

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

научно-технический журнал

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 19, № 1, 2011, Саратов

СО Д Е Р Ж А Н И Е

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

- Павлов А.Н., Филатова А.Е.* Метод эмпирических мод и вейвлет-фильтрация: применение в задачах геофизики 3
- Павлова О.Н., Павлов А.Н., Анисимов А.А., Назимов А.И., Сосновцева О.В.* Синхронизация колебаний в динамике ансамблей корковых нефронов... 14
- Шабунин А.В., Литвиненко А.Н., Астахов В.В.* Управление мультистабильностью с помощью би-фазного резонансного воздействия 25
- Жданова О.Л., Бажина Д.А.* Режимы динамики генетической структуры и численности в эволюционной модели двухвозрастной популяции 40

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. СОЛИТОНЫ

- Иванченко М.В.* Модовая локализация в цепочках Ферми–Пасты–Улама с произвольным порядком нелинейности 55

НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ

- Каминский А.В., Шноль С.Э.* Космофизические факторы в спектре амплитуд флуктуаций в броуновском движении 63

Материалы IX Международной школы «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, Россия, 4–9 октября 2010

- Иванченко М.В.* *q*-Бризеры: от парадокса Ферми–Пасты–Улама до аномальной теплопроводности 73
- Короновский А.А., van Luijelaar G., Овчинников А.А., Ситникова Е.Ю., Храмов А.Е.* Диагностика и анализ осцилляторной нейросетевой активности головного мозга с использованием непрерывного вейвлетного преобразования 86
- Журавлев М.О., Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* Перемежающееся поведение вблизи границы фазовой хаотической синхронизации на различных временных масштабах 109
- Матросов В.В., Шмелев А.В.* Нелинейная динамика кольца из трех фазовых систем 123

КОНФЕРЕНЦИИ. СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ. ШКОЛЫ

- IX Международная школа «Хаотические автоколебания и образование структур», Россия, Саратов, 4–9 октября 2010 137
- II Всероссийская конференция «Нелинейная динамика в когнитивных исследованиях», Нижний Новгород, 18–21 мая 2011 144

ИЗ КНИГ И ЖУРНАЛОВ

- Борис Павлович Белоусов (1893–1970) и его колебательная реакция 147

C O N T E N T S

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATIONS AND WAVE THEORY

<i>Pavlov A.N., Filatova A.E.</i> Method of empirical modes and wavelet-filtering: application in geophysical problems	3
<i>Pavlova O.N., Pavlov A.N., Anisimov A.A., Nazimov A.I., Sosnovtseva O.V.</i> Synchronization of oscillations in the dynamics of ensembles of surface nephrons	14
<i>Shabunin A.V., Litvinenko A.N., Astakhov V.V.</i> Controll of multistability by means of bi-phase resonance force	25
<i>Zhdanova O.L., Bazhina D.A.</i> The modes of genetic structure and population size dynamics in evolution model of two-aged population	40

NONLINEAR WAVES. SOLITONS

<i>Ivanchenko M.V.</i> Mode localization in Fermi–Pasta–Ulam chains with arbitrary degree of nonlinearity	55
---	----

INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

<i>Kaminsky A.V., Shnoll S.E.</i> Cosmophysical factors in the fluctuations amplitude spectrum of Brownian motion	63
---	----

Transactions of the IX International School «Chaotic Oscillations and Pattern Formation», Saratov, Russia, October 4–9, 2010

<i>Ivanchenko M.V.</i> <i>q</i> -Breathers: from the Fermi–Pasta–Ulam paradox to anomalous conductivity	73
<i>Koronovskii A.A., van Luitelaar G., Ovchinnikov A.A., Sitnikova E.Yu., Hramov A.E.</i> Diagnostics and analysis of oscillatory neuronal network activity of brain with continuous wavelet analysis	86
<i>Zhuravlev M.O., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Hramov A.E.</i> Intermittency near phase synchronization boundary at different time scales	109
<i>Matrosov V.V., Shmelev A.V.</i> Nonlinear dynamics of a ring of three phase systems .	123

CONFERENCES. MEETINGS. SYMPOSIA. SCIENTIFIC SCHOOLS

IX International school on «Chaotic oscillations and pattern formation», Russia, Saratov, October 4–9 2010	137
II All-Russian Conference «Nonlinear Dynamics in Cognitive Research», N. Novgorod, May 18–21 2011	144

FROM BOOKS AND JOURNALS

B.P. Belousov (1893–1970) and his oscillatory reaction	147
--	-----



МЕТОД ЭМПИРИЧЕСКИХ МОД И ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРАЦИЯ: ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ГЕОФИЗИКИ

А.Н. Павлов, А.Е. Филатова

Представлены теоретические основы метода эмпирических мод, являющегося одним из новых способов частотно-временного анализа процессов с меняющимися во времени характеристиками. Показано, что применение этого подхода совместно с вейвлетной фильтрацией позволяет детально изучить структуру многочастотных регистрируемых сигналов, наблюдаемых при выполнении сейсморазведки.

Ключевые слова: Мгновенная частота, метод эмпирических мод, вейвлет-анализ, сейсморазведка.

Введение

Проблема анализа структуры нестационарных процессов при наличии помех является актуальной как при проведении теоретических научных исследований в разных областях естествознания, так и при изучении экспериментальных данных в различных практических приложениях науки и техники. Несмотря на то, что за последние десятилетия был достигнут значительный прогресс в развитии методов изучения динамики систем с меняющимися во времени характеристиками [1–6], задача развития нового и совершенствования уже существующего инструментария для адекватной расшифровки информации, содержащейся в сигналах таких систем, остается одной из важнейших для экспериментальных исследований. В значительной степени это связано с ограничениями применяемых в настоящее время специальных методов анализа нестационарной динамики. Так, в частности, метод анализа флуктуаций относительно тренда [1] неприменим для исследования ритмической активности (или требует наличия большого объема выборки при переходе от исходных данных к точечным процессам). Оконный спектральный анализ не обеспечивает качественной частотно-временной локализации при изучении нестационарных многочастотных режимов колебаний [5, 6]. Преобразование Вигнера–Вилля приводит к появлению интерференций, значительно снижающих практическую ценность полученных результатов, а их устранение путем сглаживания с подходящим ядром

ухудшает частотно-временное разрешение [7, 8]. Метод аналитического сигнала, использующий преобразование Гильберта, применим для узкополосных процессов и формально может использоваться в исследованиях нестационарных режимов колебаний, но при локальных смещениях среднего уровня данный подход может приводить к нефизичным результатам, таким как появление отрицательных значений мгновенной частоты.

Отдельно следует выделить вейвлет-анализ, обладающий наиболее широкими возможностями для изучения процессов с меняющимися во времени характеристиками и уже давно воспринимаемый как метод математического микроскопа, способный рассмотреть особенности структуры сложных сигналов в широком диапазоне масштабов наблюдения. Однако и этот подход также не лишен недостатков, среди которых можно упомянуть проблему выбора базиса, появление интерференций, которые могут быть ошибочно приняты за частотную модуляцию [9], необходимость подбора параметров «материнского» вейвлета для обеспечения компромисса между частотным и временным разрешением [10, 11] и т.д. В связи с этим несомненный интерес вызывает развитие комбинированных алгоритмов, использующих вейвлеты в качестве одного из этапов анализа экспериментальных данных. Такие подходы широко применяются, например, в задачах распознавания образов (вейвлетные нейронные сети) [12, 13].

Сравнительно недавно был предложен альтернативный метод анализа нестационарных процессов, использующий принцип разложения на эмпирические моды (*empirical mode decomposition*) [14], который хорошо зарекомендовал себя при решении широкого круга задач [15–17]. Согласно результатам ряда исследований, метод эмпирических мод превосходит вейвлет-анализ с точки зрения частотно-временного разрешения [18, 19]. Этот подход к тому же не требует выбора базиса, что является одним из его существенных достоинств [20, 21]. Следует отметить, что обоснование преимуществ метода эмпирических мод с точки зрения разрешения в настоящее время ограничивается отдельными иллюстративными примерами, так как для этого подхода в меньшей степени разработан математический аппарат (в отличие от вейвлет-анализа, теория которого развита значительно лучше). Разложение на эмпирические моды представляется весьма интересным для практических приложений, и не случайно этот метод приобретает в настоящее время все большую популярность.

Яркий пример активного и успешного внедрения в практическое использование новейших методик и алгоритмов анализа и фильтрации сложных сигналов демонстрируют камеральные геофизические работы. На сегодняшний день наиболее активно развивающимися областями геофизики являются отрасли, связанные с поиском и разведкой залежей различных природных ископаемых, в наибольшей степени нефтяных и газовых месторождений. Лидирующее место по объему ежегодных полевых поисковых и разведочных работ с последующими камеральными исследованиями полученных данных занимает сейсмическая разведка методом отраженных волн. Обеспечивая весьма большую глубинность исследований земной коры при достижении высокой детальности информации, сейсморазведка играла и играет важную, а подчас и превалирующую роль в задачах прогнозирования нефтегазоносности глубоко залегающих отложений. Применяемые для изучения зарегистрированной сейсмической информации методики обработки определяют финальную успешность всех проводимых этапов сейсмической разведки и, в конечном итоге, соответствующие экономические показатели. Большая стоимость проводимых полевых исследований требует высокого качества обработки экспериментальных материалов в целях получения максимально возможной информации о литологическом строении земной

кору района работ. Таким образом, обработка нестационарных временных данных полевых работ играет роль своеобразной «площадки» для испытания современных алгоритмов и методов анализа, фильтрации и выделения различных компонент сложных нестационарных сигналов.

В рамках данной статьи рассмотрены основные принципы предложенного в [14] метода эмпирических мод на примере анализа сигналов геофизических сейсморазведочных работ. Показано, что совместное использование метода эмпирических мод и вейвлетной фильтрации позволяет эффективнее анализировать структуру данных сейсморазведки.

1. Метод эмпирических мод

Прежде чем приступить к описанию метода эмпирических мод, приведем некоторые соображения общего характера, объясняющие целесообразность рассмотрения этого нового подхода в задачах анализа структуры сигналов. С этой целью начнем с самого простого примера – гармонических колебаний

$$x(t) = \sin t, \quad (1)$$

для которых легко вычислить преобразование Гильберта $x^H(t) = \cos t$, постоянные (в данном случае равные 1) значения мгновенной амплитуды A и мгновенной частоты ω , а также линейный рост фазы φ . Гармонические колебания можно изобразить в виде окружности на плоскости (x, x^H) .

Ситуация меняется, если происходит смещение среднего уровня на произвольную величину a

$$x(t) = a + \sin t. \quad (2)$$

Если $|a| < 1$ (рис. 1), то это будет приводить к тому, что скорость изменения фазы перестанет быть постоянной для разных значений φ , следовательно, мгновенная частота ω будет варьироваться, демонстрируя осциллирующий характер зависимости во времени. Если же $|a| > 1$, то наблюдается более сложная ситуация – фаза колебаний не выходит за границы диапазона $[-\pi/2, \pi/2]$; участки роста фазы сменяются участками ее уменьшения, что будет сопровождаться появлением отрицательных значений мгновенной частоты $\omega(t) = d\varphi(t)/dt$. Таким образом, мы приходим к нефизичной ситуации. Очевидно, что можно разложить сигнал (2) на две компоненты – постоянную составляющую и гармоническую функцию, для которой корректно оценивается мгновенная частота. Приведенный очень простой пример поясняет целесообразность разложения сигнала на составляющие и выделения так называемых «внутренних мод» (*intrinsic mode functions* [14]), для которых мгновенная частота может быть корректно вычислена в любой момент времени. Сам тер-

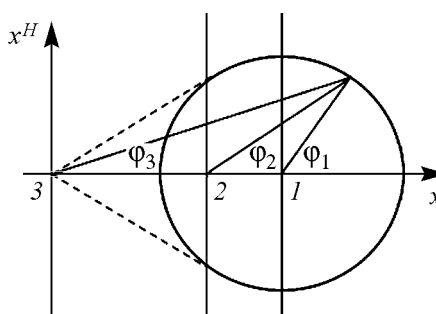


Рис. 1. Представление гармонических колебаний на фазовой плоскости (x, x^H) при различных смещениях среднего уровня: $a = 0$ (уровень 1), $|a| < 1$ (уровень 2), $|a| > 1$ (уровень 3). В последнем случае изменения во времени фазового угла φ_3 ограничены диапазоном, показанном пунктирами

мин «внутренние моды», предложенный в статье [14], связан с тем, что анализируются ритмические составляющие, которые, образно выражаясь, «вложены» в исходный сигнал.

При анализе экспериментальных данных одним из этапов предварительной обработки часто является сведение сигнала к нулевому среднему уровню, что позволяет избавиться от проблем, связанных с некорректным определением мгновенной частоты. Однако это не всегда выполняется для нестационарных процессов, среднее значение которых может меняться и принимать отличные от нуля величины *на локальных участках*. С целью корректного определения мгновенной частоты для компонент c_j , на которые раскладывается сигнал $x(t)$, в рамках метода эмпирических мод предлагается обеспечить выполнение следующих условий:

- 1) должно быть равно нулю локальное среднее значение огибающих, определяемых локальными максимумами функции c_j и локальными минимумами этой функции;
- 2) число пересечений нулевого уровня графиком этой функции и число локальных максимумов (или минимумов) должно совпадать или отличаться не более чем на 1.

Выполнение сформулированных условий при переходе в фазовое пространство обеспечивает вращение фазовой траектории вокруг начала координат и отсутствие фрагментов сигнала, для которых расчеты мгновенной частоты могут привести к нефизичным значениям. Первое условие является новой идеей, высказанной в работе [14]; оно обеспечивает отсутствие нежелательных флуктуаций мгновенных характеристик, вызванных несимметричной формой сигнала.

Чтобы идеология разложения сигнала на эмпирические моды была более понятной, рассмотрим принцип их определения на примере экспериментальных данных. Выберем фрагмент данных сейсмической разведки, описанных в нашей предыдущей работе [22]. На рис. 2 изображен участок одной из трасс сейсмограммы общего пункта возбуждения из первичного полевого материала, полученного на территории Саратовской области (сплошная черная линия). Штриховыми линиями показаны огибающие данного сигнала, построенные путем сплайновой интерполяции локальных максимумов и локальных минимумов. Сплошной серой линией показано среднее значение огибающих $m_1(t)$, которое варьируется относительно нулевого уровня. Для обеспечения равенства нулю этого значения, в рамках метода [14,19] предложено перейти от сигнала $x(t)$ к функции $h_1(t)$

$$x(t) - m_1(t) = h_1(t). \quad (3)$$

Если для полученной функции $h_1(t)$ указанные выше условия выполняются, то ее можно считать «внутренней модой». Однако из-за несимметричности исходного сигнала локальные средние значения $m_{11}(t)$ двух огибающих функции $h_1(t)$ могут по-прежнему отличаться от нуля. Для выполнения первого условия требуется итерационная процедура

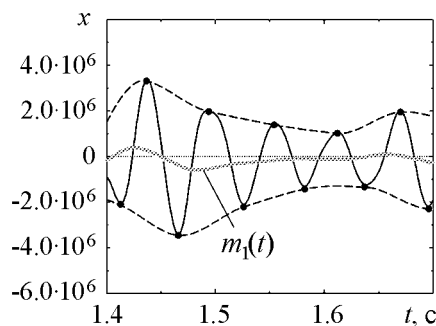


Рис. 2. Иллюстрация принципа вычисления локального среднего уровня на примере данных сейсмо-разведки. Усреднение двух огибающих сигнала (показанных штриховыми линиями) приводит к меняющемуся во времени среднему уровню $m_1(t)$

$$\begin{aligned}
h_1(t) - m_{11}(t) &= h_{11}(t), \\
&\dots \\
h_{1(k-1)}(t) - m_{1k}(t) &= h_{1k}(t),
\end{aligned} \tag{4}$$

после завершения которой будет получена первая эмпирическая мода

$$c_1(t) = h_{1k}(t), \tag{5}$$

отражающая ритмическую динамику, соответствующую минимальному из характерных временных масштабов. После вычитания c_1 из исходного сигнала

$$x(t) - c_1(t) = r_1(t) \tag{6}$$

мы переходим к временной зависимости $r_1(t)$, которая будет отражать информацию о более медленных ритмических составляющих. Продолжая применение итерационной процедуры, можно получить последовательность c_j :

$$r_1(t) - c_2(t) = r_2(t), \dots, r_{n-1}(t) - c_n(t) = r_n(t). \tag{7}$$

Данный процесс завершается, когда $c_n(t)$ или $r_n(t)$ становятся монотонными функциями, в которых уже нельзя идентифицировать осциллирующие составляющие [14]. Таким образом, исходный сигнал $x(t)$ представляется в виде суммы эмпирических мод c_j и функции, описывающей тренд, r_n :

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) + r_n(t). \tag{8}$$

Фактически, авторы работы [14] предложили альтернативный вариант разложения сигнала на составляющие, имеющие разные временные масштабы, для каждой из которых можно оценить мгновенную амплитуду, частоту и фазу, воспользовавшись методом аналитического сигнала. При анализе набора функций c_j мы имеем дело с гильбертовским спектром, а сама идеология частотно-временного представления многочастотного процесса с использованием эмпирических мод и гильбертовского спектра часто называется преобразованием Гильберта–Хуанга, расширяющим возможности применения метода аналитического сигнала на процессы, не являющиеся узкополосными [19].

Достаточно простая идея разложения процесса на эмпирические моды оказалась весьма эффективной на практике, хорошо зарекомендовав себя во многих прикладных задачах. Об этом свидетельствует большое число ссылок в сети Интернет на работы, в которых применение метода эмпирических мод позволило эффективно изучать частотно-временную динамику колебательных систем с меняющимися во времени характеристиками. Ряд ключевых публикаций по данной теме указан в монографии [19]. В соответствии с приведенными в этой монографии результатами, метод эмпирических мод превосходит вейвлет-анализ с точки зрения частотно-временного разрешения. Он не требует априорной информации (не нужно выбирать базисные функции, осуществлять настройку «анализатора», как в случае вейвлет-преобразования). В [18] высказано предположение, что метод эмпирических мод эффективнее для изучения нестационарных модулированных колебаний.

Как уже отмечалось во введении, к числу недостатков данного подхода относится отсутствие завершенной теории, которая еще находится в стадии разработки. Но если не акцентировать внимание на этом обстоятельстве, нельзя не признать, что появившийся новый инструмент исследования структуры сигналов обладает существенным потенциалом. Об этом свидетельствует ряд сравнительных исследований метода эмпирических мод и вейвлет-анализа, в которых было показано, что первый из них позволяет решать задачи, выходящие за границы применимости второго (см., например, [19]).

2. Результаты

2.1. Тестовые примеры. В рамках данной работы нами использовалась программа расчета эмпирических мод, подготовленная научной группой П. Фландрина (<http://perso.ens-lyon.fr/patrick.flandrin/emd.html>). То обстоятельство, что данный подход не уступает вейвлет-анализу с точки зрения частотно-временного разрешения, можно проиллюстрировать на простом примере нестационарной динамики – переключении частоты колебаний (рис. 3). Для усложнения примера дополнительно производится смещение среднего уровня. Как видно из рисунка, лишь

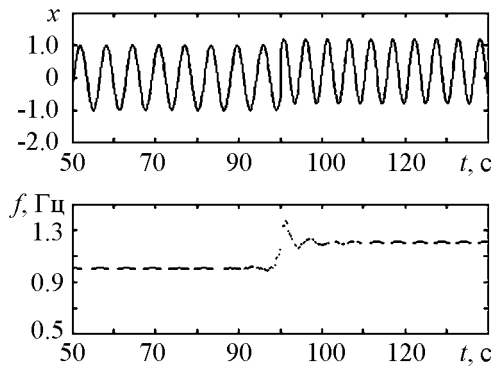


Рис. 3. Пример сигнала с переключением частоты (а) и результаты расчета мгновенной частоты колебаний (б)

в окрестности момента переключения в пределах одного периода колебаний погрешность оценки мгновенной частоты оказывается сравнительно большой. Это сопоставимо с оценками, которые можно сделать на основе вейвлет-преобразования. Несколько иллюстраций более качественной (по сравнению с вейвлетами) идентификации мгновенных характеристик нестационарных режимов колебаний приводятся в [18, 19].

Обратимся к другому тестовому примеру и проанализируем динамику известной модели Ресслера:

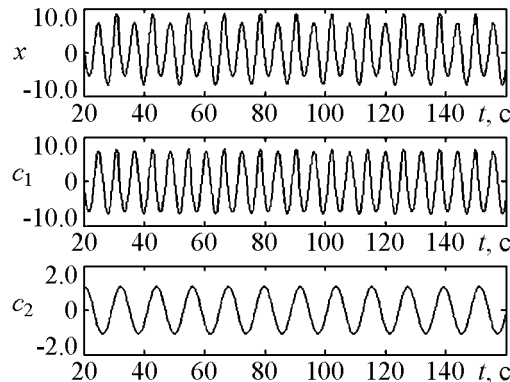


Рис. 4. Периодические колебания (цикл периода 2) в динамике модели Ресслера и первые 2 эмпирические моды

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y - z, \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay, \\ \frac{dz}{dt} &= b + z(x - c). \end{aligned} \quad (9)$$

При значении параметров $a = 0.15$, $b = 0.2$, $c = 5.0$ решением системы (9) являются периодические колебания (цикл удвоенного периода). На рис. 4 представлена временная реализация $x(t)$ и две эмпирические моды,

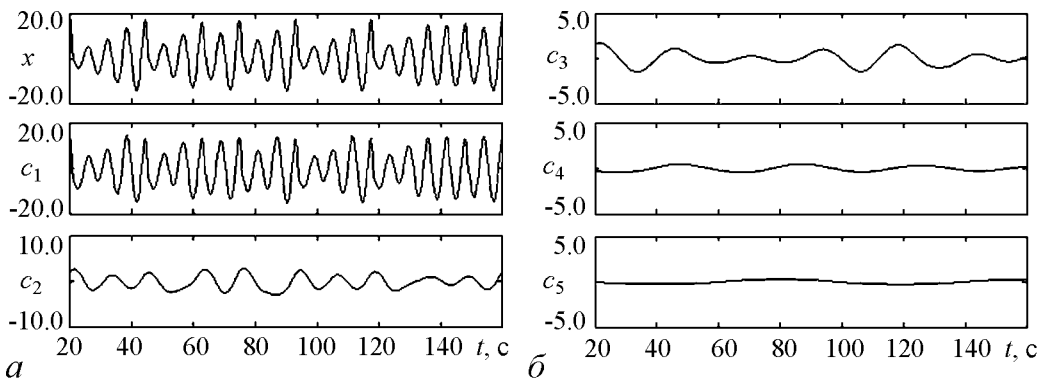


Рис. 5. Хаотические колебания в динамике модели Ресслера и первые 5 эмпирических мод

идентифицируемые в данном сигнале и соответствующие колебаниям с частотами, различающимися в 2 раза. В отличие от разложения на гармонические составляющие в рамках фурье-анализа, эмпирические моды могут иметь произвольную форму в зависимости от формы исходного сигнала $x(t)$. Это наглядно можно видеть на примере хаотического режима колебаний в модели (9). На рис. 5 изображена временная зависимость $x(t)$, полученная при значениях управляющих параметров $a = 0.15$, $b = 0.2$, $c = 10.0$, и первые 5 эмпирических мод. Заметим, что последние из них вносят незначительный вклад в суммарный сигнал (8). Даже визуально хорошо заметно, что полученные зависимости c_j соответствуют колебаниям с разными временными масштабами. Для каждой зависимости можно ввести в рассмотрение мгновенную амплитуду, мгновенную частоту и фазу.

2.2. Анализ данных сейсморазведки. Обратимся теперь к анализу экспериментальных данных, в качестве которых мы выберем трассу сейсмограммы общего пункта возбуждения, фрагмент которой был представлен на рис. 2. Помимо полезного сигнала трасса сейсмограммы содержит помехи (поверхностные и звуковые волны), имеющие большую амплитуду и локализованные в диапазоне от 1.0 до 1.3 секунд. Так как данные помехи превосходят по мощности сейсмический сигнал, проведение его детального анализа в их присутствии представляется достаточно сложной задачей, и для адекватной расшифровки информации, содержащейся в сейсмических данных, необходимо вначале осуществить фильтрацию помеховых волн. Такая фильтрация должна, с одной стороны, быть узкополосной (так как частотные диапазоны полезного сигнала и помехи являются близкими). С другой стороны, фильтрацию нужно проводить только в пределах ограниченного по времени фрагмента экспериментальных данных.

Применение фильтров на основе фурье-анализа для устранения локализованных особенностей исследуемого процесса неэффективно. В данной ситуации целесообразнее применять вейвлетную фильтрацию; такой подход был рассмотрен в рамках нашей предыдущей статьи [22]. В данной работе используется более быстрый вариант процедуры фильтрации на основе дискретного вейвлет-преобразования (вейвлеты Добеши D^8) [3] и амплитудного детектирования вейвлет-коэффициентов (приравнивания нулю значений коэффициентов, превышающих заданный пороговый уровень). Несмотря на то, что такая фильтрация приводит к менее гладкой времен-

ной зависимости отфильтрованного процесса по сравнению с непрерывным преобразованием, это обстоятельство не является принципиальным для рассматриваемой задачи (слабая изрезанность формы сигнала может оказывать влияние на высокочастотную область спектра – диапазон, который не представляет практического интереса в сейсморазведке). В то же время возможность многократно (в десятки или сотни раз) повысить скорость вычислений важна для анализа волновых полей сейсмограммы, содержащих большое количество трасс.

На рис. 6, *а* проиллюстрирована исходная трасса из первичного полевого материала, полученного на территории Саратовской области. Анализ этой трассы позволяет выделить 7 эмпирических мод и получить временные зависимости мгновенных амплитуд и частот каждой из них на основе преобразования Гильберта. Представление полученных результатов на плоскости аналогично рассмотрению «хребтов» вейвлет-преобразования. Для получения более полной информации соответствующие зависимости лучше представлять в виде оттенков цвета, кодирующих информацию о мгновенных амплитудах. Результаты анализа эмпирических мод, выделенных в исходном сигнале, представлены на рис. 6, *б*. Темным цветом в диапазоне 1.0...1.3 с отчетливо выделяются мгновенные частоты, соответствующие наиболее мощным колебательным процессам (преимущественно, помехам). Отметим, что их идентификация по одной из трасс практически невозможна, и для определения участков времени, в которых наблюдаются поверхностные и звуковые волны, необходимо рассматривать полную сейсмограмму, содержащую сведения о распространении данных волн от одного пункта приема к другому [22]. Поскольку помехи значительно превосходят по амплитуде полезный сигнал, они будут оказывать существенное влияние на вычисляемые эмпирические моды. Для уменьшения этого влияния и представляется целесообразным анализировать экспериментальные данные после проведения вейвлетной фильтрации. Рис. 7 иллюстрирует результаты анализа частотно-временной динамики отфильтрованного процесса методом эмпирических мод. Теперь уже можно значительно более четко изучать структуру полезного сигнала сейсмограммы, идентифицируя и анализируя динамику ритмических процессов, регистрируемых в конкретном пункте приема.

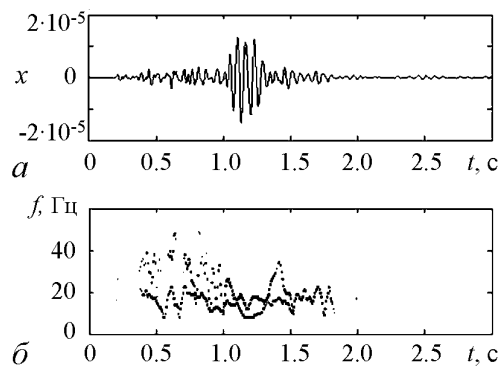


Рис. 6. Трасса сейсмограммы (*а*) и результаты ее частотно-временного анализа на основе метода эмпирических мод (*б*)

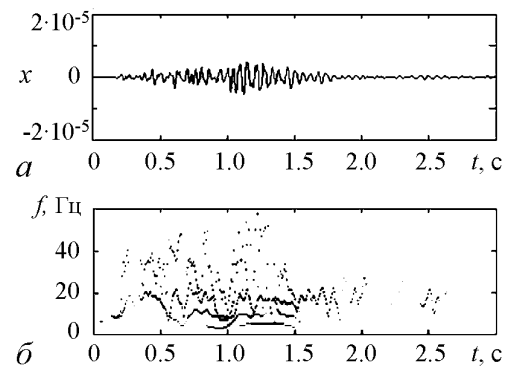


Рис. 7. Трасса сейсмограммы после вейвлет-фильтрации помех (*а*) и результаты ее частотно-временного анализа на основе метода эмпирических мод (*б*)

Заключение

В данной работе представлена идеология метода эмпирических мод, который является одним из новых подходов в задачах анализа частотно-временной динамики нестационарных процессов. Показано, что совместное использование данного подхода и вейвлетной фильтрации позволяет исследовать структуру многочастотных нестационарных режимов колебаний, наблюдаемых в данных сейсморазведки. Преимущество такого способа анализа состоит в том, что он позволяет изучать нестационарные колебательные процессы с близкими значениями частоты, обеспечивая лучшее частотное разрешение между сосуществующими ритмами колебаний. Если бы в качестве инструмента исследования структуры экспериментальных данных использовалось непрерывное вейвлет-преобразование, разрешения метода было бы недостаточно для разделения близких по частоте ритмических процессов, что приводило бы к появлению паразитной интерференции [5,6]. В то же время, проведение предварительной фильтрации экспериментальных данных с применением вейвлетных фильтров позволяет избавляться от больших по амплитуде помех, оказывающих влияние на результаты метода эмпирических мод. Сочетание двух рассматриваемых подходов в этом контексте является более эффективным для детального анализа структуры данных сейсморазведки.

Метод эмпирических мод является новым подходом, который только начинает приобретать популярность в экспериментальных исследованиях. И эта популярность вполне оправданна – даже первые попытки его тестирования (см., например, [18,19]) позволили установить, что с помощью метода эмпирических мод можно идентифицировать модуляцию с близкими значениями частот модулирующего и модулируемого процессов (для вейвлет-анализа эти частоты должны отличаться в несколько раз), уменьшать ширину спектральных линий и т.п. Мы рассматриваем метод эмпирических мод как весьма перспективный инструмент исследования частотно-временных характеристик процессов с большим числом временных масштабов. Развитие и широкое применение таких инструментов в экспериментальных исследованиях способно существенно обогатить возможности цифровой обработки сигналов.

Проводимые исследования были поддержаны Министерством образования и науки РФ в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт П633).

Библиографический список

1. Peng C.-K., Havlin S., Stanley H., Goldberger A. Quantification of scaling exponents and crossover phenomena in nonstationary heartbeat time series // Chaos. 1995. Vol. 5. P. 82.
2. Muzy J.F., Bacry E., Arneodo A. The multifractal formalism revisited with wavelets // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1994. Vol. 4, № 2. P. 245.
3. Daubechies I. Ten lectures on wavelets. Philadelphia: S.I.A.M., 1992.
4. Meyer Y. Wavelets: Algorithms and applications. Philadelphia: S.I.A.M., 1993.
5. Mallat S.G. A wavelet tour of signal processing. New York: Academic Press, 1998.

6. Addison P.S. The illustrated wavelet transform handbook: applications in science, engineering, medicine and finance. Bristol; Philadelphia: IOP Publishing, 2002.
7. Flandrin P. Some aspects of non-stationary signal processing with emphasis on time-frequency and time-scale methods // Wavelets / Eds J.M. Combes, A. Grossmann, Ph. Tchamitchian. Springer, Berlin. 1989. P. 68.
8. Flandrin P. Time-frequency and time-scale analysis. San Diego: Academic Press, 1999.
9. Анисимов А.А., Павлова О.Н., Тупицын А.Н., Павлов А.Н. Вейвлет-анализ чирпов // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 5. С. 3.
10. Kaiser G. A friendly guide to wavelets. Boston: Birkhäuser, 1994.
11. Короновский А.А., Храмов А.Е. Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003.
12. Zhang Q., Benveniste A. Wavelet networks // IEEE Trans. Neural Networks. 1992. Vol. 3. P. 889.
13. Zhang J., Walter G.G., Miao Y., Lee W.N. Wavelet neural networks for function learning // IEEE Trans. Signal Proc. 1995. Vol. 43. P. 1485.
14. Huang N.E., Shen Z., Long S.R., Wu M.C., Shih H.H., Zheng Q., Yen N.-C., Tung C.C. and Liu H.H. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis // Proc. R. Soc. London Ser. A. 1998. Vol. 454. С. 903.
15. Coughlin K.T., Tung K.K. 11-year solar cycle in the stratosphere extracted by the empirical mode decomposition method // Adv. Space Res. 2004. Vol. 34. P. 39.
16. Neto E.P.S., Custaud M.A., Cejka C.J., Abry P., Frutoso J., Gharib C., Flandrin P. Assessment of cardiovascular autonomic control by the empirical mode decomposition // Method. Inform. Med. 2004. Vol. 43. P. 60.
17. Wu Z., Huang N.E. A study of the characteristics of white noise using the empirical mode decomposition method // Proc. R. Soc. London, Ser. A. 2004. Vol. 460. P. 1597.
18. Huang N.E., Shen Z., Long S.R. A new view of nonlinear water waves: the Hilbert spectrum // Annu. Rev. Fluid Mech. 1999. Vol. 31. С. 417.
19. Hilbert–Huang transform and its applications / Eds N.E. Huang, S.S.P. Shen. Singapore: World Scientific, 2005.
20. Flandrin P., Goncalvés P. Empirical mode decompositions as data-driven wavelet-like expansion // Int. J. Wavelets Multiresolut. Inform. Process. 2004. Vol. 2. P. 477.
21. Flandrin P., Rilling G., Goncalvés P. Empirical mode decompositions as a filter bank // IEEE Signal Process. Lett. 2004. Vol. 11. P. 112.
22. Филатова А.Е., Артемьев А.Е., Короновский А.А., Павлов А.Н., Храмов А.Е. Успехи и перспективы применения вейвлетных преобразований для анализа нестационарных нелинейных данных в современной геофизике // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 3. С. 3.

Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 12.03.2010

METHOD OF EMPIRICAL MODES AND WAVELET-FILTERING: APPLICATION IN GEOPHYSICAL PROBLEMS

A.N. Pavlov, A.E. Filatova

Theoretical bases of empirical mode decomposition being one of the new methods of time-frequency analysis of processes with time-varying characteristics are discussed. It is shown that application of this approach together with wavelet-filtering allows one to study in details the structure of multicomponent registered signals recorded in prospecting seismology.

Keywords: Instantaneous frequency, empirical mode decomposition, wavelet-analysis, seismic prospecting.



Павлов Алексей Николаевич – родился в Саратове (1973). Окончил физический факультет Саратовского университета по специальности радиофизика и электроника (1995). Кандидат физико-математических наук (1998). В настоящее время работает доцентом на кафедре радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов: анализ временных рядов. Имеет более 80 работ, опубликованных в отечественной и зарубежной печати.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: pavlov_lesha@mail.ru



Филатова Анастасия Евгеньевна – родилась в Саратове (1983). Окончила факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2005). Кандидат физико-математических наук (2008). Старший научный сотрудник лаборатории физики нелинейных явлений отделения физики нелинейных систем Саратовского государственного университета. Область научных интересов – нелинейная динамика систем различной природы, методы анализа динамических систем, вейвлетный анализ. Автор ряда статей в рецензируемых отечественных и зарубежных журналах.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: anefila@gmail.com



СИНХРОНИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ В ДИНАМИКЕ АНСАМБЛЕЙ КОРКОВЫХ НЕФРОНОВ

*О.Н. Павлова, А.Н. Павлов, А.А. Анисимов,
А.И. Назимов, О.В. Сосновцева*

Путем анализа экспериментальных данных исследуется коллективная динамика ансамблей из нескольких десятков нефронов, расположенных на поверхности почки. На основе вейвлет-анализа изучается эффект захвата мгновенных частот и фаз колебаний, обусловленных механизмом канальцево-гломерулярной обратной связи. Показано, что в формировании кластеров синхронной динамики участвуют структурные элементы почки, относящиеся к разным нефронным «деревьям», а подстройка частот и фаз колебаний больших групп нефронов наблюдается только на определенных фрагментах экспериментальных записей. Установлено, что значительные группы нефронов, расположенных на разных участках поверхности почки, демонстрируют эффект синфазной синхронизации колебаний.

Ключевые слова: Нефроны, авторегуляция кровотока, вейвлет-анализ, синхронизация.

Введение

Синхронизация автоколебаний относится к числу фундаментальных явлений природы [1–6], многочисленные примеры которых хорошо известны в динамике биологических систем. В их числе можно упомянуть синхронизацию электрической активности нейронных ансамблей [11], синхронизацию сокращений сердца и ритма дыхания [21], вынужденную синхронизацию сердечного ритма периодическим звуковым или световым воздействием [22], кооперативную динамику популяций насекомых [19] и т.д.

Одним из примеров проявления эффекта синхронизации в функционировании объектов живой природы служит динамика нефронов – структурных элементов почки. Нефрон представляет собой объект размером порядка 100 мкм, принимающий участие в фильтрации крови и регуляции кровяного давления [10]. Для сравнения можно отметить, что почка человека содержит примерно миллион, а почка крысы – около тридцати тысяч нефронов. Расположение нефронов визуально напоминает дерево, на «ветках» которого обычно находятся от одного до трех таких элементов.

Организация нефронных «деревьев» в виде параллельных структур приводит к тому, что общий почечный кровоток делится между большим числом нефронов, и на каждый из них приходится только очень малая часть потока крови, поступающего через почечную артерию [11, 12].

Известно несколько механизмов авторегуляции почечного кровотока на уровне отдельных нефронов, среди которых выделяется канальцево-гломерулярная обратная связь (КГОС) [13, 14]. Данный механизм приводит к генерации автоколебаний давления жидкости с периодом примерно 30–40 секунд, которые регистрируются как в малых кровеносных сосудах (артериолах), так и в фильтрате, протекающем по канальцам нефрона. Согласно результатам экспериментальных исследований на крысах, соответствующие колебания различаются в норме и при гипертонии – при нормальном артериальном давлении они являются почти периодическими, а при повышенном давлении (генетическая форма гипертонии или искусственно вызванная гипертония Голдблетта) эти колебания становятся сильно нерегулярными (хаотическими) [15–18]. В связи с этим изучение динамики нефронов представляет собой одну из прикладных задач нелинейной динамики, а выявление причин хаотизации колебаний вызывает несомненный интерес для более глубокого понимания механизмов, приводящих к развитию почечной гипертонии.

Недавно проводившиеся исследования [19–21] продемонстрировали, что эффекты синхронизации колебаний давления жидкости в канальцах соседних структурных элементов почки в норме и при гипертонии различаются. Так, в случае патологии длительность участков захвата частот или фаз колебаний уменьшается примерно в 3–4 раза [21], а полная синхронизация колебаний парных нефронов сменяется частичной синхронизацией [19, 20]. Однако до настоящего времени взаимная динамика изучалась лишь для случая малых ансамблей – парных нефронов или триплетов. Это было связано с двумя причинами – сложностью проведения экспериментов по одновременной регистрации сигналов большого числа структурных элементов почки и теоретическими представлениями, согласно которым синхронизация должна наблюдаться для нефронов, относящихся к одной междольковой артерии. Коллективная динамика больших групп нефронов до сих пор не рассматривалась, поэтому существует целый ряд открытых вопросов о взаимодействии структурных элементов почки, относящихся к разным нефронным «деревьям». Данная работа представляет собой одну из первых попыток изучения синхронизации ансамблей из нескольких десятков корковых нефронов, регистрируемых на поверхности почки крысы. Заметим, что проведение экспериментов *in vivo* возможно только на корковых нефронах, однако существующие сейчас экспериментальные возможности позволяют рассматривать динамику структурных элементов, расположенных на значительной части поверхности почки.

1. Методика исследования

1.1. Регистрация сигналов нефронных ансамблей. Для изучения коллективного поведения больших ансамблей нефронов в Институте Панум (Университет Копенгагена) были проведены несколько серий экспериментов на крысах, в рамках которых осуществлялась регистрация динамики структурных элементов на поверх-

ности почки. Первоначально регистрация проводилась с помощью инфракрасной камеры, позволяющей по изменению температурного режима анализировать скорость потока крови в артериолах. Однако применение такого метода не обеспечивало высокого качества регистрации динамики кровотока в микрососудах. Кроме того, по полученной видеозаписи температурного режима нельзя было установить, где находятся нефроны. Чтобы идентифицировать расположение структурных элементов на поверхности почки, с использованием микроскопа делалась фотография поверхности, и путем наложения фотографии на изображение, полученное с видеокамеры, можно было установить координаты расположения нефронов (в пикселях). Тем самым получалась информация о том, какие координаты выбрать для извлечения из видеофайла временной динамики, соответствующей каждому обнаруженному нефрону. Тем не менее, в связи с невысокой точностью данного способа регистрации коллективной динамики структурных элементов почки, в дальнейшем он не использовался.

В рамках последующих экспериментов применялся другой метод – лазерной спекл-интерферометрии (ЛСИ, в зарубежной литературе *laser speckle imaging*), который обеспечивает высокое пространственно-временное разрешение при регистрации скорости микрокровотока в распределенных в некоторой области пространства кровеносных сосудах [22, 23]. Этот метод имеет преимущество по сравнению с часто используемым в физиологических исследованиях методом лазерной доплеровской флуометрии (ЛДФ) [24]. Последний подход требует проведения сканирования для осуществления пространственного разрешения, а механическая процедура сканирования поверхности, представляющей интерес для исследования, ограничивает разрешающие способности метода ЛДФ. Сходные проблемы отмечались при рассмотрении альтернативного способа – изучения спеклов, меняющихся во времени [25, 26]. Метод лазерной спекл-интерферометрии к настоящему времени продемонстрировал свою эффективность при изучении кровотока в сетчатке глаза [27], мониторинге церебрального кровотока [28] и т.д. По аналогии с использованием инфракрасной камеры, данные лазерной спекл-интерферометрии дополнялись фотографией верхней поверхности почки, позволяющей установить расположение нефронов.

Экспериментальная база данных, записанных в институте Панум с применением ЛСИ-метода, включала сигналы ансамблей нефронов пятнадцати крыс. На верхней поверхности почки каждой крысы идентифицировалось от 40 до 100 нефронов в зависимости от эксперимента (для анализа выбирались только данные четко различимых нефронов). Временное разрешение метода составляло 1 Гц, что обеспечивало получение порядка 30–40 отсчетов на один характерный период колебаний, обусловленных механизмом КГОС. Длительность каждой записи составляла около 30 минут, в результате для каждого нефрона регистрировалось до 100 периодов ритма КГОС.

1.2. Анализ экспериментальных данных. Записанные экспериментальные данные анализировались на основе непрерывного вейвлет-преобразования, которое обеспечивает возможность изучения локальных изменений структуры сигналов [29, 30]. Если классический спектральный анализ дает информацию о частотном составе рассматриваемого процесса и характерных ритмах колебаний, то вейвлет-анализ позволяет извлекать информацию о таких характеристиках, как мгновенные амплитуды, мгновенные частоты и фазы ритмических процессов. Особенности вейвлет-

анализа является использование базисных функций, локализованных во временной и в частотной областях, и наличие подвижного частотно-временного окна, меняющегося с масштабом наблюдения. Последнее отличает вейвлет-преобразование от оконного преобразования Фурье – вейвлетная функция имеет разную протяженность на низких и высоких частотах, и в этом случае быстрые изменения структуры сигнала анализируются по коротким фрагментам экспериментальной записи, а медленные – по более длительным.

Сравнительному исследованию фурье- и вейвлет-преобразований, а также деталям процедуры вейвлет-анализа сигналов посвящено большое количество монографий (например, [29–32]). Более того, вейвлеты стали восприниматься как стандартный метод цифровой обработки сигналов в самых разных областях науки и техники (свыше 3 миллионов ссылок в сети Интернет), поэтому в данной статье не будем останавливаться на деталях вейвлет-преобразования. Отметим лишь, что в качестве базисной функции в работе использовался вейвлет Морле

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{j2\pi f_0 t} e^{-t^2/2},$$

центральная частота которого f_0 была выбрана равной единице. Процедура непрерывного вейвлет-преобразования и идентификации мгновенных частот и амплитуд колебательных процессов детально рассмотрена в [29, 30], она неоднократно применялась и обсуждалась в наших предыдущих работах (например, [33, 34]).

2. Результаты

Прежде чем приступить к рассмотрению кооперативного поведения больших ансамблей нефронов, обратимся к случаю динамики нескольких соседних структурных элементов почки. Как показано в работах [20, 21], для динамики взаимодействующих нефронов нормотензивных крыс характерны участки синхронизации, которые включают в среднем примерно 10–12 периодов ритма КГОС, причем фрагменты синхронных колебаний сменяются фрагментами несинхронного режима. Результаты отмеченных работ [20, 21] были получены по экспериментальным данным зависимостей давления в проксимальных канальцах нефронов (катетерный метод регистрации, обеспечивающий сравнительно низкий уровень помех). Чтобы продемонстрировать, что диагностика эффекта синхронизации не зависит от способа регистрации экспериментальных данных, на рис. 1 представлены временные зависимости мгновенных частот колебаний, вычисленные

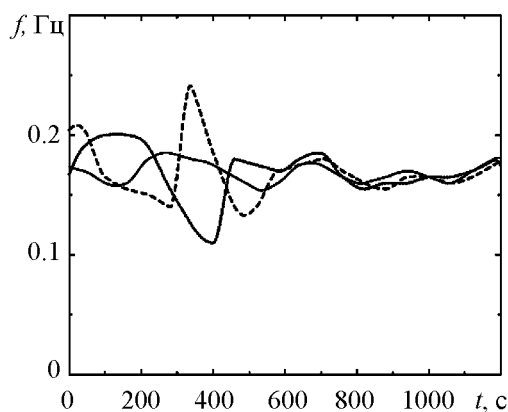


Рис. 1. Динамика мгновенных частот колебаний, обусловленных механизмом КГОС, для трех нефронов, расположенных на поверхности почки

по экспериментальным записям, полученным в рамках ЛСИ-метода. Для наглядности на этом рисунке изображены временные зависимости мгновенных частот только трех нефронов из числа тех, для которых наблюдаются синхронные колебания. Первоначально (в диапазоне примерно до 600 секунд) регистрируются случайные изменения мгновенных частот. Вторая часть представленных зависимостей (в диапазоне от 600 до 1200 секунд) соответствует случаю синхронной динамики, когда мгновенные частоты колебаний всех трех нефронов оказываются захваченными.

Наличие синхронизации колебаний малых групп соседних нефронов является ожидаемым результатом, более интересен ответ на другой вопрос – сколько нефронов могут синхронизовать свои колебания. Проводя изучение динамики структурных элементов на поверхности почки, мы лишены возможности заглянуть внутрь и изучать поведение нефронов, удаленных от поверхности. Мы можем лишь предполагать, что эффект синхронизации должен наблюдаться для нефронов в пределах одного «дерева», и эти предположения базируются как на общих соображениях (элементы, относящиеся к одному кровеносному сосуду, должны взаимодействовать между собой), так и на данных компьютерного моделирования [12]. Однако наличие большого числа корковых нефронов обеспечивает возможность изучения количества кластеров, которые можно идентифицировать на поверхности почки, а также определения числа структурных элементов, участвующих в формировании кластеров.

Проводя изучение динамики нефронных ансамблей, мы получили довольно неожиданный результат, состоящий в том, что захват частот колебаний наблюдается не только для соседних нефронов, но и для структурных элементов почки, находящихся на значительном расстоянии друг от друга и относящихся к разным нефронным деревьям! Один из примеров представлен на рис. 2, где разными символами отмечены элементы, принадлежащие двум разным кластерам синхронизации. В данном случае выбранное разрешение (600x600 пикселей) соответствует примерно 80% верхней поверхности почки.

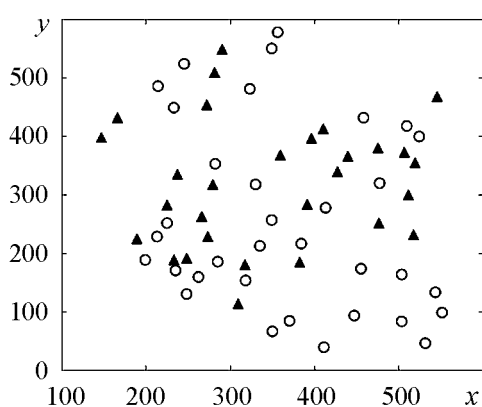


Рис. 2. Пример идентификации двух кластеров синхронной динамики, соответствующих колебаниям с частотами примерно 0.017 и 0.019 Гц

Как видно из приведенного рисунка, кластеры синхронной динамики нефронов не являются локализованными на поверхности почки и могут включать структурные элементы, расположенные на значительном расстоянии друг от друга. Кроме того, данные кластеры включают большое количество нефронов, а не малые ансамбли из нескольких элементов. Пример, приведенный на рис. 2, является наглядным, но не очень типичным – лишь в трех экспериментах из пятнадцати было зафиксировано наличие двух существующих синхронных кластеров.

Более типичной является ситуация, когда идентифицируется только один кластер и часть нефронов, которые не демонстрируют синхронной динамики. В ходе проведенного статистического анализа нами было установлено, что от 10 до 60% корковых нефронов принимает участие в формировании синхронного кластера (в среднем около 40%). При этом кластер может существовать сравнительно небольшое время (около 8–10 периодов колебаний), после чего его размер уменьшается и часть нефронов выходит из синхронного режима.

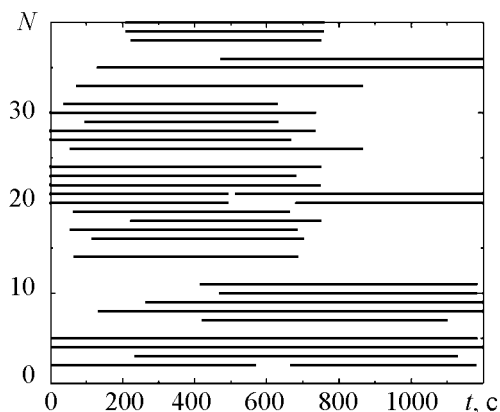


Рис. 3. Длительности участков синхронизации для каждого индивидуального нефрона (черные линии). По оси ординат отложен номер нефрона

Так как коллективная динамика структурных элементов почки носит нестационарный характер, наряду с усредненными статистическими данными необходимо изучать временную динамику ансамбля. Это можно сделать различными способами, и один из возможных вариантов приведен на рис. 3. На рисунке изображена динамика 40 выделенных нефронов с поверхности почки. Черными линиями показан случай синхронного режима, а именно ситуация, когда каждый индивидуальный нефрон синхронизирует колебания по крайней мере еще с одним нефроном в течение не менее 10 периодов колебаний (при этом возможно, что синхронизация наблюдается с несколькими нефронами или даже несколькими десятками нефронов). Как следует из рисунка, в разные моменты времени в формировании синхронного кластера могут участвовать разные нефроны. Это позволяет выдвинуть гипотезу о том, что синхронизация нефронных ансамблей обусловлена не только геометрией «деревьев», а скорее, представляет собой некоторый динамический эффект, возможные механизмы возникновения которого на уровне разных деревьев в настоящее время дискутируются с биологами.

В связи с тем, что синхронный кластер охватывает большую группу удаленных структурных элементов почки, дополнительная информация об их динамике может быть получена путем анализа мгновенных фаз колебаний. Такой анализ позволяет, в частности, оценить фазовый сдвиг между колебаниями нефронов, находящихся на расстоянии друг от друга. Как отмечалось в работе [21], для соседних нефронов типичен режим синфазной синхронизации, который наблюдается более чем в 90% экспериментов. Любопытно отметить, что и для удаленных нефронов, принадлежащих единому синхронному кластеру, характерен эффект синфазной (или почти синфазной) динамики. В связи с тем, что представление разностей фаз для больших ансамблей автоколебательных систем является не очень наглядным, на рис. 4 продемонстрированы временные зависимости действительных частей вейвлет-коэффициентов (это представление аналогично $A \cos \varphi$ в классическом спектральном анализе). В соответствии с рисунком, режим синфазной синхронизации наблюдается лишь для отдельных участков экспериментальных записей: несинхронная динамика значительной части нефронов сменяется синхронной и наоборот, то есть мы наблюдаем эффект перемежающейся синхронизации. Для наглядности на рисунке приведены за-

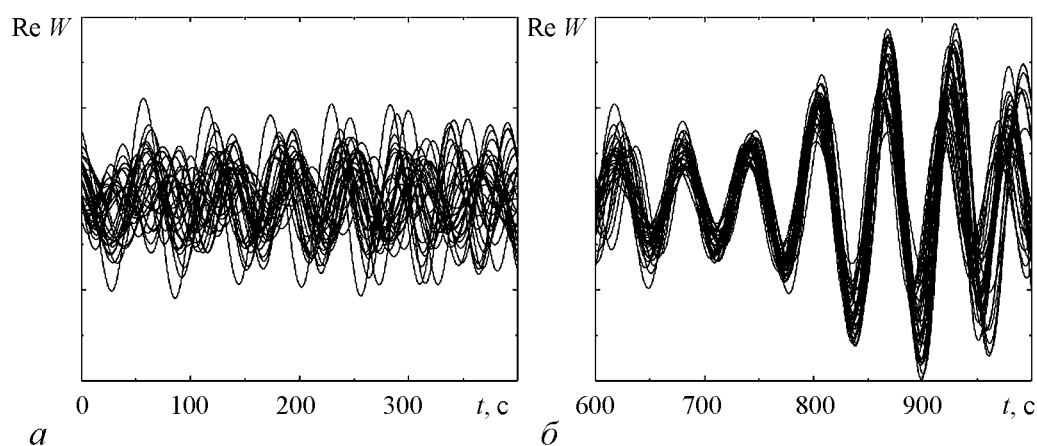


Рис. 4. Временные зависимости действительных частей вейвлет-коэффициентов, позволяющие проиллюстрировать переход от режима несинхронных колебаний значительной части корковых нефронов (а) к режиму синфазной синхронизации большой группы структурных элементов почки (б)

висимости действительных частей вейвлет-коэффициентов только для тех нефронов, которые принимают участие в формировании кластера. Соответствующие зависимости для нефронов, не демонстрирующих режим синхронных колебаний, не приводятся, чтобы не загромождать рисунок.

3. Заключение

В рамках данной работы проводилось исследование коллективной динамики больших групп нефронов, расположенных на поверхности почки. В ходе экспериментов, проводившихся в Институте Панум (Университет Копенгагена), были зарегистрированы сигналы, отражающие скорость кровотока в артериолах нескольких десятков корковых нефронов. Далее с помощью метода вейвлет-анализа осуществлялось выделение мгновенных частот ритмов колебаний, обусловленных механизмом КГОС. Построение полученных частотных зависимостей на одном графике позволяет определить участки времени, в течение которых часть нефронов синхронизирует свои колебания, и мгновенные частоты соответствующих ритмов подстраиваются. В ходе проведенных исследований было установлено, что в формировании кластеров синхронной динамики корковых нефронов участвуют структурные элементы, относящиеся к разным нефронным «деревьям», а захват частот и фаз колебаний в коллективной динамике нефронов происходит на определенных участках экспериментальных записей. При этом было обнаружено, что значительные группы нефронов, расположенные на разных участках поверхности почки, демонстрируют эффект синфазной синхронизации колебаний.

Важно отметить, что сам по себе эффект формирования кластера синхронизации большой группы корковых нефронов не является случайным наблюдением – этот вывод сделан на основе анализа данных экспериментов на пятнадцати крысах, и в каждом случае фиксировалось наличие синхронной динамики по крайней мере для десяти процентов нефронов, расположенных на поверхности почки. Остается непонятным, участвуют ли в формировании синхронного кластера глубинные нефроны?

Для них характерны более длинные петли обратной связи, что сопровождается более длительным движением фильтрата по канальцам и меньшими значениями частоты колебаний, связанных с механизмом канальцево-гломерулярной обратной связи. Не исключено, что глубинные нефроны демонстрируют режимы синхронной динамики с несколько отличающимися периодами. Возможным косвенным подтверждением этого предположения служит макроскопическая динамика почки, например, записи величины потока крови в почечных артериях. В данных сигналах можно идентифицировать отдельные ритмические составляющие (по крайней мере при локальном спектральном анализе с применением вейвлет-преобразования) [35], но если бы и корковые, и глубинные нефроны почки принимали участие в формирование единого кластера, следовало бы ожидать более четкого проявления характерного пика в спектре сигнала, отражающего макродинамику почки.

Авторы выражают искреннюю признательность N.-H. Holstein-Rathlou и D.J. Marsh за предоставленные данные и многочисленные дискуссии.

Проводимые исследования были поддержаны Министерством образования и науки РФ в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт П451).

Библиографический список

1. *Блехман И.И.* Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981.
2. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980.
3. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
4. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В.* Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1999.
5. *Пиковский А., Розенблум М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
6. *Balanov A., Janson N., Postnov D., Sosnovtseva O.* Synchronization: From simple to complex. Berlin: Springer-Verlag, 2009.
7. *Абарбанель Г.Д.И., Рабинович М.И., Селверстон А., Баженов М.В., Хуэрта Р., Суццик М.М., Рубчинский Л.Л.* Синхронизация в нейронных ансамблях // УФН. 1996. Т. 166, № 4. С. 363.
8. *Schäfer C., Rosenblum M.G., Abel H.-H., Kurths J.* Synchronization in the human cardiorespiratory system // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 60. P. 857.
9. *Anishchenko V.S., Balanov A.G., Janson N.B., Igosheva N.B., Bordyugov G.V.* Entrainment between heart rate and weak noninvasive forcing // Int. Journal of Bifurcation and Chaos. 2000. Vol. 10, № 10. P. 2339.
10. *Шмидт Р., Тевс Г.* Физиология человека. М.: Мир, 1996.
11. *Layton H.E., Pitman E.B., Moore L.C.* Limit-cycle oscillations and tubuloglomerular

- feedback regulation of distal sodium delivery // *Am. J. Physiol. Renal Physiol.* 2000. Vol. 278. F287.
12. *Marsh D.J., Sosnovtseva O.V., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H.* Vascular coupling induces synchronization, quasiperiodicity, and chaos in a nephron tree // *Chaos.* 2007. Vol. 17. 015114.
 13. *Leyssac P.P.* Further studies on oscillating tubuloglomerular feedback responses in the rat kidney // *Acta Physiol. Scand.* 1986. Vol. 126. P. 271.
 14. *Dilley J.R., Arendshorst W.J.* Enhanced tubuloglomerular feedback activity in rats developing spontaneous hypertension // *Am. J. Physiol. Renal Fluid Electrolyte Physiol.* 1984. Vol. 247. F672.
 15. *Holstein-Rathlou N.-H., He J., Wagner A.J., Marsh D.J.* Patterns of blood pressure variability in normotensive and hypertensive rats // *Am. J. Physiol. Regul. Integr. Comp. Physiol.* 1995. Vol. 269. R1230.
 16. *Holstein-Rathlou N.-H., Leyssac P.P.* TGF-mediated oscillations in the proximal intratubular pressure: differences between spontaneously hypertensive rats and Wistar-Kyoto rats // *Acta Physiol. Scand.* 1986. Vol. 126. P. 333.
 17. *Yip K.-P., Holstein-Rathlou N.-H., Marsh D.J.* Chaos in blood flow control in genetic and renovascular hypertensive rats // *Am. J. Physiol. Renal Fluid Electrolyte Physiol.* 1991. Vol. 261. F400.
 18. *Yip K.-P., Marsh D.J., Holstein-Rathlou N.-H.* Low dimensional chaos in renal blood flow control in genetic and experimental hypertension // *Physica D.* 1995. Vol. 80. P. 95.
 19. *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H.* Bimodal oscillations in nephron autoregulation // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 66. 061909.
 20. *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E., Yip K.-P., Holstein-Rathlou N.-H., Marsh D.J.* Synchronization among mechanisms of renal autoregulation is reduced in hypertensive rats // *Am. J. Physiol. Renal Physiol.* 2007. Vol. 293. F1545.
 21. *Павлова О.Н., Павлов А.Н., Сосновцева О.В.* Динамика малых групп взаимодействующих нефронов в норме и при почечной гипертонии // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2010. Т. 18, № 6. С. 3.
 22. *Fercher A.F., Briers J.D.* Flow visualization by means of single-exposure speckle photography // *Opt. Commun.* 1981. Vol. 37. P. 326.
 23. *Briers J.D., Webster S.* Laser speckle contrast analysis (LASCA): a non-scanning, full-field technique for monitoring capillary blood flow // *J. Biomed. Opt.* 1996. Vol. 1. P. 174.
 24. *Frerichs K.U., Feuerstein G.Z.* Laser Doppler flowmetry: a review of its application for measuring cerebral and spinal cord blood flow // *Mol. Chem. Neuropathol.* 1990. Vol. 12. P. 55.
 25. *Zimnyakov D.A., Briers J.D., Tuchin V.V.* Speckle technologies for monitoring and imaging of tissues and tissue-like phantoms // *Handbook of Optical Biomedical Diagnostics PM107* / Ed. by V.V. Tuchin. Bellingham, WA: SPIE Press, 2002. P. 987.

