



СЛОЖНАЯ ВОЛНОВАЯ ДИНАМИКА АНСАМБЛЯ НЕЙРОНОПОДОБНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СО СЛОЖНОПороГОВЫМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

В.И. Некоркин, Д.С. Щапин, А.С. Дмитричев

Проведено исследование пространственно-временной динамики системы, моделирующей коллективное поведение ансамбля электрически связанных нервных клеток. Моделью элемента ансамбля является уравнение ФитцХью – Нагумо со сложнопороговым возбуждением. Изучены гетероклинические траектории системы и ассоциирующиеся с ними волновые фронты. В системе для бегущих волн обнаружено существование гетероклинического контура, образованного сепаратрисными многообразиями двух седло-фокусов. Показано, что наличие такого контура свидетельствует о сложной пространственно-временной динамике ансамбля – в виде ромбоподобных и нестационарных колебательных волновых структур.

Введение

Нелинейные волновые процессы, играющие фундаментальную роль в физике и математике, имеют также важное значение для нейронных систем [1–3]. С ними связано выполнение основной задачи нейронных систем – межнейронной коммуникации и обработки информации [4–7]. В нейронных системах наиболее известны и изучены волновые явления в виде бегущих фронтов и импульсов. Как правило, характеристики этих волн зависят только от локальных свойств среды и в определенных пределах не зависят от начальных условий, а для взаимодействия волн между собой и с границами среды типично свойство аннигиляции. Такие волны принято называть автоволнами [8]. Наряду с автоволнами в нейронных системах существуют волны, рассмотренные в работах [9–11], свойства и характеристики которых принципиально отличаются от автоволн. Они обладают частицеподобными свойствами и при взаимодействии друг с другом и с границами среды могут «переключаться» в новое состояние и образовывать сложные, в том числе, фрактальные [12, 13], пространственно-временные структуры активности и др. [14–16].

Эта работа посвящена исследованию нелинейных волновых структур в системе следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{u}_j = f(u) - v_j + d(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}), \\ \dot{v}_j = \varepsilon(g(u_j) - v_j - I), \end{cases} \quad (1)$$

$$j = 1, 2, \dots, N, \quad u_0(t) \equiv u_1(t), \quad u_{N+1}(t) \equiv u_N(t),$$

где

$$f(u) = u - u^3/3, \quad g(u) = \begin{cases} \alpha u, u \leq 0, \\ \beta u, u \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Заметим, что производная функции $g(u)$ имеет точку разрыва $u = 0$, в которой происходит скачок на величину $|\beta - \alpha|$ и поэтому система (1) требует доопределения при $u_j = 0, j = 1, 2, \dots, N$. Будем считать, что $g'(0) = \beta$. В этом случае траектории системы (1) будут непрерывны, а соответствующая производная при $u_j = 0$ имеет конечный скачок.

Система (1) описывает ансамбль нейроноподобных элементов типа Фитц-Хью – Нагумо со сложнопороговым возбуждением – в модели элемента пороговые свойства определяются сепаратрисой седла, сложным образом локализованной на фазовой плоскости [17, 18]. Исследование системы (1) представляет интерес в связи с двумя проблемами нейродинамики. Первая из них – выяснение механизмов коллективного возбуждения в виде кластеров активности в ансамбле электрически связанных нейронов. В этом случае переменная u_j качественно описывает динамику мембранного потенциала j -го нейрона ансамбля, а v_j – совокупное действие всех ионных токов, проходящих через мембрану этого нейрона и отвечающих за восстановление покоя мембраны. Поэтому переменную v_j часто называют восстанавливающей. Параметр d моделирует действие электрического синапса и характеризует величину взаимодействия между нейронами. Параметр I контролирует уровень деполяризации мембраны, а ε ($\varepsilon > 0$) – скорость изменения ионных токов. Для этой проблемы важны возбудимые свойства нейронов и поэтому здесь параметр ε выбирается достаточно малым. Параметры α и β ($\alpha, \beta > 0$) описывают нелинейные свойства ионных токов. Вторая проблема, ассоциирующаяся с системой (1), это исследование процессов распространения волн активности в нейронных ансамблях. В этом случае переменные u_j и v_j являются интегральными характеристиками некоторой группы нейронов (u_j – усредненное по группе значение мембранного потенциала, v_j – ионных токов). Для данной задачи важны бистабильные свойства среды и переходы «покой – возбужденное состояние». Поэтому параметр ε может быть здесь и не малым. В этой статье мы уделяем основное внимание второй проблеме и номер j элемента ансамбля будем трактовать как пространственную координату.

Статья структурирована следующим образом. В разделе 1 кратко излагается динамика элемента ансамбля. В разделе 2 вводится система для бегущих волн и исследуются ее основные свойства. Раздел 3 посвящен исследованию гетероклинических траекторий системы для бегущих волн. В разделе 4 изучается гетероклинический контур и ассоциирующиеся с ним волновые структуры. В Заключении представлено краткое обсуждение полученных результатов.

1. Динамика элемента ансамбля

Рассмотрим систему, описывающую динамику отдельного элемента ансамбля

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u) - v, \\ \dot{v} = \varepsilon(g(u) - v - I). \end{cases} \quad (3)$$

Исследование динамики системы (3) проведено в [18]. Приведем здесь краткое описание необходимых в дальнейшем динамических режимов системы (3) и их бифуркаций.

Будем рассматривать систему (3) в области параметров, в которой она одновременно имеет три состояния равновесия. Из (2) и (3) следует, что это условие выполняется, если параметр

$$I \in (-I_{\min}, I_{\max}), \quad (4)$$

$$\text{где } I_{\min} = \frac{2(1-\beta)^{3/2}}{3}, \quad I_{\max} = \frac{2(1-\alpha)^{3/2}}{3}.$$

При выполнении (4) система (3) имеет следующие состояния равновесия: $O_1(u_1^0, v_1^0)$, $O_2(u_2^0, v_2^0)$ и $O_3(u_3^0, v_3^0)$, где

$$\begin{aligned} u_1^0 &= -2\sqrt{1-\alpha} \cos\left(\frac{\Psi}{3}\right), & v_1^0 &= \alpha u_1^0, \\ u_2^0 &= \begin{cases} -2\sqrt{1-\alpha} \cos\left(\frac{\Phi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right), & v_2^0 = \alpha u_2^0, \quad I \leq 0, \\ -2\sqrt{1-\beta} \cos\left(\frac{\Psi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right), & v_2^0 = \beta u_2^0, \quad I > 0, \end{cases} & (5) \\ u_3^0 &= -2\sqrt{1-\beta} \cos\left(\frac{\Phi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right), & v_3^0 &= \beta u_3^0, \\ \cos \Phi &= \frac{-3I}{2(1-\beta)^{3/2}}, & \cos \Psi &= \frac{-3I}{2(1-\alpha)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Состояние равновесия O_2 является седлом, а состояния равновесия O_1 и O_3 являются узлами или фокусами, которые в зависимости от параметров могут быть устойчивыми (верхний индекс s) или неустойчивыми (индекс u). Зафиксируем для определенности параметры

$$\alpha = 0.8, \quad \beta = 0.9, \quad I = 0.024, \quad (6)$$

а параметр ε будем рассматривать в качестве контрольного. Разбиение полу-прямой $\varepsilon > 0$ на области, соответствующие различным структурно-устойчивым фазовым портретам системы (3), осуществляется бифуркационными значениями $\varepsilon = \varepsilon_i$ ($i = 1, \dots, 6$) (рис. 1). Фазовые портреты, отвечающие этим областям параметров системы (3), представлены на рис. 2: (а) соответствует значениям $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, (б) $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$, (в) $\varepsilon_2 < \varepsilon < \varepsilon_3$, (г) $\varepsilon_3 < \varepsilon < \varepsilon_4$, (д) $\varepsilon_4 < \varepsilon < \varepsilon_5$, (е) $\varepsilon_5 < \varepsilon < \varepsilon_6$, (ж) $\varepsilon > \varepsilon_6$. В точках, разделяющих эти области, происходят следующие бифуркации:

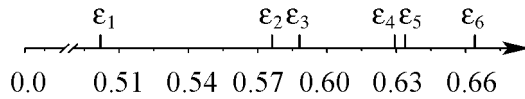


Рис. 1. Однопараметрическая бифуркационная диаграмма системы (3) для $\alpha = 0.8$; $\beta = 0.9$; $I = 0.024$, где $\varepsilon_1 = 0.5019\dots$; $\varepsilon_2 = 0.5762\dots$; $\varepsilon_3 = 0.5881\dots$; $\varepsilon_4 = 0.6293\dots$; $\varepsilon_5 = 0.6338\dots$; $\varepsilon_6 = 0.6640\dots$

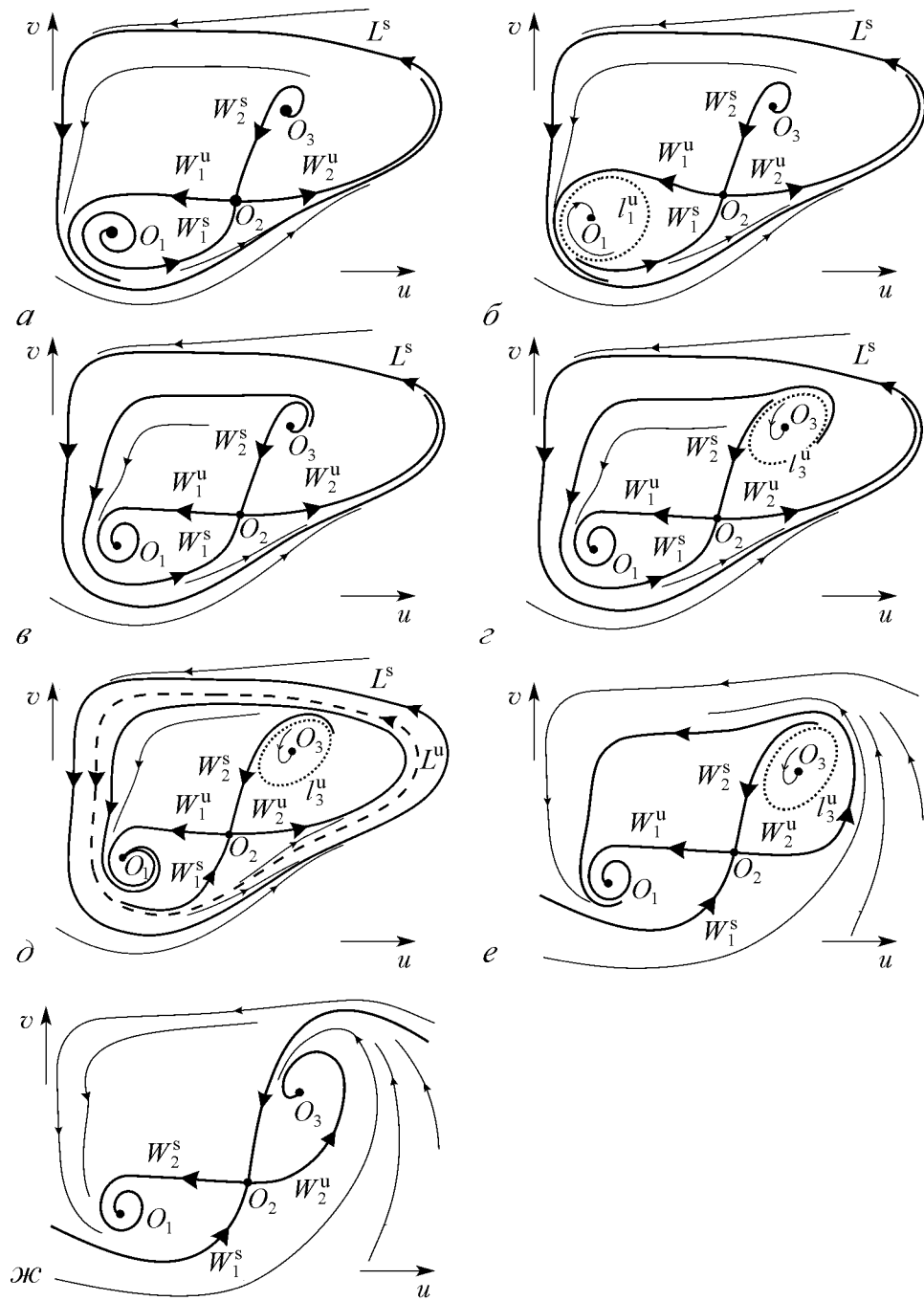


Рис. 2. Структурно-устойчивые фазовые портреты системы (3) для $\alpha = 0.9$; $\beta = 0.8$; $I = 0.024$

- при $\varepsilon = \varepsilon_1$ состояние равновесия O_1 изменяет свою устойчивость и в результате бифуркации Андронова – Хопфа рождается (в сторону $\varepsilon > \varepsilon_1$) неустойчивый предельный цикл l_1^u ;

- при $\varepsilon = \varepsilon_2$ цикл l_1^u «влипает» в «малую» петлю, образованную сепаратрисами W_1^u и W_1^s седла O_2 ;

- при $\varepsilon = \varepsilon_3$ происходит бифуркация Андронова – Хопфа, в результате которой неустойчивый фокус O_3 становится устойчивым и на фазовой плоскости появляется (в сторону $\varepsilon > \varepsilon_3$) неустойчивый предельный цикл l_3^u ;

- при $\varepsilon = \varepsilon_4$ смыкаются сепаратрисы W_2^u и W_1^s , образуют так называемую «большую» петлю сепаратрис (гомоклиническую орбиту), из которой рождается (в сторону $\varepsilon > \varepsilon_4$) «большой» неустойчивый предельный цикл L^u , охватывающий все три состояния равновесия;

- при $\varepsilon = \varepsilon_5$ предельные циклы L^u и L^s сливаются, образуя двукратный предельный цикл, который исчезает при $\varepsilon > \varepsilon_5$;

- при $\varepsilon = \varepsilon_6$ образуется «малая» петля (гомоклиническая орбита), образованная сепаратрисами W_2^u и W_2^s , в которую «влипает» неустойчивый предельный цикл l_3^u .

2. Система для бегущих волн

Рассмотрим бегущие волны системы (1) в длинноволновом приближении, когда характерные пространственные масштабы волны значительно превосходят собственные пространственные масштабы ансамбля (1). Будем искать решение системы (1) в следующем виде:

$$u_j(t) = u(\xi), v_j(t) = v(\xi), \quad (7)$$

где $\xi = t - jh$ ($h > 0$) – бегущая координата. Подставляя (7) в систему (1), получим

$$\begin{cases} \frac{du}{d\xi} = f(u) - v + d(u(\xi + h) - 2u(\xi) + u(\xi - h)), \\ \frac{dv}{d\xi} = \varepsilon(g(u) - v - I). \end{cases} \quad (8)$$

В рамках длинноволнового приближения из (8) имеем

$$\begin{cases} c \frac{du}{d\xi_H} = f(u) - v + \frac{d^2 u}{d\xi_H^2}, \\ c \frac{dv}{d\xi_H} = \varepsilon(g(u) - v - I), \end{cases} \quad (9)$$

где $\xi_H = c\xi$, а $0 < c < 1/(h\sqrt{d})$. Система (9) является системой для бегущих волн.

С помощью замены $z = v - g(u) + I$ система (9) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{cases} \dot{u} = y, \\ \dot{y} = cy + F(u) - I + z, \\ c\dot{z} = -\varepsilon z - cg'(u)y, \end{cases} \quad (10)$$

где $F(u) = -f(u) + g(u)$; точкой обозначено дифференцирование по ξ_H . Система (10) имеет трехмерное фазовое пространство, которое обозначим через G . Нетривиальным ограниченными траекториями системы (10) отвечают бегущие со скоростью $v = 1/h$ волны в ансамбле (1), профили которых определяются свойствами этих траекторий [19]. Например, если система (10) имеет в G предельный цикл, то в (1) может распространяться периодическая волна; гомоклинической к состоянию равновесия траектории отвечает бегущий импульс; гетероклинической траектории – бегущий фронт (кинк) и т. д. В этой работе мы покажем, что в системе (10) возможно существование гетероклинического контура, в окрестности которого существуют нетривиальные гиперболические множества, с которыми ассоциируются сложные волновые структуры ансамбля.

2.1. Состояния равновесия системы (10) и их локальные бифуркации.

При выполнении (4) система (10) имеет три состояния равновесия $O_1(u_1^0, 0, 0)$, $O_2(u_2^0, 0, 0)$ и $O_3(u_3^0, 0, 0)$, где u_i^0 определяется выражением (5). Как и в разделе 1, зафиксируем параметры α, β и I (см. условия (6)) и будем рассматривать параметрическую задачу на плоскости (ε, c) . На рис. 3 представлены результаты анализа

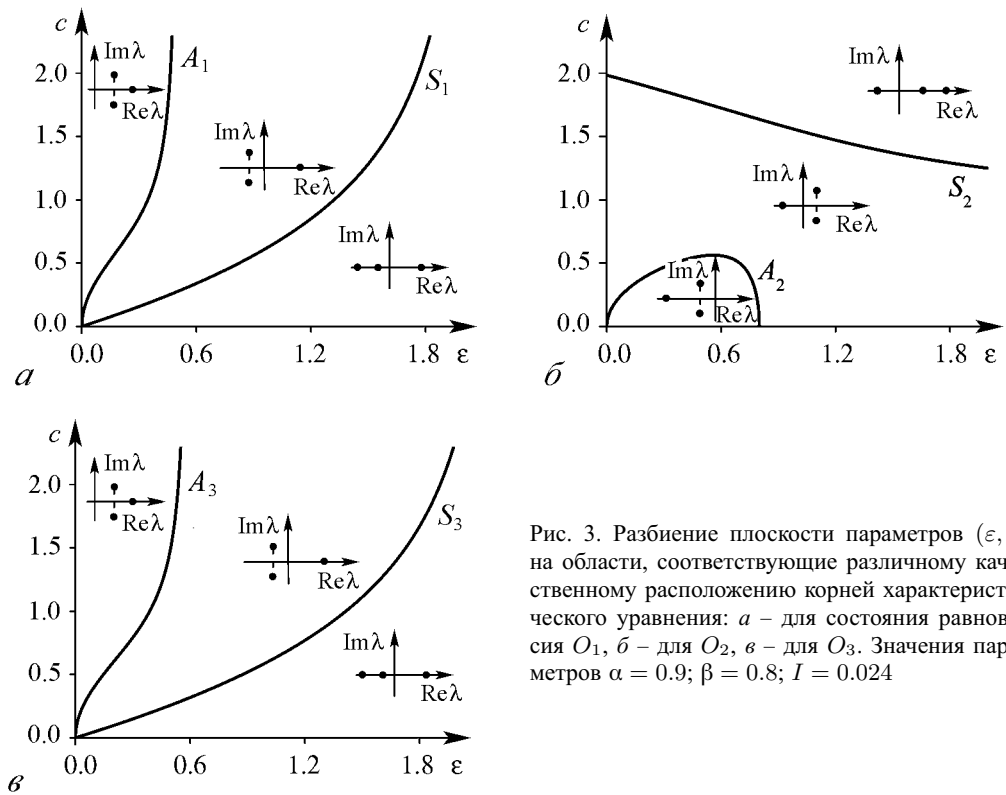


Рис. 3. Разбиение плоскости параметров (ε, c) на области, соответствующие различному качественному расположению корней характеристического уравнения: a – для состояния равновесия O_1 , b – для O_2 , v – для O_3 . Значения параметров $\alpha = 0.9$; $\beta = 0.8$; $I = 0.024$

качественного расположения корней характеристического уравнения на комплексной плоскости для состояний равновесия O_1 , O_2 и O_3 . Для каждого из состояний равновесия плоскость (ε, c) разбивается на три области линиями A_i и S_i ($i = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{ c = \sqrt{\frac{\varepsilon(\alpha - \varepsilon)}{f'(u_1^0) - \varepsilon}}, 0 \leq \varepsilon < f'(u_1^0) \right\}, \\ A_2 &= \left\{ c = \sqrt{\frac{\varepsilon(\beta - \varepsilon)}{f'(u_2^0) - \varepsilon}}, 0 \leq \varepsilon < \beta \right\}, \\ A_3 &= \left\{ c = \sqrt{\frac{\varepsilon(\beta - \varepsilon)}{f'(u_3^0) - \varepsilon}}, 0 \leq \varepsilon < f'(u_3^0) \right\}, \\ S_i &= \{-p^2 q_i^2 + 4p^3 r_i + 4q_i^3 - 18pq_i r_i + 27r_i^2 = 0\}, \\ p &\equiv \frac{\varepsilon}{c} - c, \quad q_i \equiv -\varepsilon + f'(u_i^0), \quad r_i \equiv \frac{\varepsilon}{c} F'(u_i^0). \end{aligned}$$

Из представленного на рис. 3 расположения корней характеристических уравнений для O_1 , O_2 и O_3 следует, что O_1 и O_3 являются либо неустойчивыми фокусами, либо седловыми состояниями равновесия (седло-фокусами или седлами) с одномерным устойчивым и двумерным неустойчивым многообразиями, а O_2 – либо устойчивый фокус, либо седловое состояние равновесия (седло-фокус или седло) с одномерным устойчивым и двумерным неустойчивым многообразиями. Отметим, не останавливаясь подробно, что при пересечении линий A_i в системе (10) происходит бифуркация Андронова – Хопфа [20], приводящая к рождению предельных циклов в окрестности соответствующих состояний равновесия O_i . При этом около состояний равновесия O_1 и O_3 появляются неустойчивые, а около O_2 – устойчивый предельные циклы.

