогрева в течение 3-х часов при температуре 700-800°К. Для технологического обезгаживания эмиттерных структур в процессе откачки использовался подогревательный узел термокатода лампы бегущей волны, обеспечивающий нагрев стеклоглуглеродной решетки до 800 °К. Максимальная мощность подогревателя составляла 30 Вт. Измерения ВАХ проводились в непрерывном и импульсном режимах при средних значениях электронной мощности на микродиоде не более 2-3 Вт и ее импульсных значениях до 500 Вт. Длительность импульса при этом составляла 10-80 мкс при скважности 500-1000 ед. Измерения проводились в режиме непрерывной откачки с помощью магниторазрядного насоса МД-250. Давление остаточных газов составляло  $2 \cdot 10^{-7}$  Торр. В ходе экспериментов расстояние катод – анод  $d_{к-а}$  изменялось с помощью подвижного высоковакуумного соединения, обеспечивающего изменение зазора от 3 мкм до  $3 \cdot 10^3$  мкм и более. Диаметр плоского торца цилиндрического анода также из стеклоглуглерода СУ-2000 составлял 3 мм.

На рис. 1 представлено изображение фрагмента полированной поверхности стеклоглуглерода СУ-2000, полученное с помощью сканирующего туннельного микроскопа.

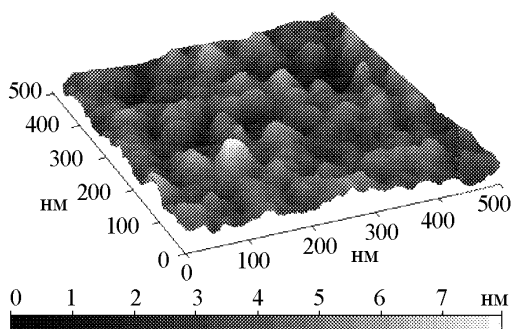


Рис. 1. STM-диаграмма фрагмента углеродной поверхности СУ-2000, класс обработки 12

Экспериментальные образцы (рис. 2) изготавливались по технологии [7] с применением фотолитографии и термохимического травления стеклоглуглеродных пластин в среде водорода при температуре 1200-1300°К. Размеры исследуемых образ-

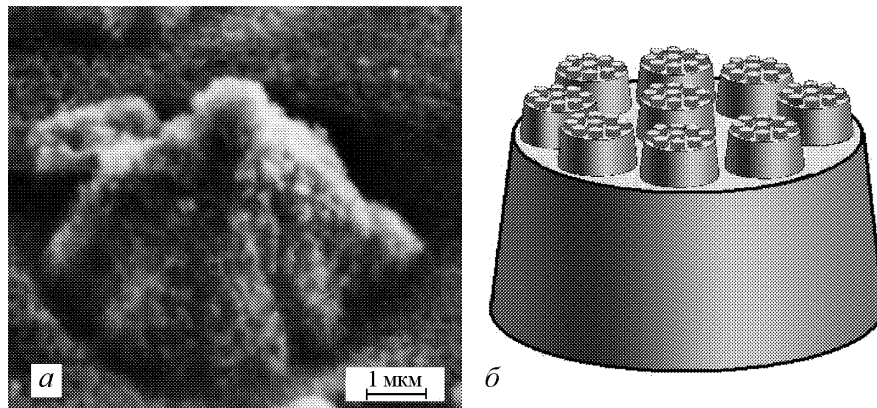


Рис. 2. *a* – микрофотография острой монолитной структуры из стеклоглерода СУ-2000,  $N = 10^6 \text{ см}^{-2}$ ; *б* - схематичное изображение экспериментальной трехъярусной фрактальной эмиссионной структуры из стеклоглерода СУ-2000 [7]

цов многоостриных стеклоглеродных пластин  $2 \times 20 \times 30 \text{ мм}^3$ . Высота и радиус вершин острий структуры 6-10 и 0.5-1 мкм соответственно.

## 2. Экспериментальные результаты и их обсуждение

На рис. 3 представлены ВАХ микродиодов в координатах Фаулера – Нордгейма [11] с автоэммиттером из стеклоглерода СУ-2000 с полированной поверхностью (см. рис. 1) при различных межэлектродных расстояниях. Из рис. 3 видно, что по мере роста зазора наблюдается сходимость последовательности ВАХ в координатах Фаулера – Нордгейма. Применение технологии [7] дает возможность получить регулярные многоостриные углеродные структуры (см. рис. 2). Последовательность ВАХ микродиодов на их основе (рис. 4) с увеличением зазора  $d_{к-а}$  также имеет сходимость. Однако интересным является тот факт, что сходимость вольтамперных характеристик микродиодов, на основе полированной пластины СУ-2000, носит менее

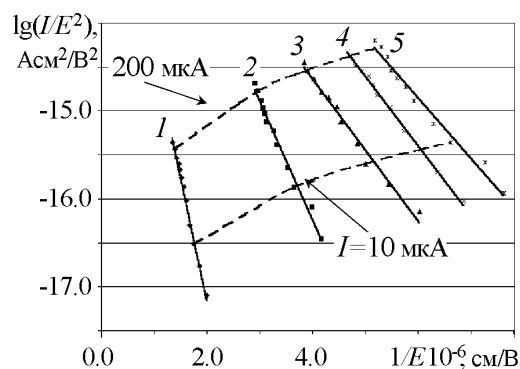


Рис. 3. ВАХ микродиодов на основе углеродной полированной пластины СУ-2000 при различных межэлектродных зазорах  $d_{к-а}$ : 1 – 5 мкм; 2 – 15 мкм; 3 – 25 мкм; 4 – 35 мкм; 5 – 45 мкм. Штрихами показаны линии равного тока

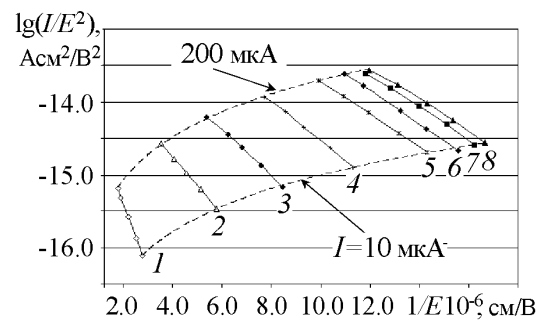


Рис. 4. ВАХ микродиодов на основе многоостриной углеродной решетки СУ-2000,  $N = 10^6 \text{ см}^{-2}$  при различных межэлектродных зазорах  $d_{к-а}$ : 1 – 5 мкм; 2 – 15 мкм; 3 – 30 мкм; 4 – 60 мкм; 5 – 120 мкм; 6 – 150 мкм; 7 – 180 мкм; 8 – 210 мкм. Штрихами показаны линии равного тока

выраженный характер по сравнению с микродиодами на основе регулярной острой решетки и может быть объяснено конечностью макроразмеров и микрорельефом поверхности токоприемного анода. Сходимость вольтамперных характеристик в обоих случаях происходит асимптотически к некоторой предельной характеристике, соответствующей переходу в область диодных зазоров, при которых размер и рельеф анодной поверхности не влияют на распределение электростатического поля на поверхности автоэммиттера. То есть мы переходим в зону действия закона подобия, который начинает выполняться при величинах зазора существенно превышающих характерные размеры рельефа поверхности автоэмиссионной структуры (см. рис. 1). Достичь предельную вольтамперную характеристику не удастся вследствие влияния краевых эффектов, обусловленных конечностью макроразмеров и микрорельефом поверхности токоприемного анода.

Из рис. 3 и 4 следует практически важный вывод о возможности получения равных значений тока в микродиодах с увеличенным зазором при существенно более низком значении макроскопической напряженности электрического поля.

В ходе большого числа опытов с вакуумными микродиодами на основе монокристаллических и пленочных углеродных структур был выявлен эффект существенного увеличения автоэмиссионного тока при неизменных значениях потенциала анода после инициирования единичного искрового разряда в микродиодном зазоре мощностью 20-30 Вт. Единственность разрядного процесса обеспечивалась подключением к источнику постоянного напряжения последовательно с микродиодом регулируемого балластного сопротивления  $R_6 = 10-100$  кОм. Очевидно, что в течение времени прохождения разряда в диодном промежутке ток разряда при  $R_6 = 100$  кОм и  $U_a = 2 \cdot 10^3$  В не мог превысить значения 20 мА. При указанном напряжении мощность разряда составляла 40 Вт. После осуществления единичного вакуумного разряда ВАХ автоэмиссионного диода в координатах Фаулера – Нордгейма существенно сместилась «вправо», микродиод стал более низковольтным. После снятия ВАХ макет диода был разобран и проведен микроскопический анализ поверхности углеродной структуры. Анализ показал, что в результате осуществления единичного разряда двумерная сплошная непрерывная поверхность углеродной наноструктуры (см. рис. 1) претерпела значительные изменения (рис. 5). Преобразованная структура

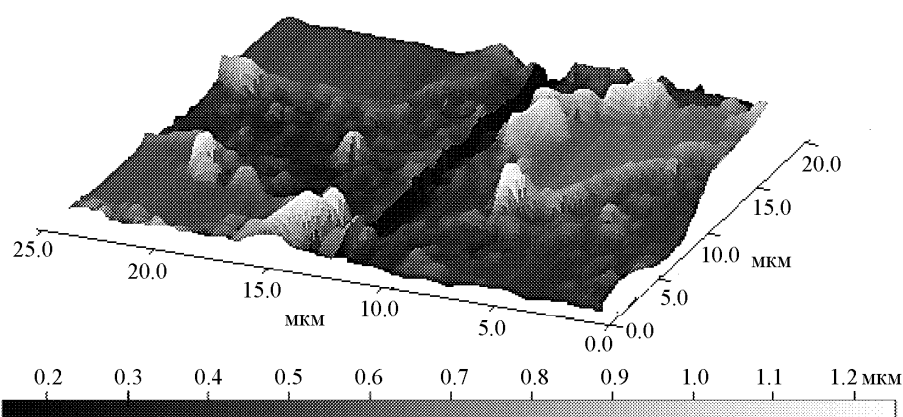


Рис. 5. STM-диаграмма фрагмента углеродной фрактальной структуры после единичного вакуумного разряда

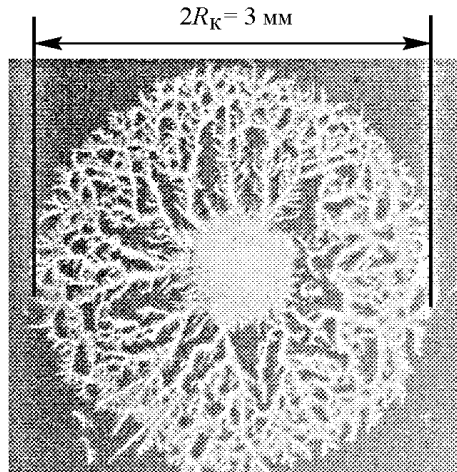


Рис. 6. Микрофотография углеродной фрактальной структуры типа «фигура Лихтенберга», полученная экспериментально в результате единичного вакуумного разряда микродиодного промежутка.  $U_a = 2\text{кВ}$ ,  $d_{к-а} = 50\text{мкм}$ ;  $R_k$  – радиус автоэммиттера

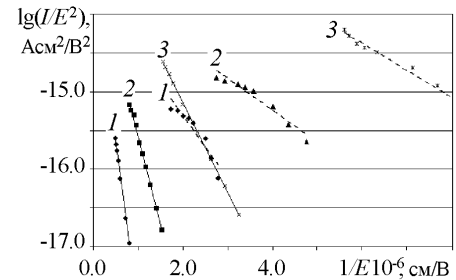


Рис. 7. ВАХ микродиодов в координатах Фаулера – Нордгейма для различных межэлектродных зазоров  $d_{к-а}$ : 1 - 5 мкм, 2 - 10 мкм, 3 - 30 мкм; сплошная линия - до инициирования единичного вакуумного разряда, штриховая линия - после прохождения единичного вакуумного разряда

имеет фрактальный тип (рис. 6), напоминающий форму фрактала «фигура Лихтенберга»\*, приведенный в работе [18] и иллюстрирующий последствия искрового разряда диодного промежутка с диэлектрическим заполнением.

На рис. 7 представлена вольтамперная характеристика микродиодов до и после прохождения единичного вакуумного разряда.

Смещение ВАХ вправо объясняется более высокими коэффициентом усиления электростатического поля и плотностью размещения действующих эмиссионных центров по сравнению с непрерывными двумерными пленочными наноструктурами; при этом реализуются протяженные лезвийно-острыйные «береговые» границы. Увеличение числа эмиссионных центров, возможно, связано с термохимической очисткой углеродной поверхности вместе с ее геометрическим преобразованием во время прохождения вакуумного искрового разряда. При этом обеспечивается постоянство работы выхода на вершинах полученного углеродного фрактального кластера.

Оценки величин коэффициентов усиления  $k$  электрического поля для рассматриваемых фрактальных углеродных поверхностей производились по экспериментальным зависимостям (см. рис. 3, 4, 7), свидетельствующим об автоэмиссионном характере процесса, подтверждающем его соответствие формуле Фаулера – Нордгейма [11] в логарифмическом масштабе. Результаты представлены на рис. 8. Расчет производился по формуле:  $k = -B/\text{tg } \alpha$ , где  $B = 2.7 \cdot 10^8$ ,  $\alpha$  – угол наклона ВАХ.

Максимальные значения коэффициента усиления электрического поля на уровне 1200-1300 были получены на макетах микродиодов с фрактальными структурами автоэммиттеров типа «фигуры Лихтенберга» и многоостройной стеклогуглеродной решетки ( $N = 10^6 \text{ см}^{-2}$ ). Представляет значительный интерес оценка величин эффективной площади эмиссии для исследуемых углеродных структур. Под эффективной площадью эмиссии мы понимаем суммарную площадь  $S_{\text{эфф}}$ , складыва-

\*Лихтенберг (Lichtenberg) Георг Кристоф (01.07.1742, Оберрамштадт – 24.02.1799, Гёттинген) – немецкий ученый, писатель и публицист. Окончил Гёттингенский университет, в котором с 1769 был профессором физики. Исследовал искровой разряд на границе раздела твердого диэлектрика и газа. Почетный член Петербургской Академии наук (1795).

ющуюся из малых отдельных площадей, расположенных на вершинах нанострий, что также можно интерпретировать как центры эмиссии. Очевидно, что  $S_{\text{эфф}}$  зависит от распределения электростатического поля на поверхности автоэммитера, а также от величины электрического поля на аноде. На рис. 9 представлены зависимости эффективной площади автоэмиссии от величины межэлектродного зазора. Как видно из рис. 9, полученные экспериментальные зависимости  $S_{\text{эфф}} = f(d_{\text{к-а}})$  не являются монотонными функциями, что соответствовало бы данным теоретических работ [12-15]. Расхождение теоретических и экспериментальных результатов, по-видимому, связано с тем, что в расчетных моделях анод микродиода предполагается идеально плоским. Предположение об отсутствии рельефа на аноде соответствует монотонному росту  $S_{\text{эфф}}$  при увеличении зазора до значений, в 20-100 раз превышающих характерные размеры рельефа поверхности автоэммитера (средний период решетки, радиус кривизны вершин и т.п.).

Наличие на графиках рис. 9 участков снижения при малых  $d_{\text{к-а}}$  и увеличения значения  $S_{\text{эфф}}$  при дальнейшем росте величины зазора микродиода можно качественно объяснить суперпозицией распределений электростатических полей в приближении точной геометрической идентичности рельефов катодной и анодной поверхностей при их произвольном взаимном смещении. Однако распределение электростатического поля на поверхности автоэммитера окончательно устанавливается при межэлектродных зазорах, существенно превышающих характерные значения размеров рельефов не только катодной, но и анодной поверхности. Оценка величин  $S_{\text{эфф}}$  для различных катодных углеродных структур составила  $10^{-10}$ - $10^{-7}$  см<sup>2</sup> при площади катода равной  $7 \cdot 10^{-2}$  см<sup>2</sup>.

Дальнейшее изложение связано с анализом и построением геометрических моделей микродиодов при значениях  $d_{\text{к-а}} \gg l$ , где  $l$  – период острых и лезвийных структур. Как известно, соотношение для автоэмиссионного тока имеет вид [11]:

$$I = AS_{\text{эфф}} \left[ \frac{k^2 E_{\text{ср}}^2}{\phi} \right] \exp \left( - \frac{B\phi^{3/2}}{kE_{\text{ср}}} \right) \quad (1)$$

где  $A = 1.46 \cdot 10^{-4}$  и  $B = 6.53 \cdot 10^7$  – постоянные;  $\phi = 4.5$  эВ – работа выхода электронов;  $E_{\text{ср}} = V_a/d_{\text{к-а}}$  В/см – напряженность электрического поля;  $V_a$  – электрический потенциал анода.

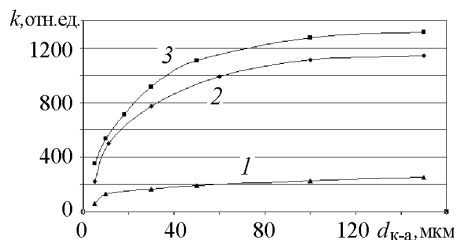


Рис. 8. Зависимость коэффициента усиления от межэлектродного зазора  $d_{\text{к-а}}$ : 1 – полированная поверхность СУ-2000, 2 – фрактал «фигура Лихтенберга», 3 – регулярная решетка СУ-2000  $N = 10^6 \text{ см}^{-2}$

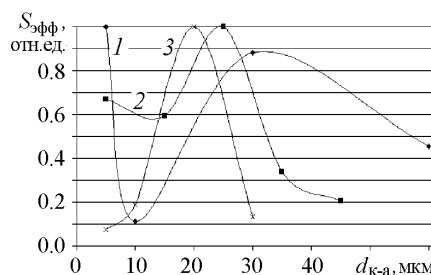


Рис. 9. Зависимость относительной величины эффективной площади от значения межэлектродного зазора: 1 – пленочная углеродная структура (фрактал «фигура Лихтенберга»); 2 – полированная пластина из стеклоглерода СУ-2000; 3 – монолитная острая матрица из стеклоглерода СУ-2000,  $N = 10^6 \text{ см}^{-2}$

В соотношение (1) входит эффективная площадь эмиссии  $S_{\text{эфф}}$ , определение которой, как уже упоминалось, достаточно сложная задача. При изменении электрического потенциала анода с учетом реального микро- и нанорельефа структуры, эффективная площадь эмиссии изменяется и может достигать своего максимума, величина которого ограничена электрической прочностью вакуумного микродиодного промежутка. Анализ результатов проведенных экспериментов, относящихся к случаю  $d_{\text{к-а}} \gg l$ , дает возможность обратиться к приближенной многоярусной (рис. 10)

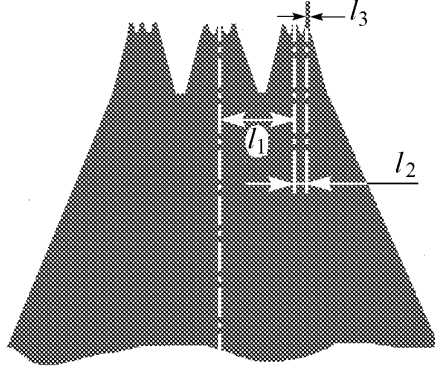


Рис. 10. Фрактальная модель микроострия (см. рис. 1).  $l_1 = 1$  мкм,  $l_2 = 0.1$  мкм,  $l_3 = 0.01$  мкм,  $N_1 = 10^8$  см $^{-2}$ ,  $N_2 = 10^{10}$  см $^{-2}$ ,  $N_3 = 10^{12}$  см $^{-2}$

геометрической модели определения эффективной площади эмиссии и коэффициента усиления. Рассмотрим в качестве модели трехъярусную структуру как наиболее технологически обоснованную и практически реализуемую [5].

Острия структуры первого и второго ярусов имеют форму усеченных конусов, а вершины конусов верхнего (третьего) уровня являются частью сферических поверхностей, при этом полагаем, что эмитирующая часть поверхности составляет телесный угол  $\leq 90^\circ$ . Тогда эффективная площадь эмиссии для трехуровневой периодической структуры может быть представлена произведением площади одного эмиссионного центра на их количество

$$S_{\text{эфф}} = S_{\text{к}} \pi^3 \left( \frac{r_1}{l_1} \right)^2 \left( \frac{r_2}{l_2} \right)^2 \left( \frac{r_3}{l_3} \right)^2, \quad (2)$$

где  $S_{\text{к}}$  – площадь катодной подложки;  $r_1, r_2, r_3$  – радиусы вершин острий первого, второго и третьего уровней;  $l_1, l_2, l_3$  – периоды острийных решеток. В случае, если структуры первого, второго и третьего уровней самоподобны, соотношение (2) принимает вид

$$S_{\text{эфф}} = S_{\text{к}} \pi^3 \left( \frac{r}{l} \right)^6. \quad (3)$$

Таким образом, для фрактальных структур подобного типа получаем формулу (3) для вычисления эффективной площади эмиссии, имеющую простой вид и позволяющую осуществить численную оценку  $S_{\text{эфф}}$  по введенным нами параметрам. Отметим, что выбор числа уровней реальных автоэмиссионных структур определяется многими факторами и в том числе конструкторскими решениями и технологическими процессами, создающими наноразмерные и атомарные вершины острийных эмиссионных центров.

Следуя [12, 13] и ограничиваясь трехуровневым представлением структуры, для коэффициента усиления электрического поля получим

$$k = \left( 1 + \frac{h}{r} \right)^3, \quad (4)$$

где  $h/r$  – отношение высот и радиусов кривизны для трехуровневой фрактальной структуры. С учетом (3), (4) формула (1) для автоэмиссионного тока фрактальных



острийных решеток примет вид

$$I = 1.46 \cdot 10^{-4} \pi^3 \left( \frac{r}{l} + \frac{h}{l} \right)^6 \frac{S_k E_{cp}^2}{\Phi} \exp \left( -6.53 \cdot 10^7 \Phi^{3/2} \left( 1 + \frac{h}{r} \right)^{-3} E_{cp}^{-1} \right). \quad (5)$$

Используя известные геометрические размеры рельефа структуры, по формуле (5) несложно произвести расчет вольтамперных характеристик.

Представляет интерес построение модели и для пленочных углеродных фрактальных структур. В работе [4] сообщается о технологии получения двумерных углеродных пленок на изолирующих подложках. Геометрическая площадь двумерной пленочной структуры велика; однако изучение ее автоэмиссионных свойств показало, что получить с нее значительный автоэмиссионный ток не удастся. Необходимо отметить, что у сплошных пленочных структур относительно низкий коэффициент усиления (менее 200). Автоэмиссия происходит с поверхности нановыступов (см. рис. 1). Для повышения коэффициента усиления таких пленочных структур необходим переход к прерывистым фрактальным структурам с дробной размерностью с протяженной планарно-торцевой конфигурацией границ, аналогичной фракталу «фигура Лихтенберга».

Как было отмечено ранее, на поверхности углеродной пленки в ходе искрового разряда возникли протяженные углубления, на границе которых образовался выступ высотой до 1200 нанометров (см. рис. 5). В этом случае коэффициент усиления пленки возрос, приблизительно, на порядок и достиг значений 1350 ед.

Фрактальный характер структуры (см. рис. 5, 6), полученной с помощью искрового разряда в вакуумном промежутке, указывает на целесообразность построения искусственных фрактальных структур с лучшими автоэмиссионными свойствами, применяя для этого относительно простые технологические процессы.

Используя современные технологические методы [7] можно получить трехуровневую поверхностную структуру, представляющую собой симбиоз протяженной лезвийной структуры и двух уровней многоострийных наноструктур с упаковкой  $10^9$ - $10^{10}$  см<sup>-2</sup> (аналогичных представленным на рис. 1), расположенных на ее гребне.

Коэффициент усиления электрического поля на вершинах наноострийных и лезвийных структур можно представить произведением коэффициента усиления собственно лезвия (первый уровень) на коэффициент усиления наноострий, расположенных на гребне лезвия (второй и третий уровни). Используя как приближение для каждой из конфигураций аналитическое решение уравнения Лапласа для цилиндрического и сферического диодов, при  $d \gg l$  [13] получим

$$k = \frac{d_{k-a}}{r_l} \left[ \ln \left( \frac{d_{k-a}}{r_l} \right) \right]^{-1} \left( 1 + \frac{h}{r} \right)^2, \quad (6)$$

где  $r_l$  – радиус лезвия (первый уровень);  $\left( \frac{h}{r} \right)$  – отношение высот наноострий второго и третьего уровней к радиусам кривизны. Соотношение (6) по аналогии с соотношением (4) должно обеспечивать удовлетворительное соответствие экспериментальным данным при выполнении условий:  $d_{k-a}/r_l \leq 100$ ,  $h/r \leq 10$ .

Для реальных трехуровневых структур коэффициент усиления может достигать  $1.2 \cdot 10^3$  и более, что соответствует его значениям, определенным по экспериментальным диодным ВАХ в координатах Фаулера – Нордгейма [12-14]. Однако

плоские фрактальные эмиттеры на основе структур типа «фигуры Лихтенберга» не обеспечивают одинакового межлезвийного расстояния в периферийной и центральной частях поверхности катодной подложки.

С целью повышения однородности автоэмиссии и увеличения эффективной площади, а также с целью исключения «экстремальных» технологических процессов при изготовлении автоэммиттеров, представляется целесообразным обратиться к фрактальным структурам Пеано – Госпера [8], протяженность которых может неограниченно возрастать. Для указанной структуры протяженность лезвий  $L$ , период решетки  $l_{\text{л}}$  и площадь  $S_{\text{эфф}}^{\text{П-Г}}$ , образующая катодную структуру на дисковом основании площадью  $S_{\text{к}}$  определяются простыми соотношениями, полученными нами для семизвенной геометрической структуры Пеано – Госпера:

$$L = \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \cdot 7^{n/2} S_{\text{к}}^{1/2}; \quad l_{\text{л}} = \frac{3}{2\sqrt{\pi}} \cdot 7^{-n/2} S_{\text{к}}^{1/2}; \quad S_{\text{эфф}}^{\text{П-Г}} = \frac{\pi^{7/2}}{3} 7^{n/2} \left(\frac{r}{l}\right)^4 r_{\text{л}} S_{\text{к}}^{1/2}, \quad (7)$$

где  $S_{\text{к}}$  – площадь катодного основания,  $\text{см}^2$ ;  $n$  – число итераций кривой Пеано – Госпера;  $L, l_{\text{л}}$  – длина и период лезвийной структуры,  $\text{см}$ ;  $r_{\text{л}}$  – радиус лезвия (первый уровень),  $\text{см}$ .

На рис. 11 для наглядности представлена автоэммиттерная структура типа фрактала Пеано – Госпера для  $n = 3$ . При  $n = 6$  имеем непересекающуюся лезвийную структуру протяженностью 1.07 м на дисковой катодной подложке диаметром 3 мм. При этом для реальной трехуровневой наноструктуры  $S_{\text{эфф}}^{\text{П-Г}}$  составляет величину  $1.6 \cdot 10^{-6} \text{см}^2$  ( $r/l = 0.1$ ;  $r_{\text{л}} = 10^{-4} \text{см}$ ;  $n = 6$ ). Технология получения такого монолитного углеродного автокатаода включает следующие технологические процессы: фотолитографию, формирующую топологию структуры Пеано – Госпера на поверхности подложки; термохимическое травление автоэммиттера в среде водорода при  $t^{\circ} = 900-1000^{\circ} \text{С}$  [7] с образованием лезвийной структуры. «Период» такой автоэмиссионной решетки составляет порядка 7 мкм, что можно считать достаточным для усиления электрического поля на вершинах nanoострий, расположенных на гребне извилистой непересекающейся лезвийной структуры указанной протяженности.

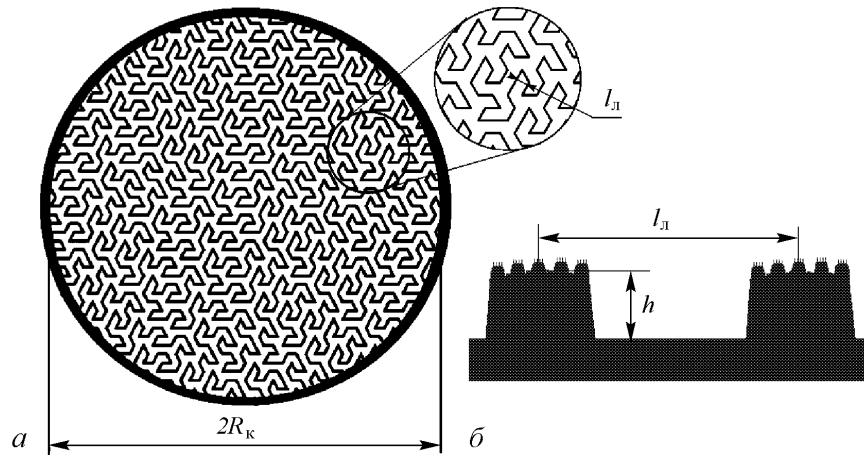


Рис. 11. *а* – структура автоэммиттера с протяженной фрактальной лезвийной границей на основе кривых Пеано – Госпера [1] (третья итерация); *б* – ее фрагмент с учетом микро- и nanoострий на гребне лезвия

На рис. 12. представлены расчетные и экспериментальные вольтамперные характеристики микродиодов на основе фрактальных углеродных лезвийных структур большой протяженности. Как видно из рисунка, фрактальный автоэмиттер на основе кривой Пеано – Госпера может обеспечить более низковольтный режим автоэмиссии за счет увеличения числа действующих дискретных эмиссионных центров, распределенных по всей длине протяженной лезвийной структуры и находящихся под воздействием электростатических полей с идентичным распределением. В экспериментах и расчетах рассматривался дисковый углеродный автокатод диаметром  $2R_k = 3$  мм с межэлектродным зазором  $d_{к-а} = 100$  мкм.

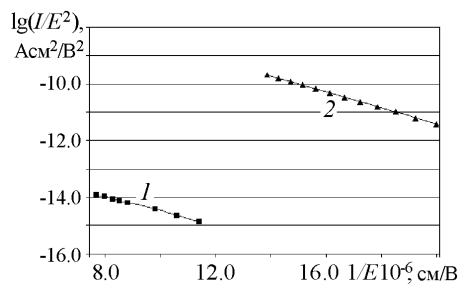


Рис. 12. ВАХ микродиодов на основе фрактальных структур типа «фигура Лихтенберга» и фрактала Пеано – Госпера,  $d_{к-а} = 100$  мкм,  $r_n = 1$  мкм,  $S_k = 7 \cdot 10^{-2} \text{ см}^2$ ,  $r/l = 0.05$ ,  $h/l = 8$ ,  $S_{эфф}^{\Pi-\Gamma} = 1.6 \cdot 10^{-6} \text{ см}^2$ : 1 – фрактал «фигура Лихтенберга», эксперимент; 2 – кривая Пеано – Госпера, расчет по формулам (1), (6), (7)

### Заключение

Проведенные экспериментальные исследования и предложенный приближенный подход на основе фрактальной геометрии к рассмотрению автоэмиссионных характеристик многоуровневых углеродных острых и лезвийных структур дает возможность сформулировать требования к конфигурации технологически воспроизводимых холодных источников электронов с заданными свойствами.

Результаты дают основание утверждать, что перспективной конфигурацией автоэмиттерной решетки является монолитная углеродная структура, реализующая фрактал типа «кривая Пеано – Госпера». На основе этой структуры можно проектировать современные источники интенсивных электронных потоков со средней плотностью отбираемого тока по матрице до  $10 \text{ А/см}^2$ . Подчеркнем, что наиболее эффективными низковольтными автоэмиттерами с высоким значением эффективной площади эмиссии оказались именно фрактальные лезвийные структуры большой протяженности.

### Библиографический список

1. Елецкий А.В. Углеродные нанотрубки и их эмиссионные свойства // Успехи физических наук. 2002. Т. 172, № 4. С. 401.
2. Синицин Н.И. и др. Углеродные нанокластерные структуры – один из материалов эмиссионной электроники будущего // Радиотехника. 2000. № 2. С. 9.
3. Бондаренко Б.В., Кириченко Л.А. Некоторые вопросы разработки автоэлектронных катодов // Электронная техника. 1992. Сер. 1. Вып. 9-10 (453-454). С. 3.
4. Апин М.П., Бушуев Н.А, Поздняков Л.В., Григорьев Ю.А., Винник В.В. Углеродные материалы в приборах вакуумной электроники и микроэлектроники // Высокие технологии – путь к прогрессу. Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во «Научная книга», 2003.