26. *Zimnyakov D.A., Tuchin V.V.* Laser tomography // *Medical Applications of Lasers* / Ed. by D.R. Vij and K. Mahesh. Boston, MA: Kluwer, 2002. P. 147.
27. *Yaoeda K., Shirakashi M., Funaki S., Funaki H., Nakatsue T., Abe H.* Measurement of microcirculation in the optic nerve head by laser speckle flowgraphy and scanning laser Doppler flowmetry // *Am. J. Ophthalmol.* 2000. Vol. 129. P. 734.
28. *Dunn A.K., Bolay H., Moskowitz M.A., Boas D.A.* Dynamic imaging of cerebral blood flow using laser speckle // *Cereb. Blood Flow Metab.* 2001. Vol. 21. P. 195.
29. *Mallat S.G.* A wavelet tour of signal processing. New York: Academic Press, 1998.
30. *Addison P.S.* The illustrated wavelet transform handbook: applications in science, engineering, medicine and finance. Philadelphia: IOP Publishing, 2002.
31. *Kaiser G.* A friendly guide to wavelets. Boston: Birkhäuser, 1994.
32. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003.
33. *Pavlov A.N., Makarov V.A., Mosekilde E., Sosnovtseva O.V.* Application of wavelet-based tools to study the dynamics of biological processes // *Briefings in Bioinformatics.* 2006. Vol. 7. P. 375.
34. *Павлов А.Н., Павлова О.Н., Сосновцева О.В.* Взаимодействие ритмов в динамике структурных элементов почек // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2007. Т. 15, № 2. С. 14.
35. *Павлов А.Н., Сосновцева О.В., Анисимов А.А., Павлова О.Н.* Динамика почечного кровотока на микро и макроскопическом уровнях // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2008. Т. 16, № 1. С. 3.

*Саратовский государственный
университет, Институт Панум
(Университет Копенгагена, Дания)*

Поступила в редакцию 12.01.2010

SYNCHRONIZATION OF OSCILLATIONS IN THE DYNAMICS OF ENSEMBLES OF SURFACE NEPHRONS

*O.N. Pavlova, A.N. Pavlov, A.A. Anisimov,
A.I. Nazimov, O.V. Sosnovtseva*

Based on the analysis of experimental data we study the collective dynamics of ensembles from several tens nephrons located on a kidney surface. Using wavelet-analysis, the phenomenon of locking of instantaneous frequencies and phases is studied that is caused by the tubulo-glomerular feedback. It is shown that structural units of the kidney related to distinct nephron trees participate in clusters formation. The entrainment of frequencies and phases of oscillations for large groups of nephrons occurs only for some fragments of experimental data. It is stated that significant groups of nephrons placed in different areas of kidney surface demonstrate the phenomenon of in-phase synchronization.

Keywords: Nephrons, renal blood-flow autoregulation, wavelet-analysis, synchronization.



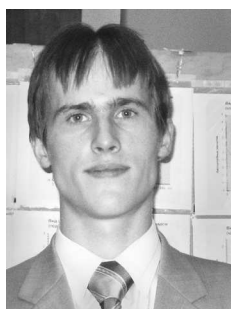
Павлова Ольга Николаевна – родилась в Саратове (1985). Окончила физический факультет Саратовского университета по специальности биохимическая физика (2007). В настоящее время работает ассистентом на кафедре радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов: динамика биологических систем. Имеет около 20 работ, опубликованных в отечественной и зарубежной печати.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: pavlova_olya@yahoo.com



Анисимов Алексей Александрович – аспирант кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ (специальность «биофизика»). Инженер кафедры. Область научных интересов: динамика биологических систем, анализ временных рядов.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: alexey.a.anisimov@gmail.com



Назимов Алексей Игоревич – студент 5-го курса физического факультета СГУ. Область научных интересов: методы анализа структуры сигналов, динамика биологических систем. Соавтор 3 статей по данной тематике.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: Nazimov191288@yandex.ru



Сосновцева Ольга Владимировна родилась в 1966 году. Окончила физический факультет Саратовского университета (1989). Защитила кандидатскую диссертацию (1996). Неоднократно работала за рубежом: в Германии, Дании и Южной Корее. В настоящее время работает в Датском техническом университете (г. Люнбю). Научные интересы – явления самоорганизации в ансамблях нелинейных хаотических и стохастических систем; особенности синхронизации хаотической динамики и стохастических процессов, динамика биологических систем. Имеет около 70 публикаций в отечественной и зарубежной печати.

Denmark 1017 Copenhagen, Norregale 10, Postbox 2177
Panum Institute, University of Copenhagen
E-mail: olga@sund.ku.dk



УПРАВЛЕНИЕ МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬЮ С ПОМОЩЬЮ БИ-ФАЗНОГО РЕЗОНАНСНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

А.В. Шабунин, А.Н. Литвиненко, В.В. Астахов

Предложен новый метод управления фазовой мультистабильностью в двух связанных генераторах, основанный на «затягивании» колебаний в нужный режим при помощи двух внешних гармонических сигналов на частоте субгармоники, прикладываемых к подсистемам. Изменяя разность фаз между этими сигналами можно управлять переключениями между сосуществующими колебательными модами. Демонстрируется работоспособность предлагаемого метода для переключения между периодическими и хаотическими режимами.

Ключевые слова: Фазовая мультистабильность, синхронизация, управление мультистабильностью.

Введение

Одним из свойств нелинейных автоколебательных систем является мультистабильность, то есть сосуществование в фазовом пространстве нескольких аттракторов, выбор между которыми происходит посредством выбора начальных условий. Мультистабильность – типичное явление для нелинейных динамических систем самой разной природы [1–4]. Особый вид мультистабильности, заключающийся в том, что сосуществующие колебательные моды почти идентичны и отличаются лишь величиной фазового сдвига между колебаниями подсистем, получил название «фазовой мультистабильности» [5, 6].

Исследованию фазовой мультистабильности в цепочках автогенераторов, замкнутых в кольцо, посвящен целый ряд работ [7–10]. Фазовая мультистабильность может существовать уже в системе двух взаимодействующих генераторов с простым поведением. Например, в работе [11] продемонстрировано, что в системе двух связанных осцилляторов ван дер Поля возможно сосуществование устойчивых синфазных и противофазных колебаний. В ансамблях генераторов с более сложной динамикой может наблюдаться *развитая* фазовая мультистабильность, при которой число сосуществующих аттракторов неограниченно растет по мере перехода от более простых видов колебаний к более сложным. Характерным примером здесь могут

служить диффузионно связанные фейгенбаумовские системы [5], для которых было показано, что при слабой связи число сосуществующих фазовых мод после каждой бифуркации удвоения периода увеличивается вдвое и на пороге перехода к хаосу становится неограниченно большим. В работе [12] было обнаружено, что существование указанного сценария развития фазовой мультистабильности связано с закономерностями эволюции взаимного спектра колебаний подсистем. Впоследствии этот вывод был подтвержден и для больших ансамблей осцилляторов [13].

Выбор установившихся колебаний в системе с мультистабильностью определяется выбором начальных условий, которые на практике достаточно трудно проконтролировать. Кроме того, в системах с развитой фазовой мультистабильностью границы бассейнов притяжения сосуществующих аттракторов зачастую устроены достаточно сложно и могут обладать фрактальными свойствами [14]. Поэтому, целенаправленный выбор того или иного сосуществующего режима оказывается непростой задачей. Вследствие этого, для мультистабильных систем актуальны вопросы управляемых переходов между мультистабильными состояниями, то есть задача управления мультистабильностью.

Множество используемых методов управления мультистабильностью можно разделить на два класса: управление при помощи цепи обратной связи (feedback methods) и при помощи внешнего неавтономного воздействия на систему (non-feedback methods). В первом случае воздействие зависит от текущего состояния системы и направлено таким образом, чтобы постепенно «привести» фазовую точку к желаемому аттрактору [15, 16]. Во втором случае внешнее воздействие в виде модуляции одного из параметров [17–19] или аддитивного сигнала [20] разрушает мультистабильность, переводя управляемую систему в моностабильное состояние.

В работе [21] был предложен метод управления мультистабильностью, основанный на синхронизации элементов ансамбля внешним гармоническим сигналом. В данном методе была использована характерная особенность сосуществующих режимов, заключающаяся в том, что каждый из них имеет свою собственную базовую частоту автоколебаний. Наличие базовых частот позволяло применить эффект «затягивания» частоты, переводя ансамбль генераторов в нужную колебательную моду. Однако при слабой связи (при которой существует мультистабильность) различия по базовым частотам оказываются очень незначительными, что существенно ограничивает применимость предложенного метода на практике. Поэтому в данной работе мы предлагаем использовать новый подход к управлению мультистабильностью посредством вынужденной синхронизации, основанный на «затягивании» колебаний системы двух генераторов в нужную фазовую моду при одновременном воздействии на оба генератора внешними гармоническими сигналами на частоте субгармоники, сдвинутыми по фазе друг относительно друга. По сравнению с дифференциацией мод по частоте, различия их по значениям разностей мгновенных фаз колебаний являются более существенными, поэтому данный метод представляется более эффективным.

1. Исследуемая система и рассматриваемые колебательные режимы

Выберем в качестве исследуемой системы два симметрично связанных идентичных генератора с нелинейным отрицательным сопротивлением (цепь Чуа [22])

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \alpha(y_1 - \varphi(x_1)), \\
\dot{y}_1 &= x_1 - y_1 + z_1 + K(y_2 - y_1), \\
\dot{z}_1 &= -\beta y_1, \\
\dot{x}_2 &= \alpha(y_2 - \varphi(x_2)), \\
\dot{y}_2 &= x_2 - y_2 + z_2 + K(y_1 - y_2), \\
\dot{z}_2 &= -\beta y_2.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\varphi(x) = (0.0625x^3 - 0.167x)$ – характеристика нелинейного элемента цепи [23], α и β – управляющие параметры, K – коэффициент линейной связи. Будем рассматривать работу системы (1) при фиксированном значении параметра $\beta = 14$.

Генератор Чуа представляет собой простую радиоэлектронную схему, демонстрирующую переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода [22]. В системе связанных генераторов (1) при $K \geq 0$ наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода синфазных периодических колебаний, при котором оба генератора демонстрируют идентичные временные реализации: $x_1 = x_2$. Эволюция синфазных режимов происходит идентично с эволюцией колебаний в одиночном генераторе. Кроме этого, в фазовом пространстве возникают несинфазные колебательные режимы, эволюция которых происходит уже по иному сценарию. Совокупность бифуркаций как синфазных, так и несинфазных аттракторов ведет к появлению развитой фазовой мультистабильности. Детальное описание динамики связанных генераторов Чуа с кусочно-линейной характеристикой $\varphi(x)$ дано в работе [24]. Система (1) с гладкой характеристикой нелинейного элемента ведет себя сходным образом.

Рассмотрим начало появления мультистабильности в системе (1). При $\alpha = 6.578$ в результате бифуркации Андронова–Хопфа в фазовом пространстве рождаются синфазные периодические колебания, C^0 . Здесь и далее верхний индекс будет обозначать задержку по времени второго генератора относительно первого в единицах периода однооборотного предельного цикла. С ростом α , при $\alpha \simeq 8.2$ эти колебания претерпевают бифуркацию удвоения периода, в результате которой соответствующий им предельный цикл становится седловым, а в его окрестности появляется устойчивый синфазный предельный цикл периода два, $2C^0$. Проекция фазового портрета данного колебательного режима построены на рис. 1, а, б. Выше по параметру ставший седловым цикл периода один претерпевает еще одну бифуркацию удвоения периода, в результате которой он теряет устойчивость в направлении,

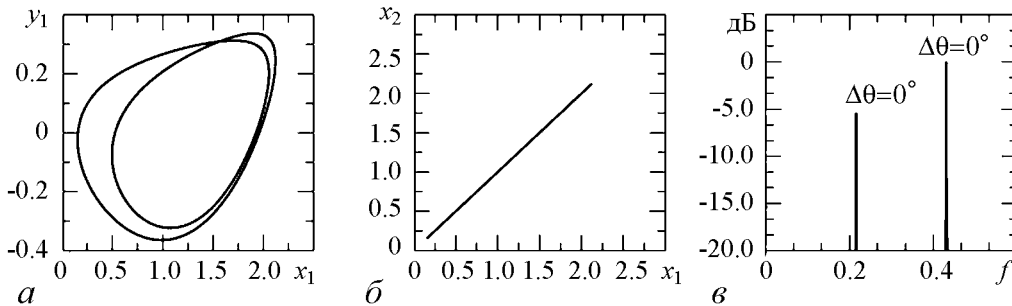


Рис. 1. Фазовые портреты и нормированный спектр мощности. Параметры генераторов: $\alpha = 8.3$, $\beta = 14.0$, $K = 0.01$. Здесь и далее f – частота в относительных единицах

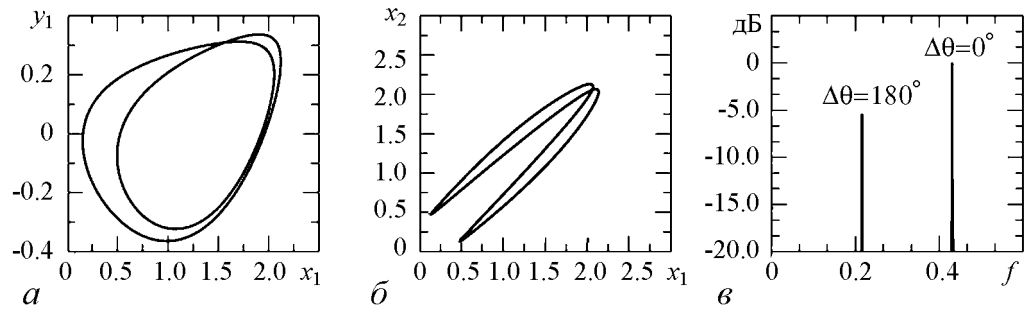


Рис. 2. Фазовые портреты и нормированный спектр мощности. Параметры генераторов: $\alpha = 8.3$, $\beta = 14.0$, $K = 0.01$

трансверсальном к подпространству симметрии $x_1 = x_2$, а в его окрестности появляется еще один предельный цикл периода два, соответствующий несинфазным колебаниям, который далее становится устойчивым. Проекция фазового портрета для этого режима построены на рис. 2, а, б. Видно, что данные колебания уже не являются синфазными, поскольку не удовлетворяют условию: $x_1 = x_2$. Из анализа временных реализаций можно определить, что колебания в одном из генераторов отстают на пол-периода от колебаний в другом генераторе. Если обозначить период исходного цикла периода один, как T , то соотношение между временными реализациями в двух генераторах можно записать как: $x_1(t) = x_2(t - T)$. Поэтому обозначим этот предельный цикл, как $2C^1$.

Таким образом, в фазовом пространстве системы сосуществует два устойчивых предельных цикла $2C^0$ и $2C^1$. В дальнейшем на базе каждого из этих аттракторов происходит последовательность бифуркаций, приводящая к возникновению сосуществующих в фазовом пространстве хаотических аттракторов, которые будем обозначать как $2A^0$ и $2A^1$, соответственно. Выберем значения параметров, соответствующих условию существования колебаний $2C^0$ и $2C^1$, и попробуем найти простой метод, позволяющий переключать систему (1) между этими режимами.

2. Сущность метода управления мультистабильностью

Поскольку оба аттрактора $2C^0$ и $2C^1$ сосуществуют в фазовом пространстве при одних и тех же значениях параметров, каждый из них должен иметь свой бассейн притяжения, между которыми располагается разграничивающее инвариантное многообразие.

Рассмотрим различия в сосуществующих колебательных режимах, для чего перейдем от временного представления колебаний к спектральному. На рис. 1, в изображены спектры мощности колебаний $x_1(t)$ в режиме $2C^0$, а также взаимные фазовые спектры между сигналами $x_1(t)$ и $x_2(t)$. На рис. 2, в аналогичные характеристики построены для режима $2C^1$. Из сопоставления обоих рисунков видно, что различия в колебаниях $2C^0$ и $2C^1$ проявляются в разных фазах субгармоник. Если гармоники на основной частоте в обоих случаях синфазны, то разности фаз субгармоник в случае $2C^0$ равны нулю, а в случае $2C^1$ составляют π . То есть колебания $2C^0$ характеризуются синфазными субгармониками, а колебания $2C^1$ – противофазными. Попробуем использовать эту особенность для управляемых переключений между сосуществующими аттракторами.

Поскольку сосуществующие колебательные режимы различаются только фазами субгармоник, попробуем с помощью внешнего воздействия «затянуть» субгармоники в нужные фазовые соотношения. Для этого будем использовать внешний гармонический сигнал, подаваемый с разными фазами на оба генератора системы (1), частота которого близка к частоте первой субгармоники. При этом разность фаз между сигналами выбирается равной разности фаз между гармониками целевого режима. Схематически данный метод управления показан на рис.3.

С учетом управляющего воздействия система уравнений генераторов будет модифицирована посредством добавления в третье и шестое уравнения системы (1) аддитивных внешних сигналов: $s_1 = A \cos(\omega t)$ и $s_2 = A \cos(\omega t + \phi)$, соответственно, где A и $\omega = 2\pi f$ – их амплитуда и частота, ϕ – разность фаз между s_1 и s_2 .

Проверим работоспособность предлагаемого метода. Для этого выберем значения управляющих параметров $\alpha = 8.3$, $K = 0.01$, соответствующие сосуществованию в фазовом пространстве двух предельных циклов, и начальные условия, при которых генераторы функционируют в режиме $2C^0$. Частота базовой гармоники для выбранных значений $\omega_0 = 2.69850$. Выберем амплитуду управляющего сигнала $A = 0.01$ и частоту, равную половине базовой частоты $\omega = 0.5\omega_0 = 1.34925$. Разность фаз для целевого режима $2C^1$ составляет 180° , соответственно выберем $\phi = \pi$.

Рассмотрим влияние управляющего воздействия на колебания в системе. Для этого построим временные реализации $z_1(t)$ и $z_2(t)$ (рис. 4, а, б), а также управляющие сигналы, подаваемые на каждый из генераторов (рис. 4, в, г). Управление включается в момент времени $t_1 = 50$. До этого момента колебания подсистем являются синфазными. Для того чтобы соотношение между фазами колебаний подсистем было лучше видно, обозначим локальные максимумы временных реализаций буквами «А» и «В»: «А» – больший максимум, «В» – меньший максимум. Например, в момент времени $t \simeq 46.5$ обе временные реализации находятся в состоянии «А», а в момент времени $t \simeq 48$ – в состоянии «В». При включении воздействия наблюдается быстрая перестройка фазового сдвига между временными реализациями: колебания во втором генераторе плавно сдвигаются относительно колебаний первого генератора и после небольшого интервала времени τ , равного нескольким (если быть точнее, то пяти) периодам, устанавливается нужный колебательный режим. После этого момента $t_2 = t_1 + \tau$ управляющее воздействие можно выключить – система остается в выбранном колебательном режиме $2C^1$. В этом случае, как это видно из сопоставления рис. 4, а и рис. 4, б, колебания в подсистемах находятся уже в разных фазах: в момент времени $t \simeq 88$ первый генератор находится в состоянии «А», а второй – в состоянии «В».

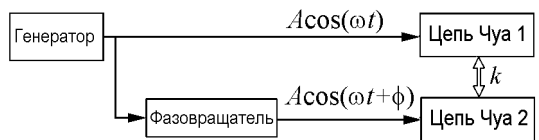


Рис. 3. Структурная схема контроллера

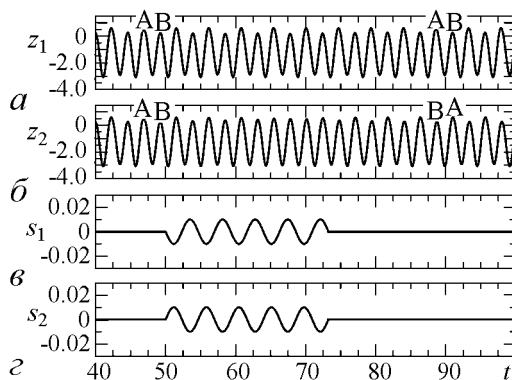


Рис. 4. Процесс переключения генераторов из состояния $2C^0$ в $2C^1$. Параметры генераторов: $\alpha = 8.3$, $\beta = 14.0$, $K = 0.01$. Амплитуда внешнего воздействия $A = 0.01$

Если выбрать в качестве исходного режима цикл $2C^1$, а в качестве целевого – $2C^0$, то указанная выше методика останется неизменной, за исключением значения фазового сдвига ϕ : чтобы обеспечить переключение на режим $2C^0$ его нужно выбрать равным нулю. Таким образом, переключение параметра ϕ между двумя значениями $\phi = 0$ и $\phi = \pi$ дает возможность переключать генераторы в нужный колебательный режим.

3. Исследование влияния би-фазного гармонического сигнала на связанные генераторы

Рассмотрим теперь влияние управляющего воздействия на систему (1) более подробно. Для этого выберем значение частоты воздействия $\omega = 1.349$, фазы $\phi = \pi$ и начальные условия, соответствующие режиму $2C^0$. Будем постепенно увеличивать амплитуду сигналов от $A = 0$, следя за происходящими изменениями. При переходе A через ноль, на базе предельного цикла $2C^0$ мягко рождается двумерный тор $2T_1^0$ (рис. 5).

При увеличении A происходит постепенное изменение формы колебаний. Колебания перестают быть синфазными: проекция тора на плоскость $x_1 - x_2$ «утолщается». Наконец, при достижении некоторого порогового значения $A = A_0$ происходит жесткий переход на колебательный режим, образованный на базе предельного цикла $2C^1$, который будем обозначать как $2T_1^1$ (рис. 6). Этот переход является необ-

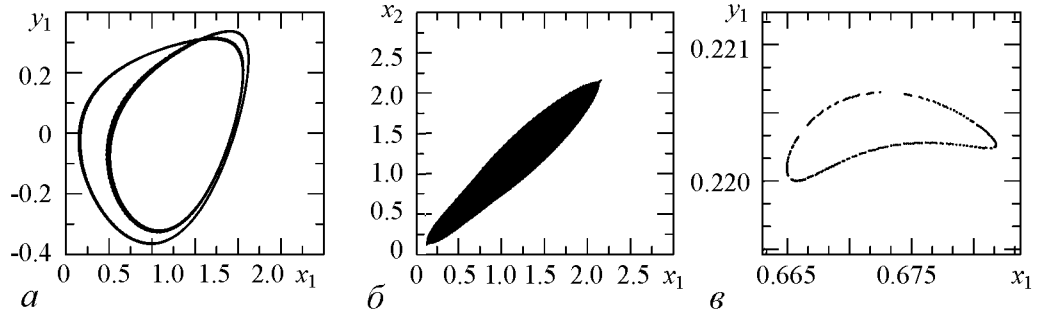


Рис. 5. Квазипериодические колебания $2T_1^0$: a – проекция фазового портрета в переменных $x_1 - y_1$, b – в переменных $(x_1 - x_2)$, c – фрагмент сечения Пуанкаре. Амплитуда внешнего воздействия $A = 0.002$. Частота внешнего воздействия $\omega/\Omega = 0.499$. Параметры генераторов: $\alpha = 8.3$, $\beta = 14.0$, $K = 0.01$

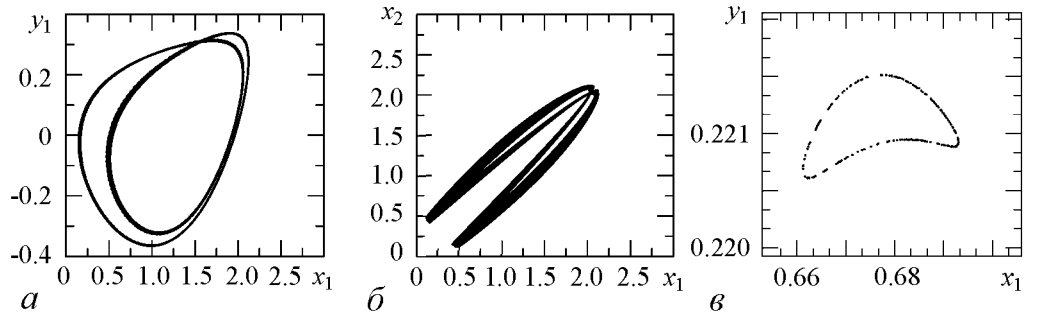


Рис. 6. Квазипериодические колебания $2T_1^1$: a – проекция фазового портрета в переменных $x_1 - y_1$, b – в переменных $(x_1 - x_2)$, c – фрагмент сечения Пуанкаре. Амплитуда внешнего воздействия $A = 0.004$. Частота внешнего воздействия $\omega/\Omega = 0.499$. Параметры генераторов: $\alpha = 8.3$, $\beta = 14.0$, $K = 0.01$

ратимым: уменьшение параметра A не ведет к возврату на исходный режим $2C^0$. Снятие управляющего сигнала в этом случае приводит к переводу системы в режим функционирования $2C^1$.

Таким образом, переключение системы из одного состояния в другое носит пороговый характер: существует минимально необходимая амплитуда воздействия для того, чтобы произошло переключение. Как показывают исследования, это пороговое значение амплитуды достигает точного минимума при совпадении частот сигналов с половиной базовой частоты колебаний. На рис. 7 построена зависимость порогового значения амплитуды воздействия A_0 для переключения с колебаний $2C^0$ на колебания $2C^1$ от отношения частот ω/ω_0 (линия l_1). Если выбрать начальные условия, соответствующие предельному циклу $2C^1$, и разность фаз между управляющими сигналами $\phi = 0$, то аналогичным образом можно осуществить переключение на режим $2C^0$. Минимальное значение амплитуды воздействия будет в этом случае выше, однако сам характер зависимости порогового значения амплитуды от частоты воздействия сохранится. Данная зависимость представлена на том же рис. 7 (линия l_2). Из графика видно, что указанные зависимости имеют минимум при соотношении частот $\omega/\omega_0 = 0.5$ и монотонно растут с отстройкой по частоте. Переключение в прямом и обратном направлении происходит при разных значениях амплитуды: кривая l_2 идет выше кривой l_1 , то есть переключение с режима $2C^1$ на режим $2C^0$ требует более сильного управляющего воздействия.

Рассмотренный выше эффект управления наблюдается и при других значениях параметров. Исследования показывают, что качественная картина этих процессов сохраняется, однако пороговое значение амплитуды воздействием существенным образом зависит от значений параметра α .

На рис. 8, *a* построена зависимость порогового значения переключения $2C^0 \rightarrow 2C^1$ от параметра α при фиксированном значении частоты $\omega = 0.5\omega_0$. Для

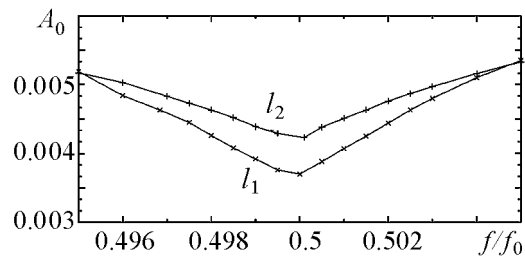


Рис. 7. Амплитуда, требуемая для переключения системы из одного режима функционирования в другой и наоборот. Параметры генераторов: $\alpha = 8.3$, $\beta = 14.0$, $K = 0.01$

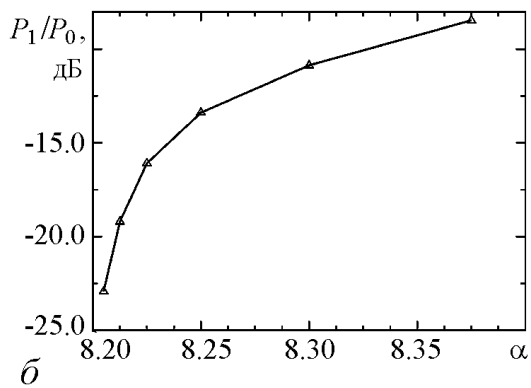
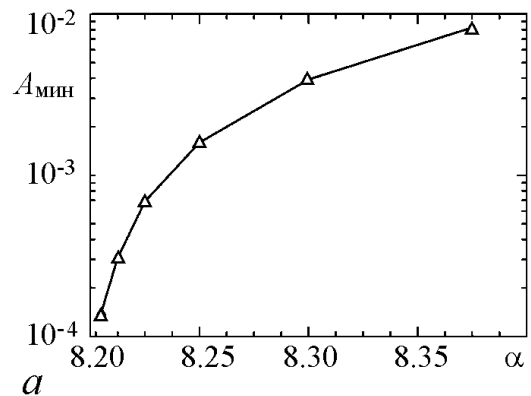


Рис. 8. *a* – Зависимость порогового значения переключения от параметра α . *б* – Зависимость отношения величины первой субгармоники к величине основной гармоники в спектре колебаний $2C^0$ от α . Параметры генераторов: $\alpha = 8.3$, $\beta = 14.0$, $K = 0.01$

большой наглядности эта зависимость построена в логарифмическом масштабе по оси амплитуд сигнала. Видно, что наименьшее пороговое значение достигается в точке бифуркации удвоения периода, когда амплитуда субгармоник практически равна нулю. В этом случае для переключения системы между состояниями достаточно величины воздействия в сотые доли процента от амплитуды колебаний в системе. С ростом α достаточно быстро растет и значение порога переключений. В районе второй бифуркации удвоения периода это значение приближается к 1% от амплитуды колебаний. Рост порогового значения, по-видимому, связан с ростом амплитуды субгармоник в спектре колебаний генераторов при увеличении α . Для сопоставления на рис. 8, б построена зависимость отношения мощности первой субгармоники к мощности основной гармоники в спектре колебаний $2C^0$ от α . Эта зависимость также выражена в логарифмическом масштабе (в децибелах). Сопоставление двух рисунков позволяет говорить о схожести этих двух зависимостей.

4. Вынужденная синхронизация би-фазным сигналом

Известно, что воздействие внешней периодической силы на автоколебательную систему приводит к синхронизации автоколебаний. Явление вынужденной синхронизации внешним гармоническим скалярным сигналом хорошо изучено [25]. Однако в данном случае мы имеем дело с синхронизацией под действием нескольких сигналов одинаковой частоты, но с разными фазами. Каким образом происходит синхронизация в данном случае?

Рассмотрим какие режимы сосуществуют на плоскости параметров «частота – амплитуда» при выборе начальных условий как на аттракторе $2C^0$, так и на аттракторе $2C^1$. Выберем значение частоты воздействия в окрестности $0.5\omega_0$ и разностью фаз между двумя сигналами $\phi = \pi$. Результаты анализа представлены на рис.9. Здесь пунктирными линиями l_1 и l'_1 отмечены границы области синхронизации колебаний на базе цикла $2C^1$. Разность фаз между сигналами $s_1(t)$ и $s_2(t)$ равна разности фаз колебаний на данной частоте в самих генераторах. Можно сказать, что такое воздействие является «естественным» для колебаний данной моды.

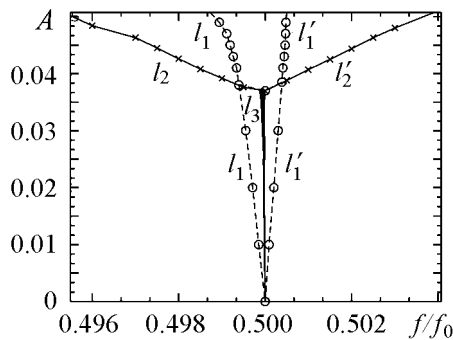


Рис. 9. Бифуркационная диаграмма. Пунктирной линией показана граница области синхронизации генераторов, функционирующие в режиме 2^1 с внешним воздействием с разностью фаз 180° . Параметры генераторов: $\alpha = 8.3$, $\beta = 14.0$, $K = 0.01$

На линии $A = 0$ происходит мягкое рождение квазипериодических колебаний, которым в фазовом пространстве соответствует двумерный тор $2T^1$. При изменении частоты наблюдается эффект синхронизации на торе, в результате чего на поверхности тора рождается двух-оборотный устойчивый предельный цикл $2C^1_N$. Линии, ограничивающие область синхронизации, обозначены на рисунке как l_1 и l'_1 . Область синхронизации имеет типичную форму «клюва», опирающуюся на линию рождения тора в точке $\omega/\omega_0 = 0.5$.

Выберем теперь начальные условия на синфазном цикле $2C^0$. Также как и в случае воздействия на один осциллятор, при воздействии на два генератора на линии $A = 0$ происходит мягкое рождение квазипериодических колебаний $2C^0 \rightarrow 2T^0$. На рис. 10, *a* изображена проекция стробоскопического сечения аттрактора в переменных x_1 и y_1 при $A = 0.0035$, $\omega = 1.3474$. Рассмотрим, как будет происходить синхронизация колебаний при изменении частоты воздействия. Выберем $A = 0.0035$, $\omega = 1.3474$, что соответствует двумерному тору, и начнем плавно повышать частоту воздействия. Построим 200 последовательных точек стробоскопического сечения, которые будем обозначать квадратами. Само сечение показано на рисунке линией. Как видно из рис. 10, *a*, вначале все точки почти равномерно ложатся на инвариантную кривую в сечении. При приближении к соотношению $\omega = 0.5\omega_0$ эта равномерность нарушается. Так, при $\omega = 1.35$ (рис. 10, *b*) уже лишь часть секущей покрывается этими двумястами последовательными точками. Мы видим, что точки начинают концентрироваться на секущей. Эта концентрация достигает своего максимума при точном совпадении частот $\omega = 0.5\omega_0$, когда вместо квазипериодических колебаний наблюдаются периодические. Данный случай изображен на рис. 10, *в*. Двумерный тор больше не наблюдается и его сечение построено пунктиром. Все точки пересечения секущей концентрируются в точке, изображенной на рисунке звездочкой. При переходе через значение $\omega = 0.5\omega_0$ процесс развивается в обратном направлении (рис. 10, *г*).

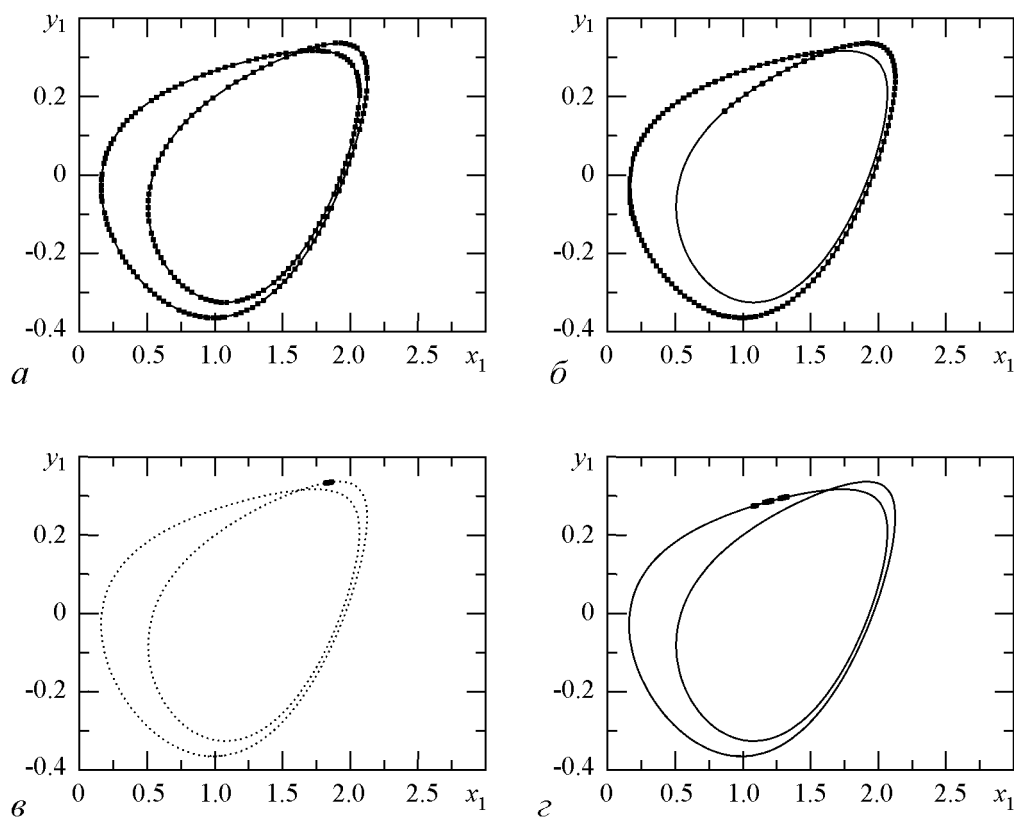


Рис. 10. Стробоскопическое сечение колебательных режимов при изменении частоты воздействия: *a* – $\omega = 1.3474$, *b* – $\omega = 1.35$, *в* – $\omega = 1.3541$, *г* – $\omega = 1.3542$. Значения параметров $A = 0.0035$, $K = 0.01$, $\alpha = 8.3$

Таким образом, при двойном воздействии с нестандартным для данного типа колебаний значением разности фаз, также как и при воздействии одним сигналом, наблюдается синхронизация через захват частоты. Однако, в отличие от стандартной ситуации, при данном воздействии отсутствует скольнибудь заметная область синхронизации. При изменении частоты колебания становятся периодическими только на линии l_2 , соответствующей точному соотношению $\omega = 0.5\omega_0$. На рисунке данная линия имеет конечную толщину, вследствие конечной точности эксперимента. При подходе к этой линии скорость изображающей точки замедляется и стремится к нулю при приближении к ней. На самой линии изображающая точка останавливается, а при пересечении линии l_2 – начинает вращаться в противоположном направлении. На всей плоскости параметров, за исключением линии l_2 , вплоть до линии переключения (l_3 и l'_3) существуют квазипериодические колебания $2T^0$. При пересечении линии l_3 или l'_3 тор $2T^0$ перестает быть притягивающим и траектория переходит на один из режимов, образованных на базе цикла $2C^1$.

Таким образом, на плоскости параметров ниже линий l_3 и l'_3 сосуществует два режима: тор $2T^0$ и цикл $2C^1_N$ (внутри области синхронизации) и торы $2T^0$ и $2T^1$ (вне области синхронизации). Выше линий l_3 и l'_3 существует только один режим: либо $2C^1_N$ – внутри области синхронизации, либо $2T^1$ – вне ее.

Исследование процессов синхронизации системы связанных генераторов при гармоническом внешнем воздействии на оба генератора показало, что в зависимости от выбора значений разности фаз между сигналами задающего генератора, синхронизация происходит по-разному. Если разность фаз выбирается равной разности фаз между соответствующими гармониками в спектрах колебаний подсистем, то синхронизация происходит так же, как и при воздействии на один генератор. Если разность фаз выбирается противоположной разности фаз, существующей между колебаниями подсистем, то синхронизация наблюдается лишь при точном совпадении частоты воздействия с частотой задающего генератора, то есть область синхронизации вырождается в линию.

5. Управление сложными колебательными режимами

Предлагаемый метод управления мультистабильными состояниями может быть распространен и на более сложные колебательные режимы. Рассмотрим, как происходит переключение между сосуществующими хаотическими аттракторами.

В ходе каскадов бифуркации удвоения периода на основе циклов $2C^0$ и $2C^1$ образуются хаотические двухленточные аттракторы $2A^0$ и $2A^1$, фазовые портреты и спектры которых построены на рис. 11, а и рис. 11, б, соответственно. Характер колебаний и вид спектров мощности этих аттракторов почти идентичен, за исключением фазовых соотношений между колебаниями подсистем. Как видно из рисунков, в спектре мощности этих мод присутствуют пики на базовой частоте ω_0 , ее гармониках $n\omega_0$, а также пики на субгармониках $0.5(2n + 1)\omega_0$. В работе [12] было показано, что разности фаз, соответствующие этим гармоническим составляющим, «наследуют» разности фаз периодических колебательных режимов, на базе которых данные аттракторы были сформированы, а именно, $2C^0$ и $2C^1$. Для режима $2A^0$ фазы гармоник и субгармоник равны нулю; для режима $2A^1$ фазы гармоник равны нулю, а фазы субгармоник – π . Фазы остальных составляющих спектров являются случайными величинами, равномерно распределенными в диапазоне значений от $-\pi$ до π .

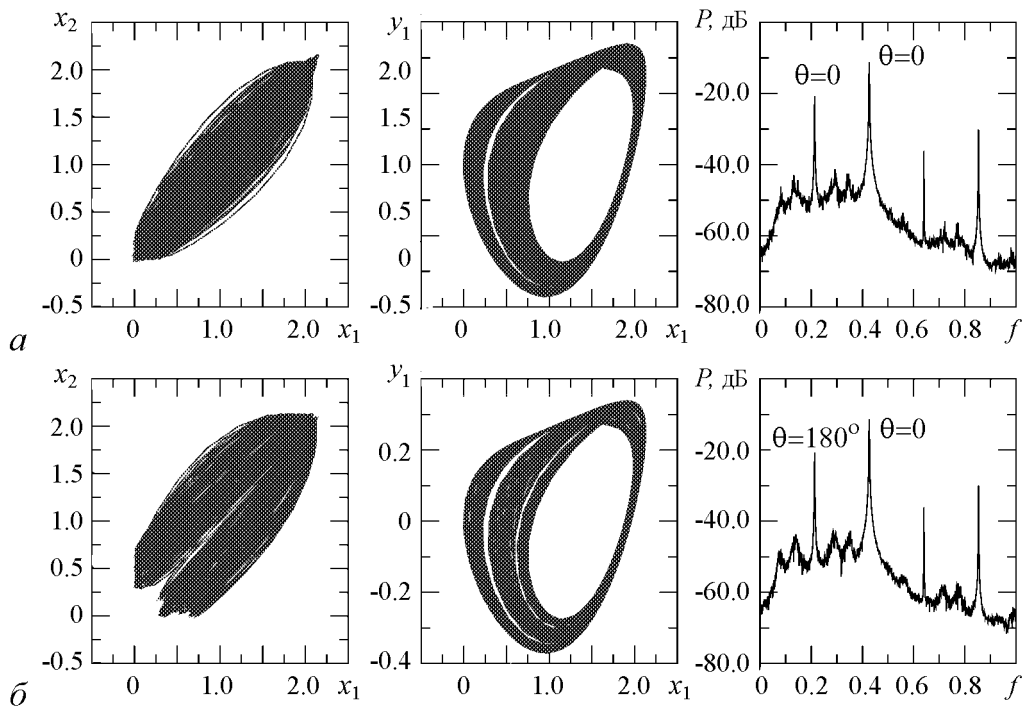


Рис. 11. Проекция фазовых портретов и спектры мощности хаотических колебаний: $a - 2A^0$, $b - 2A^1$. Параметры генераторов: $\alpha = 8.48$, $\beta = 14.0$, $K = 0.01$

Поскольку спектры колебаний хаотических аттракторов $2A^0$ и $2A^1$ отличаются фазами субгармоник, для них можно применить тот же метод управления, что и для исходных периодических режимов. Выберем в качестве исходного режима $2A^1$ (см. рис. 11, б), для которого значение фаз взаимного спектра на субгармониках равно нулю. Нашей целью является переключение с этого режима на целевой режим $2A^0$, для которого фазы субгармоник равны нулю. Будем использовать тот же метод, что и для периодических колебаний. Подадим внешнее воздействие с частотой $\omega = 0.5\omega_0 = 1.347$ и фазой $\phi = 0$. Амплитуду воздействия будем плавно увеличивать от нуля, наблюдая при этом за изменениями фазовых портретов и спектров режима $2A^1$. При подаче управляющего сигнала, начиная примерно с значения амплитуды $A \simeq 0.0025$, генераторы переходят в режим «объединенного» аттрактора, при котором наблюдается временные переключения между двумя сосуществующими режимами. Если в этот момент выключить управляющий сигнал, система случайным образом перейдет на один из аттракторов $2A^0$ либо $2A^1$. При увеличении амплитуды воздействия, начиная примерно с амплитуды $A \simeq 0.007$, характер аттрактора меняется: проекция фазового портрета оказывается сходной с проекцией аттрактора $2A^0$. В этом случае при выключении управляющего воздействия неопределенность перехода исчезает, система во всех случаях переходит на аттрактор $2A^0$.

Характер происходящих изменений наглядно проявляется в спектрах колебаний указанных режимов. На рис. 12 построены спектры мощностей, взаимные фазовые спектры и графики функции когерентности для колебаний на базе $2A^1$ при последовательно увеличивающихся значениях амплитуды воздействия. На рис. 12, а данные характеристики приведены для исходного аттрактора $2A^1$. Видно, что значения взаимной фазы базовой гармоники концентрируются вблизи нуля, а значения

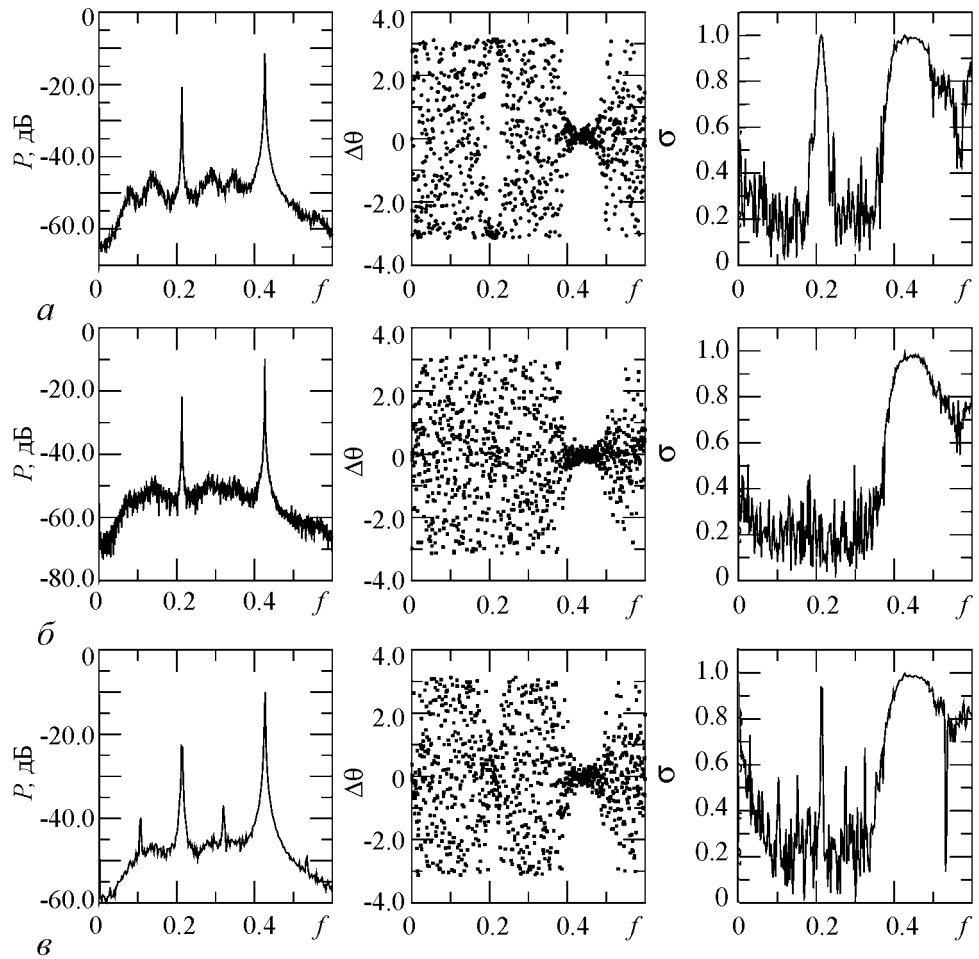


Рис. 12. Спектр мощности P , взаимный фазовый спектр $\Delta\theta$ и функция когерентности σ хаотических колебаний на базе аттрактора $2A^1$ при разных амплитудах управляющего сигнала A : $a - 0$, $б - 0.003$, $в - 0.007$

фазы субгармоники – вблизи π . Детерминированный характер фазового спектра на этих частотах подтверждается поведением функции когерентности, которая для них близка к единице. При переходе к «объединенному» аттрактору характер спектральных характеристик существенно меняется. Хотя спектр мощности имеет ту же форму с двумя выраженными пиками, фазовый спектр на частоте основной гармоники остается детерминированным, а на частоте субгармоники «расплывается», что подтверждается резким уменьшением функции когерентности для этой частоты (рис. 12, б). Наконец, при большой амплитуде воздействия, фазовый спектр снова структурируется, но уже около нового значения $\Delta\theta = 0$, что подтверждается ростом значения функции когерентности на этой частоте.

Если в качестве исходного режима выбрать хаотический режим $2A^1$, то указанную выше методику можно использовать, задавая фазу управляющего воздействия $\phi = 0$. В этом случае сначала происходит переход к «объединенному» режиму, а затем при $A \simeq 0.007$ – к аттрактору, фазовый портрет которого аналогичен портрету аттрактора $2A^0$. Выключение управляющего воздействия приводит к переходу на режим $2A^0$.

Заключение

В работе предложен новый метод управления фазовой мультистабильностью в двух связанных генераторах, основанный на «затягивании» колебаний в нужный режим при помощи внешних гармонических сигналов на частоте субгармоники, прикладываемых к подсистемам. Изменяя разность фаз между этими сигналами, можно управлять переключениями между сосуществующими колебательными модами. Метод работает как для периодических, так и хаотических колебаний.

Исследована синхронизация автоколебаний при би-фазном гармоническом воздействии. Обнаружено, что ширина области синхронизации существенно зависит от величины разности фаз внешних сигналов. Если данная разность фаз равна разности фаз соответствующих гармоник в спектре автоколебаний, область синхронизации имеет характерный вид «языка Арнольда». Если разность фаз существенно отличается от этой величины – область синхронизации вырождается в линию и синхронизации наблюдается лишь в точке совпадения частот.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ по программе «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (Контракт № 14.740.11.0074).

Библиографический список

1. *Arecchi F.T., Meucci R., Puccioni G., Tredicce J.* Experimental evidence of subharmonic bifurcations, multistability, and turbulence in a Q-switched gas laser // *Phys. Rev. Lett.* 1982. Vol. 49. P. 1217.
2. *Prengel F., Wacker A., Scholl E.* Simple model for multistability and domain formation in semiconductor superlattices // *Phys. Rev. B.* 1994. Vol. 50. P. 1705.
3. *Sun N.G., Tsironis G.P.* Multistability of conductance in doped semiconductor superlattices // *Phys. Rev. B.* 1995. Vol. 51. P. 11221.
4. *Foss J., Longtin A., Mensour B., Milton J.* Multistability and delayed recurrent loops // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76. P. 708.
5. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Гуляев Ю.П., Селезнев Е.П.* Мультистабильные состояния в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах // *Письма в ЖТФ.* 1989. Т. 15, № 3. С. 60.
6. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Ерастова Е.Н., Селезнев Е.П.* Формы колебаний и их эволюция в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах // *Журнал Технической Физики.* 1990. Т. 60, № 10. С. 19.
7. *Дворников А.А., Уткин Г.М., Чуков А.М.* О взаимной синхронизации цепочки резистивно связанных автогенераторов // *Известия вузов. Радиофизика.* 1984. Т. 27, № 11. С. 1388.
8. *Ermentrout G.B.* The behaviour of rings of coupled oscillators // *J. of Math. Biol.* 1985. Vol. 23, № 1. P. 55.
9. *Ermentrout G.B.* Stable periodic solutions to discrete and continuum arrays of weakly coupled nonlinear oscillators // *SIAM J. of Appl. Math.* 1992. Vol. 52, № 6. P. 1664.
10. *Matias M.A., Guemez J., Perez-Munuzuri V., Marino I.P., Lorenzo M.N., Perez-*

- Villar V.* Observation of a fast rotating wave in rings of coupled chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78, № 2. P. 219.
11. *Balanov A.G., Janson N.B., Astakhov V.V., McClintock P.V.E.* Role of saddle tori in the mutual synchronization of periodic oscillations // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 72. 026214.
 12. *Астахов В.В., Шабунин А.В., Анищенко В.С.* Спектральные закономерности при формировании мультистабильности в связанных генераторах с удвоением периода // *Радиотехника и Электроника.* 1997. Т. 42, № 8. С. 974.
 13. *Shabunin A., Feudel U., Astakhov V.* Phase multistability and phase synchronization in an array of locally coupled period-doubling oscillators // *Phys. Rev. E.* 2009. Vol. 80. 026211.
 14. *Bezruchko B.P., Prokhorov M.D., Seleznev E.P.* Oscillation types, multistability, and basins of attractors in symmetrically coupled period-doubling systems // *Chaos, Solitons and Fractals.* 2003. Vol. 15. P. 695.
 15. *Lai Y.-C.* Driving trajectories to a desirable attractor by using small control // *Phys. Lett. A.* 1996. Vol. 221. P. 375.
 16. *Macau E.E.N., Grebogi C.* Driving trajectories in complex systems // *Phys. Rev. E.* 1999. Vol. 59. P. 4062.
 17. *Pisarchik A.N., Goswami B.K.* Annihilation of one of the coexisting attractors in a bistable system // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 84. P. 1423.
 18. *Егоров Е.Н., Короновский А.А.* К вопросу об управлении динамическими режимами в системе, демонстрирующей мультистабильность // *Письма в ЖТФ.* 2004. Т. 30, вып. 5. Стр. 30.
 19. *Goswami B.K., Euzzor S., Naimee K.A., Geltrude A., Meucci R., Arcelli F.T.* Control of stochastic multistable systems: Experiment demonstration // *Phys. Rev. E.* 2009. Vol. 80. 016211.
 20. *Goswami B.K.* Control of multistate hopping intermittency // *Phys. Rev. E.* 2008. Vol. 78. 066208.
 21. *Астахов В.В., Щербаков М.Г., Коблянский С.А., Шабунин А.В.* Синхронизация пространственно-периодических режимов цепочки генераторов с фазовой мультистабильностью // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2008. Т. 16, № 4. С. 65.
 22. *Komuro M., Tokunaga R., Matsumoto T., Chua L.O., Hotta A.* Global bifurcation analysis of the double-scroll circuit // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 1991. Vol. 1, № 1. P. 139.
 23. *Khibnik A.I., Roose D., Chua L.* // *Chua's circuit: A paradigm for chaos.* Singapore: World Scientific, 1993. P. 145.
 24. *Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.V., Wu C.W., Chua L.* Dynamics of two coupled Chua's circuits // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* 1995. Vol. 5, № 6. P. 1677.
 25. *Блехман И.И.* Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского
Саратовский государственный
технический университет*

*Поступила в редакцию 5.07.2010
После доработки 12.12.2010*

CONTROL OF MULTISTABILITY BY MEANS OF BI-PHASE RESONANCE FORCE

A.V. Shabunin, A.N. Litvinenko, V.V. Astakhov

We propose a new method of control of phase multistability in two coupled self-sustained oscillators. The method is based on the «pulling» of phases of oscillations to the target mode under two external harmonic forces, which influence the first and the second sub-systems simultaneously. Varying the phase shift between the external signals results in control of switching between coexisting oscillating modes. Effectiveness of the method is demonstrated on the example of switching between periodic and chaotic regimes in two Chua's oscillators.

Keywords: Phase multistability, synchronization, control of multistability.



Шабунин Алексей Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1990). Доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ, доктор физико-математических наук (2008). Научные интересы – нелинейная динамика, теория колебаний, синхронизация и управление хаосом. Автор более 40 научных публикаций.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: shabuninav@info.sgu.ru



Литвиненко Артем Николаевич – родился в 1989 году в Вольске Саратовской области. В 2005 году поступил на физический факультет Саратовского государственного университета. В настоящее время – студент 5 курса кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов: нелинейная динамика, радиоэлектроника, цифровая обработка сигналов, схемотехника цифровых и аналоговых устройств.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: litvinenkoan@gmail.com



Астахов Владимир Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1980). Доктор физико-математических наук (1999). Работает заведующим кафедрой радиотехники Саратовского государственного технического университета. Область научных интересов – теория колебаний и динамический хаос, синхронизация и управление хаосом. Имеет более 80 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.

410054 Саратов, ул. Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет
E-mail: v-astakhov@yandex.ru



РЕЖИМЫ ДИНАМИКИ ГЕНЕТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ И ЧИСЛЕННОСТИ В ЭВОЛЮЦИОННОЙ МОДЕЛИ ДВУХВОЗРАСТНОЙ ПОПУЛЯЦИИ

О.Л. Жданова, Д.А. Бажина

В работе исследуются режимы динамики генетической структуры и численности структурированной популяции. На генетическом уровне определяются репродуктивный потенциал популяции и выживаемость половозрелых особей на последующих годах жизни. Показано, что эволюционное увеличение средней приспособленности сопровождается возникновением в модели сложной динамики численности и генетического состава популяции. Дальнейший рост приспособленности способен стабилизировать генетический состав популяции и флуктуации разной степени сложности будет испытывать уже только ее численность. Тип финального генетического равновесия сильно зависит от начальных условий, то есть влияние внешних условий может оказаться весьма существенным в определении направления эволюции естественной популяции.

Ключевые слова: Динамика численности, полиморфизм, мономорфизм, бассейн притяжения, устойчивость, аттрактор.

Введение

Жизненные циклы многих биологических видов имеют ярко выраженную временную периодичность, как правило, приуроченную к сезонной периодичности климата земли. Подавляющее большинство таких видов имеют четко очерченный (весьма небольшой) сезон размножения, во время которого каждая локальная популяция представляет собой совокупность дискретных непересекающихся возрастных классов. Во многих случаях численности каждого из этих классов определяются, в основном, численностями предшествующих возрастных классов в предыдущий репродуктивный период.