Поскольку нас интересуют гетероклинические траектории, образованные многообразиями состояний равновесия O_1 и O_3 , далее будем рассматривать систему (10) в области параметров, где O_1 и O_3 являются седловыми состояниями равновесия. Обозначим через $W^s(O_1)$ и $W^u(O_1)$ ($W^s(O_3)$ и $W^u(O_3)$) устойчивое и неустойчивое многообразия состояния равновесия O_1 (соответственно O_3). Многообразие $W^u(O_1)$ ($W^u(O_3)$) состоит из точки O_1 (O_3) и двух выходящих траекторий – сепаратрис, которые обозначим через $W_1^u(O_1)$ и $W_2^u(O_1)$ ($W_1^u(O_3)$ и $W_2^u(O_3)$). Двумерное многообразие $W^s(O_1)$ ($W^s(O_3)$) представляет собой поверхность, проходящую через точку O_1 (O_3) и состоящую из траекторий, асимптотически стремящихся при $t \rightarrow +\infty$ к состоянию равновесия. Анализ собственных векторов матриц, линеаризованных в точках O_1 и O_3 систем, показывает, что неустойчивые многообразия $W^u(O_1)$ и $W^u(O_3)$ касаются в точках O_1 и O_3 , соответственно, прямых

$$\frac{u - u_i^0}{1} = \frac{y}{\lambda(O_i)} = \frac{z}{k}, \quad (11)$$

где $\lambda(O_i)$ – положительный корень характеристического уравнения для состояния равновесия O_i , а

$$k \equiv \lambda^2(O_i) - c\lambda(O_i) - F'(u_i^0), \quad i = 1, 3.$$

Из (11) следует, что одна из сепаратрис $W_1^u(O_1)$ (соответственно $W_1^u(O_3)$) выходит в полупространство $y > 0$, а другая $W_2^u(O_1)$ ($W_2^u(O_3)$) – в полупространство $y < 0$.

2.2. Поверхности без контакта. Проведем исследование нелокального поведения многообразий седловых состояний равновесия с помощью «конических» бесконтактных поверхностей [12, 21, 22]. Введем в рассмотрение функцию

$$V(u, y, z) = \frac{z^2}{2} - (2\varepsilon - \beta)\frac{y^2}{2} + (2\varepsilon - \beta) \int_{u_0}^u (F(\eta) - I) d\eta. \quad (12)$$

Производная функции $V(u, y, z)$ в силу системы (10) имеет вид

$$\dot{V} = -\frac{\varepsilon}{c}z^2 - [2\varepsilon - \beta + g'(u)]zy - c(2\varepsilon - \beta)y^2. \quad (13)$$

Нетрудно видеть, что при $\varepsilon > \beta$ будет выполняться неравенство

$$\dot{V}(u, y, z) \leq 0. \quad (14)$$

При этом $\dot{V} = 0$ лишь в точках прямой $\{y = z = 0\}$. Следовательно, при $\varepsilon > \beta$ на любой поверхности уровня $V(u, y, z) = C$, $C \equiv \text{const}$ (за исключением точек $\{V(u, y, z) = C\} \cap \{y = z = 0\}$) векторное поле системы (10) ориентировано внутрь области, границей которой является эта поверхность. Из (12) следует, что сечения поверхностей $V(x, y, z) = C$ плоскостями $u = \text{const}$ представляет собой либо гиперболы, либо две пересекающиеся в точке $y = z = 0$ прямые. С другой стороны, плоскости $y = \text{const}$ в зависимости от значения этой константы задают в сечении либо одну, либо две замкнутые линии (в частном случае замкнутые линии могут вырождаться в точку). Граничному, разделяющему эти случаи значению $y = \text{const}$ соответствует существование в сечении замкнутой линии с одной точкой самопересечения (типа «восьмерки»). Таким образом, поверхности $V(u, y, z) = C$ являются замкнутыми. Траектории системы (10) в силу (14) пересекают эти поверхности в одном направлении, так что вдоль траекторий значения C , соответствующие поверхностям уровня, убывают. Поэтому после пересечения какой-либо поверхности уровня $V(u, y, z) = C$ траектория системы (10) не может покинуть область фазового пространства G , ограниченную этой замкнутой поверхностью. Следовательно, при $\varepsilon > \beta$ система не имеет замкнутых траекторий.

Установим с помощью поверхностей $V(u, y, z) = C$ поведение сепаратрис седловых состояний равновесия O_1, O_3 . Для этого рассмотрим поверхности уровня, проходящие через эти точки

$$\begin{aligned} V(O_1) &= \{V(u, y, z) = 0\}, \\ V(O_3) &= \{V(u, y, z) = C_0\}, \\ C_0 &\equiv (2\varepsilon - \beta) \int_{u_1^0}^{u_3^0} (F(\eta) - I) d\eta. \end{aligned}$$

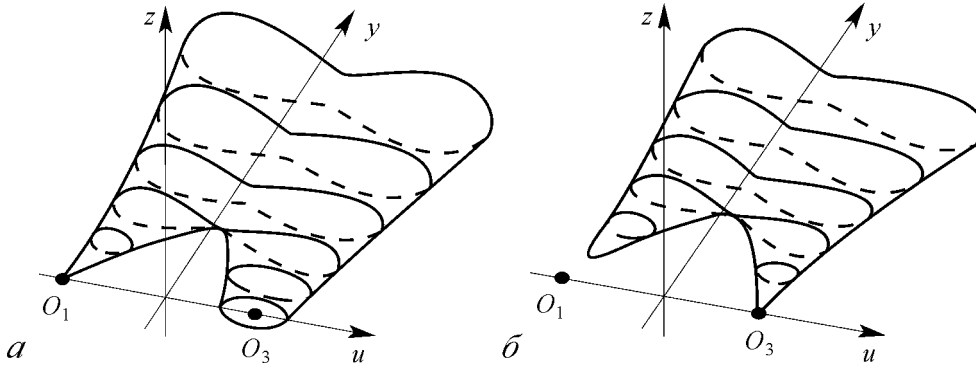


Рис. 4. *a* – качественный вид поверхности $V^+(O_1)$ при $I > I^*$ ($I^* = 0,0168$), *б* – качественный вид поверхности $V^+(O_3)$ при $I > I^*$

Существует два принципиально различных вида этих поверхностей: для значений $I > I^*$ и $I < I^*$, где I^* определяется условием

$$\int_{u_1^0}^{u_3^0} (F(\eta) - I) d\eta = 0.$$

Для значений параметров, удовлетворяющих (6), $I^* = 0.0168$.

Пусть $I > I^*$. В этом случае поверхность $V(O_1)$ при $y \geq 0$ ¹ имеет качественный вид, представленный на рис. 4, *a*, а поверхность $V(O_3)$ – на рис. 4, *б*. $V(O_3)$ состоит из O_3 и двух компонент $V^+(O_3)$ и $V^-(O_3)$, расположенных соответственно при $y > 0$ и $y < 0$. В силу (14), сепаратриса $W_1^u(O_3)$ выходит из точки O_3 внутрь области фазового пространства, ограниченной поверхностью $V^+(O_3)$. Поскольку область целиком расположена при $y > 0$, в силу первого уравнения системы (10), переменная $u(t)$ вдоль сепаратрисы $W_1^u(O_3)$ непрерывно возрастает. Кроме того, согласно (14), сепаратриса $W_1^u(O_3)$ пересекает поверхности $V(u, y, z) = C$ (где $C < C_0$), расположенные внутри поверхности $V^+(O_3)$, в одном направлении. Следовательно, сепаратриса $W_1^u(O_3)$ при $t \rightarrow +\infty$ стремится в бесконечность $\{u(t), y(t) \rightarrow +\infty\}$, оставаясь внутри области, ограниченной поверхностью $V^+(O_3)$. Совершенно аналогично можно показать, что сепаратриса $W_2^u(O_3)$ при $t \rightarrow +\infty$ стремится в бесконечность $\{u(t), y(t) \rightarrow -\infty\}$, не выходя из области, ограниченной поверхностью $V^-(O_3)$. Таким образом, при $I > I^*$, $\varepsilon > \beta$ обе сепаратрисы состояния равновесия O_3 гомоклинических и гетероклинических орбит образовывать не могут.

При $I < I^*$, $\varepsilon > \beta$ поверхность $V(O_1)$ имеет лишь одну точку пересечения с плоскостью $\{y = 0\}$ – состояние равновесия O_1 , а $V(O_3)$ пересекает $\{y = 0\}$ в точке O_3 по замкнутой линии, охватывающей состояние равновесия O_1 . Принимая во внимание свойства поверхностей $V(O_1)$ и $V(O_3)$, устанавливаем, что в этом случае не могут образовывать гомоклинические и гетероклинические траектории сепаратрисы состояния равновесия O_1 .

¹В силу инвариантности функции $V(u, y, z)$ относительно замены $y \rightarrow -y$, качественный вид поверхностей $V(O_1)$ и $V(O_3)$ при $y < 0$ будет точно такой же, как при $y > 0$.

Нетрудно видеть, что при $I = I^*$ поверхности $V(O_1)$ и $V(O_3)$ сливаются (в этом случае $C = 0$), образуя единую поверхность, пересекающую плоскость $y = 0$ в точках O_1 и O_3 . Поэтому при $I = I^*$, $\varepsilon > \beta$ все сепаратрисы состояний равновесия O_1 и O_3 стремятся в бесконечность и система (10) гомоклинических и гетероклинических траекторий не имеет.

2.3. Динамика системы (10) при $c \gg 1$. Представим для удобства систему (10) в виде одного уравнения

$$c \ddot{v} + (\varepsilon - c^2)\dot{u} + c[f'(u) - \varepsilon]u - \varepsilon[F(u) - I] = 0. \quad (15)$$

Введем в (15) новую бегущую переменную $c\zeta = \xi_H$ и представим в виде следующей системы:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\zeta} = y_H, \\ \frac{dy_H}{d\zeta} = z_H, \\ \mu \frac{dz_H}{d\zeta} = (1 - \mu\varepsilon)z_H + [\varepsilon - f'(u)]y_H + \varepsilon[F(u) - I], \end{cases} \quad (16)$$

где $\mu = 1/c^2$. При $c \gg 1$ система (16) имеет малый параметр μ при старшей производной и ее динамика является релаксационной. Применяя к системе (16) методы [23, 24] релаксационных колебаний, устанавливаем, что в фазовом пространстве G существует двумерное неустойчивое многообразие медленных движений, близкое к поверхности

$$z_H + (\varepsilon - f'(u))y_H + \varepsilon(F(u) - I) = 0. \quad (17)$$

На этом многообразии движения системы (16) определяются двумерной системой, близкой к системе

$$\begin{cases} \dot{u} = y_H, \\ \dot{y} = f'(u)y_H - \varepsilon(F(u) - I + y_H). \end{cases} \quad (18)$$

Вне малой окрестности неустойчивого многообразия движения системы (16) происходят по быстрым траекториям, близким к прямым $\{u = u^0, y_H = y^0\}$, где $u^0, y^0 = \text{const}$. По этим траекториям изображающая точка удаляется от многообразия медленных движений и уходит в бесконечность ($|z_H| \rightarrow \infty$). С помощью замены $y_H = f(u) - v$ система (18) может быть приведена к виду (3). Следовательно, на двумерном неустойчивом многообразии системы (16) движения близки к движениям системы (3), представленным на рис. 2. Так что для получения разбиения фазового пространства G на траектории при $c \gg 1$ достаточно к соответствующим фазовым портретам системы (3) «подклеить» быстрые неустойчивые траектории, близкие к прямым. В частности, отсюда вытекает, что при $c \gg 1$ все сепаратрисы седловых состояний равновесия O_1, O_3 уходят на бесконечность и гомоклинические и гетероклинические траектории они не образуют.

3. Гетероклинические траектории

Напомним, что для состояний равновесия траектория называется гетероклинической, если она при $\xi \rightarrow +\infty$ и $\xi \rightarrow -\infty$ стремится к различным состояниям равновесия. Покажем, что такие траектории в системе (10) существуют. Для определенности рассмотрим систему при $I > I^*$ в области параметров $\varepsilon > \beta$. В этой

области параметров, как установлено в разделе 2, сепаратрисы $W_2^u(O_1)$, $W_1^u(O_3)$ и $W_2^u(O_3)$ уходят в бесконечность и гетероклинических траекторий не образуют. Рассмотрим теперь поведение сепаратрисы $W_1^u(O_1)$. Если $W_1^u(O_1)$ образует гетероклиническую траекторию, то она принадлежит устойчивому многообразию $W^s(O_3)$ состояния равновесия O_3 . Следовательно, существование такой гетероклинической траектории можно установить, исследуя взаимное расположение $W_1^u(O_1)$ и $W^s(O_3)$ для различных значений параметров. Изучим взаимное расположение этих многообразий с помощью специальным образом построенных двумерных систем сравнения [19, 25, 26].

3.1. Системы сравнения. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{u} = y, \\ \dot{y} = cy + F(u) - \tilde{I}, \end{cases} \quad (19)$$

где \tilde{I} – параметр. При $\tilde{I} \in (I_{\min}, I_{\max})$ система (19) имеет три состояния равновесия: $\tilde{O}_1(\tilde{u}_1, 0)$, $\tilde{O}_2(\tilde{u}_2, 0)$ и $\tilde{O}_3(\tilde{u}_3, 0)$, где \tilde{u}_i определяются выражениями (5), в которых I нужно заменить на \tilde{I} . На рис. 5 представлено (см. [12]) разбиение плоскости параметров (I, c) на области, соответствующие различным фазовым портретам системы (19). Разбиение осуществляется прямыми $I = I_{\max}$, $I = -I_{\min}$ и двумя би-

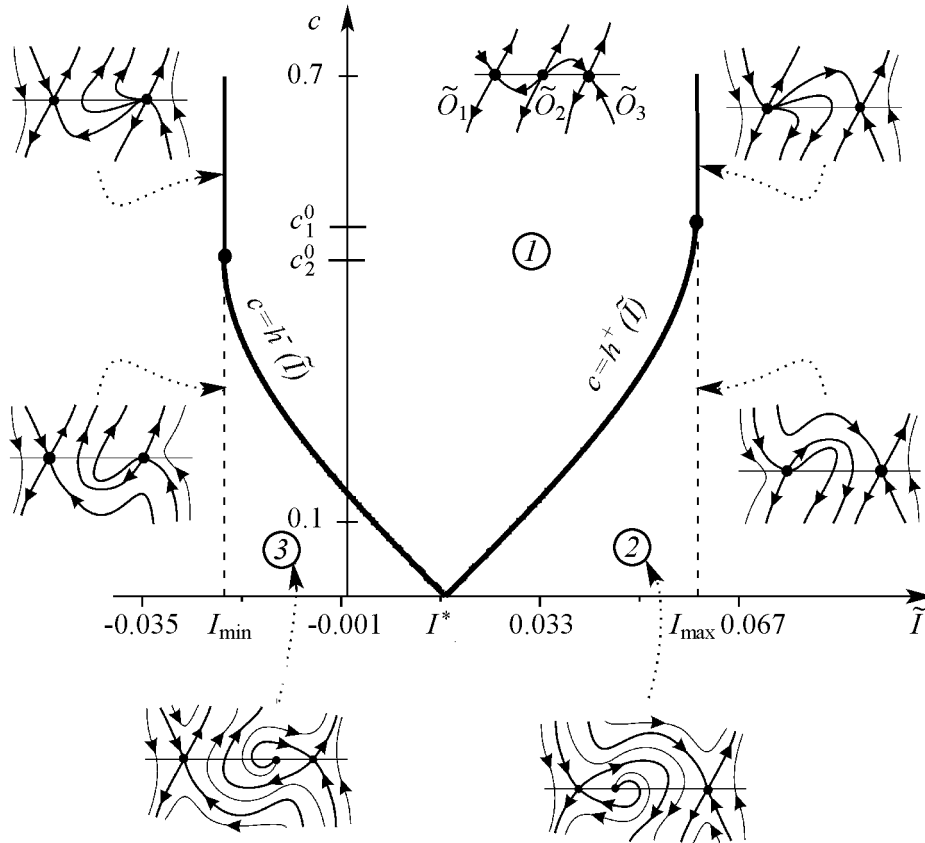


Рис. 5. Разбиение плоскости параметров и фазовые портреты системы (19) ($\alpha = 0.8$; $\beta = 0.9$; $c_1^0 = 0.450 \dots$; $c_2^0 = 0.494 \dots$)

фуркационными линиями $c = h^+(\tilde{I})$ и $c = h^-(\tilde{I})$. Прямая $I = I_{\max}$ соответствует слиянию состояний равновесия \tilde{O}_1 и \tilde{O}_2 и образованию седло-узла $\tilde{O}_{1,2}(-\sqrt{1-\alpha}, 0)$ с неустойчивой узловой областью. При $I = -I_{\min}$ седло-узел $\tilde{O}_{2,3}(-\sqrt{1-\beta}, 0)$ с неустойчивой узловой областью образуется от слияния состояний равновесия \tilde{O}_2 и \tilde{O}_3 . Линия $c = h^+(\tilde{I})$ соответствует существованию гетероклинической траектории, образованной сепаратрисами седел \tilde{O}_1 и \tilde{O}_3 , расположенными в полуплоскости $y > 0$, а $c = h^-(\tilde{I})$ – гетероклинической траектории, образованной сепаратрисами тех же седел, но в полуплоскости $y < 0$.

Введем в рассмотрение две системы сравнения

$$\dot{u} = y, \quad \dot{y} = cy + F(u) - I + z_0, \quad (20)$$

$$\dot{u} = y, \quad \dot{y} = cy + F(u) - I - z_0, \quad (21)$$

где $z_0 > 0$ – произвольный параметр. Каждая из этих систем представляет собой систему вида (19), у которой параметр $\tilde{I} = I - z_0$ и $\tilde{I} = I + z_0$, соответственно. Нетрудно видеть, что при выполнении условия

$$z_0 < z_0^*, \quad (22)$$

где $z_0^* = \min\{(I_{\max} - I), (I + I_{\min})\}$, системы (20), (21) имеют по три расположенных на прямой $y = 0$ состояния равновесия. При этом координаты этих состояний равновесия удовлетворяют неравенствам

$$u_1^+ < u_1^0 < u_1^- < u_2^- < u_2^0 < u_2^+ < u_3^- < u_3^0 < u_3^+, \quad (23)$$

где знак «+» относится к состояниям равновесия системы (20), а «-» – системы (21).