5. Grigoriev Y.A., Petrosyan A.I., Penzyakov V.V., Pimenov V.G., Rogovin V.I., Shesterkin V.I., Kudryashov V.P. and Semyonov V.C. Experimental study of matrix carbon field-emission cathodes and computer aided design of electron guns for microwave power devices, exploiting these cathodes // J. Vac. Sci. Technol. B 15(2), Mar/Apr 1997. С. 503.
6. Гуляев Ю.В., Григорьев Ю.А., Король В.Н., Рехен Г.А. Автоэмиссионные свойства фрактальных углеродных наноструктур // Перспективные направления развития электронного приборостроения. Саратов: Изд-во Саратовского Университета, 2003. С. 209.
7. Пат. 1738013 Россия, МКИН01j1/30 Способ формирования топологии преимущественно многоострийного автокатода. Ю.А. Григорьев, С.В. Васильковский, В.И. Шестеркин, З.А. Ярцева (Россия) № 481/937/24-21; Заявлено 09.04.90; Оpubл. 06.04.93.
8. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований. 2002.
9. Смирнов Б.М. Физика фрактальных кластеров. М.: Наука, 1991.
10. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001.
11. Ненакаливаемые катоды / Под ред. М.И. Елинсона. М.: Сов. Радио, 1974.
12. Солнцев В.А. Нелинейные явления в вакуумных микроэлектронных структурах // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, № 1. С. 54.
13. Marcus R.B., Chin K.K., Yuan Y., Wang H., Carr W.N. Simulation and design of field emitters // IEEE Transactions on ED. 1990. Т. 37, № 6. С. 1545.
14. Исаева О.Б., Елисеев М.В., Рожнев А.Г., Рыскин Н.М. Моделирование автоэлектронной эмиссии с фрактальной поверхности // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7. № 5. С. 33.
15. Трубецков Д.И., Рожнев А.Г., Соколов Д.В. Лекции по сверхвысокочастотной вакуумной микроэлектронике. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996.
16. Шешин Е. П. Структура поверхности и автоэмиссионные свойства углеродных материалов. М.: Изд-во МФТИ; Физматкнига, 2001.
17. Murata H., Shimoyama H. and Ohye T. Computer simulation of electric field analysis for vertically aligned carbon nanotubes (1) – simulation method and computing model // Proc. SPIE. 2001. Vol. 1510. С. 156.
18. Радиофизическая электроника / Под ред. Н.А. Капцова. М.: Изд-во Московского ун-та. 1960.

*Саратовский филиал Института  
радиотехники и электроники РАН*

*Поступила в редакцию 05.10.2004  
После доработки 17.04.2005*

## **RESEARCH OF THE FIELD EMISSION OF FRACTAL CARBON STRUCTURES**

*Yu.V. Gulyaev, Yu.A. Grigoriev, V.N. Korol, G.A. Rehen*

Emission characteristics of autoemitters with a various relief of a Surface are investigated. It is experimentally shown, that reduction of a backlash in microdiode devices inevitably leads to significant growth of macroscopical intensity of an electrostatic field at the set size of an autoemission current. Experimental researches are lead and the approximate approach on the base of fractal geometry is offered to the analysis of autoemission

characteristics of multilevel carbon both tips and patterns structures, enabling to formulate requirements to a configuration of technologically reproduced cold katods with the set properties. The results allow to approve, that the carbon fraktals lattice of pattern type with large borders is a perspective configuration of autoemitters structures is. The carbon autoemitter pattern type with developed fraktal a surface (a figure Peano -Gosper) is offered.



*Гуляев Юрий Васильевич* – окончил Московский физико-технический институт (1958). С 1971 года – профессор, заведующий кафедрой полупроводниковой электроники Московского физико-технического института, академик Российской Академии наук (1984), с 1988 года – директор Института радиотехники и электроники Российской Академии наук, с 1992 года – член Президиума Российской Академии наук. Область научных интересов: физика твердого тела, радиопизика, электроника, информатика. Один из основателей новых научных направлений: акустоэлектроники, акустооптики, спин-волновой электроники. Основные научные результаты опубликованы в более чем 200 научных статьях, 50 патентах и 3 монографиях. Удостоен премии Европейского физического общества (1979), награжден Государственными премиями СССР (1974, 1984), в 1993 году удостоен Государственной премии Российской Федерации.



*Григорьев Юрий Алексеевич* – окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960), ученый секретарь Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, доктор физико-математических наук. Область научных интересов: вакуумная электроника и микроэлектроника, электронная оптика интенсивных электронных пучков. Имеет 90 научных публикаций.



*Король Владимир Николаевич* – окончил с отличием физический факультет Саратовского государственного университета (2002), магистр техники и технологии по направлению «Электроника и микроэлектроника», в настоящее время – аспирант Института радиотехники и электроники РАН, автор 4 научных работ. Область научных интересов: вакуумная микроэлектроника, микроструктуры, физика поверхности, автоэмиссия.



*Рухен Григорий Абрамович* – окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1969), старший научный сотрудник федерального государственного унитарного предприятия НПП «Алмаз». Область научных интересов: экспериментальные исследования интенсивных электронных потоков в электровакуумных приборах СВЧ. Автор 50 научных работ.



## ДИНАМИКА МАЛОГО АНСАМБЛЯ НЕЙРОНОВ ХИНДМАРШ – РОЗЕ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

*Д.Г. Захаров*

В работе рассмотрено влияние импульсной последовательности на динамику ансамбля нейронов Хиндмарш-Розе с нелинейными связями. Изучена синхронизация нейрона периодическим импульсным сигналом. Исследованы динамические и информационные аспекты генерации берстов нейроном, находящимся в режиме спайковой активности, под действием импульсного сигнала с нерегулярными межимпульсными интервалами. Показано, что возможно обратное преобразование берстов в спайки нейроном, находящимся в состоянии покоя. Дано качественное объяснение возникающей в результате преобразования спайков в берсты ненадежности.

### Введение

В последнее время проявляется значительный интерес к моделированию процессов, происходящих в нейронных ансамблях и изучению свойств нейроноподобных сред [1–3]. Проводятся работы по созданию электронных нейроноподобных элементов и построению на их основе систем передачи и обработки информации [4, 5]. Это объясняется уникальными свойствами нейронных систем. Имея в своем составе ненадежные элементы (хорошо известна, например, ненадежность химических синаптических связей) они успешно справляются с передачей и обработкой большого количества информации, обеспечивая выживаемость живых существ. Использование подобных принципов передачи и обработки информации позволит повысить надежность управления в радиофизических системах.

При изучении информационных свойств нейроноподобных систем необходимо выбрать кодовое пространство, которое состоит из носителя информации и способа кодирования. Носителями информации в нейронных ансамблях являются уединенные импульсы (спайки) и пачки импульсов (берсты). Кодирование может осуществляться по частоте следования носителей информации (частотное кодирование) и паттерном расположения импульсов в последовательности (пространственно-временное

кодирование) [6]. Известно, что у людей разные отделы коры головного мозга используют различные носители информации. Следовательно возникает задача преобразования одного типа носителей информации в другой. Как это было показано в [7], такое преобразование не всегда проходит надежно.

В этой статье мы более подробно остановимся на динамических и информационных аспектах процессов, происходящих в малых нейронных ансамблях под действием импульсного сигнала. В качестве базового элемента была выбрана модель нейрона Хиндмарш – Розе как одна из самых распространенных феноменологических моделей, обладающих богатой динамикой. Другим основанием для выбора послужило наличие электронного прототипа нейрона Хиндмарш – Розе, который успешно справлялся с работой «живого» нейрона в центральном генераторе ритма калифорнийского лобстера [4].

Статью можно условно разбить на три части. В первой части кратко описаны некоторые особенности динамики нейрона Хиндмарш – Розе и синаптической связи, которые впоследствии понадобятся для качественной трактовки результатов. Во второй части представлены результаты по синхронизации нейрона периодической последовательностью импульсов. В третьей части рассмотрены динамические и информационные аспекты преобразования носителей информации и возникающей при этом «динамической» ненадежности.

## 1. Модель

Феноменологическая модель нейрона Хиндмарш – Розе представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений 3-го порядка

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y + ax^2 - bx^3 - z + j_{dc}, \\ \frac{dy}{dt} &= c - dx^2 - y, \\ \frac{dz}{dt} &= \mu(s(x - x_0) - z),\end{aligned}\tag{1}$$

где  $a, b, c, d, s, x_0, j_{dc}$  – параметры,  $\mu$  – малый параметр. Первое уравнение качественно описывает мембранный потенциал нейрона, второе и третье – быстрые и медленные ионные токи, соответственно. В силу наличия малого параметра  $\mu$  систему (1) можно разделить на быструю и медленную подсистемы. Для определенности зафиксируем параметры следующим образом:  $a = 3, b = 1, c = 1, d = 5, s = 4, x_0 = -1.6, \mu = 0.00215$  и рассмотрим динамику системы (1) при изменении управляющего параметра  $j_{dc}$ .

**1.1. Быстрая подсистема.** Быструю подсистему составляют уравнения для переменных  $x$  и  $y$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y + ax^2 - bx^3 - z^*, \\ \frac{dy}{dt} &= c - dx^2 - y,\end{aligned}\tag{2}$$

где  $z^* = z - j_{dc}$ ,  $z = \text{const}$  и  $z^*$  можно рассматривать как новый управляющий параметр. При его уменьшении фазовая плоскость системы (2) меняется следующим образом: сначала на фазовой плоскости существует единственное устойчивое состояние равновесия (рис. 1, а), затем вследствие седло-узловой бифуркации появляются еще два состояния равновесия – устойчивый узел и седло (рис. 1, б). Далее устойчивый узел становится устойчивым фокусом, и от него через бифуркацию Андронова – Хопфа мягко рождается устойчивый предельный цикл (рис. 1, в), амплитуда которого увеличивается с уменьшением управляющего параметра, пока он не исчезает в результате нелокальной бифуркации петли сепаратрисы седла (рис. 1, д). При последующем уменьшении управляющего параметра происходит рождение предельного цикла из петли сепаратрисы седла (рис. 1, е). Затем, в результате седло-узловой бифуркации исчезают два состояния равновесия – седло и устойчивый узел (рис. 1, ж). Далее предельный цикл мягко исчезает через обратную бифуркацию Андронова – Хопфа (рис. 1, з).

В трехмерном пространстве  $(x, y, z^*)$  можно проследить описанную выше эволюцию фазовой плоскости быстрой подсистемы (рис. 2). Состояния равновесия находятся на кривой  $\xi_0$ , заданной следующими уравнениями:

$$\begin{cases} -bx^3 + (a-d)x^2 + c - z^* = 0, \\ 1 - 5x^2 - y = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Ее ветвь  $\xi_0^n$  отвечает устойчивому узлу  $N_1$ , ветвь  $\xi_0^{nf}$  ( $Z_{a2} < z^* < Z_{sl1}$ ) – устойчивому состоянию равновесия (узлу  $N_2$  или фокусу  $F$ ), ветвь  $\xi_0^f$  ( $Z_{a1} < z^* < Z_{a2}$ ) – неустойчивому фокусу, вокруг которого при  $Z_{a1} < z^* < Z_{sl1}$  и  $Z_{sl2} < z^* < Z_{a2}$  находятся поверхности устойчивых периодических решений  $L_1$  и  $L_2$ . Ветвь  $\xi_0^s$  соответствует седлу  $S$ , сепаратрисы которого разделяют устойчивые решения быстрой подсистемы при  $Z_{a1} < z^* < Z_{sl1}$  и  $Z_{sl2} < z^* < Z_{sn2}$ .

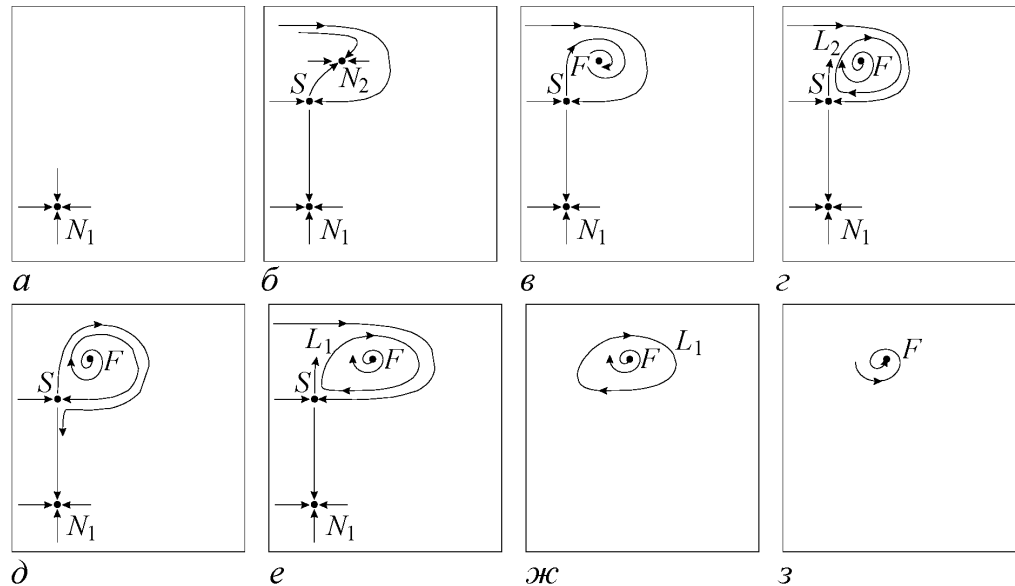


Рис. 1. Фазовые портреты быстрой подсистемы (2)



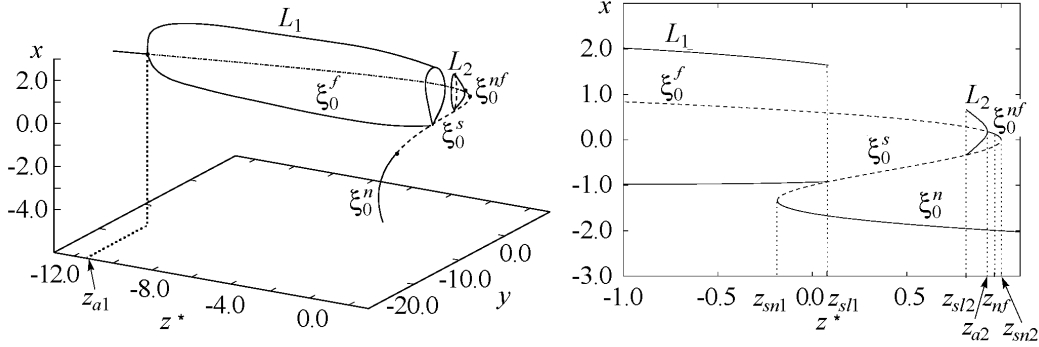


Рис. 2. Эволюция фазового портрета быстрой подсистемы (2)

**1.2. Медленная подсистема.** Медленная подсистема задается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}
 y + ax^2 - bx^3 - z + j_{dc} &= 0, \\
 c - dx^2 - y &= 0, \\
 \frac{dz}{dt} &= (s(x - x_0) - z).
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Это динамическая система на кривой  $\xi_0$ . Состояние равновесия определяется пересечением кривой  $\xi_0$  и изоклиной  $v : s(x - x_0) - z = 0$ . Это состояние равновесия является неустойчивым при  $1.272 < j_{dc} < 5.42$  (ветвь  $\xi_0^s$ ) и устойчивым при всех остальных значениях параметра  $j_{dc}$ .

Рассмотрим, как будет устроено фазовое пространство полной системы (1) в зависимости от управляющего параметра  $j_{dc}$ . Если изоклина  $v$  пересекает кривую  $\xi_0^n$ , решением системы (1) будет являться устойчивое состояние равновесия. Такое решение отвечает состоянию покоя нейрона.

Когда изоклина  $v$  пересекает поверхность периодических решений быстрой подсистемы  $L_1$ , в системе (1) существует устойчивый предельный цикл в окрестности поверхности  $L_1$ , который соответствует режиму генерации спайков.

Более интересный случай представляет пересечение плоскостью  $v$  кривой  $\xi_0^s$ . В зависимости от начальных условий изображающая точка попадет на поверхность  $L_1$  или кривую  $\xi_0^n$ . Предположим, что изображающая точка оказалась на кривой  $\xi_0^n$ . В силу третьего уравнения на этой кривой переменная  $z$  будет уменьшаться. В результате при достижении критической величины переменной  $z = z_{sn1}$  произойдет переход изображающей точки на поверхность  $L_1$ , на которой переменная  $z$  будет расти. Накручиваясь вокруг этой поверхности, траектория при достижении переменной  $z^*$  значения  $z_{sl1}$  перескочит назад на кривую  $\xi_0^n$  и т.д. Этот процесс, характеризующийся переходами траектории между полуустойчивыми многообразиями, отвечает режиму генерации берстов. Отметим, что режимы генерации спайков и берстов могут быть как периодическими, так и хаотическими [8].

Более подробно система исследовалась численно. При увеличении управляющего параметра  $j_{dc}$  динамика нейрона будет изменяться следующим образом:

- состояние покоя ( $j_{dc} < 1.176$ );
- периодическая генерация берстов (с увеличивающимся числом импульсов в берсте при росте управляющего параметра);
- хаотическая генерация берстов (число импульсов в берсте является случайной величиной);
- хаотическая и периодическая генерация спайков ( $j_{dc} < 3.325$ ).

**1.3. Нелинейная связь.** В качестве связи мы выбрали простейшую модель химического синапса, основанную на кинетике 1-го порядка [9]

$$\begin{aligned}
 j_{si} &= \pm g_0 n(t) (x_{post} - x_{rev}), \\
 \frac{dn}{dt} &= \beta \Theta(x_{pre}) (1 - n) - \alpha n, \\
 \Theta(x) &= \frac{1}{1 + e^{-\frac{x - x_{th}}{K_p}}},
 \end{aligned} \tag{5}$$

где  $x_{rev} = -1.5$ ,  $K_p = 0.05$  – фиксированные параметры,  $x_{th}$  – порог срабатывания связи, параметр  $g_0$  – сила связи, а параметры  $\beta = 5$  и  $\alpha$  ( $\beta \gg \alpha$ ) – характерные времена нарастания и спадания воздействия, соответственно. Функция  $\Theta(x)$  представляет из себя гладкий аналог функции Хевисайда, который дает значение близкое к 0 при  $x_{pre} < x_{th}$  и значение близкое к 1 при  $x_{pre} > x_{th}$ . Плюс соответствует возбуждающей связи, а минус – подавляющей.

После превышения порога срабатывания  $x_{th}$  приходящим импульсом  $x_{pre}$  переменная  $n$ , а вместе с ней и переменная  $j_{si}$ , начинает расти пропорционально  $e^{(\beta - \alpha)t}$ . Максимальное значение, которое может достичь переменная  $n$ , определяется соотношением  $\beta / (\beta + \alpha)$ . После окончания импульса значения переменных  $n$  и  $j_{si}$  спадают пропорционально  $e^{-\alpha t}$ .

## 2. Синхронизация нейрона периодическим импульсным сигналом

Рассмотрим синхронизацию нейрона (1) с подавляющей синаптической связью (5) периодическим импульсным сигналом. Отметим, что полная синхронизация  $x_1 = x_{in}$  в нашем случае невозможна. Под синхронизацией здесь будем понимать частотную синхронизацию или захват частоты:  $n\omega_1 = m\omega_2$ , где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – частоты импульсных сигналов на входе и выходе нейрона, соответственно, а  $m$  и  $n$  – целые числа.

В силу того, что функция связи носит пороговый характер, важной характеристикой является не форма входного импульса (и динамическая система его порождающая), а время превышения входным сигналом порогового значения  $x_{th}$ . Поэтому моделируя однонаправленную связь между нейронами мы можем без нарушения общности взять входной сигнал в виде меандра

$$x_{in} = \begin{cases} 1, & \text{если } iT_{in} < t < iT_{in} + t_{pulse}, \\ 0, & \text{если } iT_{in} + t_{pulse} < t < (i + 1)T_{in}, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots \tag{6}$$

Зафиксируем длительность импульса входного сигнала  $t_{pulse} = 0.55$  и будем исследовать следующую систему уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = y_1 + 3x_1^2 - x_1^3 - z_1 + j_{dc1} - g_{01}n_1(x_1 - x_{rev}),$$

$$\frac{dy_1}{dt} = 1 - 5x_1^2 - y_1,$$

$$\frac{dz_1}{dt} = \mu(4x_1 + 6.42 - z_1),$$

$$\frac{dn_1}{dt} = \beta\Theta(x_{in})(1 - n_1) - \alpha_1 n_1,$$

$$\Theta(x_{in}) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{x_{in} - x_{th}}{K_p}}},$$

где  $j_{dc1}$  – параметр нейрона, а  $g_{01}$  и  $\alpha_1$  – параметры связи.

Функция связи входит со знаком «−» непосредственно в правую часть уравнения для переменной  $x_1$  аддитивно с управляющим параметром  $j_{dc1}$ . Это означает, что при увеличении значений силы связи  $g_{01}$  и частоты входного сигнала  $w_{in}$  значение «эффективного» управляющего параметра нейрона  $j_{dc1} + j_{si1}$  будет уменьшаться, что приведет к снижению его частоты. Тем не менее, в зависимости  $w_1(w_{in})$  будут наблюдаться нарастающие участки – это области захвата частоты  $nw_1 = mw_{in}$ , где  $m$  и  $n$  – целые числа (рис. 3). При дальнейшем увеличении параметров  $g_{01}$  и  $w_{in}$  нейрон может перейти в режим генерации берстов, а затем и в состояние покоя – произойдет подавление колебаний.

Выберем время действия импульсов много меньше периода колебаний – зафиксируем значение параметра связи  $\alpha_1 = 2$ . Основные области захвата частоты для

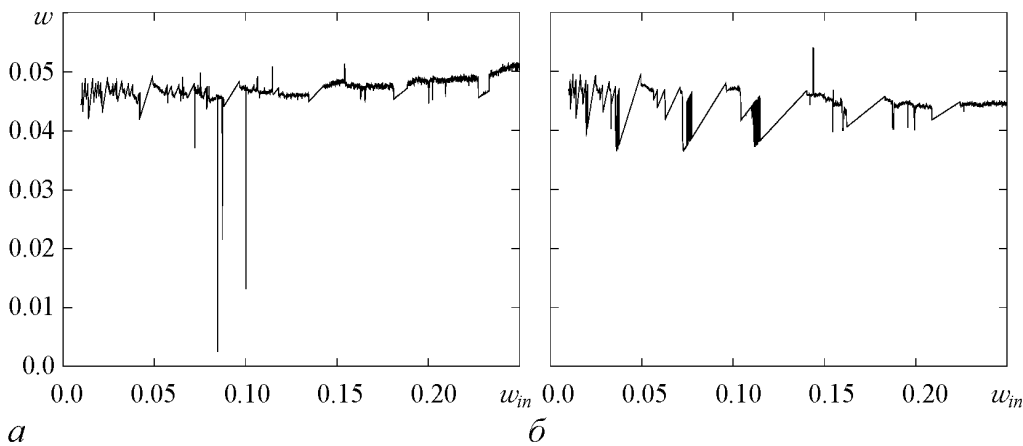


Рис. 3. Зависимость частоты нейрона от частоты входного сигнала при силе связи  $g_{01} = 1.0$  (а),  $g_{01} = 2.0$  (б)

этого случая приведены на рис. 4. При малой силе связи области захвата частоты не велики. С увеличением силы связи области захвата частоты увеличиваются, и после

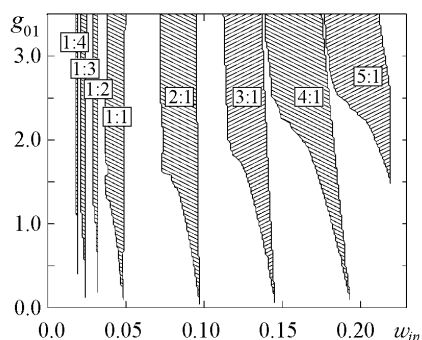


Рис. 4. Основные области захвата частоты

превышения некоторых значений параметра  $g_{01}$  они могут перекрываться.

Здесь мы не будем останавливаться на бифуркационных сценариях выхода из областей синхронизации – они могут быть разными: каскад удвоений периода, касательная бифуркация предельных циклов, рождение инвариантного тора. Этому в будущем будет посвящена отдельная статья.

### 3. Генерация берстов под действием импульсного входа

Кроме синхронизации нейрон (1) под действием импульсов входного сигнала может демонстрировать генерацию берстов. Такой процесс можно рассматривать как преобразование сигнала, при котором в соответствие одному событию на входе нейрона, спайку, на выходе ставится в соответствие другое, начало берста. С точки зрения теории информации происходит преобразование носителей информации и, следовательно, спайкового кодового пространства в берстовое. Такое явление уже изучалось в работе [7]. В результате исследования выяснилось, что такое преобразование не всегда имеет высокую эффективность, и часть спайков может теряться. Ситуацию частично можно исправить добавлением еще одного нейрона с подавляющей нелинейной связью, на выходе которого «потерянная» информация будет восстановлена. Для количественной оценки в этой работе использовалась взаимная информация, вычисляемая в предположении пространственно-временного кодирования информации.

В нашей работе мы более подробно остановимся на механизме генерации берстов под действием входных импульсов и надежности этого преобразования на примере нейрона Хиндмарш – Розе (1) с подавляющей нелинейной связью (5). Обычно в качестве количественной оценки эффективности процесса передачи информации используется взаимная информация сигналов на входе и выходе системы. Однако ее вычисление осложняют громоздкость алгоритма вычисления и выбор приемлемых значений технических параметров, а трактовку полученных результатов затрудняет необходимость предположения о способе кодирования информации. Поэтому мы предложили другой путь. На основе находящегося в покое нейрона Хиндмарш – Розе с возбуждающей связью был построен «декодер» для обратного преобразования берстов в спайки. В случае успеха можно будет говорить, что преобразование берстов в спайки обратимо, и мы можем вернуться к сигналу, аналогичному входному, и сравнить их, например, с помощью такой количественной характеристики как отношение частоты появления импульсов на входе и выходе нейронного канала. Эта характеристика имеет следующий физический смысл. Если мы имеем две бинарные последовательности (0 и 1 соответствуют отсутствию и наличию события в окне

ожидания) на входе и выходе элемента, то при соответствующем выборе величины окна ожидания события (больше времени инерционности каскада) коэффициент линейной корреляции этих последовательностей будет равен отношению частот появления событий на выходе и входе. Если частоты событий на входе и выходе нейронного ансамбля будут совпадать, то мы будем говорить о том, что информация, закодированная во входном сигнале, сохранилась. В случае потери носителей информации будем говорить о частичной потере информации.

Таким образом, здесь мы рассмотрим динамику нейронного ансамбля, состоящего из нейронов (1) с нелинейными связями, под действием импульсного сигнала

$$x_{in} = x_0 \sum_i \Theta(t - t_i) \left( \frac{t - t_i}{\tau} \right) e^{-\frac{t-t_i}{\tau}},$$

где  $t_i$  – времена появления импульсов,  $x_0 = 4$ ,  $\tau = 0.5$ , и  $\Theta(t)$  – функция Хевисайда. Времена межимпульсных интервалов  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$  имеют плотность вероятности

$$W(\Delta t_i) = \frac{(\Delta t_i - t_0)}{\tau_0^2} e^{-\frac{(\Delta t_i - t_0)}{\tau_0}},$$

где  $t_0 = 150$  и  $\tau_0 = 225$  – фиксированные параметры.

Подавляющая нелинейная связь

$$\begin{aligned} j_{si1} &= -g_{01}n_1(t)(x_1 - x_{rev}), \\ \frac{dn_1}{dt} &= \beta_1\Theta(x_{in})(1 - n_1) - \alpha_1n_1, \\ \Theta(x) &= \frac{1}{1 + e^{-\frac{x - x_{th1}}{K_p}}}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $x_{th1} = 0.5$  – фиксированный параметр,  $g_{01}$  и  $\alpha_1$  – управляющие параметры.

Первый нейрон

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= y_1 + 3x_1^2 - x_1^3 - z_1 + j_{dc1} + j_{si1}, \\ \frac{dy_1}{dt} &= 1 - 5x_1^2 - y_1, \\ \frac{dz_1}{dt} &= \mu(4x_1 + 6.42 - z_1), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $j_{dc1}$  – управляющий параметр.

Возбуждающая нелинейная связь

$$\begin{aligned} j_{si2} &= g_{02}n_2(t)(x_2 - x_{rev}), \\ \frac{dn_2}{dt} &= \beta_2\Theta(x_1)(1 - n_2) - \alpha_2n_2, \\ \Theta(x) &= \frac{2}{1 + e^{-\frac{x - x_{th2}}{K_p}}}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $x_{th2} = 0.5$  – фиксированный параметр,  $g_{02}$  и  $\alpha_2$  – управляющие параметры.

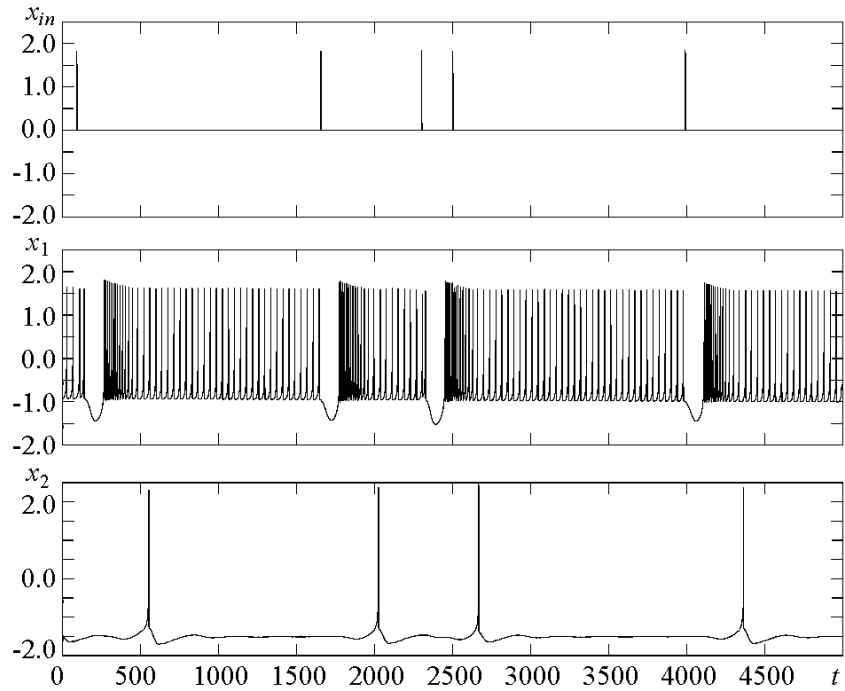


Рис. 5. Осциллограммы переменных  $x_{in}, x_1, x_2$  соответственно

Второй нейрон

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_2}{dt} &= y_2 + 3x_2^2 - x_2^3 - z_2 + j_{dc2} + j_{si2}, \\
 \frac{dy_2}{dt} &= 1 - 5x_2^2 - y_2, \\
 \frac{dz_2}{dt} &= \mu(4x_2 + 6.42 - z_2),
 \end{aligned} \tag{10}$$

где  $j_{dc2}$  – управляющий параметр.

Осциллограмма работы такого нейронного ансамбля приведена на рис. 5.

**3.1. Преобразование спайков в берсты.** Преобразование спайков в берсты осуществляется первым нейроном. Он находится в режиме постоянной генерации спайков ( $j_{dc1} > 3.325$ ), а приходящие на его вход импульсы могут приводить к гиперполяризации нейрона. В этом случае спайку на входе канала можно поставить в соответствие начало нового берста в сигнале первого нейрона.

Рассмотрим зависимость эффективности данного преобразования от параметров связи  $\alpha_1$  и  $g_{01}$  и параметра первого нейрона  $j_{dc1}$ . Параметр  $\alpha_1$  является величиной обратно пропорциональной характерному времени спада действия на нейрон. Зависимость отношения частот появления входных импульсов и берстов на выходе первого нейрона приведена на рис. 6, а. При больших значениях параметра  $\alpha_1$  преобразование спайков в берсты происходит неэффективно – большая часть входных импульсов, а вместе с ними и закодированная в них информация, теряется. При уменьшении  $\alpha_1$  эффективность повышается и при соответствующих значениях остальных параметров может достигать 1.