Для однолетних растений, многих видов насекомых, некоторых видов рыб, земноводных и пресмыкающихся каждая отдельная популяция представляет собой один возрастной класс и смежные поколения такой популяции не перекрываются.

В начале 1970-х годов появились глубокие исследования моделей динамики численности однородных популяций дальневосточного ученого А.П. Шапиро [1,2]

и его американского коллеги Мэя [3]. Исследование хаотических режимов динамического поведения, имеющего место в моделях Мэя, Риккера, Хасселла и др. [4,5], позволяет выявить некоторые общие закономерности, проявляющиеся при достаточно больших значениях репродуктивного потенциала и степени экологического лимитирования. Если в начале такого хаотического поведения значение численности невелико, то в течение достаточно большого ряда последовательных поколений будет наблюдаться медленный рост, который может сопровождаться в отдельных поколениях даже некоторыми небольшими спадами. После этого происходит резкое увеличение численности, сопровождающееся в следующей генерации значительно большим падением ее до значения, близкого к начальному уровню. Эти периодические «переломы» не будут, однако, возвращать популяцию точно на начальный уровень. Следовательно, несмотря на явный периодический характер изменения численности, не будет обнаружено полных совпадений ни по значениям численности, ни по числу генераций в фазе возрастания. Подобное не строго периодическое поведение численности характерно для некоторых естественных популяций высших организмов [6–9], особенно насекомых: саранчи, кузнечиков, ночных мотыльков.

1. Моделирование динамики популяций, состоящих из двух возрастных классов

В простейших моделях популяционной динамики рассматривают лишь изменения общей численности популяции в предположении, что различные ее поколения не перекрываются. Если же продолжительность жизни каждого поколения оказывается существенно больше времени, протекающего между сезонами размножения, то каждая локальная популяция во время размножения состоит из особей, принадлежащих к разным возрастным группам. В этом случае численности каждой выделяемой возрастной группы естественно рассматривать в качестве переменных модели. Способ разбиения популяции на возрастные группы обычно определяется биологическими особенностями рассматриваемого вида.

Рассмотрим модель популяции с возрастной структурой, которая может быть представлена совокупностью двух возрастных классов: младшего, включающего неполовозрелых особей, и старшего, состоящего из особей, участвующих в размножении.

Обозначим x_n – численность младшего возрастного класса в n -й сезон размножения, а y_n – численность репродуктивной части популяции. Период размножения заканчивается появлением новорожденных особей следующего поколения. Будем предполагать, что времени, протекающего между двумя последовательными периодами размножения, достаточно для развития особей младшего возраста до половозрелого состояния, а новорожденных (или личинок) до состояния младшего возраста. Допустим, что выживаемость и воспроизводительная способность половозрелых особей не зависит от возраста. Это правомерно для организмов с небольшим временем жизни, включающим два-три периода размножения, как у многих насекомых, рыб, мелких млекопитающих, двух-, трехлетних растений и др.

Обозначим через $a(y)$ – произведение коэффициентов рождаемости и выживаемости приплода на первом году жизни, а $f(x)$ и $g(y)$ – произведение коэффици-

ентов выживаемости неполовозрелых и половозрелых особей, соответственно. Если действие лимитирующих факторов сосредоточено на стадии неполовозрелого возрастного класса, то $a(y) \equiv a$, $g(y) \equiv c$. Константы a и c положительны, причем $c < 1$. Поскольку плотностно-зависимые факторы обычно лимитируют развитие популяции, выживаемость младшей возрастной группы $f(x)$ является убывающей функцией (то есть $f'(x) < 0$), стремящейся к нулю при бесконечном возрастании аргумента. Уравнения динамики, связывающие численности выделенных возрастных классов в смежных поколениях в этом случае имеют вид

$$\begin{cases} x_{n+1} = ay_n, \\ y_{n+1} = x_n f(x_n) + cy_n. \end{cases} \quad (1)$$

Обычно полагают, что лимитирование роста численности младшего возрастного класса осуществляется по линейному $f(x) = 1 - x$ либо экспоненциальному $f(x) = e^{-x}$ закону. Тогда (1) имеет вид

$$\begin{cases} x_{n+1} = ay_n, \\ y_{n+1} = x_n(1 - x_n) + cy_n, \end{cases} \quad (2.1)$$

или

$$\begin{cases} x_{n+1} = ay_n, \\ y_{n+1} = x_n e^{-x_n} + cy_n. \end{cases} \quad (2.2)$$

Подробный анализ закономерностей возникновения и эволюции сложных предельных множеств моделей (2.1) и (2.2) показал, что для большой области допустимых (биологически содержательных) значений параметров такими предельными множествами являются странные аттракторы весьма разнообразной и причудливой формы [10,11].

2. Моделирование естественного отбора в популяциях, состоящих из двух возрастных классов

Естественно будет предположить, что рост плодовитости особей и их выживаемости в природных популяциях происходит в процессе их эволюции под действием естественного отбора. Для принципиального понимания основных результатов действия естественного отбора в природной популяции достаточно рассмотреть самый простой случай, когда адаптивный признак кодируется одним диаллельным локусом с аллеломорфами A и a .

Сделаем ряд естественных предположений, касающихся процесса размножения и выживания. Пусть в рассматриваемой популяции имеет место панмиксия гамет (с равной гаметопродукцией всех генотипов) или панмиксия зигот (с равными коэффициентами рождаемости у всех генотипов). Естественный отбор действует на стадии зигот; поставим каждому генотипу в соответствие по коэффициенту w_{ij} – приспособленность ij -го генотипа зародышей ($w_{ij} \geq 0$). Выжившие в результате естественного отбора зародыши к следующему $(n+1)$ -му сезону размножения составят младший возрастной класс x_{n+1} неполовозрелых особей. Выживаемость неполовозрелых особей определяется условиями плотностно-зависимого отбора $f(x_n)$

и не зависит от их генотипов. Выживаемость старшего возрастного класса y_n или половозрелых особей постоянна и также не зависит от их генотипов. Сделанных предположений достаточно, чтобы получить следующие уравнения динамики, связывающие численности возрастных классов и их генетический состав в смежных поколениях [12]:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \bar{w}_n y_n, \\ y_{n+1} = x_n f(x_n) + c y_n, \\ q_{n+1} = \frac{p_n (w_{AA} p_n + w_{Aa} (1 - p_n))}{\bar{w}_n}, \\ p_{n+1} = \frac{x_n f(x_n) q_n + c y_n p_n}{x_n f(x_n) + c y_n}, \end{cases} \quad (3)$$

где p_n – частота аллеля A в старшем возрастном классе; q_n – частота аллеля A в младшем возрастном классе; \bar{w}_n – репродуктивный потенциал старшего возрастного класса (или средняя приспособленность зародышей) определяется по формуле

$$\bar{w}_n = w_{AA} p_n^2 + 2w_{Aa} p_n (1 - p_n) + w_{aa} (1 - p_n)^2. \quad (3.1)$$

В работе [12] выполнено исследование модели (3), когда генетически определяется только выживаемость зародышей \bar{w}_n , а выживаемость репродуктивного класса особей c для определенной популяции является постоянной.

С другой стороны, генетически может определяться не только выживаемость зародышей \bar{w}_n , но и выживаемость c половозрелых особей на последующих годах жизни. Пусть выживаемость старшей возрастной группы y_n также определяется рассматриваемым адаптивным локусом $\{A, a\}$, тогда каждому генотипу поставим в соответствие еще по одному коэффициенту c_{ij} , определяющему выживаемость половозрелых особей ij -го генотипа на последующих годах жизни ($0 \leq c_{ij} < 1$). В этом случае константа c в модели (3) будет заменена функцией \bar{c}_n

$$\bar{c}_n = c_{AA} p_n^2 + 2c_{Aa} p_n (1 - p_n) + c_{aa} (1 - p_n)^2, \quad (3.2)$$

определяющей среднюю выживаемость старшей возрастной группы y_n в n -м поколении.

Ситуация, когда один генный локус влияет на несколько признаков, не является искусственной. Как правило, один ген воздействует на несколько фенотипических признаков. Такие гены называются *плейотропными*. Продукт каждого гена часто используется в нескольких переплетающихся друг с другом процессах роста и развития организма. Особенно характерна *плейотропия* для генов, кодирующих сигнальные белки. Также, по-видимому, существуют *плейотропные гены*, которые оказывают неодинаковые (вплоть до антагонистических) эффекты на выживание особей в разные периоды их развития (например, позитивное влияние на размножение в молодом возрасте, но негативное воздействие на организм в позднем возрасте) [13,14]. Исследуем динамику эволюционной модели двухвозрастной популяции c

одним плейотропным локусом

$$\begin{cases} x_{n+1} = \bar{w}_n y_n, \\ y_{n+1} = x_n f(x_n) + \bar{c}_n y_n, \\ q_{n+1} = \frac{p_n(w_{AA} p_n + w_{Aa}(1 - p_n))}{\bar{w}_n}, \\ p_{n+1} = \frac{x_n f(x_n) q_n + \bar{c}_n y_n p_n}{x_n f(x_n) + \bar{c}_n y_n}, \end{cases} \quad (4)$$

где средняя приспособленность зародышей \bar{w}_n определяется по формуле (3.1), средняя выживаемость старшей возрастной группы \bar{c}_n по формуле (3.2), а плотностное лимитирование младшего возрастного класса осуществляется по линейному или экспоненциальному закону

$$f(x_n) = 1 - x_n, \quad (4.1)$$

$$f(x_n) = e^{-x_n}. \quad (4.2)$$

2.1. Стационарные точки и области их устойчивости в модели двух – возрастной популяции с одним плейотропным локусом. Кроме тривиальной ($\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$), в каждой из рассматриваемых моделей могут существовать две монотропные и одна полиморфная стационарные точки.

1. $\{p_1 = 1, q_1 = 1,$

в случае линейного лимитирования (4.1):

$$y_1 = \frac{w_{AA} + c_{AA} - 1}{w_{AA}^2}, \quad x_1 = \frac{w_{AA} + c_{AA} - 1}{w_{AA}};$$

в случае экспоненциального лимитирования (4.2):

$$y_1 = -\frac{\ln\left(\frac{1 - c_{AA}}{w_{AA}}\right)}{w_{AA}}, \quad x_1 = -\ln\left(\frac{1 - c_{AA}}{w_{AA}}\right);$$

2. $\{p_2 = 0, q_2 = 0,$

в случае линейного лимитирования (4.1):

$$y_2 = \frac{w_{aa} + c_{aa} - 1}{w_{aa}^2}, \quad x_2 = \frac{w_{aa} + c_{aa} - 1}{w_{aa}};$$

в случае экспоненциального лимитирования (4.2):

$$y_2 = -\frac{\ln\left(\frac{1 - c_{aa}}{w_{aa}}\right)}{w_{aa}}, \quad x_2 = -\ln\left(\frac{1 - c_{aa}}{w_{aa}}\right);$$

3. $\{p_3 = \frac{w_{aa} - w_{Aa}}{w_{AA} - 2w_{Aa} + w_{aa}}, q_3 = \frac{w_{aa} - w_{Aa}}{w_{AA} - 2w_{Aa} + w_{aa}},$

в случае линейного лимитирования (4.1):

$$y_3 = (2w_{Aa}^3 + w_{Aa}^2(c_{AA} + 2c_{Aa} + c_{aa} - w_{AA} - 4) - 2w_{AA}w_{Aa}(c_{Aa} + c_{aa} - 2) +$$

$$\begin{aligned}
& +w_{AA}^2(c_{aa}-1)+w_{aa}^2(c_{AA}+w_{AA}-1)-w_{aa}(w_{Aa}^2-w_{AA}(w_{AA}+2c_{Aa}-2)+ \\
& +2w_{Aa}(w_{AA}+c_{AA}+c_{Aa}-2)))/(w_{Aa}^2-w_{AA}w_{aa})^2, \\
x_3 = 1 + \frac{c_{aa}-1}{w_{aa}} - \frac{c_{AA}-2c_{Aa}+c_{aa}}{w_{AA}-2w_{Aa}+w_{aa}} + \\
& + \frac{w_{aa}^2(c_{AA}-1)-2w_{Aa}w_{aa}(c_{Aa}-1)+w_{Aa}^2(c_{aa}-1)}{w_{aa}(w_{AA}w_{aa}-w_{Aa}^2)} \};
\end{aligned}$$

в случае экспоненциального лимитирования (4.2):

$$\begin{aligned}
\{y_3 = -\frac{w_{AA}-2w_{Aa}+w_{aa}}{w_{aa}w_{AA}-w_{Aa}^2} \ln\left(\frac{1-c_{aa}}{w_{aa}} + \frac{c_{AA}-2c_{Aa}+c_{aa}}{w_{AA}-2w_{Aa}+w_{aa}} - \right. \\
\left. - \frac{w_{aa}^2(c_{AA}-1)-2w_{Aa}w_{aa}(c_{Aa}-1)+w_{Aa}^2(c_{aa}-1)}{w_{aa}(w_{AA}w_{aa}-w_{Aa}^2)}\right), \\
x_3 = -\ln\left(\frac{1-c_{aa}}{w_{aa}} + \frac{c_{AA}-2c_{Aa}+c_{aa}}{w_{AA}-2w_{Aa}+w_{aa}} - \right. \\
\left. - \frac{w_{aa}^2(c_{AA}-1)-2w_{Aa}w_{aa}(c_{Aa}-1)+w_{Aa}^2(c_{aa}-1)}{w_{aa}(w_{AA}w_{aa}-w_{Aa}^2)}\right)\}.
\end{aligned}$$

Условия существования нетривиальных неподвижных точек модели определяются ограничениями на параметры, при выполнении которых решениями являются корректные значения численностей возрастных групп и частот аллелей в неподвижной точке: $\bar{x} > 0$, $\bar{y} > 0$, $0 \leq \bar{p} \leq 1$, $0 \leq \bar{q} \leq 1$.

Численности младшей и старшей возрастной группы в неподвижной точке будут положительны, если выполнено условие

$$\bar{w}(\bar{p}) + \bar{c}(\bar{p}) > 1. \quad (5)$$

Это условие имеет место как для модели с линейным видом лимитирования численности младшего возрастного класса, так и с экспоненциальным. В мономорфных неподвижных точках условие (5) принимает вид

$$w_{AA} > 1 - c_{AA} \quad \text{для} \quad \{p_1 = 1, q_1 = 1\}, \quad (5.1)$$

$$w_{aa} > 1 - c_{aa} \quad \text{для} \quad \{p_2 = 0, q_2 = 0\} \quad (5.2)$$

и является необходимым и достаточным условием существования нетривиальной мономорфной неподвижной точки в модели (4) с рассматриваемыми типами лимитирования (4.1), (4.2).

Для существования нетривиальной полиморфной неподвижной точки необходимо выполнение двух следующих условий:

$$\frac{w_{AA}(w_{aa} - w_{Aa}) + w_{Aa}(w_{AA} - w_{Aa})}{w_{AA} - 2w_{Aa} + w_{aa}} + \frac{c_{AA}(w_{aa} - w_{Aa})^2 + 2c_{Aa}(w_{aa} - w_{Aa})(w_{AA} - w_{Aa}) + c_{aa}(w_{AA} - w_{Aa})^2}{(w_{AA} - 2w_{Aa} + w_{aa})^2} > 1, \quad (5.3)$$

$$\{w_{Aa} > \max(w_{aa}, w_{AA}) \text{ либо } w_{Aa} < \min(w_{aa}, w_{AA})\}. \quad (6)$$

Первое из них (5.3) получается из (5) и обеспечивает неотрицательные значения стационарных численностей возрастных групп; второе (6) обеспечивает корректные значения стационарных частот аллелей.

Условия устойчивости мономорфных неподвижных точек модели удалось получить аналитически (табл., рис. 1).

Устойчивость полиморфных стационарных точек исследовалась численно в различных параметрических областях модели: $\{w_{Aa} < \min(w_{aa}, w_{AA}), c_{Aa} < \min(c_{aa}, c_{AA})\}$, $\{w_{Aa} < \min(w_{aa}, w_{AA}), c_{Aa} > \max(c_{aa}, c_{AA})\}$, $\{w_{Aa} > \max(w_{aa}, w_{AA}), c_{Aa} < \min(c_{aa}, c_{AA})\}$ и т.д. На рис. 2 приведены наиболее показательные результаты проведенного исследования. Так, при пониженной приспособленности гетерозиготы зародышей $w_{Aa} < \min(w_{aa}, w_{AA})$ в обеих моделях (4.1) и (4.2) полиморфное равновесие может существовать при достаточных величинах приспособленностей генотипов зародышей и выживаемостей репродуктивной части популяции на последующих годах жизни, но не бывает устойчивым. В области $\min(w_{aa}, w_{AA}) < w_{Aa} < \max(w_{aa}, w_{AA})$ этого равновесия не существует. При повышенной приспособленности гетерозиготы зародышей $w_{Aa} > \max(w_{aa}, w_{AA})$ появляется область параметров, где полиморфное равновесие устойчиво; в модели с экспоненциальным лимитированием эта область очень большая. Тем не менее, рост w_{Aa} , в конце концов, приводит к потере устойчивости полиморфного равновесия.

Полученные условия существования и устойчивости стационарных точек моделей позволяют нам в общих чертах охарактеризовать их динамическое поведение в зависимости от значений популяционных параметров: $w_{Aa}, w_{AA}, w_{aa}, c_{Aa}, c_{AA}, c_{aa}$; а также начальных популяционных значений: x_0, y_0, p_0 и q_0 .

Таблица

Условия устойчивости мономорфных стационарных точек

При линейном лимитировании (4.1)	$p = q = 0: \quad 1 - c_{aa} < w_{aa} < 3 - 2c_{aa}, \quad w_{aa} > w_{Aa}$ $p = q = 1: \quad 1 - c_{AA} < w_{AA} < 3 - 2c_{AA}, \quad w_{AA} > w_{Aa}$
При экспоненциальном лимитировании (4.2)	$p = q = 0: \quad 1 - c_{aa} < w_{aa} < (1 - c_{aa})e^{\frac{2-c_{aa}}{1-c_{aa}}}, \quad w_{aa} > w_{Aa}$ $p = q = 1: \quad 1 - c_{AA} < w_{AA} < (1 - c_{AA})e^{\frac{2-c_{AA}}{1-c_{AA}}}, \quad w_{AA} > w_{Aa}$

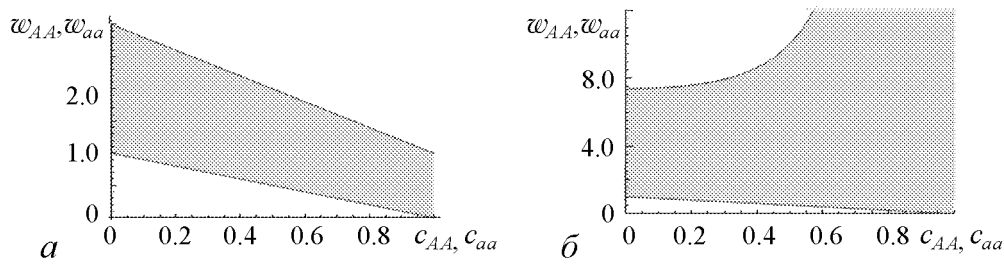


Рис. 1. Области устойчивости мономорфных стационарных точек модели с линейным (а) и экспоненциальным (б) лимитированием численности младшего возрастного класса. Предполагается, что условие $w_{AA}, w_{aa} > w_{Aa}$ выполнено: выше закрашенной области неподвижная точка неустойчива; закрашенная область соответствует параметрам модели, при которых неподвижная точка устойчива; ниже закрашенной области неподвижной точки не существует

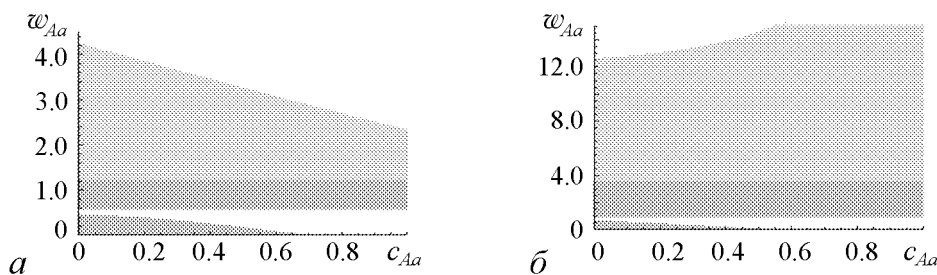


Рис. 2. Области устойчивости полиморфной неподвижной точки: а – при линейном лимитировании (значения параметров: $w_{AA} = 1.2, w_{aa} = 0.6, c_{AA} = 0.3, c_{aa} = 0.6$); б – при экспоненциальном лимитировании (значения параметров: $w_{AA} = 3.5, w_{aa} = 1, c_{AA} = 0.4, c_{aa} = 0.05$). Темно-серым обозначена область, где полиморфной неподвижной точки не существует; светло-серым – существует и устойчива; незакрашенная область – полиморфная неподвижная точка неустойчива

3. Динамика эволюционной модели двухвозрастной популяции

1. Если популяционные параметры попадают в область, где не выполняются условия существования нетривиальных мономорфных ($w_{AA} < 1 - c_{AA}, w_{aa} < 1 - c_{aa}$) и полиморфной неподвижных точек ($\min(w_{aa}, w_{AA}) < w_{Aa} < \max(w_{aa}, w_{AA})$ либо $\bar{w}(p = (w_{aa} - w_{Aa}) / (w_{AA} - 2w_{Aa} + w_{aa})) + \bar{c}(p = (w_{aa} - w_{Aa}) / (w_{AA} - 2w_{Aa} + w_{aa})) \leq 1$), популяция вымирает.

2. Увеличение значения одного из популяционных параметров w_{AA} или c_{AA} до уровня выполнения условия существования соответствующей мономорфной неподвижной точки приводит к тому, что в популяции существует только одна нетривиальная стационарная точка. Динамика модели (4) в этом случае аналогична динамике моделей (2.1), (2.2), рассмотренных в работах [10,11]. Поскольку генетически эта популяция будет однородна, репродуктивный потенциал (или выживаемость зародышей) w_{ij} и выживаемость старшей возрастной группы c_{ij} представленного в популяции генотипа играют роль параметров a и c в модели (2), соответственно.

3. При увеличении параметра w_{Aa} так, что $w_{Aa} > \max(w_{aa}, w_{AA})$ и выполняется условие (5.3), но $w_{AA} < 1 - c_{AA}, w_{aa} < 1 - c_{aa}$, в популяции существует только генетически полиморфная нетривиальная неподвижная точка. Динамика модели (4) и в этом случае похожа на динамику модели (2.1), (2.2) с той лишь разницей, что генетически популяция неоднородна, в ней присутствуют все возможные

генотипы (AA , Aa и aa); причем генетический состав популяции стабилизируется, достигая неподвижной точки $p = q = (w_{aa} - w_{Aa}) / (w_{AA} - 2w_{Aa} + w_{aa})$ из любого нетривиального генетически неоднородного начального состояния ($x_0 > 0$, $y_0 > 0$, $0 < p_0 < 1$, $0 < q_0 < 1$). Динамика численностей возрастных групп в этом случае определяется среднепопуляционными величинами выживаемостей зародышей \bar{w} и старшего возрастного класса \bar{c} , которые определяются всеми присутствующими в популяции генотипами.

4. Значения популяционных параметров, допускающие существование более одной нетривиальной неподвижной точки (например, $(w_{AA} > 1 - c_{AA})$ или $w_{aa} > 1 - c_{aa}$) и $(w_{Aa} > \max(w_{aa}, w_{AA}))$ вместе с выполнением условия (5.3)), приводят к возможности существования в популяции большего разнообразия динамических режимов. При этом, в какое именно из имеющихся неподвижных точек попадет популяция зависит уже не только от внутривидовых параметров, но и от начальных значений численностей возрастных групп и генетических частот. На рис. 3 приведены примеры областей притяжения неподвижных точек модели, построенные

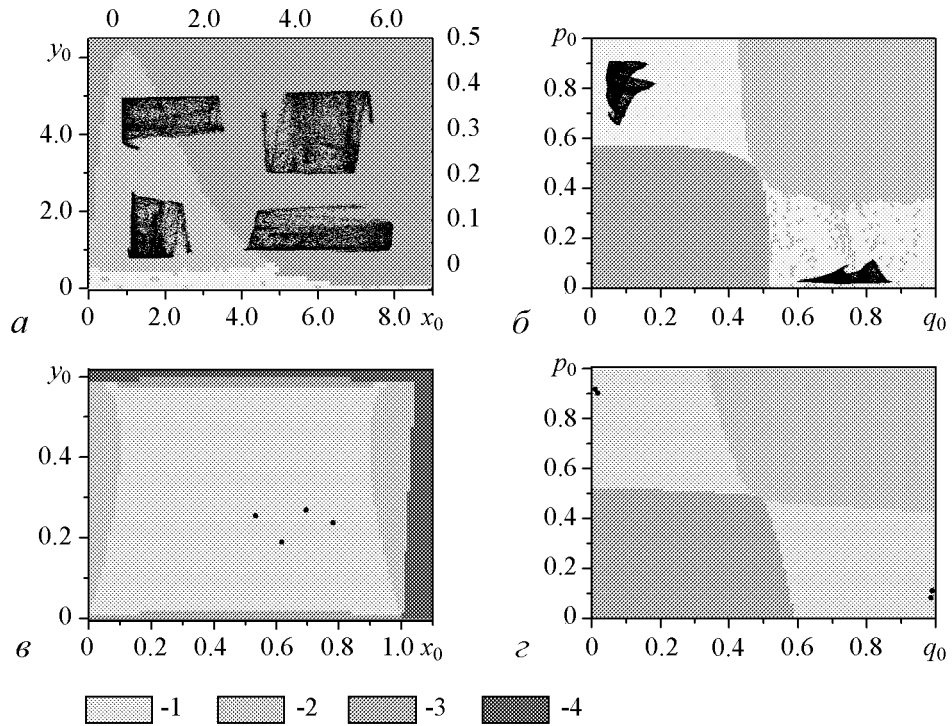


Рис. 3. Бассейны притяжения неподвижных точек: a , b – для модели с экспоненциальным лимитированием (при фиксированных значениях параметров $w_{AA} = 18$, $w_{Aa} = 6$, $w_{aa} = 17$, $c_{AA} = 0.035$, $c_{Aa} = 0.057$, $c_{aa} = 0.03$ и начальных условиях: $a - p_0 = 0.1$, $q_0 = 0.7$, $b - x_0 = 0.1$, $y_0 = 0.1$); v , z – с линейным лимитированием (при фиксированных значениях параметров $w_{AA} = 3.4$, $w_{Aa} = 0.1$, $w_{aa} = 3.2$, $c_{AA} = 0.1$, $c_{Aa} = 0.07$, $c_{aa} = 0.08$ и начальных условиях: $v - p_0 = 0.53$, $q_0 = 0.44$, $z - x_0 = 0.1$, $y_0 = 0.1$). Проекции аттракторов, возникающих в системе в условиях полиморфизма, изображены точками черного цвета; область их притяжения цветом 1, область притяжения мономорфной неподвижной точки $\{q = 1, p = 1\}$ обозначена цветом 2, неподвижной точки $\{q = 0, p = 0\}$ – цветом 3. В модели с линейным лимитированием также существует область начальных условий, при которых модельные переменные попадают в область отрицательных значений, эта область выделена цветом 4. На фрагменте a проекции аттрактора (зоны из чёрных точек) изображены в большем масштабе (дополнительные оси справа и сверху)

с помощью численного эксперимента. Для этого: с заданным шагом перебирались начальные значения частот (все остальные параметры были фиксированы); для каждого значения p_0 и q_0 вычислялось до 10 000 генераций системы (4); определялось какую именно из существующих неподвижных точек она достигла; на заключительном этапе начальное значение частот аллеля A окрашивалось определенным цветом в соответствии с типом достигнутой неподвижной точки. Та же схема применялась, чтобы построить бассейны притяжения неподвижных точек для различных начальных значений численностей возрастных классов популяции x_0 и y_0 .

В общем, сценарий усложнения динамики модели с ростом значений популяционных параметров очень напоминает сценарии усложнения динамики моделей (2), (3), рассмотренных ранее [11,12]. При небольших значениях популяционных параметров существует одна или несколько устойчивых неподвижных точек, которые достигаются популяционными показателями (численностями возрастных групп и частотами генов) в зависимости от начальных условий. Рост популяционных параметров приводит к потере устойчивости одной или несколькими неподвижными точками модели, в результате возникают колебания численностей возрастных групп и даже колебания генетического состава популяции.

В рассматриваемой модели генетически определяется не только приспособленность зародышей, но и выживаемость половозрелых особей на последующих годах жизни. Поскольку общую динамику популяции определяет совокупность среднепопуляционных значений \bar{w} и \bar{c} , то изменение даже одной из этих величин может привести к весьма неожиданной динамике.

Пример такого сценария для модели с экспоненциальным лимитированием приведен на рис. 4. Для вычисления показателей Ляпунова использовался алгоритм Бенеттина [15], а размерность аттракторов рассчитывалась по формуле Каплана-Йорки [16]. При небольших значениях приспособленности гетерозиготы зародышей ($w_{Aa} < \min(w_{aa}, w_{AA})$) в популяции под-

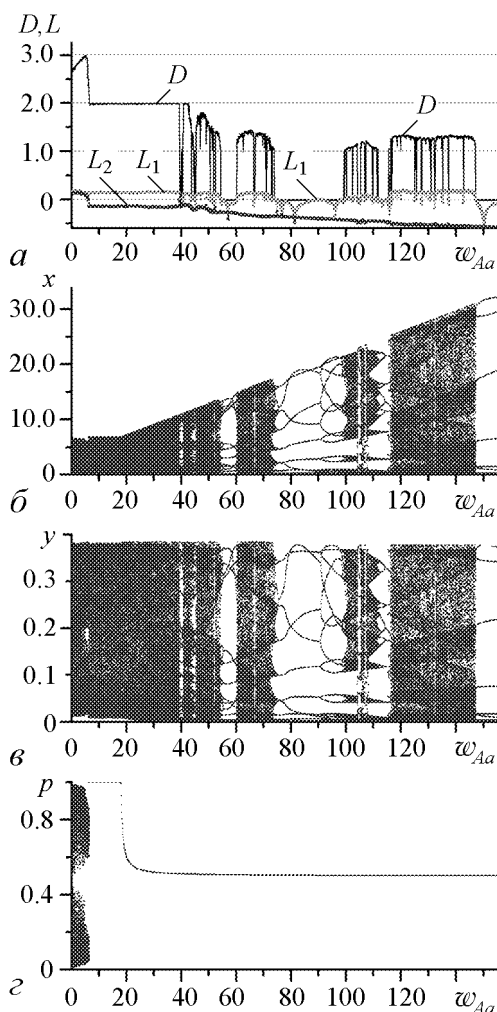


Рис. 4. а – изменение первого и второго ляпуновских показателей L (третий и четвертый ляпуновские показатели здесь меньше нуля) и размерности аттракторов D . Ниже: бифуркационная диаграмма численности младшего возрастного класса x (б) и старшего возрастного класса y (в), бифуркационная диаграмма генетического состава p (г) в модели с экспоненциальным видом лимитирования численности младшего возрастного класса (4.2). Значения параметров: $w_{AA} = 18$, $w_{aa} = 17$, $c_{AA} = 0.035$, $c_{Aa} = 0.057$, $c_{aa} = 0.03$

держивается полиморфизм с флуктуациями численности и генетического состава, максимальные размерности образующихся при этом аттракторов заметно больше 2 и с увеличением w_{Aa} приближаются к 3. Дальнейший рост варьируемого параметра w_{Aa} сопровождается потерей генетического разнообразия, поскольку притягивающей оказывается мономорфная неподвижная точка $\{p = 1, q = 1\}$; при этом в популяции наблюдаются колебания только

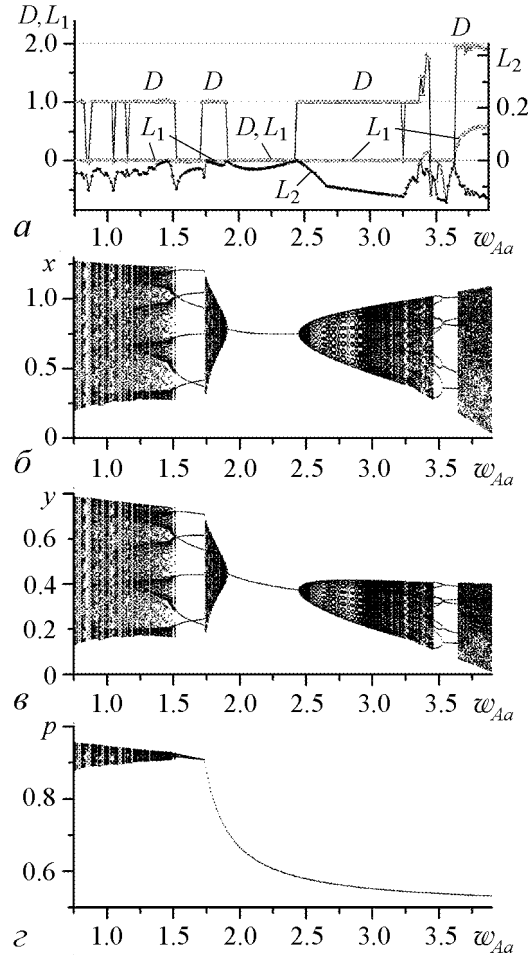


Рис. 5. *a* – изменение первого и второго ляпуновских показателей L (третий и четвертый ляпуновские показатели здесь меньше нуля) и размерности аттракторов D ; *б* – бифуркационная диаграмма численности младшего возрастного класса x и *в* – старшего возрастного класса y ; *г* – бифуркационная диаграмма генетического состава p в модели с линейным видом лимитирования численности младшего возрастного класса (4.1). Серым цветом закрашены области бифуркационных диаграмм, соответствующие значениям параметра, при которых модельные переменные попадают в область отрицательных значений. Значения параметров: $w_{AA} = 1.7$, $w_{Aa} = 1.4$, $c_{AA} = 0.96$, $c_{Aa} = 0.31$, $c_{aa} = 0.1$

численностей возрастных групп, а максимальная размерность образующихся при этом аттракторов оказывается не больше 2. В диапазоне значений $w_{aa} < w_{Aa} < w_{AA}$ полиморфная неподвижная точка не существует; при $w_{Aa} > w_{AA}$ она появляется и притягивает, хотя при небольшой разнице в приспособленностях (w_{Aa} и w_{AA}) расположена довольно близко к точке $\{p = 1, q = 1\}$. Дальнейшее увеличение параметра w_{Aa} не приводит к появлению аттракторов большой размерности. Более того, размерности образующихся аттракторов чуть превосходят 1, и на бифуркационной диаграмме появляются широкие окна регулярной динамики численности.

Похожую динамическую картину можно наблюдать и в модели с линейным видом лимитирования численности младшего возрастного класса (4.1). На рис. 5 показано, как с ростом параметра w_{Aa} происходит переход от колебаний численностей возрастных классов и генетического состава популяции сначала к устойчивому полиморфному равновесию, а затем к колебаниям численностей возрастных групп при постоянном уровне генетического состава популяции.

Нужно отметить, что все описанные эффекты наблюдаются при изменении одного из параметров модели (здесь w_{Aa}), при этом начальные популяционные значения численностей возрастных групп и частот аллелей (x_0, y_0, p_0, q_0) зафиксированы; рассматриваемая же модель весьма чувствительна к выбору начальных условий. Так, изменение параметров модели может приводить не

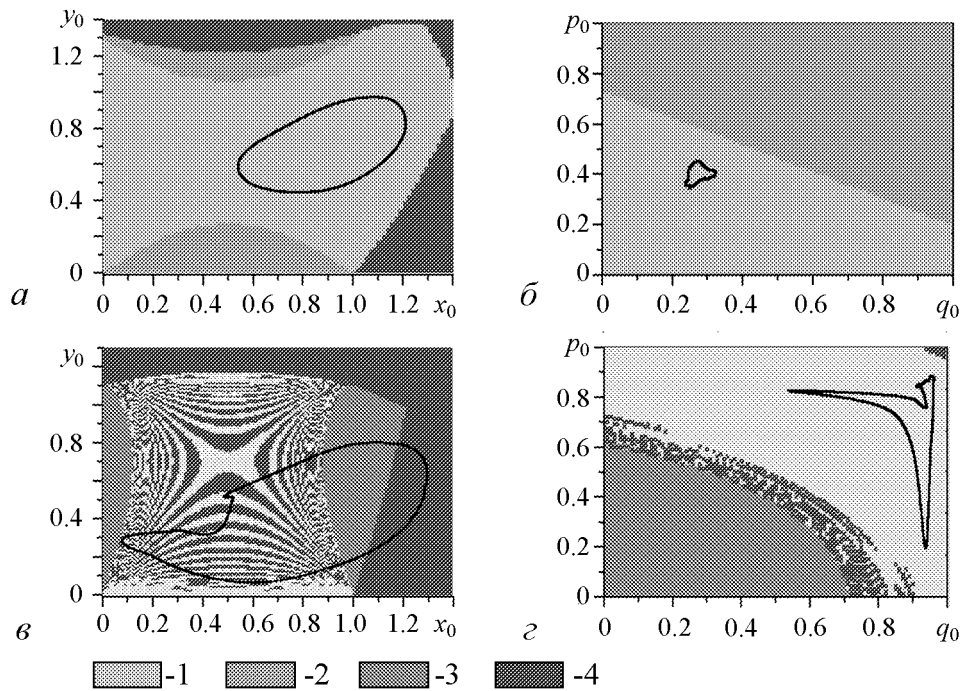


Рис. 6. Бассейны притяжения неподвижных точек линейной модели: проекции аттракторов, возникающих в системе в условиях полиморфизма, изображены точками черного цвета; область их притяжения цветом 1, область притяжения мономорфной неподвижной точки $\{q = 1, p = 1\}$ обозначена цветом 2, неподвижной точки $\{q = 0, p = 0\}$ – цветом 3; область начальных условий, из которых модельные переменные попадают в отрицательную область выделена цветом 4. *a, б* – параметры модели: $w_{AA} = 1.4$, $w_{Aa} = 0.8$, $w_{aa} = 1.35$, $c_{AA} = 0.92$, $c_{Aa} = 0.93$, $c_{aa} = 0.95$. *a* – бассейн притяжения для численностей возрастных классов при $p_0 = 0.41$, $q_0 = 0.6$; *б* – бассейн притяжения для генетической составляющей при $x_0 = 0.1$, $y_0 = 0.1$; *в, з* – параметры модели: $w_{AA} = 1.7$, $w_{Aa} = 0.5$, $w_{aa} = 1.4$, $c_{AA} = 0.96$, $c_{Aa} = 0.31$, $c_{aa} = 0.1$. *в* – бассейн притяжения для численностей возрастных классов при $p_0 = 0.406$, $q_0 = 0.532$, *з* – бассейн притяжения для генетической составляющей при $x_0 = 0.1$, $y_0 = 0.1$

только к возникновению или исчезновению отдельных ее неподвижных точек, но и к расширению или сужению областей их притяжения. Если лимитирование численности младшего возрастного класса осуществляется по линейному закону, то существует множество начальных состояний, из которых в течение нескольких генераций модельные переменные попадают в отрицательную полуплоскость, что соответствует вымиранию популяции. Такая ситуация вполне ожидаема в двух случаях: если в начальном состоянии численности возрастных групп слишком велики (рис. 6, *a, б*), то жёсткое лимитирование отбрасывает их в область отрицательных значений, или если частоты аллелей оказываются в области притяжения неподвижной точки с тривиальной численностью. Однако наблюдаемая картина не ограничивается этими ситуациями и бассейны притяжения неподвижных точек модели (4) могут иметь весьма сложную форму (рис. 6, *в, з*).

Заключение

В работе исследуются режимы динамики генетической структуры и численности популяции с двумя возрастными классами. Рассматривается наиболее простой из возможных вариантов возрастной структуры в биологической популяции, который, тем не менее, характерен для ряда естественных популяций. Предполагается, что

основные популяционные характеристики: репродуктивный потенциал популяции и выживаемость половозрелых особей на последующих годах жизни, определяются на генетическом уровне. Исследуются модели с двумя видами экологического лимитирования численности младшего возрастного класса: линейным и экспоненциальным. Линейный вид лимитирования подходит для биологических популяций, находящихся в условиях сильного экологического давления; экспоненциальный – для популяций, находящихся в более спокойных условиях.

В ходе исследования найдены стационарные точки моделей, определены их условия существования и устойчивости. С использованием полученных результатов исследована динамика генетического состава и численностей возрастных групп в модели двухвозрастной популяции. Проведенное исследование показало, что хотя эволюционное увеличение приспособленности какого-либо из генотипов, закономерно приводящее к увеличению средней приспособленности популяции, и сопровождается возникновением в модели сложной динамики численности и генетического состава популяции, дальнейший рост приспособленности способен стабилизировать генетический состав популяции, и флуктуации разной степени сложности (от периодических до хаотических) будет испытывать уже только ее численность. Колебания численности при постоянном генетическом составе были обнаружены и в более простых моделях, описывающих динамику однородной популяции [17,18]. Генетический тип неподвижной точки, в котором окажется популяция, находится в очень сложной зависимости от начальных условий, то есть влияние внешних условий может оказаться весьма существенным в определении направления эволюции естественной популяции.

Таким образом, в работе показаны возможные механизмы появления очень сложной временной организации генетического биоразнообразия, весьма чувствительной к внешнему воздействию.

Исследование проведено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 09-04-00146) и ДВО РАН (конкурсные проекты № 09-I-П15-01, № 09-II-СО-06-006, № 10-III-B-01M-001).

Библиографический список

1. Шапиро А.П. К вопросу о циклах в возвратных последовательностях // Управление и информация. Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1972. Вып. 3. С. 96.
2. Шапиро А.П., Луннов С.П. Рекуррентные уравнения в теории популяционной биологии. М.: Наука, 1983. 132 с.
3. May R.M. Biological population obeying difference equations: stable points, stable cycles, and chaos // J. Theor. Biol. 1975. Vol. 51, № 2. P. 511.
4. Richer W.E. Stock and recruit // Theor. J. Fish. Res. Bard. Can. 1954. Vol. II, № 5. P. 559.
5. Hassell M.P., Lawton J.N., May R.M. Patterns of dynamical behavior in single species populations // J. Anim. Ecol. 1976. Vol. 45, № 2. P. 471.
6. Ruxton G.D., Gurney W.S. C., de Roos A.M. Interference and generation cycles // Theor. Popul. Biol. 1992. Vol. 42, № 3. P. 235.
7. Getz W.M. Correlative coherence analysis: variation from intrinsic and extrinsic

- sources in competing populations // *Theor. Popul. Biol.* 2003. Vol. 64, № 1. P. 89.
8. *Lebreton J.D.* Dynamical and statistical models of vertebrate population dynamics // *C.R. Acad. Sci. Biologies.* 2006. Vol. 329, № 10. P. 804.
 9. *Reluga T.C.* Analysis of periodic growth-disturbance models // *Theor. Popul. Biol.* 2004. Vol. 66, № 2. P. 151.
 10. *Фрисман Е.Я.* Странные аттракторы в простейших моделях динамики численности популяций с возрастной структурой // *Доклады РАН.* 1994. Т. 338, № 2. С. 282.
 11. *Фрисман Е.Я., Скалецкая Е.И.* Странные аттракторы в простейших моделях динамики численности биологических популяций // *Обзорные прикладной и промышленной математики.* М.: Научное изд-во «ТВП». 1994. Т. 1, вып. 6. С. 988.
 12. *Фрисман Е.Я., Жданова О.Л.* Эволюционный переход к сложным режимам динамики численности двухвозрастной популяции // *Генетика.* 2009. Т. 45, № 9. С. 1277.
 13. *Бадьева Е.* Согласованное изменение признаков организма // *Популярные обзоры.* 2010. <http://elementy.ru/genbio/synopsis?artid=290>
 14. *Пасеков В.П.* Популяционная изменчивость и биометрические модели координации признаков организма // *Журнал общей биологии.* 2010. Т. 71, № 1. С. 7.
 15. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука. 1987. 424 с.
 16. *Farmer J.D., Ott E., Yorke J.A.* The dimension of chaotic attractors // *Physica 7D.* North-Holland Publishing Company. 1983. P. 153.
 17. *Жданова О.Л., Фрисман Е.Я.* Динамические режимы в модели однолокусного плотностно-зависимого отбора // *Генетика.* 2005. Т. 41, № 11. С. 1575.
 18. *Фрисман Е.Я., Жданова О.Л.* Режимы динамики генетической структуры и численности в моделях эволюции локальной лимитированной популяции // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2006. Т. 14, № 1. С. 99.

*Институт автоматизации
и процессов управления ДВО РАН*

*Поступила в редакцию 12.07.2010
После доработки 18.01.2011*

THE MODES OF GENETIC STRUCTURE AND POPULATION SIZE DYNAMICS IN EVOLUTION MODEL OF TWO-AGED POPULATION

O.L. Zhdanova, D.A. Bazhina

The modes of genetic structure and size dynamics of structured population are investigated in this work. The reproductive potential and survival rate of reproductive part of population in following years of life are determined on genetic level. It has been shown that evolutionary increasing of average population fitness is followed by arising of complicated dynamics of population size and of genetic structure. Further growth of fitness is capable to stabilize the genetic structure of population and so only the population

size will be fluctuating with regular or chaotic circling. The type of the final genetic equilibrium depends upon initial conditions in a very complicated way. Therefore the initial conditions play essential role for the direction of natural population evolution.

Keywords: Equilibrium, stability, attractor, population size, age structure, evolution.



Жданова Оксана Леонидовна – родилась в 1977 году во Владивостоке, окончила факультет прикладной математики Дальневосточного государственного технического университета в 2000 году. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2003) в Институте автоматизации и процессов управления ДВО РАН (Владивосток) по специальности «биофизика». Работает старшим научным сотрудником в лаборатории математического моделирования экологических систем ИАПУ ДВО РАН. Основные научные интересы сосредоточены в области математического моделирования популяционно-генетических процессов, теории колебаний и хаоса в эволюционирующих системах. Опубликовала более 40 работ по этим направлениям.

690041, Владивосток, ул. Радио, 5
Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН
E-mail: axanka@iacp.dvo.ru



Бажина Дина Андреевна – родилась в Приморском крае (1985), окончила факультет прикладной математики Дальневосточного государственного технического университета (2008). В настоящий момент является аспиранткой лаборатории математического моделирования экологических систем в ИАПУ ДВО-РАН. Область научных интересов: моделирование динамики биологических систем, популяционная генетика; динамическая неустойчивость, детерминированный хаос. Имеет 4 публикации (в соавторстве).

690041, Владивосток, ул. Радио, 5
Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН



МОДОВАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ В ЦЕПОЧКАХ ФЕРМИ–ПАСТЫ–УЛАМА С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПОРЯДКОМ НЕЛИНЕЙНОСТИ

М.В. Иванченко

q -Бризеры – это точные периодические решения нелинейных акустических цепочечных систем, экспоненциально локализованные в модовом пространстве. Их наличие обуславливает динамическую локализацию энергии в исходно возбужденных модах и, как следствие, отсутствие термализации и сохранение линейчатого спектра. В данной работе исследуется вопрос о влиянии порядка степенной нелинейности γ на длину локализации в q -пространстве, порог делокализации и масштабирование этих свойств с размером системы. Установлено, что экспоненциальная локализация в модовом пространстве сохраняется; более того, существует критическое значение $\gamma = 6$, выше которого локализация усиливается с увеличением длины цепочки. Как следствие, в смешанном случае нелинейностей различных порядков порог термализации/режима сильного хаоса в больших системах определяется исключительно нелинейными членами с $\gamma \leq 6$.

Ключевые слова: Нелинейные моды, локализация энергии, q -бризеры.

Введение

В 1955 году Э. Ферми, Дж. Паста и С. Улам выдвинули гипотезу о нелинейном механизме термализации в пространственно-периодических структурах и провели ряд численных экспериментов с колебательными цепочками с нелинейностью в межэлементных связях [1]. Вопреки ожиданиям, одномодовое возбуждение с частотой ω_q и волновым числом q не распределялось по всему спектру, а оставалось локализованным в начальной и нескольких соседних модах. Более того, на больших временах интегрирования наблюдалось практически полное возвращение энергии в начальную моду. Этот парадоксальный результат стимулировал активные исследования фундаментальной проблемы термализации и эргодичности нелинейных систем, в частности, детерминированного хаоса и солитонов в интегрируемых системах.

С современной точки зрения, результат, полученный Ферми, Пастой и Уламом («проблема ФПУ», «парадокс ФПУ»), состоит в следующем. Существует область параметров системы: энергии, линейных размеров, нелинейности, в которой низкочастотные возбуждения остаются локализованными в q -пространстве нормальных мод.

Наблюдается (квази)периодическое возвращение энергии в начально возбужденные моды. Существуют так называемые пороги слабой и сильной стохастичности: при превышении первого порога колебания становятся хаотическими, но остаются локализованными в модовом пространстве, а быстрая делокализация и термализация системы наблюдаются только при превышении второго порога [4–6].

Одним из известных подходов к объяснению парадокса ФПУ является континуальное приближение, которое дает интегрируемую солитонную динамику, отсутствие термализации и возвращаемость энергии [3]. Другой подход – аналитические и численные оценки порога сильного хаоса и термализации [2, 7–11].

Недавно было показано, что все основные аспекты результата ФПУ могут быть описаны в рамках одной теории – q -бризеров – точных периодических решений, являющихся продолжением линейных мод в нелинейный режим и экспоненциально локализованных в q -пространстве [12]. Такие решения реализуются в широком классе динамических систем: в двумерных и трехмерных конечных и бесконечных акустических решетках, решетках дискретных нелинейных уравнений Шредингера, квантовых цепочках Бозе–Хаббарда [24]. q -Бризеры сохраняются и в системах с пространственным беспорядком [14].

Помимо фундаментальной проблемы термализации, нелинейные моды представляют интерес и с точки зрения динамики микро- и наноразмерных электро-механических колебательных систем [15]. Цепочки и решетки таких осцилляторов позволяют получить широкую полосу пропускания, дисперсию и другие волновые свойства [16, 17]. Нелинейный режим работы представляется крайне привлекательным как в связи с расширением рабочего диапазона, так и в связи с потенциальной возможностью практического использования нелинейных эффектов в миниатюрных приборах. Здесь принципиальными являются вопросы о нелинейном спектре колебаний: как изменяются моды с усилением нелинейности, увеличением амплитуды колебаний; сохраняется ли локализация в модовом пространстве; каков порог по нелинейности/энергии, ниже которого спектр колебаний еще сохраняет основные свойства линейного?

Существующие результаты теории q -бризеров дают достаточно полную картину за одним исключением. До сих пор рассматривался узкий класс нелинейности в межэлементных связях: квадратичная и кубическая (так называемые модели α - и β -ФПУ). Однако в случае нелинейности общего вида разложение силы взаимодействия в ряд Тейлора вблизи состояния равновесия дает и члены более высокого порядка. При увеличении энергии/амплитуды колебаний эти члены могут становиться доминирующими и существенно влиять на локализацию мод, порог делокализации q -бризеров и развития сильного хаоса. Исследованию этой проблемы и посвящена настоящая работа.

1. Формулировка задачи

Система ФПУ – это механическая модель в виде цепочки N частиц одинаковой массы, связанных пружинами с линейными и нелинейными членами в силе взаимодействия:

$$\ddot{x}_n = (x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) + \chi[(x_{n+1} - x_n)^{\gamma-1} - (x_n - x_{n-1})^{\gamma-1}], \quad (1)$$

где x_n – отклонение n -й частицы от состояния равновесия, а граничные условия задаются $x_0 = x_{N+1} = 0$. Частные случаи квадратичной $\gamma = 3$ и кубической нелинейности $\gamma = 4$ являются классическими моделями и известны как α - и β -ФПУ, соответственно. По аналогии обобщенную модель (1) будем называть χ -ФПУ.

Замена переменных $x_n(t) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{q=1}^N Q_q(t) \sin\left(\frac{\pi q n}{N+1}\right)$ задает переход в пространство N нормальных мод с амплитудами $Q_q(t)$. Уравнения движения в новых переменных имеют вид

$$\ddot{Q}_q + \omega_q^2 Q_q = -\frac{\chi}{[2(N+1)]^{\gamma/2-1}} \omega_q \sum_{q_1, \dots, q_{\gamma-1}=1}^N C_{q_1, \dots, q_{\gamma-1}} \prod_{k=1}^{\gamma-1} \omega_{q_k} Q_{q_k}, \quad (2)$$

где $\omega_q = 2 \sin(\pi q / (2(N+1)))$ – частоты нормальных мод, а

$$C_{q_1, \dots, q_{\gamma-1}} = \sum_{m=0}^{[\gamma/2-1]} \sum_{\pm} (-1)^m \delta_{q \pm q_1 \pm \dots \pm q_{\gamma-1}, 2m(N+1)} \quad (3)$$

– коэффициенты межмодовых связей. Заметим, что модовые уравнения описывают динамику осцилляторов с нелинейной дальнедействующей связью.

Рассмотрим вопрос о продолжении периодических траекторий, отвечающих линейным модам, в нелинейный режим. Для этого положим $\chi = 0$, зададим энергию $E_{q_0} = E$ в нормальной моде $q = q_0$, в то время как остальные q -осцилляторы неподвижны. Такие начальные условия отвечают периодической траектории в фазовом пространстве нашей модели. В соответствии с [18], достаточным условием возможности продолжения является отсутствие резонансов $n\omega_{q_0} \neq \omega_{q \neq q_0}$, что, в общем случае, справедливо для конечного числа осцилляторов N [22]. Следовательно, можно ожидать, что периодическая траектория останется локализованной в q -пространстве по крайней мере до некоторого критического ненулевого значения χ .

Развивая данный подход, можно строить теорию возмущений для уравнения (2) по степеням малого параметра $\sigma = \chi / [2(N+1)]^{\gamma/2-1}$, взяв линейную моду q_0 в качестве нулевого приближения. Известные результаты [12] дают для β -ФПУ последовательно возбужденные моды $q_0, 3q_0, \dots, (2n+1)q_0, \dots$ с экспоненциально спадающей энергией

$$E_{(2n+1)q_0} = \lambda^{2n} E_{q_0}, \quad \lambda = \frac{3\beta E_{q_0} (N+1)}{8\pi^2 q_0^2}, \quad (4)$$

а для α -ФПУ – последовательность мод $q_0, 2q_0, \dots, nq_0$, локализованных как

$$E_{nq_0} = \lambda^{2n-2} n^2 E_{q_0}, \quad \lambda = \frac{\alpha \sqrt{E_{q_0}} (N+1)^{3/2}}{\pi^2 q_0^2}. \quad (5)$$

При $\lambda \geq 1$ q -бризер становится делокализованным; это означает сильную деформацию нелинейной моды, сильную связь между модами в различных частях

спектра, быструю термализацию системы. Обратим внимание на то, что делокализация происходит не только при увеличении энергии/коэффициента нелинейности: в обоих случаях делокализация происходит с увеличением размера системы N . Эти критерии сильного хаоса совпадают с точностью до множителя с оценками, полученными другими методами [2, 7–11].

2. Локализация в системах с произвольным порядком нелинейности

Строим теорию возмущений для произвольного порядка нелинейности γ . Используем точное периодическое решение линейной задачи $Q_{q_0}(t) = A_0 \cos \omega_{q_0} t$, $Q_q(t) = 0$, $q \neq q_0$ в качестве нулевого приближения. Будем искать решение в виде $Q_q(t) = Q_q^{(0)}(t) + \sigma Q_q^{(1)}(t) + \mathcal{O}(\sigma^2)$. Легко убедиться, что в первом порядке теории возмущений нетривиальными решениями будут $Q_{(\kappa-1)q_0}^{(1)}(t)$, где $\kappa = 4, 6, \dots, \gamma$ для четных γ и $\kappa = 3, 5, \dots, \gamma$ для нечетных. С учетом того, что $C_{(\kappa-1)q_0, q_0, \dots, q_0} = C_{\gamma-1}^{(\gamma-\kappa)/2}$, уравнения движения приобретают вид уравнений, описывающих колебания линейного осциллятора под действием внешней периодической силы

$$\ddot{Q}_{(\kappa-1)q_0}^{(1)} + \omega_{(\kappa-1)q_0}^2 Q_{(\kappa-1)q_0}^{(1)} = -\omega_{(\kappa-1)q_0} C_{\gamma-1}^{(\gamma-\kappa)/2} [\omega_{q_0} A_0 \cos \omega_{q_0} t]^{\gamma-1}. \quad (6)$$

Наибольший отклик будет наблюдаться на частоте $(\kappa - 1)\omega_{q_0}$, для которой условие резонанса выполнено наиболее точно. Поэтому амплитуды колебаний рассматриваемых мод будут

$$A_{(\kappa-1)q_0} \approx \frac{\chi}{[2(N+1)]^{\gamma/2-1}} \frac{\omega_{(\kappa-1)q_0} \left(C_{\gamma-1}^{(\gamma-\kappa)/2}\right)^2}{2^{\gamma-2} \left[(\kappa-1)^2 \omega_{q_0}^2 - \omega_{(\kappa-1)q_0}^2\right]} \omega_{q_0}^{\gamma-1} A_0^{\gamma-1}. \quad (7)$$

Для низкочастотных мод $q_0 \ll N$ имеем

$$(\kappa-1)^2 \omega_{q_0}^2 - \omega_{(\kappa-1)q_0}^2 \approx \frac{\omega_{(\kappa-1)q_0} \pi^3 q_0^3 (\kappa-1) \kappa (\kappa-2)}{12(N+1)^3}.$$

В результате

$$A_{(\kappa-1)q_0} \approx \frac{\chi}{[2(N+1)]^{\gamma/2-1}} \frac{12(N+1)^3 \left(C_{\gamma-1}^{(\gamma-\kappa)/2}\right)^2}{2^{\gamma-2} \pi^3 q_0^3 (\kappa-1) \kappa (\kappa-2)} \omega_{q_0}^{\gamma-1} A_0^{\gamma-1}. \quad (8)$$

Определив энергию моды как $E_q = \omega_q^2 A_q^2 / 2$, получим

$$E_{(\kappa-1)q_0} = \lambda_{\gamma, \kappa} E_{q_0}, \quad (9)$$

где коэффициент локализации равен

$$\lambda_{\gamma, \kappa} = \frac{3\chi \left(C_{\gamma-1}^{(\gamma-\kappa)/2}\right)^2 E_0^{\gamma/2-1}}{2^{\gamma-4} \pi^2 q_0^2 \kappa (\kappa-2) (N+1)^{\gamma/2-3}}. \quad (10)$$

Соответствующая длина локализации в модовом пространстве $E_{(\kappa-1)q_0} = e^{\frac{(\kappa-2)q_0}{\xi_{\gamma,\kappa}}} E_{q_0}$ будет $\xi_{\gamma,\kappa} = -(\kappa-2)q_0/(2 \ln \lambda_{\gamma,\kappa})$. Для более высоких порядков теории возмущений результат усложняется, так как увеличивается число мод, взаимодействие которых надо учесть. Поэтому мы ограничимся формулой (9), аппроксимируя дальнейший спад энергии этим законом.