Потребуем, чтобы параметры систем (20), (21) одновременно принадлежали области 1 или области 2 (см. рис. 5). Используя разбиение плоскости параметров (I, c) , представленное на рис. 5, получаем, что параметры этих систем лежат в области 1, если выполняется неравенство

$$c > h^+(I + z_0), \quad (24)$$

и в области 2, если

$$c < h^+(I - z_0), \quad (25)$$

где z_0 удовлетворяет (22). При выполнении (24) или (25) обе системы имеют качественно одинаковые фазовые портреты, однако их состояния равновесия на прямой $y = 0$ смещены относительно друг друга (см. (23)). Взаимное расположение седел систем (20), (21) и их сепаратрис для областей параметров (24) и (25) имеет вид, представленный на рис. 6, *a* и *b*, соответственно. При этих значениях параметров сепаратрисы седел систем (20), (21) образуют так называемые [24, 25] направляющие русла, с помощью которых мы построим в фазовом пространстве G инвариантные области, содержащие многообразия седловых состояний равновесия O_1 и O_3 системы (10). Поскольку системы (20), (21) не зависят от переменной z , в фазовом пространстве G сепаратрисы седел этих систем образуют цилиндрические поверхности. Рассмотрим ориентацию векторного поля системы (10) на этих поверхностях. Из (10), (20) и (21) имеем

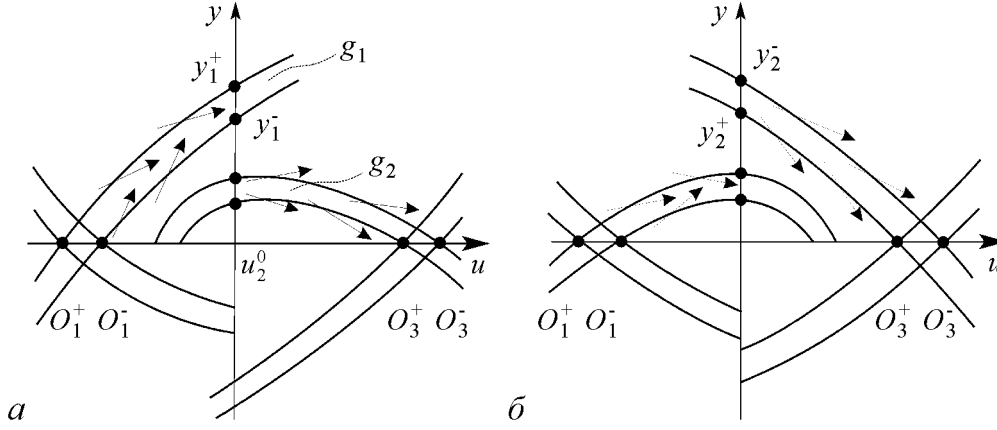


Рис. 6. Русла, образованные сепаратрисами: *a* – системы (20), *б* – системы (21)

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{du}\right)_{(10)} - \left(\frac{dy}{du}\right)_{(20)} &= \frac{z - z_0}{y} < 0, \text{ при } z < z_0, y > 0, \\ \left(\frac{dy}{du}\right)_{(10)} - \left(\frac{dy}{du}\right)_{(21)} &= \frac{z + z_0}{y} > 0, \text{ при } z > -z_0, y > 0. \end{aligned} \quad (26)$$

В силу (26) траектории системы (10) при $y > 0$ пересекают цилиндрические поверхности, образованные сепаратрисами седел системы (20) в сторону убывания координаты y , а сепаратрисами седел системы (21) – в сторону возрастания координаты y (см. рис. 6). Обозначим через g_1 (g_2) область фазового пространства G , расположенную при $y > 0$ и ограниченную цилиндрическими поверхностями, образованными выходящими (соответственно входящими) сепаратрисами седел систем (20), (21) и плоскостями $z = z_0$ и $z = -z_0$ (см. рис. 6). Рассмотрим ориентацию векторного поля системы (10) на этих плоскостях. Из системы (10) имеем

$$\begin{aligned} \dot{z}|_{z=z_0} &< 0, \text{ если } y > -\frac{\varepsilon z_0}{c\beta}, \\ \dot{z}|_{z=-z_0} &> 0, \text{ если } y < \frac{\varepsilon z_0}{c\beta}. \end{aligned} \quad (27)$$

Следовательно, при выполнении неравенства

$$|y| < \frac{\varepsilon z_0}{c\beta} \quad (28)$$

траектории системы (10) пересекают плоскости $z = \pm z_0$ внутри областей g_1 и g_2 . Поскольку седла O_1 и O_3 расположены внутри соответственно g_1 и g_2 (см. (23)), из установленной выше ориентации векторного поля (10) на границе g_1 и g_2 следует, что сепаратриса $W_1^u(O_1)$ и многообразие $W^s(O_3)$ остаются локализованными внутри областей g_1 и g_2 при выполнении (28).

3.2. Функция расщепления. Рассмотрим «следы» областей g_1 и g_2 на плоскости $\{u = u_2^0\}$, то есть области $S_1 = g_1 \cap \{u = u_2^0\}$ и $S_2 = g_2 \cap \{u = u_2^0\}$. Граница области S_1 (S_2) состоит из двух прямых $y = y_1^+(c, I - z_0)$ и $y = y_1^-(c, I + z_0)$ (соответственно $y = y_2^+(c, I - z_0)$ и $y = y_2^-(c, I + z_0)$), образованных выходящими

сепаратрисами седел систем соответственно (20) и (21), и двух прямых $z = \pm z_0$. Потребуем, чтобы

$$\max\{y_1^+(c, I - z_0), y_2^-(c, I + z_0)\} < \frac{\varepsilon z_0}{c\beta}. \quad (29)$$

При одновременном выполнении (22), (29) сепаратриса $W_1^u(O_1)$ и многообразие $W^s(O_3)$ остаются внутри областей g_1 и g_2 до первого пересечения с плоскостью $\{u = u_2^0\}$. Следовательно, при выполнении условий (22), (29) сепаратриса $W_1^u(O_1)$ пересекает плоскость $\{u = u_2^0\}$ в некоторой точке $M_1^u(y_1^u, z_1^u)$, а $W^s(O_3)$ – по некоторой кривой $N^s(y = y^s(z))$, соединяющей плоскости $z = \pm z_0$. Для характеристики взаимного расположения сепаратрисы $W_1^u(O_1)$ и многообразия $W^s(O_3)$ введем функцию «расщепления»²

$$\rho^+(\varepsilon, c) = y_1^u - y_1^s(z_1^u).$$

Функция $\rho^+(\varepsilon, c)$ определена и непрерывна, если одновременно выполнены условия (22) и (29), то есть в некоторой области параметров Δ , задаваемой неравенством (29), где z_0 изменяется от нуля до z_0^* . Нетрудно видеть (см. рис. 6), что при выполнении (24) справедливо неравенство

$$y_1^+(c, I - z_0) > y_2^-(c, I + z_0), \quad (30)$$

а при выполнении (25) – противоположное (30) неравенство. Поэтому на плоскости $\{u = u_2^0\}$ область S_1 целиком ($S_1 \cap S_2 = \emptyset$) расположена правее (по координате y) области S_2 при выполнении (24), а при выполнении (25) – наоборот, S_2 расположена целиком правее S_1 . Поскольку $M_1^s \in S_1$ и $N^s \in S_2$, из такого взаимного расположения S_1 и S_2 вытекают следующие неравенства

$$\begin{aligned} \rho^+(\varepsilon, c) &> 0, \text{ если } (\varepsilon, c) \in \Delta_1^+, \\ \rho^+(\varepsilon, c) &< 0, \text{ если } (\varepsilon, c) \in \Delta_2^+, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1^+ &= \left\{ c > h^+(I + z_0), \varepsilon > \frac{c\beta y_1^+(c, I - z_0)}{z_0} \right\}, \\ \Delta_2^+ &= \left\{ c < h^+(I - z_0), \varepsilon > \frac{c\beta y_2^-(c, I + z_0)}{z_0} \right\}, \\ 0 &< z_0 < z_0^*. \end{aligned} \quad (32)$$

Заметим, что границы областей Δ_1^+ и Δ_2^+ определяются кривыми, заданными в параметрическом виде, в котором роль варьируемого параметра играет z_0 . Причем при $z_0 \rightarrow 0$ эти кривые приближаются к значению $c = h^+(I)$. Вид областей Δ_1^+ и Δ_2^+ на плоскости (ε, c) представлен на рис. 7, а.

В силу непрерывности функции $\rho^+(\varepsilon, c)$, из (31) следует, что при изменении параметров с переходом из области, например Δ_1^+ , в область Δ_2^+ функция $\rho^+(\varepsilon, c)$ по крайней мере один раз обращается в нуль. Следовательно, существует бифуркационное множество $H^+ = \{\rho^+(\varepsilon, c) = 0\}$, соответствующее в фазовом пространстве G

²Конечно, функция $\rho^+(\varepsilon, c)$ зависит не только от ε и c , но и от всех остальных параметров модели (10), однако, поскольку все остальные параметры были зафиксированы (см.(6)), эту зависимость мы не указываем.

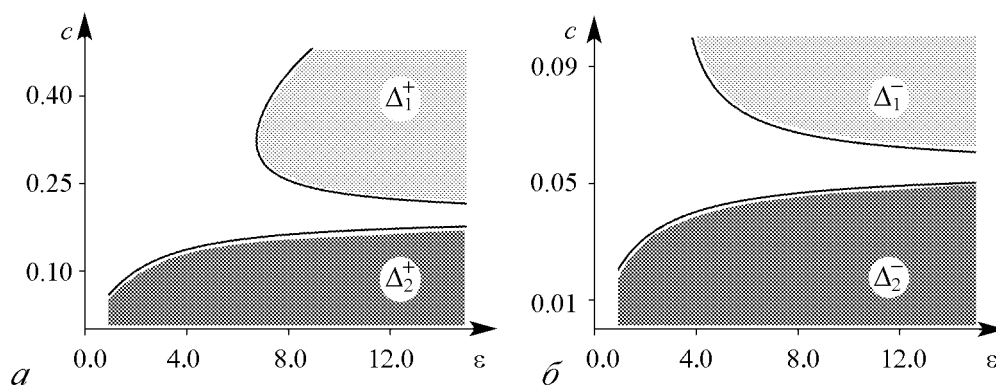


Рис. 7. *a* – области Δ_1^+ и Δ_2^+ ($I^* < I = 0.4$; $I^* = 0.0168$); *б* – области Δ_1^- и Δ_2^- ($I^* > I = 0.1$)

системы (10) гетероклинической кривой, образованной сепаратрисой $W_1^u(O_1)$ и многообразием $W^s(O_3)$.

Совершенно аналогично, в случае $I < I^*$, вводя функцию расщепления $\rho^-(\varepsilon, c)$ для характеристики взаимного расположения $W_2^u(O_3)$ и $W^s(O_1)$, можно показать существование бифуркационного множества $H^- = \{\rho^-(\varepsilon, c)\}$, отвечающего гетероклинической траектории, образованной этими многообразиями. На рис. 7, *б* представлены области Δ_1^- и Δ_2^- , для точек которых функция расщепления $\rho^-(\varepsilon, c)$ имеет разные знаки.

4. Гетероклинический контур и сложные волновые структуры

Значения бифуркационных множеств H^+ и H^- были найдены нами путем численного построения функций расщепления $\rho^+(\varepsilon, c)$ и $\rho^-(\varepsilon, c)$ и изучения их нулей. Для этого функции расщепления были определены и для значений параметров $\varepsilon \leq \beta$ (напомним, что в разделе 3 выполняется условие $\varepsilon > \beta$). Например, функция $\rho^+(\varepsilon, c)$ вводилась следующим образом. В фазовом пространстве G системы (10) строилась вспомогательная сфера Σ достаточно малого радиуса с центром в состоянии равновесия O_3 , на которой численно находился «след» сепаратрисы $W_1^u(O_1)$, то есть точка $T^u = W_1^u(O_1) \cap \Sigma$. В качестве функции $\rho^+(\varepsilon, c)$ выбиралось минимальное расстояние между точкой T^u и плоскостью $W_{loc}^s(O_3)$ – касательной плоскостью к многообразию $W^s(O_3)$. Аналогично, при $\varepsilon < \beta$ была введена функция расщепления $\rho^-(\varepsilon, c)$.

Результаты численного исследования множеств H^+ и H^- представлены на рис. 8, *а*. На плоскости (ε, c) множества H^+ и H^- представляют собой бифуркационные кривые, имеющие общую точку $H^0(\varepsilon^0, c^0)$. Точке H^0 отвечает в фазовом пространстве G гетероклинический контур C , образованный сепаратрисами $W_1^u(O_1)$ и $W_2^u(O_3)$ и многообразиями $W^s(O_3)$ и $W^s(O_1)$, соответственно (рис. 8, *б*). Бифуркационное множество системы (10) в окрестности H^0 не исчерпывается элементами H^+ и H^- . Покажем, что существуют бифуркационные значения параметров, соответствующие гомоклиническим траекториям (петлям сепаратрис), образованным многообразиями состояний равновесия O_1 и O_3 . Будем варьировать параметры ε и c в окрестности H^0 , например, вдоль кривой H^- , так чтобы выполнялось неравенство $\rho^+(\varepsilon, c) < 0$. Такое изменение параметров приведет к тому, что сепаратриса $W_1^u(O_1)$

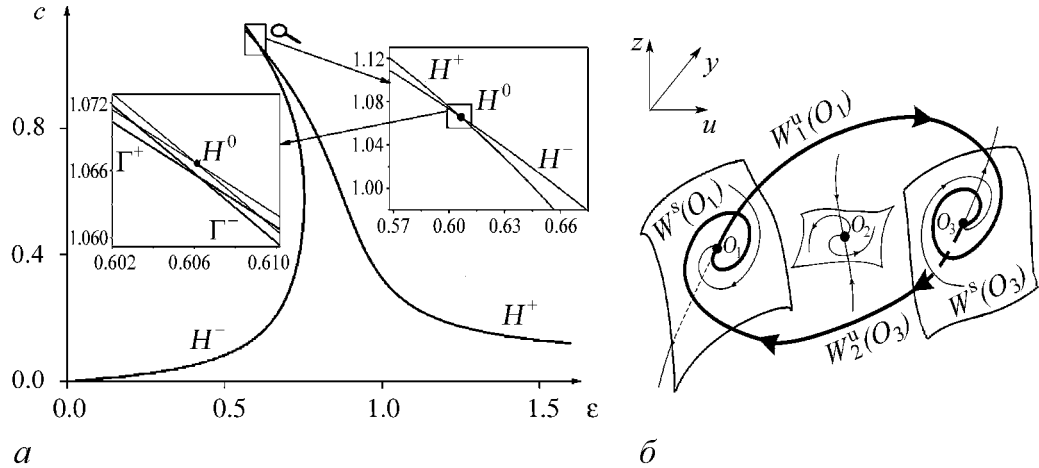


Рис. 8. *a* – бифуркационные множества H^+ , H^- и бифуркационные множества Γ^+ , Γ^- в окрестности точки H^0 ($\varepsilon^0 = 0.60593, c^0 = 1.0664$); *б* – гетероклинический контур, соответствующий точке H^0 ($\alpha = 0, 9; \beta = 0, 8; I = 0, 024$)

«покинет» многообразие $W^s(O_3)$ и начнет двигаться в G в окрестности сепаратрисы $W_2^u(O_3)$. С другой стороны, в пространстве параметров существуют области, для которых взаимное расположение сепаратрисы $W_2^u(O_3)$ и $W^s(O_1)$ характеризуется тем, что $\rho^-(\varepsilon, c) > 0$ и $\rho^-(\varepsilon, c) < 0$. Отсюда, поскольку сепаратриса $W_1^u(O_1)$ локализована в окрестности сепаратрисы $W_2^u(O_3)$, вытекает существование областей параметров, для которых сепаратриса $W_1^u(O_1)$ расположена по разные стороны от многообразия $W^s(O_1)$. Очевидно, что между этими областями существует бифуркационное множество Γ^+ , отвечающее гомоклиническим траекториям системы (10), образованным сепаратрисой $W_1^u(O_1)$, возвращающейся в O_1 по многообразию $W^s(O_1)$. Совершенно аналогично устанавливается существование в окрестности H^0 множества Γ^- , соответствующего гомоклиническим траекториям, образованным сепаратрисой $W_2^u(O_3)$. Результаты численного построения Γ^+ и Γ^- представлены на рис. 8, *a*. При выполнении (6) в точке H^0 и ее окрестности состояния равновесия O_1 и O_3 являются седло-фокусами (см. раздел 2.1), для которых так называемые седловые величины

$$\sigma(O_i) = \lambda_3(O_i) + \operatorname{Re}\lambda_{1,2}(O_i), \quad i = 1, 3,$$

где $\lambda_3(O_i)$ и $\lambda_{1,2}(O_i)$ – корни характеристического уравнения для O_i , являются положительными. В соответствии с теоремой Шильникова [27] такие гомоклинические орбиты ассоциируются с хаотической динамикой, так как в окрестности каждой из петель Γ^+ и Γ^- (как в момент существования, так и при разрушении в обе стороны) существует нетривиальное гиперболическое множество, включающее бесконечное множество периодических седловых траекторий и др.

Таким образом, для значений параметров из окрестности H^0 система (10) для бегущих волн демонстрирует чрезвычайно сложную динамику и можно ожидать, что и пространственно-временное поведение всего ансамбля (1) в этом случае будет нетривиальным. Проведенное нами численное моделирование динамики ансамбля (1) подтвердило справедливость этого утверждения. Был рассмотрен ансамбль (1) из шестисот элементов ($N = 600$), для которого численно решалась задача с начальными условиями для различных значений параметра ε . Во всех случаях начальные условия были одни и те же и имели для $u_j(0)$ и $v_j(0)$ вид, представлен-

ный на рис. 9, *a*. В случаях, когда параметр ε был выбран «вдали» от точки H^0 , в ансамбле (1) распространялись лишь простые волновые фронты, которые при столкновении друг с другом аннигилировали и переводили ансамбль в пространственно-однородное состояние, соответствующее либо состоянию равновесия O_3 (рис. 9, *б*) либо $-O_1$ (рис. 9, *в*). Совершенно другое поведение демонстрирует ансамбль (1), когда значение ε выбрано в окрестности точки $\varepsilon = \varepsilon^0$. В этом случае наличие нетривиального гиперболического множества и, следовательно, бесконечного множества неустойчивых периодических волн и других нетривиальных волновых движений в ансамбле (1) приводили к тому, что волновые фронты принципиально изменяли свою динамику. Теперь волновые фронты «проходят» друг сквозь

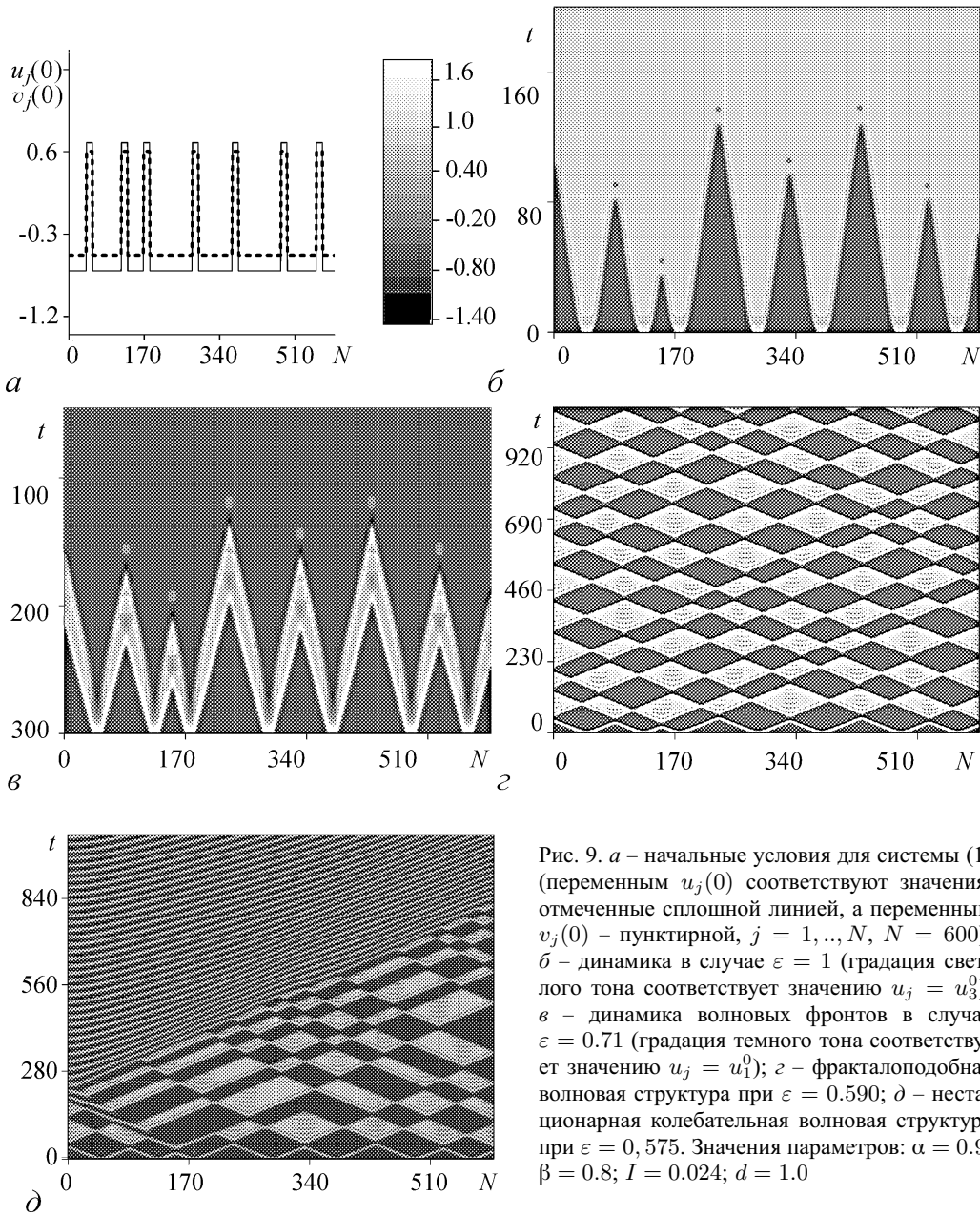


Рис. 9. *a* – начальные условия для системы (1) (переменным $u_j(0)$ соответствуют значения, отмеченные сплошной линией, а переменным $v_j(0)$ – пунктирной, $j = 1, \dots, N$, $N = 600$); *б* – динамика в случае $\varepsilon = 1$ (градация светлого тона соответствует значению $u_j = u_3^0$); *в* – динамика волновых фронтов в случае $\varepsilon = 0.71$ (градация темного тона соответствует значению $u_j = u_1^0$); *г* – фракталоподобная волновая структура при $\varepsilon = 0.590$; *д* – нестационарная колебательная волновая структура при $\varepsilon = 0,575$. Значения параметров: $\alpha = 0.9$; $\beta = 0.8$; $I = 0.024$; $d = 1.0$

друга и отражаются от границ подобно классическим солитонам. В результате такого поведения в ансамбле (1) образуются сложные волновые структуры. Два примера таких структур представлены на рис. 9, ε , δ . Волновая структура на рис. 9, ε является ромбоподобной, а на рис. 9, δ – нестационарной колебательно-волновой, которая устанавливается в результате сложного взаимодействия волновых фронтов.