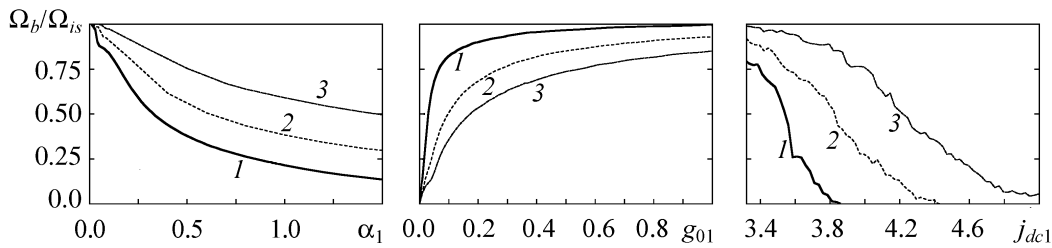


Рис. 6. Зависимость отношения частот берстов и входных импульсов от параметров связи  $\alpha_1$ ,  $g_{01}$  и параметра первого нейрона  $j_{dc1}$ : а -  $j_{dc1} = 3.4$ , 1 -  $g_{01} = 0.1$ , 2 -  $g_{01} = 0.2$ , 3 -  $g_{01} = 0.5$ ; б -  $j_{dc1} = 3.4$ , 1 -  $\alpha = 0.1$ , 2 -  $\alpha = 0.3$ , 3 -  $\alpha = 0.5$ ; в - 1 -  $g_{01} = 0.1$ ,  $\alpha_1 = 0.1$ , 2 -  $g_{01} = 0.3$ ,  $\alpha_1 = 0.1$ , 3 -  $g_{01} = 0.5$ ,  $\alpha_1 = 0.05$

Параметр  $g_{01}$  определяет силу связи. С его увеличением растет эффективность преобразования (рис. 6, б). Можно заметить, что она растет тем быстрее, чем меньше параметр  $\alpha_1$ . Т.е. чем дольше длится воздействие на нейрон, тем менее сильная связь нужна для надежного преобразования носителей информации. В области больших значений  $g_{01}$  при малых значениях  $\alpha_1$  и значениях  $j_{dc1}$  близких к бифуркационному эффективность преобразования может достигать 1.

Параметр  $j_{dc1}$  – управляющий параметр нейрона, задающий режим его работы. Здесь мы рассматриваем область  $j_{dc1} > 3.325$ , в которой нейрон генерирует спайки (хаотически или периодически). При сильной связи генерация берстов под действием импульсов входного сигнала возможна в широком интервале значений параметра  $j_{dc1}$ . Несмотря на то, что эффективность генерации берстов вдали от критического значения  $j_{dc1} = 3.325$  будет мала, такое явление стоит учитывать, так как подобная генерация может быть сильным паразитным эффектом. Отметим особенности вида зависимости, приведенной на рис. 6, в, а именно, плавное спадание эффективности преобразования при увеличении параметра  $j_{dc1}$  и ее значения меньше 1 вблизи критического значения параметра  $j_{dc1} = 3.325$ , где, казалось бы, даже малое воздействие должно было привести к желаемому результату. Причина такой ненадежности кроется в наличии у нейрона собственной динамики. Здесь близость к бифуркационной границе имеет другой смысл, нежели это было бы при адиабатическом воздействии. Поэтому такой вид ненадежности мы условно назвали «динамическим». Возможность или невозможность преобразования зависит от фазы генерируемых спайков в момент прихода входных импульсов. Импульсы, пришедшие в «удачные» моменты времени, вызывают генерацию берста, а импульсы, пришедшие в «неудачные» моменты времени, приводят к уширению межимпульсного интервала, часто незначительному.

**3.2. Преобразование берстов в спайки.** Преобразование берстов в спайки производится с помощью второго нейрона, находящегося в состоянии покоя ( $j_{dc2} < 1.176$ ), и возбуждающей нелинейной связи. Ее параметры выбираются таким образом, чтобы она интегрировала импульсы берстов, приходящих с первого нейрона при превышении ими некоторой частоты следования. Другими словами, с помощью связи будет осуществляться селекция сигнала по частоте следования импульсов. При достижении переменной  $j_{si2}$  некоторого порогового значения, достаточного для возбуждения, находившийся до этого в состоянии покоя нейрон генерирует одиночный импульс, после чего снова возвращается в состояние покоя.

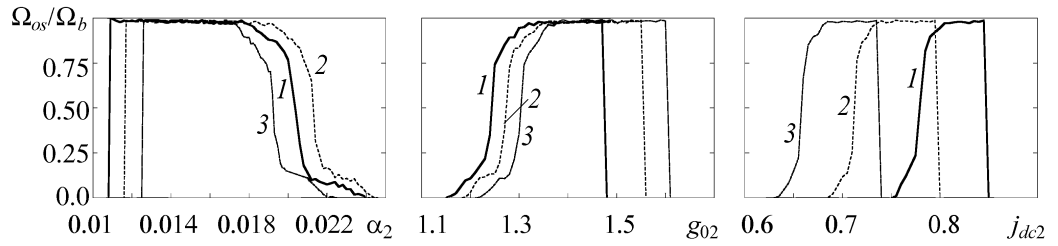


Рис. 7. Зависимость отношения частот выходных импульсов и берстов от параметров связи  $\alpha_2$ ,  $g_{02}$  и управляющего параметра второго нейрона  $j_{dc2}$ : а –  $1 - j_{dc2} = 0.83$ ,  $g_{02} = 1.0$ ,  $2 - 0.77$ ,  $1.2$ ,  $3 - 0.7$ ,  $1.4$ ; б –  $j_{dc2} = 0.7$ ,  $1 - \alpha_2 = 0.014$ ,  $2 - 0.15$ ,  $3 - 0.16$ ; в –  $\alpha_2 = 1.4$ ,  $1 - g_{02} = 1.0$ ,  $2 - 1.2$ ,  $3 - 1.4$

Данная схема, в отличие от рассмотренного выше первого каскада, имеет ярко выраженный порог срабатывания. После преодоления порога преобразование осуществляется с эффективностью близкой к единице в широкой области значений этих параметров. Соответствующие зависимости эффективности данного преобразования от параметров связи  $\alpha_2$ ,  $g_{02}$  и управляющего параметра нейрона  $j_{dc2}$  приведены на рис. 7. С одной стороны, эти зависимости ограничиваются порогом срабатывания каскада, а с другой – началом генерации двух импульсных берстов. Следует отметить, что области эффективного преобразования по параметру  $j_{dc2}$  для каждой пары значений параметров связи  $\alpha_2$ ,  $g_{02}$  смещены друг относительно друга, что требует особой аккуратности при выборе или изменении параметров.

Таким образом, надежное преобразование спайков в берсты (с эффективностью близкой к единице) может в простейшем случае быть осуществлено с помощью находящегося в покое нейрона с возбуждающей нелинейной связью.

**3.3. Динамическая ненадежность.** В силу того, что преобразование берстов в спайки надежно в широкой области параметров возбуждающей связи и второго нейрона, зависимости отношения частот носителей информации на входе и выходе первого каскада с хорошей степенью точностью будут совпадать с аналогичными зависимостями для всего ансамбля в целом. Как уже отмечалось выше, будем говорить, что если число носителей информации на входе и выходе ансамбля совпадает, информация в них закодированная не теряется. Потеря носителей информации, а вместе с ней и потеря информации происходит, в основном, в первом каскаде при преобразовании спайков в берсты. Это связано с наличием у первого нейрона собственной динамики (устойчивого предельного цикла или хаотического аттрактора) и со специфическим устройством фазового пространства нейрона. Для простоты рассмотрим случай, когда в фазовом пространстве первого нейрона находится единственный аттрактор – устойчивый предельный цикл, отвечающий генерации спайков. Он находится в окрестности поверхности устойчивых периодических решений быстрой подсистемы  $L_1$  (см. рис. 2). Входной импульс вызывает быстрое изменение переменной  $z^*$  (в данном случае  $z^* = z_1 - j_{dc1} - j_{si1}$ ) за счет переменной  $j_{si}$  (медленная переменная  $z_1$  за время действия импульса практически не успевает измениться). Для генерации берста необходим переход траектории на кривую  $\xi_0^n$ , который может произойти в двух случаях:

– при достаточно сильном воздействии, когда значение «эффективного» контрольного параметра быстрой подсистемы  $z^*$  становится меньше  $Z_{sl1}$ ;



– при переходе траектории за неустойчивое многообразие неперiodической седловой траектории  $\xi_0^s$ .

В первом случае можно обеспечить высокую надежность преобразования, но, в то же время, требуется сильная связь. Во втором случае генерация берста будет осуществляться при меньшей силе связи, но не всегда надежно. Остановимся на втором случае более подробно. В силу того, что переменная  $z$  является медленной и почти не меняется при движении по предельному циклу, дадим качественную трактовку процессу генерации берстов с помощью эволюции фазовой плоскости быстрой подсистемы при изменении переменной  $z^*$ . В начальный момент времени на фазовой плоскости существуют предельный цикл (на котором находится изображающая точка) и устойчивый узел, области притяжения которых разделяет сепаратриса седла, с трех сторон охватывающая предельный цикл. Быстрое изменение переменной  $z^*$  вследствие внешнего воздействия приводит к быстрому изменению фазовой плоскости быстрой подсистемы (смещению положений предельного цикла, состояний равновесия и сепаратрисы седла), в результате чего изображающая точка может оказаться за сепаратрисой седла. Это приведет к тому, что траектория уйдет в окрестность устойчивого узла  $N_1$  быстрой подсистемы. В пространстве  $(x, y, z^*)$  этому будет соответствовать переход траектории на кривую  $\xi_0^n$ . Со временем траектория вернется на поверхность периодических решений быстрой подсистемы  $L_1$  и сойдется к предельному циклу. Таким образом, мы получим процесс генерации берста, вызванный входным импульсом. Однако такое преобразование не всегда будет осуществляться надежно – при некоторых значениях параметров связи результат воздействия зависит от фазы генерируемых спайков. Другими словами, в этом случае на предельном цикле можно выделить области «пропускания» и «непропускания» (рис. 8). Если входной импульс приходит, когда фаза автоколебаний находится в зоне пропускания, то он вызывает генерацию берста. Если импульс приходит, когда фаза

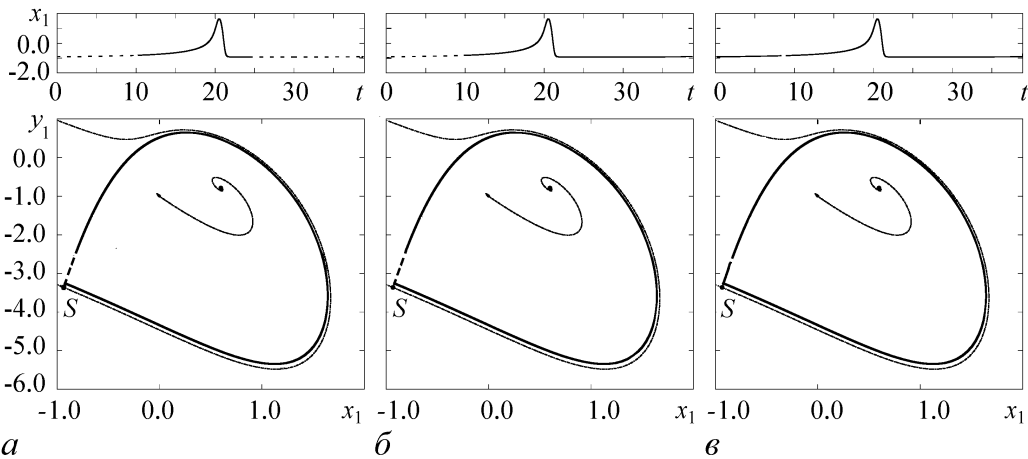


Рис. 8. Осциллограмма переменной  $x_1$  системы (1) на одном периоде колебаний (вверху) и фазовая плоскость быстрой подсистемы  $(x_1, y_1)$  системы (1) при фиксированном значении медленной переменной  $z_1 = 3.47$  с проекцией предельного цикла исходной системы (1): *а* –  $j_{dc1} = 3.4, g_{01} = 0.1, \alpha_1 = 0.5$ ; *б* –  $j_{dc1} = 3.4, g_{01} = 0.5, \alpha_1 = 0.1$ ; *в* –  $j_{dc1} = 3.4, g_{01} = 0.5, \alpha_1 = 0.1$ . Пунктирной линией на предельном цикле и осциллограмме переменной  $x_1$  показаны области «непропускания», а сплошной – области, при действии в которой импульс вызывает генерацию нового берста

находится в зоне непропускания, то траектория остается в малой окрестности предельного цикла, что приводит к незначительному уширению межимпульсного интервала. Отметим, что область пропускания находится в той части предельного цикла, где он охватывается сепаратрисой седла, а область непропускания – на участке, где она отсутствует. Величина областей пропускания и непропускания зависит от параметров связи и управляющего параметра нейрона. Как показало исследование, для уменьшения области непропускания, а вместе с ней увеличения надежности преобразования, более эффективным является уменьшение параметра  $\alpha_1$  (увеличение времени воздействия на нейрон) при относительно небольшом значении параметра силы связи  $g_{01}$  (см. рис. 7).

### Заключение

В данной статье были рассмотрены динамические и информационные аспекты импульсного воздействия на нейрон Хиндмарш – Розе. Как и любой пейсмейкерный нейрон, он может демонстрировать синхронизацию под действием периодического импульсного сигнала. С другой стороны, под действием непериодической последовательности импульсов нейрон может генерировать последовательность берстов. При этом наличие у него собственной динамики (предельного цикла или хаотического аттрактора) может приводить к ненадежной работе нейрона. В данном случае эффективность импульсного воздействия на нейрон будет зависеть от фазы автоколебаний нейрона. Другими словами, на аттракторе есть два типа «областей»: области, в которых траектория быстро возвращается на аттрактор после сбоя, вызванного входным импульсом, и области, в которых входной импульс вызывает длительный переходный процесс, отвечающий гиперполяризации нейрона. В статье дана качественная трактовка такой «динамической» ненадежности. Показано, что преобразование спайков в берсты обратимо и может быть осуществлено с помощью находящегося в покое нейрона и возбуждающей нелинейной связи. В заключение отметим, что наличие электронного прототипа позволяет перенести полученные теоретические результаты на практику.

Автор выражает свою благодарность В.И. Некоркину, В.В. Матросову и В.Б. Казанцеву за полезное обсуждение.

*Работа поддержана Российским Фондом фундаментальных исследований (гранты РФФИ 03-02-17135 и 05-02-17441).*

### Библиографический список

1. *Zakharov D.G.* Influence of inhibitory pulse train on a pacemaker Hindmarsh-Rose neuron // In the Proceedings of the International Symposium «Topical Problems of Nonlinear Wave Physics» (NWP-2003), 2003. P. 133.
2. *Сконженко А.Л., Красичков Л.Б.* Распространение импульсов в цепочке элементов с нейроноподобной динамикой // Известия Академии наук. Серия физическая. 2003. Т. 67, № 12. С. 1697.
3. *Kazantsev V.B., Nekorkin V.I.* Dynamic of oscillatory neurons. Information aspects // In book «Nonlinear waves 2002» / Edited by A.V. Gaponov-Grekhov and V.I. Nekorkin. 2003. P. 9.

4. *Pinto R.D. et. al.* Synchronous behavior of two coupled electronic neurons // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 62. P. 2644.
5. *Binczak S., Kazantsev V.B., Nekorkin V.I., and Bilbault J.M.* Experimental study of bifurcations in a modified FitzHugh-Nagumo cell // *Electronic Letters.* 2003. Vol. 39, № 13. P. 961.
6. *Борисюк Г.Н., Борисюк Р.М., Казанович Я.Б. и Иваницкий Г.Р.* Модели динамики нейронной активности при обработке информации мозгом - итоги десятилетия // *Успехи физ. наук.* 2002. Vol. 172, № 10. P. 1189.
7. *Eguia M.C., Rabinovich M.I., and Abarbanel H.D.I.* Recovery of hidden information // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 62. P. 7111.
8. *Wang X.-J.* Genesis of bursting oscillations in the Hindmarsh-Rose model and homoclinicity to a chaotic saddle // *Physica D.* 1993. Vol. 62. P. 263.
9. *Destexhe A., Mainen Z.F., and Sejnowski T.J.* An efficient method for computing synaptic conductances based on a kinetic model of receptor binding // *Neural Computation.* 1994. Vol. 6. P. 14.

*Институт прикладной физики РАН,  
Нижний Новгород*

*Поступила в редакцию 24.09.2004  
После доработки 24.06.2005*

## **DYNAMICS OF A SMALL ENSEMBLE OF HINDMARSH – ROSE NEURONS UNDER THE ACTION OF A PULSE TRAIN**

*D.G. Zakharov*

The influence of a pulse train on the dynamics of unidirectionally nonlinearly coupled Hindmarsh-Rose neurons is investigated. The synchronization of the spike-generating neuron by the periodical pulse train is studied. Information and dynamical aspects of burst generation under the action of a pulse train with irregular interpulse intervals are analyzed. It is shown that the backward burst-to-spike transformation by the neuron at rest is possible. Dynamic unreliability during the spike-to-burst transformation is explained qualitatively.



*Захаров Денис Геннадьевич* – родился в Горьком (1976). Окончил Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (1999). По окончании поступил в аспирантуру Института прикладной физики РАН. С 1997 года работает в том же институте в должности младшего научного сотрудника. Область научных интересов - исследования нелинейной динамики ансамблей активных элементов в приложении к нейробиологическим и медицинским задачам. Опубликовал 9 научных работ.

## **ПОЛУПРОВОДНИКОВЫЙ АНАЛОГ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ЛОРЕНЦА В КОЛЬЦЕВОЙ ТЕРМОКОНВЕКТИВНОЙ ЯЧЕЙКЕ**

*Р.А. Браже, О.Н. Куделин*

Получена система нелинейных уравнений, приближенно описывающих явление термоэлектрогидродинамической конвекции в полупроводниковой кольцевой ячейке, сводимая к модели Лоренца. Исследованы зависимости параметров модели от материала и размеров кольца, напряженности приложенного электрического поля и градиента температуры.

### **1. Постановка задачи**

В работах [1, 2] авторами была построена теория термоэлектрогидродинамической конвекции (ТЭГДК) в субмикронных полупроводниковых слоях с учетом рассеяния носителей заряда на ионах кристаллической решетки. Такое явление является аналогом хорошо известной термоконвекции Бенара в слое вязкой жидкости. Далее в [3] были исследованы устойчивые и неустойчивые режимы ТЭГДК, а также появление детерминированного хаоса, аналогичного предсказанному Э. Лоренцом [4] для конвекции Бенара.

Одной из причин, затрудняющих экспериментальную проверку разработанных модельных представлений о ТЭГДК в плоских полупроводниковых слоях, является отсутствие простых и надежных способов визуализации конвективных токов свободных носителей заряда. В связи с этим представляется обнадеживающим обращение к модели ТЭГДК в кольцевом слое полупроводника (рис. 1). Такая конвекция, если она существует, аналогична термоконвекции в тороидальной ячейке, заполненной вязкой жидкостью [5, 6]. Остроумная техника экспериментального исследования этого явления предложена в [7]. В случае полупроводникового кольца о наличии ТЭГДК и направлении конвективного тока можно судить по возникающему в кольце магнитному полю, что должно облегчить экспериментальное исследование данного явления.

В связи с этим интересно было бы также рассмотреть задачу с системой вложенных друг в друга полупроводниковых колец, в том числе выполненных из различных материалов. Это позволило бы исследовать возможность хаотической синхронизации конвективных режимов в различных кольцах и иные кооперативные явления, возникающие вследствие взаимодействия магнитных полей конвективных токов. Для начала, однако, необходимо рассмотреть возможность существования обсуждаемой конвекции в отдельном кольце.

Система уравнений, описывающая движение свободных электронов в кольце, в гидродинамическом приближении получается из кинетического уравнения Больцмана и уравнений Максвелла в ходе процедуры усреднения скоростей электронов и пренебрежения рекомбинационными процессами в масштабах характерных времен наблюдения [8, 9]. В итоге получается 5 законов сохранения для первых 13 моментов функции распределения электронов по координатам и импульсам:

- закон сохранения концентрации частиц (скаляр), который сводится к уравнению непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0; \quad (1)$$

- закон сохранения потока импульса (вектор, имеющий 3 компоненты), который сводится к модифицированному уравнению Навье – Стокса (здесь для угловой компоненты в цилиндрических координатах)

$$m^*n \left[ \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\phi}{r} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \eta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r^2} \right] - neE \sin \phi - \frac{m^* n v_\phi}{\tau_p}; \quad (2)$$

- закон сохранения плотности энергии (скаляр);
- закон сохранения плотности потока импульса (тензор второго ранга, 5 независимых компонент);
- закон сохранения плотности потока энергии (вектор, 3 независимых компоненты).

Последние три закона сохранения сводятся к уравнению теплопереноса

$$m^*nT \left[ \frac{\partial s}{\partial t} + v_r \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial s}{\partial \phi} \right] = \kappa \Delta T + \frac{\eta}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{2}{3} \delta_{ik} \Delta \mathbf{v} \right)^2 + \zeta (\Delta \mathbf{v})^2 + \mathbf{jE} + \frac{m^* n v^2}{\tau_p}. \quad (3)$$

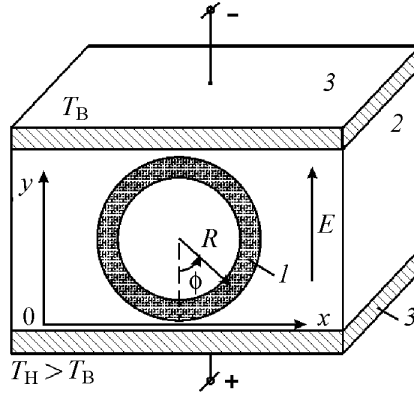


Рис. 1. Исследуемая модель: 1 – полупроводниковый слой ( $n$ -типа); 2 – диэлектрическая подложка; 3 – металлические электроды, между которыми создан градиент температуры

В выражениях (1)–(3) приняты следующие обозначения:  $n$  – концентрация свободных электронов,  $m^*$  – их эффективная масса (считается изотропной),  $v$  – гидродинамическая скорость электронов,  $p$  – давление электронной квазижидкости,  $\eta$  и  $\zeta$  – соответственно коэффициенты ее объемной и сдвиговой вязкости,  $E$  – напряженность электрического поля,  $\tau_p$  – время релаксации импульса (через него учитывается рассеяние электронов на фононах),  $T$  – абсолютная температура,  $s$  – удельная энтропия,  $\kappa$  – коэффициент теплопроводности,  $j$  – плотность тока,  $t$  – время.

В теории конвекции обычно используется приближение Буссинеска, состоящее в предположении о постоянстве силового поля (в нашем случае электрического) в среде. Это позволяет не учитывать влияние возмущений ее плотности (в нашем случае плотности заряда) на само поле и не использовать уравнение Пуассона, ограничиваясь анализом системы (1)–(3).

Отметим, что никаких особых требований к используемым полупроводниковым материалам, в частности, к ширине запрещенной зоны, проводимости и пр., пока не предъявляется. Имеются в виду невырожденные примесные полупроводники  $n$ - или  $p$ -типа (в теоретическом описании –  $n$ -тип). Изотропность эффективной массы электронов в плоскости кольца может быть достигнута в ходе такого напыления полупроводниковой пленки на подложку, при котором оптическая ось перпендикулярна поверхности. Что касается оптимизации остальных параметров, то на этом вопросе мы остановимся ниже, в ходе анализа модели.

## 2. Уравнения Лоренца

Умножая (1) на  $R^2$  и интегрируя по  $\phi$ , получаем

$$J \frac{d\omega}{dt} = -R^2 w \oint_{2\pi} m^* n \sin \phi d\phi - \left( h + \frac{J}{\tau_p} \right) \omega, \quad (4)$$

где  $J = 2\pi m^* n R^3$  – момент инерции электронной квазижидкости, приходящийся на единицу площади сечения кольца;  $h = 2\pi R \eta$  – коэффициент трения, обусловленный вязкостью среды;  $w = eE/m^*$  – ускорение, обусловленное электрическим полем;  $\omega$  – угловая скорость вращения частиц среды.

В уравнении (2) пренебрежем диссипативным членом и предположим, что теплообмен между электронной квазижидкостью и диэлектрической подложкой пропорционален разности их температур. Учитывая, что  $ds = c_p dT/T$  ( $c_p$  – удельная теплоемкость), получаем

$$\left[ \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right] = \frac{\chi}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} - K [T(\phi, y) - T_h(\phi)]. \quad (5)$$

Здесь  $T_h(\phi)$  – температура электронной квазижидкости при  $y = h(\phi)$  (рис. 1);  $\chi = \kappa/(m^* n_0 c_p)$  – коэффициент температуропроводности;  $K$  – коэффициент теплопередачи. Предположим также, что концентрация свободных электронов зависит от температуры по закону

$$n = n_0 [1 - \alpha (T - T_0)], \quad (6)$$

где  $\alpha = E_a/(2k_B T^2)$  – коэффициент теплового расширения, полученный из температурной зависимости концентрации электронов ( $E_a$  – энергия активации доноров,  $k_B$  – постоянная Больцмана);  $T_0$  – значение температуры, при которой концентрация электронов равна  $n_0$ .

Далее по аналогии с [10], где исследовалась классическая гидродинамическая модель в тороиде с жидкостью, разложим  $T_h(\phi)$  и  $T(\phi, t)$  в ряды Фурье по углу  $\phi$  с учетом четности функции  $T_h(\phi)$ :

$$\begin{cases} T_h(\phi) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} T_n \cos n\phi, \\ T(\phi, t) = T_0 + a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(t) \cos n\phi + b_n(t) \sin n\phi]. \end{cases} \quad (7)$$

В частности, при  $n = 1$  температура на «нижней» границе образца ( $\phi = 0^\circ$ )  $T_H = T_0 + a_0(t) + T_1$ , а температура на «верхней» границе ( $\phi = 180^\circ$ )  $T_B = T_0 + a_0(t) - T_1$ . Разность температур на образце  $\Delta T = T_H - T_B = 2T_1$ .

Подставляя (6), (7) в (4) и (5), получаем систему, состоящую, вообще говоря, из бесконечного числа уравнений. В частности, для  $n = 1$

$$\begin{cases} J\dot{\omega} = \frac{\alpha m^* n_0 w R^2}{2} b_1 - \left( h + \frac{J}{\tau_p} \right) \omega, \dot{a}_1 = -\omega b_1 - \left( K + \frac{\chi}{R^2} \right) a_1 + K T_1, \\ \dot{b}_1 = \omega a_1 - \left( K + \frac{\chi}{R^2} \right) b_1, \end{cases} \quad (8)$$

и для  $n = 2, 3, 4, \dots$

$$\begin{cases} \dot{a}_0 = -K a_0, \dot{a}_n = -n\omega b_n - \left( K + n^2 \frac{\chi}{R^2} \right) a_n + K T_n, \\ \dot{b}_n = n\omega a_n - \left( K + n^2 \frac{\chi}{R^2} \right) b_n. \end{cases}$$

В полученной системе уравнений верхняя группа (8) не зависит от всех остальных. Когда амплитуды всех мод, кроме трех, равны нулю, эта группа преобразуется к уравнениям Лоренца для выбранной выше геометрии ячейки:

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\tau} = \sigma(Y - X), \\ \frac{dY}{d\tau} = rX - Y - ZX, \\ \frac{dZ}{d\tau} = XY - Z, \end{cases} \quad (9)$$

где параметры  $\sigma$  и  $r$  определяются из следующих выражений:

$$\sigma = \frac{h + \frac{J}{\tau_p}}{J \left( K + \frac{\chi}{R^2} \right)}; \quad r = \frac{\alpha m^* n_0 w R^2}{2 \left( K + \frac{\chi}{R^2} \right) \left( h + \frac{J}{\tau_p} \right)} T_1. \quad (10)$$

Решение системы (9) имеет вид

$$X = \frac{\omega}{K + \frac{\chi}{R^2}}; \quad Y = \frac{\alpha m^* n_0 w R^2}{2K \left( h + \frac{J}{\tau_p} \right)} b_1; \quad Z = r - \frac{\alpha m^* n_0 w R^2}{2K \left( h + \frac{J}{\tau_p} \right)} a_1; \quad (11)$$

$$\tau = \left( K + \frac{\chi}{R^2} \right) t.$$

В случае конвективной ячейки более общей, эллиптической формы в последнем уравнении системы (9) появляется новый параметр [11, 12]

$$\frac{dZ}{d\tau} = XY - bZ.$$

Здесь  $b = 4/(1 + a^2)$ , где величина  $a$  определяет характерный масштаб мод, раньше других теряющих устойчивость. Для ячейки круговой формы  $a = \sqrt{3}$  и  $b = 1$ .

### 3. Анализ модели

Для оценки возможных значений параметров  $\sigma$ ,  $r$  полученного полупроводникового аналога модели Лоренца, основанного на квазигидродинамических уравнениях, воспользуемся принятыми в рамках такого подхода [2, 9] кинетическими представлениями относительно коэффициентов вязкости, температуропроводности и времени релаксации импульса. Иначе говоря, предполагается, что свободные электроны полупроводника сохраняют характеристики одноатомного электронного газа независимо от нашего усредненного описания их движения. Поскольку в газах коэффициенты кинематической вязкости  $\nu$  и температуропроводности  $\chi$  равны по величине коэффициенту диффузии  $D$ , то в соответствии с формулой Эйнштейна

$$\nu = \chi = D = \mu k_B T / e,$$

где  $\mu$  – подвижность электронов.

Таким образом, в нашей модели число Прандтля  $Pr = \nu/\chi \sim 1$ . Введенный в (10) параметр  $\sigma$  в допущении  $K \leq \chi/R^2$  можно представить в виде

$$\sigma = \frac{hR^2}{\chi J} \left( 1 + \frac{J}{\tau_p h} \right) = Pr \left( 1 + \frac{J}{\tau_p h} \right).$$

Проведем теперь численные оценки величины этого параметра в полупроводниковом кольце, взяв в качестве примера материал с высокой подвижностью электронов – антимонид индия (InSb), легированный медью (Cu). Он обладает следующими интересующими нас характеристиками [13, 14]:  $m^* = 0.12 \cdot 10^{-31}$  кг;  $E_a = 0.056$  эВ;  $\mu = 7.8 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ ;  $n_0 \sim 10^{17} \text{ м}^{-3}$ . Значение  $\sigma$  существенным образом зависит от отношения величин  $h$  и  $J/\tau_p$ . В соответствии с вышеизложенным,  $h = 2\pi R n_0 m^* D$ , а  $\tau_p = \mu m^*/e$ , так что

$$\frac{J}{\tau_p h} = \frac{e^2 R^2}{\mu^2 m^* k_B T}.$$



Задав в качестве минимально возможного из технологических соображений радиуса кольца  $R \sim 10^{-3}$  м, при  $T = 300$  К получаем для нашего примера значение  $J/(\tau_p h) \sim 10^8$ . Уменьшить эту величину подбором материала, размеров кольца и температуры на 8 порядков нереально, так что в нашей модели эффективное число Прандтля  $\sigma \gg 1$  всегда.

Заметим, что при термоэлектрогидродинамической конвекции в плоском слое [1–3] толщина полупроводниковой пленки может быть доведена до сотых долей микрометра. Это позволяет реализовать в ней близкий к бесстолкновительному (баллистическому) режим движения свободных носителей заряда в конвективных ячейках, когда  $\tau_p \gg J/h$  и  $\sigma \approx \text{Pr} \sim 1$ .

С учетом сделанной оценки эффективное, нормированное к критическому значению число Рэлея

$$r = \frac{\alpha m^* n_0 w R^2 \tau_p T_1}{2 \left( K + \frac{\chi}{R^2} \right) J},$$

что для  $R \sim 10^{-3}$  м,  $T = 300$  К дает

$$r \sim 10^{-5} E \Delta T,$$

где, как указывалось в разделе 2,  $\Delta T = 2T_1$  – разность температур на образце ( $E$  и  $\Delta T$  измеряются в единицах СИ).

Как следует из полученного соотношения и рис. 2, при выбранном размере кольца и разумных разностях температур значение  $r \geq 1$ . Когда начинается конвективный ток в кольце, величина напряженности приложенного к образцу электрического поля должна быть весьма малой:  $E \sim 10^3 \div 10^4$  В/м. Увеличение напряженности поля и размеров кольца приводит к быстрому увеличению  $r$  (рис. 2, 3).