Для определения порога делокализации этот результат является достаточным. Используя $\lambda_{\gamma,\kappa} = 1$ в качестве критерия делокализации, получаем, что делокализация происходит при увеличении энергии / нелинейности системы. Кроме того, возможна делокализация при увеличении N . Последнее зависит от порядка нелинейности. Так, существует порог $\gamma^* = 6$, выше которого локализация усиливается с ростом N . Таким образом, в больших системах, а также при наличии смешанного типа нелинейности, локализация и порог делокализации определяется нелинейными членами с порядком нелинейности $\gamma < 6$. Зависимость длины локализации $\max_{\kappa}[\xi_{\gamma,\kappa}]$ от длины цепочки иллюстрируется на рис. 1.

Обратимся к результатам численных экспериментов. Используем стандартный алгоритм нахождения периодических траекторий [12]. В качестве нулевого приближения, как и раньше, выбирается q_0 -я линейная мода. Начальные условия задаются $Q_{q \neq q_0}(0) = 0$, $\dot{Q}_q(0) = 0$, и $Q_{q_0}(0) = \sqrt{2E}/\omega_{q_0}$. Строится отображение $\vec{y} \equiv \{x_q\}$ на себя путем интегрирования до момента, когда $\dot{x}_s(t) = 0$, $s = [(N+1)/2q_0]$: $\vec{y}^{n+1} = \vec{\mathcal{F}}(\vec{y}^n)$. Периодическая траектория динамической системы (2) отвечает неподвижной точке сконструированного отображения. Векторная функция $\vec{\mathcal{G}} = \vec{\mathcal{F}}(\vec{y}) - \vec{y}$ используется для вычисления матрицы монодромии $\mathcal{N} = \partial \mathcal{G}(\vec{y})_i / \partial y_j$. Итерации $\vec{y}' = \vec{y} - \mathcal{N}^{-1} \vec{\mathcal{G}}(\vec{y})$ продолжаются до достижения требуемой точности ε : $\|\vec{\mathcal{F}}(\vec{y}) - \vec{y}\| / \|\vec{y}\| < \varepsilon$, где $\|\vec{y}\| = \max[|y_i|]$. Из системы уравнений $\vec{\mathcal{G}}(\vec{r}) = \mathcal{N}(\vec{r} - \vec{r}')$ находится новая стартовая точка \vec{r}' и исправляется отклонение энергии системы от заданного полного значения E .

На рис. 1 представлены графики для полученных таким образом q -бризеров в цепочках с порядками нелинейности $\gamma = 7$ и $\gamma = 8$ при $\chi = 0.001$ и длине цепочки $N = 32$. Как и предсказывается теорией, распределение энергии в модовом

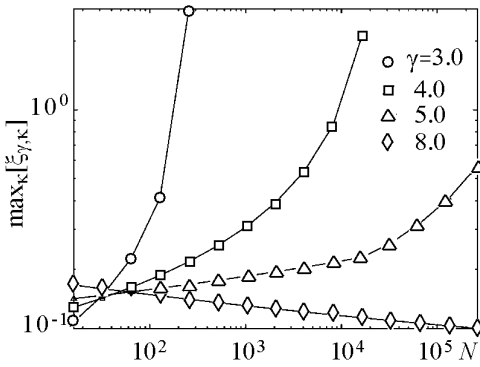


Рис. 1. Зависимость длины локализации, максимальной для данного γ , от размера цепочки N (9). Под порогом $\gamma^* = 6$ q -бризеры делокализуются, над ним локализация усиливается с ростом N

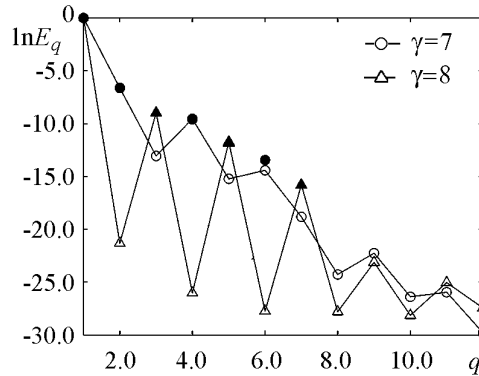


Рис. 2. Распределение энергии q -бризеров с $q_0=1$, $\chi = 0.001$, $N = 32$ в модовом пространстве для нечетной и четной нелинейностей высокого порядка. Закрашенные символы соответствуют аналитической оценке (9)

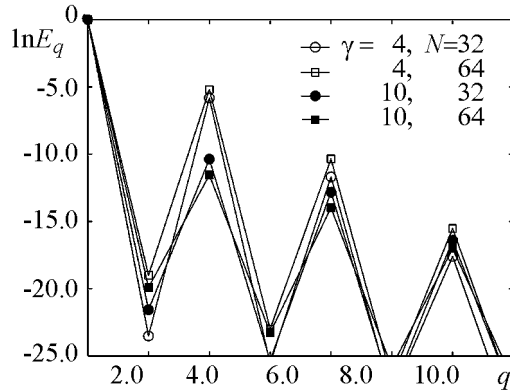


Рис. 3. Зависимость локализации q -бризеров от длины цепочки для степени нелинейности ниже и выше порогового значения $\gamma = 6$. Здесь $q_0 = 1$, $\chi = 0.001$, $\gamma = 4$ и $\gamma = 10$

пространстве имеет пики в $q = 3q_0, 5q_0, \dots, (\gamma-1)q_0$ для четных γ и $q = 2q_0, 4q_0, \dots, (\gamma-1)q_0$ для нечетных. Аналитическая оценка профиля q -бризера (9) хорошо согласуется с численными результатами (закрашенные символы на рис. 1).

Наиболее важное следствие (9) – делокализация q -бризеров с увеличением размеров системы N при $\gamma < 6$ и усиливающаяся локализация при $\gamma > 6$ – также находит численное подтверждение (рис.3, сравните изменение профилей q -бризеров для $\gamma = 4$ (модель β -ФПУ) и $\gamma = 10$ при увеличении размеров системы с $N = 32$ до $N = 64$).

Заключение

В работе исследованы свойства локализации q -бризеров в модовом пространстве обобщенной модели ФПУ с нелинейностью произвольного порядка. Получена аналитическая оценка профиля энергии в q -пространстве в первом порядке теории возмущений. Установлено, что, помимо увеличения полной энергии системы (или, что эквивалентно, коэффициента нелинейности), к делокализации может привести и увеличение длины системы, если порядок нелинейности меньше порогового $\gamma^* = 6$. Для более высоких порядков нелинейности длина локализации в модовом пространстве уменьшается с N ; для любых наперед заданных величин коэффициента и порядка нелинейности можно указать такое N , выше которого q -бризер с центром в моде q_0 будет локализован.

Этот результат дает ответ на вопрос о пороге термализации системы (появления сильного хаоса) и существования линейчатого спектра в больших системах. Для общего вида нелинейности, где в уравнениях движения присутствуют члены различных порядков, с увеличением полной энергии более высокие порядки начинают преобладать по силе действия. Однако порог делокализации q -бризеров (а следовательно, термализации и разрушения линейчатого спектра) полностью определяется нелинейными членами с $\gamma = 3, 4, 5$.

Закономерен вопрос о влиянии высоких порядков нелинейности на локализацию и устойчивость q -бризеров в двумерных и трехмерных решетках. Это будет являться предметом дальнейшего исследования.

Автор благодарит С. Флаха, О. Канакова и К. Мишагина за плодотворные дискуссии.

Работа поддержана фондом «Династия», Федеральной целевой программой «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, госконтракты 14.740.11.0075, П2308, и РФФИ, 10-02-00865.

Библиографический список

1. *Fermi E., Pasta J., and Ulam S.* Los Alamos Report LA-1940, 1955; also in: *Collected Papers of Enrico Fermi / Ed. E. Segre // University of Chicago Press. 1965. Vol. II. P. 978; Many-Body Problems / Ed. Mattis D.C. Singapore: World Scientific, 1993.*
2. *Ford J.* The Fermi–Pasta–Ulam problem: Paradox turns discovery // *Phys. Rep.* 1992. Vol. 213. P. 271.
3. CHAOS. 2005. Vol. 15, № 1, Focus Issue. The Fermi–Pasta–Ulam problem – The first fifty years/ Eds. D.K. Campbell, P. Rosenau and G.M. Zaslavsky.
4. *Berman G.P. and Izrailev F.M.* The Fermi–Pasta–Ulam problem: Fifty years of progress // *Chaos.* 2005. Vol. 15. 015104.
5. *Zabusky N.J. and Kruskal M.D.* Interaction of «solitons» in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // *Phys. Rev. Lett.* 1965. Vol. 15. P. 240.
6. *Izrailev F.M. and Chirikov B.V.* Statistical properties of a non-linear string // *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* 1966. Vol. 166. P. 57. [*Soviet. Phys. Dokl.* 1966. Vol. 11. P. 30].
7. *De Luca J., Lichtenberg A.J., and Lieberman M.A.* Time scale to ergodicity in the Fermi–Pasta–Ulam system // *Chaos.* 1995. Vol. 5. P. 283.
8. *Shepelyansky D.L.* Low-energy chaos in the Fermi–Pasta–Ulam problem // *Nonlinearity.* 1997. Vol. 10. 1331.
9. *Bocchierri P., Scotti A., Bearzi B., and Loigner A.* Anharmonic chain with Lennard-Jones interaction // *Phys. Rev. A.* 1970. Vol. 2. 2013; *Galgani L. and Scotti A.* Planck-like distributions in classical nonlinear mechanics // *Phys. Rev. Lett.* 1972. Vol. 28. 1173; *Patrascioiu A.* Blackbody Radiation Law: Quantum or classical explanation? // *Phys. Rev. Lett.* 1983. Vol. 50. 1879.
10. *Kantz H.* Vanishing stability thresholds in the thermodynamic limit of nonintegrable conservative systems // *Physica D* **39**, 322, 1989; *Kantz H., Livi R. and Ruffo S.* Equipartition thresholds in chains of anharmonic oscillators // *J. Stat. Phys.* 1994. Vol. 76. P. 627.
11. *Casetti L., Cerruti-Sola M., Pettini M. and Cohen E.G.D.* The Fermi–Pasta–Ulam problem revisited: Stochasticity thresholds in nonlinear Hamiltonian systems // *Phys. Rev. E.* 1997. Vol. 55. 6566.
12. *Flach S., Ivanchenko M.V. and Kanakov O.I.* q-Breathers and the Fermi–Pasta–Ulam problem // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 95. 064102; *Flach S., Ivanchenko M.V. and Kanakov O.I.* q-breathers in Fermi–Pasta–Ulam chains: Existence, localization, and stability // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 73. 036618.
13. *Ivanchenko M.V. et al.* q-Breathers in finite two- and three-dimensional nonlinear acoustic lattices // *Phys. Rev. Lett.* 2006. Vol. 97. 025505; *Mishagin K.G. et al.* q-breathers in discrete nonlinear Schroedinger lattices // *New J. Phys.* 2008. Vol. 10. 073034; *Nguenang J.P., Pinto R.A., Flach S.* Quantum q-breathers in a finite Bose–Hubbard chain: The case of two interacting bosons // *Phys. Rev. B.* 2007. Vol. 75. 214303.
14. *Ivanchenko M.V.* q-Breathers in finite lattices: nonlinearity and weak disorder // *Phys. Rev. Lett.* 2009. Vol. 102. 175507; *Ivanchenko M.V.* q-Breathers in discrete nonlinear Schroedinger arrays with weak disorder // *Письма в ЖЭТФ.* 2009. Т. 89, № 3. С. 170.
15. *Ekinici K.L., Roukes M.L.* Nanoelectromechanical systems // *Rev. Sci. Instr.* 2005. Vol. 76. 061101; *Li M., Tang H.X., and Roukes M.L.* Ultra-sensitive NEMS-based

cantilevers for sensing, scanned probe and very high-frequency applications // Nature Nanotech. 2007. Vol. 2. P. 114.

16. *Sato M., Hubbard B.E., and Sievers A.J.* Nonlinear energy localization and its manipulation in micromechanical oscillator arrays // Rev. Mod. Phys. 2006. Vol. 78. P. 137; *Sato M., Sievers A.J.* Visualizing intrinsic localized modes with a nonlinear micromechanical array // Low Temp. Phys. 2008. Vol. 34. P. 543.
17. *Buks E. and Roukes M.L.* Electrically tunable collective response in a coupled micromechanical array // J. Micromech. Sys. 2002. Vol. 11. P. 802; *Zalalutdinov M. et al.* Two-dimensional array of coupled nanomechanical resonators // Appl. Phys. Lett. 2006. Vol. 88. 143504.
18. *MacKay R.S. and Aubry S.* Proof of existence of breathers for time-reversible or Hamiltonian networks of weakly coupled oscillators // Nonlinearity. 1994. Vol. 7. 1623.
19. *Lyapunov M.A.* The General Problem of Stability of Motion // London: Taylor & Francis, 1992.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию 15.07.2010
После доработки 21.01.2011

MODE LOCALIZATION IN FERMI-PASTA-ULAM CHAINS WITH ARBITRARY DEGREE OF NONLINEARITY

M.V. Ivanchenko

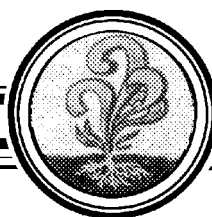
q -Breathers are exact periodic solutions of nonlinear acoustic chain systems, exponentially localized in the space of normal modes. Their presence determines the energy localization in initially excited modes, the absence of thermalization and persistence of quasi-linear spectrum. In the present paper we study the influence of the order of nonlinearity γ on the localization length in the q -space, delocalization threshold and scaling of these properties with the system size. It is shown that the exponential localization holds; moreover, there exists the critical value $\gamma = 6$, above which the localization strengthens with increasing the chain length. Accordingly, in case of mixed order nonlinearities thermalization/strong chaos thresholds in large systems are determined by nonlinear terms with $\gamma \leq 6$ only.

Keywords: Nonlinear modes, energy localization, q -breathers.



Иванченко Михаил Васильевич – родился в 1981 году. Окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (2004), там же защитил кандидатскую диссертацию (2007). В настоящее время является сотрудником кафедры теории колебаний ННГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика, математическая иммунология, локализация энергии в нелинейных решеточных системах, синхронизация, нейродинамика. Имеет около 35 печатных работ по данной тематике. Удостоен медали Российской академии наук в конкурсе 2004 года на лучшие научные работы по направлению «Общая физика и астрономия».

603950 Нижний Новгород, ул. Гагарина, 23а
Нижегородский государственный университет
E-mail: ivanchenko@rf.unn.ru



КОСМОФИЗИЧЕСКИЕ ФАКТОРЫ В СПЕКТРЕ АМПЛИТУД ФЛУКТУАЦИЙ В БРОУНОВСКОМ ДВИЖЕНИИ

А.В. Каминский, С.Э. Шноль

Проведено исследование изменений спектров амплитуд флуктуаций – формы соответствующих гистограмм – при измерениях скоростей броуновского движения в суспензии полистириновых шариков. Форма гистограмм изменяется с высокой вероятностью синхронно в двух независимых ячейках, находящихся в одном и том же месте. Эта синхронность сохраняется при расстоянии между ячейками в два метра и расположении ячеек *по меридиану*. При расположении ячеек *по параллели* наблюдается высокая вероятность синхронного изменения формы гистограмм *по местному* времени.

Этот результат соответствует сделанному ранее выводу о зависимости формы гистограмм – спектров амплитуд флуктуаций случайных процессов – от вращения Земли вокруг своей оси.

Ключевые слова: Космофизические факторы, случайные процессы, броуновское движение.

Введение

В ряде работ (см. обзоры в [1–3]) было обнаружено закономерное изменение спектров амплитуд флуктуаций (формы соответствующих гистограмм) при измерениях характеристик различных процессов (скоростей химических и биохимических реакций, шумов в грави-градиентной антенне, шумов в полупроводниковых схемах до радиоактивного распада). В предлагаемой статье представлены результаты аналогичного исследования процесса броуновского движения.

1. Объект. Материалы. Методы

В 2006 году мы исследовали закономерности изменения формы гистограмм, получаемых при измерениях флуктуаций скоростей броуновского движения в водной суспензии ZnO (средний размер частиц порядка 5 мкм). Были получены доказательства синхронного изменения формы гистограмм, построенных по результатам измерений в независимых «генераторах», находящихся рядом на лабораторном столе.

В 2009 году эти опыты были повторены с использованием суспензии полистирольных шариков диаметром 450 нм (полученной от компании Polysciences, Inc.) и более совершенной техники измерений. Для измерения флуктуаций скоростей броуновского движения мы использовали известный метод динамического рассеяния света (dynamic light scattering, DLS) [4]. Метод основан на измерениях флуктуаций когерентного света, рассеянного на ансамбле движущихся частиц. Для этого через образец, представляющий собой стеклянную ячейку с суспензией броуновских частиц, пропускается коллимированный луч лазера. Дифрагированные на взвешенных частицах электромагнитные волны, складываясь на активной площадке фотодетектора в случайных фазах, дают стохастически изменяющийся фототок, с точностью до размерного коэффициента равный

$$i(t) = \langle E(t)E^*(t) \rangle. \quad (1)$$

Здесь угловыми скобками обозначено усреднение по быстрым оптическим осцилляциям.

Упрощенная схема экспериментальной установки приведена на рис. 1. В установке реализовалась геометрия «обратного рассеяния» и режим многократного рассеяния света. Использовались две идентичные оптические ячейки (в дальнейшем – «броуновские генераторы» сигналов). Ячейка представляет собой стеклянную кювету с зазором 1 мм, заполненную суспензией, и оптоэлектронную часть, содержащую лазерный диод, фотодиод и предусилитель. Фототоки детекторов $i_1(t)$ и $i_2(t)$ преобразовывались в напряжение в трансимпедансных усилителях с коэффициентом преобразования $r = 10$ МОм. После оцифровки двухканальным 12-разрядным АЦП, работающим на частоте 42 кГц, сигналы записывались на жестком диске персонального компьютера. Детекторы – дифференциальные pin фотодиоды фирмы Hamamatsu. Лазеры – одномодовые структуры VCSEL фирмы RayCap, длина волны $\lambda = 850$ нм, ширина полосы генерации примерно 100 МГц, энергия излучения 1 мВ. Предпринимались специальные меры по исключению возможных синхронных помех. Датчики располагались на амортизирующем основании, в цепях питания лазеров и усилителей осуществлялись разделение и фильтрация. С целью сведения к минимуму возможных синхронных помех, связанных с вибрациями, в тракте усиления применяли высокочастотный фильтр со срезом ниже 30 Гц.

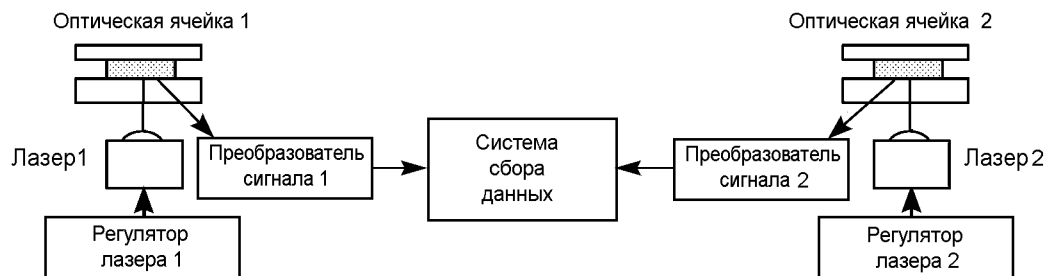


Рис. 1. Упрощенная схема экспериментальной установки

На рис. 2 приведен фрагмент временного ряда фототока $i_1(t)$ одного из броуновских генераторов. Внешний вид сигнала типичен для персистентных сигналов. Автокорреляционная функция этого сигнала для не слишком больших τ описывается экспонентой $c(\tau) = \exp(-q^2 D \tau)$ со временем затухания, определяемым геометрией рассеяния и коэффициентом диффузии $D = kT/(3\pi\eta d)$ (формула Стокса-Эйнштейна, где k – постоянная Больцмана, T – температура, η – вязкость, d – диаметр частицы). Величина q определяет перенос импульса фотона при рассеянии на броуновских частицах. Спектр мощности сигнала Лоренцев $S(\bar{\omega}) \sim \bar{\omega}_0/(\bar{\omega}_0^2 + \bar{\omega}^2)$, где $\bar{\omega}_0 = 1/T_0$ – частота релаксации. При $\bar{\omega} \gg \bar{\omega}_0$ спектр аппроксимируется степенной зависимостью. Аналогично при переходе к временному представлению – корреляционная функция может аппроксимироваться степенной зависимостью в области $\tau \ll T_0$.

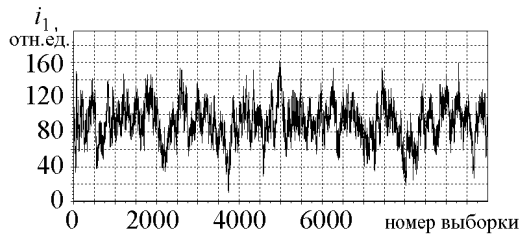


Рис. 2. Результаты измерений DLS-сигнала (фрагмент временного ряда) в генераторе № 1. Число измерений 10000, каждое длительностью $1/8000 = 1.2 \cdot 10^{-4}$ с

В нашем случае DLS-сигнал описывается моделью обобщенного броуновского движения (fractional Brownian motion) [5]. В области высоких частот (больших 100 Гц) сигнал самоподобен и асимптотическое поведение корреляционной функции при $\tau' = q^2 D \tau \rightarrow 0$ имеет степенной характер $C(\tau) = 1 - |\tau'|^\alpha$ (здесь α – скейлинговый параметр, связанный с фрактальной размерностью $D = 2 - \alpha/2$). На низких частотах $\tau \rightarrow \infty$, $C(\tau) = |\tau'|^{-\beta}$, где β – скейлинговый параметр, связанный с коэффициентом Херста $\beta = 2 - 2H$.

Для DLS-сигнала от броуновских генераторов получены следующие характеристики временных рядов: $\alpha \approx 0.7$, $D \approx 1.65$, $H = 0.82 \pm 0.1$.

На рис. 3, а приведена автокорреляционная функция сигнала одного из каналов $g_{11} = \langle i_1(t)i_1(t + \tau) \rangle$, а на рис. 3, б кросскорреляционная функция между каналами $g_{12} = \langle i_1(t)i_2(t + \tau) \rangle$. Из рис. 3, б видно, что ни какой значимой физической связи, которая могла бы привести к отличному от нуля корреляционному моменту, между каналами нет. Незначительные колебания кросскорреляционной функции g_{12} около нулевой линии стремятся к нулю при увеличении статистики.

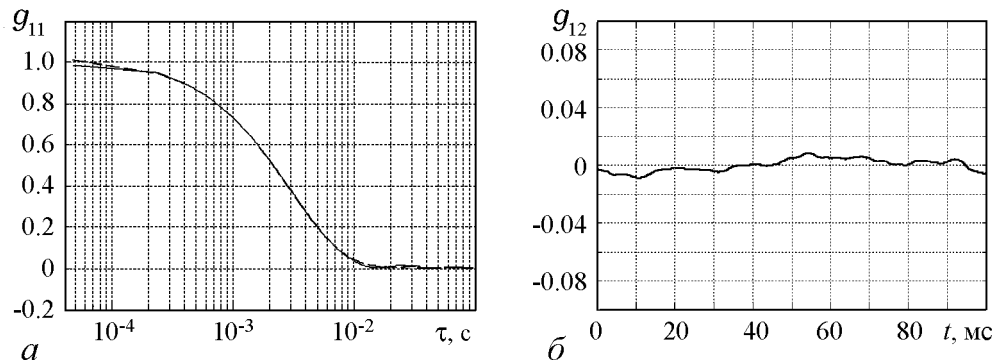


Рис. 3. Автокорреляционная (а) и кросскорреляционные (б) функции для сигналов двух броуновских генераторов в нашем опыте

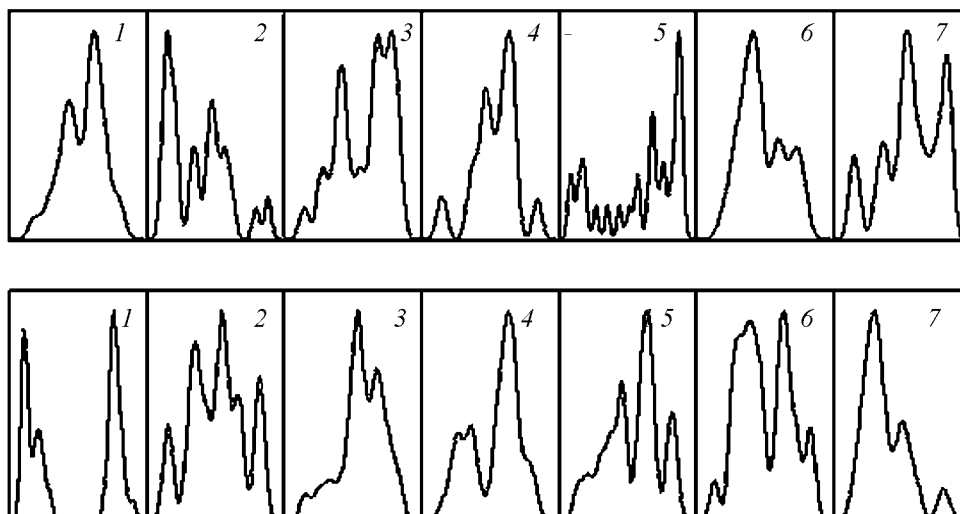


Рис. 4. Последовательности гистограмм (фрагмент компьютерного архива), построенных по результатам измерения броуновского движения в двух независимых броуновских генераторах. Оси абсцисс каждой гистограммы – величины фототока при измерениях броуновского движения (в относительных единицах). Оси ординат – числа сходных пар, соответствующих данным величинам фототока. Гистограммы сглажены 17-кратным скользящим суммированием

2. Построение гистограмм и исследование их формы

По отрезкам временных рядов длиной по 30 или по 60 измерений строили гистограммы распределения амплитуд. Для удобства визуального сравнения эти гистограммы сглаживали скользящим суммированием. Все процедуры построения, сглаживания, масштабирования гистограмм осуществляли посредством компьютерной программы Эдвина Пожарского «Histogram Manager» [1].

Гистограммы мы считаем сходными, если путем допустимых операций растяжения и зеркального отражения достигается визуальное сходство их форм. Другими словами, формой гистограммы мы называем инвариант подгруппы аффинных преобразований на плоскости, включающий операции масштабирования, параллельного переноса и отражения по оси абсцисс.

Методы построения и исследования формы гистограмм с необходимой детальностью представлены в ранее опубликованных работах [1].

На рис. 4 изображен фрагмент компьютерного архива – последовательности гистограмм, построенных по результатам измерения броуновского движения в двух независимых броуновских генераторах. Гистограммы построены каждая по 30 результатам измерений и сглажены 17 раз. Верхняя строка – гистограммы для генератора № 1, нижняя – № 2. Указаны номера последовательных гистограмм. Общее число гистограмм в таких рядах составляло несколько тысяч.

3. Синхронное изменение формы гистограмм при измерениях броуновского движения в независимых генераторах в одном и том же географическом пункте

На рис. 5 приведен фрагмент компьютерного архива с парами синхронных гистограмм, построенных по результатам независимых измерений в двух установках и

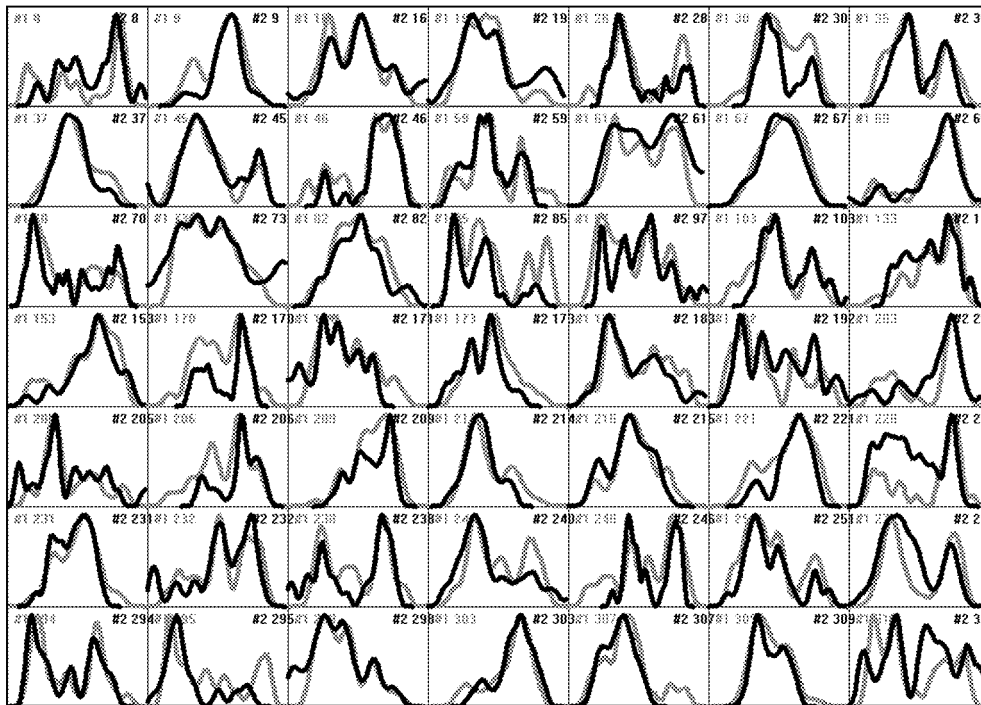


Рис. 5. Пары гистограмм (фрагмент журнала), построенных по результатам синхронных измерений в двух независимых броуновских генераторах, признанные сходными при экспертном сравнении. Указаны номера гистограмм во временных рядах. Оси как на рис. 4

признанных экспертами сходными. Указаны номера гистограмм во временных рядах. Видно, что сходными оказываются синхронные гистограммы разной формы.

При построении распределений числа сходных пар гистограмм по величинам разделяющих их интервалов обнаружено, что некоторым интервалам соответствует особо большое число сходных пар. Именно в этом и состоит основное свидетельство неслучайности сходства гистограмм в независимых процессах.

На рис. 6 изображено распределение числа сходных пар гистограмм, построенных по результатам измерений скоростей броуновского движения в двух независимых генераторах (опыт от 24.09.2009). Видно, что число синхронных пар сходных гистограмм явно превышает «фон». Высота центрального пика равна 89 парам при 720 гистограмм в рядах, то есть составляет около 12% от максимально возможного. В других интервалах высота столбиков составляет около 2.5% от максимально возможного. При оценке достоверности вывода о синхронности изменения формы гистограмм в независимых броуновских генераторах достаточно воспользоваться мажорирую-

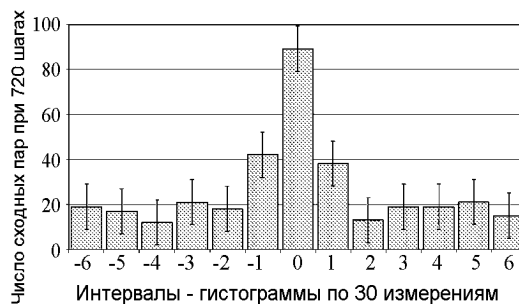


Рис. 6. Форма гистограмм в независимых броуновских генераторах изменяется синхронно. Распределение числа пар сходных гистограмм по разделяющим их интервалам времени. Гистограммы построены по 30 результатам измерений каждая. Ось абсцисс – величины интервалов времени, разделяющие сходные гистограммы. Один интервал равен $3.6 \cdot 10^{-3}$ с

шей оценкой по критерию \sqrt{N} (здесь N – распределение Пуассона). На рисунке видно, что высота центрального пика отличается от «фона» примерно на $6\sqrt{N}$, что соответствует вероятности случайного получения такого результата не выше $1 \cdot 10^{-11}$.

Как видно из рис. 5, гистограммы, образующие центральный пик на рис. 6 и свидетельствующие о синхронности изменений формы гистограмм в независимых процессах, не имеют явных отличий от гистограмм, соответствующих другим интервалам. Иными словами, нет определенной формы гистограмм, соответствующей именно синхронным изменениям их формы. Однако среди гистограмм, соответствующих центральному пику, есть несколько относительно редких, «экзотических» форм. Пары таких гистограмм могут быть использованы для дополнительной оценки достоверности основных выводов.

Подчеркнем, мы исходили из того, что реализация гистограммы сложной формы само по себе маловероятное событие. Одновременное появление редких событий в независимых измерениях еще менее вероятно. Эта оценка оказалась очень убедительной. Иллюстрация такой оценки дана на рис. 7 и в таблице. На рис. 7 изображены 5 пар гистограмм редкой формы, синхронно реализовавшихся в опыте от 24.09.2009. (Всего сходных синхронно пар было 89.) Мы видим, например, что гистограмм формы № 8 в первом массиве было 6, а во втором – 5 из 720 возможных. Это составляет, соответственно, 0,008 и 0,007 от максимальных величин, что и является оценками вероятности случайной реализации данной формы гистограммы именно на данном месте. Общая вероятность недостоверности утверждения о синхронном появлении сходных форм гистограмм в двух независимых рядах измерений равна произведению этих частных вероятностей. Для приведенного примера – пяти редких форм гистограмм – эта общая вероятность составляет, судя по первому

Таблица

Частота реализации гистограмм данной формы при измерениях в двух независимых броуновских генераторах в опыте от 24.09.2009

Номера синхронных гистограмм в двух массивах	N_1 – число таких гистограмм в первом массиве	$N_1/720$	N_2 – число таких гистограмм во втором массиве	$N_2/720$
8	6	0.008	5	0.007
59	1	0.001	3	0.004
232	4	0.006	6	0.008
294	17	0.024	7	0.010
457	2	0.003	13	0.018
		$P_1 = 3 \cdot 10^{-12}$		$P_2 = 4 \cdot 10^{-11}$

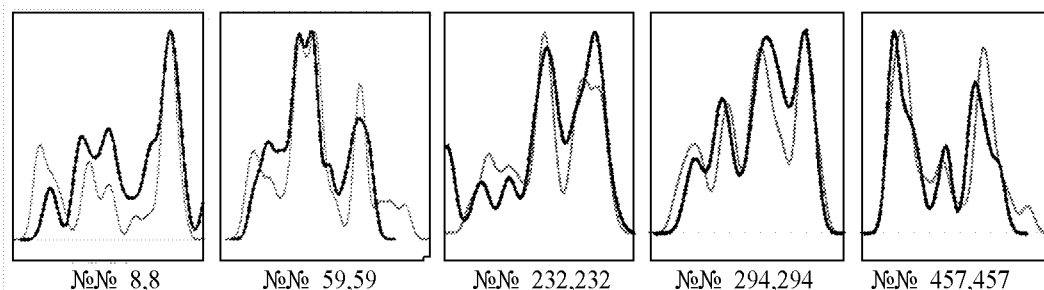


Рис. 7. Примеры сходства синхронных гистограмм редких форм, частота реализации которых представлена в таблице

массиву, $P_1 = 3 \cdot 10^{-12}$, а по второму $P_2 = 4 \cdot 10^{-11}$, то есть исчезающие малые величины. При этом следует иметь в виду, что число синхронных пар разных редких форм гистограмм существенно больше. Таким образом, достоверность утверждения о синхронности реализации сходных форм гистограмм в независимых броуновских генераторах доказывается оценкой двух видов.

4. Синхронность в разных географических пунктах

Свидетельством обусловленности изменения формы гистограмм вращением Земли вокруг своей оси является сходство формы гистограмм, получаемых при независимых измерениях в разных географических пунктах в одно и то же местное время. Ранее мы получили такие свидетельства в опытах с измерениями радиоактивности при почти максимально возможных расстояниях между лабораториями – при измерениях в Пушкино (Подмосковье, 54° с.ш. и 37° в.д.) и на станции Новолазаревская (Антарктида, 70° ю.ш. и 11.5° в.д.) – расстояние около 14000 км. В работах [6–9] при измерениях шумов в полупроводниковых схемах «эффект местного времени» был получен на расстоянии порядка 100 см. Мы осуществили аналогичные измерения с использованием броуновских генераторов.

На рис. 8 и 9 приведены результаты опытов поставленных 11.10.2009 в городе Реховот (Израиль, 31.89° с.ш. и 34.80° в.д.). Два броуновских генератора, разнесен-

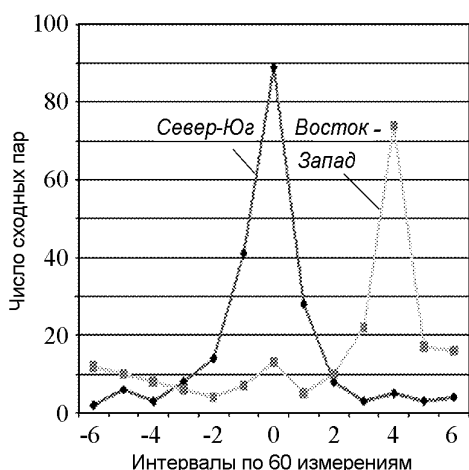


Рис. 8. Распределения по интервалам числа сходных пар гистограмм, построенных по результатам 60 измерений в двух независимых броуновских генераторах, находящихся на расстоянии 200 см в Северном полушарии. Сходные гистограммы при расположении по меридиану реализуются в двух генераторах одновременно. При расположении по параллели сходные гистограммы в западном генераторе реализуются на 4 интервала (11.6 мс) позже их реализации в восточном генераторе

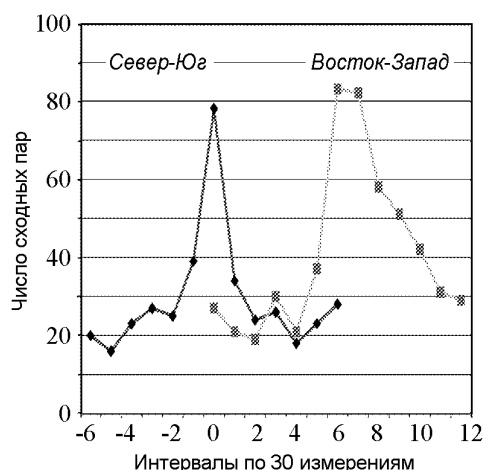


Рис. 9. Распределения по интервалам числа сходных пар гистограмм, построенных по результатам 30 измерений в двух независимых броуновских генераторах, находящихся на расстоянии 200 см в Северном полушарии. Синхронность по местному времени еще более четко проявляется при построении гистограмм по результатам 30 измерений. При расположении независимых генераторов по меридиану сходные гистограммы реализуются одновременно. При расположении по параллели гистограммы при измерениях с западным генератором появляются на 7–8 интервалов позже их появления в восточном генераторе

ные на расстояние $\Delta L = 200$ см, ориентировались сначала по меридиану, затем по параллели. Сигналы записывались в течение 4 мин. Задержка местного времени для указанной широты при ориентации базы Восток–Запад составляет $\Delta T = \Delta L/V$ с, где $V \approx 2\pi \cdot 6378000 \cos(31.89\pi/180)/86400$ м/с – скорость точки с указанными координатами на поверхности Земли. При частоте выборки 42 кГц эта величина задержки соответствует 3.6 гистограммам, построенным по 60 точкам, и 7.1 гистограммам, построенным по 30 точкам. Как видно из приведенных рисунков, интервалы времени, где найдено наибольшее число сходных по форме гистограмм, близки рассчитанным.

Обсуждение

Исследование броуновского движения методом динамического рассеяния света показало, что тонкая структура распределений амплитуд флуктуаций скоростей броуновских частиц (формы соответствующих гистограмм) меняется синхронно по местному времени. То есть броуновскому движению свойственны те же закономерности, что обнаружены ранее при исследовании стохастических процессов другой природы, а именно, химических реакций, тепловых флуктуаций в резисторах, радиоактивного распада и др. Таким образом, сходные закономерности проявляются в процессах, в которых диапазон изменений энергии различается на много порядков [11, 12]. Единственным общим для них остается их осуществление в одном и том же пространстве-времени. Из этого обстоятельства был сделан вывод, в соответствии с которым наблюдаемые закономерности объясняются флуктуациями пространства-времени, обусловленными, в свою очередь, движением Земли в неоднородном гравитационном поле [1–3].

Мы благодарны профессору П.С. Ланде, за весьма ценное обсуждение и ее трактовку представленных результатов [13]. Мы благодарны заведующему кафедрой биофизики Физического факультета МГУ профессору В.А. Твердислову и сотруднику Лаборатории физической биохимии Института теоретической и экспериментальной биофизики РАН профессору Д.П. Харакозу за весьма ценное обсуждение. Мы чрезвычайно признательны Анне Андреевне Андреевой, выполнившей работу «второго независимого эксперта» при сравнении гистограмм в этом исследовании.

Библиографический список

1. *Шноль С.Э.* Космофизические факторы в случайных процессах / Ред. Д.Д. Рабунский. Stockholm: Svenska Fisikarkivat, 2009.
http://www.ptep-online.com/index_files/books.html
<http://sfa.ptep-online.com/>
2. *Панчелюга В.А., Коломбет В.А., Каминский А.В., Панчелюга М.С., Шноль С.Э.* Эффект местного времени в шумовых процессах // Вестник Калужского университета. 2006. № 2. С. 3.
3. *Shnoll S.E. and Rubinstein I.A.* Regular changes in the fine structure of histograms revealed in the experiments with collimators which isolate beams of alpha-particles flying at certain directions // Progress in Physics. 2009. Vol. 2, № 4. P. 83.

4. *Goldburg W.I.* Dynamic light scattering // *Am. J. Phys.* 1999. Vol. 67, № 12.
5. *Beran J.* Statistics for long-memory processes. New York: Chapman & Hall, 1994.
6. *Schroeder M.* Fractals, chaos, power laws. Minutes from Infinite Paradise. New York: W.H. Freeman and Company, 1991.
7. *Panchelyuga V.A., Kolombet V.A., Pancheluga M.S., and Shnoll S.E.* Local-time effect on small space-time scale // *Space-Time Structure collected papers*. M.: Tetru, 2006. P. 344.
8. *Panchelyuga V.A., Kolombet V.A., Pancheluga M.S., and Shnoll S.E.* Experimental investigation of the existence of a local-time effect on the laboratory scale and the heterogeneity of space-time // *Progress in Physics*. 2007. Vol. 1, № 1. P. 64.
9. *Kaminsky A.V., Shnoll S.E.* The study of synchronous (by local time) changes of the statistical properties of thermal noise and alpha-activity fluctuations of a 239-Pu sample. <http://arxiv.org/abs/physics/0605056>.
10. *Shnoll S.E.* The «scattering of the results of measurements» of processes of diverse nature is determined by the Earth's motion in the inhomogeneous space-time continuum. The effect of «half-year palindromes» // *Progress in Physics*. 2009. Vol. 1. P. 3.
11. *Mandelbrot B.B., van Ness J.W.* Fractional Brownian motion, fractional noises and applications // *SIAM Review*. 1968. Vol. 10, № 4. P. 422.
12. *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. Ижевск: Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
13. *Ланда П.С., Власов В.А.* Аналитическое рассмотрение влияния космических факторов на функции скоростей броуновских частиц // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2011. Т. 19, № 2 (в печати).

Elfi-tech Ltd. Rehovot, Israel
Московский госуниверситет
ИТЭБ РАН, Пуццино
Пуцинский госуниверситет

Поступила в редакцию 26.01.2010

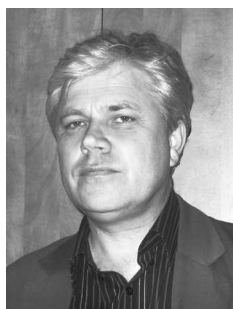
COSMOPHYSICAL FACTORS IN THE FLUCTUATIONS AMPLITUDE SPECTRUM OF BROWNIAN MOTION

A.V. Kaminsky, S.E. Shnoll

Phenomenon of the regular variability of the fine structure of the fluctuation in the amplitude distributions (shapes of related histograms) for the case of Brownian motion was investigated. We took an advantage of the dynamic light scattering method to get a stochastically fluctuated signal determined by Brownian motion. Shape of the histograms is most likely to vary, synchronous, in two proximally located independent cells containing Brownian particles. The synchronism persists in the cells distant at 2 m from each other, and positioned meridionally. With a parallel-wise positioning of the cells, high probability

of the synchronous variation in the shape of the histograms by local time has been observed. This result meets the previous conclusion about the dependency of histogram shapes («fluctuation amplitudes» of the spectra of stochastic processes) upon rotation of the Earth.

Keyword: Cosmophysical factors, fluctuation of Brownian motion.



Каминский Александр Викторович – родился в 1957 году в Тбилиси. Окончил Тбилисский государственный университет (1979). После окончания учебы работал в области нелинейной химической кинетики и лазерного разделения изотопов. В настоящее время является сотрудником компании Elfi-tech Ltd. (Израиль), работающей в области биомедицинской физики. Автор более 30 научных статей.

Elfi-tech Ltd., Rekhovot, Israel
E-mail: kaminskii@gmail.com



Шноль Симон Эльевич – родился в 1930 году в Москве. Окончил Московский государственный университет (1951). Работает в качестве главного научного сотрудника в Институте теоретической и экспериментальной биофизики РАН и в качестве профессора кафедры биофизики физического факультета МГУ. Диссертации на соискание ученой степени кандидата биологических наук (1957) и доктора биологических наук (1970) посвящены исследованиям колебательных режимов и флуктуаций скоростей биохимических и физико-химических реакций. Автор около 250 статей и 5 книг, в том числе книги «Космофизические факторы в случайных процессах».

119992 Москва
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
142290 Пущино Московской обл.
Институт теоретической и экспериментальной биофизики РАН
E-mail: shnoll@mail.ru



q*-БРИЗЕРЫ: ОТ ПАРАДОКСА ФЕРМИ–ПАСТЫ–УЛАМА ДО АНОМАЛЬНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

М.В. Иванченко

В статье дается обзор актуальных проблем нелинейной физики, в которых теория *q*-бризеров – точных периодических решений, экспоненциально локализованных в модовом пространстве – находит применение.

Ключевые слова: Нелинейные моды, локализация энергии, *q*-бризеры.

Введение

В 1955 году Э. Ферми, Дж. Паста, и С. Улам выдвинули гипотезу о нелинейном механизме термализации в твердых телах и попытались смоделировать этот процесс в численном эксперименте с нелинейными колебательными цепочками [1]. Результат оказался парадоксальным: энергия оставалась локализованной в начальной и нескольких соседних низкочастотных модах. Более того, на больших временах интегрирования наблюдалось практически полное возвращение энергии в начальную моду. Это открытие дало новый импульс исследованиям фундаментальной проблемы термализации и эргодичности нелинейных систем [4–6], в частности, развитию теорий детерминированного хаоса [2] и солитонов в интегрируемых системах [3], порогов слабого и сильного хаоса [2, 7–11].

В статье дается обзор последних результатов теории *q*-бризеров, точных периодических решений нелинейной системы Ферми–Пасты–Улама (ФПУ), которые позволяют качественно и полуколичественно объяснить парадокс ФПУ [12]. *q*-Бризеры являются продолжением линейных мод в нелинейный режим, экспоненциально локализованы в *q*-пространстве нормальных мод и сохраняют устойчивость при достаточно малой нелинейности. Начальные условия в эксперименте Ферми, Пасты и Улама 55-летней давности находились вблизи этих решений, и траектории оставались в окрестности *q*-бризеров. Порог устойчивости *q*-бризеров совпадает с порогом слабого хаоса (хаотизации колебаний, остающихся локализованными в модовом

*Статья написана по материалам конференции «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, 4–9 октября, 2010.

пространстве), а порог их делокализации – с порогом сильного хаоса (быстрой делокализации энергии и термализации системы).

В разделе 1 перечислены основные закономерности процессов термализации в цепочечных и решеточных системах. В разделе 2 приводятся базовые результаты теории q -бризеров. В разделе 3 рассматриваются свойства q -бризеров в системах с одновременным присутствием нелинейности и беспорядка, и обсуждается задача аномальной теплопроводности.

1. Проблема Ферми–Пасты–Улама

Энрико Ферми сохранял интерес к проблеме равномерного распределения энергии по степеням свободы на протяжении многих лет. Так, в своей работе 1923 года [13] он предпринял попытку усилить теорему Пуанкаре, гласящую, что гамильтониан нелинейной системы в общем случае не имеет других интегралов движения, кроме энергии. Предположение Ферми заключалось в том, что нелинейность обуславливает отсутствие инвариантных многообразий в фазовом пространстве, которые могли бы изолировать некоторые области последнего. Любопытно, что Колмогоров сформулировал свою знаменитую теорему о структурной устойчивости торов в конечномерных системах (известную теперь как КАМ-теорема) в 1954-м, в том же году, когда Ферми, Паста и Улам предприняли попытку численно показать обратное: неизбежность перехода нелинейной системы в состояние с равномерной энергией из состояния мономодового возбуждения. Моделировавшаяся ими система – цепочка N частиц одинаковой массы, связанных пружинами, с линейными и нелинейными членами в силе взаимодействия: квадратичными (так называемая модель α -ФПУ)

$$\ddot{x}_n = (x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) + \alpha[(x_{n+1} - x_n)^2 - (x_n - x_{n-1})^2] \quad (1)$$

или кубическими (β -ФПУ)

$$\ddot{x}_n = (x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) + \beta[(x_{n+1} - x_n)^3 - (x_n - x_{n-1})^3], \quad (2)$$

где x_n – отклонение n -й частицы от состояния равновесия, а граничные условия – $x_0 = x_{N+1} = 0$.

Замена переменных $x_n(t) = \sqrt{2/(N+1)} \sum_{q=1}^N Q_q(t) \sin(\pi q n / (N+1))$ задает переход в пространство N нормальных мод с амплитудами $Q_q(t)$ и частотами $\omega_q = 2 \sin(\pi q / (2(N+1)))$. Уравнения движения в этом случае имеют вид

$$\ddot{Q}_q + \omega_q^2 Q_q = -\frac{\alpha}{\sqrt{2(N+1)}} \sum_{l,m=1}^N \omega_q \omega_l \omega_m B_{q,l,m} Q_l Q_m \quad (3)$$

для модели α -ФПУ (1) и

$$\ddot{Q}_q + \omega_q^2 Q_q = -\frac{\beta}{2(N+1)} \sum_{l,m,n=1}^N \omega_q \omega_l \omega_m \omega_n C_{q,l,m,n} Q_l Q_m Q_n \quad (4)$$

для β -ФПУ модели (2). Коэффициенты взаимодействия

$$B_{q,l,m} = \sum_{\pm} (\delta_{q \pm l \pm m, 0} - \delta_{q \pm l \pm m, 2(N+1)}), \quad (5)$$

$$C_{q,l,m,n} = \sum_{\pm} (\delta_{q \pm l \pm m \pm n, 0} - \delta_{q \pm l \pm m \pm n, 2(N+1)} - \delta_{q \pm l \pm m \pm n, -2(N+1)}) \quad (6)$$

задают селективную нелинейную нелокальную связь между модами. В линейном случае в отсутствие этого взаимодействия существует N интегралов движения, которые отвечают энергиям линейных нормальных мод $E_q = 1/2 (\dot{Q}_q^2 + \omega_q^2 Q_q^2)$.

Исходя из теоретических соображений [13], Ферми, Паста и Улам ожидали, что энергия, изначально сконцентрированная в низкочастотной моде q_0 , в результате нелинейного взаимодействия будет перераспределяться между остальными модами, воспроизводя при этом переход к равновесному состоянию. Результаты, к их удивлению, были

противоположными. Энергия не только не перераспределялась сколько-нибудь равномерно, но и возвращалась в исходную моду (до 98%) через большие промежутки времени (рис. 1). Еще более впечатляющим казалось то, что время возвращения даже уменьшалось при увеличении энергии/коэффициента нелинейности. Объяснение ошибкой численного счета было опровергнуто более поздними численными экспериментами: улучшенная точность и большие времена интегрирования позволили пронаблюдать возвращение до 99% от начальной энергии [14].

Большой шаг в понимании явления ФПУ сделан в [2], где был предложен критерий возникновения нелинейных резонансов, приводящих к динамическому хаосу. Было указано, что в отсутствие сильных резонансов динамика нелинейной системы может оставаться регулярной или квазирегулярной, а термализация, как следствие, будет отсутствовать, что и могло привести к результатам, полученным Ферми, Пастой, Уламом. При превышении некоторого порога по энергии $E > E^c$ резонансы, вызванные нелинейным сдвигом частот, приводят к развитию хаотической динамики, быстрому перераспределению энергии между модами и, в итоге, к термализации. Эти предсказания нашли подтверждение в численных экспериментах [15].

Дальнейшее исследование проблемы ФПУ развивалось в двух направлениях. Аналитические оценки [7, 8] и численные эксперименты [9–11] показали, что порог термализации (сильного хаоса) сохраняется и в термодинамическом пределе, отвечая конечной плотности энергии: $\lim_{N \rightarrow \infty} E/N = \varepsilon_c > 0$. Попутно было обнаружено существование так называемого режима слабого хаоса, в котором динамика становилась хаотической, но энергия оставалась сосредоточенной в нескольких соседних модах. Хотя аргументы общего характера говорят в пользу конечной термализации и в режиме слабого хаоса (вследствие диффузии Арнольда), уверенно этот процесс до сих пор не наблюдался в численных экспериментах, в силу крайне больших характерных временных масштабов. В отличие от порога сильного хаоса, порог слабого хаоса стремится к нулю в термодинамическом пределе.

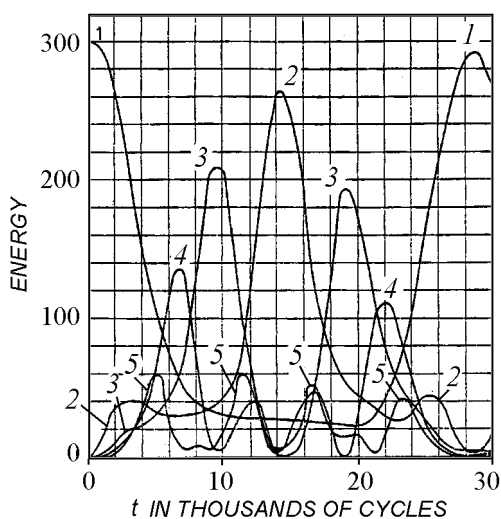


Рис. 1. Эволюция энергий нескольких начальных мод в численном эксперименте Ферми-Пасты-Улама с $q_0 = 1$, $\alpha = 0.25$, $N = 32$ [1]

Второе направление работ связано с исследованием характерных времен перехода к термализованному состоянию и сохраняет актуальность до настоящего времени. Можно считать установленным, что зависимость от энергии системы является степенной для сравнительно высоких значений энергии и экспоненциальной для низких [7, 16, 17]. Скейлинг также сильно зависит от типа начальных условий (так, например, при коррелированности начальных фаз осцилляторов степенная зависимость от плотности энергии сменяется на аналогичную зависимость от полной энергии) [18].

Самым интригующим, пожалуй, стало открытие так называемых «естественных пакетов» [7, 19]. Оказалось, что между порогами слабого и сильного хаоса происходит сравнительно быстрое перераспределение части энергии из исходной или нескольких исходных мод вверх по спектру. В формирующемся квазистационарном распределении плотность энергии падает экспоненциально с ростом номера моды. Такие пакеты, экспоненциально локализованные в модовом пространстве, характеризуются очень большим временем жизни, и часто о них говорят как о метастабильных структурах. Их разрушение происходит через перекачку энергии в некоторые избранные моды из высокочастотной части спектра, после возбуждения которых энергия распределяется уже по всему спектру. Каков механизм образования таких пакетов, чем определяется степень их экспоненциальной локализации, в чем причина их устойчивости, за счет чего в конечном итоге происходит их разрушение – оставалось не ясным до последнего времени.

Следует также отметить результаты по исследованию задачи ФПУ в двумерных системах. Существенная вычислительная сложность долгое время препятствовала проведению численных экспериментов, однако недавно они все-таки были выполнены. Выяснилось, что, хотя некоторое ускорение процессов термализации по сравнению с одномерными системами и наблюдается, быстрое распределение энергии по спектру отсутствует при достаточно малых энергиях [20].

2. q -Бризеры

В основу гипотезы о существовании q -бризеров – точных периодических решений систем (1), (2), локализованных в модовом пространстве – легла аналогия с дискретными бризерами – нелинейными периодическими траекториями, экспоненциально локализованными в прямом пространстве [21]. Наличие и устойчивость таких траекторий могло бы объяснить (а) отсутствие термализации на временах, доступных в численном эксперименте, если начальные условия выбраны в окрестности одной из траекторий, и (б) природу естественных пакетов, как отражающих структуру фазового пространства вблизи q -бризеров. И действительно, устойчивые периодические траектории, экспоненциально локализованные в модовом пространстве, были найдены – как непрерывное продолжение линейных нормальных мод в нелинейную область [12].

Рассмотрим сначала вопрос о принципиальной возможности продолжения линейных мод в нелинейный режим. Для этого положим $\alpha = \beta = 0$, зададим энергию $E_{q_0} = E$ в нормальной моде $q = q_0$, в то время как остальные q -осцилляторы непо-

движны. Такие начальные условия отвечают периодической траектории в фазовом пространстве нашей линейной модели. Теорема Ляпунова гарантирует возможность продолжения при отсутствии резонансов $n\omega_{q_0} \neq \omega_{q \neq q_0}$, что, в общем случае, справедливо для конечного числа осцилляторов N [22]. Можно ожидать, что периодическая траектория останется локализованной в q -пространстве по крайней мере до некоторого критического ненулевого значения α, β .

На возможности продолжения линейных мод основан численный алгоритм отыскания q -бризеров [12]. В качестве нулевого приближения выберем q_0 -ю линейную моду. Зададим следующие начальные условия: $Q_{q \neq q_0}(0) = 0$, $\dot{Q}_q(0) = 0$, и $Q_{q_0}(0) = \sqrt{2E}/\omega_{q_0}$. Сконструируем отображение $\vec{y} \equiv \{x_q\}$ на себя путем интегрирования уравнений динамики до момента, когда $\dot{x}_s(t) = 0$, $x_s(t) > 0$, $s = [(N+1)/(2q_0)]$: $\vec{y}^{n+1} = \vec{\mathcal{F}}(\vec{y}^n)$. Периодические траектории систем (1), (2) являются неподвижными точками этого отображения. Векторная функция $\vec{\mathcal{G}} = \vec{\mathcal{F}}(\vec{y}) - \vec{y}$ используется для вычисления матрицы монодромии $\mathcal{N} = \partial \mathcal{G}(\vec{y})_i / \partial y_j$. Итерации $\vec{y}' = \vec{y} - \mathcal{N}^{-1} \vec{\mathcal{G}}(\vec{y})$ продолжаются до достижения требуемой точности ε : $\|\vec{\mathcal{F}}(\vec{y}) - \vec{y}\| / \|\vec{y}\| < \varepsilon$, где $\|\vec{y}\| = \max[|y_i|]$. Из системы уравнений $\vec{\mathcal{G}}(\vec{r}) = \mathcal{N}(\vec{r} - \vec{r}')$ находится новая стартовая точка \vec{r}' и дополнительно корректируется отклонение энергии системы от заданного полного значения E .