Заключение

Проведено исследование пространственно-временной динамики ансамбля (1), моделирующего коллективное поведение электрически связанных нейронов, обладающих колебательными свойствами. Обнаружено, что коллективная активность ансамбля существенно зависит от значения параметра ε , который управляет скоростью изменения ионных токов через мембрану нейрона, то есть от скорости изменения восстанавливающей переменной v . При достаточно медленном или достаточно быстром изменении v ансамбль (1) ведет себя как типичная система «реакция – диффузия» с автоволновой динамикой. В этом случае ведущую роль играют волновые фронты, взаимодействие которых приводит систему в пространственно-однородное состояние. Совершенно другую динамику демонстрирует ансамбль (1), если параметр ε лежит в некоторой средней области. Даже очень простые начальные условия вызывают в ансамбле сложные пространственно-временные структуры. Для этих значений ε система (1) перестает быть автоволновой и волны начинают взаимодействовать подобно классическим солитонам.

Мы установили, что сложная волновая динамика системы (1) ассоциируется с наличием у системы для бегущих волн гетероклинического контура, образованного многообразиями двух седло-фокусов, имеющих преобладающее неустойчивое направление. Другими словами, существование такого контура можно рассматривать как некоторый признак возможной сложной волновой динамики системы.

Работа поддержана грантами РФФИ (проекты 06-02-16137, 05-02-17441).

Библиографический список

1. *Murray J.D.* Mathematical Biology, Second Corrected Edition. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
2. *Winfree A.T.* The geometry of Biological Time. Springer-Verlag, New-York, 1980.
3. *Scott A.* Neuroscience: a mathematical primer. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
4. *Koch C.* Biophysics of computation: information processing in single neurons. Oxford University Press, 1998.
5. *Казанцев В.Б., Некоркин В.И.* Динамика колебательных нейронов. Информационные аспекты // Нелинейные волны – 2002 / Ред. А.В. Гапонов-Грехов, В.И. Некоркин. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2003.
6. *Борисюк Г.Н., Борисюк Р.М., Казанович Я.Б., Иваницкий Г.Р.* Модели динамики нейронной активности при обработке информации мозгом – итоги «десятилетия» // УФН. 2002. Т. 172, № 10. С. 1189.
7. *Потапов А.Б., Али М.К.* Нелинейная динамика обработки информации в нейронных сетях // Новое в синергетике: Взгляд в третье тысячелетие / Ред. Г.Г. Малинецкий, С.П. Курдюмов. М.: Наука, 2002.
8. *Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г.* Автоволновые процессы. М.: Наука, 1987.

9. Морнев О.А., Асланиди О.В., Алиев Р.Р., Чайлахян. Солитонный режим в уравнении ФитцХью – Нагумо: отражение сталкивающихся импульсов возбуждения // ДАН. 1996. Т. 347. С. 123.
10. Асланиди О.В., Морнев О.А. Об отражении бегущих импульсов возбуждения // Биофизика. 1996. Т. 41. С. 953.
11. Асланиди О.В., Морнев О.А. Могут ли сталкивающиеся нервные импульсы отражаться? // Письма в ЖЭТФ. 1997. Т. 65. С. 553.
12. Некоркин В.И. Бегущие импульсы в двухкомпонентной активной среде с диффузией // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31, №1. С. 41.
13. Nekorkin V.I., Kazantsev V.B. Autowaves and solitons in three component reaction-diffusion system // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2002. Vol. 12, № 11. P. 2421.
14. Hayase Y. Collision and self-replication of pulses in a reaction diffusion system // J. of the Physical Society of Japan. 1997. Vol. 66, № 9. P. 2584.
15. Hayase Y., Ohta T. Self replicating pulses and Sierpinski gaskets in excitable media // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62, № 5. P. 5998.
16. Kazantsev V.B., Nekorkin V. I., Binczak S., Bilbault J.M. Spiking patterns emerging from wave instabilities in one-dimensional neural lattice // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 68. P. 017201.
17. Kazantsev V.B. Selective communication and information processing by excitable systems // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64. P. 056210.
18. Некоркин В.И., Дмитричев А. С., Щапин Д.С., Казанцев В.Б. Динамика модели нейрона со сложнопороговым возбуждением // Математическое моделирование. 2005. Т. 17, № 6. С. 75.
19. Nekorkin V.I., Velarde M.G. Sinergetic phenomena in active lattices. Springer-Verlag, 2002, 357 p.
20. Марсден Дж., Мак Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 368 с.
21. Максимов А.Г., Некоркин В.И. Гетероклинические траектории и фронты сложной формы модели ФитцХью – Нагумо // Математическое моделирование. 1990. Т. 2, № 2. С. 129.
22. Nekorkin V.I., Chua L.O. Spatial disorder and wave fronts in a chain of coupled Chua's circuits // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1993. Vol. 3. P. 1281.
23. Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973.
24. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.
25. Белых В.Н., Некоркин В.И. О качественном исследовании многомерной фазовой системы // Сибирский матем. журнал. 1977. Т. 18, № 4. С. 723.
26. Belykh V.N. Homoclinic and heteroclinic linkages in concrete systems: nonlocal analysis and model maps // Amer. Math. Soc. Transl. (2) 2000. Vol. 200. P. 51.
27. Шильников Л.П. К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус // Матем. сб. 1971. 81(123), № 1. С. 92.

Институт прикладной физики РАН,
Н.Новгород

Поступила в редакцию 10.04.2006
После доработки 06.11.2006

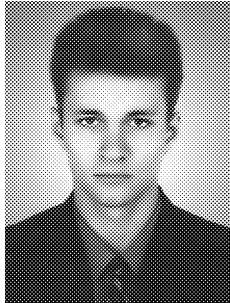
COMPLEX WAVE DYNAMICS OF ENSEMBLE OF NEURON-LIKE ELEMENTS WITH COMPLEX THRESHOLD EXCITATION

V.I. Nekorkin, D.S. Shapin, A.S. Dmitrichev

We present the analysis of spatiotemporal dynamics in the system modeling collective behaviour of ensemble of electrically coupled neuronal cells. The dynamics of local element is described by the FitzHugh – Nagumo system with complex threshold excitation. Heteroclinic orbits and corresponding wave fronts are investigated. We show that in the phase space of system for traveling waves there exist heteroclinic cycle formed by separatrix manifolds of two saddle-foci. It is shown that the existence of such cycle leads to complex spatiotemporal dynamics of ensemble including rhomb-like and nonstationary oscillating wave structures.



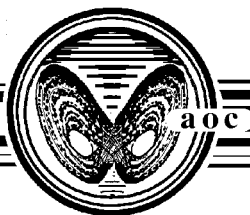
Некоркин Владимир Исаакович – родился на Украине (1948), окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета (1971). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1981, ННГУ) и доктора физико-математических наук (1992, СГУ). С 1971 года работал в Нижегородском институте прикладной математики, с 1983 по 1986 год в Нижегородском политехническом институте, с 1986 года и по настоящее время работает на радиофизическом факультете ННГУ, профессор. Область научных интересов - теория колебаний и волн, структурообразование и нелинейные волны в непрерывных и дискретных средах, синхронизация и пространственно-временной хаос. Имеет более 100 научных публикаций в указанных направлениях, в том числе две монографии (в соавторстве). В качестве приглашенного профессора читал лекции в Мадридском и Стэнфордском университетах. Работал в Калифорнийском университете.
E-mail: vnekorkin@appl.sci-nnov.ru



Шапин Дмитрий Сергеевич – родился в Нижнем Новгороде (1981), закончил Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (2003). Учится в аспирантуре Института прикладной физики РАН. Область научных интересов – теория нелинейных колебаний и волн, нейродинамика.



Дмитричев Алексей Сергеевич – родился в с. Слободское Кстовского района Нижегородской области (1980), окончил Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (2002). После окончания ННГУ работает в ИПФ РАН.



ГЕНЕРАТОР ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ РАДИОДИАПАЗОНА НА ОСНОВЕ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С 2.5 СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Е.В. Ефремова, Н.В. Атанов, Ю.А. Дмитриев

Предлагается генератор хаоса радиодиапазона на основе биполярного транзистора. Исследуется математическая модель генератора – автоколебательная система с 2.5 степенями свободы. Анализируется динамика генератора в пакете схемотехнического моделирования Advanced Design System (ADS) с использованием параметров реального транзистора, моделирование генератора осуществляется с учетом свойств подложки. Результаты моделирования в ADS сопоставляются с экспериментальными данными. Показывается, что использование пакета ADS для анализа генератора и учет влияния топологии платы и характеристик материала макета позволяют максимально приблизить результаты моделирования к эксперименту.

Введение

При реализации беспроводных коммуникационных систем на основе хаотических сигналов ключевым моментом является создание генераторов хаоса, которые обеспечивают заданные выходные характеристики колебаний, в том числе спектральные, автокорреляционные и энергетические, а также являются достаточно технологичными, с точки зрения производства и настройки [1-3].

Для таких приложений, как сверхширокополосные локальные сети и сенсорные сверхширокополосные сети, основным требованием к генератору является формирование сигнала в заданной полосе частот с равномерным спектром и определенной спектральной плотностью мощности.

Принципиальная возможность формирования заданного спектра сигнала в генераторах хаоса существует для генераторов на основе кольцевых автоколебательных систем, для которых разработана соответствующая теория формирования спектра хаотического сигнала [4, 5]. Однако в них используются нелинейные элементы с характеристикой, имеющей падающий участок, а также буферные каскады между элементами цепи. Это усложняет схему генератора и затрудняет его реализацию в радиочастотном и СВЧ диапазонах. Существует так же значительное количество конструкций генераторов хаоса, выполняемых с помощью микрополосковой технологии [1, 3, 6]. К сожалению, их широкое использование затруднено из-за значительных габаритов, сложности настройки и, как следствие, высокой стоимости.

Таким образом, если речь заходит о компактных, прецизионных устройствах радиочастотного и СВЧ диапазона с воспроизводимыми характеристиками, а также о возможной последующей реализации их в виде микрочипов, то становится ясно, что целесообразно использовать генераторы на сосредоточенных элементах с биполярным или полевым транзистором в качестве активного элемента. В ряду других причин, делающих такие генераторы привлекательными, с точки зрения их применения в коммуникационных системах, необходимо выделить следующие.

Биполярный транзистор – типичный, широко распространенный электронный элемент, относительно легко реализуемый в радиочастотном и СВЧ диапазонах. Известен также ряд низкочастотных транзисторных осцилляторов, демонстрирующих хаотические колебания, и некоторые из них позволяют управлять формой спектра мощности колебаний [7-11]. Так, в работе [11] предложен подход к построению генераторов хаоса на основе единственного транзистора и пассивного четырехполюсника, замкнутых в цепь обратной связи, и показано, что путем подбора параметров пассивного четырехполюсника можно формировать спектр мощности выходного сигнала генератора.

В данной статье рассматривается один из генераторов этого класса. Математическая модель генератора вводится в первом разделе и описывается пятью дифференциальными уравнениями первого порядка. Во втором разделе статьи исследуются динамические процессы в этой модели. Это исследование является необходимым предварительным этапом для изучения динамических свойств генератора в области радиочастот.

Для анализа динамики генератора на высоких частотах недостаточно просто пересчитать параметры его математической модели. На высоких частотах все без исключения элементы генератора – транзистор, емкости, индуктивности, резисторы – представляют собой достаточно сложные динамические системы, которые должны быть адекватно введены в модель генератора, если нужно получить соответствие между поведением модели и физического устройства. Кроме того, должно быть учтено влияние подложки и ее топологии.

Такое, адекватное в области радиочастот моделирование проводится в третьем разделе статьи с помощью специального пакета схемотехнического моделирования Advance Design System (ADS).

В четвертом разделе статьи описывается макет генератора хаоса, спектр мощности сигнала которого сосредоточен в области частот $100 \div 500$ МГц, анализируется его поведение в зависимости от значений параметров входящих в него элементов и приводятся экспериментальные результаты.

Непосредственные измерения спектра мощности колебаний и их формы не всегда обеспечивают полное понимание явлений в генераторе. Однако следует отметить, что современные цифровые осциллографы позволяют оцифровывать и сохранять достаточно длинные серии данных даже в области радиочастот. Эти данные затем могут быть обработаны в соответствии с процедурами, принятыми при анализе нелинейных процессов. В пятом разделе статьи таким образом производится восстановление аттракторов, соответствующих колебаниям в генераторе, и расчет их корреляционной размерности.

Наконец, в Заключении экспериментальные результаты сравниваются с расчетными и делаются выводы.

1. Математическая модель генератора

Рассмотрим генератор, схема которого приведена на рис. 1. Генератор состоит из активного элемента – биполярного транзистора и пассивного четырехполюсника, замкнутых в цепь обратной связи.

Динамика математической модели генератора описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} C_0 \dot{V}_{CE} &= I_1 - I_C, \\ L_1 \dot{I}_1 &= V_1 - V_{CE} - R_1 I_1, \\ C_1 \dot{V}_1 &= I_2 - I_1, \\ L_2 \dot{I}_2 &= V_C - V_1 - R_2 I_2 + V_{BE}, \\ C_2 \dot{V}_{BE} &= (V_E - V_{BE})/R_E - I_2 - I_B, \end{aligned} \quad (1)$$

где V_{CE} , V_{BE} – напряжения коллектор – эмиттер и база – эмиттер; V_1 – напряжение на емкости C_1 ; I_1 , I_2 , I_C , I_B – токи через индуктивность L_1 , индуктивность L_2 , коллектор С и базу В.

Введем замену переменных: $V_A = V_1 - V_{BE}$. Такая замена эквивалентна измерению напряжения в точке А относительно земли. Система дифференциальных уравнений (1) теперь принимает вид

$$\begin{aligned} C_0 \dot{V}_{CE} &= I_1 - I_C, \\ L_1 \dot{I}_1 &= V_A + V_{BE} - V_{CE} - R_1 I_1, \\ C_1 \dot{V}_A &= I_2 - I_1 - \frac{C_1}{C_2} ((V_E - V_{BE})/R_E - I_2 - I_B), \\ L_2 \dot{I}_2 &= V_C - V_A - R_2 I_2, \\ C_2 \dot{V}_{BE} &= (V_E - V_{BE})/R_E - I_2 - I_B. \end{aligned} \quad (2)$$

Для описания работы транзистора в модели используем кусочно-линейную аппроксимацию статической вольт-амперной характеристики транзистора

$$\begin{aligned} I_B &= 0, \text{ если } V_{BE} \leq V_T, \\ I_B &= (V_{BE} - V_T)/R_{BE}, \text{ если } V_{BE} > V_T, \\ I_C &= \beta I_B, \end{aligned} \quad (3)$$

где V_T – барьерный потенциал (примерно 0.75 В), R_{BE} – сопротивление перехода база – эмиттер, β – коэффициент усиления транзистора.

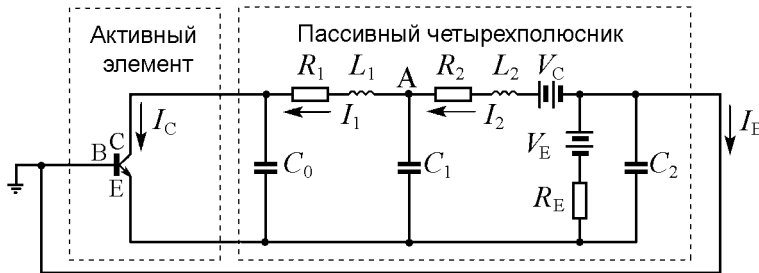


Рис. 1. Схема генератора с 2.5 степенями свободы

В безразмерной форме уравнения модели имеют вид

$$\begin{aligned}
\dot{v}_{CE} &= \frac{1}{\omega_0 C_0 R_{BE}} (i_1 - i_C), \\
\dot{i}_1 &= \frac{R_{BE}}{\omega_0 L_1} \left(v_A + v_{BE} - v_{CE} - \frac{R_1}{R_{BE}} i_1 \right), \\
\dot{v}_A &= \frac{1}{\omega_0 C_1 R_{BE}} \left(-\frac{R_{BE}}{R_E} (v_E - v_{BE}) + i_B + \left(1 + \frac{C_2}{C_1} \right) i_2 - \frac{C_2}{C_1} i_1 \right), \\
\dot{i}_2 &= \frac{R_{BE}}{\omega_0 L_2} \left(v_C - v_A - \frac{R_2}{R_{BE}} i_2 \right), \\
\dot{v}_{BE} &= \frac{1}{\omega_0 C_2 R_{BE}} \left(\frac{R_{BE}}{R_E} (v_E - v_{BE}) - i_2 - i_B \right),
\end{aligned} \tag{4}$$

где нелинейность $i_B(v_{BE})$

$$i_B(v_{BE}) = \begin{cases} 0, & \text{если } v_{BE} \leq 1, \\ v_{BE} - 1, & \text{если } v_{BE} > 1, \end{cases} \tag{5}$$

а связь между нормированными переменными и параметрами с исходными переменными и параметрами задается соотношениями $d/dt' = \omega_0 d/dt$, $v_{CE} = V_{CE}/V_T$, $v_{BE} = V_{BE}/V_T$, $v_A = V_A/V_T$, $i_1 = I_1/I_0$, $i_2 = I_2/I_0$, $v_E = V_E/V_T$, $v_C = V_C/V_T$, $I_0 = V_T/R_{BE}$, $i_C = \beta i_B(v_{BE})$, $\omega_0 = \sqrt{(C_0 + C_1)/(L_1 C_0 C_1)}$.

2. Динамика генератора с кусочно-линейной вольт-амперной характеристикой транзистора

В случае использования кусочно-линейной аппроксимации вольт-амперной характеристики поведение генератора описывается двумя системами линейных дифференциальных уравнений, одна из которых определяет его динамику в области $V_{BE} \leq 1$, а другая – в области $V_{BE} > 1$. Модель генератора (4) обладает двумя точками равновесия. Точка равновесия в области $V_{BE} \leq 1$ имеет координаты $O_1[v_E + v_C, 0, v_C, 0, v_E]$. Координаты точки равновесия в области $v_{BE} > 1$ $O_2 \left[v_C + \frac{R_{BE} v_E + R_E (\beta + 1)}{R_{BE} + R_E (\beta + 1)} - \frac{\beta (R_1 + R_2) (v_E - 1)}{R_{BE} + R_E (\beta + 1)}, \frac{\beta R_{BE} (v_E - 1)}{R_{BE} + R_E (\beta + 1)}, v_C - \frac{\beta R_2 (v_E - 1)}{R_{BE} + R_E (\beta + 1)}, \frac{\beta R_{BE} (v_E - 1)}{R_{BE} + R_E (\beta + 1)}, \frac{R_{BE} v_E + R_E (\beta + 1)}{R_{BE} + R_E (\beta + 1)} \right]$.

Моделирование системы проводилось при следующих значениях параметров: $L_1 = L_2 = 10$ нГн, $C_0 = C_1 = C_2 = 15$ пФ, $R_E = 200$ Ом, $R_1 = R_2 = 10$ Ом, $R_{BE} = 290$ Ом, $\beta = 425$, которые определялись из требований к частотному диапазону генерации колебаний и реализации развитого хаоса.