Устойчивость конвективного тока в круговом кольце ( $b = 1$ ) сохраняется до значений  $r < r^*$  [11, 12], где

$$r^* = \frac{\sigma(\sigma + b + 1)}{\sigma - b - 1} = \frac{\sigma(\sigma + 4)}{\sigma - 2}.$$

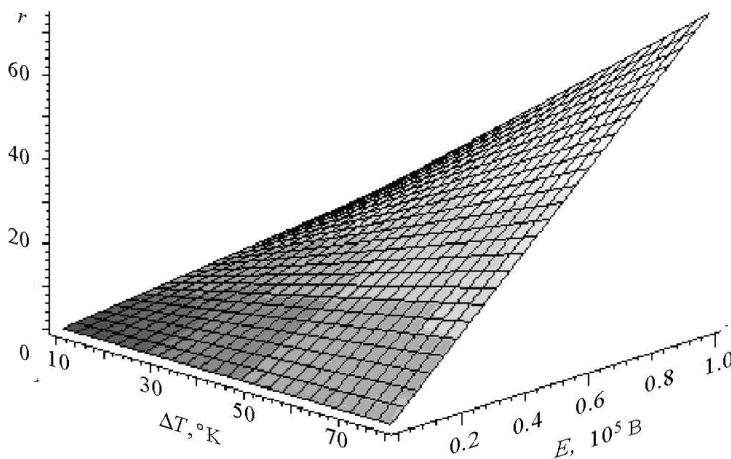


Рис. 2. Зависимость параметра  $r$  от напряженности приложенного электрического поля и разности температур на электродах при фиксированном радиусе кольца ( $R = 10^{-3}$  м)

Так как  $\sigma \gg 1$ , то  $r^* \approx \sigma \gg 1$ . Тогда

$$\frac{r}{r^*} \approx \frac{r}{\sigma} = \frac{\alpha m^* n_0 w R^2 \tau_p^2 T_1}{2J} = \frac{\alpha \mu^2 m^* E \Delta T}{8 \pi e R} \sim 10^{-12} E \Delta T$$

(при  $R \sim 10^{-3}$  м). Отсюда следует, что вплоть до предпробойных значений напряженности электрического поля в полупроводнике ( $E \leq 10^8$  В/м) и разностей температур  $\Delta T \leq 10^2$  К конвективный ток свободных электронов в кольце будет протекать в условиях, далеких от неустойчивого режима.

Естественно, как и в классическом примере (когда  $\sigma = \text{Pr} = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $r^* \approx 24.74$  [12]), при некотором  $r_2 \leq r^*$  на фазовом портрете системы должен возникнуть странный аттрактор (в классическом примере  $r_2 \approx 24.06$  [12]). Так как численное решение уравнений Лоренца (9) на основе трехмодовой аппроксимации для  $r \gg 1$  неправомерно, то соответствующее условие для  $r_2$  в рамках данной модели не может быть найдено. Строить же более сложную теорию для отыскания  $r_2$  не имеет смысла, так как требуемый режим, как показали наши оценки, в экспериментальных условиях все равно недостижим.

Ситуация здесь такая же, как если бы мы в гидродинамической модели Лоренца залили в тороид не воду ( $\text{Pr} = 6.77$ ), а глицерин ( $\text{Pr} = 1.09 \cdot 10^4$ ). Большая вязкость глицерина при почти одинаковой с водой температуропроводности приводит к быстрому уменьшению амплитуды и частоты колебательных мод возмущений и, в конечном счете, увеличивает устойчивость конвективного потока.

Большие по сравнению с баллистической длиной размеры полупроводниковой кольцевой ячейки приводят к многократному увеличению эффективной вязкости электронного газа из-за столкновений электронов с кристаллической решеткой. В результате в кольце возникает устойчивый в широком диапазоне рабочих парамет-

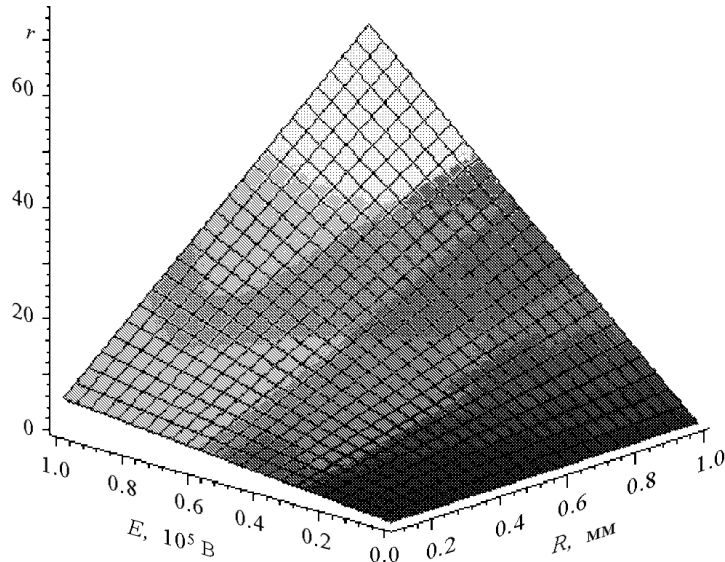


Рис. 3. Зависимость параметра  $r$  от напряженности приложенного электрического поля и радиуса полупроводникового кольца при фиксированной разности температур на электродах ( $\Delta T = 60$  К)

ров конвективный ток одного из двух возможных направлений. При выключении и повторном включении электрического поля направление тока может изменяться хаотически. Можно ожидать, что степень этой хаотичности будет зависеть от частоты переключений поля.

Съем информации о колебаниях тока в кольцевой полупроводниковой ячейке может быть осуществлен при помощи датчика магнитного поля. Практическая значимость данной работы, в случае экспериментального подтверждения модельных представлений, может быть связана с использованием таких колебаний в качестве несущего сигнала для передачи конфиденциальной информации в современных системах связи с использованием динамического хаоса [15–16].

*Работа поддержана ФЦП «Интеграция» (код проекта Б0107).*

### **Библиографический список**

1. Браже Р.А., Куделин О.Н. Условия наблюдения термоэлектродинамической конвекции в реальных полупроводниках // Электронная техника. Сб. науч. тр. Ульяновск, 2003. С. 3.
2. Браже Р.А., Куделин О.Н. Математическая модель термоэлектродинамической конвекции в полупроводниках с учетом столкновительных процессов // Мат. моделирование. 2005. Т. 17, № 2. С. 109.
3. Браже Р.А., Куделин О.Н. Аттрактор Лоренца в нелинейном режиме термоэлектродинамической конвекции в плоском слое полупроводника // Вестник УлГТУ. Сер. «Естественные науки». 2004. Вып. 2. С. 27.
4. Lorenz E.H. Deterministic nonperiodic flow // J. Atmos. Sci. 1963. Vol. 20, № 2. P. 130.
5. Welander P. On the oscillatory instability of a differentially heated fluid loop // J. Fluid Mech. 1967. Vol. 29. P. 17.
6. Моторова Э.А., Неймарк Ю.Н. Об устойчивости нелинейной распределенной модели естественной циркуляции // Автомеханика и телемеханика. 1974. № 3. С. 28.
7. Creveling H.F., De Paz J.F., Baladi J.Y., Schoenhals R.I. Stability characteristics of a single-phase free convective loop // J. Fluid Mech. 1975. Vol. 67. Part 1. P. 65.
8. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Теоретическая физика. Физическая кинетика. М.: Наука, 1972.
9. Anile A.M., Romano V., Russo G. External hydrodynamical model of carrier transport in semiconductor // SIAM J. of Appl. Math. 1997. April, 12.
10. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука. 1997. С. 417-418.
11. Хакен Г. Синергетика. М.: Мир. 1980.
12. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2001.
13. Емцев В.В. Примеси и точечные дефекты в полупроводниках. М.: Наука. 1986.
14. Кикоин И.К. Таблицы физических величин. М.: Наука. 1989.

15. *Дмитриев А.С., Панас А.И., Старков С.О.* Динамический хаос как парадигма современных систем связи // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1997. № 10. С. 4.
16. *Дмитриев А.С., Старков С.О.* Передача сообщений с использованием хаоса и классическая теория информации // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1998. № 11. С. 4.

*Ульяновский государственный  
технический университет*

*Поступила в редакцию 24.12.2004  
После доработки 22.03.2005*

## SEMICONDUCTOR ANALOGUE OF LORENZ TURBULENCE MODEL IN THE CIRCULAR THERMOCONVECTIVE CELL

*R.A. Brazhe, O.N. Kudelin*

A set of the nonlinear equations, approximately describing thermoelectrohydrodynamical convection in circular semiconductor cell, which comes to Lorenz model, is obtained. The dependences of the model parameters of materials and ring size, of affixed electric field and of temperature gradient are investigated.



*Бразже Рудольф Александрович* – родился в 1948 году в селе Ковалево Омской области, окончил Саратовский государственный университет в 1971 году и там же аспирантуру по специальности «Радиофизика» в 1974 году. С 1974 работает в Ульяновском государственном техническом университете (с 1993 года – заведующий кафедрой физики). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1975) и доктора физико-математических наук в УлГТУ (2002) в области радиофизики и математического моделирования нелинейных волновых процессов. Автор более 200 научных трудов, в том числе 1 монографии и нескольких учебных пособий. Член корреспондент РАЕН.



*Куделин Олег Николаевич* – родился в 1979 году в городе Ульяновске, в 2001 году окончил Ульяновский государственный университет по специальности «Физика твердого тела». Работает на ФГУП НПО «Марс» инженером-программистом, аспирант кафедры физики УлГТУ, автор 12 научных работ.



## ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС: МОДЕЛЬ И ДЕМОНСТРАЦИЯ ЯВЛЕНИЯ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ

*И.В. Измайлов, А.В. Лячин, Б.Н. Пойзнер, Д.А. Шергин*

Обосновано понятие пространственного детерминированного хаоса, предпринята попытка дать ему теоретико-множественное определение. Для математического описания осуществлен переход от обыкновенных дифференциальных уравнений к дискретным отображениям без использования приближения мгновенного отклика. Развитые теоретические положения применены для получения модели динамики нелинейного фазового набега в нелинейном кольцевом интерферометре на языке дискретных отображений. На примере модели построены дискретные пространственные реализации, фазовые портреты, спектры Фурье, иллюстрирующие особенности пространственного детерминированного хаоса в нелинейном кольцевом интерферометре. Введено понятие эволюционирующих дискретных отображений.

### Введение

В рамках изучения явлений нелинейной динамики можно выделить три ветви исследований: временных процессов, в том числе динамического хаоса (если говорить о кольцевых оптических системах, то это, например, [1-6]), пространственно-временных процессов (например, [1, 3, 7-11]) и чисто пространственных (то есть статичных) распределений динамических переменных системы [10], в том числе «пространственного» хаоса. Как известно, задачами, связанными с явлением динамического (временного) хаоса, традиционно занимается радиоэлектроника. Пространственно-временной хаос (турбулентность) проявляется в системах различной природы и рассматривается в рамках соответствующих специализированных отраслей науки.

Явление «пространственного» хаоса характерно для оптических, радиофизических (и, видимо, геофизических [12]) систем. Именно здесь типичными являются случаи, когда поперечный размер нелинейной среды больше длины волны или соизмерим с ней. Тогда аналогами всевозможных процессов, протекающих во времени

в колебательных системах (например, устройствах радиодиапазона), являются пространственные распределения величин каких-то значимых характеристик, скажем, показателя преломления среды, амплитуды, фазы волны. Предложенная аналогия становится более явной, если ввести понятие наблюдателя, который регистрирует эти величины в точках пространства, последовательно перебирая точки по некоторому алгоритму. Системы, в которых возможен пространственный детерминированный хаос (ПДХ), до сих пор мало изучены.

Цель данной работы: 1) показать, что моделью ПДХ может служить дискретное отображение (ДО), получаемое из обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) в статическом режиме; 2) в качестве примера получить описание нелинейного кольцевого интерферометра (НКИ) на языке ДО (для случаев двухчастотного оптического поля в приближении больших его потерь и отсутствия дифракции) и продемонстрировать явление пространственного детерминированного хаоса в нелинейном кольцевом интерферометре.

## 1. Переход от обыкновенных дифференциальных уравнений к дискретным отображениям

Временные процессы в  $m$ -мерной динамической системе описывают с помощью системы  $m$  эволюционных уравнений

$$\tau_n \frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} = \mathbf{N}(\mathbf{q}(t)), \quad (1)$$

где  $\tau_n$  – время релаксации,  $\mathbf{q}(t) \equiv \{q_1(t), q_2(t), \dots, q_m(t)\}$  – вектор динамических переменных. Будем описывать процессы в динамической системе с запаздыванием в многоконтурной обратной связи системой  $m$  эволюционных уравнений

$$\vec{\tau}_n \frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} = \mathbf{N}(\mathbf{q}(t), Q(t, \vec{\tau})), \quad (2)$$

где  $\vec{\tau}_n$  – диагональная  $(m \times m)$ -матрица характерных времен релаксации;  $\vec{\tau}$  – вектор длины  $s$  либо матрица размера  $m \times s$  времен запаздывания. Тогда  $Q(t, \vec{\tau}) \equiv \{q_i(t - \tau_j)\}$  либо  $Q(t, \vec{\tau}) \equiv \{q_i(t - \tau_{ij})\}$  – упорядоченное множество из запаздывающих аргументов системы уравнений (2), которое удобно записывать в виде матрицы размера  $m \times s$ ,  $i \in [1; m]$ ,  $j \in [1; s]$ . Очевидно, что можно принять  $Q(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{q}(t)$ .

В статическом режиме и при разрешимости уравнения  $\mathbf{N}(\mathbf{q}(t), Q(t, \vec{\tau})) = 0$  относительно  $\mathbf{q}(t)$  модель (2) сводится к рекуррентному соотношению, от которого в приближении  $\tau_i = \tau$ ,  $\forall i \in [1; s]$  можно перейти к модели, описывающей состояние системы в моменты времени  $t_n = t_0 + n\tau$ :

$$\mathbf{q}_n = \mathbf{F}(\mathbf{q}_{n-1}). \quad (3)$$

Выражение типа (3) является  $m$ -мерным ДО [5]. Но в силу статичности режима  $\mathbf{q}_n = \mathbf{q}_{n-1}$  и, следовательно,

$$\mathbf{q} = \mathbf{F}(\mathbf{q}). \quad (4)$$

Можно ли трактовать выражение типа (4) – с позиции упоминавшегося выше наблюдателя – как ДО? Можно, но как ДО с *пространственной* эволюционной переменной, у которого размерность  $j \leq m$ , причем количество итераций ограничено

и не превышает  $m - 1$ . А область допустимых значений начальных условий ДО удовлетворяет требованию совместности системы уравнений относительно проекций вектора  $q$ , в качестве которой интерпретируется (4).

Поясним это на примере. Пусть все  $F_i$  являются функциями скалярного аргумента и для  $\forall q$  и  $\forall i$  верно  $F_i(q) = F(q)$ , величина  $q_1$  явно зависит только от  $q_m$ , а  $q_i$  – от  $q_{i-1}$ ,  $i \neq 1$ . Тогда из (4) получим

$$q_i = F(q_{i-1}), \quad i \in [2; m], \quad q_1 = F(q_m). \quad (5)$$

Здесь предполагается, что  $q_1$  есть начальное состояние ДО (но не динамической системы (2)). Очевидно, если не вводить ограничения на число итераций, то всегда имеет место предельный цикл (так как  $q_1 = F(q_m)$ ).

При малых значениях  $m$  затруднительно квалифицировать (5) как ДО. Если же  $m$  достаточно велико, то из-за требования статичности режима динамической системы (2) на первый план выходит произвольность  $q_1$ . Однако в системах высокой размерности (большие  $m$ ) в ряде случаев область допустимых значений начальных условий ДО практически квазинепрерывна [13], и эта произвольность  $q_1$  несущественна. А если предположить незамкнутость системы уравнений (4), то ограничения на  $q_1$  нет вовсе. Заметим, что возможно  $m = \infty$ .

С позиции наблюдателя последовательность величин  $q_i$  описывает состояние значимых физических характеристик (например, показателя преломления среды, проводимости, модуля упругости, механического напряжения или деформации, плотности вещества) в некоторой последовательности точек пространства. Значит, ДО (4) – динамическая система с дискретной целочисленной пространственной координатой, играющей ту же роль, что и  $n$  в выражении (3). Это ДО задает упоминавшееся выше пространственное распределение динамических переменных системы (которые в статическом режиме неизменны во времени). Оно может быть как периодическим, так и нерегулярным. В последнем случае оно называется нами «пространственный» детерминированный хаос.

Попытаемся сформулировать определение последнего, но предварительно напомним, что, согласно [14], *динамический (детерминированный) хаос* – нерегулярное, аperiodическое изменение состояния (движение) динамической системы, обладающее основными свойствами случайного процесса.

Тогда можно предложить – в качестве рабочей – следующую дефиницию: *пространственный (статический) детерминированный хаос* – статическое состояние динамической системы, такое что последовательность подмножеств  $P_i$  множества динамических переменных  $P$ , выделяемая наблюдателем по некоторому алгоритму, является нерегулярной, аperiodической, обладающей основными свойствами случайного процесса. Причем подмножества  $P_i$  равномощны, не совпадают ( $P_i \neq P_j$  при  $i \neq j$ ), покрывают множество динамических переменных  $P$  ( $P = \cup_i P_i$ ), и пересечения  $P_i \cap P_{i+1}$  равномощны.

Эта последовательность может иметь конечную длину (конечная последовательность). Указанный алгоритм (обуславливающий вид, мощность и конкретное «наполнение» подмножеств, порядок их следования) эвристически обусловлен природой динамической системы и структурой взаимной зависимости значений динамических переменных (например, вида (5)). Если алгоритм выбрать затруднительно,

то в зависимости от мощности  $P$  можно предложить два варианта алгоритма «по умолчанию».

1) Если множество динамических переменных не имеет мощности континуума, то можно считать, что подмножества состоят из одного элемента, а порядок их следования задается любым регулярным алгоритмом перебора динамических переменных.

2) Если же множество динамических переменных имеет мощность континуума, то подмножества тоже имеют мощность континуума. Тогда можно считать, что они представляют собой достаточно маленькие односвязные области равного объема ( $n$ -мерного), а порядок их следования задается любым регулярным алгоритмом перебора. Здесь динамическая переменная (например, вида  $U(x, y)$ ) распределенной системы интерпретируется как множество динамических переменных мощности континуума.

Заметим, что переход от (2) к (3) возможен не только в случае статического режима динамической системы. Он осуществляется и в известном – благодаря работам К. Икеды – приближении мгновенного отклика нелинейной среды, справедливом при  $|\vec{\tau}_n| \ll |\vec{\tau}|$ . Но в отличие от случая статического режима перейти к выражению (4) нельзя.

Заметим также, что выражение (2) при больших  $m$  совмещает в себе свойства традиционных дифференциальных уравнений (с непрерывной эволюционной переменной) и ДО с дискретной пространственной координатой. Подобные математические конструкции правомерно называть *эволюционирующими дискретными отображениями* [10]. Выражение же (3) при больших (в пределе - бесконечных)  $m$  представляет собой гибрид традиционного ДО с дискретным временем и ДО с дискретной пространственной координатой, а количество эволюционных переменных в нем составляет 1 либо 2.

## 2. Модель динамики нелинейного фазового набег поля в кольцевом интерферометре

Развитые выше положения удобно иллюстрировать на примере НКИ, который исследовался теоретически и экспериментально в работах [1-3, 6, 15].

На рис. 1, а представлена схема кольцевого интерферометра, в котором находится тонкий слой нелинейной среды (НС), показатель преломления которой зависит от амплитуды воздействующего на него электрического поля света (например, имеет место эффект Керра).

Основным отличием рассматриваемого НКИ от модели К. Икеды [1] является то, что в цепь обратной связи интерферометра введен линейный элемент  $G$ , обеспечивающий поточечное преобразование поля (сдвиг, наклон, поворот, растяжение, сжатие). Таким образом, траектория луча, начинающаяся в точке с координатами  $(x', y')$  после обхода резонатора попадет в точку  $(x, y) = G(x', y')$ .

Пусть на вход НКИ поступает сумма двух квазимонохроматических полей с амплитудами  $a(\mathbf{r}, t)$ ,  $b(\mathbf{r}, t)$  и с частотами  $\omega \pm \Omega$ , круговой поляризации различных



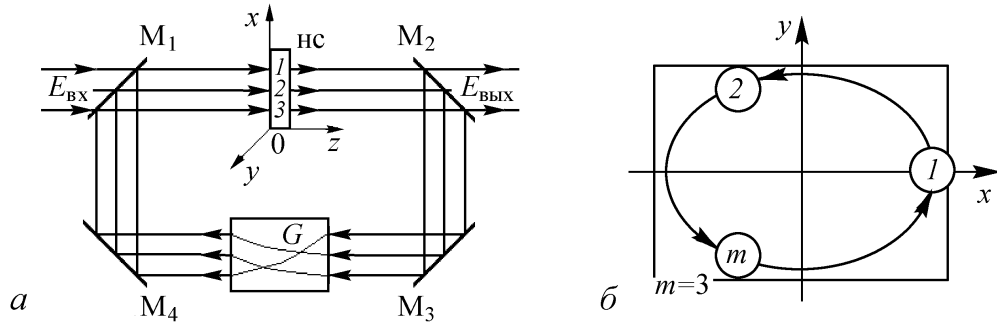


Рис. 1. Схема нелинейного кольцевого интерферометра и ход лучей в НКИ при повороте светового поля на  $\Delta = 120^\circ$  в плоскости  $xOy$ : *a* – траектории лучей 1, 2, 3, замыкающиеся после трех обходов; *б* – проекция траекторий лучей 1, 2, 3 на плоскость  $xOy$

(при  $\omega > \Omega$ ) либо одинаковых (при  $\omega < \Omega$ ) направлений вращения (рис. 2):

$$E_x(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}, t) \cos[(\omega + \Omega)t + \phi(\mathbf{r}, t) + \psi(\mathbf{r}, t)] +$$

$$+ b(\mathbf{r}, t) \cos[(\omega - \Omega)t + \phi(\mathbf{r}, t) - \psi(\mathbf{r}, t)],$$

$$E_y(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}, t) \sin[(\omega + \Omega)t + \phi(\mathbf{r}, t) + \psi(\mathbf{r}, t)] -$$

$$- b(\mathbf{r}, t) \sin[(\omega - \Omega)t + \phi(\mathbf{r}, t) - \psi(\mathbf{r}, t)].$$

Здесь  $\omega$  (либо  $\Omega$  при  $\omega < \Omega$ ) имеет смысл средней частоты, а  $2\Omega$  ( $2\omega$  при  $\omega < \Omega$ ) – частотный интервал между составляющими поля. Чтобы отразить специфику спектра рассматриваемого оптического поля, мы оперируем параметром бихроматичности  $q \equiv \Omega/\omega$  [16].

Тогда в приближении медленно меняющихся амплитуд, фаз, модуляции положения плоскости поляризации, времени запаздывания  $t_e$  поля, медленной релаксации нелинейной части показателя преломления, а также в приближении больших потерь (либо в приближении одного прохода) и в пренебрежении дифракцией поля можно получить описание динамики нелинейного фазового набегу  $U$  в НСИ НКИ [16]:

$$\tau_n(\mathbf{r}) \frac{dU(\mathbf{r}, t)}{dt} = D_e(\mathbf{r}) \Delta U(\mathbf{r}, t) - U(\mathbf{r}, t) + f(\mathbf{r}, t),$$

$$f(\mathbf{r}, t) = Kab(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}_n) + pKab(\mathbf{r}', t - \tau, \mathbf{r}) + [\gamma(\mathbf{r}', t)/\sigma] \times$$

$$\times \{Ka(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t - \tau) \cos[(1 + q)\omega\tau + \phi(\mathbf{r}, t) - \phi(\mathbf{r}', t - \tau) + \psi(\mathbf{r}, t) - \psi(\mathbf{r}', t - \tau)] +$$

$$+ Kb(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t - \tau) \cos[(1 - q)\omega\tau + \phi(\mathbf{r}, t) - \phi(\mathbf{r}', t - \tau) - \psi(\mathbf{r}, t) + \psi(\mathbf{r}', t - \tau)]\}.$$

Здесь  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число;  $U(\mathbf{r}, t)$  – нелинейный фазовый набег в НСИ на частоте  $\omega$ ;  $\tau \equiv \tau(\mathbf{r}', t) = t_e(\mathbf{r}', t) + U(\mathbf{r}', t - t_e(\mathbf{r}', t))/\omega$ ;  $t_e(\mathbf{r}, t) \equiv n_0(\mathbf{r})l/c + t_0(\mathbf{r}, t) -$

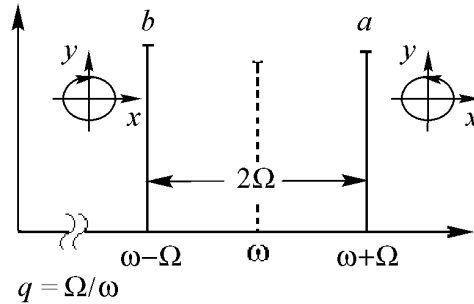


Рис. 2. Спектр бихроматического излучения

эквивалентное время запаздывания (величина времени распространения светового поля, обусловленного наличием линейной части  $n_0(\mathbf{r})$  показателя преломления НС и наличием времени запаздывания  $t_0(\mathbf{r}, t)$  в НКИ ( $l$  – длина НС,  $c$  – скорость света));  $\gamma(\mathbf{r}', t)$  – удвоенный амплитудный коэффициент потерь излучения за один проход через НКИ;  $\sigma$  – коэффициент растяжения пучка в элементе  $G$ ;  $D_e(\mathbf{r})$  – коэффициент диффузии молекул НС, нормированный на время релаксации  $\tau_n(\mathbf{r})$ ;  $p = 0$  для приближения больших потерь, но  $p = [\gamma(\mathbf{r}', t)/\sigma/2]^2$  для приближения одного прохода; «смешанный» ( $Kab$ ) и «парциальные» ( $Ka$ ,  $Kb$ ) параметры нелинейности

$$Kab(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}_n) \equiv (1 - R)n_2(\mathbf{r}_n)lk[a^2(\mathbf{r}, t) + b^2(\mathbf{r}, t)],$$

$$Ka(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t - \tau) \equiv (1 - R)n_2(\mathbf{r})lk a(\mathbf{r}, t)a(\mathbf{r}', t - \tau),$$

$$Kb(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t - \tau) \equiv (1 - R)n_2(\mathbf{r})lk b(\mathbf{r}, t)b(\mathbf{r}', t - \tau);$$

$n_2(\mathbf{r})$  – параметр нелинейной рефракции НС.

В пренебрежении диффузией молекул НС из этой модели можно получить описание динамики нелинейного фазового набега  $U$  в НС НКИ в «точечном приближении»

$$\begin{aligned} \tau_{ni} \frac{dU_i(t)}{dt} &= -U_i(t) + f_i, \\ f_i &\equiv f_i(t) = Kab_{i,i}(t) + pKab_{i-1,1}(t - \tau) + [\gamma_{i-1}(t)/\sigma] \times \\ &\times \{Ka_{i,i-1}(t, t - \tau) \cos[(1 + q)\omega\tau + \phi_i(t) - \phi_{i-1}(t - \tau) + \psi_i(t) - \psi_{i-1}(t - \tau)] + \\ &+ Kb_{i,i-1}(t, t - \tau) \cos[(1 - q)\omega\tau + \phi_i(t) - \phi_{i-1}(t - \tau) - \psi_i(t) + \psi_{i-1}(t - \tau)]\}. \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\tau \equiv \tau_{i-1}(t) = t_{e_{i-1}}(t) + U_{i-1}(t - t_{e_{i-1}}(t))/\omega$ ;  $p = 0$  в приближении больших потерь, но  $p = [\gamma_{i-1}(t)/\sigma/2]^2$  в приближении одного прохода;

$$Kab_{i,j}(t) \equiv (1 - R)n_{2j} lk [a_i^2(t) + b_i^2(t)],$$

$$Ka_{i,i-1}(t, t - \tau) \equiv (1 - R)n_{2i} lk a_i(t)a_{i-1}(t - \tau),$$

$$Kb_{i,i-1}(t, t - \tau) \equiv (1 - R)n_{2i} lk b_i(t)b_{i-1}(t - \tau).$$

Термин «точечное приближение» означает, что все множество точек поперечного сечения светового пучка в НКИ – в зависимости от вида крупномасштабного преобразования поля элементом  $G$  в контуре обратной связи – разбивается на бесконечное число независимых друг от друга подмножеств. Для случая поворота поля на  $120^\circ$  в поперечной плоскости пучка, изображенного на рис. 1, б, подмножества состоят из трех точек – вершин равностороннего треугольника. Независимость подмножеств понимается в том смысле, что процессы (нелинейные и интерференционные) в *различных* подмножествах протекают независимо. То есть между полем и участками нелинейной среды (а также между самими полями) физическое взаимодействие отсутствует, если они соответствуют *различным* подмножествам.

Напротив, такие взаимодействия существуют, если поля и участки среды соответствуют точкам *одного и того же* подмножества. Эти подмножества представляют

собой цепочки точек, «связываемые» последовательным смещением светового луча в поперечной плоскости пучка (благодаря действию элемента  $G$ ).

Иными словами, луч света, проходя через НС и контур обратной связи НКИ в точке  $i$  (например,  $i = 1, 2, 3$  на рис. 1, б), приобретает фазовый набег  $U_i$  и испытывает временную задержку  $t_{ei}$ . Из-за наличия элемента  $G$  луч попадает в точку  $i + 1$ . Здесь, «складываясь» с одним из входных лучей интерферометра, он воздействует на темп изменения величины нелинейного фазового набега  $U_{i+1}$ . Отметим, что в силу замыкания лучей на рис. 1 значение индекса  $i + 1 = 4$  следует положить равным  $i + 1 = 1$ . Именно так набег  $U_i$  в точке  $i$  влияет на набег  $U_{i+1}$  в точке  $i + 1$ . Данный тип точек, согласно терминологии [15], называют *транспозиционными* точками, а  $m$  – порядком транспозиции. Соответственно будем говорить о цепочках транспозиционных точек (ЦТТ). Иллюстрация к понятию ЦТТ дана на рис. 1, б. При такой организации обратной связи траектория луча замыкается после  $m$  обходов НКИ. Согласно принятому способу нумерации транспозиционных точек, в случае замкнутой ЦТТ под записью  $i + 1$  подразумевается операция  $(i \bmod m) + 1$ , где символ  $i \bmod m$  означает остаток от деления  $i$  на  $m$ . Физически это означает, что луч из  $m$ -й точки попадает в первую.

Понимаемое указанным образом точечное приближение позволяет из общих соотношений в [16] получить систему ОДУ (6), описывающую динамику нелинейного фазового набега для одной ЦТТ. Нетрудно заметить, что модель (6) является частным случаем (2).

Подобно выполненному переходу от (2) к (4) преобразуем модель (6) – в предположении, что  $dU/dt = 0$  (статический режим), а величины  $a_i, b_i, \Phi_i, \Psi_i, \gamma_i, t_{ei}$  постоянны во времени, – к виду

$$U_i = Kab_{i,j} + pKab_{i-1,i} + [\gamma_{i-1}/\sigma] \times \\ \times \{Ka_{i,i-1} \cdot \cos[(1+q)(\Phi_{i-1} + U_{i-1}) + \Phi_i - \Phi_{i-1} + \Psi_i - \Psi_{i-1}] + \\ + Kb_{i,i-1} \cdot \cos[(1-q)(\Phi_{i-1} + U_{i-1}) + \Phi_i - \Phi_{i-1} - \Psi_i + \Psi_{i-1}]\}, \quad (7)$$

где  $\Phi_i \equiv \omega t_{ei}$ ,  $Kab_{i,j} \equiv (1-R)n_{2j}lk[a_i^2 + b_i^2]$ ,  $Ka_{i,i-1} \equiv (1-R)n_{2i}lka_i a_{i-1}$ ,  $Kb_{i,i-1} \equiv (1-R)n_{2i}lkb_i b_{i-1}$ . По своей математической форме выражение (7), как известно [5], является одномерным ДО.

В случае однородности (в пределах одной ЦТТ) оптических свойств НС НКИ ( $n_2 = n_{2j}$ ) и амплитуд входного поля ( $a = a_i, b = b_i$ ) верно соотношение:  $Kab = Ka + Kb$ . Удобно ввести суммарный параметр нелинейности  $K$  и долю  $Q_a$  интенсивности компоненты с частотой  $(1+q)\omega$  по правилу  $K \equiv Kab = (Ka + Kb)$ ,  $Q_a \equiv Ka/K$ . Тогда  $Ka = K \cdot Q_a$ ,  $Kb = K(1 - Q_a)$ . В случае однородности остальных оптических свойств НКИ ( $\Phi = \Phi_i, \gamma = \gamma_i$ ) и входного поля ( $\Psi_i = 0, \Phi_i = 0$ ) нетрудно получить ДО

$$U_{i+1} = K\{1 + p + \gamma\{Q_a \cos[(1+q)(\Phi + U_i)] + \\ + (1 - Q_a) \cos[(1-q)(\Phi + U_i)]\}/\sigma\}. \quad (8)$$

Напомним, что в приближении больших потерь  $p = 0$ , в приближении одного прохода  $p = (\gamma/\sigma/2)^2$ ; в случае замкнутых ЦТТ  $i \in [1, m]$ , и запись  $i + 1$  обозначает операцию  $(i \bmod m) + 1$ , то есть  $U_1 \equiv U_{m+1}$ ; в случае незамкнутых ЦТТ  $U_1 = K$ , а

$i \in [1, +\infty)$ , если ЦТТ бесконечна. Очевидно, что ДО (8) является частным случаем ДО (5).