На рис. 2 представлена эволюция энергии в низкочастотных модах при начальных условиях численного эксперимента Ферми, Пасты, Улама [1] и показаны значения энергий, отвечающих точному q -бризерному решению с центром в низшей моде, при совпадающей энергии и остальных параметрах. На рис. 3 приведены графики распределения энергий q -бризеров в модовом пространстве; в обоих случаях результаты численного счета показывали линейную устойчивость траектории.

Применение метода теории возмущения Линдштедта–Пуанкаре для низкочастотных мод модели α -ФПУ приводит к оценке распределения энергий нормальных мод в q -бризере [12]:

$$E_{nq_0} = \gamma^{2n-2} n^2 E_{q_0},$$

$$\gamma = \frac{\alpha \sqrt{E_{q_0}} (N+1)^{3/2}}{\pi^2 q_0^2}. \quad (7)$$

Необходимое условие для локализации q -бризера в рамках этой оценки – $\gamma < 1$. Следовательно, уравнения (7) позволяют получить оценки для порога локализации и для соотношений подобия между параметрами q -бризера, оставляющими γ неизменным. Отметим, что вопрос динамической устойчивости q -бризеров, по всей видимости, не имеет прямого отношения к термализации как таковой. Действительно, если

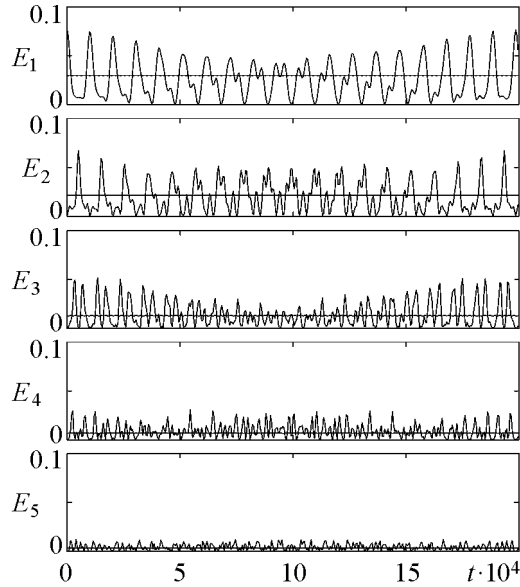


Рис. 2. Динамика энергий мод с номерами $q = 1, \dots, 5$ для начальных условий системы ФПУ [1] (осциллирующие траектории) и точного q -бризерного решения (горизонтальные линии). Здесь $\alpha = 0.25$, $E = 0.077$, $N = 32$ [12]

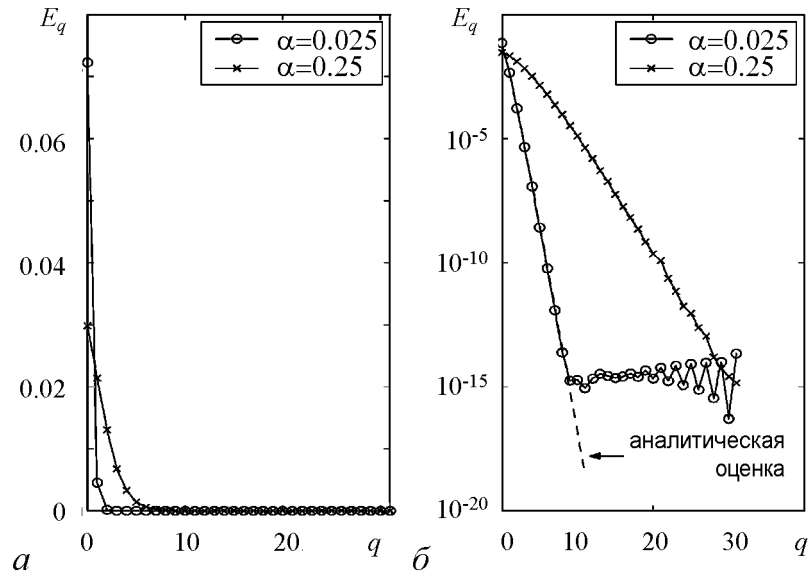


Рис. 3. Распределение модовых энергий устойчивых q -бризеров при $E = 0.077$, $N = 32$ в зависимости от величины нелинейности α : a – линейная шкала; b – логарифмическая. Пунктиром показана аналитическая оценка (7) [12]

q -бризер локализован, то ощутимая неустойчивость на краях распределения энергии исключена – в противном случае соответствующие резонансы привели бы к делокализации самого q -бризера. Неустойчивость в центре распределения приведет к хаотизации динамики в центре, но в силу отсутствия резонансов на краях не приведет к делокализации.

Аналогичным образом можно получить следующую оценку распределения энергий нормальных мод q -бризера для модели β -ФПУ:

$$E_{(2n+1)q_0} = \lambda^{2n} E_{q_0}, \quad \lambda = \frac{3\beta E_{q_0}(N+1)}{8\pi^2 q_0^2}. \quad (8)$$

Необходимое условие для локализации q -бризера – $\lambda < 1$. При условии $\lambda = 1$ q -бризер делокализуется, энергия быстро перераспределяется по спектру, система термализуется.

Анализируя линейную устойчивость q -бризеров, можно показать, что они становятся неустойчивыми при условии $6\beta E(N+1)/\pi^2 > 1$ [12]. Поскольку сами решения при этом сохраняют локализацию, то траектории не приводят к термализованному состоянию, в согласии с вышесказанным.

Обсудим обобщение теории q -бризеров на случай двумерных и трехмерных решеток. Основное условие для продолжения q -бризеров заключалось в отсутствии резонансов $n\omega_{q_0} \neq \omega_{q \neq q_0}$. Конечная система в прямом пространстве имеет дискретный спектр, и теорема Ляпунова остается в силе. Модовые числа в таком случае становятся векторами с d компонентами. В работе [23] были получены q -бризерные решения для $d = 2, 3$. Основные свойства решений цепочки сохраняются и в мно-

гомерном случае. На рис. 4 показан пример q -бризерного решения для двумерной решетки.

Для модели β -ФПУ получено следующее обобщенное выражение для распределения энергий мод:

$$E_{(2n+1)\mathbf{q}_0} = \lambda_d^{2n} E_{\mathbf{q}_0},$$

$$\lambda_d = \frac{3\beta E_{\mathbf{q}_0} N^{2-d}}{2^{2+d}\pi^2 |\mathbf{q}_0|^2}. \quad (9)$$

Численный анализ показывает количественное согласие с этими оценками [23].

Перечислим дальнейшие обобщения теории q -бризеров. Было показано, что q -бризеры существуют в полуклассических и квантовых колебательных цепочках (модели нелинейного уравнения Шредингера и Бозе–Хаббарда) [24]. Были исследованы свойства локализации q -бризеров в модовом пространстве обобщенной модели ФПУ с нелинейностью произвольного порядка [25]. Установлено, что, помимо увеличения полной энергии системы/коэффициента нелинейности, к делокализации может привести и увеличение длины системы, если порядок нелинейности в гамильтониане меньше порогового $\chi^* = 6$. Для более высоких порядков нелинейности длина локализации в модовом пространстве уменьшается с N ; для любых наперед заданных величин коэффициента и порядка нелинейности можно указать такое N , выше которого q -бризер с центром в моде q_0 будет локализован. Обобщение аналитической схемы Линдштедта–Пуанкаре на случай многомодового линейного решения позволило построить квазипериодические решения, экспоненциально локализованные в модовом пространстве, получившие название q -торов [26].

Легко убедиться, что теория q -бризеров исчерпывающе объясняет все особенности термализации в модельных колебательных системах. Существование локализованных в модовом пространстве периодических решений отражает локальную структуру фазового пространства. Если начальные условия находятся вблизи q -бризера, траектория будет оставаться в некоторой его окрестности достаточно длительное время и будет характеризоваться локализацией в модовом пространстве. Если q -бризер устойчив, то в некоторой его окрестности присутствуют торы с низкой эффективной размерностью; будет наблюдаться практически полное возвращение энергии в начальную моду. Если решение неустойчиво, но сохраняет локализацию – тип поведения траекторий в его окрестности отвечает слабому хаосу. Происходит быстрая эволюция распределения энергии из начальной моды к экспоненциально локализованному естественному пакету, метастабильность которого определяется локальной структурой фазового пространства (рис. 5, *a*). Результаты по проблеме ФПУ в двумерных системах объясняются в рамках этого же подхода.

Наконец, механизм разрушения естественных пакетов и термализации на очень больших временах также может быть понят с помощью анализа q -бризеров [27]. Обратим внимание на резонансные пики на краях распределений на рис. 5 как для траектории ФПУ, так и для q -бризеров. В работе получено количественное объяснение

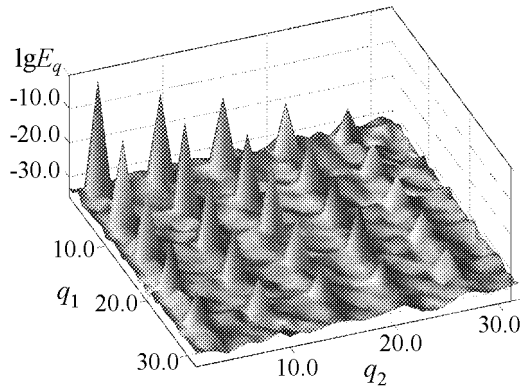


Рис. 4. Распределение энергии в q -бризере в двумерной ФПУ-решетке при $N = 32 \times 32$, $E = 1.5$, $\mathbf{q}_0 = (3, 3)$, $\beta = 0.5$ [23]

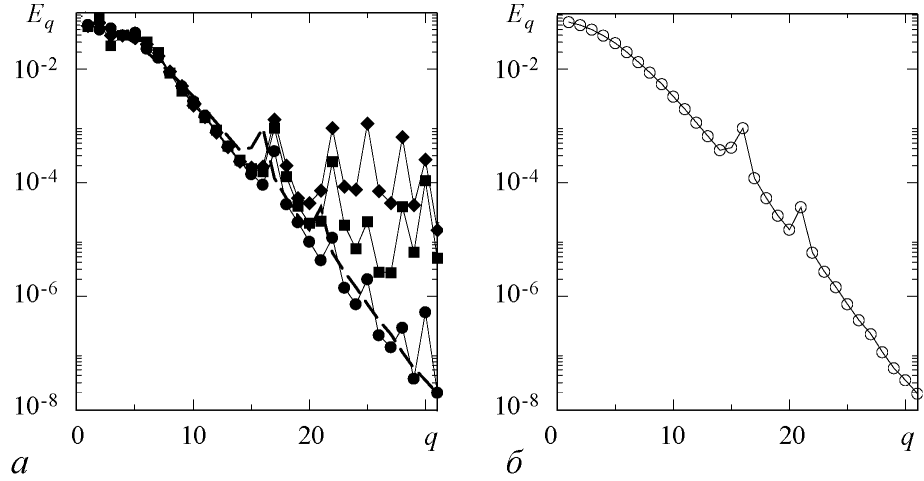


Рис. 5. *a* – распределения энергии в модовом пространстве для траектории ФПУ при $q_0 = 1$, $N = 31$, $\alpha = 0.33$, $E = 0.32$ в разные моменты времени t : 10^4 (окружности), 10^5 (квадраты), 10^6 (ромбы); *б* – распределения энергии в q -бризере для тех же параметров (изобразено на рис. *a* штриховой линией) [27]

возникновения и расположения этих пиков. Они вызваны тем, что для соответствующих модовых чисел условие резонанса приближенно выполняется: $n\omega_{q_0} \approx \omega_{q \neq q_0}$. Легко убедиться в том, что пики возникают в верхней половине частотного спектра, а также только в случае низкочастотной затравочной моды. Именно это резонансное взаимодействие мод приводит к термализации.

3. q -Бризеры в системах с беспорядком

Беспорядок – неотъемлемое свойство реальных кристаллических решеток, в которых неизбежны дефекты. Естественна поэтому постановка вопроса о колебательных свойствах систем, где беспорядок и нелинейность присутствуют одновременно. Рассмотрим модель β -ФПУ со случайной пространственной неоднородностью в коэффициентах линейной связи, гамильтониан которого имеет вид:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N p_n^2 + \sum_{n=1}^{N+1} \left[\frac{1}{2} (1 + D\kappa_n) (x_n - x_{n-1})^2 + \frac{\beta}{4} (x_n - x_{n-1})^4 \right], \quad (10)$$

где $\kappa_n \in [-1/2, 1/2]$ – случайные равномерно распределенные некоррелированные величины $\langle \kappa_n \kappa_m \rangle = \sigma_\kappa^2 \delta_{n,m}$, D – параметр беспорядка.

Как и прежде, найдем уравнения движения в пространстве нормальных мод линейной системы без беспорядка

$$\ddot{Q}_q + \omega_q^2 Q_q = -\nu \sum_{p,r,s=1}^N C_{q,p,r,s} \omega_q \omega_p \omega_r \omega_s Q_p Q_r Q_s - d \sum_{p=1}^N \omega_q \omega_p K_{q,p} Q_p. \quad (11)$$

Здесь коэффициенты $K_{q,p} = \frac{2}{N+1} \sum_{n=1}^N \kappa_n \cos \frac{\pi q(n-1)/2}{N+1} \cos \frac{\pi p(n-1)/2}{N+1}$ [28] задают глобальное взаимодействие мод вследствие беспорядка. Заметим, что параметры нелинейности и беспорядка $\nu = \beta/(N+1)$, $d = D/\sqrt{N+1}$ являются

малыми; $\nu, d \ll 1$ даже при не малых $\beta = D = 1$ в системах достаточно большого размера $N \gg 1$.

Рассмотрим сначала линейную систему с беспорядком: $d \neq 0$ и $\nu = 0$. Наша цель состоит в нахождении новых собственных векторов \hat{z}_{qn} линейной задачи, задающих преобразование $x_n(t) = \sum_{q=1}^N Q_q(t) \hat{z}_{qn}$. Будем строить теорию возмущений для гармонической моды q_0 по малому параметру d : $Q_q(t) = Q_q^{(0)}(t) + dQ_q^{(1)}(t) + \dots$, где $Q_q^{(0)}(t) = 0$ для $q \neq q_0$. В первом приближении уравнение (11) дает уравнения осцилляторов $q \neq q_0$ под действием внешней силы: $\ddot{Q}_q^{(1)} + \omega_q^2 Q_q^{(1)} = -\omega_q \omega_{q_0} K_{q,q_0} Q_{q_0}^{(0)}$. Отсюда получаем амплитуду колебаний A каждой моды

$$A_{q,q_0}^{(1)} = -\frac{\omega_q \omega_{q_0}}{\omega_q^2 - \omega_{q_0}^2} K_{q,q_0} A_{q_0}, \quad q \neq q_0. \quad (12)$$

Усредненная по времени энергия q -й моды имеет вид

$$\langle E_q \rangle = \frac{d^2 E_{q_0} \omega_q^4}{2(\omega_q^2 - \omega_{q_0}^2)^2} \langle K_{q,q_0}^2 \rangle = \frac{d^2 E_{q_0} \sigma_{\kappa}^2 \omega_q^4}{2(\omega_q^2 - \omega_{q_0}^2)^2}. \quad (13)$$

В качестве критерия применимости выражения (12) будем использовать $\langle E_{q_0+1} \rangle \ll E_{q_0}$, получая, таким образом, условие на порядковые номера мод:

$$q_0 \ll q_c = 2\sqrt{2}(N+1)^{1/2}/D\sigma_{\kappa}. \quad (14)$$

Отсюда вытекает, что нормальные моды с $q_0 \ll q_c$ с хорошей точностью сохраняют форму плоских волн

$$\hat{z}_{q_0 n} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \left(\sin \frac{\pi q_0 n}{N+1} - d \sum_{p \neq q_0} \frac{\omega_{q_0} \omega_p}{\omega_{q_0}^2 - \omega_p^2} K_{q_0,p} \sin \frac{\pi p n}{N+1} \right)$$

даже в присутствии беспорядка. Таким образом, можно говорить о модах, *делокализованных* в прямом пространстве. С другой стороны, беспорядок вызывает андерсоновскую локализацию мод. Следовательно, q_c отвечает границе между делокализованными и локализованными модами: $q_0 \ll q_c$ и $q_0 > q_c$, соответственно. Заметим, что в коротких цепочках и/или при слабом беспорядке может выполняться условие $q_c \geq N$ и *все* моды будут делокализованы. Согласно (14), для этого требуется $N \leq 8/(D^2 \sigma_{\kappa}^2)$. Примечательно, что метод передаточных матриц дает нижнюю границу q_c для локализованных собственных состояний (метод позволяет оценить длину локализации) с аналогичной зависимостью от длины системы $q_c \propto N^{1/2}$ [29]. В совокупности эти результаты свидетельствуют о наличии зоны делокализованных мод шириной \sqrt{N} с частотами в интервале $0 \leq \omega \leq \omega_c \sim N^{-1/2}$ в линейных цепочках ФПУ с беспорядком. Плоские волны являются хорошим приближением этих состояний.

Учтем теперь влияние нелинейности и будем строить продолжение делокализованных мод системы с беспорядком в нелинейный режим – q -бризеры. Перейдем к новым переменным $\{\hat{Q}_q\}$, где $x_n(t) = \sum_{q=1}^N \hat{Q}_q(t) \hat{z}_{qn}$. Получим:

$$\ddot{\hat{Q}}_q + \omega_q^2 \hat{Q}_q \approx -\frac{\nu}{2} \sum_{p,r,s=1}^{q_s} C_{q,p,r,s} \omega_q \omega_p \omega_r \omega_s \hat{Q}_p \hat{Q}_r \hat{Q}_s. \quad (15)$$

Будем строить теорию возмущений по степеням малого параметра ν , используя $\hat{z}_{q_0 n}$ в качестве нулевого приближения. Пренебрегая членами с порядком малости $\mathcal{O}(\nu d)$ и выше, получаем q -бризер с экспоненциально локализованным распределением энергии в модовом пространстве, совпадающим с (8). Вблизи границы зон делокализованных и локализованных мод энергии становятся пренебрежимо малы $E_{q_c} \sim \lambda^{q_c/q_0} E_{q_0}$ пока $\lambda < 1$ (то есть пока q -бризер локализован), и локализованные моды возбуждаются слабо: $\langle E_q \rangle \approx d^2 E_{q_0} \sigma_{\kappa}^2 / 2$. Результаты численных экспериментов хорошо согласуются с теоретическими оценками (рис. 6).

Анализ линейной устойчивости q -бризеров в системах с беспорядком дает следующее выражение для границы потери устойчивости [28]:

$$\beta^* = \beta_0^* \left(1 - \frac{2d(N+1)^2}{\pi^2} \Delta K \right), \quad \langle \beta^* \rangle = \beta_0^*, \quad \sigma_{\beta^*} = 2\sigma_{\kappa} D \sqrt{N+1} / E_{q_0}, \quad (16)$$

где $\beta_0^* = \pi^2 / (6E_{q_0}(N+1))$ – порог в отсутствие беспорядка, а $\Delta K = K_{\tilde{q}, \tilde{q}} - 2K_{q_0, q_0} + K_{\tilde{p}, \tilde{p}}$.

Помимо задачи о структуре акустического спектра нелинейных колебательных решеток с беспорядком, эти результаты имеют прямое отношение еще к одной фундаментальной физической проблеме – аномальной теплопроводности низкоразмерных систем. Как уже давно предсказано в численных экспериментах с использованием простейших модельных цепочек [30], и совсем недавно показано в физических экспериментах с нанотрубками [31], классический закон теплопроводности Фурье (поток тепла пропорционален градиенту температуры) может нарушаться. Коэффициент теплопроводности может зависеть от размеров системы, как правило, степенным образом: $\kappa \propto N^{\mu}$. В таких случаях говорят об аномальной теплопроводности. Одним из основных камней преткновения в аналитических теориях аномальной теплопроводности является проблема корректного описания нелинейного взаимодействия мод из средней и высокочастотной частей спектра. По-видимому, с этим связаны различия в численных значениях показателя μ , предсказываемых различными теориями. В недавней работе [32] мы предложили перейти от традиционно рассматриваемых нелинейных систем без беспорядка к более физически реалистичным системам с одновременным присутствием нелинейности и беспорядка. Было указано, что в таких системах возможно более строгое рассмотрение вклада низкочастотных и высокочастотных мод в перенос тепла и эффектов их взаимодействия. В самом деле, теория q -бризеров дает информацию о структуре спектра и мод в нели-

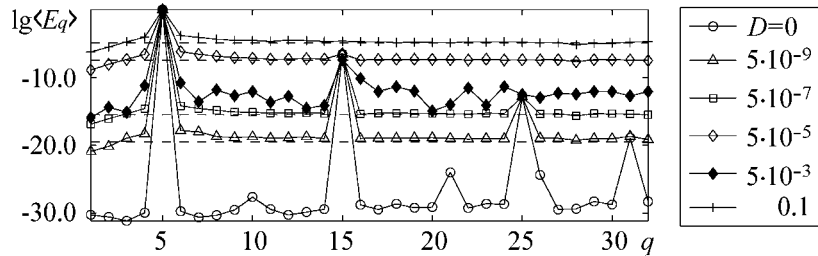


Рис. 6. Распределения энергий q -бризеров в модовом пространстве при $q_0 = 5$, $\beta = 0.01$, $N = 32$ и увеличивающейся силе беспорядка. Штриховые линии – теоретическая оценка (13). Закрашенные ромбы: распределение энергии в модовом пространстве системы с беспорядком для конкретной реализации последнего, моды пронумерованы в порядке увеличения их частоты

нейных системах с беспорядком, ширине зон делокализованных и локализованных мод. В результате удалось предсказать и теоретически объяснить различные типы теплопроводности системы, наблюдаемые при изменении температуры: от нормальной проводимости до аномальной.

Заключение

В настоящее время теория q -бризеров широко применяется в исследованиях нелинейной локализации колебаний. Актуальность определяется прикладными проблемами локализации и транспорта энергии в кристаллических решетках, упорядоченных структурах микро- и наноразмерных электромеханических осцилляторов, распространения света в решетках волноводов, динамики Бозе–Эйнштейна конденсатов в оптических решетках. Теория q -бризеров – точных периодических траекторий, экспоненциально локализованных в модовом пространстве – представляется очень мощным аппаратом для анализа нелинейной динамики таких систем в целом. Она дает исчерпывающее описание механизма термализации в твердых телах за счет нелинейности (известного как парадокс Ферми–Пасты–Улама), позволяет определять границы области линейчатого спектра в двух и трехмерных нелинейных акустических решетках, проанализировать влияние беспорядка (дефектов кристаллической решетки) на колебательный спектр системы, получить зависимость ширины зоны квазигармонических мод от размера системы. Как стало ясно совсем недавно, анализ сложной колебательной динамики распределенных систем с помощью q -бризеров может быть использован и в задаче об аномальной теплопроводности. И если для случая одномерных систем некоторый прогресс уже намечается, проблемы двумерной и трехмерной теплопроводности только ожидают систематических исследований. С точки зрения автора, самые физически интересные результаты еще предстоит получить.

Автор благодарит С. Флаха, О. Канакова, К. Мишагина, В.Д. Шалфеева, и S. Lepri за плодотворные дискуссии.

Работа поддержана фондом «Династия», Федеральной целевой программой «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракты 14.740.11.0075, П2308, 02.740.11.0839) и РФФИ (10-02-00865).

Библиографический список

1. *Fermi E., Pasta J., and Ulam S.* // Los Alamos Report, LA–1940, 1955; also in: *Collected Papers of Enrico Fermi* / ed. E. Segre, Vol. II (University of Chicago Press, 1965) p. 978; *Many-Body Problems* / ed. D. C. Mattis (World Scientific, Singapore, 1993).
2. *Izrailev F.M. and Chirikov B.V.* Statistical properties of a non-linear string // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1966. Vol. 166. 57 [*Soviet. Phys. Dokl.* 1966. Vol. 11. P. 30].
3. *Zabusky N.J. and Kruskal M.D.* Interaction of «Solitons» in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // *Phys. Rev. Lett.* 1965. Vol. 15. P. 240.
4. *Ford J.* The Fermi–Pasta–Ulam problem: Paradox turns discovery // *Phys. Rep.* 1992. Vol. 213. P. 271.

5. The Fermi–Pasta–Ulam problem – The first fifty years / Eds D.K. Campbell, P. Rosenau and G.M. Zaslavsky // CHAOS. 2005. Vol. 15, № 1.
6. *Berman G.P. and Izrailev F.M.* The Fermi–Pasta–Ulam problem: Fifty years of progress // Chaos. 2005. Vol. 15. 015104.
7. *De Luca J., Lichtenberg A.J., and Lieberman M.A.* Time scale to ergodicity in the Fermi–Pasta–Ulam system // Chaos. 1995. Vol. 5. P. 283.
8. *Shepelyansky D.L.* Low-energy chaos in the Fermi–Pasta–Ulam problem // Nonlinearity. 1997. Vol. 10. 1331.
9. *Bocchierri P., Scotti A., Bearzi B., and Loigner A.* Anharmonic chain with Lennard–Jones interaction // Phys. Rev. A. 1970. Vol. 2. 2013; *Galgani L. and Scotti A.* Planck-like distributions in classical nonlinear mechanics // Phys. Rev. Lett. 1972. Vol. 28. 1173; *Patrascioiu A.* Blackbody radiation law: Quantum or classical explanation? // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 50. 1879.
10. *Kantz H.* Vanishing stability thresholds in the thermodynamic limit of nonintegrable conservative systems // Physica D. 1989. Vol. 39. P. 322; *Kantz H., Livi R. and Ruffo S.* Equipartition thresholds in chains of anharmonic oscillators // J. Stat. Phys. 1994. Vol. 76. P. 627.
11. *Casetti L., Cerruti-Sola M., Pettini M. and Cohen E.G.D.* The Fermi–Pasta–Ulam problem revisited: Stochasticity thresholds in nonlinear Hamiltonian systems // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 55. 6566.
12. *Flach S., Ivanchenko M.V. and Kanakov O.I.* q -Breathers and the Fermi–Pasta–Ulam problem // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95. 064102; *Flach S., Ivanchenko M.V. and Kanakov O.I.* q -Breathers in Fermi–Pasta–Ulam chains: Existence, localization, and stability // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 73. 036618.
13. *Fermi E.* Evidence that a mechanic normal system is generally quasi-ergodic // Phys. Z. 1923. Vol. 24. P. 261.
14. *Tuck J.L.* // in Los Alamos Report LA-3990, 1968.
15. *Izrailev F.M., Khasamutdinov A.I., and Chirikov B.V.* Numerical experiments on the statistical behaviour of dynamical systems with a few degrees of freedom // Comput. Phys. Commun. 1973. Vol. 5. P. 11.
16. *Ullmann K., Lichtenberg A.J., and Corso G.* Energy equipartition starting from high-frequency modes in the Fermi–Pasta–Ulam beta oscillator chain // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 61. 2471; *De Luca J., Lichtenberg A.* Transitions and time scales to equipartition in oscillator chains: Low-frequency initial conditions // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 66. 026206.
17. *Berchialla L., Giorgilli A. and Paleari S.* Exponentially long times to equipartition in the thermodynamic limit // Physics Letters A. 2004. Vol. 321. P. 147.
18. *Benettin G., Livi R., Ponno A.* The Fermi–Pasta–Ulam problem: Scaling laws vs. initial conditions // J. Stat. Phys. 2009. Vol. 135. P. 873.
19. *Giorgilli A., Paleari S., Penati T.* Local chaotic behaviour in the Fermi–Pasta–Ulam system // Discr. Cont. Dyn. Sys. B. 2005. Vol. 5. P. 991.
20. *Benettin G.* Time scale for energy equipartition in a two-dimensional FPU model//

- Chaos. 2005. Vol. 15. 015108; *Benettin G. and Gradenigo G.* A study of the Fermi–Pasta–Ulam problem in dimension two // Chaos. 2008. Vol. 18. 013112.
21. *Flach S. and Willis C.R.* Discrete breathers // Phys. Rep. 1998. Vol. 295. P. 181.
 22. *Lyapunov M.A.* The general problem of stability of motion. London: Taylor & Francis, 1992.
 23. *Ivanchenko M.V. et al.* q -Breathers in finite two- and three-dimensional nonlinear acoustic lattices // Phys. Rev. Lett. 2006. Vol. 97. 025505.
 24. *Mishagin K.G. et al.* q -Breathers in discrete nonlinear Schroedinger lattices // New J. Phys. 2008. Vol. 10. 073034; *Nguenang J.P., Pinto R.A., Flach S.* Quantum q -breathers in a finite Bose–Hubbard chain: The case of two interacting bosons // Phys. Rev. B. 2007. Vol. 75. 214303.
 25. *Ivanchenko M.V.* q -Breathers and thermalization in acoustic chains with arbitrary nonlinearity index // Письма в ЖЭТФ. 2010. Vol. 92. P. 405.
 26. *Christodoulidi H., Efthymiopoulos C., and Bountis T.* Energy localization on q -tori, long-term stability, and the interpretation of Fermi–Pasta–Ulam recurrences // Phys. Rev. E. 2010. 81. 016210.
 27. *Penati T., Flach S.* Tail resonances of Fermi–Pasta–Ulam q -breathers and their impact on the pathway to equipartition // Chaos. 2007. Vol. 17. 023102.
 28. *Ivanchenko M.V.* q -Breathers in finite lattices: nonlinearity and weak disorder // Phys. Rev. Lett. 2009. Vol. 102. 175507; *Ivanchenko M.V.* q -Breathers in discrete nonlinear schroedinger arrays with weak disorder // Письма в ЖЭТФ. 2009. Vol. 89, № 3. С. 170.
 29. *Matsuda H., Ishii K.* Localization of normal modes and energy transport in disordered harmonic chain // Suppl. Prog. Theor. Phys. 1970. Vol. 45. P. 56.
 30. *Lepri S., Livi R., and Politi A.* Thermal conduction in classical low-dimensional lattices // Phys. Rep. 2003. Vol. 377. P. 1; *Dhar A.* Heat transport in low-dimensional systems // Adv. Phys. 2008. Vol. 57. P. 457.
 31. *Chang C.W. et al.* Breakdown of Fourier’s law in nanotube thermal conductors // Phys. Rev. Lett. 2008. Vol. 101. 075903.
 32. *Ivanchenko M.V. and Flach S.* Anomalous conductivity: impact of nonlinearity and disorder. 2010. arXiv:1009.3447v1

*Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского*

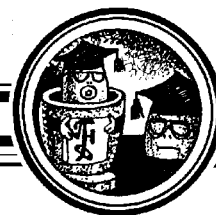
Поступила в редакцию 29.10.2010

q -BREATHERS: FROM THE FERMI–PASTA–ULAM PARADOX TO ANOMALOUS CONDUCTIVITY

M.V. Ivanchenko

The paper reviews the modern problems of nonlinear physics, where q -breathers theory finds its applications.

Keywords: Nonlinear modes, energy localization, q -breathers.



ДИАГНОСТИКА И АНАЛИЗ ОСЦИЛЛЯТОРНОЙ НЕЙРОСЕТЕВОЙ АКТИВНОСТИ ГОЛОВНОГО МОЗГА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕПРЕРЫВНОГО ВЕЙВЛЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ*

*А.А. Короновский, G. van Luijtelaar, А.А. Овчинников,
Е.Ю. Ситникова, А.Е. Храмов*

В работе дан обзор ряда методов анализа и диагностики осцилляторной нейросетевой активности головного мозга по данным экспериментального электроэнцефалографического исследования с использованием непрерывного вейвлетного преобразования. Рассматривается метод автоматического выделения характерных паттернов судорожной активности (пик-волновых разрядов) на эпилептической электроэнцефалограмме путем анализа мощности вейвлетного спектра, полученного в результате непрерывного вейвлетного преобразования с комплексным материнским морле-вейвлетом в определенных частотных диапазонах. Предложен эффективный метод выделения и классификации сонных веретен с помощью построения специального семейства адаптивных вейвлетных базисов. Предложенные методы адаптированы для изучения сигналов электроэнцефалограммы в реальном времени и могут применяться для построения системы мониторинга активности головного мозга больного эпилепсией. Проведен анализ особенностей частотно-временной структуры электроэнцефалограммы непосредственно перед пик-волновыми разрядами и выявлены характерные предшественники эпилептических разрядов, которые отражают активность мозга в состоянии судорожной готовности. Диагностика этого состояния даст возможность предсказать начало приступа эпилепсии и может найти применение в медицинской практике.

Ключевые слова: Обработка сигналов, вейвлетный анализ, эпилепсия, распознавание структур, интерфейс мозг–компьютер.

Введение

Современные математические методы анализа и диагностики сложных колебательных процессов, включая режимы динамического хаоса, активно развиваемые в современной теории колебаний и волн и радиофизике, находят все большее применение в самых различных областях естествознания. В настоящее время значительный интерес вызывает применение методов нелинейной динамики и теории хаоса к задачам, возникающим при изучении и анализе сложного поведения живых

*Статья написана по материалам конференции «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, 4–9 октября, 2010.

систем, в том числе, при анализе временных и пространственно-временных сигналов физиологической природы. Существуют много удачных примеров применения методов, развитых в теории динамического хаоса, к исследованию колебательных процессов в физиологических и медицинских системах [1–4]. В качестве ярких примеров подобных исследований систем живой природы методами нелинейной динамики и радиофизики отметим изучение воздействия внешнего стимула на электроэнцефалограммы мозга [5,6], взаимодействие ритмов респираторной и сердечно-сосудистой систем [7–10], синхронизацию динамики нейронных ансамблей различных областей головного мозга человека, больного эпилепсией [11,12], анализу особенностей пространственной синхронизации [13], исследованию перемежающегося поведения в нейронных ансамблях [14–16] и др. Особую важность такие методы исследований приобретают при анализе динамики нейронных сетей головного мозга, которые представляют собой крайне сложные объекты, состоящие из большого числа элементов со сложной колебательной динамикой – нейронов. Традиционным и весьма эффективным методом исследования электрической активности головного мозга является регистрация электроэнцефалограмм (ЭЭГ), которые представляют собой усредненную сумму электрических токов, генерируемых большой группой нейронов в окрестности регистрирующего электрода. У человека такой электрод помещается на поверхности головы, у животных существует возможность проведения более точных измерений путем вживления электродов непосредственно в определенную область головного мозга или на поверхность коры больших полушарий. С помощью данного метода удастся проводить мониторинг электрической активности головного мозга и осуществлять непрерывную регистрацию ЭЭГ в течение долгого времени.

При проведении подобных исследований ключевое значение имеют: обработка экспериментальных данных с использованием современных методов и подходов; моделирование и исследование общей динамики появления определенных ритмов и осцилляторных паттернов на ЭЭГ. При анализе сложных сигналов, которым является ЭЭГ, невозможно обойтись без привлечения мощного аналитического и численного аппарата, созданного и применяемого в области радиофизики и нелинейной динамики (в частности, методов, основанных на спектральном и вейвлетном анализе), который дает широкие возможности для разработки новых эффективных методов анализа экспериментальных данных, выявления новых закономерностей и позволяет автоматизировать процесс обработки экспериментальных данных.

Среди различных методов анализа электрической активности головного мозга следует особо выделить именно вейвлетный анализ, который обладает уникальными свойствами, позволяющими наиболее эффективно исследовать структуру и частотно-временные свойства ЭЭГ. Дело в том, что математический аппарат непрерывного вейвлетного анализа хорошо приспособлен для исследования нестационарных сигналов, чей спектральный состав и статистические характеристики меняются с течением времени, и обладает следующими важными особенностями [17–21]:

- представление частотно-временной структуры сигнала, что позволяет локализовать особенности сигналов во временных и частотных областях;
- возможность эффективного анализа коротких временных рядов, содержащих небольшое число характерных периодов колебаний;
- гибкость выбора базиса, по которому раскладывается сигнал, что позволяет эффективно учесть особенности анализируемых данных;

- высокая эффективность анализа «зашумленных» данных (то есть сигналов, которые представляют собой сумму полезного сигнала и аддитивного шума).

Все вышеперечисленные особенности важны при изучении экспериментальных сигналов, в частности, ЭЭГ. Они характеризуются: нестационарностью; наличием осцилляторных паттернов с принципиально различной формой колебаний (это требует адаптивного подхода к изучению различных эффектов на ЭЭГ); высоким уровнем шумов (часто приходится проводить анализ коротких временных данных, что связано как с особенностями регистрации данных, так и спецификой процессов в головном мозге [22,23]).

Ранее аппарат вейвлетного анализа (как дискретного, так и непрерывного) и методы анализа синхронной динамики головного мозга с его помощью были успешно использованы в исследованиях нормальной и патологических ЭЭГ животных и человека (см., например, [16,23–27]), а также для диагностики и классификации откликов отдельных нейронов [28–29]. Здесь основное внимание исследователей было направлено на анализ процессов формирования особых форм ритмической активности, характеризующих различные функциональные состояния (эпизоды эпилептической активности, сон, бодрствование). Известно, что появление ритмических компонентов на ЭЭГ является отражением синхронной работы огромного числа нервных клеток, объединенных в ансамбли [30–32]), поэтому исследование ритмической активности в динамике ЭЭГ головного мозга тесно связано с такой важной задачей радиофизики, как изучение синхронного поведения в сетях со сложной топологией связей [33–36].

Все вышеизложенное свидетельствует в пользу того, что использование современного аппарата, развитого в теории нелинейных колебаний по изучению хаотических процессов, позволяет существенно продвинуться в понимании специфики динамики и синхронизации нейронных ансамблей головного мозга. На этом пути получены важные результаты, в частности: выявлены специфические для каждого человека частотно-временные паттерны в активности головного мозга, диагностируемые по сигналам ЭЭГ [26]; обнаружена перемежаемость в синхронной/асинхронной активности головного мозга [37]; выявлены режимы фазовой синхронизации между различными отведениями ЭЭГ у человека [38]. С прикладной точки зрения это очень важно для создания систем мониторинга патологической активности головного мозга [39,40].

В данном обзоре описаны примеры успешного использования непрерывного вейвлетного преобразования для анализа особенностей осцилляторной активности, генерируемой широкими нейронными ансамблями коры головного мозга при формировании приступа эпилепсии. Все рассмотренные в статье данные были получены в ходе экспериментальной работы на крысах с генетической предрасположенностью к абсанс-эпилепсии (крысы линии WAG/Rij).

1. Непрерывный вейвлетный анализ

В настоящее время существует целый ряд удачных обзоров и монографий [17–21, 29, 41–44], посвященных введению в вейвлетный анализ, в том числе и применительно к изучению живых систем, поэтому не будем подробно останавливаться на введении в непрерывный вейвлетный анализ, напомнив читателю только наиболее важные сведения из теории непрерывного вейвлетного преобразования.

Непрерывное вейвлетное преобразование представляет собой свертку исследуемого сигнала $x(t)$ и некоторой базисной функции $\varphi_{s,\tau}(t)$

$$W(s, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\varphi_{s,\tau}^*(t)dt \quad (1)$$

(* означает комплексное сопряжение), которая может быть получена из материнского вейвлета с помощью следующего преобразования:

$$\varphi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\varphi_0\left(\frac{t-\tau}{s}\right), \quad (2)$$

где s – временной масштаб, определяющий растяжение или сжатие материнской функции; τ – временной сдвиг вейвлетного преобразования; φ_0 – прототип вейвлетной функции, называемый также материнским вейвлетом.

На материнский вейвлет накладываются два важных условия: во-первых, условие ограниченности вейвлетной функции, благодаря которому существует возможность проводить эффективный частотно-временной анализ сигналов; во-вторых, условие нулевого среднего вейвлетной функции, что гарантирует возможность обратного вейвлетного преобразования (см. подробнее [17]).

Как было показано в ряде работ [9,44,45], материнским вейвлетом, наиболее подходящим для задачи частотно-временного анализа и распознавания характерных паттернов на сигналах физиологической природы, является комплексный вейвлет Морле

$$\phi(\eta) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}e^{j\omega_0\eta}e^{-\frac{\eta^2}{2}}, \quad \eta \sim t, \quad (3)$$

где параметр ω_0 определяет форму и ширину вейвлетной функции в фурье-пространстве, а следовательно, качество разрешения различных частотных компонент сигнала. Можно говорить о том, что параметр ω_0 определяет отношение между временными масштабами преобразования s и частотами f исходного сигнала: при выборе $\omega_0 = 2\pi$ между масштабами вейвлетного преобразования и частотами фурье-спектра имеет место простое соотношение $s = 1/f$.

Величина $w(s, \tau) = |W_{s,\tau}|^2$ представляет собой мгновенное значение энергии преобразования, то есть величину энергии, приходящейся в момент времени τ на масштаб s .

2. Автоматическое выделение пик-волновых разрядов на предварительно записанных ЭЭГ

Рассмотрим фрагмент эпилептической электроэнцефалограммы, который является характерным примером электрической активности мозга крысы линии WAG/Rij показанный на рис. 1, а. Во-первых, нетрудно видеть, что в сигнале ЭЭГ можно выделить различные области, отличающиеся от фоновой динамики (десинхронизованного поведения нейронных ансамблей коры головного мозга, области F) амплитудой и формой колебаний. В дальнейшем будем называть такие фрагменты ЭЭГ *осцилляторными паттернами*. Осцилляторные паттерны могут быть

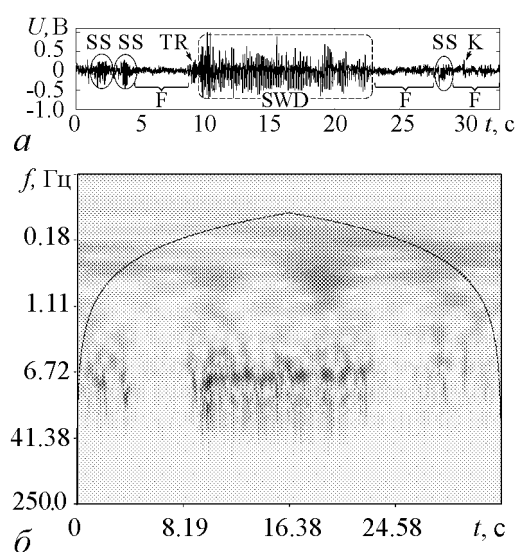


Рис. 1. Отрезок эпилептической ЭЭГ (а) и соответствующий ей вейвлетный спектр (б). Выделенные области представляют собой: SWD – пик-волновой разряд, SS – сонное веретено, TR – эпизод тета-активности, К – К-комплекс, F – нормальная фоновая активность мозга

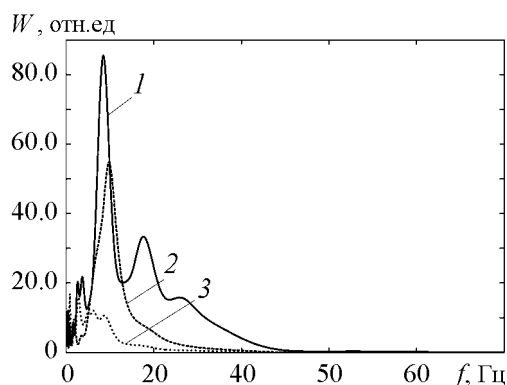


Рис. 2. Мгновенные вейвлетные спектры колебаний 1 – пик-волнового разряда; 2 – сонного веретена; 3 – фоновой активности

Во-первых, основная частота следования пиков в течение ПВР плавно снижалась от максимального значения в начале разряда 11.1 ± 1.5 Гц (здесь и далее среднее \pm станд.откл.) до 7.4 ± 0.8 Гц – в конце. Таким образом, в течение ПВР происходило снижение средней частоты следования пик-волн в осцилляторном паттерне в среднем на 2.8 ± 0.8 Гц.

Во-вторых, появление эпилептических (пик-волновых) разрядов на ЭЭГ сопровождалось резким увеличением мощности в широком диапазоне частот 10–100 Гц. При этом каждый отдельный пик, входивший в состав пик-волнового комплекса, отображался на вейвлетном спектре в виде локального всплеска мощности (рис. 2). Эти высокочастотные спектральные компоненты, порожденные регу-

классифицированы по форме и по частотному составу. Первый метод традиционно используется нейрофизиологами [46,47], в то время как второй представляет собой более точный инструмент для анализа временного ряда и может быть использован для решения задачи автоматического распознавания структур во временной области. В сигнале, приведенном на рис. 1, с помощью первого метода могут быть выделены такие осцилляторные паттерны, как сонные веретена, всплески тета-активности, К-комплексы, пик-волновые разряды (ПВР). Следует отметить, что представленный сигнал при первичной обработке был подвергнут процедуре полосовой фильтрации в полосе частот 0.5–100 Гц, что является типичным при записи эпилептических ЭЭГ и позволяет эффективно избавиться от ряда шумов и артефактов.

Результаты непрерывного вейвлетного анализа, проведенного с помощью комплексного вейвлета Морле, для представленного отрезка ЭЭГ (рис. 1, а) приведены на рис. 1, б. Из анализа рисунка хорошо видно, что различным паттернам ЭЭГ соответствует различное распределение энергии вейвлетного спектра $W(s, \tau)$. Если остановиться непосредственно на вейвлетном анализе ПВР (эпилептического события на ЭЭГ), то можно отметить две важные особенности данных осцилляторных паттернов.

лярной последовательностью пиков на ЭЭГ, послужили важным диагностическим признаком, который лег в основу разработанного алгоритма автоматического распознавания ПВР. Данный метод автоматической диагностики эпилептических разрядов на ЭЭГ был основан на расчете суммарной энергии вейвлетного спектра в диапазоне частот 30–50 Гц.

Действительно, поскольку ПВР характеризуется увеличением энергии, происходящей на некоторый диапазон масштабов, удобно рассматривать интегральную величину мгновенной энергии на диапазоне масштабов $F_s = (30, 50)$ Гц.

$$w_{F_s}(\tau) = \int_{F_s} |W_{s,\tau}| ds. \quad (4)$$

Тогда если в некоторый момент времени t имеет место ПВР, то справедливо следующее соотношение:

$$w_{F_s}(t) \geq E_k, \quad (5)$$

где E_k – пороговое значение энергии, определяемое экспериментально. Это свойство используется в предложенном методе для автоматической диагностики эпилептического события.

Момент, когда это значение превышало пороговый уровень и не снижалось в течение 1 с, фиксировали как начало эпилептической активности. Момент, когда уровень энергии оказывался ниже порогового, фиксировали как конец разряда. Метод позволил распознавать ПВР на ЭЭГ с точностью 98–100%. Результаты автоматического выделения ПВР представлены в табл. 1, где введены обозначения: TP – число верно распознанных событий; FN – число пропущенных ПВР; FP – число ложно рас-

Таблица 1

Результаты автоматического выделения пик-волновых разрядов с использованием комплексного морле-вейвлета ($\omega_0 = 2\pi$)

Крыса №	Число ПВР (визуальная оценка эксперта), N_e	Автоматическое выделение			Характеристики качества автоматической разметки ЭЭГ		
		TP	FP	FN	Точность ρ^S , %	Уровень значимости β , %	Мощность критерия δ , %
1	105	105	0	0	100.0	100.0	100.0
2	81	79	2	1	97.5	98.8	97.5
3	249	247	1	2	99.2	99.2	99.6
4	120	117	1	3	97.5	97.5	99.2
5	66	65	2	1	98.5	98.5	97.0
Среднее	124 ± 73	123 ± 73	1.2 ± 0.8	1.4 ± 1.4	98.5 ± 1.1	98.8 ± 0.9	98.7 ± 1.3

познанных событий, то есть число событий, которые автоматической системой разметки ЭЭГ, созданной на основе вышеописанного метода, определялись как ПВР, но экспертом определялись как некоторый иной тип активности. Следует отметить, что для выделения ПВР использовались одинаковые анализируемые частотные диапазоны $F_{\text{SWD}} \in (30, 50)$ Гц (4) и пороговые энергии $E_k = 0.5$ (5) вейвлетного спектра. Для анализа качества работы алгоритма использовались такие важные статистические характеристики принятия «бинарного» решения (присутствует/отсутствует эпилептическое событие) на основе некоторого критерия, который с некоторой вероятностью может давать ложный результат, как уровень значимости β и мощность критерия δ [38,39]. Первая характеристика позволяет оценить чувствительность метода, то есть какой процент распознанные ПВР составляют от их общего числа, присутствующих на ЭЭГ. Вторая характеристика позволяет оценить процент событий, верно определенных как ПВР, из общего числа событий, диагностированных как ПВР. Определение этих статистических параметров применительно к анализу паттернов на ЭЭГ можно найти в работах [44,48].

3. Исследование структуры и автоматическое выделение сонных веретен на эпилептической ЭЭГ с использованием комплексных адаптивных вейвлетных базисов

В настоящее время в эпилептологии ведутся активные исследования, направленные на выявление связи между пик-волновыми (эпилептическими) и нормальной

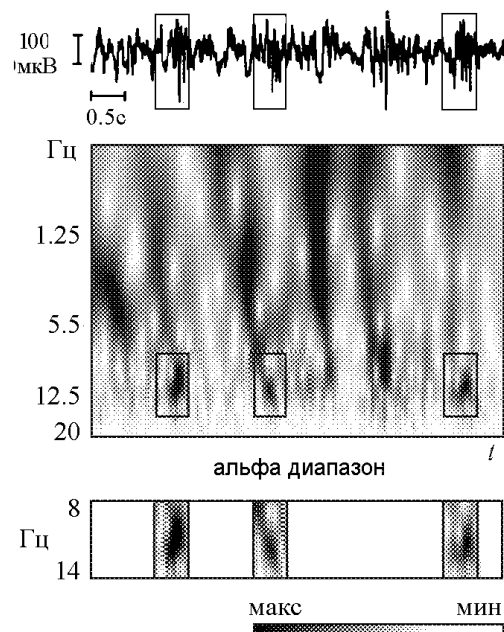


Рис. 3. Непрерывное вейвлетное преобразование с комплексным морле-вейвлетом сонных веретен (выделены прямоугольниками на ЭЭГ). Внизу показаны фрагменты спектра в альфа-диапазоне (8–14 Гц)

синхронной активностью головного мозга – сонными веретенами [49,50]. С помощью непрерывного вейвлетного преобразования с комплексным вейвлетом Морле была исследована структура сонных веретен на ЭЭГ во время медленного сна у крыс линии WAG/Rij. В результате было показано, что, в отличие от ПВР, веретена характеризовались значительной вариабельностью формы и частотного состава [44]. Это иллюстрирует рис. 3, на котором представлен характерный вейвлетный спектр «сонной» ЭЭГ с выделенными веретенами и соответствующие спектры сонных веретен в альфа-диапазоне. Такая вариабельность формы сонных веретен и, соответственно, «вейвлетного портрета» значительно осложнила процедуру их идентификации и автоматического распознавания. Метод, аналогичный

предыдущему, продемонстрировал точность распознавания на ЭЭГ сонных веретен не выше 60% при также малых величинах уровня значимости и мощности критерия.

Поэтому был разработан новый подход к исследованию структуры ЭЭГ, базирующийся на адаптивном вейвлетном анализе. В этом случае базисная вейвлетная функция строится на основе произвольно выбранного отрезка ЭЭГ. Этот подход предусматривает использование в качестве материнской функции «адаптивного вейвлетного базиса», который имеет максимальное сродство к искомому паттерну на ЭЭГ и служит идеальным инструментом для распознавания и локализации на ЭЭГ осцилляций нестандартной сложной формы. Такой подход к анализу структуры сложных форм ЭЭГ, по сути, является разновидностью известного метода «соответствия образцу» (template matching [51]) и может быть использован как для эффективного выделения сонных веретен на ЭЭГ, так и для стандартизации структуры ЭЭГ и создания эталонной базы энцефалографических паттернов.

Для стандартизации структуры сонных веретен были сконструированы специальные вейвлетные базисы – спиндл-вейвлеты (spindle wavelets [44]), основой для которых послужили отрезки ЭЭГ, содержащие сонное веретено, то есть шаблоном для построения материнского спиндл-вейвлета послужили веретена, заимствованные из реальной ЭЭГ.

Формализуем такой подход. Пусть $U(t)$ – отрезок регистрируемого сигнала ЭЭГ, содержащий сонное веретено. Перейдем к сигналу с исключенным средним

$$g(t) = U(t) - \frac{1}{\Delta T} \int_{\Delta T} U(t) dt \quad (6)$$

и далее сформируем комплексную функцию по аналогии с вейвлетом Морле (3)

$$\hat{g}(t) = g(\eta) + jg(t + T/4), \quad j = \sqrt{-1}, \quad (7)$$

где T – характерный временной масштаб колебаний в течение веретена. Далее для получения локального во времени вейвлетного базиса функция (7) модулируется функцией Гаусса (ср. с соотношением (3))

$$\psi^S(t) = F\hat{g}(t)e^{-t^2/2}, \quad (8)$$

где коэффициент F находится из условия нормировки

$$F^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}^2(t)e^{-t^2} dt = 1. \quad (9)$$

Всего было протестировано около 80 шаблонных веретен. В результате этих тестов был найден универсальный спиндл-вейвлет, показанный на рис. 4, *a*, имевший высокое сродство с максимальным числом сонных веретен на ЭЭГ у всех экспериментальных животных. Большая часть сонных веретен (от 82.2 до 91.1% у разных

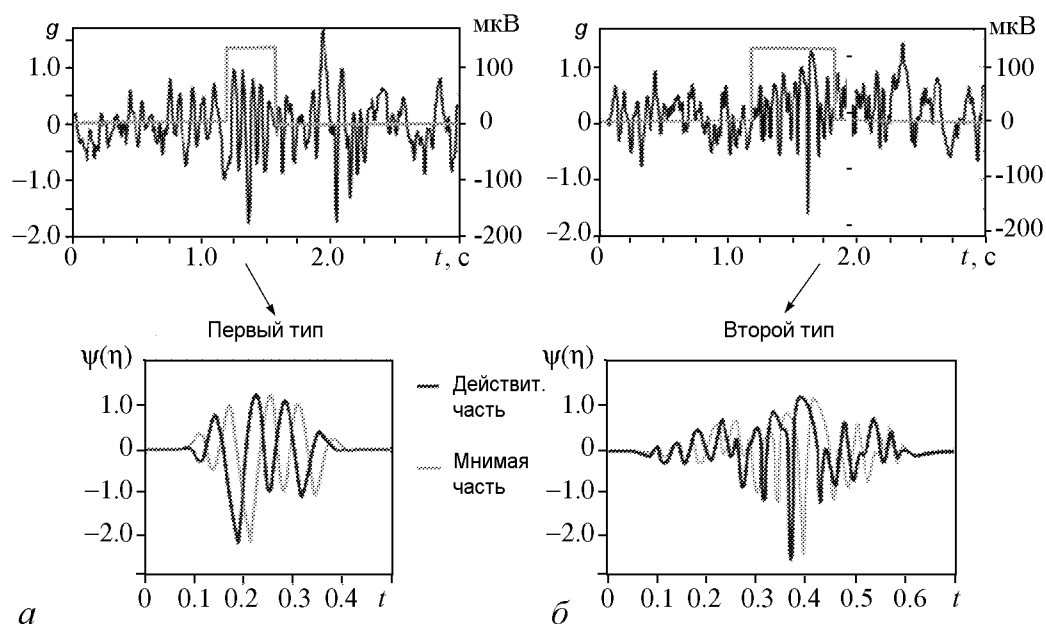


Рис. 4. Схема, поясняющая построение спиндл-вейвлетов. Сонные веретена, выбранные как прототипы на ЭЭГ, используются как шаблоны для адаптивных вейвлетных базисов: *a* – сонное веретено 1-го типа и спиндл-вейвлет первого типа, *б* – сонное веретено 2-го типа и спиндл-вейвлет второго типа

животных) имела высокую степень сродства с данным вейвлетным базисом (мы назвали их «веретенами 1-го типа»). Эти веретена имели правильную форму, близкую к синусоидальной, и частоту 8–12 Гц. Остальные веретена (порядка 10–15% от общего числа веретен) отличались сложной формой и некоторыми индивидуальными особенностями («веретена 2-го типа»), поэтому для их идентификации потребовалось построить новые материнские вейвлеты, «шаблоны ЭЭГ» для которых подбирались отдельно для каждого животного. Вейвлетные базисы веретен 2-го типа имели искаженную форму с ярко выраженными нерегулярными спайками, их частота колебалась от 17 до 23 Гц. Веретена 2-го типа чаще появлялись во время промежуточной фазы сна.

Напомним, что при использовании стандартного вейвлета Морле в качестве базисной функции процент распознавания сонных веретен оставался весьма низким (менее 60%). Совместное использование вейвлетных базисов веретен 1-го и 2-го типов позволило автоматически распознать на ЭЭГ 96–100% сонных веретен. Следует отметить, что в последнем случае вейвлетная функция была сконструирована на базе реального сонного веретена и имела максимальное сродство с искомым паттерном на ЭЭГ.

Результаты автоматического выделения сонных веретен представлены в табл. 2 отдельно для сонных веретен 1-го и 2-го типов. Все обозначения аналогичны обозначениям, введенным при описании табл. 1. Хорошо видно, что подход, основанный на построении адаптивных базисов, позволил существенно улучшить качество распознавания паттернов на нестационарном сигнале ЭЭГ.

Таблица 2

Результаты автоматического выделения сонных веретен
с использованием спиндл-вейвлетов

Спиндл-вейвлет первого типа

Крыса №	Число СВ*, N_e	Автоматическое выделение			Характеристики качества автоматической разметки сонной ЭЭГ		
		TP	FP	FN	Точность ρ^S , %	Уровень значимости β , %	Мощность критерия δ , %
1	2341	2130	23	281	91.1	88.4	98.9
2	1381	1132	28	110	82.2	91.2	97.6
3	1491	1312	30	149	87.8	89.8	97.8
4	1305	1096	39	104	83.9	91.3	96.6
5	1598	1422	16	144	88.9	90.8	98.9
Среднее	1623 ± 416	1418 ± 419	27 ± 9	157 ± 72	86.8 ± 3.7	90.3 ± 1.2	97.9 ± 1.0

Спиндл-вейвлет второго типа

Крыса №	Число веретен**	Автоматическое выделение				Характеристики качества автоматической разметки сонной ЭЭГ		
		TP	TN	FP	FN	Точность ρ^S , %	Уровень значимости β , %	Мощность критерия δ , %
1	211	140	2154	70	22	66.3	96.9	86.4
2	249	110	1215	69	21	44.2	94.6	84.0
3	179	164	1327	30	15	91.6	97.8	91.6
4	209	117	1175	26	18	56.0	97.8	86.7
5	176	112	1454	48	14	63.6	96.8	88.9
Среднее	27 ± 9	205 ± 30	1465 ± 400	48.6 ± 20.8	18 ± 6	64.3 ± 17.5	96.8 ± 1.3	87.5 ± 2.9

* Визуальная оценка эксперта.

** Число веретен, пропущенных при автоматическом выделении с помощью спиндл-вейвлета первого типа.

4. Классификация сонных веретен на эпилептической ЭЭГ с использованием специально сконструированных адаптивных вейвлетных базисов

В предыдущем разделе обзора было показано, что существует возможность выделения различных типов адаптивных вейвлетов, отражающих и наиболее оптимально описывающих структуру различных типов сонных веретен на ЭЭГ. Этот результат можно трактовать таким образом, что на ЭЭГ у крыс линии WAG/Rij удалось выделить два типа сонных веретен, отличающихся по форме, по частоте и по времени появления. Сонные веретена 1-го типа, соответствующие спиндл-вейвлету первого типа, общему для всех исследуемых крыс, имели типичную форму и преобладали во время медленного сна. Сонные веретена атипичной формы (2-й тип, соответствующий индивидуальному для каждой крысы адаптивному вейвлетному базису второго типа) могли возникнуть в результате эпилептической трансформации типичных сонных веретен.