Точка равновесия O_1 (в области $v_{BE} \leq 1$) устойчива: все собственные значения имеют отрицательные действительные части ($\mu_{1,2} = -0.1446 \pm 1.2173i$; $\mu_{3,4} = -0.1600 \pm 0.6972i$; $\mu_5 = -0.0297$). Точка равновесия O_2 (в области $v_{BE} > 1$) имеет двумерное неустойчивое многообразие ($\mu_{1,2} = 0.8247 \pm 1.0073i$) и трехмерное устойчивое многообразие ($\mu_{3,4} = -0.5107 \pm 1.6504i$; $\mu_5 = -1.3299$).

Модель генератора обладает интересным свойством, заключающимся в том, что при $v_E > 1$ в ней возбуждаются хаотические колебания сразу, без промежуточных бифуркаций, как показано на рис. 2, на котором изображена диаграмма зависимости режимов работы автономного генератора при разных напряжениях источника питания на эмиттере v_E . С ростом v_E амплитуда этих колебаний растет пропорционально разности $(v_E - 1)$, однако структура колебаний и их характеристики не меняются.

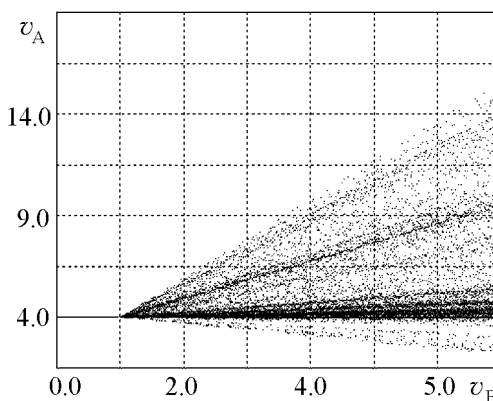


Рис. 2. Зависимость режимов генератора от параметра v_E

Для того чтобы понять поведение системы, рассмотрим эволюцию фазового пространства системы с изменением параметра v_E . Как отмечалось выше, динамика системы описывается двумя

линейными системами уравнений, первая из которых описывает поведение системы в одной области фазового пространства, а вторая – в другой. Эти области разделены гиперплоскостью и вместе покрывают все фазовое пространство.

Каждая линейная, рассматриваемая отдельно, система имеет единственное положение равновесия, которое перемещается по фазовому пространству при изменении v_E . При этом тип точки равновесия каждой из систем не меняется и, более того, не меняются собственные значения этих точек. У одной системы (для определенности, первой) положение равновесия устойчиво, а у второй – представляет собой седло-фокус с неустойчивым двумерным многообразием и трехмерным устойчивым многообразием.

Каждая из систем отвечает за динамику модели генератора в своей области «ответственности». При $v_E < 1$ положения равновесия обеих систем лежат в области, где «работает» первая система. Поэтому в модели генератора имеется единственное положение равновесия и оно устойчиво.

С увеличением v_E положения равновесия обеих систем смещаются к границе раздела «ответственности». При $v_E = 1$ их местоположение в фазовом пространстве совпадает, а затем они вновь расходятся за счет разной скорости смещения по отношению к изменению v_E . При $v_E > 1$ точки равновесия обеих систем находятся в области «ответственности» второй линейной системы. Поэтому в модели генератора снова имеется единственное положение равновесия, но теперь уже неустойчивое, типа седло-фокус. При выбранных значениях параметров за точкой перехода реализуется хаотический режим со старшим ляпуновским показателем $\lambda = 0.06$.

Рассматриваемая система инвариантна к некоторой линейной замене переменных. Поэтому с дальнейшим ростом v_E сохраняется тот же топологический тип хаотического режима. Это хорошо видно из рис. 3, где приведены проекции фазовых портретов для двух различных значений v_E . Структура этих фазовых портретов одинакова и они отличаются друг от друга только размером.

Форма сигнала и его спектр мощности сильно зависят от выбора точки схемы, в которой снимается сигнал или, если речь идет о математической модели генератора, от выбора анализируемой переменной. Как было показано в [11], форма

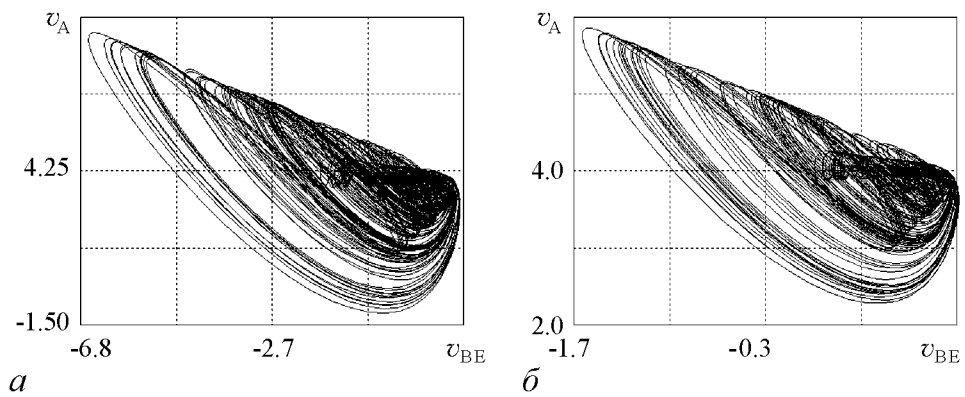


Рис. 3. Двумерные проекции фазового портрета аттрактора системы по переменным v_A , v_{BE} при $v_C = 3$, $v_E = 1.5$ (а), $v_E = 3.0$ (б)

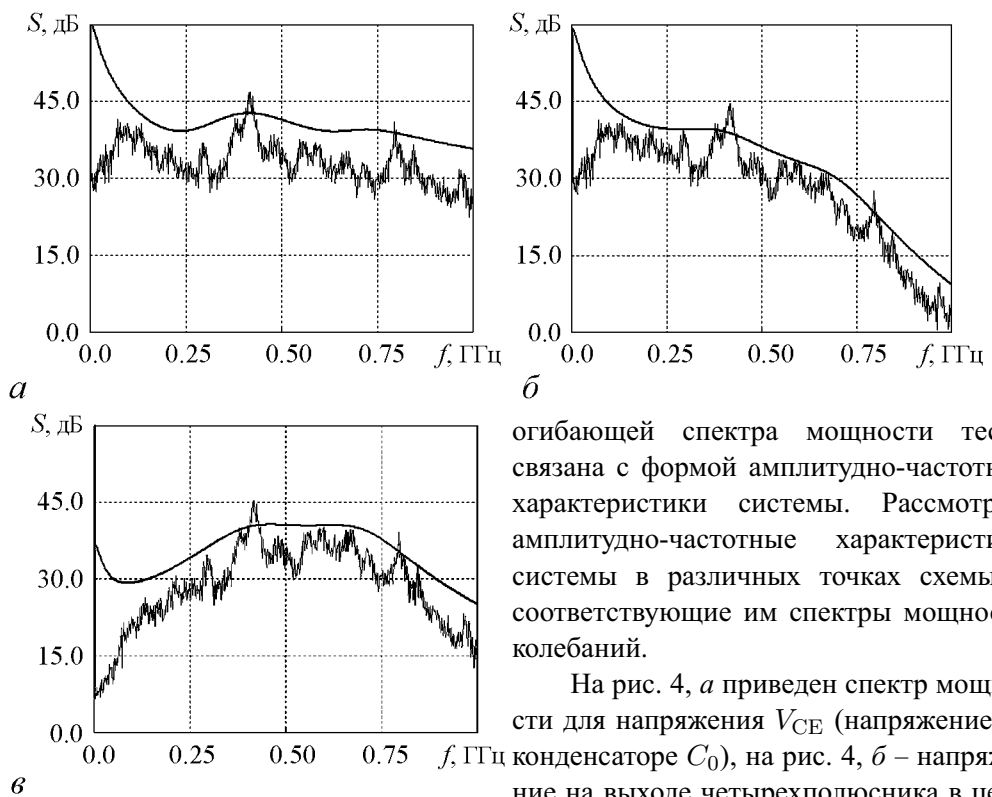


Рис. 4. Спектр мощности сигнала генератора, измеренного в различных точках схемы: а – спектр мощности напряжения коллектор – эмиттер V_{CE} ; б – спектр мощности напряжения база – эмиттер V_{BE} ; в – спектр мощности напряжения V_A в точке А

амплитудно-частотные характеристики системы в соответствующих точках. Как видно из рис. 4, в, в системе с 2.5 степенями свободы можно получить колебания, спектр мощности которых близок к полосовому.

Для дальнейших исследований был выбран сигнал в точке А, поскольку у него основная спектральная мощность сосредоточена в ограниченной полосе, что существенно для коммуникационных приложений.

огигающей спектра мощности тесно связана с формой амплитудно-частотной характеристики системы. Рассмотрим амплитудно-частотные характеристики системы в различных точках схемы и соответствующие им спектры мощности колебаний.

На рис. 4, а приведен спектр мощности для напряжения V_{CE} (напряжение на конденсаторе C_0), на рис. 4, б – напряжение на выходе четырехполюсника в цепи обратной связи V_{BE} (напряжение на конденсаторе C_2), наконец, на рис. 4, в показан спектр мощности сигнала в точке А (напряжение в точке А относительно земли). На этих же рисунках приведены

3. Моделирование генератора в пакете ADS

Когда речь идет о высокочастотных устройствах, упрощенной математической модели оказывается недостаточно для адекватного описания динамики системы. В этом случае элементы генератора представляют собой сложные динамические системы, которые должны описываться более точными моделями, учитывающими высокочастотные эффекты. Например, биполярный транзистор должен описываться многомерной динамической системой типа модели Гуммеля – Пуна [12]. Поэтому исследование динамики генератора с помощью математической модели (2)-(4) рассматривалось как предварительное, а само моделирование в радиочастотном диапазоне производилось с помощью программного пакета схемотехнического моделирования – Advanced Design System (ADS).

Разработка модели для симуляций в пакете ADS заключается в сборке схемы генератора на экране монитора, выборе типа транзистора, указании значений параметров резисторов, емкостей и индуктивностей. Далее производится конкретизация моделей используемых активных и пассивных элементов либо с помощью библиотек пакета, либо непосредственно по данным, предоставляемым производителями элементов.

Схема генератора, использованная при моделировании в ADS, отличалась от рассмотренной ранее схемы на рис. 1 наличием блокировочной емкости $C_{\text{блок}} = 100$ пФ и нагрузки $R_{\text{вых}} = 50$ Ом на выходе системы. Блокировочная емкость введена для того, чтобы избавиться от постоянной составляющей в спектре выходного сигнала, а модельная нагрузка призвана учесть входное сопротивление реальной нагрузки в экспериментальном макете.

При моделировании в ADS в качестве биполярного транзистора использовался транзистор BFP620 фирмы Infineon Technologies. Рабочий диапазон этого транзистора простирается до 70 ГГц. Схемотехническая ADS-модель транзистора в корпусе изображена на рис. 5, где В, С и Е обозначают базу, коллектор и эмиттер, соответственно. Параметры элементов схемы приведены в табл. 1.

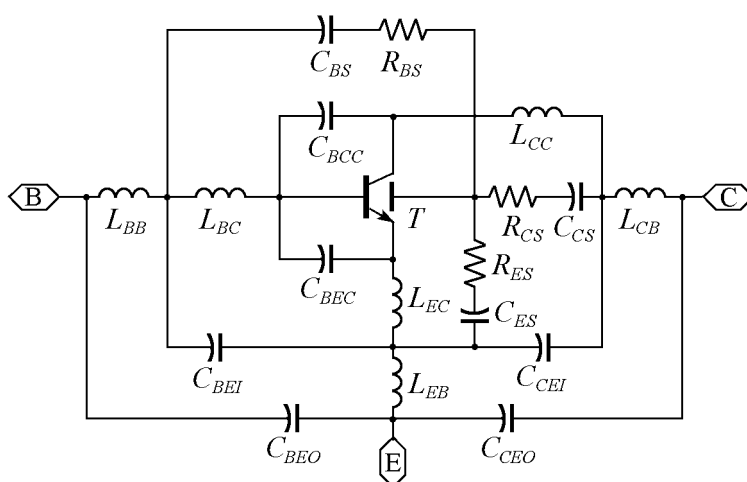


Рис. 5. Модель транзистора в корпусе

Таблица 1

Параметры элементов схемы
транзистора BFP620 в корпусе

$L_{BC} = 60$ пГ	$C_{BEC} = 98.4$ фФ	$R_{BS} = 1200$ Ом
$L_{CC} = 50$ пГ	$C_{BCC} = 55.9$ фФ	$R_{CS} = 1200$ Ом
$L_{EC} = 15$ пГ	$C_{ES} = 140$ фФ	$R_{ES} = 300$ Ом
$L_{BB} = 764.5$ пГ	$C_{BS} = 54$ фФ	
$L_{CB} = 725.4$ пГ	$C_{CS} = 50$ фФ	
$L_{EB} = 259.6$ пГ	$C_{CEO} = 106.5$ фФ	
	$C_{BEO} = 106.7$ фФ	
	$C_{CEI} = 132.4$ фФ	
	$C_{BEI} = 99.6$ фФ	

Для моделирования работы транзистора в ADS была использована модель Гуммеля – Пуна [12]. Параметры модели приведены в табл. 2. Таким образом, при переходе к моделированию в ADS модель генератора превращается из системы, описываемой пятью дифференциальными уравнениями 1-го порядка, в многомерную динамическую систему, описываемую десятками дифференциальных уравнений.

Таблица 2

Параметры модели Гуммеля – Пуна для транзистора BFP620

SPICE Parameter (Gummel-Poon Model, Berkley-SPICE 2G.6 Syntax):								
Transistor Chip Data:								
IS=	0.22	fA	BF=	425	-	NF=	1.025	-
VAF=	1000	V	IKF=	0.25	A	ISE=	21	fA
NE=	2	-	BR=	50	-	NR=	1	-
VAR=	2	-	IKR=	10	mA	ISC=	18	pA
NC=	2	-	RB=	3.129	Ω	IRB=	1.522	mA
RBM=	2.707	Ω	RE=	0.6	-	RC=	2.364	Ω
CJE=	250.7	fF	VJE=	0.75	V	MJE=	0.3	-
TF=	1.43	ps	XTF=	10	-	VTF=	1.5	V
ITF=	2.4	A	PTF=	0	deg	CJC=	124.9	fF
VJC=	0.6	V	MJC	0.5	-	XCJC=	124.9	fF
TR=	0.2	ns	CJS=	128.1	fF	VJS=	0.52	V
MJS=	0.5	-	NK=	-1.42	-	EG=	1.078	eV
XTI=	3	-	FC=	0.8		TNOM	298	K
AF=	2	-	KF=	7.291E-11				
TITF1	-0.0065	-	TITF2	1.0E-5				

В математической модели генератора (2) хаотические колебания в системе существуют при любых значениях напряжения на эмиттере, превышающих пороговое значение $V_T = 0.75$ В. С увеличением напряжения на эмиттере меняется толь-

ко амплитуда колебаний в системе. Это явление связано с особенностью кусочно-линейной характеристики, использованной для описания работы транзистора. Однако при использовании модели Гуммеля – Пуна зависимость режимов генератора от величины напряжения на эмиттере становится значительно более сложной (рис. 6, а). С ростом напряжения на эмиттере в генераторе возникают автоколебания, затем происходит несколько бифуркаций удвоения периода колебаний, и система переходит в режим хаотических колебаний. При дальнейшем увеличении напряжения чередуются окна периодических колебаний различных периодов и хаоса.

Соответствующая бифуркационной диаграмме эволюция спектров мощности показана на рис. 7. С точки зрения создания генератора с заданным возможно более равномерным спектром мощности, наибольший интерес представляет область значений напряжения от 2.1 до 3.7 В, для которой характерны спектры мощности, приведенные на рис. 7, д, е.

При работе на высоких частотах помимо номиналов радиотехнических элементов, из которых состоит электрическая схема, большое влияние на режимы ра-

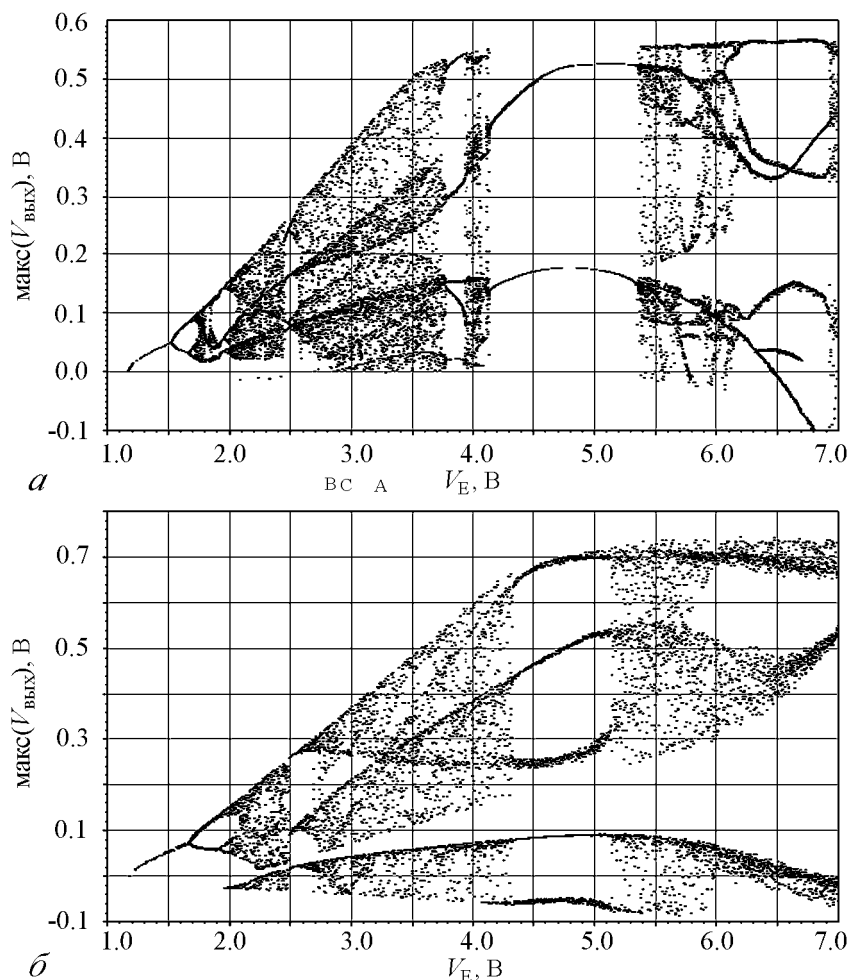


Рис. 6. Зависимость режимов генератора от параметра V_E . Моделирование в ADS (а) без учета подложки, (б) с учетом подложки

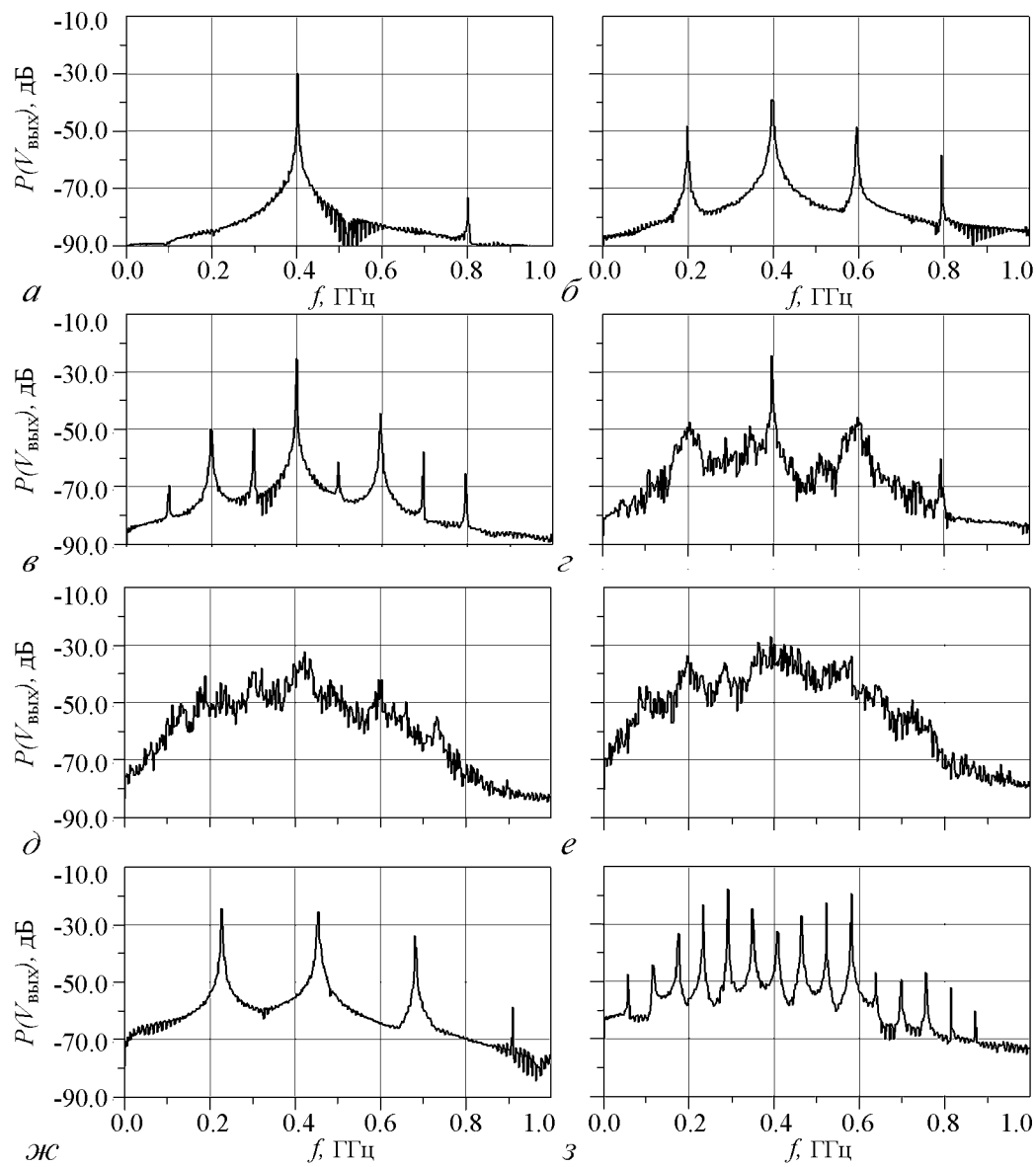


Рис. 7. Спектр мощности на выходе генератора. Моделирование без учета подложки $V_C = 3$ В; V_E (В): а – 1.4, б – 1.6, в – 1.7, г – 1.77, д – 2.4, е – 3.5, ж – 5.0, з – 6.0

боты оказывает материал диэлектрической подложки и топологическая структура металлизированных площадок платы, на которой производится монтаж устройства. Пакет ADS предоставляет возможность учесть влияние упомянутых факторов на динамику генератора.