В случае монохроматического излучения на входе НКИ ( $q = 0$ ) и при  $p = 0$ ,  $\sigma = 1$  из (8) получим следующее ДО [17, 18]:

$$U_{i+1} = K[1 + \gamma \cos(U_i + \Phi)]. \quad (9)$$

### 3. Демонстрация явления пространственного детерминированного хаоса в нелинейном кольцевом интерферометре

Проиллюстрируем соображения, выдвинутые в разделе 1, на примере модели динамики нелинейного фазового набег в НКИ (8). Поскольку ДО (8) – частный случай ДО (5), то для него справедливы утверждения, сделанные для (5) при малом числе  $m$  динамических переменных системы (2); большом  $m$ ,  $m = \infty$ , (не)замкнутости системы (5), интерпретируемой как система уравнений.

Тип ЦТТ, зависящий от пространственного преобразования светового поля, осуществляемого линейным элементом  $G$  (см. рис. 1, а, рис. 3), задает структуру взаимной зависимости значений динамических переменных, упоминаемую в дефиниции ПДХ, и определяет, какой именно из перечисленных случаев реализуется. Для простейших преобразований поля в  $G$  подмножества  $P_i = \{U_i\}$ .

Пусть ЦТТ *незамкнута*. Тогда, согласно смыслу модели (6) на языке ОДУ, неизбежно имеет место установление (релаксационно-колебательное либо асимптотическое) статического режима, *устойчивого* во времени. А моделирование на языке

Простейшие типы преобразования пучка элементом $G$			
Поворот $\Delta = 2\pi M/m$	Сдвиг $\delta$	Сжатие $1/\sigma$	Растяжение $\sigma$
Тип цепочки транспозиционных точек (ЦТТ)			
Замкнутая конечная	Незамкнутая конечная	Незамкнутая бесконечная	
		$m = \infty$	$m = -\infty$
Формирующиеся идеализированные структуры			

Рис. 3. Связь между простейшими типами преобразования лазерного пучка в контуре обратной связи НКИ (задающим конфигурацию цепочки транспозиционных точек) и видом оптической структуры  $U(\mathbf{r}, t)$ , формирующейся в поперечном сечении пучка

ДО (8) того же самого физического процесса в НКИ с ростом дискретной эволюционной переменной позволяет ожидать появление *неустойчивого* (и потому хаотического) поведения, то есть ПДХ.

Действительно, соответствующая ДО (9) зависимость  $U_i$  от  $i$  при увеличении параметра нелинейности  $K$  в некоторых интервалах его значений демонстрирует весьма сложное поведение (рис. 4). При этом в поперечной плоскости лазерного пучка в НКИ формируется сложное распределение нелинейного фазового набега  $U(\mathbf{r})$  (см. рис. 3).

Нетрудно убедиться, что ПДХ имеет место, выполнив комплекс расчетов и построений: дискретного пространственного распределения (эквивалент временной реализации системы), фазового портрета, спектра Фурье, ляпуновских характеристических показателей (ЛХП), фрактальной размерности. Они приведены на рис. 5 для модели (8) в случае незамкнутой ЦТТ. Из рис. 5 очевидно, что аттракторы в ДО могут иметь положительные ЛХП ( $\Lambda = 0.34457$ ) и дробную фрактальную размерность ( $D_0 = 0.97994$ ), а также характерный для детерминированного хаоса фазовый портрет и спектр Фурье.

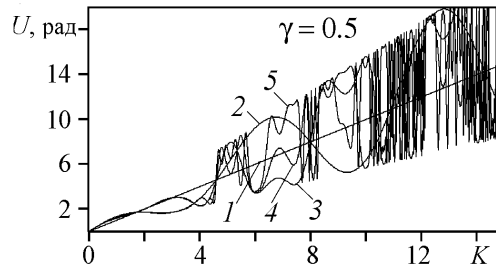


Рис. 4. Зависимость от параметра нелинейности  $K$  значений нелинейного фазового набега  $U$  в пяти первых точках незамкнутой ЦТТ для статического режима НКИ при сдвиге элементом  $G$  оптического поля (вдоль оси  $Ox$  в плоскости  $xOy$ ). Цифры обозначают номер точки в ЦТТ

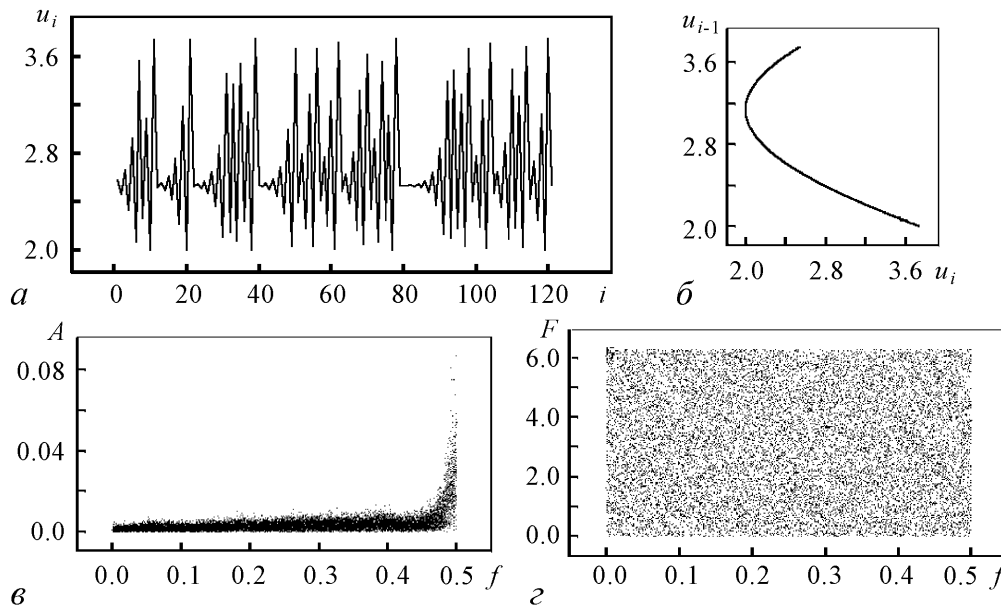


Рис. 5. Характеристики ПДХ, описываемого ДО (8) при незамкнутой ЦТТ: дискретная пространственная реализация (а), фазовый портрет (б), спектр Фурье для амплитуды (в) и фазы (г) для параметров модели:  $K = 5$ ,  $\gamma = 0.6$ ,  $\Phi = 0$ ,  $q = 0$ ,  $Q_a = 0$

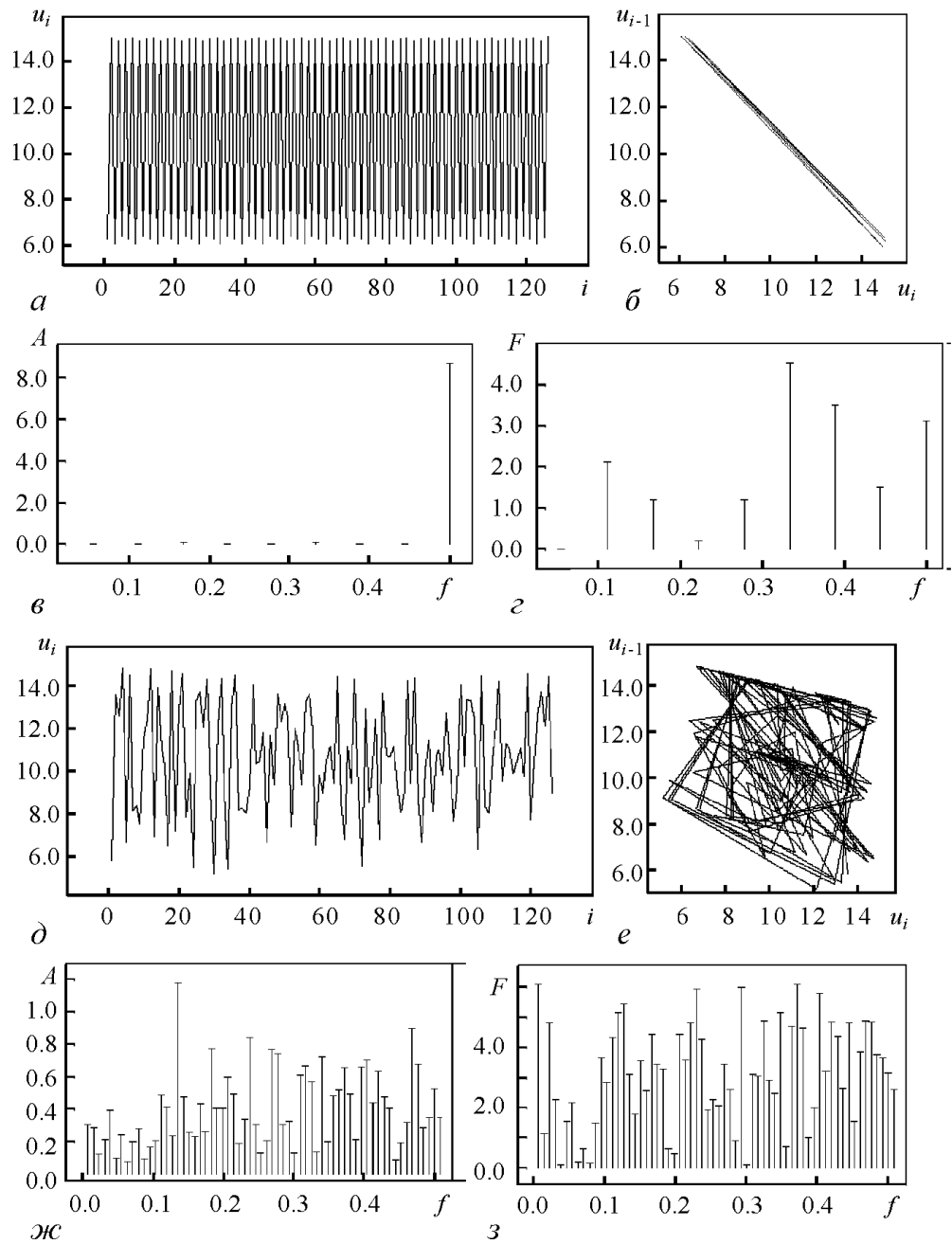


Рис. 6. Характеристики ПДХ, описываемого ДО (8) при замкнутой ЦТТ из 126 точек, для устойчивого состояния (а-г,  $K = 10.03193$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $\Phi = 0$ ,  $q = 0$ ,  $Q_a = 0$ ) и неустойчивого (д-з,  $K = 9.9$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $\Phi = 0$ ,  $q = 0$ ,  $Q_a = 0$ ): дискретные пространственные реализации (а, д), фазовые портреты (б, е), спектры Фурье для амплитуды (в, ж) и фазы (г, з)

В случае же *замкнутой* ЦТТ оперирование моделью (6) на языке ОДУ позволяет выявить не только устойчивые, но и неустойчивые статические состояния, а также их бифуркации. При этом, одному и тому же набору параметров могут соответствовать несколько (не)устойчивых состояний. Очевидно, что если считать ЦТТ ДО бесконечной, то в математически идеальной ситуации при помещении начального условия ДО (8) на одну из ветвей бифуркационной диаграммы ДО даст периодическую последовательность значений  $U_i$  с периодом, не превышающим числа  $m$  точек в ЦТТ. Эта ситуация обсуждалась выше, когда затрагивался вопрос о малости величины  $m$ .

С физической точки зрения ясно, что структуры, соответствующие неустойчивым статическим состояниям, формироваться в НКИ не смогут – в отличие от устойчивых. Но переносится ли характеристика устойчивости статического состояния как целого (состояния системы (6)) на устойчивость соответствующего режима в отображении (8)? И обладает ли режим в отображении сложностью (оцениваемой хотя бы на уровне визуального восприятия)? С целью выяснения был предпринят расчет для замкнутой ЦТТ, состоящей из  $m = 126$  точек. На рис. 6 – для устойчивого ( $\Lambda = -0.00807$ ,  $D_0 = 0.17549$ ) и неустойчивого ( $\Lambda = 0.89427$ ,  $D_0 = 0.96147$ ) состояний – представлены: дискретные пространственные реализации, фазовые портреты, спектры Фурье для амплитуды и фазы. Результаты расчета позволяют ответить утвердительно на заданные вопросы.

### Заключение

В работе обосновано понятие пространственного детерминированного хаоса. Для этого введено понятие наблюдателя, который воспринимает статическое состояние динамической системы, последовательно перебирая взглядом точки пространства по некоторому алгоритму. Предложено теоретико-множественное определение пространственного детерминированного хаоса. Затронута проблема континуальности множества динамических переменных, которая имеет место, например в распределенных системах. Понятие «пространственный» интерпретировано как синоним термина «статический».

Для математического описания пространственного детерминированного хаоса осуществлен переход от системы  $m$  обыкновенных дифференциальных уравнений к дискретным отображениям без использования приближения мгновенного отклика, но в предположении о статическом режиме в системе. Таким способом получают дискретные отображения с пространственной эволюционной переменной, у которых количество итераций может быть ограничено числом  $m - 1$ . Дискутируются случаи малых, больших, бесконечных  $m$ , а также случаи (не)замкнутости системы алгебраических уравнений, задающей дискретные отображения. Показана возможность интерпретации систем обыкновенных дифференциальных уравнений как *эволюционирующих дискретных отображений*.

Получена модель динамики нелинейного фазового набег в нелинейном кольцевом интерферометре на языке дискретных отображений. На примере последнего иллюстрированы особенности ПДХ. Понятие цепочек транспозиционных точек раскрыто в двух аспектах: 1) зависимости структуры цепочки от пространственного преобразования светового поля, производимого элементом  $G$  в нелинейном кольце-

вом интерферометре; 2) влияния структуры цепочки на (не)замкнутость системы алгебраических уравнений, задающей ДО, и (бес)конечность их числа итераций  $m - 1$ , а также на вид оптической структуры  $U(r, t)$ , формирующейся в поперечном сечении пучка. Для случаев (не)замкнутых цепочек выполнено моделирование на языке дискретных отображений и построены: дискретные пространственные распределения, фазовые портреты, спектры Фурье, рассчитаны ляпуновские характеристические показатели, значения фрактальной размерности. Показано, что режим в отображении и для замкнутой цепочки транспозиционных точек обладает сложностью.

В качестве продолжения изложенного здесь исследования планируются расчет и построение карт ляпуновских характеристических показателей и фрактальной размерности.

Авторы признательны рецензенту за критику, стимулировавшую переоценку результатов, сокращение текста в раздела 1 и уточнение формулировок.

*Работа поддержана грантом Федерального Агентства по образованию Минобрнауки РФ (Программа 2005 г.: «Развитие научного потенциала высшей школы». Подпрограмма 3. Раздел 3.3), регистрационный № 60321.*

#### **Библиографический список**

1. Ikeda K. Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by ring cavity system // Opt. Comm. 1979. Vol. 30, № 2. P. 257-260.
2. Ахманов С.А., Воронцов М.А. Нестабильности и структуры в когерентных нелинейно-оптических системах, охваченных двумерной обратной связью // Нелинейные волны: динамика и эволюция: сб. ст. М.: Наука, 1989. С. 228-237.
3. Розанов Н.Н. Оптическая бистабильность и гистерезис в распределенных нелинейных системах. М.: Наука, 1997. 336 с.
4. Измайлов И.В., Калайда В.Т., Магазинников А.Л., Пойзнер Б.Н. Бифуркации в точечной модели кольцевого интерферометра с запаздыванием и поворотом поля // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7, № 5. С. 47-59.
5. Кузнецов С.П. Динамический хаос. Курс лекций. Учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по физическим специальностям. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
6. Балякин А.А. Исследование хаотической динамики кольцевого нелинейного резонатора при двухчастотном внешнем воздействии // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т. 11, № 4-5. С. 3-15.
7. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991. 368 с.
8. Мельников Л.А., Конюхов А.И., Рябинина М.В. Динамика поперечной поляризованной структуры поля в лазерах // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т. 4, № 6. С. 33-53.
9. Weiss C.O. et al. Generation of optical vortices in laser field // Appl. Phys. B 1999. Vol. 68. P. 151-168.
10. Измайлов И.В., Пойзнер Б.Н. Варианты реализации нелинейно-оптического устройства скрытой передачи информации // Оптика атмосферы и океана. 2001. Т. 14, № 11. С. 1074-1086.



11. *Melnikov L.A., Konukhov A.I., Veshneva I.V. et al.* Nonlinear dynamics of spatial and temporal patterns in lasers and atom optics: Kerr-lens mode-locked laser, Zeeman laser and Bose-Einstein atomic condensate // *Izv. VUZ. Applied nonlinear Dynamics*. 2002. Vol. 10, № 3. P. 40-62.
12. *Рыскин М.И., Иванов А.В.* Нелинейная динамика в науках о Земле // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2003. Т. 11, № 6. С. 138-148.
13. *Измайлов И.В., Поизнер Б.Н., Денисов П.Е.* Равносильность: от обоснования понятия до анализа бифуркационного поведения. Томск: ТГУ, 2003. 46 с. Вестник Том. гос. ун-та. Бюллетень оперативной научной информации. 2003. № 15. Октябрь 2003.
14. *Заславский Г.М., Кириченко Н.А.* Хаос динамический // *Физическая энциклопедия* / Гл. ред. А.М. Прохоров. М.: Сов. энциклопедия. Т. 5, 1998. С. 397-402.
15. *Аршинов А.И., Мударисов Р.Р., Поизнер Б.Н.* Механизмы формирования простейших оптических структур в нелинейном интерферометре Физо // *Изв. вузов. Физика*. 1995. № 6. С. 77-81.
16. *Измайлов И.В., Магазинников А.Л., Поизнер Б.Н.* Моделирование процессов в кольцевом интерферометре с нелинейностью, запаздыванием и диффузией при некогерентном излучении // *Изв. вузов. Физика*. 2000. № 2. С. 29-35.
17. *Шергин Д.А., Измайлов И.В.* Дискретные отображения как средство описания детерминированного пространственного хаоса // *Сб. тез. 9-й Всерос. науч. конф. студентов-физиков и молодых ученых: В 2-х т.* 2003. Екатеринбург-Красноярск: АСФ России, 2003. Т. 2. С. 90-93.
18. *Шергин Д.А., Измайлов И.В., Поизнер Б.Н.* Дискретные отображения как язык описания пространственного детерминированного хаоса // *Современные проблемы физики и высокие технологии: Матер. Междунар. конф. (29 сентября - 4 октября 2003 г., г. Томск)*. Томск: Изд-во НТЛ, 2003. С. 186-189.

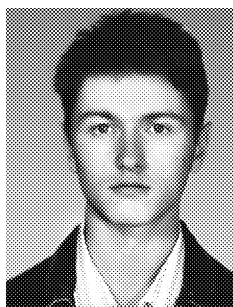
*Томский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 30.08.2004  
После доработки 29.03.2005*

## **SPATIAL DETERMINISTIC CHAOS: THE MODEL AND DEMONSTRATION OF PHENOMENON IN COMPUTING EXPERIMENT**

*I.V. Izmailov, A.V. Lyachin, B.N. Poizner, D.A. Shergin*

The concept of spatial deterministic chaos is justified. An attempt to give its set-theoretic definition is undertaken. Transition from the ordinary differential equations to discrete maps without use of an approximation of the instantaneous response is realized for mathematical description of spatial deterministic chaos. The developed theoretical theses are applied for deriving a dynamics model in terms of discrete maps of nonlinear phase shift in a ring interferometer. In case of the model discrete realizations, phase portraits Fourier's spectrums illustrating peculiarities of spatial deterministic chaos in the ring interferometer are constructed. A concept of discrete maps undergoing an evolution is introduced.



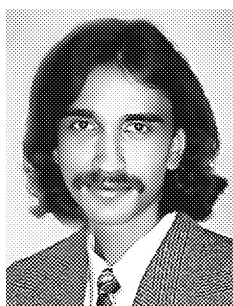
*Измайлов Игорь Валерьевич* – родился в 1976 году в Алма-Ате. Поступил на радиофизический факультет Томского государственного университета (1993). Аспирант кафедры квантовой электроники и фотоники (1999). Область научных интересов: моделирование процессов в нелинейных системах различной природы, применение нелинейной динамики для обработки и скрытой передачи информации.



*Лячин Александр Владимирович* – родился в Томске (1979). Окончил с отличием радиофизический факультет Томского госуниверситета (2002). Аспирант кафедры квантовой электроники и фотоники радиофизического факультета. Область научных интересов - моделирование и изучение процессов в нелинейных динамических системах, динамический хаос и его приложение в системах обработки и передачи информации. Автор более 40 публикаций. E-mail: 765-alex.rff@elefot.tsu.ru



*Пойзнер Борис Николаевич* – родился в Томске (1941), окончил радиофизический факультет Томского государственного университета. Защитил кандидатскую диссертацию по теории колебаний и волн (1970), доцент кафедры квантовой электроники и фотоники ТГУ. Читает лекции по нелинейной оптике, физике, физике лазеров, принципам управления лазерным излучением, основам синергетики. Область научных интересов: квантовая электроника, применение нелинейной динамики в оптике и материаловедении, прикладная наукометрия, культурологическая теория образования. Имеет много статей по указанной тематике. Инициатор подготовки и редактор семи библиографических указателей (в том числе «Синергетика и сопредельные науки», «Университетское образование и его социальная роль», «Интеллигенция в российском обществе и университете», «Психика и интеллект обучаемого»). Действительный член Всероссийского общества библиофилов. E-mail: Pznr@elefot.tsu.ru



*Шергин Денис Александрович* – родился в 1982 году, в настоящее время заканчивает обучение в магистратуре радиофизического факультета Томского государственного университета. Область научных интересов - применение методов нелинейной динамики в оптике и криптографии; современные телекоммуникационные системы. Имеет 5 публикаций.



## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ФАЗОВОГО НАБЕГА ПОЛЯ В КОЛЬЦЕВОМ ИНТЕРФЕРОМЕТРЕ: СЛУЧАЙ ДВУХЧАСТОТНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

*И.В. Измайлов, А.В. Лячин, Б.Н. Пойзнер, Д.А. Шергин*

Построены семейства инициально-финальных отображений, линий бифуркаций, карт ляпуновских характеристических показателей и фрактальной размерности  $D_0$  для модели динамики нелинейного фазового набег одно- и двухчастотного поля в нелинейном кольцевом интерферометре. Выяснено влияние структуры спектра двухчастотного излучения на строение указанных карт. Предложены и осуществлены приемы количественного анализа карт. Сопоставлены два способа описания динамики нелинейного фазового набег в нелинейном кольцевом интерферометре: с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений и дискретного отображения. Указано на особенность пространственного детерминированного хаоса как режима, устойчивого к изменению начальных условий, но не устойчивого к вариациям параметров модели.

### Введение

Исследования ряда авторов показали, что в поперечном сечении лазерного пучка в нелинейном кольцевом интерферометре (НКИ) возможны автоволны, генерация статических и движущихся структур, перемежаемость и хаос (например, [1 – 3]). Поэтому модель процессов в НКИ является одной из тех, что широко охватывают многообразные явления нелинейной динамики. В большинстве известных авторам работ такое моделирование проводится для частного случая одночастотного излучения. Чтобы приблизить модель к реальной ситуации, следует изучать случай, когда на входе НКИ присутствует двухчастотное (бихроматическое) излучение. Этот сюжет начинает исследоваться лишь в самое последнее время [4 – 6]. При подобной постановке задачи резонно ожидать появления новых особенностей сложной динамики в модели. В свою очередь, это расширит представление о закономерностях поведения нелинейных кольцевых систем оптического диапазона.

Судя по литературе, одним из направлений применения явления детерминированного хаоса является разработка систем конфиденциальной связи [7]. Так, применение пространственного детерминированного хаоса (ПДХ) перспективно в нелинейно-динамических системах защиты информации для передачи (в статическом режиме) и хранения данных. Статический режим предпочтительнее, если лимитирующим фактором является пропускная способность канала связи либо если стоит задача хранения информации в зашифрованном виде [8]. При этом степень скрытности передачи сообщения зависит от характеристик статического режима, в свою очередь, определяемого комбинацией параметров нелинейно-динамической системы.

Цель работы - для случаев одно- и двухчастотного оптического поля в приближении больших его потерь и отсутствия дифракции, исследовать влияние физических факторов на устойчивость режимов в соответствующих моделях НКИ и фрактальные свойства аттракторов. Как показано в [2, 4], при этих упрощениях моделями на языке обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) являются уравнения, описывающие динамику нелинейного фазового набега  $U$  оптического поля в нелинейной среде. Поэтому ниже под процессами в НКИ понимается динамика  $U$ .

Данная работа продолжает исследование, отраженное в статье [9]. В ней обсуждалось понятие ПДХ, и для его описания - в предположении статического режима - был осуществлен переход от обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) к дискретным отображениям (ДО). Благодаря использованному предположению этот переход не требует традиционного приближения мгновенного отклика. Поэтому моделью пространственно-распределенной системы может служить ДО с пространственной эволюционной переменной. Исходя из этого в [9] построена модель динамики нелинейного фазового набега в НКИ.

### 1. Кольцевой интерферометр с керровской средой и модель динамики нелинейного фазового набега двухчастотного оптического поля

На рис. 1, *a* представлена схема кольцевого интерферометра, в котором находится тонкий слой нелинейной среды (НС), показатель преломления которой зависит от амплитуды воздействующего на него электрического поля света (например, имеет место эффект Керра). В цепь обратной связи НКИ введен линейный элемент  $G$ , обеспечивающий преобразование поля (сдвиг, наклон, поворот, растяжение, сжатие). Поэтому траектория луча, начинающаяся в точке с координатами  $(x', y')$ , после обхода НКИ попадет в точку  $(x, y) = G(x', y')$ .

Пусть на вход НКИ поступает сумма двух квазимонохроматических полей с амплитудами  $a(\mathbf{r}, t)$ ,  $b(\mathbf{r}, t)$  и с частотами  $\omega \pm \Omega$  круговой поляризации:

$$\begin{aligned} E_x(\mathbf{r}, t) &= a(\mathbf{r}, t)\cos[(\omega + \Omega)t + \phi(\mathbf{r}, t) + \psi(\mathbf{r}, t)] + \\ &\quad + b(\mathbf{r}, t)\cos[(\omega - \Omega)t + \phi(\mathbf{r}, t) - \psi(\mathbf{r}, t)], \\ E_y(\mathbf{r}, t) &= a(\mathbf{r}, t)\sin[(\omega + \Omega)t + \phi(\mathbf{r}, t) + \psi(\mathbf{r}, t)] - \\ &\quad - b(\mathbf{r}, t)\sin[(\omega - \Omega)t + \phi(\mathbf{r}, t) - \psi(\mathbf{r}, t)]. \end{aligned}$$

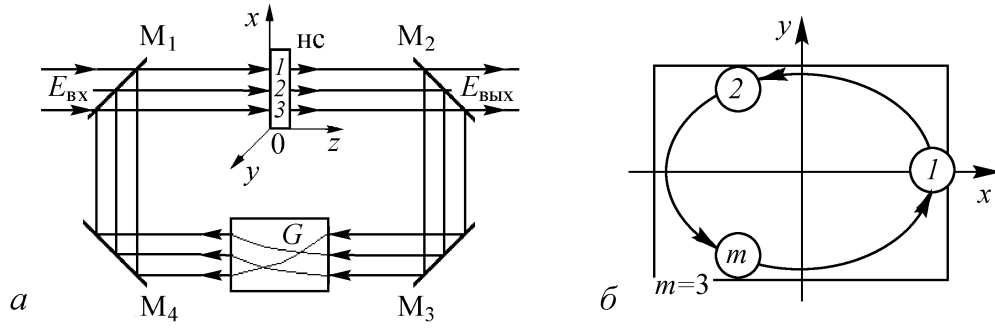


Рис. 1. Схема нелинейного кольцевого интерферометра и ход лучей в НКИ при повороте светового поля на  $\Delta = 120^\circ$  в плоскости  $xOy$ : *a* – траектории лучей 1, 2, 3, замыкающиеся после трех обходов; *б* – проекция траекторий лучей 1, 2, 3 на плоскость  $xOy$ , [9]

Здесь  $\omega$  (либо  $\Omega$  при  $\omega < \Omega$ ) имеет смысл средней частоты, а  $2\Omega$  ( $2\omega$  при  $\omega < \Omega$ ) – частотный интервал между составляющими поля. Чтобы отразить специфику спектра рассматриваемого оптического поля, мы оперируем параметром бихроматичности  $q \equiv \Omega/\omega$  [4].

Тогда в приближении медленно меняющихся амплитуд, фаз, модуляции положения плоскости поляризации, времени запаздывания  $t_e$  поля, медленной релаксации нелинейной части показателя преломления, а также в приближении больших потерь (либо в приближении одного прохода), в пренебрежении дифракцией поля и диффузией молекул НС можно описать динамику нелинейного фазового набегу  $U$  в НС НКИ [9]:

$$\begin{aligned} \tau_{ni} \frac{dU_i(t)}{dt} &= -U_i(t) + f_i, \\ f_i \equiv f_i(t) &= Kab_{i,i}(t) + pKab_{i-1,i}(t - \tau) + [\gamma_{i-1}(t)/\sigma] \times \\ &\times \{Ka_{i,i-1}(t, t - \tau) \cos[(1 + q)\omega\tau + \phi_i(t) - \phi_{i-1}(t - \tau) + \\ &+ \psi_i(t) - \psi_{i-1}(t - \tau)] + Kb_{i,i-1}(t, t - \tau) \cos[(1 - q)\omega\tau + \\ &+ \phi_i(t) - \phi_{i-1}(t - \tau) - \psi_i(t) + \psi_{i-1}(t - \tau)]\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $U_i(t)$  – нелинейный фазовый набег в НС на частоте  $\omega$ ;  $\tau \equiv \tau_{i-1}(t) = t_{e_{i-1}}(t) + U_{i-1}(t - t_{e_{i-1}}(t))/\omega$ ;  $\gamma_i(t)$  – удвоенный амплитудный коэффициент потерь излучения за один проход через НКИ;  $\tau_{ni}$  – время релаксации НС;  $p = 0$  в случае приближения больших потерь, но  $p = [\gamma_{i-1}(t)/\sigma/2]^2$ , в приближении одного прохода; «смешанный» ( $Kab$ ) и «парциальные» ( $Ka$ ,  $Kb$ ) параметры нелинейности:

$$\begin{aligned} Kab_{i,j}(t) &\equiv (1 - R)n_{2j}lk [a_i^2(t) + b_i^2(t)], \\ Ka_{i,i-1}(t, t - \tau) &\equiv (1 - R)n_{2i}lk a_i(t)a_{i-1}(t - \tau), \\ Kb_{i,i-1}(t, t - \tau) &\equiv (1 - R)n_{2i}lk b_i(t)b_{i-1}(t - \tau). \end{aligned}$$

$k = 2\pi/\lambda$  – волновое число;  $n_{2i}$  и  $l$  – параметр нелинейной рефракции и длина НС.

Модель описывает поведение  $U$  в «точечном приближении». Это означает, что зависимость  $U$  от координат точки в поперечном сечении пучка описывается индексом  $i$ . При этом оказывается существенной структура цепочек транспозиционных точек (ЦТТ) (рис. 1, б), обусловленная элементом  $G$  (см. рис. 1, а). В частности,

важно различать замкнутые и незамкнутые ЦТТ, а также ЦТТ с конечным и бесконечным числом точек  $m$  [9]: в случае замкнутых ЦТТ  $i \in [1, m]$ , и запись  $i + 1$  обозначает операцию  $(i \bmod m) + 1$ , то есть  $U_1 \equiv U_{m+1}$ ; в случае незамкнутых ЦТТ  $U_1 = Kab_{1,1}(t)$ , а  $i \in [1, +\infty)$ , если ЦТТ бесконечна.