Сонные веретена 1-го типа (типичные веретена) и ПВР содержали мощный ритмический компонент в диапазоне альфа частот (соответствующий частотам в диапазоне 9–12 Гц на фурье-спектре мощности [44]). Спектр мощности ПВР характеризовался узким локальным максимумом на частоте 9.8 Гц. Амплитуда этого максимума значительно превосходила остальную часть спектра. Это говорит о том, что разряды имели регулярную периодическую структуру, вместе период осцилляций увеличивался от начала к концу ПВР (см. раздел 1 статьи). Частота сонно-веретенной активности значительно варьировала в альфа диапазоне, о чем свидетельствовал широкий пьедестал на спектре мощности в соответствующей области частот.

Данные веретена являются типичными нормальными веретенами, которые наблюдаются и у здоровых субъектов, и составляют более 85% всех наблюдаемых сонных веретен на эпилептической ЭЭГ. Максимум осцилляторной энергии этих веретен приходится на альфа-диапазон. Типичная форма веретен 1-го типа показана на рис. 5 (слева). Из приведенного фурье-спектра спиндл-вейвлета первого типа следует, что основная энергия сосредоточена в диапазоне частот от 8 до 14 Гц.

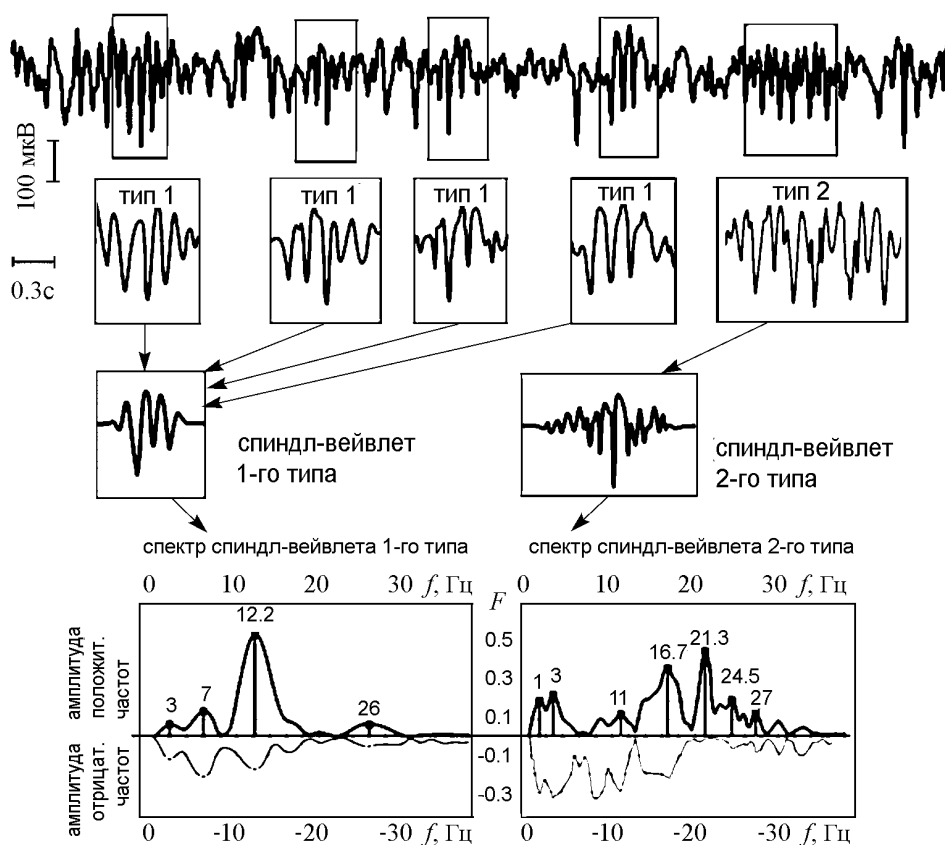


Рис. 5. Изменчивость формы сонных веретен на ЭЭГ крыс линии WAG/Rij. Большинство сонных веретен выделяется с помощью спиндл-вейвлета первого типа, который универсален для различных животных. Данный тип осцилляторной активности рассматривается как типичные нормальные сонные веретена. Однако порядка 10–15% сонных веретен не распознаются данным адаптивным вейвлетом и для их распознавания необходимо конструировать индивидуальные для каждой крысы вейвлетные базисы. Данный вейвлет (спиндл-вейвлет второго типа) характеризуется весьма сложной формой, которая индивидуальна для каждого животного. Данный тип осцилляторной активности ассоциируется с проэпилептической активностью на ЭЭГ. Внизу показаны фурье-спектры каждого из комплексных вейвлетных базисов (сверху приводятся амплитуды положительных, а снизу – отрицательных частот)

Тип 2-й сонных веретен, форма и характеристики которого уникальны для каждого экспериментального животного, выделяется с помощью непрерывного вейвлетного преобразования с комплексным спиндл-вейвлетом второго типа (см. рис. 5, справа). Данный тип рассматривается как переходная форма между сонными веретенами и патологическими ПВР. Число таких событий на эпилептической ЭЭГ не превышает в среднем 10–15% от общего числа наблюдаемых сонных веретен. Характерной особенностью подобных «проэпилептических» ЭЭГ является появление интенсивных пиков в спектре мощности как в диапазоне 4–8 Гц, так и 16–25 Гц, что не наблюдается для типичных нормальных веретен.

5. Анализ динамики ритмических предшественников эпилептических событий на ЭЭГ

Одной из важных задач изучения эпилептической ЭЭГ является понимание механизма возникновения судорожной активности головного мозга и выявление признаков, позволяющих предсказать появление эпилептических ПВР.

Для решения этой задачи был проведен частотно-временной анализ с помощью непрерывного вейвлетного преобразования с комплексным морле-вейвлетом 3-секундных интервалов ЭЭГ непосредственно до начала ПВР, наблюдаемых у крыс линии WAG/Rij [52]. Исследовались электроэнцефалографические записи, полученные от лобной коры, поскольку ПВР в этой области имели максимальную амплитуду. Эпизоды ЭЭГ, предшествующие ПВР (так называемые «предшественники разрядов»), имели сложную частотно-временную структуру, которую можно охарактеризовать как совокупность нескольких частотных компонент в диапазоне от 2 до 12 Гц. На рис. 6 показан типичный вейвлетный спектр с вейвлетом Морле ($\omega_0 = 2\pi$) и особенности сигнала ЭЭГ, зарегистрированные в лобной коре (сверху) и в таламусе (снизу), непосредственно до начала и во время ПВР. Из анализа вейвлетного спектра можно сделать вывод, что непосредственно перед ПВР на ЭЭГ (в течение 3-секундного интервала перед эпилептическим событием) наблюдается практически одновременное возникновение эпизодов дельта- и тета-ритмической активности. Это следует из того факта, что максимальная мощность была локализована в диапазоне 3–5 Гц (дельта-) и 7–11 Гц (тета-частот). Низкочастотные, то есть дельта-предшественники, были обнаружены у, примерно, 90% ПВР, тета-предшественники – у 92%. Статистические данные, полученные при обработке 8 часовых непрерывных записей ЭЭГ в интервале 2.5–3 с перед пик-волновым разрядом, зарегистрированные в области лобной коры и таламуса у 6 крыс линии WAG/Rij, показаны в табл. 3. Из таблицы видно, что непосредственно перед ПВР на ЭЭГ (в тече-

Таблица 3

Статистика одновременного появления дельта- и тета-активности на ЭЭГ в коре головного мозга и в таламусе в сравнении с контрольными периодами во время сна и бодрствования

	Фронтальная кора, %	Таламус, %
Активность перед пик-волновым разрядом	79.0	81
Активное бодрствование	8.6	6.3
Пассивное бодрствование	12.9	11.7
Поверхностный сон	9.3	4.8
Глубокий сон	2.2	0.8

ние 2.5–3-х секундного интервала перед эпилептическим событием) эпизоды дельта- и тета-активности возникают практически одновременно (в 80–85% случаев).

В то же самое время, на контрольных интервалах ЭЭГ (между ПВР) дельта- и тета-компоненты довольно редко появлялись на ЭЭГ одновременно. В состоянии активного бодрствования эпизоды времени, когда дельта- и тета-компоненты присутствовали одновременно, составляли около 8.6% об общего времени. Во время глубокого сна – около 2.2%, во время поверхностного сна – 9.3%, и во время пассивного бодрствования – 12.9%. Таким образом, максимальный процент совместно-

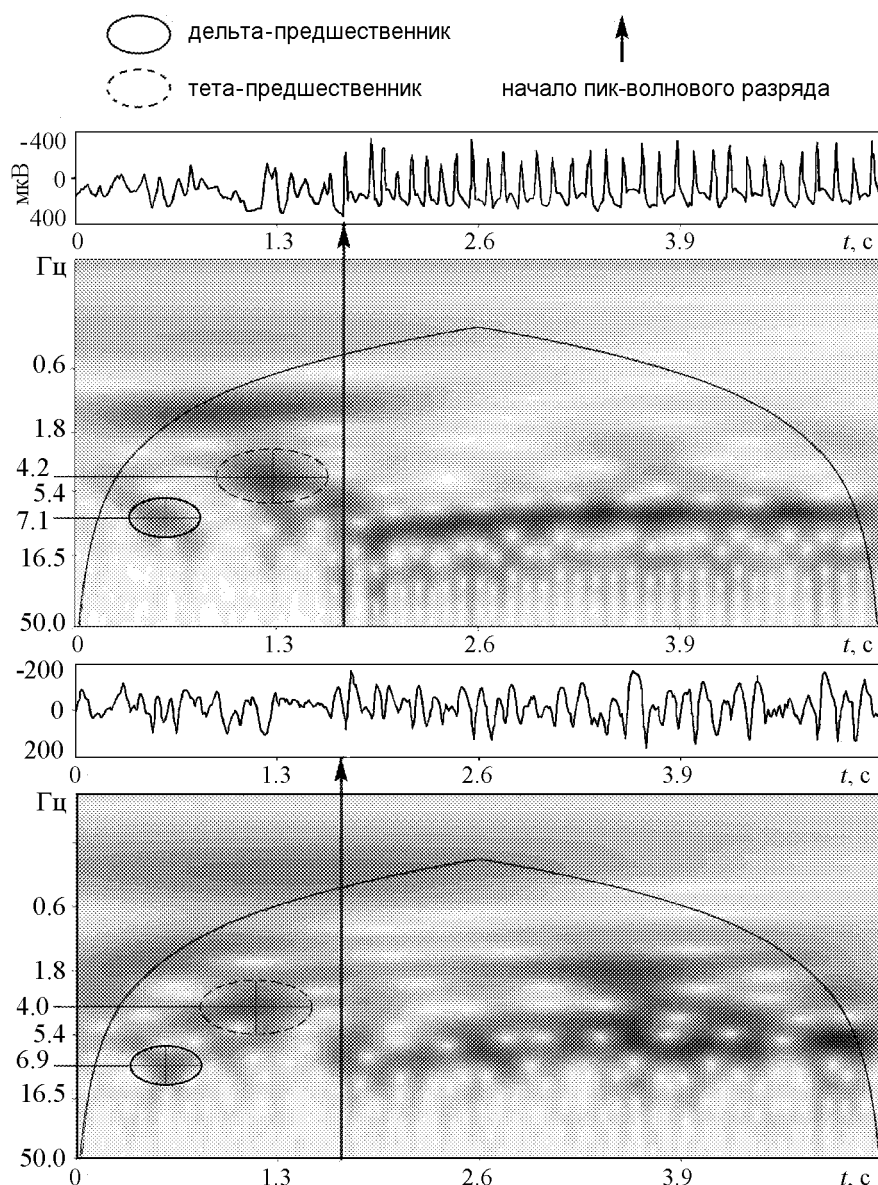


Рис. 6. Вейвлетные спектры ЭЭГ из фронтальной коры (сверху) и таламуса (снизу), иллюстрирующие появление осцилляторных паттернов – предшественников пик-волнового разряда (начало эпилептического события отмечена стрелкой). На представленном спектре перед пик-волновым разрядом наблюдается дельта- и тета-предшественники с частотами 7.1 и 4.2 Гц во фронтальной коре и 4.0 и 6.9 Гц в таламусе

го появления дельта- и тета-компонентов на ЭЭГ наблюдался во время пассивного бодрствования и поверхностного сна. Как известно, именно эти состояния служат наиболее благоприятным фоном для возникновения ПВР у крыс WAG/Rij [53]: 33% от общего числа эпилептических разрядов появляется в состоянии пассивного бодрствования и 48% – во время неглубокого сна. Таким образом, одновременное появление дельта- и тета-компонентов на ЭЭГ можно охарактеризовать как состояние повышенной «судорожной готовности» [52].

6. Диагностика появления пик-волновых разрядов на эпилептической ЭЭГ в реальном времени

В разделе 1 настоящей статьи был описан метод обработки и автоматической разметки предварительно записанной эпилептической ЭЭГ. Вместе с тем, особую важность в настоящее время приобретает разработка метода диагностики осцилляторных паттернов в режиме реального времени. Решение данной задача представляет интерес для медицины, поскольку оно ориентировано на создание системы мониторинга активности головного мозга [48,54], а также может иметь прикладное значение для разработки методов, которые в перспективе можно будет положить в основу «интерфейсов мозг–компьютер» [55–57]. Разработка последних в настоящее время представляется весьма важной и нетривиальной задачей. Диагностика осцилляторных паттернов в режиме реального времени связана с определенными сложностями, поскольку типологически разнородные паттерны (то есть, структуры, принадлежащие к разным классам) могут в некоторых случаях иметь близкий спектральный состав. Поэтому метод, применяемый для распознавания структур, с одной стороны, должен хорошо различать близкие по частотному составу и по энергии паттерны; с другой стороны, должен обеспечить достаточно эффективную численную реализацию для возможности построения реально действующей системы. Еще одной сложностью выделения колебательных паттернов в режиме реального времени является отсутствие в текущей момент времени полной временной реализации, необходимой для осуществления преобразования (1), и исследователю приходится использовать имеющиеся данные от начала наблюдения до настоящего момента времени. Таким образом, задача построения универсального метода диагностики осцилляторных паттернов в режиме реального времени, хотя и представляет большой интерес, является чрезвычайно сложной, поэтому здесь ограничимся кратким описанием разработанного и апробированного метода диагностики ПВР в реальном времени.

Первая проблема, затронутая выше, может быть решена использованием вейвлетного преобразования с комплексным вейвлетом Морле, который обладает достаточной селективностью по отношению к схожим паттернам. Вторая проблема связана с ограниченным временным рядом, когда в распоряжении исследователя находятся дискретные значения амплитуды сигнала, полученные с начала эксперимента по текущий момент. Эта проблема может быть разрешена, если принять во внимание тот факт, что вейвлетная функция (2) всегда ограничена во времени, то есть большая часть мощности сосредоточена в некотором интервале $[\tau_s, \tau_e]$ и, таким образом, практически без потери точности выражение (1) может быть заменено на

$$W_{s,\tau} = \int_{\tau-\tau_s}^{\tau+\tau_e} x(t)\psi^*(s, t)dt, \quad (10)$$

то есть для вычисления энергии преобразования, приходящейся на определенный масштаб в определенный момент времени, необходимо иметь фрагмент временной реализации длительностью $[\tau_s, \tau_e]$. Важно отметить, что определить имел ли место ПВР в момент времени t можно только в момент времени $t + \tau_e$, таким образом, величина τ_e представляет собой принципиально неустранимую задержку автоматической диагностики. Величина τ_e определяется типом материнского вейвлета и временным масштабом, для которого выполняется преобразование. Для материнского морле-вейвлета несложно показать, что $\tau_e = 4s$ (s – рассматриваемый временной масштаб).

Рассмотрим некоторые особенности реализации алгоритма диагностики паттернов в реальном времени [48,54]. Работа метода основана на вычислении вейвлетного спектра (10) и далее энергии вейвлетного преобразования (4), приходящейся на определенный диапазон масштабов F_s в каждый момент времени. В численной процедуре, при расчете мгновенной энергии вейвлетного преобразования (4) для выполнения численного интегрирования использовался метод прямоугольников. Рассматривались 15 временных масштабов, пропорциональных 15 частотам, равномерно распределенным по указанному диапазону. Анализ показал, что в рассматриваемом случае 15 масштабов является разумным компромиссом между точностью расчета вейвлетного спектра и скоростью вычислений.

Необходимо отметить, что ЭЭГ является сложным сигналом, в котором могут появляться отдельные всплески высокочастотной активности во время нормальной (то есть неэпилептической) динамики ЭЭГ, связанные с особенностями функционирования нейронного ансамбля коры головного мозга (в частности, К-комплексы [36]). Подобные события могут вызывать резкое увеличение мгновенной энергии преобразования и вызывать ложное детектирование эпилептического паттерна. Поскольку подобные всплески энергии представляются достаточно частым событием, то вышеописанный алгоритм был модифицирован для повышения точности анализа. Так, с пороговым значением E_k для диагностики типа колебаний в формуле (5) сравнивалось не мгновенное значение энергии преобразования (4), а усредненное по некоторому временному интервалу значение

$$\langle w(t) \rangle = \frac{1}{K} \int_K w(t) dt. \quad (11)$$

При этом, чем больше K размер окна, по которому проводится усреднение, тем больше точность метода диагностики; однако тем больше времени требуется для детектирования разряда.

Итак, разработанный алгоритм автоматической диагностики колебательной активности определенного вида на сигнале ЭЭГ заключается в следующем: в каждый момент дискретного времени, определяемого частотой дискретизации системы сбора данных, выполняется вейвлетное преобразование для всех масштабов из указанного диапазона; вычисляется мгновенное (4) и усредненное (11) значения вейвлетной энергии в диапазоне масштабов; после чего осуществляется проверка условия (5). Высокая надежность метода достигается при выборе порогового значения энергии E_k индивидуально – по фрагменту ЭЭГ длительностью один час для каждого анализируемого объекта. Обычно эта величина в 2.5–3 раза больше, чем среднее значение

энергии в этом же диапазоне частот в отсутствие ПВР. На основе предложенного метода создана система диагностики разрядов в режиме реального времени, которая используется совместно с системой сбора данных WinDAQ [58], поэтому в ней была реализована возможность двунаправленного обмена данными с АЦП/ЦАП. При обнаружении ПВР система диагностики подавала на один из выходов ЦАП прямоугольный импульс, который мог быть использован как для регистрации ПВР, так и для управления некоторым внешним устройством (например, электронным генератором), воздействующим на мозг подопытного животного. Таким образом, создавалась обратная связь, что давало возможность ставить целый ряд экспериментов по изучению воздействия импульсов тока на развитие гиперсинхронной активности (эпилептического припадка) в коре головного мозга.

Для проверки работоспособности разработанной системы детектирования осцилляторных паттернов в реальном времени в Институте сознания и информации университета Наймегена (Голландия) были поставлены специальные эксперименты. В ходе первого эксперимента система, основанная на WinDAQ, была протестирована на эффективность распознавания приступов абсанс эпилепсии у восьми животных. Запись ЭЭГ осуществлялась с помощью электродов, имплантированных в области лобной и затылочной коры головного мозга. Сначала определялись оптимальные значения параметров метода по тестовому сигналу ЭЭГ. Затем ставился эксперимент по диагностике осцилляторных паттернов в режиме реального времени, длительность регистрации составляла пять часов. Каждая запись ЭЭГ затем обрабатывалась опытным электрофизиологом, результаты обработки сравнивались с результатами работы программы для определения количества верно распознанных ПВР, пропущенных ПВР и числа ложных срабатываний.

Результаты экспериментальной проверки метода представлены в табл. 4. Были получены следующие основные результаты: уровень значимости δ метода был максимален и равен 100%, среднее значение критерия мощности $\beta = 96.9\%$, среднее время, необходимое для распознавания ПВР составляло 1.0 ± 0.55 с с момента начала события. Последний параметр определяется, в первую очередь, величиной окна, по которому производилось усреднение, и может быть в значительной степе-

Таблица 4

Результаты работы системы детектирования эпилептических паттернов в реальном времени

Номер животного, №	Число событий, определенных экспертом	Число событий, распознанных программно			$\delta, \%$	$\beta, \%$
		TP	FP	FN		
1	101	101	3	0	100	97.1
2	29	29	0	0	100	100
3	43	43	2	0	100	95.6
4	66	66	1	0	100	98.5
5	44	44	2	0	100	95.7
6	66	66	4	0	100	94.3
7	115	115	3	0	100	97.5
8	56	58	2	0	100	96.6
Среднее значение	65 ± 29	65 ± 29	2.1 ± 1.3	0.0 ± 0.0	100 ± 0	96.9 ± 1.8

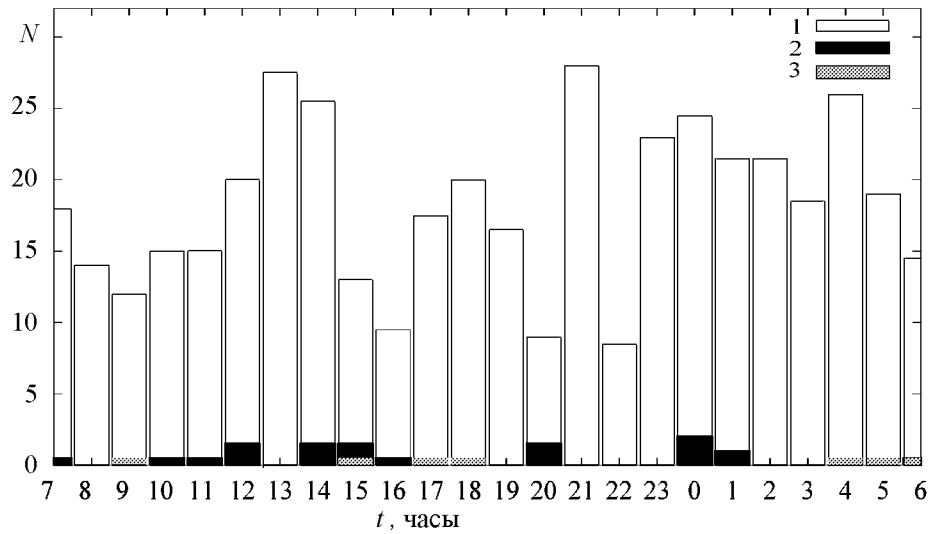


Рис. 7. Распределение числа верно распознанных событий, ошибочно определенных как пик-волновой разряд и пропущенных пик-волновых разрядов по времени в течении 24-часового эксперимента. 1 – верно распознанные пик-волновые разряды; 2 – неверно распознанные события; 3 – пропущенные пик-волновые разряды

ни уменьшен либо увеличен, поскольку при используемой частоте дискретизации (500 Гц) время выполнения преобразования существенно меньше времени между сбором двух последовательных отсчетов.

Также в рамках оценки работоспособности метода в условиях продолжительного автономного эксперимента был поставлен эксперимент по анализу ЭЭГ в течение 24 часов. Эксперимент ставился на двух животных, методика подготовки к эксперименту и оценки результатов полностью аналогична описанной ранее. Результаты эксперимента представлены на рис. 7. Нетрудно видеть, что число неверно протектированных и нераспознанных событий остается малым на протяжении всего эксперимента. Уменьшение мощности критерия относительно 5-часового эксперимента может быть связано с особенностями динамики мозга – в течение суток происходят малые изменения в распределении энергии по диапазонам частот, занимаемым различными осцилляторными паттернами, что приводит к периодическому появлению в ЭЭГ структур, ошибочно распознаваемых как ПВР. Тем не менее, точность метода остается весьма высокой на протяжении всего 24-часового периода наблюдений.

Заключение

В представленной статье на основании результатов работ [15,16,44,48,52,54] рассмотрены различные методы и данные диагностики осцилляторных паттернов в экспериментальных временных рядах ЭЭГ, характеризующих электрическую активность головного мозга. Разработанные методы основаны на использовании непрерывного вейвлетного преобразования анализируемых сигналов с различными стандартными и специально сконструированными адаптивными вейвлетными базисами. Методы используют также расчеты величин мгновенных энергий вейвлетного преобразования в характерных для выделяемых осцилляторных паттернов частотных диапазонах.

Полученные результаты показали, что разработанные методы на основе непрерывного вейвлетного преобразования демонстрируют высокую точность и эффективность как в режиме обработки уже записанных данных, так и в режиме реального времени. Эксперименты показали, что данный подход позволяет достичь уровня значимости, равного 100%, а также критерия мощности на уровне 97%, что является очень высокими показателями для экспериментальных систем в нейрофизиологии. С помощью изучения частотно-временной структуры ПВР удалось выявить характерные осцилляторные паттерны в дельта- и тета-диапазонах, которые предшествуют формированию судорожной активности, что может иметь диагностическое и прогностическое значение в клинической практике.

В заключение отметим, что данные методы могут найти применение в самых различных автоматизированных системах сбора данных и мониторинга состояния широкого класса технических, биофизических, химических и других систем.

Работа поддержана Федеральной целевой программой «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, а также грантом РФФИ.

Библиографический список

1. *Абарбанель Г.Д.И., Рабинович М.И., Селверстон А. и др.* Синхронизация в нейронных ансамблях // *Успехи физических наук.* 1996. Т. 166. С. 363.
2. *Mosekilde E., Maistrenko Yu., Postnov D.E.* Chaotic synchronization, applications to living systems. Singapore: World Scientific, 2002.
3. *Безручко, Б.П., Пономаренко, В.И., Прохоров М.Д. и др.* Моделирование и диагностика взаимодействия нелинейных колебательных систем по хаотическим временным рядам (приложения в нейрофизиологии) // *Успехи физических наук.* 2008. Т. 178. С. 323.
4. *Некоркин В.И.* Нелинейные колебания и волны в нейродинамике // *Успехи физических наук.* 2008. Т. 178. С. 313.
5. *Tass P.A. et al.* Detection of $n:m$ phase locking from noisy data: Application to magnetoencephalography // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 81. P. 3291.
6. *Tass P.A., Fieseler T., Dammers J. et al.* Synchronization tomography: A method for three-dimensional localization of phase synchronized neuronal populations in the human brain using magnetoencephalography // *Phys. Rev. Lett.* 2003. Vol. 90. P. 088101.
7. *Anishchenko V.S., Balanov A.G., Janson N.B. et al.* Entrainment between heart rate and weak nonlinear forcing // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 2000. Vol. 10. P. 2339.
8. *Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I., Gridnev V.I. et al.* Synchronization between main rhythmic processes in the human cardiovascular system // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 68. P. 041913.
9. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D.* Detecting synchronization of self-sustained oscillators by external driving with varying frequency // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 73. P. 026208.

10. *Короновский А.А., Пономаренко В.И., Прохоров М.Д., Храмов А.Е.* Метод исследования синхронизации автоколебаний по унивариантным данным с использованием непрерывного вейвлетного анализа // *ЖТФ*. 2007. Т. 77, № 9. С. 6.
11. *Meinecke F.C., Ziehe A., Kurths J., Müller K.-R.* Measuring phase synchronization of superimposed signals // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 94. P. 084102.
12. *Chavez M., Adam C., Navarro V. et al.* On the intrinsic time scales involved in synchronization: A data-driven approach // *Chaos*. 2005. Vol. 15. P. 023904.
13. *Tass P. A., Fieseler T., Dammers J., Dolan K.T., Morosan P., Majtanik M., Boers F., Muren A., Zilles K., Fink G.R.* Synchronization tomography: A method for three-dimensional localization of phase synchronized neuronal populations in the human brain using magnetoencephalography // *Phys. Rev. Lett.* 2003. Vol. 90, № 8. 088101.
14. *Perez Velazquez J.L., Khosravani H., Lozano A. et al.* Type III inermittency in human partial epilepsy // *European Journal of Neuroscience*. 1999. Vol. 11. P. 2571.
15. *Короновский А.А., Кузнецова Г.Д., Мидзяновская И.С., Ситникова Е.Ю., Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Закономерности перемежающегося поведения в спонтанной неконвульсивной судорожной активности у крыс // *ДАН*. 2006. Т. 409. С. 274.
16. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Midzyanovskaya I.S. et al.* On-off intermittency in time series of spontaneous paroxysmal activity in rats with genetic absence epilepsy // *Chaos*. 2006. Vol. 16. P. 043111.
17. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003.
18. *Torrence C., Compo G.P.* A practical guide to wavelet analysis // *Bulletin of the American Meteorological Society*. 1998. Vol. 79. P. 61.
19. *Wavelets in Physics / Van den Berg, J.C. Eds.* Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
20. *Aldroubi A., Unser M.* Wavelets in Medicine and Biology. CRC-Press, 1996.
21. *Анфиногентов В.Г., Короновский А.А., Храмов А.Е.* Вейвлетный анализ и его использование для анализа динамики нелинейных динамических систем различной природы // *Изв. РАН, сер. физич.* 2000. Vol. 64, № 12. P. 2383.
22. *Drinkenburg WHIM, Coenen AML, Vossen JMH, van Luijtelaaar ELJM.* Spike-wave discharges and sleep-wake states in rats with absence epilepsy // *Epilepsy Res.* 1991. Vol. 9. P. 218.
23. *Durka P.J.* From wavelets to adaptive approximations: Time-frequency parametrization of EEG // *Biomed. Eng. Online*. 2003; 2:1.
24. *Quiroga R.Q., Kraskov A., Kreuz T., Grassberger P.* Perfomance of different synchronization measures in real data: A case study on electroencephalographic signals // *Phys. Rev. E*. 2002. Vol. 65. P. 041903.
25. *Aldroubi A., Unser M.* Wavelets in Medicine and Biology. CRC-Press, 1996.
26. *Doron I., Hulata E., Baruchi I., Towle V.L., Ben-Jacob E.* Time-invariant person-specific frequency templates in human brain activity // *Physical Review Letters*. 2006. Vol. 96. P. 258101.

27. *Gong Pulin, Nikolaev A.R., L. van Cees.* Intermittent dynamics underlying the intrinsic fluctuations of the collective synchronization patterns in electrocortical activity // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 76. P. 011904.
28. *Makarov V.A., Pavlov A.N., Tupitsyn A.N., Panetsos F., Moreno A.* Stability of neural firing in the trigeminal nuclei under mechanical whisker stimulation // *Computational Intelligence and Neuroscience.* 2010. Vol. 2010.
29. *Павлов А.Н.* Вейвлет-анализ и примеры его применения // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2009. Т. 17, № 5. С. 99.
30. *Steriade M.* Neuronal substrates of sleep and epilepsy. Cambridge (UK): Cambridge University Press, 2003.
31. *Steriade M.* Thalamocortical oscillations in the sleeping and aroused brain // *Science.* 1993. Vol. 262. P. 679.
32. *Sitnikova E., van Luijtelaar G.* Cortical and thalamic coherence during spike-wave seizures in WAG/Rij rats // *Epilepsy Res.* 2006. Vol. 71. P. 159.
33. *Strogatz S.H.* Exploring complex networks // *Nature.* 2001. Vol. 410. P. 268.
34. *Boccaletti S., Latora V., Moreno V. et al.* Complex networks: Structure and dynamics // *Physics Reports.* 2006. Vol. 424. P. 175.
35. *Kryukov A.K., Osipov G.V., Polovinkin A.V., Kurth J.* Synchronous regimes in ensembles of coupled Bonhoeffer–van der Pol oscillators // *Physical Review E.* 2009. Vol. 79. P. 046209.
36. *Zenett D.M. and Mikhailov A.S.* Mutual synchronization in ensembles of globally coupled neural networks // *Phys. Rev. E.* 1998. Vol. 58. P. 872.
37. *Ito H., Nikolaev A.R., Leeuwen C.* Dynamics of spontaneous transitions between global brain states // *Human Brain Mapping.* 2007. Vol. 28. P. 904.
38. *Nikolaev A.R., Pulin G., Leeuwen C.* Evoked phase synchronization between adjacent high-density electrodes in human scalp EEG: Duration and time course related to behavior // *Clinical Neurophysiology.* 2005. Vol. 116. P. 2403.
39. *Wolpaw J.R., Birbaumer N., McFarland D.J., Pfurtscheller G., Vaughan T.M.* Brain-computer interfaces for communication and control // *Clin Neurophysiol.* 2002. Vol. 113. P. 767.
40. *Guger C., Ramoser H., and Pfurtscheller G.* Real-time EEG analysis for a brain-computer interface (BCI) with subject-specific spatial patterns // *IEEE Trans. Rehab. Eng.* 2000. Vol. 8. P. 562.
41. *Астафьева Н.М.* Вейвлет-анализ: Основы теории и примеры применения // *УФН.* 1996. Vol. 166, № 11. P. 1145.
42. *Астафьева Н.М.* Вейвлет-анализ: Спектральный анализ локальных возмущений (основы теории и примеры применения) // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1996. Т. 4, № 2. С. 3.
43. *Дремин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А.* Вейвлеты и их применение // *УФН.* 2001. Т. 171, № 5. С. 465.
44. *Sitnikova E.Yu., Hramov A.E., Koronovskii A.A., van Luijtelaar G.* Sleep spindles and spike-wave discharges in EEG: Their generic features, similarities and distinctions disclosed with Fourier transform and continuous wavelet analysis // *Journal of Neuroscience Methods.* 2009. Vol. 180. P. 304.

45. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D.* Detection of synchronization from univariate data using wavelet transform // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 75, № 5. 056207.
46. *Freeman W.J.* Mass Action in the Nervous System. N.Y.: Academic Press, 1975.
47. *Steriade M., Deschenes M.* The thalamus as a neuronal oscillator // *Brain Res. Rev.* 1984. Vol. 8. P. 1.
48. *Ovchinnikov A., Luttjohann A., Hramov A., van Luijtelaar G.* An algorithm for real-time detection of spike-wave discharges in rodents // *Journal of Neuroscience Methods.* 2010.
49. *Destexhe A., Sejnowski T.J.* Thalamocortical assemblies. Oxford: Oxford University Press, 2001.
50. *Kostopoulos G.K.* Spike-and-wave discharges of absence seizures as a transformation of sleep spindles: the continuing development of a hypothesis // *Clin Neurophysiol.* 2000; Suppl. 2: S27-38.
51. *Brunelli R.* Template Matching Techniques in Computer Vision: Theory and Practice. Wiley, 2009.
52. *van Luijtelaar G., Hramov A.E., Sitnikova E.Yu., Koronovskii A.A.* Spike-wave discharges in WAG/Rij rats are preceded by delta and theta precursor activity in cortex and thalamus // *Clinical Neurophysiology.* 2010.
53. *Drinkenburg W.H. et al.* Spike-wave discharges and sleep-wake states in rats with absence epilepsy // *Epilepsy Res.* 1991. Vol. 9, № 3. P. 218.
54. *Овчинников А.А., Храмов А.Е., Люттьеханн А., Короновский А.А., ван Луйтелеар Ж.* Метод диагностики характерных паттернов на наблюдаемых временных рядах и его экспериментальная реализация в режиме реального времени применительно к нейрофизиологическим сигналам // *ЖТФ.* 2011. Т. 81, № 1. С. 3.
55. *Wolpaw J.R., Birbaumer N., McFarland D.J., Pfurtscheller G., Vaughan T.M.* Brain-computer interfaces for communication and control // *Clin Neurophysiol.* 2002. Vol. 113, № 6. P. 767.
56. *Иваницкий Г.А., Наумов Р.А., Роик А.О., Иваницкий А.М.* Как определить, чем занят мозг, по его электрическим потенциалам? Устойчивые паттерны ЭЭГ при выполнении когнитивных заданий // *Вопросы искусственного интеллекта.* 2008. Т. 1, № 1. С. 93.
57. *Kaplan A.Ya., Lim J.J., Jin K.S., Park B.W., Byeon J.G., Tarasova S.U.* Unconscious operant conditioning in the paradigm of brain-computer interface based on color perception // *Intern. J. Neurosci.* 2005. Vol. 115. Т. 781.
58. <http://www.dataq.com/>

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского
Donders Center for Cognition, Radboud
University Nijmegen, The Netherlands
Институт высшей нервной деятельности
и нейрофизиологии РАН, Москва*

Поступила в редакцию 16.10.2010

DIAGNOSTICS AND ANALYSIS OF OSCILLATORY NEURONAL NETWORK ACTIVITY OF BRAIN WITH CONTINUOUS WAVELET ANALYSIS

*A.A. Koronovskii, G. van Luitelaar, A.A. Ovchinnikov,
E.Yu. Sitnikova, A.E. Hramov*

In the article we present an overview of a number of continuous wavelet transform-based techniques for analysis and diagnostic of oscillatory neuronal network activity of brain in experimentally obtained electroencephalographic data. We describe a technique for automatic detection of characteristic patterns for paroxysmal activity (spike-wave discharges) in epileptic electroencephalogram (EEG) based on wavelet spectrum power analysis, obtained with continuous wavelet transform with complex mother wavelet (Morlet) in specific frequency ranges. An effective approach to sleep spindles detection and classification based on special adaptive wavelet-basis construction (spindle-wavelets) is proposed. Proposed techniques are shaped for real time EEG signals study and can be used for building systems for monitoring activity of a brain challenged with epilepsy. A study of spectral and temporal structure of EEG before spike-wave discharges is carried out and characteristic predecessors of paroxysmal activity are found, which can be used for detecting brain transition state. Such diagnostics can be used to predict epileptic seizures in clinical practice.

Keywords: Signal processing, wavelet analysis, epilepsy, pattern recognition, brain-computer interface.

Короновский Алексей Александрович – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995), доктор физико-математических наук (2007), профессор кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой деятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. Автор ряда статей в центральной печати, а также монографий (в соавторстве) «Нелинейная динамика в действии» и «Непрерывный вейвлетный анализ», вышедших в Издательстве ГосУНЦ «Колледж», двухтомной монографии «Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот» (М.: Физматлит, 2009, под редакцией А.А. Короновского, А.А. Кураева, Д.И. Трубецкова и А.Е. Храмова), монографии «Моделирование нелинейной динамики глобальных процессов» (М.: Изд-во МГУ, 2010, под редакцией С.И. Ильина и Д.И. Трубецкова) и др.



410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: alkor@nonlin.sgu.ru



Gilles van Luitelaar is the senior researcher at the NICI, Dept of Biological Psychology. He received his PhD from Radboud University Nijmegen. He studied Biological Psychology in Tilburg University. His research interests are currently «mechanisms of normal pathological thalamo-cortical interactions».

Montessorilaan 3, 525HR, Nijmegen, The Netherlands
University Nijmegen, NICI
E-mail: g.vanluitelaar@nici.kun.nl



Овчинников Алексей Александрович – родился в 1985 году в Саратове, окончил Саратовский государственный университет (2008). Ассистент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – влияние шумов на явление синхронизации.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: ovchinnikov@nonlin.sgu.ru



Ситникова Евгения Юрьевна – родилась в Волгограде (1974). Окончила ветеринарно-биологический факультет Московской академии ветеринарной медицины и биотехнологии им. К.И.Скрябина (1996), кандидат биологических наук (специальность 03.00.13 – физиология, 2001), PhD (Social science, Radboud University Nijmegen, Нидерланды, 2008). Старший научный сотрудник Учреждения Российской академии наук института высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН. Научные интересы – междисциплинарные исследования функций мозга. Автор порядка 40 научных работ в отечественных и международных журналах.

117485 Москва, ул. Бутлерова, 5А
Институт высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН
E-mail: eu.sitnikova@gmail.com



Храмов Александр Евгеньевич – окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1996). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1999) и доктора (2006) физ.-мат. наук. Профессор, заместитель заведующего кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов – радиофизика в той ее части, которая связана со взаимодействием свободных электронов с электромагнитными полями, нелинейная динамика распределенных активных сред, методы анализа и моделирования динамических систем. Опубликовал (в соавторстве) книгу «Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков» (Т. 1, М.: Физматлит, 2003; Т. 2, М.: Физматлит, 2004), монографию «Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения» (Москва: Наука, Физматлит, 2003), двухтомную коллективную монографию «Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот» (М.: Физматлит, 2009), коллективную монографию «Моделирование нелинейной динамики глобальных процессов» (М.: Изд.-во МГУ, 2010) и др.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: aeh@nonlin.sgu.ru



ПЕРЕМЕЖАЮЩЕЕСЯ ПОВЕДЕНИЕ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ ФАЗОВОЙ ХАОТИЧЕСКОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ НА РАЗЛИЧНЫХ ВРЕМЕННЫХ МАСШТАБАХ*

М.О. Журавлев, А.А. Короновский, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов

Приведены результаты изучения перемежающегося поведения вблизи границы фазовой хаотической синхронизации на различных временных масштабах наблюдения. Показано, что ниже границы фазовой синхронизации при определенных значениях параметра связи и на определенных временных масштабах процессы перемежаемости типа игольного ушка и кольца будут наблюдаться одновременно. В работе построена теория данного типа перемежающегося поведения, возникающего на границе установления режимов хаотической синхронизации при анализе динамики систем на различных временных масштабах.

Ключевые слова: Перемежаемость, фазовая хаотическая синхронизация, хаотические осцилляторы, временной масштаб, динамическая система.

Введение

Наличие перемежаемости характерно для многих нелинейных систем. Наблюдается перемежаемость, в частности, при переходе от периодических колебаний к хаотическим [1], а также вблизи границы возникновения различных режимов хаотической синхронизации связанных осцилляторов [2–5].

Существует определенная классификация перемежающегося поведения, в частности, выделяют перемежаемость типов I–III [1, 6], on–off перемежаемость [7], перемежаемость игольного ушка [8], перемежаемость кольца [9]. Несмотря на некоторое сходство (наличие во временном ряду двух различных режимов, чередующихся друг с другом), каждый тип перемежаемости обладает своими собственными особенностями и характеристиками (прежде всего, это зависимость средней длительности ламинарных фаз от управляющего параметра и распределение длительностей ламинарных фаз). Причины, приводящие к возникновению перемежающегося поведения каждого типа, также различны.

*Статья написана по материалам конференции «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, 4–9 октября, 2010.

В научной литературе описано существование двух типов перемежающегося поведения для хаотических систем, наблюдающихся при разрушении режима фазовой синхронизации в случае, когда собственные частоты осциллятора и внешнего сигнала различаются мало [8, 10, 11], и, соответственно, выделяют два значения параметра связи $\sigma_1 < \sigma_2$, являющиеся характерными точками, разграничивающими различные типы динамики. Ниже границы режима фазовой синхронизации σ_2 динамика разности фаз $\Delta\varphi(t)$ содержит участки синхронной динамики (ламинарные фазы), постоянно прерываемые внезапными фазовыми проскоками (турбулентные фазы), в течение которых значение $|\Delta\varphi(t)|$ изменяется на 2π . Проанализировав статистику длительностей ламинарных фаз, можно заключить, что ниже величины связи σ_1 (то есть достаточно далеко от границы установления/разрушения режима хаотической фазовой синхронизации σ_2) наблюдается перемежаемость типа I. Для величины связи $\sigma \in (\sigma_1; \sigma_2)$ наблюдается сверхдлинное ламинарное поведение (так называемая перемежаемость игольного ушка), характеристики которого существенно отличаются от хорошо известных характеристик перемежаемости типа I. Выше критической точки σ_2 обнаруживается режим фазовой синхронизации (с формальной точки зрения синхронный режим может рассматриваться как существование одной ламинарной фазы с бесконечной длительностью). Для средней длительности ламинарных фаз в случае перемежаемости типа I имеет место степенная зависимость от параметра надкритичности $T \sim (\sigma_1 - \sigma)^{-1/2}$, а в случае перемежаемости игольного ушка эта зависимость, как показано в предыдущих исследованиях (см., например, работы [8, 11]), выражается законом

$$T \sim \exp(k|\sigma_2 - \sigma|^{-1/2}) \quad (1)$$

или

$$-\ln(1/T) = c_0 - c_1|\sigma_2 - \sigma|^{-1/2} \quad (2)$$

(c_0 , c_1 и k – константы), приведенным впервые в [12] для статистики переходного процесса, предшествующего точке бифуркации слияния пары неустойчивых орбит.

Таким образом, на плоскости управляющих параметров существует область, примыкающая снизу к границе фазовой синхронизации, где система демонстрирует перемежающееся поведение, характеристики которого соответствуют перемежаемости игольного ушка. Очевидно, что основные особенности в поведении взаимодействующих систем, обусловленные разрушением синхронного режима, будут проявляться в непосредственной близости от границы, то есть там, где в случае малых расстройек диагностируется режим перемежаемости игольного ушка. Именно поэтому далее внимание сосредоточено, в основном, на этом типе перемежающегося поведения.

Теоретическое объяснение явления перемежаемости игольного ушка основано на граничном кризисе синхронных аттракторов, вызванном бифуркацией слияния неустойчивых орбит, одни из которых являются седловыми, а другие – неустойчивы по всем направлениям [8, 10]. Данный тип перемежающегося поведения наблюдался как при численном моделировании [8, 11], так и в эксперименте [14] для различных нелинейных систем, включая осцилляторы Ресслера.

Область значений параметров вблизи границы установления синхронного хаотического режима, в которой для связанных хаотических осцилляторов наблюдается

режим перемежаемости игольного ушка, представляет также интерес с точки зрения рассмотрения динамики систем на различных временных масштабах [15, 16]. Как известно, при таком рассмотрении в случае режима фазовой синхронизации существует диапазон синхронных временных масштабов, к которому примыкают диапазоны асинхронных временных масштабов. Ниже границы фазовой синхронизации, при значении параметра связи между осцилляторами, соответствующем перемежаемости игольного ушка, могут быть выделены временные масштабы, на которых помимо перемежаемости игольного ушка будет наблюдаться перемежающееся поведение типа кольца [9], обычно реализующееся вблизи границы фазовой синхронизации в случае, если параметры взаимодействующих систем расстроены достаточно сильно. Иными словами, при определенных значениях параметра связи и на определенных временных масштабах оба процесса перемежаемости будут наблюдаться одновременно (можно сказать, что будет наблюдаться *перемежаемость перемежаемостей*).

1. Распределение длительностей ламинарных фаз

Как известно, распределение длительностей ламинарных фаз как в случае перемежаемости игольного ушка, так и в случае перемежаемости кольца, подчиняется экспоненциальному закону (см. [13] для перемежаемости игольного ушка и [9] для перемежаемости кольца). Иными словами, при выбранных значениях управляющих параметров плотность вероятности наблюдения ламинарной фазы длительностью s для перемежаемости кольца будет определяться соотношением

$$p_r(s) = \frac{1}{T_r} \exp\left(-\frac{s}{T_r}\right), \quad (3)$$

а ламинарной фазы длительностью l для перемежаемости игольного ушка – соотношением

$$p_e(l) = \frac{1}{T_e} \exp\left(-\frac{l}{T_e}\right), \quad (4)$$

где T_r, T_e – средние длительности ламинарных фаз перемежаемости кольца и игольного ушка, соответственно. Очевидно, что для обеих плотностей вероятностей (3) и (4) выполняется условие нормировки

$$\int_0^{+\infty} p_{r,e}(t) dt = 1. \quad (5)$$

Как уже отмечалось выше, существует такая область значений параметра связи и такой диапазон временных масштабов, где одновременно наблюдаются как перемежаемость кольца, так и перемежаемость игольного ушка. В этом случае в анализируемой временной реализации наблюдаются фазовые проскоки, соответствующие либо одному, либо другому типу перемежаемости. Можно говорить, что в этом случае оба процесса перемежающегося поведения протекают одновременно (параллельно), при этом реализуются турбулентные фазы, отвечающие то одному, то другому типу перемежаемости. Распределение длительностей ламинарных фаз в этом случае будет определяться плотностью вероятности $p(\tau)$ наблюдения ламинарной фазы длительностью τ .

Проведем аналитический вывод данной плотности вероятности. Выберем произвольно один из фазовых проскоков в анализируемой временной реализации системы связанных хаотических осцилляторов, демонстрирующих на выбранном временном масштабе оба типа перемежающегося поведения. Без ограничения общности можно предположить, что выбранный таким образом фазовый проскок соответствует перемежаемости игольного ушка. Тогда вероятность ламинарной фазы длительностью, попадающей в интервал $[\tau; \tau + d\tau)$, будет определяться суммой вероятностей событий, которые можно считать независимыми друг от друга – наблюдения через интервал времени $t \in [\tau; \tau + d\tau)$ фазовых проскоков перемежаемости типа либо игольного ушка, либо кольца. Чтобы через интервал времени $t \in [\tau; \tau + d\tau)$ наблюдался фазовый проскок, отвечающий перемежаемости кольца, необходимо, чтобы для перемежаемости игольного ушка реализовалась ламинарная фаза длительностью $l > \tau$, для перемежаемости кольца в момент времени, соответствующий началу рассмотрения, реализовалась ламинарная фаза длительностью $s > \tau$, причем эта фаза должна закончиться через время $t \in [\tau; \tau + d\tau)$. Вероятность P_1 того, что в рассматриваемый момент времени для перемежаемости игольного ушка начинает реализовываться ламинарная фаза длительностью $l > \tau$ и одновременно для перемежаемости кольца наблюдается ламинарная фаза длительностью $s > \tau$ и эта фаза заканчивается через время $t \in [\tau; \tau + d\tau)$, определяется соотношением

$$P_1 = \frac{d\tau}{s} p_e(l) p_r(s) dl ds. \quad (6)$$

С учетом того, что длительности s и l рассматриваемых ламинарных фаз, отвечающих режимам перемежаемости кольца и игольного ушка, могут быть любыми (превышающими τ), для того чтобы реализовалась ламинарная фаза длительностью, попадающей в диапазон $[\tau; \tau + d\tau)$, вероятность того, что после фазового проскока, обусловленного механизмами перемежаемости игольного ушка, будет наблюдаться ламинарная фаза длительностью, попадающей в диапазон $[\tau; \tau + d\tau)$ и заканчивающаяся фазовым проскоком, обусловленным механизмом перемежаемости кольца, будет равна

$$P_{ER}(\tau) = d\tau \int_{\tau}^{\infty} \frac{p_r(s)}{s} ds \int_{\tau}^{\infty} p_e(l) dl. \quad (7)$$

С учетом (3) и (4) соотношение (7) может быть вычислено как

$$\begin{aligned} P_{ER}(\tau) &= d\tau \int_{\tau}^{\infty} \frac{1}{sT_r} \exp\left(-\frac{s}{T_r}\right) ds \int_{\tau}^{\infty} \frac{1}{T_e} \exp\left(-\frac{l}{T_e}\right) dl = \\ &= \frac{d\tau}{T_r} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_r}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\Gamma(a, z)$ – неполная гамма-функция.

Аналогично, в рассматриваемой системе будет наблюдаться ламинарный участок поведения длительностью, попадающей в диапазон $[\tau; \tau + d\tau)$, и начинающийся с фазового проскока, обусловленного перемежаемостью игольного ушка, если через время $t \in [\tau; \tau + d\tau)$ произойдет фазовый проскок, обусловленный также перемежаемостью игольного ушка. Для этого необходимо, чтобы для перемежаемости игольного ушка реализовалась ламинарная фаза длительностью из диапазона $[\tau; \tau + d\tau)$, для

перемежаемости кольца в момент времени, соответствующий началу рассмотрения, реализовалась ламинарная фаза длительностью $s > \tau$, причем эта фаза не должна закончиться в течение времени $t \in [\tau; \tau + d\tau)$.

Вероятность того, что в рассматриваемый момент времени для перемежаемости игольного ушка начинает реализоваться ламинарная фаза длительностью, попадающей в диапазон $[\tau; \tau + d\tau)$, и, одновременно, для перемежаемости кольца наблюдается ламинарная фаза длительностью $s > \tau$ и эта фаза не заканчивается в течение времени $t \in [\tau; \tau + d\tau)$, определяется соотношением

$$P_2 = \left(1 - \frac{\tau}{s}\right) p_e(\tau) p_r(s) d\tau ds. \quad (9)$$

С учетом того, что длительность s рассматриваемой ламинарной фазы, отвечающей режиму перемежаемости кольца, может быть любой (превышающей τ), для того чтобы реализовалась ламинарная фаза длительностью, попадающей в диапазон $[\tau; \tau + d\tau)$, вероятность того, что после фазового проскока, обусловленного механизмами перемежаемости игольного ушка, будет наблюдаться ламинарная фаза длительностью, попадающей в диапазон $[\tau; \tau + d\tau)$, и заканчивающаяся фазовым проскоком, обусловленным также механизмом перемежаемости игольного ушка, будет

$$P_{EE}(\tau) = p_e(\tau) d\tau \int_{\tau}^{\infty} \left(1 - \frac{\tau}{s}\right) p_r(s) ds. \quad (10)$$

С учетом (3) и (4) соотношение (10) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} P_{EE}(\tau) &= \frac{1}{T_e} \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) d\tau \int_{\tau}^{\infty} \left(1 - \frac{\tau}{s}\right) \frac{1}{T_r} \exp\left(-\frac{s}{T_r}\right) ds = \\ &= \frac{d\tau}{T_e} \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) \left[\exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right) - \frac{\tau}{T_r} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_r}\right) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Полученные соотношения (8) и (11) описывают вероятность возникновения ламинарной фазы длительностью, попадающей в диапазон $[\tau; \tau + d\tau)$ при условии, что турбулентный проскок, с которого начато рассмотрение, обусловливается механизмом перемежаемости игольного ушка. В то же самое время, возможна ситуация, что начальный фазовый проскок был обусловлен перемежаемостью кольца. Если средняя длительность ламинарной фазы перемежаемости кольца T_r , а перемежаемости игольного ушка T_e , то на достаточно длительном интервале наблюдения L будет зафиксировано $N_e = L/T_e$ фазовых проскоков, обусловленных перемежаемостью игольного ушка, и $N_r = L/T_r$ фазовых проскоков, обусловленных перемежаемостью кольца. Тогда вероятность того, что произвольно выбранный для начального рассмотрения фазовый проскок определяется механизмами перемежаемости игольного ушка, будет

$$P_e = \frac{N_e}{N_e + N_r} = \frac{T_r}{T_e + T_r}, \quad (12)$$

и, аналогично, вероятность того, что произвольно выбранный для начального рассмотрения фазовый проскок определяется механизмами перемежаемости кольца, будет определяться соотношением

$$P_r = \frac{N_r}{N_e + N_r} = \frac{T_e}{T_e + T_r}. \quad (13)$$

Совершенно аналогично, вероятность того, что после фазового проскока, обусловленного механизмами перемежаемости кольца, будет наблюдаться ламинарная фаза длительностью, попадающей в диапазон $[\tau; \tau + d\tau)$, и заканчивающаяся фазовым проскоком, обусловленным механизмом перемежаемости игольного ушка, будет равна

$$P_{RE}(\tau) = d\tau \int_{\tau}^{\infty} \frac{1}{lT_e} \exp\left(-\frac{l}{T_e}\right) dl \int_{\tau}^{\infty} \frac{1}{T_r} \exp\left(-\frac{s}{T_r}\right) ds =$$

$$= \frac{d\tau}{T_e} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_e}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right), \quad (14)$$

а вероятность того, что после фазового проскока, обусловленного механизмами перемежаемости кольца, будет наблюдаться ламинарная фаза длительностью, попадающей в диапазон $[\tau; \tau + d\tau)$, и заканчивающаяся фазовым проскоком, обусловленным также механизмом перемежаемости кольца, будет равна

$$P_{RR}(\tau) = \frac{1}{T_r} \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right) d\tau \int_{\tau}^{\infty} \left(1 - \frac{\tau}{l}\right) \frac{1}{T_r} \exp\left(-\frac{l}{T_e}\right) dl =$$

$$= \frac{d\tau}{T_r} \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right) \left[\exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) - \frac{\tau}{T_e} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_e}\right) \right]. \quad (15)$$

Тогда, с учетом всего вышеизложенного, вероятность наблюдать в рассматриваемой системе ламинарный участок поведения длительностью, попадающей в диапазон $[\tau; \tau + d\tau)$, будет определяться соотношением

$$P(\tau) = p(\tau) d\tau = P_e [P_{ER}(\tau) + P_{EE}(\tau)] + P_r [P_{RE}(\tau) + P_{RR}(\tau)], \quad (16)$$

где $p(\tau)$ – плотность вероятности наблюдения в рассматриваемой системе ламинарный участок поведения длительностью, попадающей в диапазон $[\tau; \tau + d\tau)$.

С учетом соотношений (8), (11)–(16) плотность вероятности $p(\tau)$, определяющая распределение длительностей ламинарных фаз, примет вид

$$p(\tau) = \frac{1}{T_e + T_r} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_r}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) + \frac{T_r}{T_e(T_e + T_r)} \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right) -$$

$$- \frac{\tau}{T_e(T_e + T_r)} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_r}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) + \frac{1}{T_e + T_r} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_e}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right) +$$

$$+ \frac{T_e}{T_r(T_e + T_r)} \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) - \frac{\tau}{T_r(T_e + T_r)} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_e}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right). \quad (17)$$

2. Верификация полученного выражения для плотности вероятности

Полученное аналитически в предыдущем разделе выражение (17), описывающее плотность вероятности длительностей ламинарных фаз, должно быть верифицировано как с точки зрения выполнения условия нормировки

$$\int_0^{+\infty} p(\tau) d\tau = 1 \quad (18)$$

(являющегося следствием факта, что вероятность того, что будет наблюдаться ламинарный участок поведения *любой* длительности, равна единице), так и с точки зрения предельного перехода, когда средняя длительность участка ламинарного поведения T_r , обусловливаемого механизмами перемежаемости кольца, стремится к бесконечности. Такой предельный переход является отражением ситуации, когда рассматривается поведение связанных осцилляторов, демонстрирующих перемежаемость игольного ушка, на таких временных масштабах, когда механизмы, отвечающие за перемежаемость кольца, еще не реализуются. Вычисление определенного интеграла (18) в пределах от нуля до бесконечности от плотности вероятности (17) дает

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} p(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{T_e + T_r} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_r}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) d\tau + \int_0^{+\infty} \frac{T_r}{T_e(T_e + T_r)} \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right) d\tau - \\ & - \int_0^{+\infty} \frac{\tau}{T_e(T_e + T_r)} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_r}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) d\tau + \int_0^{+\infty} \frac{1}{T_e + T_r} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_e}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right) d\tau + \\ & + \int_0^{+\infty} \frac{T_e}{T_r(T_e + T_r)} \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) d\tau - \int_0^{+\infty} \frac{\tau}{T_r(T_e + T_r)} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_e}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right) d\tau = \\ &= \frac{T_e}{T_e + T_r} \log\left(\frac{T_e + T_r}{T_e}\right) + \frac{T_r^2}{(T_e + T_r)^2} - \left[\frac{T_e}{T_e + T_r} \log\left(\frac{T_e + T_r}{T_e}\right) - \frac{T_e T_r}{(T_e + T_r)^2} \right] + \\ & + \frac{T_r}{T_e + T_r} \log\left(\frac{T_e + T_r}{T_r}\right) + \frac{T_e^2}{(T_e + T_r)^2} - \left[\frac{T_r}{T_e + T_r} \log\left(\frac{T_e + T_r}{T_r}\right) - \frac{T_e T_r}{(T_e + T_r)^2} \right] = \\ &= \frac{T_r^2}{(T_e + T_r)^2} + \frac{2T_e T_r}{(T_e + T_r)^2} + \frac{T_e^2}{(T_e + T_r)^2} = \frac{(T_e + T_r)^2}{(T_e + T_r)^2} = 1. \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, как следует из (19), полученное выражение (17) для плотности вероятности наблюдать в рассматриваемой системе ламинарный участок поведения длительностью, попадающей в диапазон $[\tau; \tau + d\tau)$, удовлетворяет условию нормировки (18).