Для экспериментальной реализации макета генератора была разработана структура платы, показанная на рис. 8. В качестве подложки был выбран материал FR-4 со значением диэлектрической проницаемости 4.8, тангенсом угла диэлектрических потерь 0.018 и толщиной 1 мм. С помощью пакета ADS было проведено моделирование динамики системы, учитывающее топологию и материал платы.

На рис. 6, б приведена бифуркационная диаграмма режимов системы при изменении напряжения на эмиттере для модели с учетом топологии. Соответствующие спектры мощности сигнала на выходе системы при различных значениях V_E приведены на рис. 9. Анализ рисунков показывает, что, как и в модели без учета топологии, в модели с учетом подложки при низких значениях напряжения на эмиттере ($V_E < 1.2$ В) колебания в системе отсутствуют, затем возникают автоколебания периода 1, происходит бифуркация удвоения периода, затем еще ряд удвоений периода и, наконец, возникают хаотические колебания. При дальнейшем увеличении напряжения на эмиттере происходит чередование зон хаотических колебаний с зонами периодических колебаний.

Сравнение рис. 6, б и рис. 9 с рис. 6, а и рис. 7 показывает, что в моделях наблюдается качественное соответствие в динамике развития колебательных режимов системы. Следует также заметить, что при низких напряжениях на эмиттере помимо качественного соответствия наблюдается достаточно хорошее количественное совпадение характера динамических режимов (см. рис. 6, а и б). Однако характерные частоты в модели с учетом подложки смещены вниз примерно на 10% по отношению к частотам модели, не учитывающей влияние подложки (см. рис. 7 и 9).

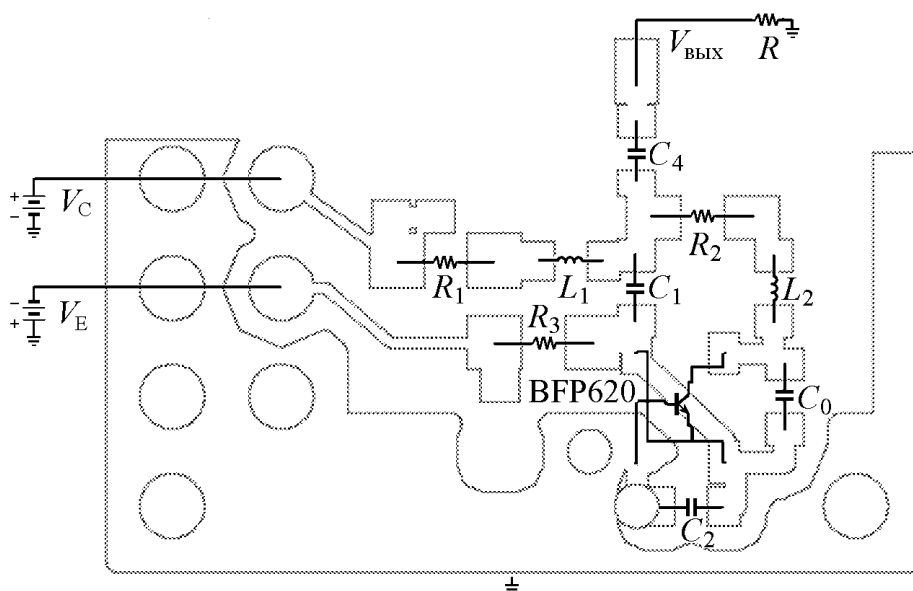


Рис. 8. Топология платы генератора

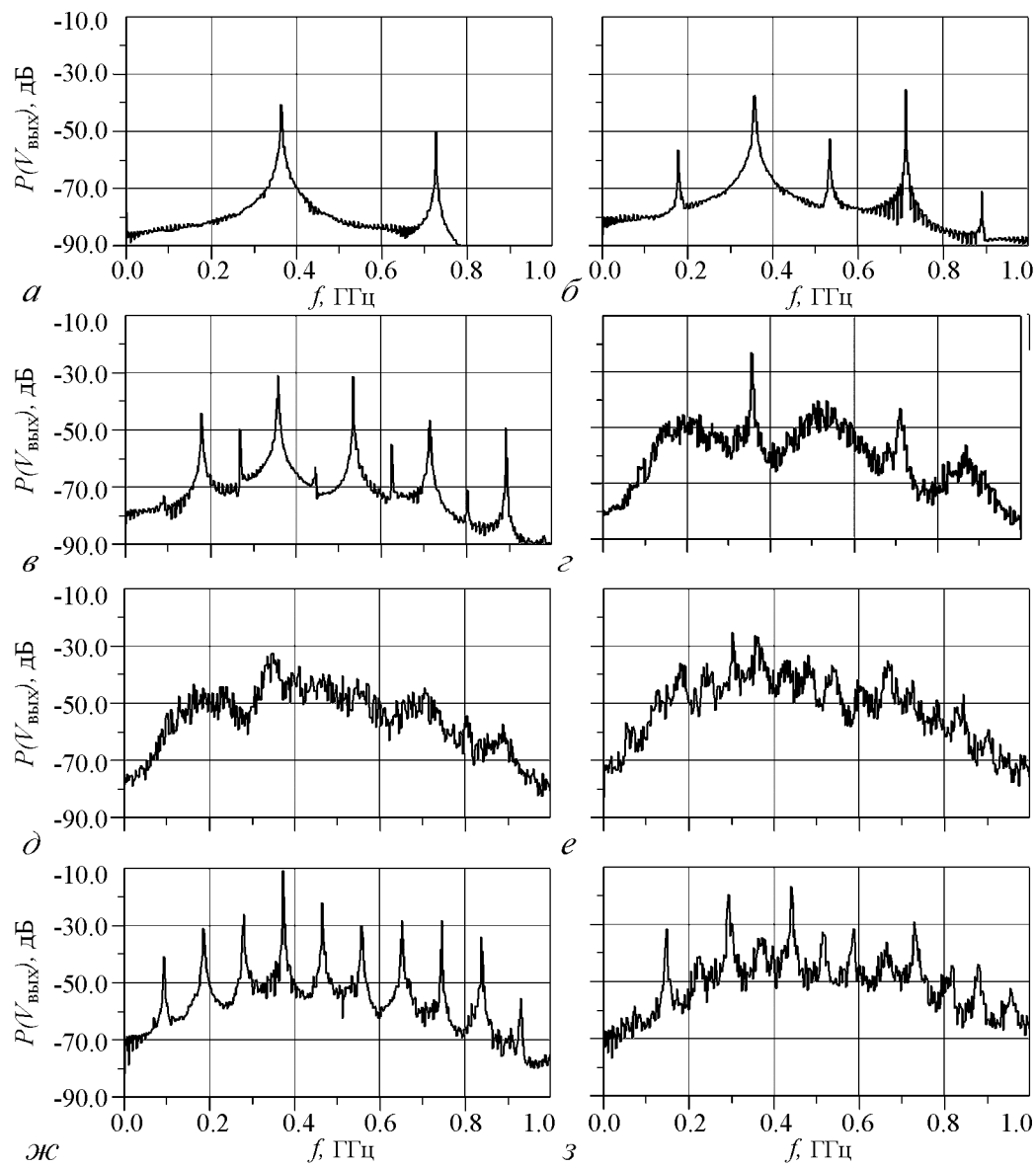


Рис. 9. Спектр мощности на выходе генератора. Моделирование с учетом подложки $V_C = 3$ В; V_E (В): а – 1.4, б – 1.7, в – 1.95, г – 2.2, д – 2.4, е – 3.5, ж – 5.0, з – 6.0

4. Экспериментальный макет. Результаты экспериментов

Экспериментальный макет генератора был выполнен на плате длиной 2.5 см и шириной 2 см. В качестве подложки для платы использовался фольгированный материал FR-4, на котором была вытравлена топологическая структура генератора, после чего при помощи поверхностного монтажа были установлены сосредоточенные элементы, определяющие структуру схемы. В качестве активного элемента в макете, как и в модели, использовался транзистор BFP620. Номиналы электронных компонентов генератора совпадают со значениями соответствующих параметров, использованными при моделировании генератора в пакете ADS. Внешний вид экспериментального макета показан на рис. 10.

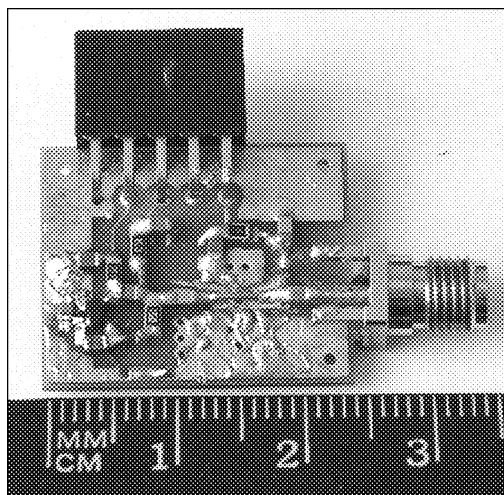


Рис. 10. Экспериментальный макет генератора в диапазоне $100 \div 500$ МГц

Питание генератора осуществлялось от двух источников: первый задавал напряжение коллектор – база транзистора, а второй задавал напряжение эмиттер – база. К переходу коллектор – база прикладывалось напряжение положительной полярности, к переходу эмиттер – база прикладывалось напряжение отрицательной полярности. Значения этих напряжений определяли режим работы генератора (далее в тексте будут указываться абсолютные значения напряжений без учета полярности).

Двухпараметрическая диаграмма режимов, реализуемых в системе при различных значениях напряжений на источниках питания, приведена на рис. 11. Из диа-

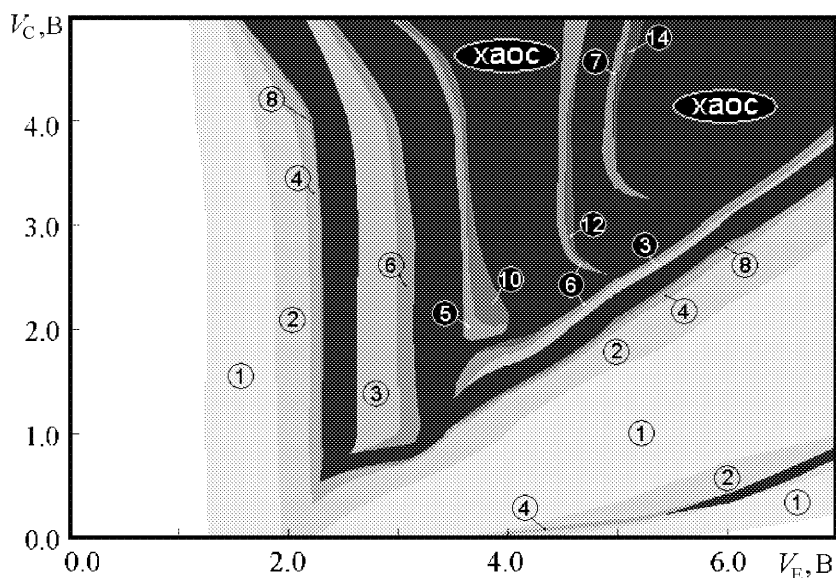


Рис. 11. Двухпараметрическая диаграмма режимов генератора

граммы видно, что в системе существуют широкие зоны хаотических режимов, перемежаемые узкими областями регулярных колебаний различных периодов. Так, при фиксированном напряжении коллектор – база $V_C = 3.0$ В, которое использовалось при моделировании, режим работы генератора зависит от напряжения эмиттер – база V_E следующим образом: при $0 < V_E < 1.3$ В генерация колебаний отсутствует; при $V_E = 1.3$ В возбуждаются гармонические колебания; в диапазоне $1.3 \text{ В} < V_E < 2.3$ В происходит каскад бифуркаций удвоения периода с переходом к хаосу; при $2.3 \text{ В} < V_E < 6.5$ В реализуются хаотические колебания, перемежающиеся окнами периодических колебаний. Эта картина смены динамических режимов в целом согласуется с той, которая наблюдалась при моделировании.

На рис. 12 приведены типичные спектры мощности хаотического сигнала, реализуемого в системе при $V_C = 3.0$ В и различных значениях параметра V_E . Выходная

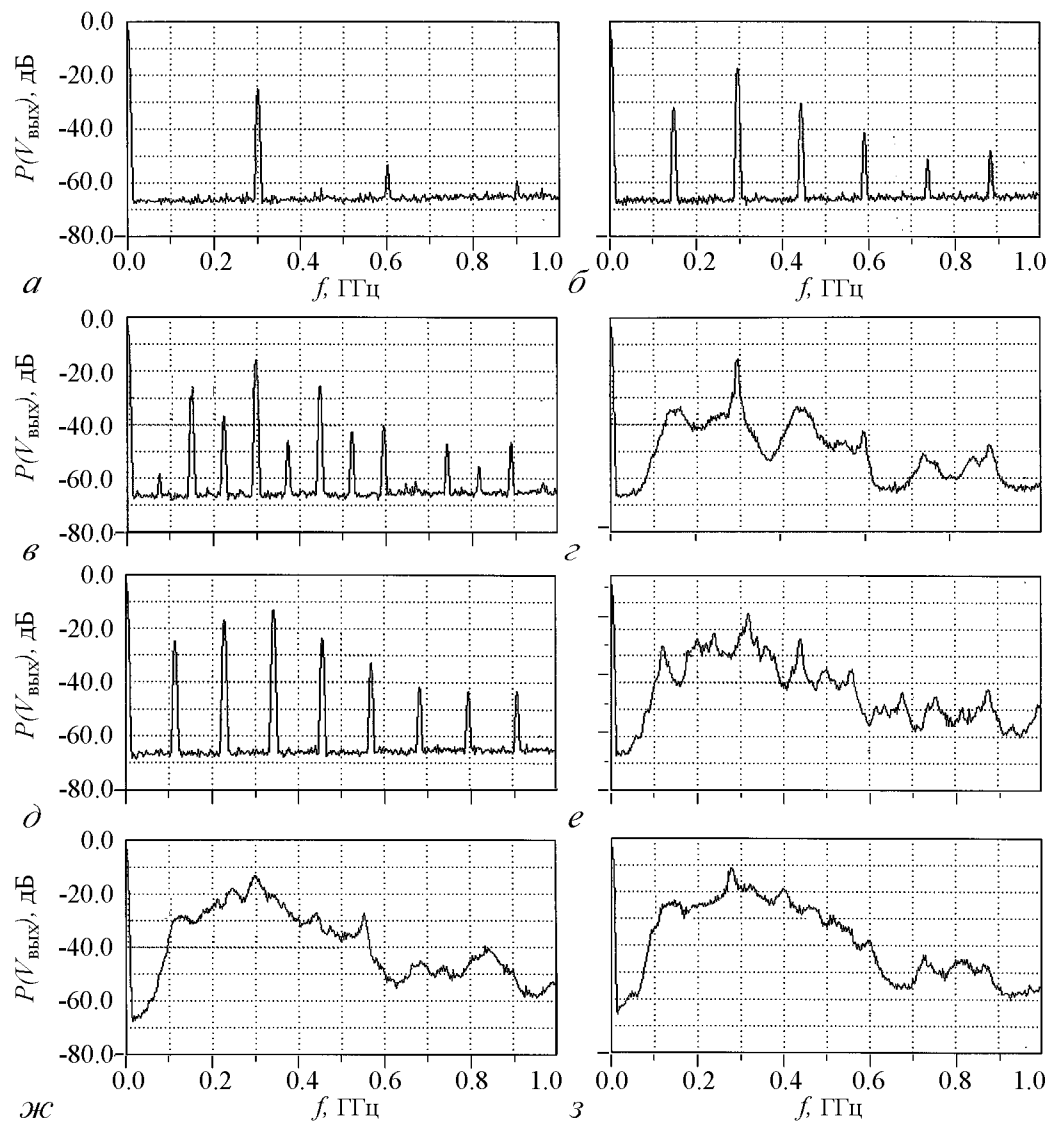


Рис. 12. Спектр мощности на выходе генератора. Эксперимент. $V_C = 3.0$ В; V_E (В): а – 1.4, б – 2.0, в – 2.3, г – 2.5, д – 3.0, е – 3.5, жс – 5.0, з – 6.0

мощность генератора при $V_E = 5.0$ В равна 5 мВт. При этом потребляемая мощность составляет 160 мВт. Таким образом, КПД генератора – около 3%.

Совокупность полученных результатов показывает, что использование пакета ADS для анализа генератора и учет влияния топологии платы и характеристик материала макета позволяет максимально приблизить результаты моделирования к эксперименту.

5. Корреляционная размерность аттракторов

Анализ спектральных характеристик хаоса в эксперименте желательно дополнить восстановлением топологической структуры аттракторов и оценкой их корреляционной размерности. Ниже описываются результаты восстановления структуры фазовых портретов аттракторов в многомерном квазипространстве. На основе восстановленной структуры, производится оценка корреляционной размерности аттракторов системы, в регулярных и хаотических режимах.

Как следует из рис. 12, в экспериментах основная мощность колебаний была локализована в области частот от 100 до 500 МГц. Результаты экспериментов фиксировались в виде спектров мощности на анализаторе спектра типа Hewlett Packard 8596Е и с помощью скоростного осциллографа Tektronix TDS 3052. Осциллограф обладает возможностью производить оцифровку сигнала с точностью 12 бит на отсчет и временем между отсчетами 0.2 нс.

Для восстановления фазового портрета и аттрактора в многомерном фазовом пространстве для каждого из анализируемых режимов оцифровывалась и запоминалась серия данных, состоящая из 10000 отсчетов. Процедура восстановления фазовых портретов по этим сериям заключалась в следующем: на плоскость $(x(t), x(t - \tau))$ наносились пары точек $(x(\Delta ti), x(\Delta ti - \Delta tn))$, которые потом последовательно соединялись между собой, образуя двумерную проекцию фазового портрета, где $\Delta t = 0.2$ нс – время между отсчетами, i – номер отсчета, n – число отсчетов на которое происходило запаздывание. Число n выбиралось так, чтобы время tn составляло примерно 1/4 квазипериода колебаний. В рассматриваемом случае n было выбрано равным 4.