Пусть  $dU/dt = 0$  (статический режим), величины  $a_i, b_i, \phi_i, \psi_i, \gamma_i, t_{ei}$  постоянны во времени, оптические свойства НС НКИ ( $n_2 = n_{2j}$ ) и амплитуды входного поля ( $a = a_i, b = b_i$ ) однородны (в пределах одной ЦТТ). Тогда верно соотношение  $Kab = Ka + Kb$ , и удобно ввести суммарный параметр нелинейности  $K$  и долю  $Q_a$  интенсивности компоненты с частотой  $(1 + q)\omega$  по правилу:  $K \equiv Kab = (Ka + Kb)$ ,  $Q_a \equiv Ka/K$ . Тогда  $Ka = KQ_a, Kb = K(1 - Q_a)$ . Если еще и остальные оптические свойства НКИ ( $\Phi = \Phi_i, \gamma = \gamma_i$ ) и входного поля ( $\psi_i = 0, \phi_i = 0$ ) однородны, то из (1) нетрудно получить ДО [9]:

$$U_{i+1} = K\{1 + p + \gamma\{Q_a \cos[(1 + q)(\Phi + U_i)] + (1 - Q_a) \cos[(1 - q)(\Phi + U_i)]\}/\sigma\}. \quad (2)$$

В случае монохроматического излучения на входе НКИ ( $q = 0$ ) и при  $p = 0, \sigma = 1$  из (2) получим ДО [10, 11]

$$U_{i+1} = K[1 + \gamma \cos(U_i + \Phi)]. \quad (3)$$

## 2. Бифуркационные диаграммы и линии бифуркаций для модели в виде обыкновенных дифференциальных уравнений

Статический режим отнюдь не исключает (из-за нелинейности системы) хаотизации пространственной структуры пространственных распределений амплитуды, фазы оптического поля и показателя преломления НС. Например, в случае *незамкнутой* ЦТТ в модели (1) на языке ОДУ всегда реализуется устойчивое (во времени) статическое состояние. Несмотря на это, «пространственный» режим в модели на языке ДО (2) может быть и неустойчивым, то есть демонстрировать ПДХ [9]. Для ПДХ характерна полная нечувствительность к изменению начальных условий, но сохранение высокой чувствительности к вариациям параметров системы.

В случае *замкнутой* ЦТТ в модели (1) на языке ОДУ возможны как устойчивые, так и неустойчивые статические состояния (во времени) и их бифуркации. Одному и тому же набору параметров могут соответствовать несколько (не)устойчивых состояний (рис. 2). Каждое из этих решений соответствует некоторому предельному циклу в модели на языке ДО с бесконечной ЦТТ, (не)устойчивость которого определяется (не)устойчивостью решений ОДУ. Период циклов не превышает числа  $m$  точек в ЦТТ [9].

Для описания бифуркационных диаграмм на рис. 2 введем следующие обозначения: 1 – разрывные бифуркации возникновения нового устойчивого решения (1), 2 – разрывные бифуркации исчезновения старого устойчивого решения (1), 3 – бифуркация обретения устойчивости, 4 – бифуркации потери устойчивости [12]. Существенно, что классификация одной и той же точки бифуркации зависит от направления движения в пространстве бифуркационных параметров через нее. В частности, существенно, движемся ли мы вдоль оси  $K, \gamma$  или  $\Phi$ . На рис. 2 цифровые обозначения типов бифуркаций соответствуют движению вдоль оси  $K$  либо  $\gamma$ .

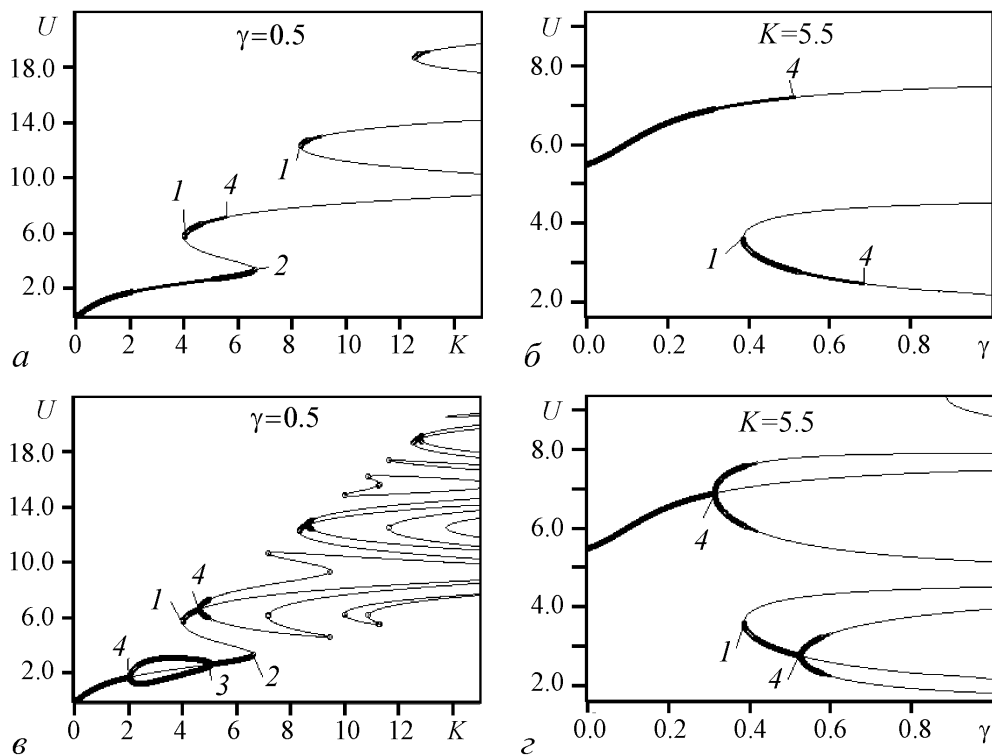


Рис. 2. Бифуркационные диаграммы статических состояний нелинейного фазового набега при  $t_e = \tau_n$  для замкнутых ЦТТ и  $m = 1$  (а), (б);  $m = 2$  (в), (з). Жирные линии отображают состояния, устойчивые при любых  $t_e$ , линии средней толщины - состояния, устойчивые при данном  $t_e$ , тонкие линии - неустойчивые состояния

Исследуя особенности бифуркационного поведения в моделях (1), целесообразно строить серии некоторых сечений пространства параметров плоскостями [13]. Пусть множество точек бифуркаций (определенного типа) в пространстве параметров модели образуют поверхности, соответствующие этим типам бифуркаций. Тогда пересечение указанных поверхностей с секущей плоскостью порождает линии, которые можно назвать *линиями бифуркаций* соответствующего типа. Отображая линии на этой плоскости, получим тем самым сечения, позволяющие судить о положении и типе бифуркаций. Примеры таких сечений плоскостями  $\gamma = 0.5$  (а) и  $K = 5.5$  (б) даны на рис. 3. Нумерация линий бифуркаций на нем отвечает принятым ранее обозначениям, но применительно к анализу статических состояний вида  $U_1 = U_2$ .

### 3. Особенности строения карт ляпуновских характеристических показателей и дробной размерности аттракторов дискретного отображения

Перейдем к рассмотрению свойств аттракторов ДО, соответствующих незамкнутым ЦТТ с бесконечным количеством точек  $m$ . Удобным способом исследования свойств динамической системы служит построение распределений некоторой характеристики ее поведения на секущей плоскости, то есть карт на плоскости параметров. Их построение способно, например, помочь решению задачи оптимиза-

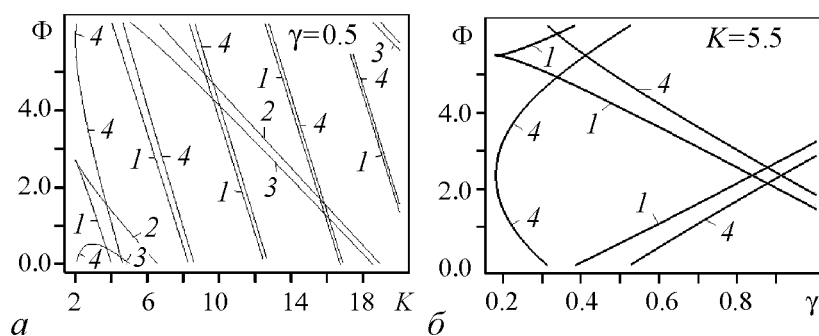


Рис. 3. Линии бифуркаций  $\Phi = \omega t_e$ , то есть бифуркационное значение  $\Phi$  как функция коэффициента нелинейности  $K$  (а), параметра потерь  $\gamma$  (б). Значение  $\Phi$  приведено в диапазон  $[0; 2\pi]$ ,  $m = 2$

ции параметров и/или режимов, обеспечивающих наибольшую степень «скрытности» передачи сообщения, замаскированного ПДХ. Показательными характеристиками режима работы динамических систем являются ляпуновские характеристические показатели (ЛХП)  $\Lambda$  и дробная размерность аттрактора, соответствующего динамике в модели. Предполагаемую связь между дробной размерностью аттрактора  $D$  (емкостью аттрактора как множества) и ЛХП выражает гипотеза Каплана – Йорке [14].

Известно, что строение карт ЛХП зависит от начальных условий. Поэтому целесообразно построить карты ЛХП для ДО в следующих координатах: параметр нелинейности  $K$  – начальное состояние  $U_1$ . Здесь мы считаем, что, несмотря на предположение об однородности характеристик НКИ и входного излучения, есть возможность управлять величиной  $U_1$ , например, варьированием входной интенсивности поля в первой точке ЦТТ ( $U_1 = K_1$ ). Подобное построение можно воспринимать как зависимость инициально-финального отображения (ИФО) [15] от параметра  $K$ . А чтобы иллюстрировать приведенное выше положение из [9] о взаимосвязи строения бифуркационной диаграммы (БД) статических состояний  $U$  для ОДУ и ИФО для ДО, следует совместить изображение БД с контрастной картой ( $\text{sgn } \Lambda$ ), построенной в тех же координатах (рис. 4).

Из этих построений видно, что если на БД присутствуют устойчивые состояния (толстые линии), то на карте ЛХП им соответствуют прилежащие к ним области начальных условий, влекущих регулярное поведение системы (светлые области на рис. 4). Причем для монохроматического случая зависимость  $\Lambda(U_1)$  имеет период  $2\pi$  (см. рис. 4, а, з). Корректность подхода, опирающегося на совместный анализ карты и БД, предполагает построение максимально возможного количества БД для различного числа ОДУ.

Таким образом, объединение карт ЛХП с БД может служить достаточно эффективным приемом, облегчающим морфологическую интерпретацию карт и позволяющим объяснять наличие регулярной либо хаотической (темные области на рис. 4) динамики в модели.

Появление второго компонента в спектре излучения играет существенную роль. Уже при доле  $Q_a$  амплитуды светового поля с высокой частотой, превышающей 0.1, и при относительно малом параметре бихроматичности  $q = 0.1$  в структуре карты заметны изменения. А при  $Q_a = 0.5$  и  $q = 0.5$  (когда частоты одинаковых по ампли-



туда компонентов отличаются втрое) происходит усложнение структуры карты через обогащение ее мелкими деталями и увеличение доли значений  $U_1$ , соответствующих хаотическим режимам [16].

Обратимся к независимым расчетам ЛХП и фрактальной размерности (емкости)  $D_0$ . Сравнение рис. 5, *a* и *б*, *г* и *д*, 6, *a* и *б*, *в* и *г*, *ж* и *з* показывает наличие структурных инвариантов в строении карт ЛХП и  $D_0$ . Исходя из предположения о справедливости гипотезы Каплана – Йорке указанное сходство карт (построенных с помощью двух различных программ) можно рассматривать как некий верификационный сюжет.

Обращает на себя внимание тот факт, что значения фрактальной размерности  $D_0$  лежат преимущественно вблизи целых: 0 и 1 (рис. 5, *в*, *е*, 6, *в*, *е*, *и*). То есть имеет место слабая «дробность»  $D_0$ . Более детальный расчет показывает, что 54.41% и 42.57% точек (от их общего числа на карте в координатах  $K - \gamma$  для одночастотного случая) соответствуют значения  $D_0$ , попадающие в узкие интервалы  $[0; 0.1]$  и  $[0.9; 1]$ . А оставшимся 3.02% точек соответствуют значения  $D_0$  из широкого интервала  $[0.1; 0.9]$ .

При расчете плотности вероятности  $\rho(D_0)$  вычислялось количество точек, в которых величина  $D_0$  принимает значения в некотором интервале, отнесенное к величине этого интервала и общему числу точек на карте.

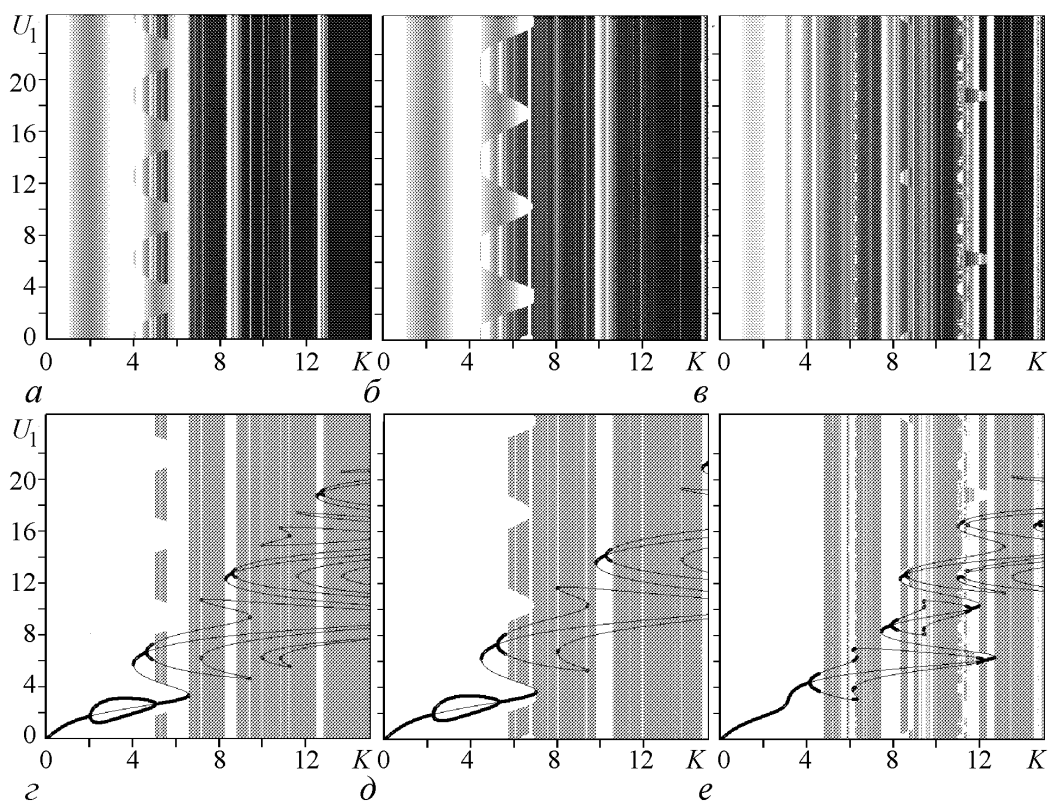


Рис. 4. Карты ЛХП в координатах  $K - U_1$  для:  $q = 0$ ;  $Q_a = 0$  (*a*),  $q = 0.1$ ;  $Q_a = 0.1$  (*б*),  $q = 0.5$ ;  $Q_a = 0.5$  (*в*). Совместное построение контрастных карт ( $\text{sgn } \Lambda$ ) и бифуркационных диаграмм в тех же координатах (*г*, *д*, *е*)

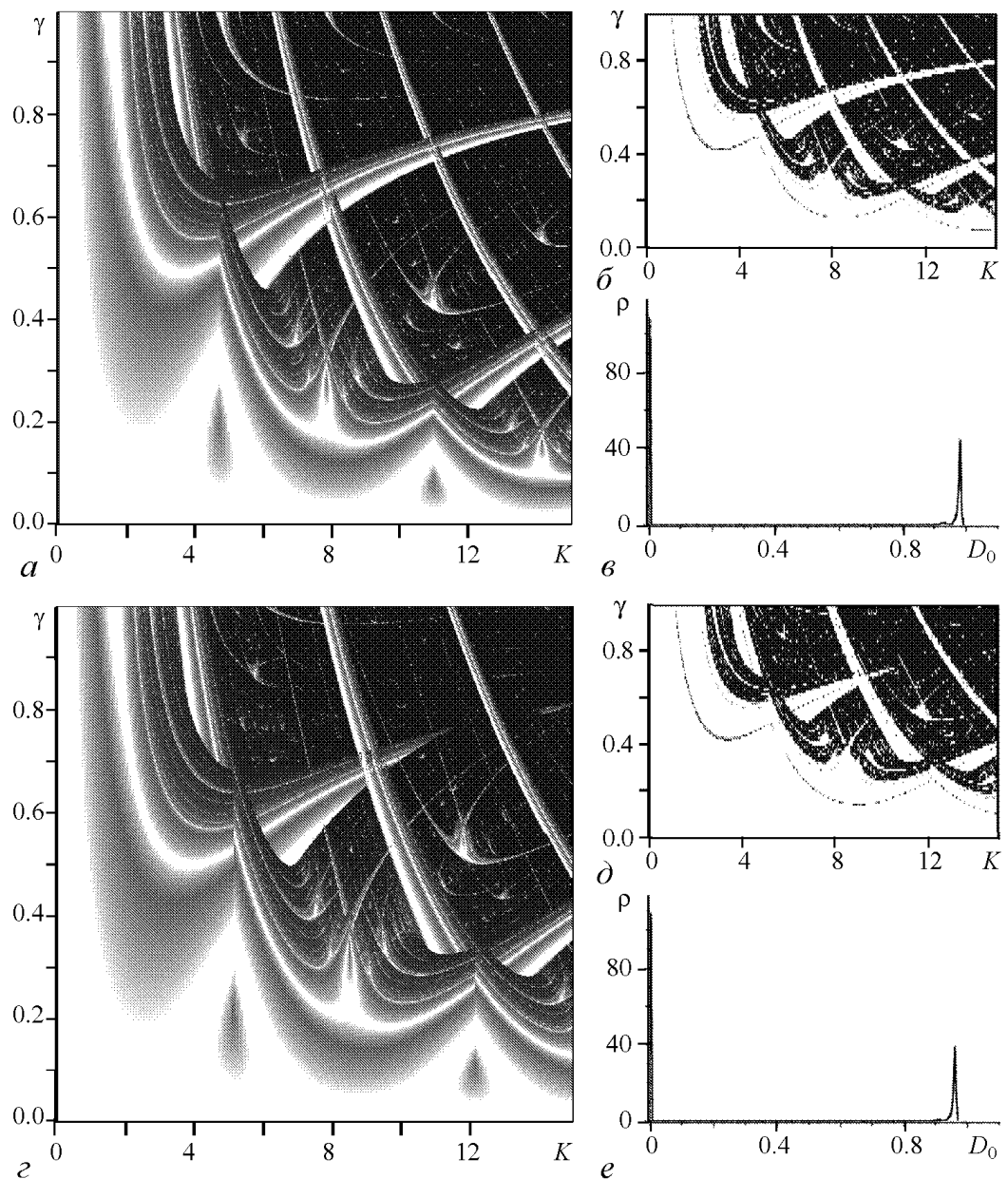


Рис. 5. Карты ЛХП  $\Lambda(K, \gamma)$ , фрактальной размерности  $D_0(K, \gamma)$  и плотность вероятности  $\rho(D_0)$  на карте  $D_0(K, \gamma)$  при  $\Phi = 0$  и следующих значениях параметров бихроматического излучения:  $q = 0$ ,  $Q_a = 0$  (*a*, *б*, *в*);  $q = 0.1$ ,  $Q_a = 0.1$  (*з*, *д*, *e*)

Дополнительно отметим явное сходство карт  $D_0(K, \gamma)$ ,  $\Lambda(K, \gamma)$  на рис. 5, *a*, *б* с картой динамических режимов на плоскости параметров двумерного ДО Икеды (рис. 3.6 в [14, с. 72]). Последнее сводится к ДО (3) в приближении больших потерь. Такое сходство может служить косвенным доказательством достоверности выполненных в работе расчетов. Кроме того, это сходство свидетельствует о наличии некоторых структурных инвариантов в строении карт размерности аттрактора в модели (3) и карты режимов в [14]. Изучение этого обстоятельства составляет предмет отдельного исследования, выходящего за рамки статьи.

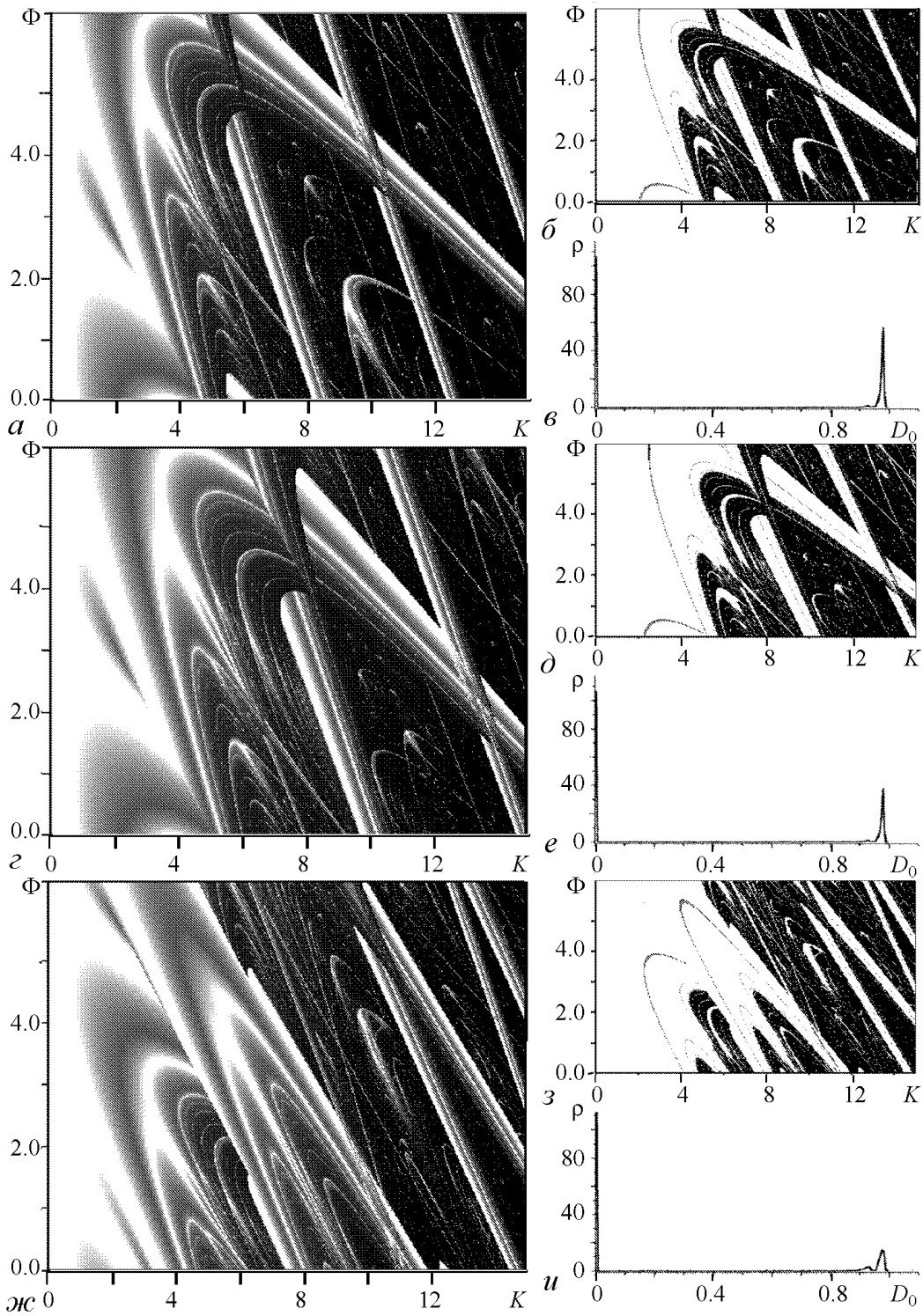


Рис. 6. Карты ЛХП  $\Lambda(K, \Phi)$ , фрактальной размерности  $D_0(K, \Phi)$  и плотность вероятности  $\rho(D_0)$  на карте  $D_0(K, \Phi)$  при  $\gamma = 0.5$  и следующих значениях параметров бихроматического излучения:  $q = 0$ ,  $Q_a = 0$  ( $a, б, в$ );  $q = 0.1$ ,  $Q_a = 0.1$  ( $з, д, е$ );  $q = 0.5$ ,  $Q_a = 0.5$  ( $ж, з, u$ )

Естественно, появление второго компонента в спектре ( $Q_a = 0.1, q = 0.1$ ), как и в случае построения ИФО (см. рис. 4), трансформирует структуру карт.

В связи со специфическими трудностями описания, сопоставления и анализа морфологии карт следует искать относительно объективные количественные характеристики карты как некой целостности. По мысли авторов, такой характеристикой может служить, например, доля  $P$  площади карты, соответствующей хаотическому режиму (вероятность наблюдать хаотический режим при случайном выборе координат точки на карте). Напомним, что хаотической динамике соответствуют темные области на «контрастных» картах. Предложенная характеристика может использоваться для сравнения карт ЛХП между собой. Рис. 7 иллюстрирует изменение доли точек плоскости  $(K, \gamma)$ , обеспечивающих хаотический режим, с ростом  $Q_a$  и  $q$ . Каждая из этих зависимостей немонотонна и содержит явно выраженный минимум в окрестности  $q = 0.16$  (рис. 7, а) и  $Q_a = 0.34$  (рис. 7, б).

С точки зрения применения НКИ как основы криптосистемы целесообразно выбирать в качестве ключей такую совокупность значений параметров системы, для которой величина  $P$  максимальна. Действительно, в окрестности этих значений параметров наиболее вероятен хаотический режим, необходимый для осуществления защиты информации. Например, на рис. 7, а представлен результат расчета  $P_{K\gamma}$  карты  $\Lambda(K, \gamma)$  в зависимости от  $q$  при фиксированных значениях  $\Phi, Q_a$ . Максимум  $P_{K\gamma}(q)$  в этом случае, очевидно, является условным экстремумом  $P_{K\gamma}(q, Q_a, \Phi)$ . С точки зрения наиболее вероятной реализации хаотического режима при случайном выборе значений  $K, \gamma$  этот экстремум задает условный оптимум значения  $q$ .

Возвращаясь к исследованию аналогии между описанием на языках ОДУ и ДО, укажем на обусловленность строения карты ЛХП для ДО (см. рис. 6, а) структурой семейств линий бифуркаций для ОДУ (см. рис. 3, а). А именно, на рис. 3, а между ближайшими парами линий 1 и 4, 2 и 3 расположены устойчивые участки ветвей (соответствующих состояниям  $U_1 = U_2$ ) бифуркационных диаграмм (см. рис. 2), не зависящие от числа уравнений. Нетрудно видеть, что структура карт повторяет конфигурацию участков между линиями бифуркаций.

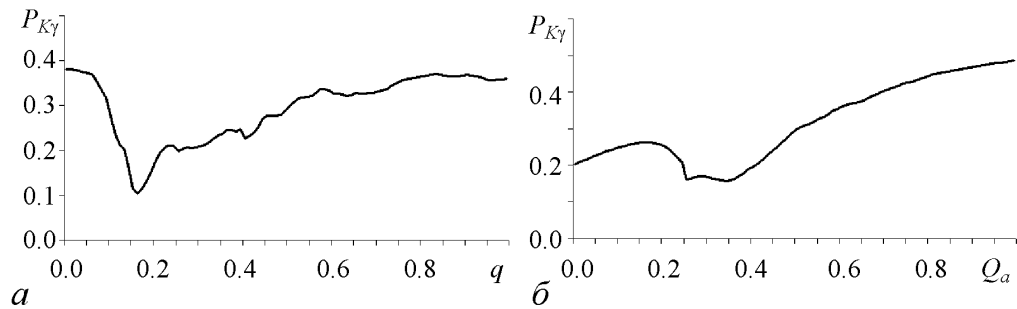


Рис. 7. Доля  $P_{K\gamma}$  площади карты  $\Lambda(K, \gamma)$ , соответствующей хаотическому режиму (вероятность наблюдать хаотический режим при случайном выборе  $K$  и  $\gamma$ ) при  $K \in [0; 20], \gamma \in [0; 1], \Phi = 0$  и следующих значениях параметров бихроматического излучения:  $Q_a = 0.5$  (а);  $q = 0.5$  (б)

Выявленные выше элементы сходства в строении карт ЛХП для различных ситуаций, а также сходство с результатами, полученными ранее для модели на базе ОДУ, свидетельствуют о правомерности описания динамики нелинейного фазового набег  $U$  в НКИ на языке ДО.

Чтобы проиллюстрировать эти высказывания, воспользуемся приемом совмещения семейства линий бифуркаций для модели на языке ОДУ с картой ЛХП для ДО в одних и тех же координатах по аналогии с аппликацией бифуркационных диаграмм на инициально-финальные отображения (рис. 8). На приведенных ниже рисунках, как и прежде, линии бифуркаций строятся для статических решений типа  $U_1 = U_2$  системы двух ОДУ. Но кроме того, на рисунках отображаются результаты прогноза типа режима, основанного на анализе взаимного расположения (на оси  $OU$ ) решений указанного типа и их устойчивости. Белые и черные области соответствуют регулярному и хаотическому режимам, серые области - обоим режимам, (какой именно из них реализуется, определяют начальные условия). Нетрудно видеть, что линии бифуркаций разграничивают указанные области.