Аналогично, предельный переход, исключая из рассмотрения перемежаемость кольца,

$$\begin{aligned}
\lim_{T_r \rightarrow +\infty} p(\tau) &= \lim_{T_r \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_e + T_r} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_r}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) + \\
&+ \lim_{T_r \rightarrow +\infty} \frac{T_r}{T_e(T_e + T_r)} \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right) - \lim_{T_r \rightarrow +\infty} \frac{\tau}{T_e(T_e + T_r)} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_r}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) + \\
&+ \lim_{T_r \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_e + T_r} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_e}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right) + \lim_{T_r \rightarrow +\infty} \frac{T_e}{T_r(T_e + T_r)} \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) - \\
&- \lim_{T_r \rightarrow +\infty} \frac{\tau}{T_r(T_e + T_r)} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_e}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right) = 0 + \frac{1}{T_e} \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) - 0 + 0 + 0 - 0 = \\
&= \frac{1}{T_e} \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right)
\end{aligned} \tag{20}$$

приводит к плотности распределения вероятностей (4) нахождения ламинарного участка поведения с длительностью, попадающей в диапазон $[\tau; \tau + d\tau]$, которая соответствует перемежаемости игольного ушка.

3. Средняя длительность ламинарных фаз

Одной из важнейших характеристик перемежающегося поведения является зависимость средней длительности ламинарных фаз от управляющих параметров, при этом в качестве параметра часто рассматривается «параметр надкритичности», характеризующий отклонение значения управляющего параметра от бифуркационной точки. В рассматриваемом случае, когда во временной реализации системы одновременно наблюдаются как перемежаемость кольца, так и перемежаемость игольного ушка, а распределение длительностей ламинарных фаз определяется плотностью вероятности (17), средняя длительность ламинарных участков поведения имеет вид

$$\begin{aligned}
\langle \tau \rangle &= \int_0^{+\infty} \tau p(\tau) d\tau = \int_0^{+\infty} \frac{\tau}{T_e + T_r} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_r}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) d\tau + \\
&+ \int_0^{+\infty} \frac{T_r \tau}{T_e(T_e + T_r)} \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right) d\tau - \int_0^{+\infty} \frac{\tau^2}{T_e(T_e + T_r)} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_r}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) d\tau + \\
&+ \int_0^{+\infty} \frac{\tau}{T_e + T_r} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_e}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right) d\tau + \int_0^{+\infty} \frac{T_e \tau}{T_r(T_e + T_r)} \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) d\tau - \\
&- \int_0^{+\infty} \frac{\tau^2}{T_r(T_e + T_r)} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_e}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right) d\tau = \left[\frac{T_e^2}{T_e + T_r} \log\left(\frac{T_e + T_r}{T_e}\right) - \frac{T_e^2 T_r}{(T_e + T_r)^2} \right] + \frac{T_e T_r^3}{(T_e + T_r)^3} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{2T_e^2}{T_e+T_r} \log \left(\frac{T_e+T_r}{T_e} \right) - \frac{T_e^2 T_r (2T_e+3T_r)}{(T_e+T_r)^3} \right] + \left[\frac{T_r^2}{T_e+T_r} \log \left(\frac{T_e+T_r}{T_r} \right) - \frac{T_r^2 T_e}{(T_e+T_r)^2} \right] + \frac{T_r T_e^3}{(T_e+T_r)^3} - \\
& - \left[\frac{2T_r^2}{T_e+T_r} \log \left(\frac{T_e+T_r}{T_r} \right) - \frac{T_r^2 T_e (2T_r+3T_e)}{(T_e+T_r)^3} \right] = - \frac{T_e^2 \log \left(\frac{T_e+T_r}{T_e} \right) - 2T_e T_r + T_r^2 \log \left(\frac{T_e+T_r}{T_r} \right)}{T_e+T_r}.
\end{aligned} \tag{21}$$

В случае предельного перехода $T_r \rightarrow +\infty$, исключающего из рассмотрения перемежаемость кольца, средняя длительность ламинарной фазы наблюдаемого поведения стремится к средней длительности ламинарной фазы перемежаемости игольного ушка:

$$\begin{aligned}
\lim_{T_r \rightarrow +\infty} \langle \tau \rangle &= - \lim_{T_r \rightarrow +\infty} \frac{T_e^2 \log \left(\frac{T_e+T_r}{T_e} \right) - 2T_e T_r + T_r^2 \log \left(\frac{T_e+T_r}{T_r} \right)}{T_e + T_r} = \\
&= - \lim_{T_r \rightarrow +\infty} \frac{T_e^2}{T_e + T_r} \log \left(\frac{T_e + T_r}{T_e} \right) + \lim_{T_r \rightarrow +\infty} \frac{2T_e T_r}{T_e + T_r} - \\
&= - \lim_{T_e \rightarrow +\infty} \frac{T_r^2}{T_e + T_r} \log \left(\frac{T_e + T_r}{T_r} \right) = -0 + 2T_e - T_e = T_e.
\end{aligned} \tag{22}$$

4. Пример сосуществования двух типов перемежаемости в связанных осцилляторах Ресслера

Для того чтобы проиллюстрировать полученные результаты, рассмотрим на различных временных масштабах s поведение двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов Ресслера, находящихся вблизи границы фазовой синхронизации:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\omega_1 y_1 - z_1, \\
\dot{y}_1 &= \omega_1 x_1 + a y_1, \\
\dot{z}_1 &= p + z_1(x_1 - c), \\
\dot{x}_2 &= -\omega_2 y_2 - z_2 + \varepsilon(x_1 - x_2), \\
\dot{y}_2 &= \omega_2 x_2 + a y_2, \\
\dot{z}_2 &= p + z_2(x_2 - c).
\end{aligned} \tag{23}$$

В соотношении (23) x, y , – координаты ведущей (1) и ведомой (2) системы, ε характеризует силу связи между осцилляторами. Остальные значения параметров были выбраны по аналогии с предыдущими работами [17, 18]: $a = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10.0$, $\omega_2 = 0.95$, $\omega_1 = 0.93$. Для выделения ламинарных фаз во временных реализациях взаимодействующих систем использовался подход, описанный в [19].

Рассмотрение поведения связанных хаотических систем на различных временных масштабах [15, 16] основано на введении непрерывного множества фаз исследуемых сигналов с помощью непрерывного вейвлетного преобразования

$$W(s, t_0) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t - t_0}{s} \right) dt, \tag{24}$$

с материнским вейвлетом Морле

$$\psi(\eta) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \exp(j\Omega_0\eta) \exp\left(\frac{-\eta^2}{2}\right), \quad (25)$$

$$\Omega_0 = 2\pi.$$

Вейвлетная поверхность

$$W(s, t_0) = |W(s, t_0)| e^{j\varphi_s(t_0)} \quad (26)$$

характеризует поведение системы на каждом временном масштабе s в любой момент времени t_0 . Величина $|W(s, t_0)|$ характеризует наличие и интенсивность соответствующего временного масштаба s в момент времени t_0 . Как правило, в рассмотрение также вводят мгновенное значение

$$E(s, t_0) = |W(s, t_0)|^2 \quad (27)$$

и интегральное

$$\langle E(s) \rangle = \int |W(s, t_0)|^2 dt_0 \quad (28)$$

распределения энергии по временным масштабам.

Оказывается, что при использовании вейвлетного преобразования (24) для каждого временного масштаба s естественным образом оказывается определена непрерывная фаза $\varphi(s, t) = \arg W(s, t)$. Иными словами, оказывается возможным характеризовать поведение каждого временного масштаба s с помощью ассоциированной с ним фазы $\varphi(s, t)$, являющейся непрерывной функцией временного масштаба s и времени t . Введенное в рассмотрение таким образом семейство фаз наиболее полным образом характеризует поведение связанных систем: возможно описать поведение каждого временного масштаба с помощью ассоциированной с ним фазы $\varphi(s, t)$.

Для выбранных значений параметров синхронный режим устанавливается при значении параметра связи $\varepsilon_c \approx 0.045$, при этом синхронные временные масштабы лежат в диапазоне $s \in [s_l; s_h]$, $s_l = 4.99$, $s_h = 8.25$.

Для того чтобы разделить перемежаемость игольного ушка и перемежаемость кольца, можно использовать рассмотрение динамики систем на вращающейся плоскости. Этот подход был впервые предложен в работах [9, 20] и заключается в том, что переменные (в данном случае $x_{1,2} = \operatorname{Re} W_{1,2}(s, t)$ и $y_{1,2} = \operatorname{Im} W_{1,2}(s, t)$) рассматриваются на плоскости, вращающейся вокруг начала координат [9]

$$\begin{aligned} x' &= x_1 \cos \varphi_2(s, t) + y_1 \sin \varphi_2(s, t), \\ y' &= -x_1 \sin \varphi_2(s, t) + y_1 \cos \varphi_2(s, t). \end{aligned} \quad (29)$$

В этом случае оба типа перемежающегося поведения легко могут быть детектированы и разделены: сгусток фазовых траекторий на плоскости $(x'; y')$, который выглядит как зашумленная неподвижная устойчивая точка (рис. 1, *a*) соответствует синхронной динамике взаимодействующих осцилляторов [20]; начало вращения фазовой траектории вокруг центра (рис. 1, *б*) свидетельствует о наличии перемежаемости игольного ушка [20], в то время как перемежаемость кольца проявляется в охвате начала координат фазовой траекторией (см. [9]), как это показано на рис. 1, *в*.

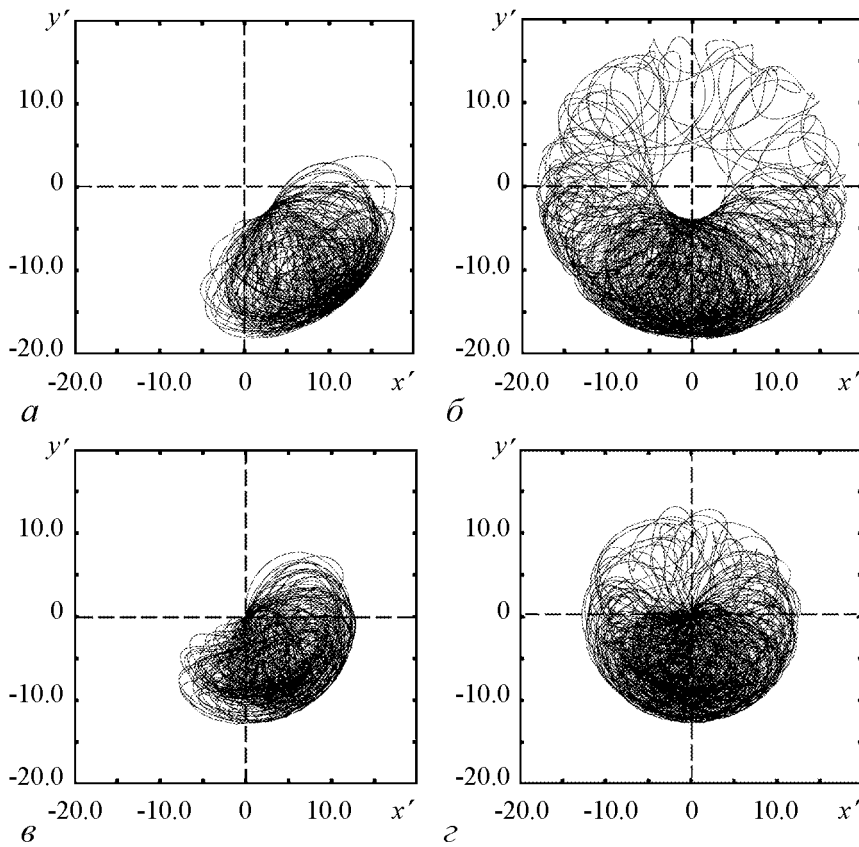


Рис. 1. Фазовая траектория ведомой системы на плоскости (x', y') , вращающейся вокруг начала координат: $a - \varepsilon = 0.045, s = 5.50$ – синхронный режим; $b - \varepsilon = 0.032, s = 5.50$ – перемежаемость игольного ушка; $v - \varepsilon = 0.045, s = 4.99$ – перемежаемость кольца; $z - \varepsilon = 0.032, s = 4.99$ – сосуществование двух типов перемежающегося поведения

Из рис. 1, $a-v$ видно, что можно выделить области значений параметра связи ε и временных масштабов, где наблюдается либо перемежаемость игольного ушка (см. рис. 1, b), либо перемежаемость кольца (см. рис. 1, v). Существуют также области значений параметра связи и временных масштабов, для которых оба данных явления наблюдаются одновременно (рис. 1, z). Это означает, что перемежаемость игольного ушка прерывается перемежаемостью кольца, и наоборот. Таким образом, наблюдается одновременное существование двух типов перемежаемостей. В этом режиме фазовая траектория на плоскости (x', y') вращается вокруг начала координат (что является проявлением перемежаемости игольного ушка) и время от времени охватывает начало координат, что свидетельствует о наличии перемежаемости кольца.

Плотности вероятности распределения длительностей ламинарных фаз, полученные численно для двух однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера (23), находящихся в режиме сосуществования перемежаемости игольного ушка и перемежаемости кольца, приведены на рис. 2 для трех различных наборов значений параметра связи ε и временного масштаба s , на котором осуществляется наблюдение. Поскольку механизмы, приводящие к перемежаемости кольца и перемежаемости игольного ушка, различаются, то, соответственно, можно разделить проскоки фазы, относящиеся к одному и другому типам перемежающегося поведения, после

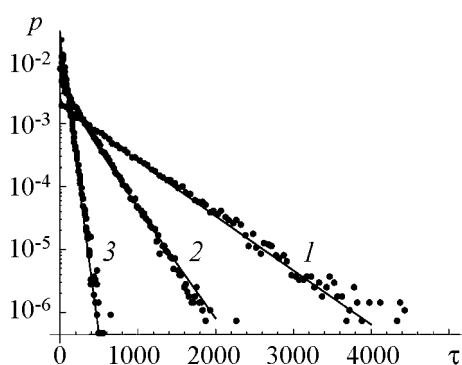


Рис. 2. Распределения длительностей ламинарных фаз для режима сосуществования перемежаемости игольного ушка и перемежаемости кольца для двух систем Ресслера (23) и аналитические зависимости (17), соответствующие этим распределениям (сплошные линии). Кривая 1 – $\varepsilon = 0.038$, $s = 4.980$, $T_r = 540.5$, $T_e = 17921.1$; кривая 2 – $\varepsilon = 0.036$, $s = 4.965$, $T_r = 322.6$, $T_e = 1666.7$; кривая 3 – $\varepsilon = 0.036$, $s = 4.870$, $T_r = 50.0$, $T_e = 1666.7$

Можно видеть, что полученное распределение длительностей ламинарных фаз очень хорошо согласуется с теоретической кривой (17). Точно такое же хорошее соответствие между теоретическими и численно полученными данными наблюдается и для других значений параметра связи и масштаба наблюдения (см. рис. 2, кривые 2, 3 и соответствующие им точки).

чего можно оценить значения T_r и T_e , входящие в теоретические соотношения (17), что позволяет сопоставить численно полученные данные с теоретическими предсказаниями. Для значения параметра связи $\varepsilon = 0.038$ и временного масштаба $s = 4.980$ значения средней длительности ламинарных фаз перемежаемости кольца и перемежаемости игольного ушка могут быть оценены как $T_r = 540.5$ и $T_e = 17921.1$, соответственно. Теоретическая плотность распределения длительностей ламинарных фаз $p(\tau)$, соответствующая значениям $\varepsilon = 0.038$ и $s = 4.980$, также показана на рис. 2 сплошной линией (кривая 1).

Заключение

Таким образом, можно считать установленным, что ниже границы фазовой синхронизации, при значении параметра связи между осцилляторами, соответствующем перемежаемости игольного ушка, могут быть также выделены временные масштабы, на которых, помимо перемежаемости игольного ушка будет наблюдаться перемежающееся поведение типа кольца. Иными словами, при определенных значениях параметра связи и на определенных временных масштабах оба процесса перемежаемости будут наблюдаться одновременно.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, Президентской программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ-3407.2010.2), Фонда некоммерческих программ «Династия».

Библиографический список

1. Dubois M., Rubio M., and Bergé P. Experimental evidence of intermitencies associated with a subharmonic bifurcation // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 51. P. 1446.
2. Boccaletti S. and Valladares D.L. Characterization of intermittent lag synchronization // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62, № 5. P. 7497.
3. Boccaletti S., Kurths J., Osipov G.V., Valladares D.L., and Zhou C.S. The synchronization of chaotic systems // Physics Reports. 2002. Vol. 366. P. 1.

4. *Hramov A.E. and Koronovskii A.A.* Intermittent generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic oscillators // *Europhysics Lett.* 2005. Vol. 70, № 2. P. 169.
5. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., and Levin Yu.I.* Synchronization of chaotic oscillator time scales // *JETP.* 2005. Vol. 127, № 4. P. 886.
6. *Bergé P., Pomeau Y., and Vidal Ch.* *L'ordre dans le chaos.* Hermann, Paris, 1988.
7. *Platt N., Spiegel E.A., and Tresser C.* On-off intermittency: a mechanism for bursting // *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 70, № 3. P. 279.
8. *Pikovsky A.S., Osipov G.V., Rosenblum M.G., Zaks M., and Kurths J.* Attractor–repeller collision and eyelet intermittency at the transition to phase synchronization // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79, № 1. P. 47.
9. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., and Boccaletti S.* Ring intermittency in coupled chaotic oscillators at the boundary of phase synchronization // *Phys. Rev. Lett.* 2006. Vol. 97. 114101.
10. *Rosa E., Ott E., and Hess M.H.* Transition to phase synchronization of chaos // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 80, № 8. P. 1642.
11. *Lee K.J., Kwak Y., and Lim T.K.* Phase jumps near a phase synchronization transition in systems of two coupled chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 81, № 2. P. 321.
12. *Grebogi C., Ott E., and Yorke J.A.* Fractal basin boundaries, long lived chaotic transients, and unstable–unstable pair bifurcation // *Phys. Rev. Lett.* 1983. Vol. 50, № 13. P. 935.
13. *Короновский А.А., Куровская М.К., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* Перемежаемость типа I в присутствии шума и перемежаемость игольного ушка // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2010. Т. 18, № 1. С. 24.
14. *Boccaletti S., Allaria E., Meucci R., and Arecchi F.T.* Experimental characterization of the transition to phase synchronization of chaotic CO_2 laser systems // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 89, № 19. 194101.
15. *Hramov A.E. and Koronovskii A.A.* An approach to chaotic synchronization // *Chaos.* 2004. Vol. 14, № 3. P. 603.
16. *Hramov A.E. and Koronovskii A.A.* Time scale synchronization of chaotic oscillators // *Physica D.* 2005. Vol. 206, № 3–4. P. 252.
17. *Hramov A.E. and Koronovskii A.A.* Generalized synchronization: a modified system approach // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 71, № 6. 067201.
18. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., and Moskalenko O.I.* Generalized synchronization onset // *Europhysics Letters.* 2005. Vol. 72, № 6. P. 901.
19. *Журавлев М.О., Куровская М.К., Москаленко О.И.* Метод выделения ламинарных и турбулентных фаз в перемежающихся временных реализациях систем, находящихся вблизи границы фазовой синхронизации // *Письма в ЖТФ.* 2010. Т. 36, № 10. С. 31.
20. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., and Kurovskaya M.K.* Two types of phase synchronization destruction // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 75, № 3, 036205.

INTERMITTENCY NEAR PHASE SYNCHRONIZATION BOUNDARY AT DIFFERENT TIME SCALES

M.O. Zhuravlev, A.A. Koronovskii, O.I. Moskalenko, A.E. Hramov

In this paper the results of the study of the intermittent behavior taking place near the phase synchronization boundary on the different time scales of the observation are given. It has been shown that below the phase synchronization boundary, in the area of eyelet intermittency there are time scales where the ring intermittency is also observed. In other words, for the certain values of the coupling strength and time scale of observation both types of the intermittent behavior take place simultaneously. In this paper the theory of this type of the intermittent behavior is developed.

Keywords: Intermittency, phase synchronization, chaotic oscillators, time scale, dynamical system.



Журавлев Максим Олегович – родился в 1988 году в Бресте, учится в Саратовском государственном университете им. Н.Г. Чернышевского. Параллельно с обучением работает лаборантом-исследователем в лаборатории №5 ОФНС НИИ ЕН СГУ. Автор 3 статей в центральных реферируемых журналах.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: pifos@bk.ru



Москаленко Ольга Игоревна – родилась в Саратове (1984). Окончила факультет нелинейных процессов Саратовского госуниверситета (2006), кандидат физико-математических наук (2008). Доцент кафедры физики открытых систем СГУ, старший научный сотрудник лаборатории физики нелинейных явлений отделения физики нелинейных систем НИИ Естественных наук СГУ. Область научных интересов – исследование классической и хаотической синхронизации в нелинейных системах; применение непрерывного вейвлет- и фурье-анализа к проблеме хаотической синхронизации в системах с малым числом степеней свободы и пространственно-распределенных средах; изучение обобщенной синхронизации в системах с однонаправленной и взаимной связью и ее возможных приложений; влияние шума на установление синхронных режимов; применение хаотической синхронизации для скрытой передачи информации; исследование кооперативных явлений в сетях со сложной топологией; анализ хаотической синхронизации в сложных сетях. Автор более 20 статей в центральных реферируемых отечественных и зарубежных научных журналах.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: moskalenko@nonlin.sgu.ru



НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА КОЛЬЦА ИЗ ТРЕХ ФАЗОВЫХ СИСТЕМ*

В.В. Матросов, А.В. Шмелев

Исследуется нелинейная динамика ансамбля, состоящего из трех фазоуправляемых генераторов, объединенных в кольцо. Путем численного моделирования, основанного на методах теории колебаний, исследуются режимы коллективного поведения генераторов ансамбля, в пространстве параметров выделяются области существования синхронных и квазисинхронных режимов, анализируются перестройки режимов на границах выделенных областей.

Ключевые слова: Ансамбли автогенераторов, фазовые системы, динамические режимы, синхронизация, квазисинхронизация, бифуркации, аттракторы, бифуркации.

Введение

Анализ связанных активных элементов является одной из актуальных задач современной нелинейной науки. Задачи изучения коллективной динамики возникают в различных областях знаний (физика, химия, биология, экономика, социология и т.д.). При изучении нелинейной динамики ансамблей с позиций теории колебаний прежде всего обращают внимание на динамику парциального элемента ансамбля и на способы объединения активных элементов в ансамбль, то есть на типы связей (линейные, нелинейные, локальные, нелокальные, резистивные, диссипативные и т.п.).

Среди активных элементов в особый класс можно выделить динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством, поскольку они обладают более разнообразным типом движений по сравнению с системами, определенными в декартовой системе координат [1]. Часто такие динамические системы называют фазовыми системами, поскольку в динамических уравнениях циклическая (угловая) координата, как правило, ассоциируется с фазой колебаний. Заметим, что при описании динамики нелинейных систем циклические переменные могут входить в них

*Статья написана по материалам конференции «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, 4–9 октября, 2010.

естественным образом, как, например, в задаче Жуковского о планирующем полете или при описании поведения маятника [2], фазоуправляемых генераторов [3, 4], джозефсоновского контакта [5, 6], так и в результате некоторых преобразований фазовых координат, в частности, при переходе к укороченным уравнениям в системах близких к гармоническому осциллятору [2], либо путем введения понятия фазы для колебаний систем, определенных в декартовой системе координат [7]. Независимо от способа введения фазы модели фазовых систем представляют огромный интерес для понимания общих закономерностей коллективного поведения ансамблей связанных активных элементов, в частности, явления синхронизации колебаний [7–9].

Как показывают исследования, коллективное поведение ансамблей определяется не столько динамикой парциального элемента, сколько структурой связей [10]. Причем многие эффекты коллективной динамики больших ансамблей начинают проявляться в ансамблях, состоящих из небольшого числа активных элементов [11, 12].

Настоящая работа продолжает начатые в [13, 14] исследования кольцевых соединений систем фазовой автоподстройки частоты (ФАП). Сейчас изучена динамика кольца из двух фазоуправляемых генераторов с фильтрами первого порядка. Установлено, что в результате такого объединения у генераторов появляются новые динамические режимы (квазисинхронный и хаотических биений), несвойственные парциальному элементу. Показано, что введение дополнительных связей через сигналы фазовых рассогласований позволяет не только управлять свойствами автоколебательных режимов, но и повышает устойчивость синхронного режима. Здесь рассматривается коллективное поведение ансамбля из трех элементов с регулярной динамикой в отсутствие дополнительных связей. Особое внимание уделяется эффектам, связанным с ростом числа активных элементов в ансамбле.

1. Математические модели ансамбля

Уравнения динамики кольца из $n \geq 3$ систем ФАП и при наличии локальных дополнительных связей через сигналы фазовых рассогласований в символической записи имеют следующий вид [13]:

$$\frac{p\varphi_i}{\Omega_1} = \frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\Omega_1} - b_i K_i(p)[F(\varphi_i) + \kappa_{i+1} F(\varphi_{i+1})] + b_{i-1} K_{i-1}(p)[F(\varphi_{i-1}) + \kappa_i F(\varphi_i)]. \quad (1)$$

Здесь $p = d/dt$; $\varphi_i(t) = \theta_i(t) - \theta_{i-1}(t)$, где $\theta_i(t)$ – фаза колебаний i -го генератора; ω_i – свободная частота колебаний i -го генератора; $K_i(p)$ – операторный коэффициент передачи фильтра; $b_i = \Omega_i/\Omega_1$; Ω_i – максимальная расстройка частот, которую способна скомпенсировать цепь управления ФАП $_i$; $F(\varphi_i)$ – нормированная характеристика фазовых дискриминаторов; κ_i – параметр дополнительных связей ($i = \overline{1, n}$; $i=0=n$; $i=n+1=1$). Конкретный вид динамических уравнений получается из уравнений (1) при определении в них коэффициентов фильтров и характеристик дискриминаторов. В случае объединения в кольцо трех идентичных систем ФАП (с одинаковыми полосами удержания $b_1=b_2=1$ и одинаковыми фильтрами первого порядка – $K(p) = (1 + Tp)^{-1}$, где T – постоянные времени фильтров) с синусоидальной характеристикой фазовых дискриминаторов из (1) получаем следующую

систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\varphi_1}{d\tau} &= y_1, \\
 \varepsilon \frac{dy_1}{d\tau} &= \gamma_1 - y_1 - (1 - \kappa_1) \sin \varphi_1 - \kappa_2 \sin \varphi_2 - \sin(\varphi_1 + \varphi_2), \\
 \frac{d\varphi_2}{d\tau} &= y_2, \\
 \varepsilon \frac{dy_2}{d\tau} &= \gamma_2 - y_2 + \sin \varphi_1 - (1 - \kappa_2) \sin \varphi_2 + \kappa_3 \sin(\varphi_1 + \varphi_2),
 \end{aligned} \tag{2}$$

описывающую динамические процессы рассматриваемого ансамбля. Система (2) определена в четырехмерном цилиндрическом фазовом пространстве $U: \{\varphi_1(\text{mod } 2\pi), y_1, \varphi_2(\text{mod } 2\pi), y_2\}$ с двумя циклическими переменными φ_1 и φ_2 . Здесь $\tau = \Omega_1 t$ – безразмерное время, $\varphi_1(\varphi_2)$ – разности фаз колебаний первого и третьего (второго и первого) генераторов, $y_1(y_2)$ – соответствующие разности частот. В (2) все параметры безразмерные: $\gamma_1 = (\omega_1 - \omega_3)/\Omega_1$ и $\gamma_2 = (\omega_2 - \omega_1)/\Omega_1$ – относительные начальные частотные расстройки, $\varepsilon = \Omega_1 T$ – инерционность фильтров, $\kappa_{1,2,3}$ – дополнительные связи. Из модели (2) исключены уравнения, описывающие поведение фазовой переменной φ_3 , поскольку $\varphi_3 = -(\varphi_2 + \varphi_1)$. Задачей исследования динамики ансамбля по модели (2) является: анализ особых траекторий модели (2), в частности, аттракторов; установление соответствия между аттракторами и динамическими режимами ансамбля; изучение бифуркаций аттракторов; выделение в пространстве параметров областей с различным динамическим поведением. Ниже представлены результаты такого исследования [15–17].

2. Классификация динамических режимов ансамбля

Между аттракторами модели (2) и динамическими режимами рассматриваемого ансамбля существует взаимно однозначное соответствие. Наличие у модели (2) двух циклических координат приводит к большому разнообразию допустимых режимов коллективного поведения ансамбля. Для динамических режимов ансамбля введем следующую классификацию, связав ее с типом аттрактора в фазовом пространстве математической модели (2).

- *Устойчивое состояние равновесия* O_1 с координатами $\varphi_1^*, y_1^*, \varphi_2^*, y_2^*$ обуславливает режим *синхронизации* генераторов ансамбля. В этом режиме частоты колебаний генераторов равны, рассогласования колебаний по фазе характеризуют координаты $\varphi_1^*, \varphi_2^*, \varphi_3^* = -(\varphi_1^* + \varphi_2^*)$. Значения $\varphi_1^*, \varphi_2^*, \varphi_3^*$ определяют фазовые ошибки режима синхронизации.

- *Колебательный аттрактор* – аттрактор, ограниченный по фазовым координатам φ_1 и φ_2 , обуславливает режим *глобальной квазисинхронизации* генераторов ансамбля. В этом режиме частоты колебаний генераторов ансамбля различаются, но равны нулю усредненные разности частот колебаний любых генераторов ($\langle y_1 \rangle = \langle y_2 \rangle = 0, \langle y_3 \rangle = \langle y_1 \rangle + \langle y_2 \rangle = 0$). Колебательные аттракторы модели (2) могут быть регулярными (предельные циклы), квазирегулярными (инвариантные торы) и хаотическими. Отсюда режимы глобальной квазисинхронизации подразделя-

ются на *регулярные, квазирегулярные и хаотические режимы глобальной квазисинхронизации*.

- *Колебательно-вращательный аттрактор* – аттрактор, ограниченный по фазовой координате φ_1 или φ_2 , обуславливает режим *частичной квазисинхронизации* генераторов ансамбля. Этот режим характеризуется обращением в ноль усредненных разностей частот колебаний отдельных пар генераторов ($\langle y_1 \rangle = 0, \langle y_2 \rangle = 0$). Также как колебательные аттракторы колебательно-вращательные аттракторы модели (2) могут быть регулярными, квазирегулярными и хаотическими. Аналогично режиму глобальной квазисинхронизации режимы частичной квазисинхронизации подразделяются на *регулярные, квазирегулярные и хаотические режимы частичной квазисинхронизации*.

- *Вращательный аттрактор* – аттрактор, неограниченный ни по координате φ_1 , ни по координате φ_2 , определяет асинхронный режим или *режим биений*. Вращательные аттракторы модели (2) могут быть регулярными, квазирегулярными или хаотическими, следовательно определяют *регулярные, квазирегулярные или хаотические режимы биений*.

- Особенностью рассматриваемого ансамбля является то, что разность частот y_3 колебаний первого и третьего генераторов определяется равенством $y_3 = -(y_1 + y_2)$, из которого следует, что усредненная разность частот $\langle y_3 \rangle = -(\langle y_1 \rangle + \langle y_2 \rangle)$ может обращаться в ноль при $\langle y_1 \rangle \neq 0$ и $\langle y_2 \rangle \neq 0$, если $\langle y_1 \rangle = -\langle y_2 \rangle$. Вращательные аттракторы модели (2), на которых переменные φ_1 и φ_2 вращаются в среднем с одинаковой скоростью, но в разных направлениях, соответствуют режиму частичной квазисинхронизации, в частности, первого и третьего генераторов ансамбля. Установленное выше соответствие между динамическими режимами коллективного поведения ансамбля и аттракторами модели (2) позволяет перейти к анализу динамики ансамбля посредством изучения особых траекторий в фазовом пространстве U и анализу бифуркаций этих движений в зависимости от параметров модели. Далее рассматривается случай, когда дополнительные связи по цепям управления отсутствуют ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 0$).

3. Динамика ансамбля генераторов с малоинерционными цепями управления

Допустим, что цепи управления систем ФАП являются малоинерционными, то есть модель (2) имеет малый параметр при производных dy_1/dt и dy_2/dt ($\varepsilon \ll 1$). В этом случае движения в фазовом пространстве U разделяются на «быстрые» и «медленные». Поверхность медленных движений V , определяемая уравнениями

$$Q_1(\varphi_1, \varphi_2, y_1) \equiv \gamma_1 - y_1 - \sin \varphi_1 - \sin(\varphi_1 + \varphi_2) = 0, \quad (3)$$

$$Q_2(\varphi_1, \varphi_2, y_2) \equiv \gamma_2 - y_2 + \sin \varphi_1 - \sin \varphi_2 = 0,$$

устойчива, так как

$$\frac{\partial Q_1(\varphi_1, \varphi_2, y_1)}{\partial y_1} + \frac{\partial Q_2(\varphi_1, \varphi_2, y_2)}{\partial y_2} = -2 < 0,$$

$$\frac{\partial Q_1(\varphi_1, \varphi_2, y_1)}{\partial y_1} \frac{\partial Q_2(\varphi_1, \varphi_2, y_2)}{\partial y_2} - \frac{\partial Q_1(\varphi_1, \varphi_2, y_1)}{\partial y_2} \frac{\partial Q_2(\varphi_1, \varphi_2, y_2)}{\partial y_1} = 1 > 0.$$

Поведение системы (2) в малой окрестности V описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dt} &= \gamma_1 - \sin \varphi_1 - \sin(\varphi_1 + \varphi_2), \quad (4) \\ \frac{d\varphi_2}{dt} &= \gamma_2 + \sin \varphi_1 - \sin \varphi_2, \end{aligned}$$

определенной на фазовом торе $U_1: \{\varphi_1(\text{mod } 2\pi), \varphi_2(\text{mod } 2\pi)\}$ и зависящей от параметров γ_1 и γ_2 . Исследование особых траекторий проведено путем компьютерного моделирования с использованием комплекса программ ДНС [18], реализующего алгоритмы, базирующиеся на качественной теории динамических систем и теории бифуркаций.

На рис. 1 приведено разбиение плоскости параметров (γ_1, γ_2) модели (4) на области с различным динамическим поведением. Здесь пунктирной линией выделена область D_S существования состояний равновесия. Внутри этой области система (4) может иметь шесть, четыре или два состояния равновесия. Области с различным числом состояний равновесия разделены штрихпунктирными линиями. При нулевых частотных расстройках $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ система (4) имеет шесть состояний равновесия (рис. 2, а): O_1 – устойчивое; O_2, O_4, O_6 – седловые; O_3, O_5 – полностью неустойчивые. С увеличением начальных частотных расстройок число состояний равновесия в системе (4) уменьшается сначала до четырех, потом до двух. При выходе из области с шестью состояниями равновесия: через штрихпунктирную *линию 1* происходит слияние и исчезновение состояний равновесия O_2 и O_3 ; *линию 2* – O_4 и O_5 ; *линию 3* – O_6 и O_3 ; *линию 4* – O_2 и O_5 ; *линию 5* – O_4 и O_3 ; *линию 6* – O_6 и O_5 . Таким образом, внутри области D_S бифуркации состояний равновесия не затрагивают устойчивого состояния равновесия O_1 , определяющего синхронный режим работы ансамбля. Область D_S является областью существования синхронного режима. Эти бифуркации перераспределяют фазовые потоки, тем самым влияют на длительность переходных процессов к режиму синхронизации.

Движения на торе, каким является фазовое пространство модели (4), принято характеризовать числом вращения ν [19], которое для периодических траекторий либо рационально, либо равно $\pm\infty$, для квазипериодических траекторий число ν иррационально. Число вращения можно представить в виде отношения двух чисел $\nu = i/j$, где i и j определяют число оборотов, совершаемых фазовой траекторией по переменным φ_1 и φ_2 . Нарастание переменных φ_1 и φ_2 характеризуют положительные значения i и j , убывание – отрицательные. Таким образом, числа вращения устойчивых предельные циклов, определяющих регулярный режим частичной квазисинхронизации, имеют следующие значения: $\nu = 0/1, 0/-1, 1/0, -1/0, 1/-1, -1/1$. На рис. 1 серым цветом выделены области параметров, где существуют режимы частичной квазисинхронизации. Фазовые портреты модели (4) для значений параметров из областей существования квазисинхронных режимов представлены на рис. 2, б, в, д, е, з, и. Система (4) инвариантна относительно преобразования $\Pi: (\gamma_1, \gamma_2, \varphi_1, \varphi_2) \rightarrow (-\gamma_1, -\gamma_2, -\varphi_1, -\varphi_2)$, поэтому фазовые портреты приведены лишь

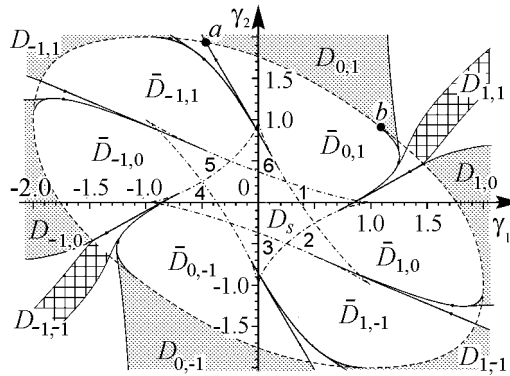


Рис. 1. Структура плоскости параметров (γ_1, γ_2) модели (4)

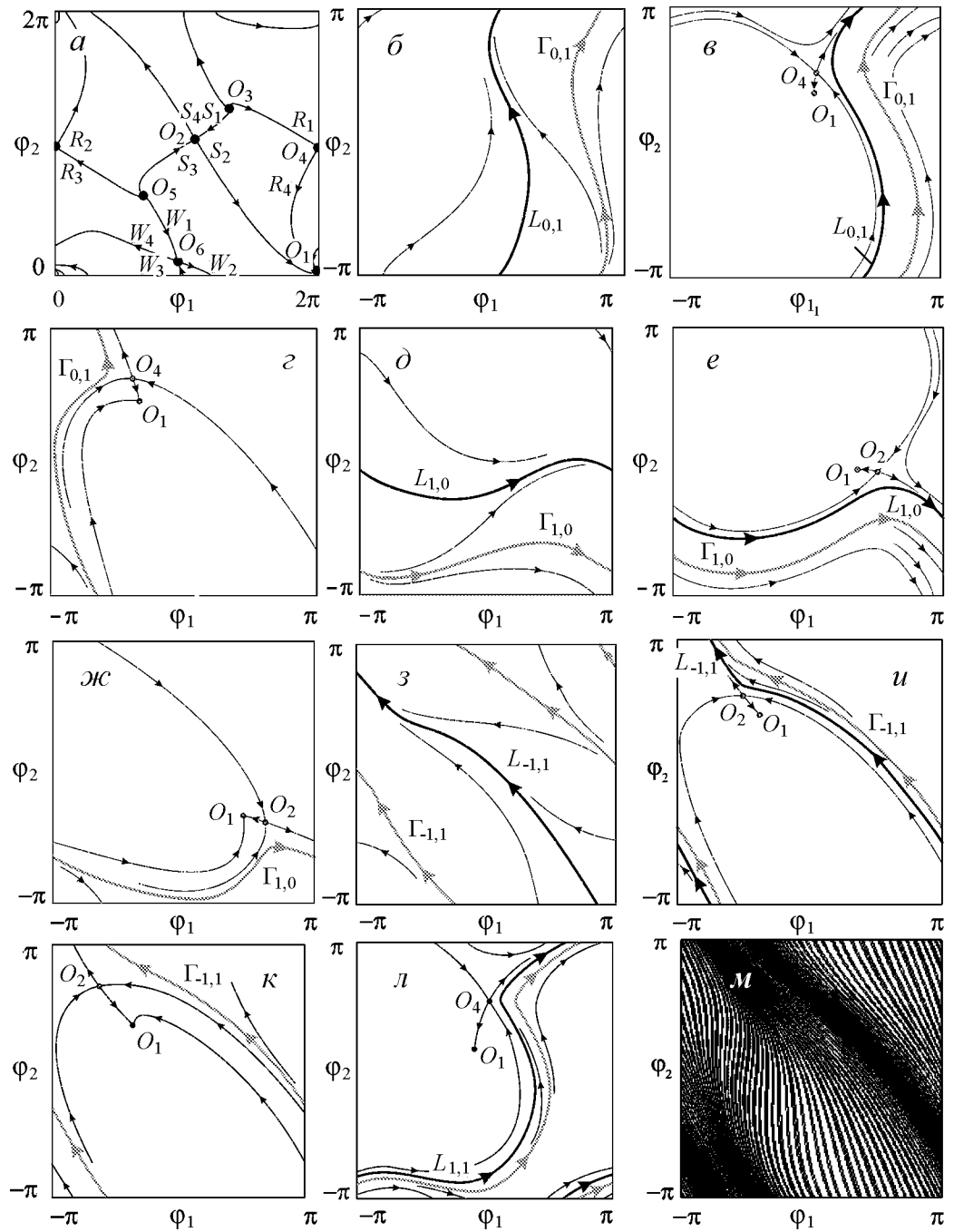


Рис. 2. Фазовые портреты модели (4) в областях D_Z (а), $D_{0,1}$ (б,в), $\bar{D}_{0,1}$ (г), $D_{1,0}$ (д,е), $\bar{D}_{1,0}$ (ж), $D_{1,-1}$ (з,и), $\bar{D}_{1,-1}$ (к), $D_{1,1}$ (л), квазирегулярного режима биений (м)

для областей расположенных в области положительных значений γ_1 . Области существования режимов частичной квазисинхронизации имеют одинаковую структуру, их границами служат бифуркационные кривые петель сепаратрис седла и седло-узлов, а также двукратных предельных циклов [20].

Рассмотрим структуру областей существования режимов частичной квазисинхронизации и трансформацию соответствующих этим областям фазовых портретов

на примере области $D_{0,1}$ (см. рис. 1). При значениях параметров вне области D_S фазовый портрет системы (4) содержит два предельных цикла: устойчивый $L_{0,1}$ и неустойчивый $\Gamma_{0,1}$ (см. рис. 2, б). При выходе из области $D_{0,1}$ через левую или правую границу предельные циклы сливаются и исчезают в результате касательной бифуркации. При выходе из области $D_{0,1}$ через пунктирную линию, между точками a и b , в результате бифуркации петли сепаратрис седло-узла исчезает цикл $L_{0,1}$, неустойчивый цикл $\Gamma_{0,1}$ сохраняется (см. рис. 2, б). Из бифуркационного анализа следует, что области квазисинхронных режимов могут проникать в область D_S , порождая тем самым области с бистабильным поведением – совместного существования синхронного и квазисинхронного режимов. Области бистабильного поведения имеют клинообразный вид, границами этих областей служат бифуркационные кривые «устойчивых» петель сепаратрис (с отрицательной седловой величиной $\sigma < 0$) и двукратного предельного цикла, которые соединяются в точке, где $\sigma = 0$. На рис. 1 точки, где седловая величина σ обращается ноль, отмечены звездочкой.

На рис. 1 отмечены области $\bar{D}_{0,1}$, $\bar{D}_{0,-1}$, $\bar{D}_{-1,1}$, $\bar{D}_{1,-1}$, $\bar{D}_{1,0}$, $\bar{D}_{-1,0}$, где в фазовом пространстве модели (4) состояния равновесия существуют совместно с неустойчивыми предельными циклами (рис. 2, г, ж, к). Отмеченные области ограничены бифуркационными кривыми «неустойчивых» ($\sigma > 0$) петель сепаратрис седловых или седло-узловых состояний равновесия. Неустойчивые циклы не оказывают влияния на устойчивость системы, их роль в динамике модели (4) сводится к распределению фазовых потоков, а в ансамбле – к влиянию на процессы установления режима синхронизации. Вне областей D_S , $D_{0,1}$, $D_{0,-1}$, $D_{-1,1}$, $D_{1,-1}$, $D_{1,0}$, $D_{-1,0}$ в фазовом пространстве модели (4) существуют периодические и квазипериодические движения, соответствующие регулярным и квазирегулярным режимам биений. На рис. 1 штриховкой выделены области $D_{1,1}$ и $D_{-1,-1}$ существования устойчивых вращательных предельных циклов $L_{1,1}$ и $L_{-1,-1}$. На рис. 2, л приведен фазовый портрет, характерный для области $D_{1,1}$; видно, что регулярные асинхронные режимы могут существовать совместно с синхронным режимом. Области асинхронных режимов узкими клиньями проникают в область D_S . Структура таких клиньев аналогична структуре областей совместного существования синхронных и квазисинхронных режимов – их границами служат бифуркационные кривые устойчивых петель сепаратрис и двойных предельных циклов, исходящих из точки, где $\sigma = 0$.

4. Влияние параметров инерционности на динамику ансамбля

В отсутствие дополнительных связей динамика рассматриваемого ансамбля зависит от трех параметров γ_1, γ_2 и ε . Зафиксируем $\gamma_1 = 0$ и рассмотрим эволюцию аттракторов системы (4), а также областей их существования при увеличении параметра ε (рис.3). При $\gamma_1 = 0$, $\varepsilon \ll 1$ в фазовом пространстве модели (4) могут реализоваться два типа аттракторов: состояние равновесия O_1 и предельный цикл $L_{0,1}$.

Координаты состояний равновесия модели (2) не зависят от параметра ε , поэтому число состояний равновесия и области их существования у моделей (2) и (4) совпадают (см. рис. 1). Однако область D_S существования синхронного режима при увеличении ε видоизменяется, эти изменения обусловлены сменой устойчивости

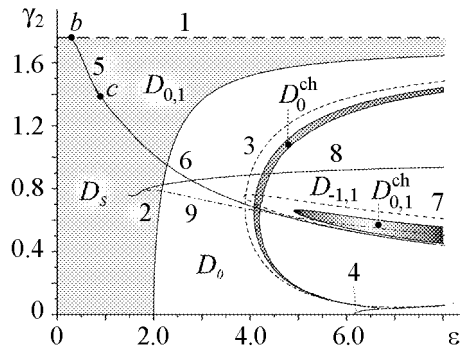


Рис. 3. Структура плоскости параметров (ϵ, γ_2) модели (2) при $\gamma_1 = 0$

Область синхронизации D_S , где состояние равновесия O_1 модели (2) локально устойчиво, с одной стороны ограничена бифуркационной кривой двукратного состояния равновесия (штриховая линия 1), с другой стороны – сплошной линией 2.

При увеличении ϵ устойчивый предельный цикл L_0 трансформируется в колебательный хаотический аттрактор S_0 . Хаотизация L_0 может развиваться по двум сценариям. Один сценарий определяется каскадом бифуркаций удвоения периода цикла L_0 , другой – разрушением двумерного инвариантного тора T_0 , который появляется при смене устойчивости цикла L_0 в результате бифуркации Неймарка–Саккера. На рис.3 отмечены области D_0 и D_0^{ch} существования регулярного и хаотического колебательных аттракторов, пунктирная линия 3 отражает первую бифуркацию удвоения периода цикла L_0 , линия 4 – бифуркацию Неймарка–Саккера. На рис. 4 приведены проекции колебательных аттракторов модели (2) при $\gamma_1=0$: инвариантного тора T_0 (рис.4, а) и хаотических аттракторов S_0 с ляпуновской размерностью $D_L = 2.04$ (рис. 4, б), $D_L = 3.14$ (рис. 4, в) и $D_L = 2.33$ (рис. 4, г). Аттракторы на рис. 4, б, в являются результатом разрушения инвариантного тора; на рис. 4, г – бифуркаций удвоения периода цикла L_0 . Дальнейшее увеличение ϵ приводит к разрушению хаотического колебательного аттрактора и переходу (2) на колебательно-вращательный или вращательный аттракторы, то есть в ансамбле режим хаотической глобальной квазисинхронизации сменяется режимом частичной квазисинхронизации или режимом биений.

Колебательно-вращательные аттракторы типа $[0,1]$ (с индексом вращения $[0,1]$) [11] существуют в области $D_{0,1}$. Эта область ограничена бифуркационными кривыми: петли сепаратрис седло-узла – линия 1, расположенная слева от точки b ; устойчивой петли сепаратрис седла (седло-фокуса) O_4 – линия 5; двукратного колебательно-вращательного предельного цикла – линия 6. При изменении параметров вдоль линии 5 седловая величина седло-фокуса O_4 в точке C обращается в ноль. Согласно [21] параметрический портрет (2) содержит бесконечное число бифуркационных линий, отвечающих кратным циклам и многообходным петлям сепаратрис. Эти линии сходятся сложным образом к точке C . В численном эксперименте удалось зафиксировать несколько различных линий. Одна из обнаруженных бифуркационных кривых двукратного предельного цикла (крайняя) выбрана в качестве границы области $D_{0,1}$ (линия 6). Часть кривой, соответствующей бифуркации петли сепаратрис

состояния равновесия O_1 . Смена устойчивости O_1 происходит в результате бифуркации Андронова–Хопфа на линии 2 (см. рис. 3). Первая ляпуновская величина на бифуркационной кривой отрицательна, поэтому с ростом ϵ при пересечении линии 2 в фазовом пространстве модели (2) мягко рождается устойчивый колебательный предельный цикл L_0 . В результате в ансамбле синхронный режим сменяет регулярный режим глобальной квазисинхронизации.

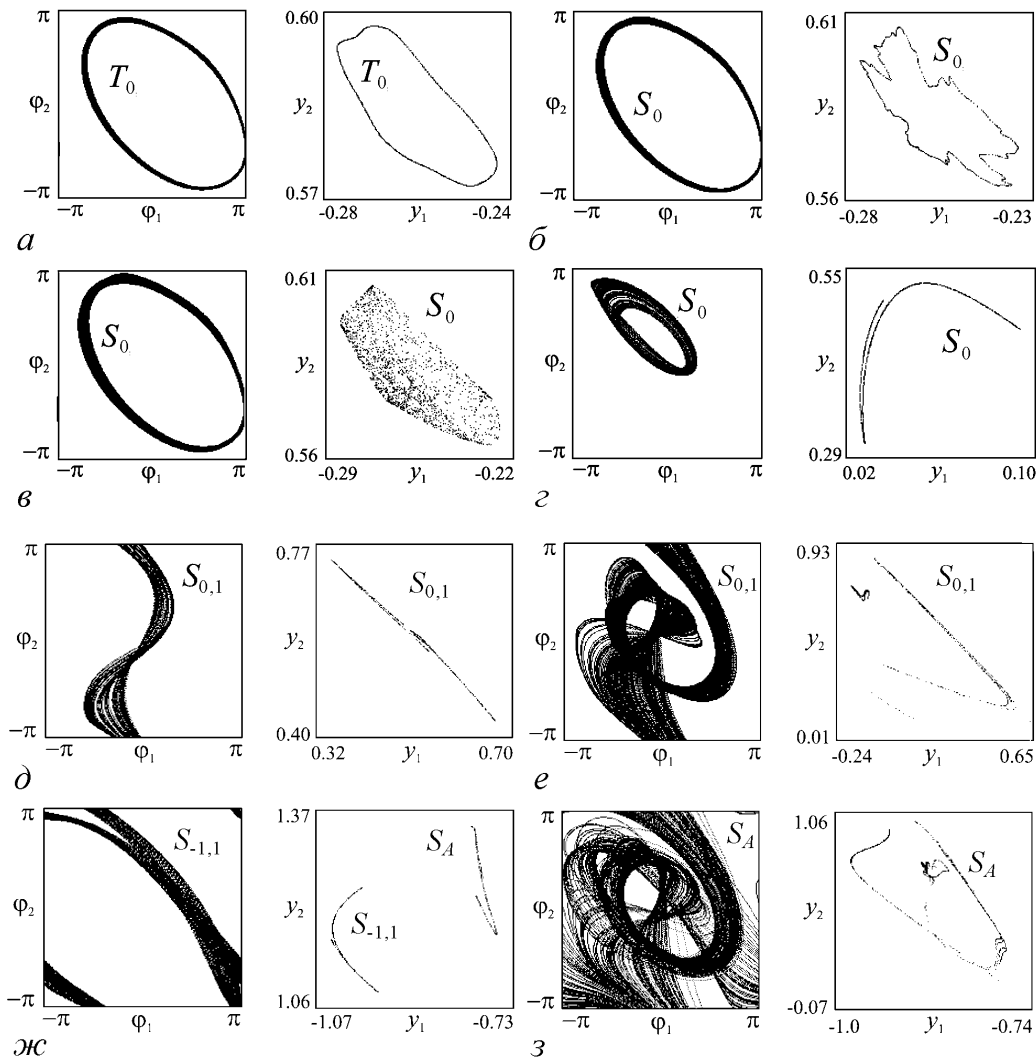


Рис. 4. Проекция фазовых портретов и отображений Пуанкаре аттракторов модели (2), соответствующие квазисинхронным режимам: глобальным квазирегулярным при $\gamma_2 = 0.04$, $\varepsilon = 0.7$ (а); глобальным хаотическим при $\gamma_2 = 0.04$, $\varepsilon = 0.704$, 0.707 (б, в); $\gamma_2 = 0.9$, $\varepsilon = 4.35$ (г); хаотическим типа $[0,1]$ при $\gamma_2 = 0.626$, $\varepsilon = 6$, (д) и $\gamma_2 = 0.322$, $\varepsilon = 9.15$ (е); хаотическим типа $[-1,1]$ при $\gamma_2 = 0.606$, $\varepsilon = 4$ (жэ); хаотическому режиму биений при $\gamma_2 = 0.2$, $\varepsilon = 7.6$ (з)

седло-фокуса с положительной седловой величиной, проходит внутри области $D_{0,1}$. Согласно [22], в окрестности гомоклинической траектории существует нетривиальное гиперболическое множество, содержащее счетное число периодических движений. Кроме седловых движений, здесь также существуют устойчивые периодические движения, смена устойчивости которых сопровождается бифуркацией рождения периодического решения удвоенного периода. Таким образом, при значениях параметров из области $D_{0,1}$ в фазовом пространстве могут реализоваться различные предельные циклы типа $[0,1]$. Эти предельные циклы в результате каскада бифуркаций удвоения периода могут трансформироваться в хаотические аттракторы $S_{0,1}$ типа $[0,1]$. На рис. 4, д, е представлены проекции хаотических аттракторов типа $[0,1]$, сформированные на базе разнообразных предельных циклов типа $[0,1]$. Хаотические аттракторы $S_{0,1}$ на рис. 4, д и рис. 4, е имеют соответственно размерности $D_L = 2.61$ и $D_L = 2.56$.

В области $D_{-1,1}$ существуют аттракторы типа $[-1,1]$. Сверху эту область ограничивает линия 8 – двукратного предельного цикла. При пересечении этой линии сверху вниз в фазовом пространстве U рождается устойчивый предельный цикл $L_{-1,1}$, который при уменьшении γ_2 через серию бифуркаций удвоения периода трансформируется в хаотический аттрактор $S_{-1,1}$ (рис. 4, ж). При дальнейшем уменьшении γ_2 хаотический аттрактор разрушается и система (2) в зависимости от параметров переходит либо на режимы, описанные выше, либо на режимы биений. На рис. 3 штрих-пунктирная линия 9 отвечает за первую бифуркацию удвоения периода цикла $L_{-1,1}$. Области существования циклов $L_{-1,1}^{(2)}$ удвоенного, $L_{-1,1}^{(4)}$ учетверенного и периодов большей кратности, также как и хаотического аттрактора $S_{-1,1}$, в рассматриваемом случае малы, поэтому они на рис. 3 не выделены. Рис. 5 дает представление о структуре пространства параметров модели (2) в сечении плоскостью (γ_1, γ_2) . При рассмотренном значении $\varepsilon = 4.3$ динамика ансамбля характеризуется высокой степенью мультистабильности, поэтому разбиение плоскости (γ_1, γ_2) представлено в виде двух отдельных картин: для синхронного режима и режимов глобальной квазисинхронизации (рис. 5, а), и для режимов частичной квазисинхронизации и режимов биений (рис. 5, б). Объединение рисунков определяет структуру пространства параметров ансамбля из трех фазовых систем с инерционными цепями управления. Обозначения областей и кривых на рис. 5 аналогичны обозначениями, принятым на рис. 3. Отметим некоторые особенности динамики ансамбля, обусловленные инерционностью цепей управления систем ФАП (параметр ε).

Увеличение инерционности приводит к смене устойчивости синхронного режима и возникновению режима регулярной глобальной квазисинхронизации. Область существования режима глобальной квазисинхронизации на плоскости начальных частотных расстройк зарождается в точке нулевых частотных расстройк и далее распространяется к границам области существования состояний равновесия, повторяя ее форму (см. рис. 5, а). В результате область D_S существования синхронного режима приобретает форму кольца, которое сужается с ростом ε .

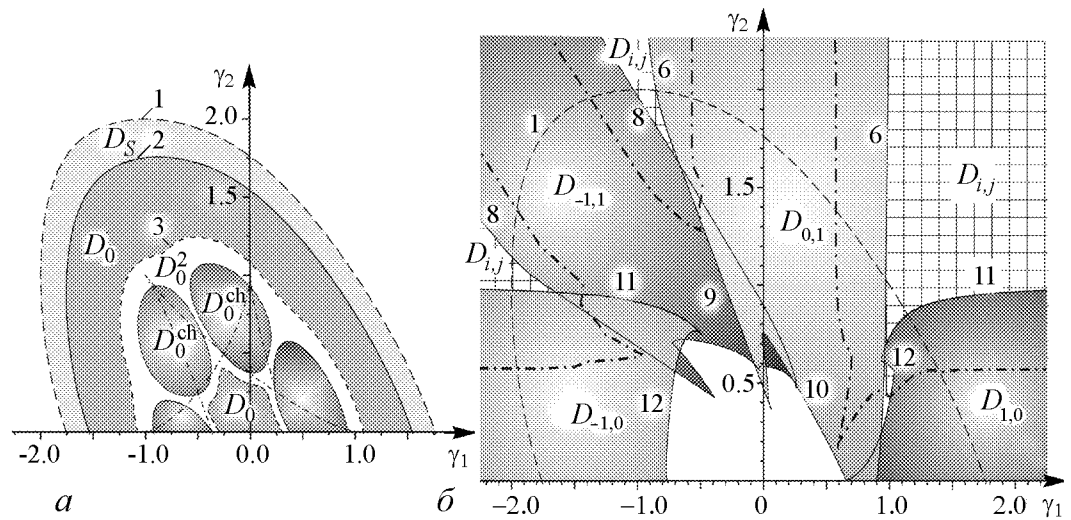


Рис. 5. Структура плоскости параметров (γ_1, γ_2) модели (2) при $\varepsilon = 4.3$: области существования синхронного режима и режимов глобальной квазисинхронизации (а); области существования режимов частичной квазисинхронизации и режимов биений (б)

Режим регулярной глобальной квазисинхронизации с ростом ε теряет устойчивость в результате бифуркации удвоения периода. Каскад бифуркаций удвоения периода приводит к возникновению режима хаотической глобальной квазисинхронизации. Область существования режима хаотической глобальной квазисинхронизации на плоскости (γ_1, γ_2) сначала имеет форму кольца, которое при увеличении ε преобразуется в шесть изолированных областей D_0^{ch} (см. рис. 5, а). Здесь D_0 есть области существования режима регулярной глобальной квазисинхронизации.