На рис. 13 представлены восстановленные фазовые портреты для двух типов колебаний системы. Первый портрет соответствует режиму колебаний, взятому по-

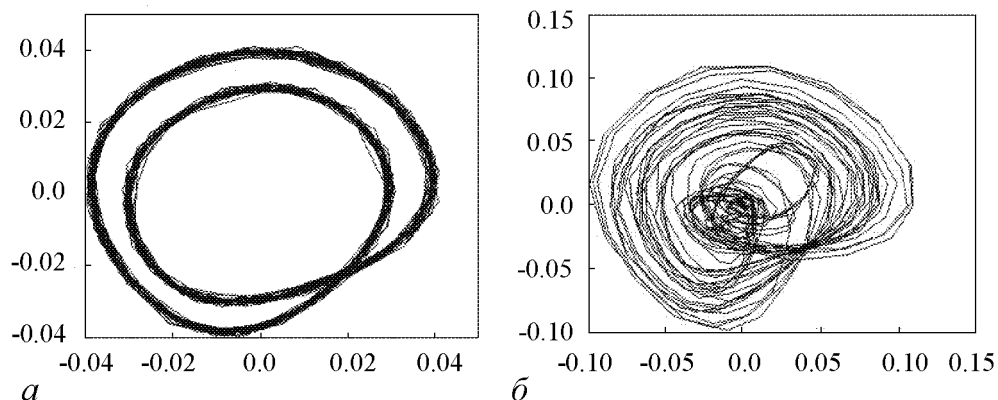


Рис. 13. Фазовые портреты, восстановленные по экспериментальной реализации: *a* – регулярный режим, *б* – хаотический режим

сле бифуркации удвоения (см. спектр сигнала на рис. 12, *б*). Второй фазовый портрет на рис. 13 соответствует непрерывному спектру мощности на рис. 12, *ж* и нерегулярной реализации сигнала, что соответствует хаотическому режиму.

Приведенные данные показывают, что эксперименты с оцифровкой сигнала обеспечили высококачественное восстановление структуры фазовых портретов сигналов радиодиапазона, генерируемых источниками хаоса. Это позволяет сделать вывод о том, что оцифровка сигнала произведена корректно и может быть использована для оценки корреляционной размерности высокочастотного процесса.

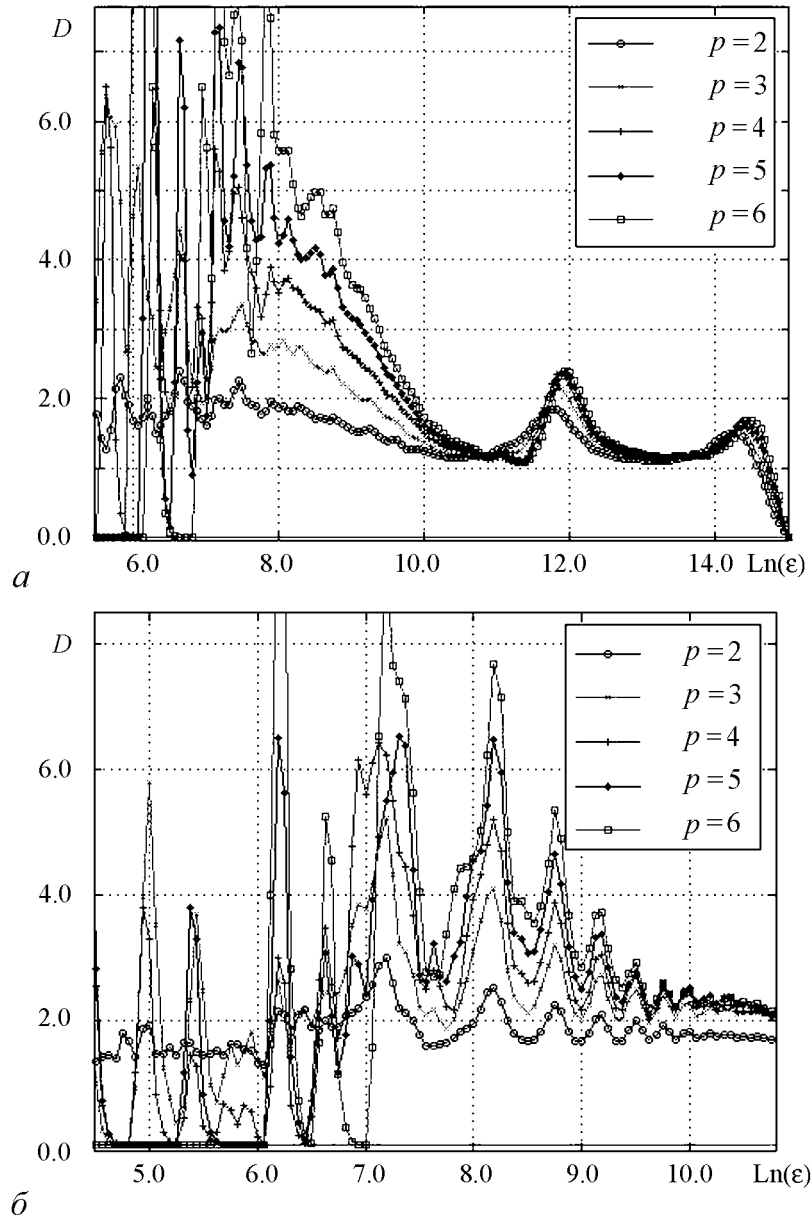


Рис. 14. Корреляционные размерности: *a* – регулярный режим, *б* – хаотический режим

Расчет корреляционной размерности производился путем оценки корреляционного интеграла $\tilde{N}(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} \tilde{N}(\varepsilon) &= \{\text{число пар точек } i \neq j \text{ таких, что } \|x_i - x_j\| < \varepsilon\} = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{M(M-1)} \sum_{i,j=1}^M \theta(\varepsilon - \|x_i - x_j\|), \end{aligned} \quad (6)$$

где $x_i = (x_i, x_{i-p}, x_{i-2p}, \dots, x_{i-(m-1)p})$, $i = 1, 2, \dots$, множество точек в m -мерном пространстве (вектора), M – количество отсчетов, ε – заданное расстояние между парой точек, θ – ступенчатая функция Хевисайда, $\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$

В оценке $\tilde{N}(\varepsilon)$ одним из параметров является размерность векторов p . Как правило, заранее не известно, в пространство какой размерности может быть вложен аттрактор. Отсюда возникает проблема правильного выбора размерности вложения p . Если p взято слишком маленьким, то оценка окажется неверной, так как не все компоненты аттрактора будут присутствовать в восстановленном объекте. С другой стороны, если взять p с большим запасом, то аттрактор будет вложен в соответствующее пространство, но при этом слишком велики могут оказаться шумы восстановления. При практической оценке корреляционной размерности поступают следующим образом: рассчитывают семейство корреляционных интегралов в зависимости от ε для серии различных значений p . Далее строят для каждого интеграла графики зависимости, на которых по горизонтальной оси откладывается $\ln \varepsilon$, а по вертикальной $D = \frac{d(\ln N(\varepsilon))}{d(\ln \varepsilon)}$ (рис. 14). Так, на рис. 14, *a* значения p выбраны от 2-х до 6-ти. Значение оценки корреляционной размерности определяется по тому участку этих кривых, где имеет место сходимость к некоторой постоянной величине с увеличением p . На рис. 14, *a* с режимом удвоения периода колебаний такая сходимость происходит к значению $D \sim 1.0$, а на рис. 14, *б* с хаотическим режимом – к значению $D \approx 2.2 \div 2.4$, что согласуется с видом фазового портрета аттрактора на рис. 13, *б*.

Заключение

Предложен генератор хаотических колебаний радиодиапазона. Динамика генератора исследована как для математической модели с кусочно-линейной характеристикой транзистора, так и для схемотехнической модели в пакете ADS, где для описания транзистора использована модель Гуммеля – Пуна, а так же учтено влияние паразитных элементов корпуса транзистора, топологии платы и материала подложки. Реализован экспериментальный макет генератора и проанализированы его режимы. Сопоставление результатов моделирования и эксперимента показало, что использование пакета ADS для моделирования генераторов хаоса радиодиапазона позволяет получить результаты, близкие к экспериментальным данным, что, в свою очередь, облегчает разработку высокочастотных устройств со сложной динамикой.

Совокупность таких свойств, как простота устройства, доступность элементов, составляющих схему, а также их воспроизводимость, устойчивость хаотических

режимов, широкие зоны хаоса в пространстве параметров, реализуемость в радиодиапазоне, а так же высокая энергетическая эффективность генератора позволяет рекомендовать использование этого генератора в качестве источника хаотического сигнала для систем связи с хаотической несущей.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Грант № 05-02-17667) и аналитической ведомственной целевой программы Минобрнауки «Развитие потенциала высшей школы» на 2006-2007 годы.

Библиографический список

1. *Дмитриев А.С., Кяргинский Б.Е., Максимов Н. А., Панас А.И., Старков С.О.* Перспективы создания прямохаотических систем связи в радио- и СВЧ-диапазонах // Радиотехника. 2000. № 3. С. 9.
2. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос. Новый носитель информации для систем связи. М.: Физматлит. 2002.
3. *Dmitriev A.S., Kyarginsky B.Ye., Panas A.I. and Starkov S.O.* Experiments on ultra wideband direct chaotic information transmission in microwave band // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2003. Vol. 13, № 6. P. 1495.
4. *Бельский Ю.Л., Дмитриев А.С.* Передача информации с помощью детерминированного хаоса // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38, № 7. С. 1310.
5. *Dmitriev A.S., Panas A.I., Starkov S.O.* Ring oscillating systems and their application to the synthesis of chaos generators // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1996. Vol. 6, № 5. P. 851.
6. *Кальянов Э.В., Иванов В.П., Лебедев М.Н.* Экспериментальное исследование транзисторного автогенератора с запаздывающей обратной связью // Радиотехника и электроника. 1982. Т. 27, № 5. С. 982.
7. *Дмитриев А.С., Иванов В.П., Лебедев М.Н.* Модель транзисторного генератора с хаотической динамикой // Радиотехника и электроника. 1988. Т. 33, № 5. С. 1085.
8. *Kennedy M.* Chaos in Colpitts oscillator // IEEE Trans. Circ. System.-1. 1994. Vol. 41, № 11. P. 771.
9. *Feo O., Maggio G., Kennedy M.* The Colpitts oscillator: Families of periodic solutions and their bifurcations // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2000. Vol. 10, № 5. P. 935.
10. *Максимов Н.А., Панас А.И.* Однотранзисторный генератор полосовых хаотических сигналов радиодиапазона // Зарубеж. радиоэлектрон. Успехи современной радиоэлектроники. 2000. № 11. С. 61.
11. *Дмитриев А.С., Ефремова Е.В.* Транзисторные генераторы хаоса с заданной формой спектра мощности колебаний // Радиотехника. 2005. № 8. С. 67.
12. *Antognetti P. and Massobrio G.* Semiconductor device modeling with SPICE. New-York: McGraw-Hill, Second Edition, 1993.

*Институт радиотехники и электроники РАН Поступила в редакцию 21.07.2006
Московский физико-технический институт*

CHAOTIC RF GENERATOR BASED ON OSCILLATOR WITH 2.5 DEGREES OF FREEDOM

E.V. Efremova, N.V. Atanov, Yu.A. Dmitriev

Chaotic RF generator with bipolar transistor is proposed. Mathematical model of the generator, oscillator with 2.5 degrees of freedom, is investigated. Generator dynamics is analyzed with Advanced Design System (ADS) software using parameters of a real transistor, properties of the board substrate are taken into account by simulation. ADS simulation results are compared with experimental data. It is shown that the use of ADS software for analysis of generator dynamics and account for the board properties and topology allow to get simulation results closer to the experimental one.



Ефремова Елена Валериевна – родилась в 1977 году, окончила Московский физико-технический институт (2000). Кандидат физико-математических наук (2003), научный сотрудник ИРЭ РАН. Область научных интересов – нелинейная динамика, электроника СВЧ, информационные и коммуникационные технологии на основе динамического хаоса. Автор более 30 научных публикаций.



Атанов Николай Васильевич – родился в 1984 году. Студент 6 курса Московского физико-технического института. Имеет 5 научных публикаций. Область научных интересов: динамический хаос, системы передачи и обработки информации.



Дмитриев Юрий Александрович – родился в Москве (1984). Студент 6 курса факультета аэрофизики и космических исследований Московского физико-технического института. Участник студенческих конференций, имеет 2 публикации в сборниках тезисов докладов. Область научных интересов: нелинейная динамика, динамический хаос, океанология.



ХАОТИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ АСИММЕТРИЧНОГО КОЛЬЦЕВОГО БИЛЛИАРДА С ОТРАЖЕНИЕМ И ПРЕЛОМЛЕНИЕМ ЛУЧЕЙ

В.В. Яновский, С.В. Найденов, А.В. Курило

Исследована хаотическая динамика в кольцевом асимметричном бильярде с отражением и преломлением лучей. Фазовая динамика характеризуется разнообразием динамических режимов, что связано как с проявлением традиционных механизмов хаотизации лучей, так и со сложностью допустимых законов движения. В многолистном симметричном фазовом пространстве проанализированы фазовые перестройки кольцевого бильярда при изменении степени его асимметрии.

Введение

Бильярд – это предельно простая физическая система, в которой движение подчинено законам геометрической оптики. Тем не менее бильярды оказались важной теоретической моделью для развития принципиальных концепций в теории детерминированного хаоса для классической, статистической и квантовой физики [1–9] и др.

Хаотическое поведение лучей обычного бильярда может быть вызвано двумя причинами. Во-первых, расширением произвольного пучка лучей при отражении от рассеивающих участков границы, как в бильярдах Синая [10], или, во-вторых, дефокусировкой лучей при отражении от фокусирующих и нейтральных (прямолинейных) компонентов границы, как в стадионах Бунимовича [11, 12].

Динамика лучей становится более сложной в композитных бильярдах, которые являются удобной моделью для описания распространения световых лучей в составных полостях, заполненных материалами с разной диэлектрической проницаемостью. Такие системы имеют внутренние границы раздела оптически разных сред. На границах происходит отражение и преломление лучей. Наличие этих дополнительных особенностей должно приводить к своеобразным механизмам хаотизации [13]. Так, при «размножении» лучей на границе раздела сред с разными показателями преломления (из одного падающего луча появляются отраженный и преломленный), возникает многозначность в маршрутах следования траекторий бильярда. Каждый допустимый маршрут луча соответствует определенному порядку посещения разных сред. Этот маршрут легко закодировать двоичной последовательностью,

особенно, если бильярд состоит только из двух сред. Маршрут может быть регулярным, квазирегулярным или хаотическим. Это соответствует тому, является ли указанная двоичная последовательность периодической, квазипериодической или хаотической. С другой стороны, каждый маршрут однозначно определяет закон движения луча как последовательность композиций элементарных законов движения (отражение и преломление). Точнее, существует взаимнооднозначное соответствие между маршрутами и законами движения лучей. Поэтому возникают детерминированные периодические, квазипериодические или хаотические законы движения лучей. Хаотическим законам соответствуют сложные, по Колмогорову, последовательности элементарных законов движения. Таких хаотических законов континуум.

Таким образом, в бильярдах с расщеплением лучей присутствует два типа хаотического поведения. С первым из них связана динамическая непредсказуемость, вызванная экспоненциально быстрым разбеганием фазовых траекторий. Второй тип приводит к непредсказуемости закона движения луча. Другими словами, он вызван детерминированно хаотичным законом движения луча [13]. При этом траектории хаотически переходят с одного листа многолистного фазового пространства на другой его лист. В любом бильярде с расщеплением лучей изначально заложена такая специфическая хаотичность. Каждый из механизмов хаотичности в определенной мере существует независимо от другого, несмотря на очевидную взаимосвязь между ними, что и наблюдается в компьютерных экспериментах.

В работе изучена динамика лучей в асимметричном кольцевом бильярде с расщеплением лучей. В нем возникают оба указанных выше типа хаотичности. Бильярд образован парой кругов с разными показателями преломления n_0 (внешний круг) и n_1 (внутренний круг). Один из кругов находится целиком внутри другого, а их центры смещены друг относительно друга на величину Δ (рис. 1). Внешний круг имеет радиус R , который всегда можно принять равным единице. Степень асимметрии задается безразмерным параметром Δ/r , где r – фиксированный радиус внутреннего круга. Рассматриваемый бильярд является естественным обобщением исследованной ранее динамики симметричного кольцевого бильярда [13], состоящего из пары

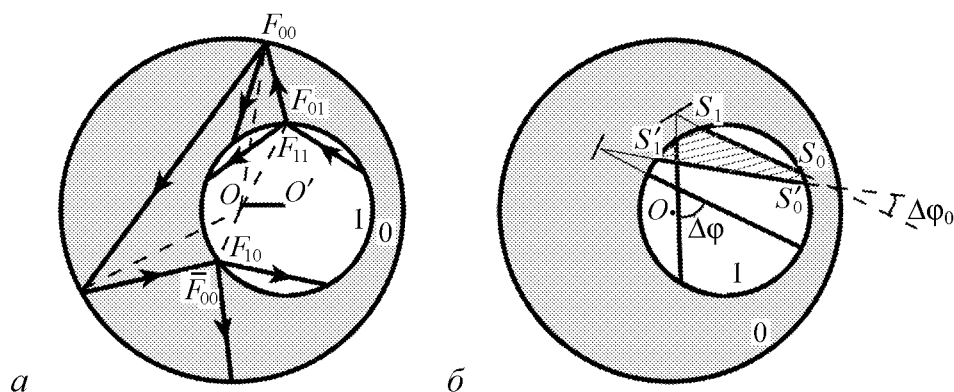


Рис. 1. Асимметричный кольцевой бильярд. Точки O и O' – центры внешней и внутренней окружностей. Показаны несколько элементарных переходов бильярдной траектории и соответствующий им каскад элементарных отображений F_{ij} . Справа показано угловое расширение пучка лучей после однократного преломления. Результат имитируется с помощью отражения от элементарных площадок «эффективной границы»

концентрических кругов с разными показателями преломления. Следует указать, что обычный кольцевой бильярд и преломляющий кольцевой бильярд (то есть бильярд с расщеплением лучей) в последнее время достаточно интенсивно исследуются в связи с разнообразными физическими проблемами, включая квантовый оптический хаос [14–16], хаотическое рассеяние [17], ускорение Ферми [18] и др.

1. Асимметричный кольцевой бильярд с расщеплением лучей

Фазовые траектории симметричного кольцевого бильярда регулярны [13], а сам этот бильярд не эргодичен. В нем реализуется хаос только в смысле неопределенности в порядке посещения разных компонентов бильярда или связанный с хаотичностью законов движения лучей. Хаос фазовых траекторий в обычном смысле, то есть при котором показатель Ляпунова имеет ненулевое значение, здесь не возникает. Однако при сколь угодно малой асимметрии (см. рис. 1) в фазовом пространстве преломляющего кольцевого бильярда появляются хаотические области, связанные с экспоненциальным разбеганием первоначально близких траекторий. Для описания динамики лучей в асимметричном бильярде используем геометро-динамический подход [19, 20]. Изменением интенсивности света пренебрегаем. Динамика лучей задается с помощью отображений, переводящих каждый падающий луч, заданный парой фазовых координат (S_1, S_2) (определяют начало и конец луча на одной из границ бильярда), в последующий луч (\bar{S}_1, \bar{S}_2) , которым может быть как отраженный, так и преломленный луч.

Обе, внешняя и внутренняя границы исследуемого бильярда являются окружностями. Поэтому в качестве естественных координат, определяющих положение точки отражения на них, удобно взять угловые (полярные) координаты. В качестве начала координат для соответствующей угловой координаты одного из концов луча выбирается центр той из окружностей, на которой лежит выделенный конец луча. Фазовое пространство при таком рассмотрении состоит из 4-х идентичных листов T^2 , каждый из которых топологически эквивалентен тору. По координатным осям фазового пространства, в качестве которого будем использовать квадратную развертку тора, отложены всевозможные координаты лучей. Обозначим внешнюю окружность индексом 0, а внутреннюю – индексом 1 (см. рис. 1). Тогда четыре листа фазового пространства соответствуют подпространствам лучей, концы которых попарно лежат на таких границах: лист $|11|$ – оба на внутренней, $|00|$ – оба на внешней, $|01|$ или $|10|$ – один на внутренней, другой – на внешней. Переходы с одного листа на другой описываются посредством пяти элементарных отображений $F_{01}, F_{10}, F_{11}, F_{00}$ и \bar{F}_{00} .