Как следует из рассмотренных ранее сюжетов, переход к бихроматичности излучения влечет существенные изменения структуры карт, свидетельствующие об изменении типа динамики. Поэтому целесообразно акцентировать внимание на кар-

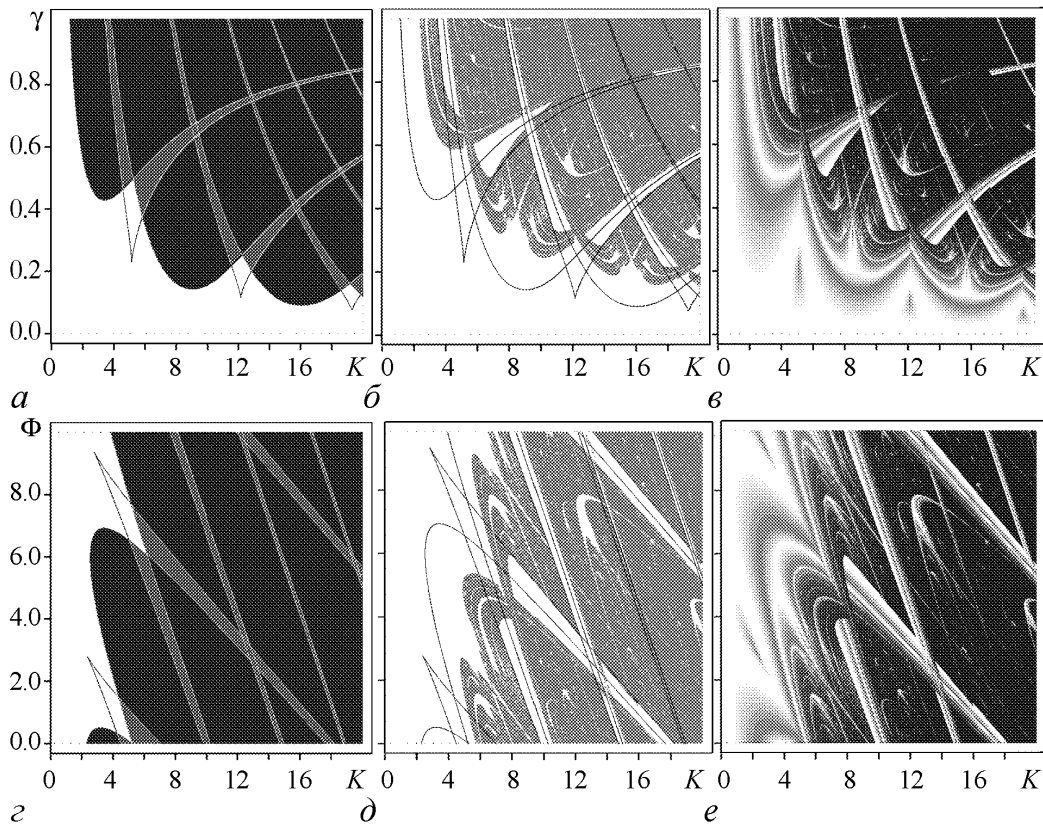


Рис. 8. Линии бифуркаций ( $a, г$ ), контрастные карты ЛХП ( $\text{sgn } \Lambda$ ) с аппликацией линий бифуркаций ( $б, д$ ), карты ЛХП ( $\Lambda$ ) ( $в, е$ ) на плоскостях  $KO\gamma, KO\Phi$  при  $q = 0.1, Q_a = 0.1$ :  $\Phi = 0$  ( $a, б, в$ );  $\gamma = 0.5$  ( $г, д, е$ )

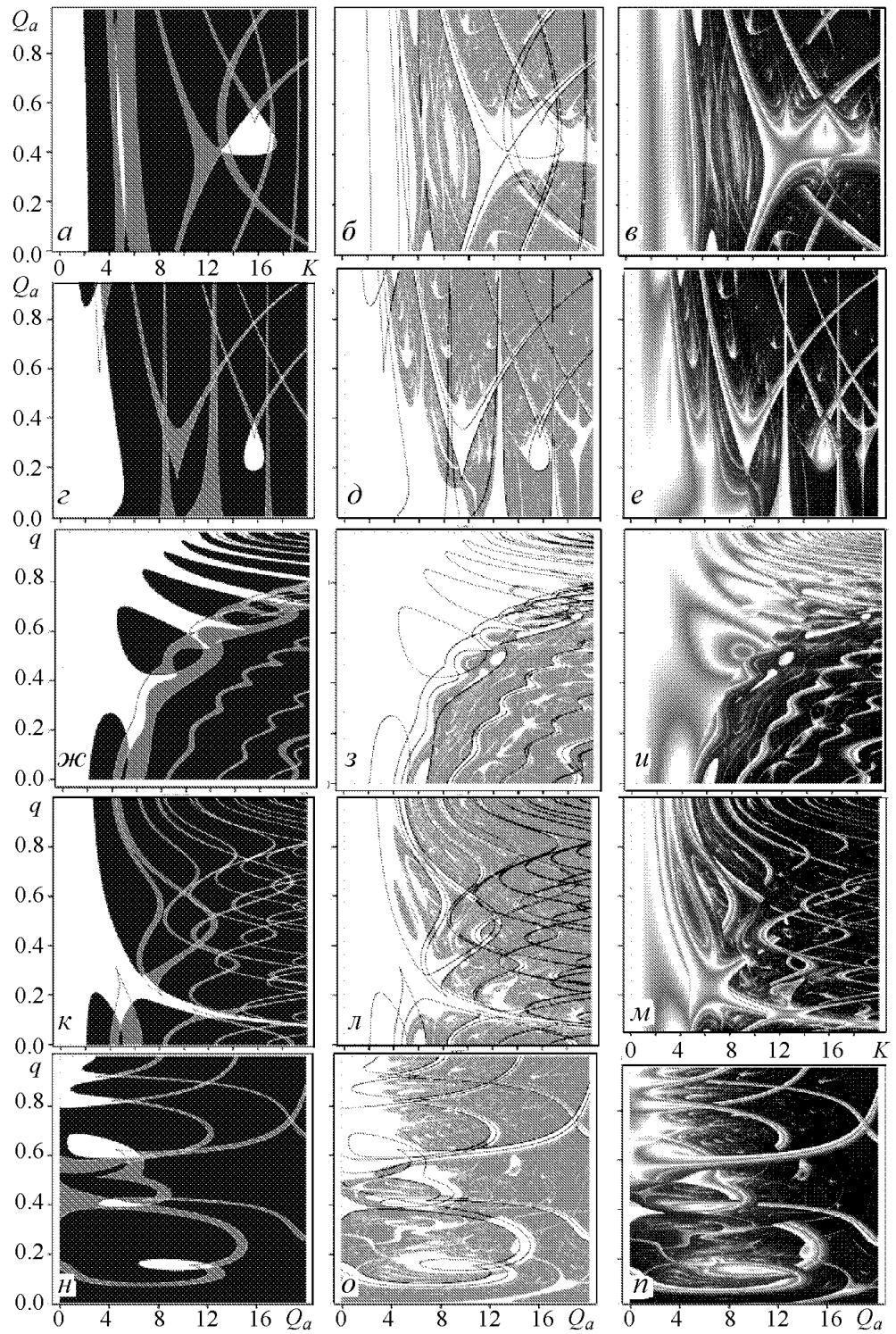


Рис. 9. Линии бифуркаций (*a*, *з*, *жс*, *к*, *н*), контрастные карты ЛХП ( $\text{sgn } \Lambda$ ) с аппликацией линий бифуркаций (*б*, *д*, *з*, *л*, *о*), карты ЛХП ( $\Lambda$ ) (*в*, *е*, *и*, *м*, *п*) на плоскостях  $KOQ_a$ ,  $KOq$ ,  $Q_aOq$  при  $\Phi = 0$ ,  $\gamma = 0.5$ . Значения параметров бихроматического излучения:  $q = 0.1$  (*a*, *б*, *в*);  $q = 0.5$  (*з*, *д*, *е*);  $Q_a = 0.1$  (*жс*, *з*, *и*);  $Q_a = 0.5$  (*к*, *л*, *м*);  $K = 10$  (*н*, *о*, *п*)

тах, где варьируется один или оба параметра  $Q_a$  и  $q$ , определяющих вид спектра. Их построение придает требуемую полноту представления морфологических закономерностей для всех комбинаций параметров ДО (рис. 9).

На графиках (см. рис. 9) мы по-прежнему наблюдаем сходство в морфологии карт и линий бифуркаций, однако есть и различия между ними. Из сказанного вытекает самостоятельная задача более строгого сравнения структуры карт размерности аттрактора и строения семейств линий бифуркаций, в том числе для состояний  $U_1 \neq U_2$  и для более, чем двух уравнений.

### Заключение

В статье систематизирован материал, полученный в итоге построения семейств инициально-финальных отображений, линий бифуркаций, карт ЛХП и фрактальной размерности  $D_0$  для модели динамики нелинейного фазового набег одно- и двухчастотного поля в НКИ. Выяснено влияние структуры спектра двухчастотного излучения на строение указанных карт. В доминирующих на картах областях, где размерность  $D_0$  близка к единице (а ЛХП, соответственно, принимает положительные значения), логично ожидать ярко выраженный пространственный детерминированный хаос. В этих областях параметров ДО и следует осуществлять скрытую передачу информации.

В статье уделено внимание нескольким методологическим вопросам. В частности, показана продуктивность сопоставления двух способов описания динамики нелинейного фазового набег в НКИ: (с помощью ОДУ и ДО) на базе построения линий бифуркаций, БД, карт ЛХП и фрактальной размерности. Кроме того, для количественного анализа карт предложено вычислять и строить:

- плотность вероятности значений фрактальной размерности, отображенных на карте;
- долю площади карты ЛХП, соответствующей хаотическому режиму (вероятность наблюдать хаотический режим при случайном выборе значений параметров карты).

Полученные данные подкрепляют вывод о принципиальной особенности ПДХ: для него свойственна полная нечувствительность к изменению начальных условий, но высокая чувствительность к вариациям параметров.

Авторы благодарны рецензенту за полезные замечания по структуре статьи.

*Работа поддержана грантом Федерального Агентства по образованию Минобрнауки РФ (Программа 2005 г.: «Развитие научного потенциала высшей школы». Подпрограмма 3. Раздел 3.3), регистрационный № 60321.*

### Библиографический список

1. Ikeda K. Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by ring cavity system // Opt. Comm. 1979. Vol. 30, № 2. P. 257-260.
2. Ахманов С.А., Воронцов М.А. Нестабильности и структуры в когерентных нелинейно-оптических системах, охваченных двумерной обратной связью // Нелинейные волны: динамика и эволюция: Сб. ст. М.: Наука, 1989. С. 228-237.

3. *Розанов Н.Н.* Оптическая бистабильность и гистерезис в распределенных нелинейных системах. М.: Наука, 1997. 336 с.
4. *Измайлов И.В., Магазинников А.Л., Пойзнер Б.Н.* Моделирование процессов в кольцевом интерферометре с нелинейностью, запаздыванием и диффузией при некогерентном излучении // Изв. вузов. Физика. 2000, № 2. С. 29-35.
5. *Балякин А.А., Рыскин Н.М.* Переход к хаосу в кольцевом нелинейном резонаторе при возбуждении внешним многочастотным сигналом // Изв. РАН. Сер физ. 2001. Т. 65, № 12. С. 1741-1744.
6. *Балякин А.А.* Исследование хаотической динамики кольцевого нелинейного резонатора при двухчастотном внешнем воздействии // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т. 11, № 4-5. С. 3-15.
7. *Дмитриев А.С.* Динамический хаос как носитель информации // Новое в синергетике: Взгляд в третье тысячелетие. М. Наука, 2002. С. 82-122.
8. *Измайлов И.В., Пойзнер Б.Н.* Варианты реализации нелинейно-оптического устройства скрытой передачи информации // Оптика атмосферы и океана. 2001. Т. 14, № 2. С. 1074-1086.
9. *Измайлов И.В., Лячин А.В., Пойзнер Б.Н., Шергин Д.А.* Пространственный детерминированный хаос и переход от обыкновенных дифференциальных уравнений к отображениям // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2004. Т. 13, № 1-2. С. 123.
10. *Шергин Д.А., Измайлов И.В.* Дискретные отображения как средство описания детерминированного пространственного хаоса // Сб. тез. 9-й Всерос. науч. конф. студентов-физиков и молодых ученых: В 2-х т. 2003. Екатеринбург – Красноярск: АСФ России, 2003. Т. 2. С. 90-93.
11. *Шергин Д.А., Измайлов И.В., Пойзнер Б.Н.* Дискретные отображения как язык описания пространственного детерминированного хаоса // Современные проблемы физики и высокие технологии: Матер. Междунар. конф. (29 сентября - 4 октября 2003 г., Томск). Томск: Изд-во НТЛ, 2003. С. 186-189.
12. *Измайлов И.В., Раводин В.О.* Влияние нелинейности и запаздывания в кольцевом интерферометре на бифуркации (расчет и моделирование) / Ред. журн. «Изв. вузов. Физика». Томск, 1998. 34 с. Деп. в ВИНТИ 30.09.98, № 2882-В98. (Аннотация опубликована в журнале Изв. вузов. Физика, 1999, № 1, с. 126).
13. *Шергин Д.А., Измайлов И.В.* Нелинейный кольцевой интерферометр через призму показателей Ляпунова для дискретного отображения // Оптика-2003. Труды третьей международной конференции молодых ученых и специалистов «Оптика-2003». Санкт-Петербург, 20-23 октября 2003 / Под ред. проф. С.А. Козлова. СПб: СПбГУ ИТМО, 2003. С. 104-105.
14. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Курс лекций. Учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по физическим специальностям. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
15. *Измайлов И.В., Пойзнер Б.Н., Раводин В.О.* Модель взаимодействия двух научных направлений, одно из которых или оба «затухающие», с учетом ограничения роста достижений и запаздывания // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2001. Т. 9, № 4-5. С. 119-139.



16. *Izmailov I.V., Poizner B.N., Shergin D.A.* Processes in ring interferometer: a problem of description by discrete maps // The 6th International Conference «Atomic and Molecular Pulsed Lasers» Conference Proceedings. Tomsk, Institute of Atmospheric Optics SB RAS, 2003. P. 98.

*Томский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 30.08.2004  
После доработки 14.04.2005*

## **SIMULATION OF FIELD NONLINEAR PHASE SHIFT DYNAMICS IN RING INTERFEROMETER IN CASE OF TWO-FREQUENCY INFLUENCE**

*I.V. Izmailov, A.V. Lyachin, B.N. Poizner, D.A. Shergin*

Families of initial-final maps, bifurcation lines, maps of Lyapunov's characteristic exponents and fractal dimensionality  $D_0$  are constructed for a model of nonlinear phase shift dynamics for one- and two-frequency field in a ring interferometer. The influence of a spectrum form of two-frequency radiation to a structure of mentioned maps is clarified. Ways of maps quantitative analysis are suggested and realized. Two languages of nonlinear dynamics description in the ring interferometer are compared: with the help of ordinary differential equations and of the discrete map. The peculiarity of spatial deterministic chaos was pointed: this state is stable to initial-conditions variation but it is not stable to parameters variation of the model.



## ДВЕ ТЫСЯЧИ ЧЕТВЕРТЫЙ ГОД В ДАТАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

*Д.И. Трубецков*

Время – друг великих сочинений  
И смертельный враг плохих.  
Там поймешь, кто гений, кто не гений,  
Где давно не будет нас в живых.

*Александр Кушнер*

Уважаемый читатель! Вашему вниманию предлагается дважды не прочитанная лекция. Она планировалась как вступительная сначала на «ХАОС-2004», а потом на «Нелинейных днях в Саратове для молодых», посвященных памяти Юлия Александровича Данилова. Исторический подход к вступительной лекции – дань памяти Ю.А. Данилову – человеку, который сделал необычайно много для развития нелинейной динамики в нашей стране и лучше которого мало кто знал историю науки.

Историю физики перестали преподавать в университетах, поэтому лекция полезна для молодых, поскольку в ней сделана попытка рассказать о великих, радостных и печальных событиях, связанных с развитием нелинейной динамики, и событиях из жизни ее создателей. Разумеется, выбор событий и героев, а также число выделенных дат на совести автора лекции.

Итак, чем интересен в указанном смысле 2004 год? Начнем с краткой хронологии событий.

- 375 лет со дня рождения Христиана Гюйгенса (1629)
- 260 лет с момента опубликования швейцарцем Абрамом Трамбле труда «Мемуары к истории одного рода пресноводных полипов с руками вместо рогов». Так появилась в науке гидра – «дрозофила» морфогенеза (1744)
- 225 лет со дня рождения Пьера Симона Лапласа (1749)
- 180 лет со дня рождения Вильяма Томсона (лорда Кельвина) (1824)
- 170 лет со дня открытия солитона Скоттом Расселом (1834)
- 170 лет со дня смерти Томаса Роберта Мальтуса (1834)
- 150 лет со дня рождения Анри Пуанкаре (1854)
- 125 лет со дня рождения Леонида Исааковича Мандельштама (1879)
- 115 лет со дня рождения Ван дер Поля (1889)
- 110 лет со дня защиты диссертации де Вриза, в которой появилось знаменитое КдВ-уравнение (1894)
- 100 лет фрактальной кривой Нильса Фабиана Хельге фон Коха (1904)
- 80 лет со дня рождения Бенуа Мандельброта – отца фрактальной геометрии (1924)
- 60 лет со дня выхода статьи Льва Давидовича Ландау «О природе турбулентности» (1944)
- 50 лет со дня смерти Алана Матисона Тьюринга (1954)
- 50 лет со дня опубликования работы А.М. Жаботинского о кинетике реакции Б.П. Белоусова (1954)
- 40 лет теореме А.Н. Шарковского, доказанной в работе «Существование циклов непрерывного отображения линии на саму себя» (Укр. Мат. Ж., 1964, 16, с. 61-71) (1964)
- 30 лет со дня выхода книги А.М. Жаботинского «Концентрационные колебания» – первой монографии на эту тему (1974)
- 25 лет со дня выхода книги Вернера Эбелинга «Образование структур при необратимых процессах» – первой на русском языке книги по самоорганизации (1979)
- 15 лет со дня смерти Льва Альбертовича Вайнштейна (1989)

Далее остановимся лишь на некоторых событиях и судьбах отдельных личностей, не всегда следуя хронологической последовательности, не обосновывая свой выбор и оставив общие оправдания на конец лекции<sup>1</sup>.

Начнем с Лапласа.

23 марта 1749 года в маленьком местечке Бомон в Нижней Нормандии родился Пьер Симон Лаплас. Было это 225 лет назад. Чем не дата?

Любопытный штрих: о детстве Лапласа известно немного, и это не случайно. Он родился и вырос в бедной семье и, в отличие от многих других вышедших из народа ученых, стыдился этого. В зрелые годы он даже не поддерживал отношений со своими родителями. Обучение Лаплас начал в Колледже, руководимом монахами-бенедиктинцами. Уже там он изучал сложные математические сочинения.

В 1766 году Лаплас переезжает в Париж, где он пережил Французскую революцию, эпоху Наполеона и реставрацию Бурбонов. По представлению Д'Аламбера

<sup>1</sup>В частности, начнем не с Гюйгенса, хотя бы потому, что о нем довольно много написано и известно (см., например, [1] – глава 1 и соответствующие ссылки в списке литературы).

Лаплас становится профессором математики в Королевской военной школе. К этому времени он уже является одним из основателей теории вероятностей, будучи убежденным детерминистом. В 1772 году Лаплас неудачно баллотируется в Академию (причина – плохой характер). На следующий год его избирают в Парижскую Академию наук, правда, не как геометра, а как адъюнкт-механика. И только в 1785 году Лаплас становится полноправным членом Академии.

В 1793 году Лаплас начал работу над знаменитым трудом «Изложение системы мира», который вышел в свет в 1796 году и переиздавался в 1799, 1808, 1813 и 1824 годах.

Лаплас бежит от якобинского террора, в котором погиб его друг Лавуазье, в Мележ.

В 1798 году он вводит термин «небесная механика» и создает труд под этим названием<sup>2</sup>. В отношении «небесной механики» Лапласа (один из томов которой был посвящен Наполеону) Бонапарт в своих воспоминаниях писал: «Мне кажется, что «Небесная механика» возвышает блеск нашего века». При Директории Лаплас – неудавшийся министр внутренних дел. Бонапарт писал: «Первоклассный геометр заявил себя администратором более чем посредственным». Интересно по этому поводу замечание В.И. Арнольда: «Наполеон критиковал Лапласа за «попытку ввести в управление дух бесконечно малых». Французские коллеги объяснили мне, что Лаплас, будучи министром, требовал, чтобы все счета сходились до копейки». Во время Империи он стал офицером Почетного легиона и графом. После реставрации Лаплас отрекся от Наполеона, стал пэром и получил титул маркиза. Фурье заметил: «Мы должны отделить бессмертного творца «Небесной механики» от министра и сенатора».

По свидетельству современников, Лаплас был малопривлекательным и политически беспринципным человеком. Он голосовал за исключение Монжа из Академии, не выносил деликатного и веротерпимого Лагранжа и хорошо относился только к Ж. Д'Аламберу. Несмотря на религиозное воспитание, Лаплас был убежденным атеистом. Когда Наполеон спросил его, есть ли у него в «Небесной механике» место для Бога, ученый ответил: «Ваше Величество, я не нуждаюсь в этой гипотезе». Скончался Лаплас 5 марта 1827 года.

Нет смысла приводить известные цитаты о детерминизме Лапласа. Их уже знают наизусть. Но что бы мы без них опровергали?

Следующая дата – следующая не по хронологии, а по смыслу (или анти-смыслу?).

29 апреля 1854 года в Нанси родился Анри Пуанкаре. Было это 150 лет назад. Его отец, профессор медицинского факультета, и дед, фармацевт, были людьми высокой культуры. Двоюродные братья А. Пуанкаре – сыновья его дяди, Антони Пуанкаре, – Раймон, Президент Французской республики и председатель Совета министров, и Люсьен, физик, ректор Парижского университета. Ниже приведены основные важные даты жизни Пуанкаре.

---

<sup>2</sup>Интересная подробность. Гипотеза Лапласа об образовании Солнечной системы состоит в том, что планеты медленно сгущались в компактное тело из туманного вещества. При этом туманное Солнце медленно вращалось вокруг своей оси. Хотя гипотеза Лапласа и не подтвердилась, она дала толчок развитию многих исследований и ее роль исключительно велика. В 1974 году немецкий ученый Фукс обратил внимание на работу Лапласа, которую можно трактовать как предсказание существования черных дыр.

- 1862 начало учебы в лицее; мнение одного из учителей: «У меня в классе есть математическое чудовище»
- 1870 самостоятельно изучил немецкий язык
- 1871 получил степень бакалавра словесности
- 1872 первое место в конкурсе по элементарной математике среди лицейстов страны;  
первое место на общем конкурсе по математике; любопытно, что Пуанкаре провалился на экзамене по рисованию и черчению, но в связи с выдающимися способностями экзаменуемого его в дальнейшем освободили от этих предметов
- 1873 первое место среди всех соискателей при поступлении в Политехническую школу
- 1874 поступление в Горную школу
- 1879 несколько месяцев Пуанкаре работает горным инженером
- 1879 1 августа защита в Париже докторской диссертации «О свойствах функций, определяемых дифференциальными уравнениями в частных производных»
- 1879–1881 преподавание на кафедре точных наук Нантского университета
- 1881 октябрь начало работы в Парижском университете
- 1887 избрание членом Парижской Академии наук
- 1896–1912 заведование кафедрой математической астрономии и точной механики
- 1902 начало заведования кафедрой теории электричества
- 1908 избрание членом Французской Академии
- 17 июля 1912 Анри Пуанкаре умер

Пуанкаре написал более 500 статей и мемуаров. При этом спектр его трудов огромен: практически все разделы математики, некоторые из них он создал сам (топология, качественная теория дифференциальных уравнений, асимптотические методы), физика (в частности, специальная теория относительности), философия науки, популярные статьи по небесной механике, геодезии и другим разделам науки, биографии Вейерштрасса, Эрмита и др.

После смерти Пуанкаре Поль Пенлеве писал: «Перестал жить мозг точных наук. Вместе с великим французским математиком от нас ушел единственный человек, разум которого мог охватить все, что создано разумом других людей, проникнуть в самую суть всего, что постигла на сегодня человеческая мысль, и увидеть в ней нечто новое». Для тех, кто занимается нелинейной динамикой, величие Пуанкаре очевидно. Достаточно упомянуть качественную теорию дифференциальных уравнений, предельные циклы Пуанкаре (вспомним, что диссертация А.А. Андронова называлась «Предельные циклы Пуанкаре и теория колебаний»), сечение Пуанкаре, «возвращение Пуанкаре», его знаменитое предсказание сложности поведения системы из-за чувствительности к изменению начальных условий (удар по детерминизму Лапласа) и многое другое <sup>3</sup>.

В общем, можно считать, что Лаплас и Пуанкаре незримо присутствуют на любом собрании занимающихся нелинейной динамикой. Но был ли Пуанкаре первым,

<sup>3</sup>Тем, кто заинтересовался жизнью Анри Пуанкаре, можно порекомендовать книгу [2], состоящую из трех известных очерков: Ю. Сажере «Анри Пуанкаре», Ж. Адамара «Анри Пуанкаре и математика» и Л. де Бройля «Анри Пуанкаре и физические теории».

кто понял, что чувствительность начальных условий приводит к непредсказуемости? Оказывается, нет. Я узнал это после прочтения главы «Адамар, Дюгем, Пуанкаре» в замечательной книге Давида Рюэля [3]. Обратимся к этой книге.

«Безусловно, уже тысячи лет назад люди осознавали, что маленькие причины могут иметь большие следствия и что будущее предсказать трудно. Что является относительно новым, так это демонстрация того, что для некоторых систем небольшие изменения начальных условий обычно приводят к предсказаниям настолько отличным, что через некоторое время само предсказание в действительности становится бесполезным. Это показал в конце девятнадцатого века французский математик Жак Адамар.» Жак Соломон Адамар родился в Версале в 1865 году. Его блестящие и разносторонние способности проявились рано. На вступительных экзаменах в Политехническую школу в Париже он поставил рекорд, набрав большее число баллов, чем кто-либо из экзаменовавшихся до него. Оценки на этих экзаменах даются по стобальной системе по двадцати предметам. Адамар набрал около 1900 баллов. По окончании Политехнической школы Адамар посвятил себя математике и сделал ряд крупных открытий. С 1900 года Адамар – профессор Парижского университета, позже он преподавал также в Политехнической школе и читал лекции в Collège de France. В 1912 году он был избран в Парижскую Академию наук. Ввиду угрозы немецкой оккупации Адамар был вынужден в 1940 году уехать в США. Там в 1945 году была издана на английском языке его книга «Исследование психологии процесса изобретения в области математики» (на русском языке книга вышла в 1970 году, в издательстве Сов. Радио, Москва). Адамар прожил долгую жизнь и умер в Париже в 1963 году. Замечу, что в 1963 году появился аттрактор Лоренца.

Оригинальная работа Адамара [4] уже содержит явное замечание о том, что если в начальных условиях присутствует хоть какая-то ошибка, то долгосрочное поведение системы предсказать невозможно.

«Система, которую рассматривал Адамар, представляла собой странный вид бильярда, в котором вместо плоского стола использовалась закрученная поверхность отрицательной кривизны» [3].

Французский физик Пьер Дюгем<sup>4</sup> включил в свою книгу, опубликованную в 1906 году, раздел под названием «Пример математического вывода, абсолютно непригодного для использования», где рассматривается вычисление траектории движения шара по бильярдному столу Адамара.

И только в 1908 году Пуанкаре в своей книге «Наука и метод», без ссылок на Адамара делает важное замечание, состоящее в том, что долгосрочная непредсказуемость примиряет случайность и детерминизм.

«Вот это замечание, выраженное одним предложением: очень маленькая причина, которая от нас ускользает, определяет значительное следствие, которое мы не можем проигнорировать, и тогда мы говорим, что это следствие вызвано случайностью» [3].

---

<sup>4</sup>Пьер Дюгем (10.06.1861-14.09.1916) – французский физик-теоретик и историк науки, член Парижской АН (с 1913 г.). Научные работы в области термодинамики, гидродинамики, теории упругости, истории философии естествознания. Ввел понятие термодинамических потенциалов. Отрицал атомистическую теорию. Преувеличивал роль науки в средние века, смягчал реакционную роль церкви и теологии в развитии средневековой науки.

Пуанкаре рассмотрел два примера чувствительной зависимости от начальных условий:

- пример газа, состоящего из множества молекул, движущихся с большой скоростью во всех направлениях и подвергающихся множеству столкновений, которые создают чувствительную зависимость от начальных условий;
- ненадежность прогнозов погоды по Пуанкаре вызвана чувствительностью к начальным условиям вместе с неточным знанием начальных условий.

Поразительна современность примеров Пуанкаре: и динамика газа твердых сфер, и циркуляция атмосферы – основные объекты исследования последних лет, использующие точку зрения, принятую Пуанкаре.

Но почему такой длинный разрыв во времени между идеями, физической и математической проницательностью Адамара, Дюгема, Пуанкаре и современной теорией хаоса?

Рюэль отвечает так [3]: «Я полагаю, что существуют две причины этого загадочного исторического пробела. Первой – является приход квантовой механики. Новая механика изменила научные перспективы физиков и забрала всю их энергию на много лет. Почему они должны были стараться, например, объяснить случайность чувствительной зависимостью от начальных условий в классической механике, когда квантовая механика ввела новый более существенный источник случайности и хаотичности?»

Кроме того, Рюэль считает, что эти идеи возникли слишком рано, поскольку не было инструментов для использования: не было теории мер, не было эргодической теоремы, а главное, не было компьютеров, сыгравших решающую роль в развитии науки о хаосе.

Еще две даты, связанные одним явлением.

В 1834 году Джон Скотт Рассел впервые наблюдал солитон, а 110 лет назад, в 1894 году, Густав де Вриз представил свою диссертацию, в которой появилось знаменитое уравнение Кортевега – де Вриза (КДВ-уравнение). Все это подробно описано во многих статьях и книгах (см., например, [5], очерк «Одна тысяча восемьсот тридцать четвертый», [1] и библиографический список в [1]).

Наверное, уже многие знают наизусть цитату из статьи [6]. Это образец научной поэзии, в котором сохранено живое удивление натуралиста, встретившегося с редким и необычным явлением. Я привожу его только для того, чтобы перевести мили и футы в привычные нам единицы измерения.

«Я наблюдал за движением баржи, которую с большой скоростью тянула по узкому каналу пара лошадей, как вдруг баржа резко остановилась. Но отнюдь не остановилась приведенная ею в движение масса воды в канале. Неистово бурля, она стала собираться вокруг носовой части судна, а затем вдруг, приняв форму обособленного крупного возвышения округлого и резко очерченного скопления воды, продолжило свой путь по каналу без сколько-нибудь заметного изменения формы или уменьшения скорости. Я поскакал за ним верхом, и, когда нагнал его, оно все еще катило вперед, сохраняя свою первоначальную форму в виде фигуры футов тридцати длиной и один-полтора фута высотой. Высота скопления постепенно уменьшалась, и, проскакав за ним одну-две мили, я потерял его в извилах канала. Такой оказалась в августе 1834 года моя первая встреча со

столь своеобразным и прекрасным явлением.» И так, длина возвышения порядка 9 метров, высота – 0.3–0.45 метра, а проскакал за ним Скотт Рассел 1.6093– 3.2186 километра. В статье [6] указана и скорость волны – 8–9 миль в час – 13–14 километров в час. У этой встречи была предыстория, о которой обычно упоминают. Обратимся к прошлому.

В 1834 году конкуренция между каналами и железными дорогами в Англии вступила в заключительную фазу. Перед лицом грядущего страха одна шотландская судоходная компания решила выяснить, что может дать паровая тяга пассажирскому судоходству на каналах. Для изучения этого вопроса был приглашен Джон Скотт Рассел – блестящий молодой инженер, окончивший университет в Глазго и Эдинбурге. Проведенные исследования прославили его имя и определили его дальнейшую судьбу, связанную с судостроением. В конце концов, в 1860 году он стал одним из основателей Института корабельных архитекторов.

Когда Скотт Рассел изучал буксировку барок в канале, он обратил внимание на замечательную быстроходность «лодок-летунов», впервые появившихся на канале между Глазго и Андроссаном в Шотландии. Эти лодки строил некто В. Хьюстон, случайно сделавший замечательное открытие. Однажды его лошадь, тащившая барку, испугалась и понесла. И тут Хьюстон заметил, что, когда барка достигла более высокой скорости, чем обычно, буксирный канат ослаб, и лошадь побежала гораздо легче. Тогда Хьюстон купил несколько легких суденышек длиной по 17 метров и стал буксировать их по-новому.

Если обычно барки на каналах двигались со скоростью 6–9 км в час, то теперь лошадей стали погонять кнутами до тех пор, пока они не разгоняли лодку до 14–15 км в час. И тут происходило чудо: лодка дальше продолжала двигаться на гребне своей собственной волны и не оставляла за собой никаких волн. Скотт Рассел изучил это явление на полукилометровом прямолинейном участке канала, соединявшем реки Клайд и Форт, глубиной 1.2–1.5 метра. Он разгонял шеститонную барку, измеряя ее скорость и усилие на канате. Оказалось, что при скорости около 14 км в час усилие, необходимое для буксировки, резко падало: при 12 км в час оно составляло 225 кг, а при 14 км в час – 127 кг. Почти в два раза меньше! Именно в этих экспериментах он и наблюдал солитон, который называл переносной волной (см. выше цитату из [6]).

Скотт Рассел обобщил свои исследования в статье с длинным названием «Экспериментальные исследования законов гидродинамического явления, сопровождающего движение плавающих тел и не приведенного в согласие с известными законами сопротивления жидкости», за которую в 1840 году был награжден большой золотой медалью Королевского общества в Эдинбурге. Он установил, что если на одном конце длинного канала резким толчком создать повышение уровня, то возникшее при этом водяное возвышение, сохраняя свою форму, начнет двигаться вдоль канала со скоростью, зависящей от его глубины. Следовательно, у каждого канала есть некоторая характерная для него скорость, «характеристическая скорость», равная скорости введенной Скоттом переносной волны.

А что происходит при движении по нему судна?

Сначала перед носом судна создается передняя ведущая волна, а за кормой возникают бегущие назад волны, причем скорости и передней и кормовой волн равны



скорости судна. Энергия, которая тратится на буксировку, идет на преодоление трения и на поддержание кормовых волн. При достижении судном «характеристической скорости» для данного канала кормовые волны исчезают, остается только передняя волна, «оседлав» которую, судно движется вдоль канала, и энергия буксировки тратится только на преодоление трения.

Как выяснилось позднее, Лагранж еще в 1788 году аналитически исследовал движение волны бесконечно малой высоты в канале конечной глубины и нашел правильную зависимость ее скорости от глубины. Но это открытие было погребено в дебрях «Аналитической механики», и на него никто не обратил внимания. Результат переоткрыл и довел до научного сообщества Скотт Рассел.

Анализируя творчество великого кораблестроителя, понимаешь двойственность его инженерного дарования, принадлежащего минувшему XVIII веку и веку XIX. Эта двойственность удивительно соответствовала некоей двойственности промышленного развития Англии Викторианской эпохи, где старое причудливо переплелось с новым: в этой стране позже, чем в других, начали строить судоходные каналы с барками и лошадьми, и раньше – железные дороги и пароходы. Перекинуть мост между этими двумя эпохами английской промышленности и попытался Скотт Рассел: принцип, найденный им при исследовании буксировки барки в канале, он попытался использовать при проектировании морских судов, приводимых в движение паровой машиной. Он создал теорию образования носовой оконечности судна, ошибочно отождествив волну, поднимаемую носом судна, с переносной волной. Корпус, спроектированный на основе этой теории, по его мнению должен был быть корпусом наименьшего волнового сопротивления. Он построил много пароходов, в которых была реализована эта идея. И хотя потом выяснилось, что он заблуждался, Скотт Рассел сыграл важную роль в развитии гидродинамики корабля, первым обратив внимание своих современников на важность учета волнового сопротивления при проектировании кораблей <sup>5</sup>.

Через 60 лет после первого наблюдения солитона появилось, как уже указывалось, КдВ-уравнение, ставшее знаменитым, хотя в работе Буссинеска оно появилось раньше, в 1872 году, но осталось незамеченным.

Его знаменитости способствовало разрешение проблемы Ферми – Паста – Улама Забуски и Крускалом, работа которых привела к полному переосмыслению роли уединенных волн в физике.