Изменения областей $D_{0,1}, D_{0,-1}, D_{-1,1}, D_{1,-1}, D_{1,0}$ и $D_{-1,0}$ частичной регулярной квазисинхронизации с ростом ε аналогичны. Во-первых, они увеличиваются в размере; во-вторых, все больше проникают в область существования состояний равновесия; наконец, области существования квазисинхронных режимов различных типов, а также асинхронных режимов начинают пересекаться, порождая высокую степень мультистабильности. Следует обратить внимание еще на один факт, который усложняет коллективную динамику ансамбля. Ранее, при $\varepsilon \ll 1$, области $\bar{D}_{0,1}, \bar{D}_{0,-1}, \bar{D}_{-1,1}, \bar{D}_{1,-1}, \bar{D}_{1,0}$ и $\bar{D}_{-1,0}$ отвечали за существование неустойчивых циклов $\Gamma_{0,1}, \Gamma_{0,-1}, \Gamma_{-1,1}, \Gamma_{1,-1}, \Gamma_{1,0}$ и $\Gamma_{-1,0}$, соответственно. Эти области были ограничены бифуркационными кривыми петель сепаратрис седел (седло-узлов) с положительной седловой величиной. Выход из этих областей не приводил к возникновению новых аттракторов, а лишь обуславливал перераспределение фазовых потоков и изменения в переходных процессах к режиму синхронизации. Увеличение $\varepsilon 1$ превращает седла в седло-фокусы, что, согласно [23], влечет за собой появление в пространстве параметров новых бифуркационных кривых, а в фазовом пространстве – сложной динамики, вплоть до хаотической. При ε не малых границы областей существования квазисинхронных режимов имеют сложную структуру, обусловленную большим количеством аттракторов одного типа (с одинаковым индексом вращения). На рис. 5, б такими границами являются *линии 9, 10, 12*. Эти линии не связаны с какой-либо бифуркацией аттрактора системы (2), а являются интегральной оценкой области существования колебательно-вращательных аттракторов, либо вращательных аттракторов типа $[1,-1]$ или $[-1,1]$.

Области существования режимов биений $D_{i,j}$ с ростом ε расширяются, пересекаются между собой и все глубже проникают в области существования квазисинхронных и синхронных режимов. На рис. 5, б границы областей существования режимов биений проведены штрих-пунктирными линиями, а сами области отмечены штриховкой. Эволюция областей существования предельных циклов $L_{i,j}$ аналогична трансформациям областей существования периодических движений, определяющих режимы частичной квазисинхронизации.

Заключение

Рассмотрена динамика кольцевого соединения трех фазовых систем. Установлено соответствие между режимами коллективного поведения ансамбля и аттракторами динамической модели. В пространстве параметров выделены области с различным динамическим поведением. Изучены бифуркационные механизмы возникновения режимов глобальной и частичной квазисинхронизации, сценарии хаотизации

регулярных колебаний. Показано, что рассматриваемый ансамбль обладает высокой степенью мультистабильности и демонстрирует гистерезисные явления при вариациях параметров.

Заметим, что рассмотренное кольцо из трех фазоуправляемых генераторов с фильтрами первого порядка без дополнительных связей, в рамках введенной классификации динамических режимов, демонстрирует все возможные типы режимов: синхронные, регулярные и хаотические режимы глобальной и частичной квазисинхронизации, регулярные и хаотические режимы биений. Следовательно, введение дополнительных связей, а также увеличение числа элементов ансамбля не будет характеризоваться появлением новых режимов.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 10-02-00865, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (контракты № П2308, № 02.740.11.0565, № 02.740.11.0075).

Библиографический список

1. Барбашин Е.А., Табуева В.А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969.
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.
3. Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А. Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972.
4. Линдсей В. Системы синхронизации в связи и управлении / Пер. с англ. под ред. Ю.Н. Бакаева и М.В. Капранова. М.: Сов. радио, 1978.
5. Бароне А., Патерно Дж. Эффект Джозефсона: Физика применения / Пер. с англ. М.: Мир, 1984.
6. Лихарев К.К. Введение в динамику джозефсоновских переходов. М.: Наука, 1985.
7. Пиковский А., Роземблум М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
8. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Стрелкова Г.И. Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008.
9. Кузнецов А.П., Емельянова Ю.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В. Синхронизация в задачах. Саратов: ООО Изд. центр «Наука», 2010.
10. Афраймович В.С., Некоркин В.И., Осипов Г.В., Шалфеев В.Д. Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации. Горький: Изд-во ИПФАН, 1989.
11. Матросов В.В., Касаткин Д.В. Динамические режимы связанных генераторов с фазовым управлением // Радиотехника и электроника. 2003. Т. 48, № 6. С. 637.
12. Крюков А.К., Осипов Г.В., Половинкин А.В. Мультистабильность синхронных режимов в ансамблях идентичных осцилляторов: два элемента // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 2. С. 16.

13. *Матросов В.В., Шмелев А.В.* Нелинейная динамика ансамбля из двух фазоуправляемых генераторов с кольцевым типом объединения // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 4. С. 67.
14. *Матросов В.В., Шмелев А.В.* Особенности динамики кольцевого соединения двух фазовых систем, синхронизованных в противофазе // Вестник ННГУ. 2011. № 1. С.12
15. *Шмелев А.В., Матросов В.В.* Синхронные и квазисинхронные режимы кольцевого соединения трех фазовых систем // Тезисы докладов конференции молодых ученых. Фундаментальные и прикладные задачи нелинейной физики. XV Научная школа «Нелинейные волны – 2010». Н.Новгород, 2010. С. 134.
16. *Шмелев А.В., Матросов В.В.* Бифуркационный анализ динамики трех фазовых систем, объединенных в кольцо // Труды 14-й Научной конференции по радиоп физике, посвященная 80-й годовщине со Дня рождения Ю.Н. Бабанова / Ред. С.М. Грач, А.В. Якимов. Н. Новгород: ННГУ, 2010. С.123.
17. *Шмелев А.В.* Моделирование динамики фазовых систем в пакете ADS // Материалы 9-й Международной школы «Хаотические автоколебания и образование структур», 4–9 октября 2010. Саратов, Россия. С. 72.
18. *Матросов В.В.* Динамика нелинейных систем. Программный комплекс для исследования нелинейных динамических систем с непрерывным временем. Н. Новгород: ННГУ, 2002.
19. *Аносов Д.В., Арансон С.Х., Бронштейн И.У., Гринес В.В.* Гладкие динамические системы. II. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.1. Итоги науки и техники. ВИНТИ АН СССР. М., 1985.
20. *Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.* Тория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967.
21. *Беляков Л.А.* О структуре бифуркационных множеств в системах с петлей сепаратрисы седло-фокуса // Тез. докл. IX Международной конференции по нелинейным колебаниям. Киев, 1981. С. 57.
22. *Шильников Л.П.* Теория бифуркаций и модель Лоренца // Марсден Дж., МакКракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. С. 317.
23. *Беляков Л.А.* О бифуркационном множестве в системе с гомоклинической кривой седла // Матем. заметки. 1980. Т. 28, № 6. С. 911.

*Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского*

*Поступила в редакцию
После доработки*

*17.12.2010
9.02.2011*

NONLINEAR DYNAMICS OF A RING OF THREE PHASE SYSTEMS

V.V. Matrosov, A.V. Shmelev

Nonlinear dynamics of the ensemble consisting of three phase-locked generators, which are coupled in a ring, is discovered. By force of computational modeling, which is based on the theory of oscillations, the regimes of the generators collective behavior is

examined; the districts of synchronous and quasi-synchronous regimes are distinguished in the parameter space; the restructuring of the dynamics behavior on the boards of the distinguished districts is analyzed.

Keyword: Ensemble of oscillators, phase systems, dynamic regimes, synchronization, quasi-synchronization, beats, attractors, bifurcations.



Матросов Валерий Владимирович – родился в 1960 году, окончил Горьковский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (1982) по специальности «прикладная математика». Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1994), доктора физико-математических наук (2007). С 1999 года работает на радиофизическом факультете ННГУ, в настоящее время профессор кафедры теории колебаний и автоматического регулирования. Область научных интересов – динамика нелинейных систем, динамический хаос, синхронизация и управление хаосом, математическое моделирование. Имеет более 100 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях, является соавтором двух монографий и трех учебных пособий.

603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: matrosov@rf.unn.ru



Шмелев Алексей Вячеславович – родился в 1986 году, окончил Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (2008). Аспирант кафедры теории колебаний и автоматического регулирования радиофизического факультета ННГУ. Область научных интересов – кольцевые ансамбли систем фазовой автоподстройки частоты, моделирование динамики нелинейных систем. Имеет 9 публикаций.

603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: bzzz2004@bk.ru



Изв. вузов «ПНД», т. 19, № 1, 2011

IX Международная школа
**ХАОТИЧЕСКИЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ
И ОБРАЗОВАНИЕ СТРУКТУР**

ХАОС-2010

Саратов, 4–9 октября 2010

Организаторы

- Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
- Саратовский научный центр РАН
- НОЦ «Нелинейная динамика и биофизика»
- Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
- Европейская ассоциация содействия развитию науки и техники

Программный комитет

Д.И. Трубецков, чл.-корр. РАН, профессор, СГУ, Саратов, председатель; *В.С. Анищенко*, д.ф.-м.н., профессор, СГУ, Саратов; *Ю.В. Гуляев*, академик, член Президиума РАН, директор ИРЭ РАН, Москва; *С.Н. Гурбатов*, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ, Н. Новгород; *W. Ebeling*, профессор, Гумбольдтский университет, Берлин; *А.С. Дмитриев*, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ РАН, Москва; *С.П. Кузнецов*, д.ф.-м.н., профессор, СФ ИРЭ РАН, Саратов; *П.С. Ланда*, д.ф.-м.н., профессор, МГУ, Москва; *А.Г. Литвак*, академик, профессор, ИПФ РАН, Н. Новгород; *В.И. Некоркин*, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН, Н. Новгород; *В.Н. Очкин*, д.ф.-м.н., профессор, ФИАН, Москва; *О.В. Руденко*, академик РАН, профессор, МГУ, Москва; *А.М. Сергеев*, чл.-корр. РАН, профессор, ИПФ РАН, Н. Новгород; *А.П. Сухоруков*, д.ф.-м.н., профессор, МГУ, Москва; *В.Д. Шалфеев*, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ, Н. Новгород

Организационный комитет

Д.И. Трубецков, чл.-корр. РАН, профессор, председатель; *Ю.И. Лёвин*, декан факультета нелинейных процессов СГУ, профессор, зам. председателя; *А.Е. Храмов*, д.ф.-м.н., профессор, зам. председателя; *Ю.П. Шараевский*, д.ф.-м.н., профессор; *Ю.А. Филимонов*, директор СФ ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, д.ф.-м.н.; *Ю.А. Григорьев*, учёный секретарь СФ ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, д.ф.-м.н., профессор; *А.А. Короновский*, зам. декана факультета нелинейных процессов, д.ф.-м.н., профессор; *А.В. Стародубов*, зам. руководителя ОФНС НИИ ЕН СГУ, к.ф.-м.н.; *Е.Н. Егоров*, доцент, к.ф.-м.н.; *И.С. Ремпен*, доцент, к.ф.-м.н.; *О.И. Москаленко*, доцент, к.ф.-м.н.; *А.А. Овчинников*, аспирант; *С.А. Куркин*, аспирант

Рабочая программа

4 октября 2010

Открытие школы-семинара

Руденко О.В. (МГУ, Москва). Актуальные проблемы нелинейной акустики
Лоскутов А.Ю., Рябов А.Б. (МГУ, Москва). Бильярды как полигон нелинейной динамики

Иванченко М.В. (ННГУ, Нижний Новгород). q -бризеры: от парадокса Ферми–Паста–Улама до аномальной теплопроводности

Шалфеев В.Д., Мотова М.И. (ННГУ, Нижний Новгород). «Научной школой я назову...»

5 октября 2010

Некоркин В.И. (ИПФ РАН, Нижний Новгород). Динамические модели нейрон-нов

Некоркин В.И. (ИПФ РАН, Нижний Новгород). Динамика нейронных сетей

Осипов Г.В. (ННГУ, Нижний Новгород). Синхронизация в средах автоколебательных, возбудимых и пассивных элементов

Мишагин К.Г., Шалфеев В.Д. (ННГУ, Нижний Новгород). Синхронизация и фазирование в ансамблях спиновых наногенераторов

Кочаровский В.В. (ИПФ РАН, Нижний Новгород). Сверхизлучающие лазеры. Взаимообусловленность стохастики и когерентных пульсаций

Новожилова Ю.В. (ИПФ РАН, Нижний Новгород). Взаимодействие генератора с удалённой нагрузкой

Устные доклады

Секция 1. Фундаментальные проблемы нелинейной науки

Кузнецов А.П., Латухина Е.Ю., Савин А.В., Савин Д.В. (СГУ, Саратов). Влияние слабой диссипации на динамику систем со структурой «стохастическая паутина» в фазовом пространстве

Дудченко О.А., Гурия Г.Т. (МФТИ, Москва). Самоподдерживающиеся перистальтические волны. Феноменологическая модель

Безуглова Г.С., Гончаров П.П., Чечин Г.М. (ЮФУ, Ростов-на-Дону). Дискретные бризеры на симметрично обусловленных инвариантных многообразиях в скалярной модели плоской квадратной решетки

Павлов А.Н. (СГУ, Саратов). Частотно-временной анализ нестационарных процессов: концепции вейвлетов и эмпирических мод

Кириллов С.Ю., Некоркин В.И. (ННГУ, Нижний Новгород). Динамические бифуркации в модели нейрона со сложно-пороговым возбуждением

Венцлавович Т.Э., Казакевич В.С. (СФ ФИАН, Самара). Нелинейные эффекты в излучении импульсного электроионизационного СО-лазера (СО-ЭИЛ)

Секция 2. Нелинейная динамика информационных технологий, окружающей среды и общества

Караваев А.С., Пономаренко В.И., Прохоров М.Д. (СГУ, Саратов). Восстановление систем с задержкой с зависимостью динамики от скорости изменения задержанной переменной

Аникин В.М., Самсонов В.Б. (СГУ, ИАП РАН, Саратов). Периодичность развития российской цивилизации с позиции солнечно-земных связей

Зарькова Е.В., Гришин С.В. (СГУ, Саратов). Влияние внешнего шумового СВЧ сигнала на хаотическую динамику широкополосной кольцевой автоколебательной системы с ферромагнитной пленкой

Бегинин Е.Н., Гришин С.В., Шешукова С.Е. (СГУ, Саратов). Электродинамические характеристики волноводов магнитостатических волн с фрактальными микроструктурами (теория и эксперимент)

Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Скороходов В.Н., Степанов А.О. (СГУ, Саратов). Эффект когерентного резонанса в клистронных автогенераторах

Петров В.С., Осипов Г.В. (ННГУ, Нижний Новгород). Синхронизация осцилляторов, взаимодействующих через пассивную среду

6 октября 2010

Устные доклады

Секция 3. Распределенные системы и ансамбли связанных элементов со сложной динамикой

Купцов П.В. (СГТУ, Саратов). Ляпуновские векторы для систем высокой размерности

Мохсени Т.И., Юркин В.Ю. (ИРЭ РАН, Москва). Самоорганизующиеся беспроводные сенсорные сети

Павлов Е.А., Осипов Г.В. (ННГУ, Нижний Новгород). Моделирование сердечной активности на основе отображений

Комаров М.А., Осипов Г.В. (ННГУ, Нижний Новгород). Последовательная активность в ансамблях нелинейных осцилляторов

Сысоев И.В., Диканев Т.В. (СГУ, Саратов). Оптимизация эмпирических моделей в приложении к выявлению связей методом нелинейной причинности по Грейнджеру

Морозова М.А., Шараевский Ю.П., Шешукова С.Е. (СГУ, Саратов). Численное исследование брегговских солитонов огибающей в магнетонных кристаллах

Матросов В.В., Казанцев В.Б. (ННГУ, Нижний Новгород). Кальциевые колебания в сети взаимодействующих астроцитов

Половинкин А.В., Ушаков Ю.В. (ННГУ, Нижний Новгород). Влияние шумов ионных каналов на спайковую активность нейронов с адаптацией частоты

Глызин С.Д. (ЯрГУ, Ярославль). Автоволновые режимы одного класса кольцевых колебательных систем релейного типа

Игаев М.П., Дмитричев А.С., Некоркин В.И. (ИПФ РАН, Нижний Новгород). Двухмасштабные волновые структуры в цепочке нейронов Морриса–Лекара

Секция 4. Синхронизация

Клиньшов В.В., Некоркин В.И. (ИПФ РАН, Нижний Новгород). Delay-induced synchronization, desynchronization and multistability

Корниенко В.Н., Привезенцев А.П. (ИРЭ РАН, Москва). Синхронизация ансамблей циклотронных осцилляторов в круглом резонаторе большого диаметра

Жалнин А.Ю. (СФ ИРЭ РАН). Новая схема передачи информации на основе фазовой модуляции несущего хаотического сигнала

Пономаренко В.П., Зайцев Н.И. (ННГУ, Нижний Новгород). Автомодуляционные режимы колебаний в сложных системах с фазовым управлением

Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е., Шурыгина С.А. (СГУ, Саратов). Исследование обобщенной синхронизации во взаимно связанных динамических системах и сетях со сложной топологией
Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В. (СФ ИРЭ РАН, Саратов). Вынужденная синхронизация связанных автоколебательных осцилляторов
Кузьмин Л.В. (ИРЭ РАН, Москва). Синхронный приём хаотических радиоимпульсов в условиях реверберационной помехи
Астахова Е.И., Астахов С.В., Вадивасова Т.Е. (СГУ, Саратов). Синхронизация и мультистабильность в ансамбле систем ФитцХью-Нагумо с задержкой в канале обратной связи
Казанцев В.Б., Тюкин И.Ю. (ИПФ РАН, Нижний Новгород). Синхронизация импульсных возбуждений при формировании функциональных групп в сетях связанных нейронных осцилляторов
Закржевский М.В. (РТУ, Рига, Латвия). Новые основы нелинейной динамики и хаоса. Периодический скелет, полные бифуркационные группы и редкие аттракторы
Смирнова Р.С. (РТУ, Рига, Латвия). Рождение нелинейных эффектов и хаоса при вынужденных колебаниях в «линейных» осцилляторах с нелинейной положительной диссипацией

Стендовые доклады

7 октября 2010

Полежаев А.А. (ФИАН, Москва). Новые теоретические и экспериментальные результаты в исследовании распределённых нелинейных систем (от Тьюринга до сегодняшнего дня) (часть 1)
Полежаев А.А. (ФИАН, Москва). Новые теоретические и экспериментальные результаты в исследовании распределённых нелинейных систем (от Тьюринга до сегодняшнего дня) (часть 2)
Кудряшов Н.А. (НИЯУ МИФИ, Москва). Методы Пенлеве для исследования нелинейных волновых уравнений и их приложения (часть 1)
Кудряшов Н.А. (НИЯУ МИФИ, Москва). Методы Пенлеве для исследования нелинейных волновых уравнений и их приложения (часть 2)
Трубецков Д.И. (СГУ, Саратов). Феномен моделей «хищник–жертва» (часть 1)
Трубецков Д.И. (СГУ, Саратов). Феномен моделей «хищник–жертва» (часть 2)
Цыганов М.А. (ИТЭБ РАН, Пушино, Московская область). Волны в кросс-диффузионных системах

Стендовые доклады

8 октября 2010

Сухоруков А.П. (МГУ, Москва). Электродинамика левых сред
Дмитриев А.С. (ИРЭ РАН, Москва). Сетевые системы
Гурия Г.Т. (ГНЦ РАМН, Москва). Сценарии разупорядочения в биологических системах
Флейшман А.Н. (НИИ КПП РАМН, Новокузнецк). Нелинейные феномены

ВРС: модели анализа, физиологические механизмы формирования, клинко-физиологическая интерпретация

Гришин С.В., Шараевский Ю.П. (СГУ, Саратов). Генерация хаотических сигналов в кольцевых автоколебательных системах с нелинейными линиями передачи на магнитостатических волнах. Хаотические автосолитоны

Макаренко Н.Г. (ГАО РАН, Санкт-Петербург). Геометрия случайных полей: методы и приложения

Кузнецов С.П. (СФ ИРЭ РАН). Гиперболические аттракторы: от математики к физике

Устные доклады

Секция 5. Фундаментальные проблемы нелинейной науки

Кузнецов А.П., Савин А.В., Савин Д.В., Фойдель У. (СГУ, Саратов). Эволюция плоскости параметров консервативно связанных отображений Эно при изменении уровня диссипации

Кащенко И.С. (ЯрГУ, Ярославль). Нормализация уравнений второго порядка с запаздыванием

Аникин В.М., Чебаненко С.В. (СГУ, Саратов). Корреляционные функции сигналов, моделируемых на базе хаотических отображений

Аникин В.М., Аркадакский С.С., Ремизов А.С. (СГУ, Саратов). О структуре функциональных пространств оператора Перрона–Фробениуса двумерных отображений

Гаврилов А.С., Мухин Д.Н., Лоскутов Е.М., Фейгин А.М. (ИПФ РАН, Нижний Новгород). Стохастическое моделирование высокоразмерной динамики

Балякин А.А., Жулего В.Г., Иванова А.С. (РНИЦ «Курчатовский институт», Москва). Математическое моделирование сложной динамики системы глобально связанных отображений и ее социально-экономическая интерпретация

Секция 6. Нелинейная динамика информационных технологий, окружающей среды и общества

Капранов М.В., Хандурин А.В. (МЭИ, Москва). Способ прямофрактальной передачи информации

Сафин А.Р. (МЭИ, Москва). Спектральный анализ периодических режимов 2 рода в ИСФС

Смирнов Д.А., Наконечный П.И., Козленко С.С., Селезнев Е.П., Куртс Ю., Мохов И.И. (СФ ИРЭ РАН). Диагностика взаимодействия между Эль-Ниньо и Индийским муссоном по временным рядам

Корниенко В.Н., Привезенцев А.П. (ЧГУ, Челябинск). Возбуждение круглой мембраны ансамблем активных осцилляторов

Сытова С.Н. (БГУ, Беларусь, Минск). Хаос в объемных лазерах на свободных электронах

Акафьева Н.А., Мирошниченко А.Ю., Царев В.А., Бирюков И.С. (СГТУ, Саратов). Некоторые результаты экспериментальных исследований низковольтного виркатора

9 октября 2010

Лоскутов А.Ю. (МГУ, Москва). Мировые финансовые кризисы: причины и следствия

Храмов А.Е., Короновский А.А., G. van Luijteleaer, Овчинников А.А., Ситникова Е.Ю. (СГУ, Саратов). Анализ и диагностика осцилляторной активности нейронных сетей головного мозга с использованием непрерывного вейвлетного анализа

Короновский А.А., Куровская М.К., Москаленко О.И., Храмов А.Е. (СГУ, Саратов). Перемежаемость игольного ушка и перемежаемость типа I в присутствии шума: механизмы возникновения, статистические характеристики, сходства и отличия

Закрытие школы-семинара

Из аналитического обзора «ХАОС-2010» Отчета РФФИ. Первая школа по хаотическим колебаниям и образованию структур была проведена в Саратове на базе Саратовского филиала Института Радиотехники и Электроники АН СССР (ныне Саратовский филиал ИРЭ РАН) совместно с Саратовским государственным университетом в 1985 году. Затем она повторялась с интервалом в 3 года и стала традиционной в системе обмена информацией и подготовки научной молодежи. Ее тематика всегда была связана с проблемами нелинейной динамики, а акцент смещался в зависимости от направлений, признанных на момент организации важнейшими. Так, первые школы концентрировали внимание на теории динамического хаоса в моделях малой размерности, приложениях в области радиофизики и электроники, процессах самоорганизации и др.

Работа девятой школы проходила по следующим основным научным направлениям.

- Фундаментальные проблемы нелинейной науки.
- Распределенные системы и ансамбли связанных элементов со сложной динамикой.
- Синхронизация.
- Влияние шумов на процессы в нелинейных системах.
- Нелинейная динамика информационных технологий, окружающей среды и общества.
- Нелинейная динамика электронно-волновых, магнито-электронных и твердотельных систем СВЧ-электроники и радиофизики, а также устройств оптического диапазона.

Исследования и разработки в этих областях активно ведутся во многих научных организациях России, и их результаты были широко представлены на нынешней девятой школе, в которой участвовало 142 человека. Порядка 60% от общего числа участников школы составляли студенты, аспиранты и молодые учёные (до 35 лет), представители вузовской (Саратовский, Нижегородский, Ростовский, Челябинский, Ярославский, Самарский, Белорусский университеты, Московский физико-технический институт, Московский энергетический институт, университетов Харькова, Минска, Риги и т.д.) и академической науки (Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН и его Саратовский филиал, Институт общей физики РАН, Институт прикладной физики РАН). Всего на школе были представлены 26 пленарных лекций с обзорами современного состояния исследований в различных актуальных областях нелинейной науки, 44 устных и 97 стендовых докладов с результатами оригинальных исследований. В них нашли отражение, по сути, все ос-

новые направления исследований по тематике конференции, которые выполняются в России и других странах.

Анализ докладов присланных на школу позволяет говорить, что с позиций актуальности для мировой науки следует выделить работы, связанные с нелинейными явлениями в живых системах. Число докладов по этой тематике растёт год от года. По-прежнему большое количество докладов по проблемам синхронизации и нелинейной динамики информационных технологий (в первую очередь, работы по генераторам хаоса). В двух последних направлениях российские учёные занимают лидирующее положение в мире.

По результатам школы программным комитетом выделен ряд наиболее интересных и актуальных лекций и докладов для их опубликования в специальных выпусках Всероссийского журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».

Отметим, что Саратовский государственный университет способствует обеспечению данного научного направления кадрами, поскольку в нём функционирует единственный в стране факультет нелинейных процессов со специальностью «Физика открытых нелинейных систем» и квалификацией «Физик – системный аналитик». Обеспечению таких исследований научным оборудованием и научной литературой способствуют различные гранты, в том числе гранты РФФИ.

Все материалы Школы «ХАОС-2010» доступны в сети Интернет по адресу:

<http://nonlin.sgu.ru/chaos2010/index.htm>.



II Всероссийская конференция
**НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА
В КОГНИТИВНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ**

Нижний Новгород, 18–21 мая 2011

Организаторы

- Межрегиональная ассоциация когнитивных исследований
- Институт прикладной физики РАН
- Центр оптико-нейронных технологий НИИ СИ РАН
- Стратегическое общественное движение «Россия 2045»
- Нижегородская государственная медицинская академия
- ЗАО «Нижегородское агентство наукоемких технологий»

Программный комитет

Александров Ю.И., Институт психологии РАН, председатель; *Величковский Б.М.*, Курчатовский НБИК-центр, заместитель председателя; *Крыжановский Б.В.*, Центр оптико-нейронных технологий НИИСИ РАН, заместитель председателя; *Сергеев А.М.*, ИПФ РАН, Н. Новгород, заместитель председателя; *Черниговская Т.В.*, Санкт-Петербургский государственный университет, Курчатовский НБИК-центр, заместитель председателя; *Анохин К.В.*, ГУ НИИ нормальной физиологии им. П.К. Анохина РАМН, Курчатовский НБИК-центр, заместитель председателя; *Кибрик А.Е.*, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, заместитель председателя; *Антонец В.А.*, ИПФ РАН, Н. Новгород; *Бедный Б.И.*, ННГУ, Н. Новгород; *Владимирский Б.М.*, НИИ НК ЮФУ, Ростов-на-Дону; *Гурбатов С.Н.*, ННГУ, Н. Новгород; *Григорьева В.Н.*, НГМА, Н. Новгород; *Дунин-Барковский В.Л.*, Центр оптико-нейронных технологий НИИСИ РАН; *Жданов А.А.*, ИТМиВТ РАН, Москва; *Еськов В.М.*, Сургутский государственный университет; *Иваницкий А.М.*, ИВНДиНФ РАН; *Кондрачев В.В.*, Политехнический университет, Н. Новгород; *Крылов А.К.*, Институт психологии РАН; *Подладчикова Л.Н.*, НИИ НК ЮФУ, Ростов-на-Дону; *Полевая С.А.*, ННГУ, Н. Новгород; *Редько В.Г.*, Центр оптико-нейронных технологий НИИСИ РАН;

Соловьев В.Д., Казанский государственный университет; *Станкевич Л.А.*, Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН; *Самарин А.И.*, НИИ НК ЮФУ, Ростов-на-Дону; *Шахов Б.Е.*, НГМА, Н. Новгород; *Щербаков В.И.*, Педагогический университет, Н. Новгород; *Яхно В.Г.*, ИПФ РАН, Н. Новгород

Рабочий оргкомитет

Сергеев А.М., ИПФ РАН, Н. Новгород, председатель; *Яхно В.Г.*, ИПФ РАН, Н. Новгород, зам. председателя; *Антонец В.А.*, ИПФ РАН, Н. Новгород; *Беллюстин Н.С.*, НИРФИ, Н. Новгород; *Казанцев В.Б.*, ИПФ РАН, Н. Новгород; *Ковальчук А.В.*, ИПФ РАН, Н. Новгород; *Нуйдель И.В.*, ИПФ РАН, Н. Новгород, ученый секретарь конференции; *Парин С.Б.*, ННГУ, Н. Новгород; *Полевая С.А.*, НижГМА, Н. Новгород; *Соколов М.Е.*, ИПФ РАН, Н. Новгород; *Тельных А.А.*, ИПФ РАН, Н. Новгород; *Шемагина О.В.*, ИПФ РАН, Н. Новгород

Тематика конференции

- Модели адаптивных процессов и режимов осознания сенсорных сигналов в когнитивных системах.
- Инструментальные средства регистрации различных стадий (этапов) динамики функционального состояния живых систем и технических систем распознавания.
- Прикладные результаты, связанные с модельными описаниями и инструментальными средствами регистрации процессов в когнитивных исследованиях.

Конференция посвящена обсуждению новых возможностей экспериментального исследования и формализованного описания когнитивных процессов, а также текущего состояния дел и перспективы создания симуляторов живых систем. Основное внимание предполагается уделить:

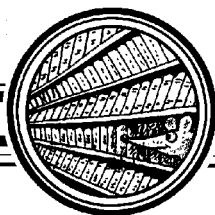
- рассмотрению и описанию динамических процессов обработки информации, аналогичных используемым в мозге,
- механизмам познания, включая эмоции и сложные формы поведения,
- процессам восприятия и осознания сенсорных сигналов,
- формированию баз данных,
- воспроизведению ранее существовавших и приобретаемых знаний на формализованных функциональных моделях,
- использованию симуляторов для регистрации основных параметров, определяющих функциональное состояние исследуемых живых систем, предсказания их возможного поведения и динамики реагирования в различных сигнальных ситуациях.

Основу программы составляют лекции приглашенных докладчиков, которые будут представлены ведущими российскими специалистами, а также устные и стендовые доклады, которые будут отобраны на основе рецензирования представленных статей в сборник трудов конференции. Поддерживая принципы формирования тематики обсуждений, реализованные на четырёх конференциях по когнитивной науке (2004, 2006, 2008, 2010), организаторы данной конференции считают, что «конфе-

ренция может иметь успех лишь в том случае, если каждый из ее участников будет, во-первых, заинтересован в работах своих коллег из смежных наук и открыт к непривычному для себя способу мышления и научному языку, а во-вторых, приложит усилия для того, чтобы сделать свое сообщение понятным для представителей смежных наук». Важен междисциплинарный характер обсуждений. В то же время, очень важно, чтобы в работах был сделан упор на формализованные методы регистрации и описания процессов восприятия и осознания информационных сигналов живыми системами. Поэтому организаторы конференции отдадут приоритет тем докладам, в которых физические методы исследований используются в различных междисциплинарных областях, связанных с регистрацией и описанием когнитивных процессов. Эти критерии будут учитываться при отборе докладов.

Электронный адрес оргкомитета: nuidel@awp.nnov.ru

Web site конференции: <http://www.nd-cogsci.iapras.ru/2011/>



Изв. вузов «ПНД», т. 19, № 1, 2011

60 лет назад Борисом Павловичем Белоусовым была открыта периодическая химическая реакция. Илья Романович Пригожин назвал открытие важнейшим экспериментом XX века.

Главную роль в том, чтобы реакция стала известна миру, сыграл Симон Эльевич Шноль. Мы публикуем фрагменты из его удивительной книги «Герои, злодеи, конформисты российской науки», где описана эпопея открытия.

БОРИС ПАВЛОВИЧ БЕЛОУСОВ (1893-1970) И ЕГО КОЛЕБАТЕЛЬНАЯ РЕАКЦИЯ*

Колебательная реакция Белоусова–Жаботинского широко известна не только в научном мире. Ее знают школьники, студенты, просто любознательные люди. Вы смотрите на стакан с красно-лиловой жидкостью, а он вдруг становится ярко-синим. А потом снова красно-лиловым. И снова синим. И вы невольно начинаете дышать в такт колебаниям. А когда жидкость налита тонким слоем, в ней распространяются волны изменения окраски. Образуются сложные узоры, круги, спирали, вихри или все приобретает совершенно хаотический вид.

Эта реакция известна уже более 40 лет**. Ее открыл в 1951 году Борис Павлович Белоусов [1, 2]. Анатолию Марковичу Жаботинскому принадлежит решающий вклад в изучение этой реакции, в то, что это замечательное явление стало общенаучным достоянием [3].

Реакция именуется особо почетным образом – двумя инициалами: BZ-reaction.

Открытие Белоусова практически завершило почти 150-летний поиск колебательных режимов в химических процессах.

Периодические процессы вообще, по-видимому, одна из основ для построения теорий в самых различных отраслях. Периодичность – регулярное повторение

*Шноль С.Э. Герои, злодеи, конформисты российской науки. 2-е изд. М.: КРОН-ПРЕСС, 2001. 875 с. Серия «Экспресс». ISBN 5-232-01243-6

©Шноль С.Э., 2000

©КРОН-ПРЕСС, 2000

** Сейчас уже более 60 лет. – *Прим. ред.*

чего-либо во времени и (или) в пространстве – убеждает нас в познаваемости мира, в причинной обусловленности явлений. В сущности, периодичность – основа мировоззрения детерминизма. Понимание ее природы позволяет предсказывать события, скажем, затмения или появление комет. А такие предсказания – главное доказательство силы науки.

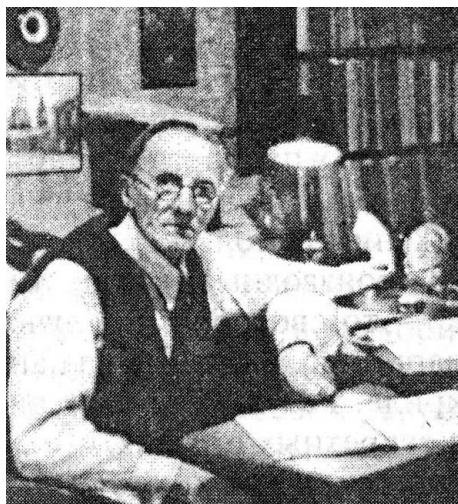
История VZ-reaction – яркая иллюстрация старой загадки: что было раньше – курица или яйцо? Что первично – феномен, требующий теоретического объяснения, или теория, предсказывающая появление неизвестного ранее феномена? На самом деле это «порочный круг». Мы замечаем и объявляем феноменом лишь то, что понимаем, для чего уже существует теория. Но для построения теории должен быть «заказ» – наличие необъясненного феномена.

Разрыв этого порочного круга требует огромных интеллектуальных и нравственных усилий исследователя-первопроходца. Инерция «здравого смысла» – причина множества трагических судеб, печальной «традиции посмертной славы», когда замечательные открытия оказываются преждевременными, не признанными при жизни их авторов.

Открытие Белоусова – в этом ряду. Оно наглядно демонстрирует эту трудность восприятия «очевидности», того, что в буквальном смысле слова видно очам и, тем не менее, не видится окружающим. < . . . >

В это время (в 1940-е годы. – *Прим. ред.*) в биохимии были открыты циклические реакции: одно вещество превращается во второе, второе в третье, третье в четвертое, потом в пятое, а из него образуется опять первое. Борис Павлович подумал, что это замечательная вещь и надо ее исследовать, что хорошо бы сделать химическую аналогию биохимических циклов.

Вот тут-то и начинается «химия с детства». Это только «живой» химик может сразу придумать. Вспомнить, что в 1905 году он брал бертолетову соль, что ее аналог $KBrO_3$: там хлор, а тут бром. Можно устроить реакцию, в которой исходный компонент цикла Кребса – лимонная кислота – будет окисляться этим аналогом бертолетовой соли. Бром окрашен, поэтому он будет виден, когда выделится в ходе реакции. Это была удача.



Б.П. Белоусов, 1950-е годы

Чтобы ускорить реакцию, Борис Павлович добавил в раствор каталитические количества соли церия. Церий – элемент переменной валентности, он катализирует окисление, переходя из четырех- в трехвалентное состояние. В растворе, в довольно концентрированной серной кислоте, сначала действительно появилась желтая окраска, но потом почему-то исчезла и вдруг возникла снова, а потом опять исчезла... Так была открыта колебательная химическая реакция в растворе. < . . . >

В 1951 году генерал Белоусов послал статью об открытой им колебательной реак-

ции в «Журнал общей химии» [1,2]. И получил обидную отрицательную рецензию: «такого быть не может». В статье был описан легко воспроизводимый процесс. Все реактивы вполне доступны. Но если вы твердо убеждены в невозможности результата, то проверять его – пустая трата времени. Внук Бориса Павловича, Борис Смирнов, уговаривал деда: «Возьми реактивы, поезжай в редакцию – покажи им...» Генерал считал все это оскорбительным, не соответствующим нормам научной этики, и не поехал. Хотел бы я знать, кто автор рецензии? Но... редакционная тайна. Есть у меня подозреваемые, но нет доказательств.

А Белоусов продолжал изучать свою замечательную реакцию. Колебания желтый-бесцветный не очень яркие. Ученик и сотрудник Бориса Павловича А.П. Сафонов посоветовал ему добавить в раствор комплекс железа с фенантролином. Окраска резко изменилась. Лилово-красная переходила в ярко-синюю. Это было прекрасно. <...>

Теперь, думаю, пора рассказать о том, как я стал участником этой истории. В Московский университет я поступил в 1946 году, как это ни странно, со своим происхождением, с репрессированным отцом, да и национальность неподходящая... Но в 1946 году это еще было можно. В 1947 году стало труднее. А потом щель захлопнулась. <...>

В 1951 году окончил я университет, получил диплом с отличием. <...>

Атомная программа и в ней тема: радиоактивные изотопы в биологических и медицинских исследованиях. Работа опасная – норм безопасности практически еще нет. Лучевая нагрузка большая. Опасаться ее «непатриотично». Моя жизнь тогда зависела от точности и аккуратности работы с радиоактивными веществами.

А после трех часов дня все сотрудники уходят, и я свободен заниматься своей биохимией. Ставлю опыты по измерению ферментативной (АТФ-азной) активности растворов мышечных белков. Я знал, что не делаю ошибки больше, чем один процент. Ну, полтора. И вдруг пробы отличаются вдвое [14]. <...>

... Я все наливаю точно и аккуратно, а результат не тот. Пришлось сделать странный вывод – существует несколько дискретных состояний изучаемых мною молекул белка, и все молекулы сразу, синхронно переходят из одного состояния в другое и обратно. Так это же колебания... Тогда я думал, что первым увидел колебания в биохимических реакциях. А это очень, как бы сказать, неуютно. Всем нужно доказывать, что такое в принципе может быть. Трудно чувствовать себя пионером. Прошло несколько лет. Большим психологическим утешением стала для меня в 1958 году статья Христиансена, великого датского химика, о возможности колебательных режимов в химических и, более того, в биохимических процессах [17,18]. С.Е. Северин поместил мою статью «О самопроизвольных переходах препаратов актомиозина из одного состояния в другое» в редактируемый им журнал «Вопросы медицинской химии» [19], и я послал письмо и отпечаток Христиансену. Он обрадовался, что его предположения подтвердились, и отметил это в своем обзоре 1961 года [18].

Но я по-прежнему чувствовал себя неуверенно и всюду пытался узнать о похожих явлениях. Тогда я еще ничего не знал о попытках найти колебательные режимы в химических и биохимических реакциях. Не знал статей Франк-Каменецкого, Лотки, Сальникова. А мои консультанты-математики вообще принципиально никакую литературу не читали, полагаясь лишь на мощь своего интеллекта.

И однажды кто-то мне сказал: «А знаешь, есть тут один старик, он вот перед тобой стакан с жидкостью поставит, и она будет то синей, то красной...» – «А ты сам-то знаешь его?» – «Нет, я только слышал». – «Ну, вспомни, кто тебе сказал?» – «Нет, не помню». Это свойство секретных учреждений – никто ничего не должен знать о работах, «выходящих за пределы твоей компетенции». Можно работать рядом в комнате и ничего не знать о соседях. Предпринял следствие, пошел по цепочке, но она все время обрывалась. И длилось это долго. Но всегда, докладывая на семинарах и в разных собраниях свои работы, я заканчивал вопросом: «Не знает ли кто-нибудь этого таинственного человека?»

Все годы с того момента, когда в моих опытах стал проявляться необъяснимо большой «разброс результатов, я рассказывал об этом Льву Александровичу Блюменфельду (см. [20]. – *Прим. ред.*). <...>

... В Москве, на Петровке, рядом с уголовным розыском, есть церковь – маленькая прекрасная церковь, которая в те времена принадлежала почему-то Институту химической физики. Кошунство, но факт. В этой церкви, в алтарной части, у Блюма был кабинет, а там, где когда-то шла служба, теперь проходили семинары. В этой церкви я и делал доклад «О самопроизвольных изменениях (колебаниях) АТФ-азной ферментативной активности в препаратах актомиозина», закончив его уже традиционно (как в Древнем Риме: «А в остальном, я полагаю, что Карфаген должен быть разрушен») «А в остальном, я безуспешно ищу человека... и не нахожу». И вдруг встал Борис Смирнов, он был тогда аспирантом Блюма, и говорит: «А это мой дядя». Как потом оказалось, не дядя, а двоюродный дед. Два Бориса очень дружили, и даже химиком младший стал под влиянием деда. Я ахнул: «Боря, как же...» – «Это его реакция, – говорит Борис, – все это чистая правда».

Дальше все стало разворачиваться с колоссальной скоростью. Я – Борису: «Мне надо побыстрее прочесть что-нибудь». Он – мне: «Дед видеть тебя не захочет. А реакцию передаст». Да, действительно обычный листок бумаги с рецептом; лимонной кислоты столько-то, калия бромноватокислого столько-то, сульфата церия столько-то и серная кислота 1:3, концентрированная. И добавить фенантролин с железом. Записан и номер телефона. Я позвонил Борису Павловичу, дрожащим голосом, в нервном напряжении говорю ему что-то. Он меня очень мрачно обрывает: «Вы рецепт получили и ладно».

В лаборатории у меня стоял бесценный шкаф с реактивами. Там было все, но фенантролина не было. Приготовил растворы, и вот это нечто, бело-желтое, заколебалось! Колоссальное впечатление. <...>

В <...> 1958 году Л.А. Блюменфельду предложили организовать кафедру биофизики на физическом факультете МГУ. Мне было лестно, что Блюм поставил условие: взять Шноля в качестве лектора-биохимика, Но ему было сказано: «Мы не можем покупать kota в мешке!». Два года я читал курс «на общественных началах» (как говорили в то время), а с 60-го – уже будучи в штате. Оказалось, что реакция Белоусова легко понимается физиками. Один за другим сотрудники стали бегать к нам в комнаты, рассказывать другим, началось паломничество. Шутники обозвали реакцию «водка–коньяк». Действительно, похоже: бесцветное, а потом желтое такое, коричневатое...

Я позвонил Борису Павловичу, сказал, что чувствую себя неловко. В лабораторию приходит много людей, наблюдают, изучают. Это хорошо, но ведь могут

опубликовать, а работа ваша. Он на меня зарычал: «И пусть, – напряжением, нервным криком, – пусть тащат, наконец-то это выйдет в свет!». К тому моменту я уже много раз ему звонил, уговаривал опубликовать. Он предпринял попытку, переделал статью, послал еще раз в журнал и... получил еще одну отрицательную рецензию. Наверное, я знаю и второго рецензента. В общем, беседы наши были очень мрачные. Но тут и я сорвался: «Вы, Борис Павлович, поступаете очень плохо, ставите меня в положение вора. Но я не вор, и все происходящее на моей совести. В конце концов, это безнравственно». И он задумался, а потом сказал: «Ладно, воткну в институтские рефераты». Шли полузакрытые отчеты их института по радиационной медицине за 1959 год. Четыре маленьких странички – единственная публикация Белоусова [1] при жизни. Но все же я могу гордиться, что взвыл, вскричал... и опубликовано!

<...> Реакцией решил заняться Толя Жаботинский из первого нашего выпуска, потомственный, как он сам про себя говорил, физик. То есть, сын физика, и дед его имел отношение к нашим наукам. <...>

И Толя занялся. И занялся совершенно замечательно. Он все знал. Он сразу стал думать об уравнениях, о моделях. Легко сделал прибор и быстро стал продвигаться. Понял, что во что превращается, что Борис Павлович был не прав в каких-то деталях.

Я снова попытался вовлечь Белоусова в дело, и снова безрезультатно. Однажды в одной из бесед, довольно ранней, он мне сказал: «Я не могу и не хочу заводить новых друзей. Мои друзья погибли или умерли». Чтобы я больше не приставал. Эти слова произвели на меня большое впечатление и многое объяснили в его поведении. Какой-нибудь нормальный, живой, открытый человек, он Бориса Павловича, может быть, и переубедил бы. Я не сумел. К сожалению, не таким человеком был и Жаботинский. <...>

Замечательной особенностью работ Жаботинского и образовавшейся вокруг него группы сотрудников было, сочетание химического эксперимента, методов физической регистрации и построение математических моделей. В этих моделях – системах дифференциальных уравнений – кинетические константы подставлялись из экспериментальных данных. После этого можно было сравнивать экспериментальные записи колебаний с кривыми, которые получались при компьютерном моделировании. <...>

К 1963 году основной качественный этап изучения реакции Белоусова был завершен. Борис Павлович об этом знал, Толя ему звонил. Но включаться в работу он так и не захотел. Аспиранту Жаботинскому нужно было написать статью. И он написал весьма ценную первую статью [3]. Возник естественный вопрос об авторах.

Мне хватало своих дел. <...>

...Статья вышла за подписью одного Жаботинского. Мне воздавалась «благодарность за предложенную тему и руководство работой». Статья произвела такой неожиданный эффект, что восхищенное человечество назвало реакцию именами Белоусова и Жаботинского.

«Научное сообщество» постепенно проникалось сознанием, что колебательные режимы не только возможны, но даже обязательны и достаточно распространены в химии и биохимии. Особенно хотелось их найти в биохимии, чтобы ими объяснить феномен биологических часов.

С обоснованием высокой вероятности колебательных биохимических реакций с точки зрения теории колебаний на семинаре И.Е.Тамма в Физическом институте АН СССР в 1959 году выступил аспирант Д.С. Чернавский [24]. Теперь уже возникла ситуация, когда теория, понимание опережали феноменологию. Мы ожидали открытия колебаний в биохимических системах. И дождались.

В июне 1963 года в Москву приехал знаменитый американский биохимик Бриттен Чанс. < . . . >

На лекцию Чанса в аудиторию 01 в главном корпусе МГУ собрался весь цвет московского биохимического общества. Чанс рассказывал о своих исследованиях кинетики гликолиза, показывал замечательные слайды. Как у прекрасного инженера, у него такие спектрофотометры, такая техника, куда нам... И вижу я на слайде, иллюстрирующем ход фосфофруктозокиназной реакции, явные синусоидальные колебания, правда, небольшой амплитуды. А он ни слова. В некотором смущении я спрашиваю, почему он ничего не говорит о колебаниях в этой реакции? Чанс отвечает, что признак плохого тона обращать внимание на шум приборов... За меня вступились свободные в английском языке Л.А. Блюменфельд и А.Е. Браунштейн. После лекции разговор был уже вполне любезным. < . . . >

Осенью 1964 года вышла статья Чанса о колебательной кинетике фосфофруктозокиназной реакции. В биохимии начался бум исследований колебательных режимов. Из года в год росло число таких публикаций.

Меня же охватил патриотический, я бы сказал, комсомольский страх – приоритет страны теряется. Мы первые в очень большом направлении, и это надо закрепить. Пошел к Франку: «Глеб Михайлович, давайте собирать международный симпозиум. Иначе все уйдет от нас». (Так оно и произошло.) Франк все это прекрасно понимал, и мы решили созвать в Пущино международный симпозиум. А дальше все как обычно: оказалось, что международный симпозиум нужно «заказывать» за два года вперед...

В 1966 году, в марте, был созван первый Всесоюзный (увы, не международный) симпозиум по колебательным процессам в химии и биохимии. Это совершенно историческое событие в науке. Потому что колебательные процессы в биологии: биологические часы, всякие процессы типа сердечной деятельности, перистальтики кишечника и даже численность популяций – все это одни и те же дифференциальные уравнения. Физики находили это одним из главных достижений нашего Пущинского центра и Института биофизики. Активное участие в работе симпозиума принимал Д.А. Франк-Каменецкий, делали доклады И.Е.Сальников и Б.В. Вольтер, А.М. Молчанов, Д.С. Чернавский и его коллеги Ю.М. Романовский и Н.В. Степанова, представил свои первые работы Е.Е.Сельков. Центральное место занимали доклады А.М.Жаботинского и его соавторов – М.Д. Корзухина, В.А. Вавилина. Борис Павлович Белоусов от участия в симпозиуме отказался.

Уже в августе 1966 года мы сдали в печать «Труды» симпозиума, и в январе 1967 года вышла книга «Колебательные процессы в химических и биологических системах» [25]. Прошло много лет, и мне все больше кажется, что это очень ценная книга. Она была весьма популярна у нас – весь тираж быстро раскупили – и в мире. Не раз раздавались пожелания перевести ее на английский язык, но это так и не сделано.

Задолго до симпозиума произошло еще одно знаменательное событие. О реакции Белоусова захотел узнать подробнее президент Академии наук СССР Мстислав Всеволодович Келдыш. Мы волновались. Он был известен как человек совсем особых скоростей восприятия, феноменальной эрудиции. Сосредоточенный, мрачный, лицо в таких львиных морщинах. Мы приехали к Келдышу 16 декабря 1964 года. Пришли в его затемненный кабинет на Миусской площади, в дом, построенный еще Петром Петровичем Лазаревым по эскизу Лебедева. Огромный стол с зеленым сукном, графин, стаканы. Мы взяли с собой пробирки, реактивы, серную кислоту. Но что в математическом институте нет химических стаканов и колб, не догадались. Реакцию проводили в стакане. Поставили стакан на сукно. Серная кислота, когда опыт закончился, оставила черный кружок на столе. Но Келдыш не дрогнул и вида не показал, что заметил.

Жаботинский кратко изложил суть: Келдыш свирепел, если говорили долго. В стакане пошли колебания, мы думали, что Келдышу этого достаточно, но он зло посмотрел на стакан и сказал: «Вы от меня скрываете самое главное?». А самым главным были цветные волны, которые начинались у дна и шли вверх. Келдыш был специалистом по пространственным эффектам колебаний. Жаботинский пространственные волны, конечно, заметил, но еще в этом не разобрался и решил не рассказывать о них Келдышу. Не тут-то было! Президент ужасно рассердился, посчитав, что ему просто не хотят рассказывать... Реплика была чрезвычайной важности. А потом мы узнали, что это видел и Белоусов. Даже назвал колбу «зеброй». И полагал это наиважнейшим.

После симпозиума Жаботинский сосредоточился на исследовании распространения волн. < . . . >

Пространственные эффекты, распространение волн в активной среде открыли новые замечательные возможности и аналогии. Подобным же образом распространяется возбуждение в нерве, в сердечном синцитии, вообще в «активных средах». VZ-реакция «вышла на оперативный простор», вошла в учебники и стала одним из ярких объектов новой науки синергетики [26].

Итак, преувеличено ли значение открытой Белоусовым реакции? Нисколько. Справедлива ли его посмертная слава? Без сомнения. И она нисколько не умаляет заслуг множества исследователей, на протяжении почти трех столетий изучавших эти проблемы [27, 28].

Осталось сказать, что пока человечество узнавало про Бориса Павловича Белоусова, его выгнали из института... «поскольку он стар и часто болеет». Он в самом деле был стар, но его творческая активность оставалась очень высокой. Он не вынес жизни без лаборатории и умер 12 июня 1970 года. Когда Жаботинский в 1974 году защищал докторскую диссертацию [29], его оппонент, великий человек, академик Рэм Викторович Хохлов сказал: «По аналогии с автоколебаниями процесс распространения волн в активной среде можно назвать автоволновым». Термин Хохлова прижился, только никто не знает, что слово было рождено у нас в зале. Эта новая часть науки, посвященная в основном пространственным эффектам, соединилась с исследованиями распространения волн возбуждения в сердце и вообще в «активных средах» Кринского–Иваницкого. Образовалась тесно взаимодействующая команда: Жаботинский, Кринский, Иваницкий, Заикин. И эта четверка двигала дело дальше.

Возникла идея о Ленинской премии. В списке соискателей не было Белоусова. И я был этим страшно возмущен. Ленинские премии, в отличие от Нобелевских, давали и посмертно. Я был представителем института в комитете по Ленинским премиям, и когда К.Б. Яцимирский спросил о Белоусове, ответил, что Борис Павлович первый, остальные все-таки идут за ним. Кто-то заметил, что это все равно невозможно, на подбор документов нужен месяц, а до 22 апреля, дня рождения Ленина, когда объявляли о присуждении премий, осталось три недели. Я заявил: «Берусь представить их завтра» и побежал звонить Георгию Ивановичу Задонскому, благородному человеку, в Институт биофизики Минздрава, где когда-то работал Б.П. Белоусов. Задонский заранее подобрал документы. «У вас папка целая?» – «А как же!» – «Привозите». Георгий Иванович привез папку. И Бориса Павловича внесли в список. Кажется, это никому не было нужно. Все суета, но... мне казалось, что это важно. Борису Павловичу присудили Ленинскую премию посмертно. Это было в 1980 году, через десять лет после его смерти.

Примечания к главе 13*

1. *Белоусов Б.П.* Периодически действующая реакция и ее механизм / В сб. рефератов по радиационной медицине за 1958 год. М.: Медгиз, 1959. С. 145–147.
2. *Белоусов Б.П.* Периодически действующая реакция и ее механизм / В сб.: Автоволновые процессы в системах с диффузией. Науч. тр. под ред. М.Т. Греховой. Горький, 1981. С. 176–186.
3. *Жаботинский А.М.* Периодический ход окисления малоновой кислоты в растворе (исследование кинетики реакции Белоусова). Биофизика. 1964. Т. 9. С. 306–311.
4. *Полищук В.* На общих основаниях. Новый мир. № 4. 1984. С. 83–207.
5. *Вольтер Б.В.* Легенда и быль о химических колебаниях. Знание – сила. 1988. № 4. С. 33–37.
6. *Zhabotinsky A.M.* A history of chemical oscillations and waves. CHAOS 1(4). 1991. P. 379–385.
7. *Лазарев П.П.* Исследования по ионной теории возбуждения. М., 1916.
8. *Шемякин Ф.М., Михалев П.Ф.* Физико-химические периодические процессы. М.-Л., 1938.
9. *Lotka A.J.* Contribution to the Theory of Periodic Reactions J.Phys.Chem. 1910. Vol. 14. P. 271.
10. *Lotka A.J.* Undamped Oscillations Derived from the Law of Mass Action J. Amer. Chem. Soc. 1920. Vol. 42. P. 1595–1599.
11. *Андронов А.А.* Предельные циклы Пуанкаре и теория автоколебаний. М., 1956. С. 41–43.
12. *Франк-Каменецкий Д.А.* Периодические процессы в кинетике окислительных реакций. М., 1939. Т. 25.

*Редакция считает уместным привести полный список цитируемой литературы, который представляет самостоятельный интерес.

13. Франк-Каменецкий Д.А. Успехи химии. 1941. Т. 10. С. 373.
14. Франк-Каменецкий Д.А., Сальников И.Е. О возможности автоколебаний в гомогенной химической системе при квадратичном автокатализе. Журнал физической химии. 1943. Т. 17. С. 79.
15. Сальников И.Е. К теории периодического протекания гомогенных химических реакций. Канд. дис. Горьковский ун-т., 1948.
16. Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.-Л., 1947.
17. Christiansen J.A. Elektrochem. 1958. Vol. 62. P. 225.
18. Christiansen J.A. Advances in Enzymology. 1961. Vol. 23. P. 83.
19. Шноль С.Э. Вопросы медицинской химии. 1958. Т. 4. С. 443.
20. Лев Александрович Блюменфельд – автор принципиальных научных концепций, множества научных статей и многих книг на русском и английском языках, основатель кафедры биофизики физического факультета МГУ, признанный глава отечественной школы биофизиков предполагал (и имел основания) стать профессиональным поэтом. Всю жизнь он пишет стихи. Они должны выйти отдельной книгой. Его биографический роман (под псевдонимом Лев Александров) «Две жизни» (роман издан в 1996 г. по инициативе, заботами и на средства Сергея Никитина) в значительной мере посвящен военным годам его биографии.
21. Андронов А.Л., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.
22. Жаботинский А.М. Исследование автоколебательных химических реакций в гомогенной жидкой среде. Канд. дис. Институт биофизики АН СССР. 1965.
23. Обзор результатов исследований, занимавших меня многие десятилетия: Шноль С.Э., Коломбет В.А., Пожарский Э.В., Зенченко Т.А., Зверева И.М., Конрадов А.А. О реализации дискретных состояний в ходе флуктуации в макроскопических процессах. Успехи физических наук. 1998. Т. 168. № 10. С. 1129-1140.
24. Чернавская Н.М., Чернавский Д.С. Биофизика. 1958. Вып. 3.
25. Колебательные процессы в биологических и химических системах. Труды Всесоюзного симпозиума по колебательным процессам в биологических и химических системах. Пушино-на-Оке, 21-26 марта 1966 г. М.: Наука, 1967.
26. Oscillations and Traveling Waves in Chemical Systems. Eds R.J. Field, M. Durger, John Wiley and Sons. N.Y., 1985.
27. Сальников И.Е. У истоков теории химических автоколебаний / В сб.: Динамика систем. Динамика и оптимизация. Нижний Новгород, 1992.
28. Сальников И.Е. Термокинетические колебания – взаимные колебания температуры и концентрации реагентов в гомогенной химической системе. (К 50-летию введения этого понятия Д.А. Франк-Каменецким) // Журнал физической химии. 1998. Т. 72. № 7. С. 1193–1195.
29. Жаботинский А.М. Концентрационные автоколебания. Наука, 1974. 178 с.