Последовавший вскоре успех интенсивных аналитических исследований казался невероятным. Выяснилось, что уравнение КдВ обладает глубокой внутренней симметрией, выражающейся в существовании бесконечного числа законов сохранения.

В 1967 году Гарднер, Грин, Крускал и Миура показали, что можно получить решение уравнения КдВ, которое является, в некотором смысле, общим решением: оно охватывает широкий класс начальных условий, включающий как весьма частный случай профиль уединенной волны. Удивительно красивой была идея решения. Она основывалась на сопоставлении уравнения КдВ и некоторой связанной с ним линейной задачи. Круг солитонных уравнений расширяется, а их точные решения приводят к новым физическим представлениям, связанным с частицеподобными

---

<sup>5</sup>Много интересных фактов из жизни Скотта Рассела и из истории становления и развития основных понятий и законов гидроаэродинамики можно найти в научно-художественной книге [7].

свойствами солитонов. Многие уравнения, важные для физики, оказались нетипичными с точки зрения теоремы Пуанкаре о возвращении (опять Пуанкаре) - существование солитонов является препятствием на пути к хаосу.

Важная роль солитонов и уединенных волн выявляется при анализе ряда процессов, происходящих в твердых телах, биологических и полимерных макромолекулах, оптических волокнах и других системах.

И еще одна дата 1834 года многим может показаться странной. 23 декабря 1834 года умер Томас Роберт Мальтус. На его надгробном камне написано: «Его произведения будут вечным памятником глубине и верности его понимания». Почему дата странная? Ответ можно найти, например, в интересной статье [8]. Автор, в частности, пишет, что в не очень далекие времена упоминание о Мальтуса могло быть либо ругательным, либо опасным для упоминавшего его, поскольку «Мальтус был не менее, а скорее более ненавидим советскими идеологами марксизма, чем Мендель, Вейсман, Морган». В знаменитом и спорном труде «Анализ популяций» (см. [9]) Мальтус выдвинул гипотезу, согласно которой неконтролируемый рост популяций всегда превосходит по скорости рост средств существования. Его гипотеза указывала на геометрическую прогрессию роста неконтролируемой популяции в сравнении с арифметической прогрессией роста источников существования<sup>6</sup>.

Мальтус написал множество выдающихся трудов и, несмотря на неприятие многими его гипотезы о судьбах популяций, был единодушно признан выдающимся мыслителем своего времени. Несомненно, что выдвинутая Мальтусом гипотеза интересна для нелинейной динамики в плане решения демографических, социальных и экономических задач.

Ответ на вопрос, работает или не работает гипотеза Мальтуса сегодня, есть в статье [8]. В 32 странах рост популяции практически равен нулю. Популяции в Германии, Италии, России, Венгрии и Украине уменьшаются. Это замедление или уменьшение скорости роста верно для стран с общим населением 2 млрд. человек, составляющих примерно 1/3 мирового населения. Таким образом, для 1/3 человечества Мальтус не прав. Но другие 2/3 человечества неприятно близки к тому, чтобы служить доказательством правоты Мальтуса. В развивающихся странах популяция увеличивается на 80 млн. человек в год.

Заметим, что примерно 1 млрд. человек каждый день идут спать голодными, несколько сот тысяч умирают от голода каждый день. Можно ли игнорировать идеи Мальтуса?

Наконец, интересная цитата из статьи [10]. «Много лет назад, когда, перед тем как Индия стала независимой, Ганди спросили: «Будет ли страна следовать британскому пути развития?», Ганди ответил: «Чтобы достичь своего процветания, Британия использует половину ресурсов планеты. Как много планет потребуется для страны, подобной Индии?» По недавним оценкам потребовались бы две дополнительные планеты, чтобы поддерживать во всем мире жизненные стандарты индустриальных стран, три – если популяция удвоится, и двенадцать – если стандарты удвоятся.

<sup>6</sup>В теории популяций уравнением Мальтуса часто называют уравнением для эволюции во времени численности популяции  $N$ :  $\partial N/\partial T = kN$ , где  $k = \text{const}$ , причем  $k = k_p - k_c$ , где  $k_p$  и  $k_c$  – коэффициенты рождаемости и смертности. Поправляют модель переходом к логистическому уравнению  $\frac{dN}{dt} = kN \frac{N_0 - N}{N_0}$ , где  $N_0$  – предельная численность, которой может достигнуть популяция.

В 2004 году мы можем отметить 115 лет со дня рождения Балтазара Ван дер Поля и почтить его память : он умер 45 лет тому назад. Немного о нем (подробности есть, например, в [1]).

- 1889, 27 января в Утрехте (Голландия) в семье состоятельного купца, широко образованного человека родился Б. Ван дер Поль.
- 1916 окончил с отличием Утрехтский университет по специальности физика и математика; сдал «докторский экзамен», что соответствовало получению степени магистра, и уехал в Англию для продолжения образования, где вначале работал у Флеминга.
- 1917–1919 работа в Кавендишской лаборатории Кембрижского университета. С 1919 года в течение трех лет был хранителем частного фонда Тейлора, в который входили музей, библиотека и лаборатория.
- 1920 защита докторской диссертации о распространении радиоволн в ионизированном газе на основании проведенных в Кембридже экспериментов.
- 1922–1949 работа в фирме «Филлипс» в Эйховене.
- С 1938 года Ван дер Поль, одновременно с работой в «Филлипсе», – профессор Дельфского университета по теоретической радиотехнике.
- 6 октября 1959 Ван дер Поль умер.

Считают, что в своей работе Ван дер Поль испытал влияние Лапласа и Оливера Хевисайда. Н.М. Крылов и Н.Н. Боголюбов писали так о творчестве Ван дер Поля: «Основателем применения метода нелинейных колебаний в радиотехнике следует считать голландского физика Балтазара Ван дер Поля, который нестрогими методами получил важные результаты». Что касается строгости, то здесь можно вспомнить высказывание Н. Винера о том, что в серьезных работах строгость не является чем-то довлеющим и, как правило, может быть внесена достаточно квалифицированным профессионалом-математиком.

Главное – наличие плодотворной идеи. Эта мысль очень созвучна Л.И. Мандельштаму: «Физик должен сам определять меру математической строгости...» Самые значительные результаты Ван дер Поля – вклад в теорию осреднения и, конечно, получение эталонного уравнения автоколебаний ( $x, t$  – безразмерные ).

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0, \quad \varepsilon = \text{const} > 0.$$

Пока колебания малы и  $x^2 < 1$ , коэффициент при  $\frac{dx}{dt}$  (а это слагаемое описывает затухание) отрицателен, колебания нарастают.

При возрастании колебаний  $x$  увеличивается. Если  $x^2 > 1$ , то трение становится положительным и уменьшает амплитуду колебаний. В результате двух противоположных влияний раскачка колебаний будет постепенно замедляться, а движение неограниченно приближаться к режиму с постоянными амплитудами, в котором указанные влияния уравновешиваются. Образ автоколебаний – предельный цикл, о котором уже упоминалось.

Знаменитыми остаются исследования Ван дер Поля по синхронизации автоколебаний и моделированию работы сердца.

Наша следующая дата – 60 лет со дня опубликования работы [11]. Обратимся вновь к книге Рюэля, и наши цитаты будут длинными. Вот что он пишет. «Открытие новых идей запрограммировать невозможно. Вот почему революции и другие общественные катаклизмы зачастую оказывают положительное влияние на науку. На некоторое время прерывая рутинную работу бюрократического аппарата и выводя из строя организаторов научного исследования, они дают людям возможность думать. Как бы то ни было, «события», которые произошли во французском обществе в мае 1968 года, обрадовали меня, потому что они нарушили работу почты и связи и, помимо этого создали своего рода интеллектуальное возбуждение<sup>7</sup>. В то время я пытался самостоятельно изучить гидродинамику по книге Ландау и Лившица «Механика жидкости». Я медленно пробивал свой путь в гуще сложных вычислений, от которых авторы, судя по всему, получали истинное удовольствие, и внезапно наткнулся на нечто интересное: раздел по возникновению турбулентности без сложных вычислений». После этого Рюэль описывает качественно ламинарное и турбулентное движение, вводит понятие моды как периодического движения.

Далее он пишет следующее. «Но вернемся к Ландау. Он предположил, что, когда под действием внешнего источника питания жидкость приходит в движение, возбуждается определенное количество мод жидкости. Если не возбуждается ни одной моды, мы имеем постоянное состояние жидкости. Если возбуждается одна мода, мы имеем периодические колебания. Если возбуждается несколько мод, поток становится нерегулярным, а при возбуждении множества мод – турбулентным. Ландау поддержал свое предложение с помощью математических доказательств... (Независимо от Ландау немецкий математик Эберхард Хопф опубликовал подобную теорию, несколько более сложную в математическом плане. E. Hopf. A mathematical example displaying the features of turbulence // Commun. Pure Appl. Math. 1948. Vol. 1. P. 303-22).

Теория Ландау – Хопфа, в представленном мной виде, на первый взгляд, дает удовлетворительное описание возникновения турбулентности: то, как жидкость становится турбулентной при увеличении силы, приложенной к ней извне. И все же, читая Ландау, я мгновенно испытал неудовлетворение, по математическим причинам... Описание турбулентности Ландау через моды не понравилось мне потому, что я слушал семинары Рене Тома и изучал фундаментальный труд Стива Смайла под названием «Дифференцируемые динамические системы». От них я узнал о современном развитии идей Пуанкаре по динамическим системам, из чего ясно понял, что применимость парадигмы мод далека от универсальной.

Например, временная эволюция, которую можно описать через моды, не может обладать зависимостью от начальных условий... Чем больше я думал об этой проблеме, тем меньше я верил картине Ландау: если бы в вязкой жидкости были моды, то они взаимодействовали бы скорее сильно, чем слабо и создавали бы нечто совершенно отличное от картинки мод. Нечто более богатое и гораздо более интересное.» Так появилась знаменитая статья Рюэля с Флорисом Такенсом «О природе турбулентности» (Commun. Math. Phys., 1971, 20, 167; 1971, 23, 343). Заметьте, статья называется так же, как у Ландау.

---

<sup>7</sup>В 1968 году по миру прокатилась волна массовых выступлений студентов. Они яростно протестовали против всего на свете – войны во Вьетнаме, власти денег, неправильного обучения в университетах, требовали свободы секса, а кое-где и наркотиков. Особенно бурный характер этот протест принял во Франции.

И вновь Рюэль: «В своей работе мы объяснили, почему, на наш взгляд, картина турбулентности, представленная Ландау, неверна, и предложили нечто другое, что содержало странные аттракторы. Эти странные аттракторы впервые появились в работе Стива Смейла, но само название было новым, и теперь уже никто не помнит, кто его придумал: Флорис Такенс, я или кто-то еще...

Мы претендовали на то, что турбулентный поток описывается не странными аттракторами...

Возникла новая парадигма, которая получила имя – хаос, данное ей Джимом Йорке, прикладным математиком, работающим в университете Мериленда. То, что мы сейчас называем хаосом, является временной эволюцией с чувствительной зависимостью от начальных условий». Итак, модовая идея объясняет не все. Но все-таки именно работа Ландау привела к использованию идей хаоса в теории турбулентности.

Следующий наш герой – Алан Матисон Тьюринг. Он родился 23 июня 1912 года в небогатой английской аристократической семье, жившей в соответствии со строгими традициями империи. Среди многочисленной родни этой семьи был и ирландский физик и математик Джон Джонстон Стоней, который ввел понятие об элементарном электрическом заряде и придумал термин «электрон».

Традиционное английское воспитание не включало изучение естественных наук. Но Алан обладал пытливым умом, и воспитатели разрешили ему читать научно-популярные книги, благо читать он выучился в шесть лет. Кто-то из родных подарил Алану популярную книгу Эдвина К. Брюстера «Чудеса природы, которые должен знать каждый ребенок», которая подогрела его интерес к естествознанию. В 11 лет он увлекся химией, пытаясь извлечь йод из водорослей. Мать Алана боялась, что эти увлечения помешают ему поступить в одну из Public Schools – английское закрытое частное заведение для мальчиков, учеба в котором считалась обязательной для детей аристократов.

В 1926 году Алан был зачислен в престижную Шерборнскую школу (Sherborn Public School), но опасаться пришлось уже за то, окончит ли он ее, будучи последним по английскому языку, предпоследним по латинскому, не намного лучше обстояло дело и по остальным предметам.

Директор школы писал: «Этот мальчик из тех, кто обречен стать большой проблемой для любой школы или сообщества...» Но в классном журнале были и другие записи: « Если он хочет быть только научным специалистом, он зря проводит время в Public School. Наверное, он будет математиком. Такие ученики, как он, рождаются один раз в 200 лет». В 15 лет Алан самостоятельно освоил теорию относительности, но по обязательным программным предметам учился столь плохо, что мог вообще не получить аттестата. Школу он окончил и со второй попытки поступил в Кембриджский университет. Смерть лучшего друга, с которым он делился своими размышлениями, потрясла семнадцатилетнего Алана. По-видимому, он впервые задумался над тем, как материализован человеческий разум и высвобождается ли он после смерти.

В Королевском колледже Кембриджского университета он сразу стал заметен: прекрасная успеваемость и интенсивная научная работа, степень бакалавра с отличием в 1934 году, степень магистра и аспирантская стипендия от Королевского колледжа в 1935 году, премия Смита за работу по теории вероятностей в 1936 году.

В 1935 году он внезапно увлекся проблемой Гильберта о разрешимости и стал работать над ней. Напомним, что Гильберт ставил следующий вопрос: «Существует ли, хотя бы в принципе, определенный метод или процесс, посредством которого можно решить любую математическую проблему?» В апреле 1936 года Тьюринг уже завершил работу, но появилась статья американца Алонзо Черча, где результат был получен иначе, чем у Алана. Ответы и у того и у другого были отрицательными. Черча считают первым. Но в своей работе «О вычислимых числах с приложением к проблеме разрешимости» Тьюринг впервые ввел термины «вычислительный алгоритм» и «универсальный компьютер». Именно в этой работе появилась знаменитая «машина Тьюринга».

Тьюринг блестяще окончил четырехлетний курс обучения в университете, а в сентябре 1936 года получил двухгодичную аспирантскую стипендию из Принстонского университета и уехал к Джону фон Нейману. В 1936 году он защитил докторскую диссертацию и вернулся в Англию, в Кембридж, где начал работать в Правительственной школе кодов и шифров. Кстати, еще в Принстоне он сконструировал шифровальную машину на электромагнитных реле и начал изучать науку шифрования.

С началом Второй мировой войны Германия для кодировки радиосообщений стала применять шифровальную электромеханическую машину «Энигма» («Загадка»), которой англичане противопоставили свою дешифрующую машину «Бомба», но она не справлялась с раскрытием шифра. Тьюрингу удалось усовершенствовать машину, и шифр немцев был взорван, после чего англичане знали детали всех операций, планируемых люфтваффе.

Но с вступлением в войну США 1 февраля 1942 года немцы перешли на усложненный шифр («рыбий язык») и англичане опять потерпели неудачу.

Тьюринг создал машину «Колосс» с двумя тысячами электронных ламп и вновь победил немцев.

В Манчестерском университете уже после войны Тьюринг участвовал в создании одного из первых в мире работоспособных компьютеров Ferranti Mark I. В 1950 году он написал философскую статью «Вычислительные машины и интеллект» (у нас она вышла первым изданием в 1960 году в виде отдельной книги под названием «Может ли машина мыслить?» [12, 2-е издание]), ставшую классической в будущей науке об искусственном интеллекте.

В 1951 году Тьюринга избрали членом Лондонского королевского научного общества.

В 1952 году выходит статья Тьюринга [13], в которой он показал, что периодическое в пространстве и стационарное во времени распределение концентраций может установиться в первоначально однородной системе, где химические реакции сочетаются с диффузией. Периодическое строение многих животных, например, кишечнополостных, червей, многоножек и т.п. он связал с существованием некоторого вещества, влияющего на рост клеток – морфогена. С помощью компьютера он начал исследования роста и формообразования живых организмов.

Тьюринг вел отнюдь не аристократический образ жизни: в свободное время он ставил химические опыты, решал шахматные задачи и играл в го.

Друзей у него практически не было. Возможно, от него отталкивали эксцентрическая прическа, несколько беспорядочный стиль одежды, резкий скрипучий голос; к тому же он иногда сильно заикался.

Тьюринг был прекрасным спортсменом, отдавая предпочтение гребле и марафонскому бегу. Он удивлял коллег тем, что по утрам часто пробегал десять километров от дома до лаборатории. В 1948 году в кроссе он показал результат лучше, чем спортсмен, который вскоре стал серебряным призером Олимпийских игр. Сам он не участвовал в Играх из-за травмы.

31 марта 1953 года Алан Тьюринг после ареста предстал перед судом по обвинению в гомосексуализме. То, что сейчас называют нетрадиционной сексуальной ориентацией, в послевоенной Англии считалось преступлением. Он должен был выбрать: тюрьма или лечение. Тьюринг выбрал лечение, но все пережитое привело к глубокой депрессии, хотя он продолжал научную работу.

8 июня 1954 года прислуга нашла его мертвым. На недоеденном яблоке и на пальцах Тьюринга обнаружили цианистый калий. Яд был рассыпан и по столу, где он накануне ставил химические опыты.

Следствие констатировало самоубийство, хотя мать Тьюринга и многие его коллеги не верили в это: уж слишком много у него было планов, хотя после суда ему запретили работать в секретных компьютерных лабораториях.

Тьюрингу был всего сорок один год.

В связи с работой Тьюринга [13] уместно вспомнить одну давнюю дату.

В этом году исполнилось 60 лет со дня опубликования труда швейцарца Абрама Трамбле «Мемуары к истории одного рода пресноводных полипов с руками вместо рогов».

Речь в «Мемуарах» шла об обыкновенной гидре, которую проходят в школьном курсе зоологии. Гидра (зоологическая, а не мифологическая, с которой сражался Геракл) была открыта 300 лет назад. В 1703 году в трудах Лондонского Королевского общества было опубликовано очередное письмо А. Левенгука, нашедшего на листочке водного растения вблизи голландского г. Делфта маленькое существо, которое втягивало и сокращало свое тельце, шевеля длинными рогами. Затем публикация Трамбле, в которой он не только описал строение гидры (кстати, именно он впервые использовал известное из греческой мифологии имя «гидра» применительно к живому организму, хотя официальное латинское название *Nyctea* было присвоено ему только в 1858 г. К. Линнеем), но также исследовал его питание, поведение и размножение. Трамбле осуществил блестящие по замыслу и технике опыты по регенерации и другим аспектам экспериментальной биологии гидры. Удивительно, но работы Трамбле были не просто замечены современниками, а пользовались громадным успехом, их обсуждали во всей Европе, отыскивали гидр и пытались воспроизводить эксперименты. С мемуаров Трамбле началась не только история изучения гидр, но и история всей экспериментальной биологии. Гидра – классический экспериментальный объект в науке о морфогенезе, такой же как дрозофила в генетике.

И последняя дата.

8 сентября 1989 года скончался Лев Альбертович Вайнштейн – один из ведущих физиков-теоретиков, которому принадлежат ставшие классическими работы по теории дифракции, СВЧ-электронике, теории колебаний и волн и ряду многих других вопросов радиофизики.

Лев Альбертович оказал огромное влияние на развитие саратовской школы по радиофизике и электронике. Многие из его работ впервые были доложены в виде

лекций на саратовских зимних школах (см., например, работы, непосредственно относящиеся к нелинейной динамике, [14-16]).

Не все упомянутые в общем списке даты нашли отражение в лекции. Некоторые из них были ранее отображены в журнале «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика» – в статьях и в оформлении обложек. О Леониде Исааковиче Мандельштаме написано так много, что нет смысла заниматься пересказом. Кстати, недавно вышла прекрасная статья [17], представляя которую, академик В.Л. Гинзбург написал: «Я принадлежу к числу уже очень немногих, кто слушал лекции Л.И. Мандельштама (к сожалению, последние – он скончался 27 ноября 1944 года в Москве) и имел честь и счастье разговаривать с ним о науке, поэтому беру на себя смелость рекомендовать читателям публикуемую ниже статью. Она информативна и правдива». Что касается нерасшифрованных дат 1954, 1974, 1979 годов, то они, несомненно, связаны с работой Тьюринга и невыполненной программой его исследований.

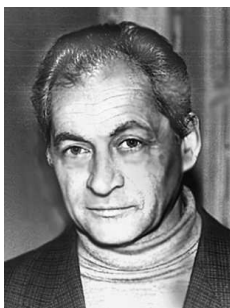
В целом автор старался опираться не на общеизвестные факты.

### Библиографический список

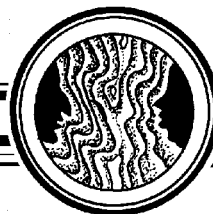
1. *Трубецков Д.И.* Введение в синергетику. Хаос и структуры. М.: Едиториал УРСС, 2004, 240 с.
2. *Сажере Ю., Адамар Ж., де Бройль Луи.* Анри Пуанкаре. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 64 с.
3. *Рюэль Д.* Случайность и хаос. Москва – Ижевск: РХД, 2001, 192 с.
4. *Hadamard J.* Les surfaces a courbures opposes et leurs lignes geodesicues// J.Maht. pures et appl. 1998, Vol. 4. P. 27-73.
5. *Трубецков Д.И.* «След вдохновений и трудов упорных»: Лекции. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2001, 104с.
6. *Scott Russel J.* Report of waves// Proc. Roy. Soc. Edinburg, 1834, p.319-320.
7. *Смирнов Г.В.* Рожденные вихрем. М.: Знание, 1982, 192 с. (Жизнь замечательных идей).
8. *Свердлов Е.Д.* Возвращение преподобного Томаса Мальтуса // Вестник РАН. 2004. Т. 74, № 9. С. 802-812.
9. *Malthus T.R.* An essay on the principle of populatin as it affects the future improvement of society. 1798. <http://www.faculty.rsu.edu/felvell/Theorists/Malthus/essay2.htm>.
10. *Raven P.H.* Science, Substainability, and the Human Prospect. Presidential Address // Science. 2002, v. 297, p. 954-958.
11. *Ландау Л.Д.* О природе турбулентности // Докл. АН СССР. 1944. Т. 44, № 8. С. 339-342.
12. *Тьюринг А.М.* Может ли машина мыслить? Саратов. Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1999. 100 с.
13. *Turing A.M.* Chemical foundations of morfogenesis // Philos. Trans. Roy. Soc. London. 1952. Vol. 237. P. 37-72.



14. *Вайнштейн Л.А.* Распространение импульсов: Лекции по электронике СВЧ (3-я школа-семинар инженеров), книга 5, Изд-во Саратов. ун-та, 1974. С. 3-87.
15. *Вайнштейн Л.А., Вакман Д.Е.* Аналитический сигнал в теории колебаний и волн: Лекции по электронике СВЧ (4-я школа-семинар инженеров), книга 2, Изд-во Саратов. ун-та, 1978. с. 3-43.
16. *Вайнштейн Л.А., Вакман Д.Е.* Разделение частот в теории колебаний и волн. М.: Наука, 1983. 288 с.
17. *Горелик Г.В.* Леонид Мандельштам и его школа: К 125-летию со дня рождения // Вестник Российской Академии Наук, 2004. Т. 74, №10. С. 932-945.



*Трубецков Дмитрий Иванович* – родился в Саратове (1938). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники и волновых процессов СГУ, профессор, член-корреспондент Российской Академии наук, заслуженный деятель науки РФ. В Саратовском государственном университете в разное время подготовил и прочитал общие курсы лекций «Основы электроники сверхвысоких частот», «Квантовая электроника», «Методы математической оптимизации», «Теория волновых процессов», а также специальные курсы «Введение в специальность (радиофизика и электроника)», «Теория СВЧ-электронных приборов О- и М-типа», «Вакуумная микроэлектроника», «Высокочастотная релятивистская электроника», «Хаос и структуры», «Линейные волны», «Нелинейные волны». Некоторые из курсов читал в Санкт-Петербургском государственном техническом университете и Ростовском государственном университете. Научный руководитель Лицея прикладных наук СГУ. Соросовский профессор (1994, 1995). Автор 9 учебных пособий, вышедших за последнее десятилетие.



Изв. вузов «ПНД», т. 13, № 1-2, 2005

**Юрий Васильевич Гуляев**  
**К 70-летию со дня рождения**

18 сентября 2005 года исполняется 70 лет академику Юрию Васильевичу Гуляеву – ученому с мировым именем, крупному организатору науки.

После окончания в 1958 году Московского физико-технического института, получив диплом с отличием, он поступил в аспирантуру Института радиотехники и электроники Академии наук СССР (ИРЭ АН СССР). С 1955 года по настоящее время Ю.В. Гуляев работает в ИРЭ АН СССР (ныне Российской академии наук, ИРЭ РАН)

сначала в качестве студента-практиканта (1955-1958), аспиранта (1958-1960), затем младшего (1960-1965), старшего научного сотрудника (1965-1966), заведующего лабораторией (1966-1972), заместителя директора (1972-1988) и директора (с 1988).

В 1979 году Ю.В. Гуляев был избран членом-корреспондентом АН СССР, а в 1984 году – действительным членом (академиком). С 1992 года Ю.В. Гуляев – член Президиума РАН, в настоящее время – заместитель академика-секретаря Отделения информационных технологий и вычислительных систем (ОИТВС) РАН, руководитель Секции вычислительных, локационных, телекоммуникационных систем и элементной базы.

Академик Ю.В. Гуляев – специалист в области радиофизики, радиотехники, электроники и информатики. Он один из создателей таких новых научных направлений, как акустоэлектроника, акустооптика, спинволновая электроника, биомедицинская радиоэлектроника. Им впервые была высказана идея использования поверхностных акустических волн (ПАВ) для обработки сигналов и предложена слоистая структура пьезоэлектрик – полупроводник в качестве базовой конструкции радиоэлектронных компонентов.

Ю.В. Гуляевым (независимо и несколько ранее американского физика Блюстейна) был открыт новый фундаментальный тип ПАВ в пьезоэлектрических материалах, которые известны в мировой науке как волны Гуляева – Блюстейна.

Ю.В. Гуляевым вместе с сотрудниками был изучен новый класс кинетических явлений в проводящих твердых телах, связанный с увлечением электронов акустическими волнами, в частности, открыт акустомагнетоэлектрический эффект (диплом на открытие №133), исследованы резонансные и нелинейные акустооптические эффекты в проводящих и активных средах, изучено взаимодействие спиновых волн с электронами в ферромагнетиках и слоистых структурах ферромагнетик – полупроводник, предсказана зависимость фотопроводимости от поляризации падающего излучения, предсказана и впервые в мире экспериментально получена полевая автоэмиссия электронов в вакуум из углеродных нанотрубных структур.

Ю.В. Гуляевым с коллегами были проведены прецизионные измерения физических полей и излучений человека с целью создания новых методов ранней неинвазивной медицинской диагностики. Им совместно с сотрудниками ИРЭ РАН и Института проблем комплексного освоения недр (ИПКОН) выдвинута и реализована на практике идея использования мощных электромагнитных импульсов для добычи благородных металлов из руд и конгломератов, когда обычные методы оказываются экономически не выгодными. Все перечисленные и другие научные результаты исследований Ю.В. Гуляева, его коллег и учеников находят широкое применение в современных системах обработки, хранения и передачи информации и других областях народного хозяйства.

Академик Ю.В. Гуляев ведет большую научно-организационную и общественную работу. Вместе с другими членами Президиума РАН он участвует в координации фундаментальных и прикладных исследований в области радиотехники, электроники, информатики, биомедицинской радиоэлектроники.

Ю.В. Гуляев внес определяющий вклад в становление и развитие Саратовского научного центра РАН (СНЦ РАН) председателем Президиума, которого он является. Хотелось бы особо сказать о чрезвычайно тесной и плодотворной научной и производственной связи Ю.В. Гуляева с нашим городом. Саратов – один из ведущих

центров СВЧ-электроники нашей страны. И когда во второй половине 1960-х годов в Саратове начали интенсивно развиваться работы по одному из новых и перспективных направлений радиоэлектроники – СВЧ-акустоэлектронике, промышленным и исследовательским предприятиям города понадобилась эффективная поддержка научных исследований со стороны ведущих акустоэлектроников СССР. Связи между одним из крупнейших предприятий города НИИ «Волна» (ныне ФГУП «НПП «Алмаз» и ЗАО «Алмаз-Фазотрон») с коллективом ученых-акустиков из ИРЭ АН СССР, возглавляемым Ю.В. Гуляевым, впервые были установлены доктором физико-математических наук Э.А. Семеновым. Затем усилиями профессора В.Н. Шевчика, являющегося главой школы СВЧ-электроников Саратова, наладились тесные и исключительно плодотворные контакты между Ю.В. Гуляевым с коллективом московских и фрязинских акустиков и Саратовским государственным университетом, научно-производственным объединением «Тантал», а также рядом других организаций Саратова. В начале 1970-х годов Ю.В. Гуляев ознакомился с приоритетными работами, ведущимися в Саратовском государственном университете в области вакуумной микроэлектроники, и горячо поддержал данное направление. Причем в дальнейшем он начал активную работу в этом направлении, которая продолжается и сейчас. Здесь следует особо подчеркнуть, что услышать в те годы от одного из ведущих специалистов страны в области твердотельной и полупроводниковой электроники слова поддержки в адрес жестко конкурирующей с ней вакуумной микроэлектроники было практически для всех электроников, твердотельщиков и вакуумщиков, крайне неожиданно, поскольку тогда борьба между этими направлениями шла не на жизнь, а на смерть. Но именно в этом шаге проявилась не только поразительная широта взглядов крупного ученого, но и его твердость и способность верно оценивать и предсказывать перспективы развития различных направлений науки и техники на будущее. С тех пор у Ю.В. Гуляева сложились чрезвычайно теплые научные и чисто человеческие контакты с учеными и производственниками Саратова и, по словам самого Ю.В. Гуляева, Саратов стал для него городом, в который его постоянно тянет, где он прекрасно себя чувствует и который стал для него родным. Естественно, что на выборах Ю.В. Гуляева в члены-корреспонденты и академики АН СССР научная общественность Саратова единодушно поддержала его выдвижение.

К 1980-м годам в Саратове по идеям Ю.В. Гуляева и его сотрудников из ИРЭ АН СССР на научно-производственном объединении «Алмаз» уже выпускалась акустоэлектронная продукция для различных гражданских и военных применений на миллиарды рублей. А в начале 1980-х годов коллектив ученых и конструкторов этого предприятия совместно с сотрудниками Ю.В. Гуляева из ИРЭ АН СССР был удостоен звания лауреатов Государственной премии СССР. Сейчас такие акустоэлектронные приборы выпускаются в ЗАО «Алмаз-Фазотрон», используются в различных областях и являются ключевыми в системах управления самолетами МИГ-29 и СУ-27.

В то же время, многие фундаментальные прикладные работы в области вакуумной микро- и наноэлектроники, выполненные при участии Ю.В. Гуляева в Саратове, имеют признанный мировой приоритет, а приборы, созданные на их основе, широко используются в радиолокации, системах космической связи, радионавигации, телеметрии, метрологии. Причем последние работы открывают пути развития экологически чистых высокояркостных, с высоким разрешением и высоким качеством

изображения видеодисплеев и индикаторов с автоэлектронной эмиссией и нового поколения ряда СВЧ электронных приборов и вакуумных интегральных схем.

Ю.В. Гуляев – Президент Международного Союза научных и инженерных обществ стран СНГ, Президент Российского Союза научных и инженерных обществ, Президент Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи им. А.С. Попова, главный редактор журналов «Радиотехника и электроника», «Радиотехника», «Биомедицинская радиоэлектроника», «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика», член редколлегии журнала «Успехи физических наук».

Ю.В. Гуляев – почетный член Международного Института инженеров по электронике и электротехнике (Fellow of IEEE), председатель Российской секции IEEE, вице-президент Международной Федерации Инженерных Организаций (WFEO), иностранный член Польской академии наук.

За заслуги в науке и научно-организационной деятельности Ю.В. Гуляев в 1979 году был удостоен Премии Европейского физического общества, дважды (в 1974 и 1984) удостоивался Государственных премий СССР, а в 1993 году – Государственной премии России. В 1995 году награжден высшей наградой РАН в области радиоэлектроники - Золотой медалью им. А.С. Попова. Ю.В. Гуляев награжден орденом «Знак почета» (1976), орденом Трудового Красного Знамени (1985), орденами «За заслуги перед Отечеством» IV степени (1995) и III степени (1999), медалями СССР и России.

*Научная общественность Саратова, коллеги и сотрудники СНЦ, редколлегия журнала «Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика» поздравляют Юрия Васильевича Гуляева с Юбилеем и желают ему крепкого здоровья, неиссякаемой энергии и больших успехов в работе.*