Пусть номер границы одновременно является номером примыкающей к ней среды. То есть внутренняя граница и среда имеют индекс 1, а внешние – 0. Тогда в обозначениях отображений первая цифра показывает, в какую среду попадает луч под действием выбранного отображения, а вторая – из какой среды он выходит. Например, отображение F_{01} переводит луч, падающий на границу 1 из среды 1, в преломленный луч, распространяющийся в среде 0. Отображение \bar{F}_{00} так же, как и F_{00} , оставляет луч в среде 0, но в отличие от F_{00} отражение луча происходит от внутренней границы 1. Далее используем для обозначения координат лучей переменные

(x, y) (до) и (\bar{x}, \bar{y}) (после отражения или преломления). Придадим отображениям следующий вид:

$$F_{00} : \begin{cases} \bar{x} = \{y\} \\ \bar{y} = \{f_{00}(x, y)\} \end{cases}; \quad F_{11} : \begin{cases} \bar{x} = \{y\} \\ \bar{y} = \{f_{11}(x, y)\} \end{cases}; \quad \bar{F}_{00} : \begin{cases} \bar{x} = \{y\} \\ \bar{y} = \{\bar{f}_{00}(x, y)\} \end{cases};$$

$$F_{01} : \begin{cases} \bar{x} = \{y\} \\ \bar{y} = \{f_{01}(x, y)\} \end{cases}; \quad F_{10} : \begin{cases} \bar{x} = \{y\} \\ \bar{y} = \{f_{10}(x, y)\} \end{cases}, \quad (1)$$

где $\{\dots\}$ обозначает взятие дробной части по $\text{mod} 2\pi$. Явные выражения для функций $f_{00}(x, y)$, $f_{10}(x, y)$, $f_{01}(x, y)$, $f_{11}(x, y)$, $\bar{f}_{00}(x, y)$ приведены в Приложении А. Отметим, что эволюция лучей бильярда полностью определяется этими пятью элементарными отображениями.

2. Критерий углового расширения пучков лучей

Как известно, одной из причин возникновения хаоса в бильярдах является механизм перманентного рассеяния лучей, когда любой инфинитезимальный пучок лучей бильярда почти всюду расходится в геометрическом пространстве. Например, в бильярдах Синая при отражении лучей от всюду вогнутой вовнутрь границы. В фазовом пространстве этому соответствует экспоненциальное расхождение первоначально близких траекторий. Поэтому при исследовании бильярдов полезна оценка средней скорости углового расширения (при отражении от разных компонентов границы бильярда) узкого или, в частном случае, плоскопараллельного пучка лучей. Выполним такую оценку для кольцевого бильярда, проследив за расширением узкого пучка лучей после одного акта преломления.

Вычислим угловое расширение пучка лучей с маршрутом 1001, то есть расширение пучка при его возвращения в среду 1 после отражения в среде 0 (см. рис. 1). Угловые размеры падающего и прошедшего пучков связаны выражением $\Delta\varphi = \bar{K}\Delta\varphi_0$, где $\bar{K} = K(S_1, S_2, \Delta\varphi_0)$ – средний коэффициент расширения пучка; (S_1, S_2) – координаты луча, который характеризует пучок, например, центрального или одного из крайних лучей пучка. Для инфинитезимального пучка при $\Delta\varphi_0 \rightarrow 0$ коэффициент расширения определяется формулой

$$K = K(S_1, S_2) = \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\Delta\varphi_0}. \quad (2)$$

Если $K = 1$ при любых значениях фазовых координат, то хаос, связанный с преломлением, не возникает. С другой стороны, если $K > 1$, то существует возможность появления хаотической компоненты движения. При малой асимметрии бильярда связь между $\Delta\varphi$ и $\Delta\varphi_0$ можно получить, используя понятие «эффективной границы», введенной в [13]. Напомним, что с ее помощью можно абстрагироваться от преломления и распространения каждого отдельного луча в среде с другим коэффициентом преломления, заменив этот многоступенчатый процесс отражением от некоторой кривой (это и есть эффективная граница), ограничивающей некоторый эффективный бильярд. Важно, что каждому лучу можно поставить в соответствие только свою эффективную границу, если последняя существует. Для симметричного

бильярда эффективной границей является окружность, радиус которой зависит от разности угловых координат $(S_2 - S_1)$ начального луча. Для асимметричного бильярда понятие эффективной границы можно сохранить только локально, так как расположение элементарной площадки, от которой происходит «эффективное отражение», заменяющее распространение луча во второй среде, теперь будет зависеть уже от обеих координат S_1 и S_2 . В общем случае множество таких элементарных площадок не сводится к гладкой и даже непрерывной кривой.

При малой асимметрии $\Delta \ll r$ понятие «эффективной границы» еще сохраняет свой первоначальный смысл. Полярный радиус для каждой ее элементарной площадки определяется выражением

$$\rho_{\text{eff}}(S_1, S_2) = \frac{r \cos\left(\frac{S_2 - S_1}{2}\right)}{\cos\left[\frac{S_2 - S_1}{2} + \xi(S_1, S_2) - \arcsin\left(\frac{r + \Delta \cos S_2}{R} \sin \xi(S_1, S_2)\right)\right]}, \quad (3)$$

причем он отсчитывается от центра большего круга и

$$\xi(S_1, S_2) = \arcsin\left[\frac{n_1}{n_0} \cos\left(\frac{S_2 - S_1}{2} + \frac{\Delta}{2r}(\sin S_2 - \sin S_1)\right)\right] + \frac{\Delta}{r} \sin S_2.$$

Обозначим углы падения крайних лучей пучка на элементарную площадку через θ_1 и θ_2 . Тогда угловая ширина прошедшего и падающего пучка связаны выражением

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 + 2(\theta_1 - \theta_2). \quad (4)$$

Для симметричного бильярда углы θ_1 и θ_2 «эффективного отражения» зависят только от разностей угловых координат для крайних лучей пучка и не зависят от разброса $\Delta\varphi_0$. В результате для этого бильярда $K = 1$.

При малых $\Delta/r \ll 1$ коэффициент расширения определяется соотношением (см. Приложение В)

$$K = 1 + \frac{4\Delta}{r} \sqrt{A^2 + B^2} \cos\left[S_2 + \arctan\left(\frac{B}{A}\right)\right], \quad (5)$$

где введены функции $A = A(S_1, S_2)$ и $B = B(S_1, S_2)$

$$A(S_1, S_2) = 2 - \frac{\left(\frac{n_1}{n_0}\right) \sin\left(\frac{S_2 - S_1}{2}\right)}{\sqrt{1 - \left[\left(\frac{n_1}{n_0}\right) \sin\left(\frac{S_2 - S_1}{2}\right)\right]^2}} + \frac{\left(\frac{rn_1}{Rn_0}\right) \sin\left(\frac{S_2 - S_1}{2}\right)}{\sqrt{1 - \left[\left(\frac{rn_1}{Rn_0}\right) \sin\left(\frac{S_2 - S_1}{2}\right)\right]^2}},$$

$$B(S_1, S_2) = \cot\left(\frac{S_2 - S_1}{2}\right).$$

Нетрудно заметить, что при определенных значениях (S_1, S_2) существует фазовая область, где коэффициент расширения больше единицы. Например, для всех $S_1 \in [0; \pi/2] \cup [\pi; 2\pi]$ при $S_2 \in [3\pi/2; 2\pi]$ будет $K > 1$ (при этом $B > 0$). Следовательно, в данной системе может наблюдаться хаос, связанный с рассеянием лучей при их прохождении сквозь среду с другим коэффициентом преломления. Исследуем особенности этого поведения более детально на фазовом портрете каскада отображений (1).

3. Фазовый портрет и фазовые перестройки

Изучим фазовый портрет и его перестройки для семейства билиардов при возрастании параметра асимметрии Δ/r . Симметричный случай $\Delta = 0$ рассмотрен ранее [13]. В общем случае фазовая динамика охватывает четыре склеенных друг с другом листа фазового пространства $\Phi = \bigvee_{i,j} \mathbb{T}_{|ij|}^2$, где $i, j = (0, 1)$. Для однозначности динамического описания кроме координат лучей необходимо указывать маршрут их следования. Строго говоря, одновременно с заданием каждого начального луча парой фазовых координат (x, y) необходимо задавать и маршрут его следования. Последний кодируется двоичной последовательностью из нулей и единиц в соответствии с порядком посещения лучом билиардной траектории сред 0 и 1. Очевидно, что каждому маршруту можно поставить в соответствие вещественное число s на единичном отрезке. Таким образом, тройка $\{(x, y); s\}$ однозначно задает начальное условие для эволюции любой билиардной траектории.

Разбив множество всех возможных траекторий на классы эквивалентности в соответствии с допустимыми маршрутами и с учетом возможных правил запрета, навязанных геометрией билиарда, можно исследовать фазовую динамику траекторий соответствующего типа. Для классов, закодированных простейшими периодическими последовательностями вида $11\dots$ или $00\dots$, задача сводится к исследованию динамики обычного билиарда. В первом случае – это обычный билиард во внутреннем круге; во втором – внешний билиард с двухсвязной границей, состоящей из пары окружностей (внешней и внутренней границ исходного билиарда). Оба указанных типа связаны с отражением лучей от границ обычных билиардов. Назовем этот тип динамикой «простого отражения». Новый нетривиальный анализ связан с исследованием класса траекторий с периодическим маршрутом другого вида $[1001001\dots]$. Здесь период – это серия 100. В этом случае учитываются периодически повторяющиеся акты преломления луча при его однократном выходе в другую среду с последующим возвращением в исходную. Поэтому данный тип динамики можно назвать динамикой «простого преломления». Она представляет существенный интерес. Траектории такого типа являются неньютоновскими, так как связаны с законами преломления (следуют из волновой теории). Очевидно, что фазовый портрет траекторий с более сложными, в том числе непериодическими маршрутами, сводится к композиции фазовых портретов простого отражения и преломления, хотя сама последовательность наложения таких элементарных портретов в полном фазовом пространстве может быть достаточно сложной и даже хаотической.

Не всегда маршрут луча можно указать явно. Например, это практически невозможно сделать для хаотических последовательностей, для которых отсутствует какой-либо алгебраический алгоритм восстановления произвольного отрезка последовательности по ее начальному отрезку. Маршрут траектории в общем случае зависит от выбора начальных координат луча. Эта связь не является взаимно-однозначной, так как одному и тому же начальному лучу могут соответствовать разные маршруты из-за возможного расщепления лучей. Тем не менее эта согласованность позволяет использовать другой способ введения понятия маршрута луча. Вначале можно считать, что заданы только начальные координаты луча. Затем, отмечая последовательные отражения и преломления порожденных им траекторий – последовательно строить и перечислять все связанные с этим допустимые маршруты. При этом мож-

но следить за какими-то выделенными типами маршрутов, например, за маршрутом 1001001... «простого преломления». В такой интерпретации в структуре всевозможных маршрутов можно явно обнаружить проявление некоторых правил запрета, которые ограничивают класс допустимых маршрутов, соответствующих определенным множествам начальных точек в фазовом пространстве системы.

В случае простого преломления лучи посещают две среды в порядке $|11\rangle \xrightarrow{F_{01}} |10\rangle \xrightarrow{F_{00}} |01\rangle \xrightarrow{F_{10}} |11\rangle \dots$. Лист с индексом $|00\rangle$ никогда не посещается. Фазовые портреты на каждом листе можно исследовать по отдельности. Ограничимся рассмотрением листа $\mathbb{T}_{|11\rangle}^2$. Для симметричного бильярда этот лист стратифицируется на одномерные инвариантные многообразия (кривые). Распространению луча в обычном геометрическом пространстве соответствует фиксированный сдвиг вдоль указанных инвариантных кривых в фазовом пространстве. Динамика описывается суперпозицией отображений $F = F_{10} \circ F_{00} \circ F_{01}$:

$$F : \begin{cases} \bar{x} = x + I(x_0 - y_0) \bmod 2\pi, \\ \bar{y} = y + I(x_0 - y_0) \bmod 2\pi, \end{cases}$$

куда входит зависящий только от разности координат $x_0 - y_0$ интеграл движения невозмущенного (симметричного) бильярда $I = I(x_0, y_0) = I(x_0 - y_0)$:

$$I = 2 \left\{ \arcsin \left[\frac{n_1}{n_0} \cos \frac{x_0 - y_0}{2} \right] - \arcsin \left[\frac{rn_1}{Rn_0} \cos \frac{x_0 - y_0}{2} \right] + \frac{x_0 - y_0}{2} \right\}.$$

При наличии асимметрии отображение примет вид

$$F = \begin{cases} \bar{x} = x + I(x_0 - y_0) + \left(\frac{\Delta}{r}\right) \alpha_1(x, y) \bmod 2\pi, \\ \bar{y} = y + I(x_0 - y_0) + \left(\frac{\Delta}{r}\right) \alpha_2(x, y) \bmod 2\pi, \end{cases} \quad (6)$$

где функции $\alpha_1(x, y)$ и $\alpha_2(x, y)$ уже зависят от обеих координат x и y .

Качественное исследование фазового портрета отображения (6) с ростом величины Δ/r показывает, что инвариантные кривые (прямые линии на развертке тора) невозмущенного бильярда вначале искажаются, причем максимально сильно вблизи диагонали тора (рис. 2). При этом у них снимается вырождение по типу устойчивости периодических траекторий. Фазовые траектории невозмущенного бильярда характеризуются нейтральной устойчивостью, так как оба собственных значения матрицы Якоби линеаризованного отображения всегда равны единице. Возмущенные траектории распадаются на два класса – гиперболические орбиты вдали от диагонали и эллиптические орбиты в окрестности возникающих в результате фазовой перестройки неподвижных точек эллиптического типа. Вначале это неподвижные точки на диагонали фазового пространства. (По определению, на диагонали обе координаты фазовых точек совпадают.) На рис. 2 эти точки имеют координаты $(0, 0)$ и $(2\pi, 2\pi)$. После склейки на торе – это одна и та же точка. Островки устойчивости, хорошо различимые при малой асимметрии (см. рис. 2), охвачены сепаратрисой, обе петли которой замыкаются в гиперболической неподвижной точке (π, π) на диагонали тора. К этой же неустойчивой точке прижаты траектории гиперболической компоненты движения.

Физическая причина перестроек фазового портрета связана с резонансами и напоминает перестройки, наблюдаемые в гамильтоновых системах с увеличением нелинейности [21]. Для асимметричного билиарда нелинейность возрастает с ростом параметра Δ/r (см. соотношение (6)). В окрестности сепаратрисы резонанса возникает узкий хаотический слой, связанный с появлением гомоклинической структуры. Наиболее заметен он в окрестности гиперболических точек. С ростом асимметрии хаотический слой расширяется, как и ширина резонанса. Становятся заметными и хаотические слои резонансов более высоких порядков. Постепенно хаотические слои резонансов перекрываются и при расширении хаотических слоев мера эллиптических островов устойчивости уменьшается. Фактически все фазовое пространство вблизи диагонали заполняется хаотическим морем. При больших деформациях (рис. 3) вдали от диагонали еще сохраняется структура резонансов низких порядков с заметным хаотическим слоем и островами устойчивого эллиптического движения. С ростом асимметрии мера области хаотичности возрастает.

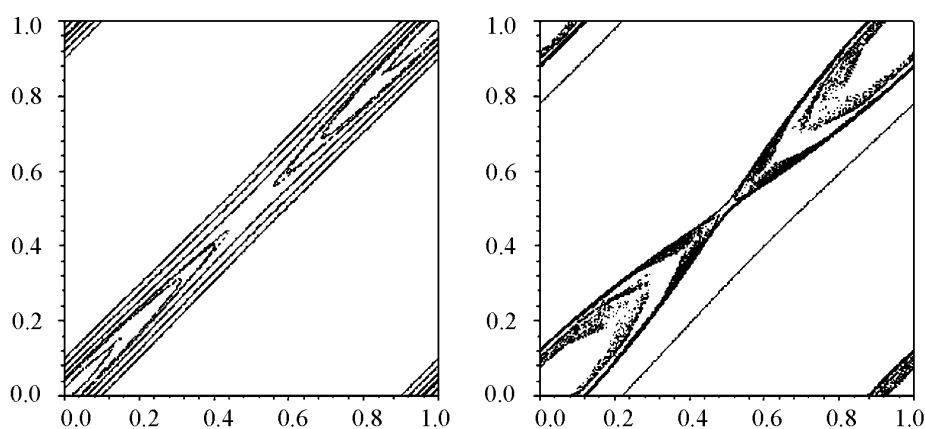


Рис. 2. Фазовые портреты на листе [11] при $\Delta \sim 0.001r$ (слева) и $\Delta \sim 0.01r$ (справа). Показаны типичные траектории вблизи диагонали фазового пространства. Фазовые области во всех углах на торе склеиваются. Проявляется хаотическая паутина вблизи сепаратрис, смыкающихся на диагонали. Вдали от диагонали показана одна из гиперболических траекторий, которая незначительно отличается от инвариантной кривой невозмущенного билиарда

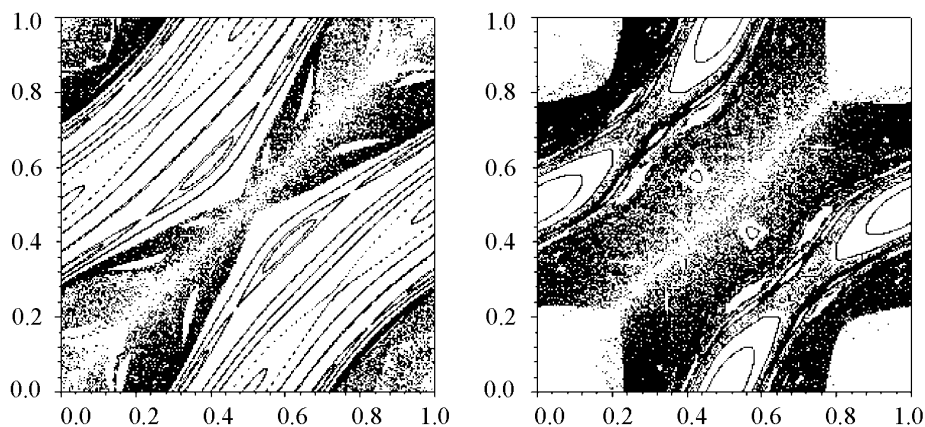


Рис. 3. Фазовые портреты на листе [11] при $\Delta \sim 0.1r$ (слева) и $\Delta \sim 0.2r$ (справа). Фазовое пространство смешанное. Вдали от диагонали перекрываются резонансы (зоны эллиптического движения). Вблизи диагонали наблюдается развитый хаос и пустые квазилакуны, из которых фазовые траектории быстро выталкиваются в остальную часть фазового пространства

Описанные фазовые перестройки относились к классу лучей с одним из наиболее простых маршрутов [100100...]. При этом считалось, что в качестве начального можно выбрать любой луч, выпущенный во внутреннем круге. При анализе этой фазовой динамики по умолчанию допускались любые значения фазовых координат на листе $\mathbb{T}_{|11|}^2$. Вместе с тем, не для всякого начального луча при изменении формы композитного бильярда является допустимым маршрут 100100..., в отличие от симметричного бильярда, где для любого начального луча среди порожденных им траекторий (в результате преломления и отражения лучей) всегда существует траектория с указанным маршрутом. Запрет на этот тип эволюции связан с геометрией (асимметрией) бильярда и состоит в следующем. При распространении луча на некотором начальном этапе требуемый маршрут с периодическим повторением цикла 100 сохраняется. Однако из-за асимметрии бильярда в некоторый момент эволюции преломленный луч, вошедший в среду 0, отразившись от внешней границы, может не попасть на внутреннюю границу (рис. 4). Вместо этого он проходит мимо нее и отражается еще один или большее число раз от внешней границы до тех пор, пока снова не попадет на внутреннюю границу. Только после этого он преломляется и возвращается в среду 1. Можно проверить, что эта задержка всегда будет конечной. Для некоторых траекторий она может стать сколь угодно долгой, если внешняя и внутренняя границы бильярда расположены близко друг к другу, то есть при $\Delta \rightarrow (R - r)$. После однократного отражения во внутреннем круге указанный луч снова выходит во внешнюю среду и опять до своего возвращения может испытать более чем одно отражение от внешней границы и т.д. Маршрут такой траектории в общем случае неперiodический и имеет вид:

в общем случае неперiodический и имеет вид: $\left[1001 \overbrace{0 \dots 0}^{m_1} 1 \overbrace{0 \dots 0}^{m_2} 1 \dots \right]$, где m_1, m_2, \dots могут принимать любые целые значения не меньше 2.

Длительное пребывание луча во внешней среде до возвращения во внутреннюю означает медленное заполнение на фазовом листе $\mathbb{T}_{|11|}^2$ некоторых областей. Они соответствуют начальным лучам, заданным в среде 1, с указанными выше

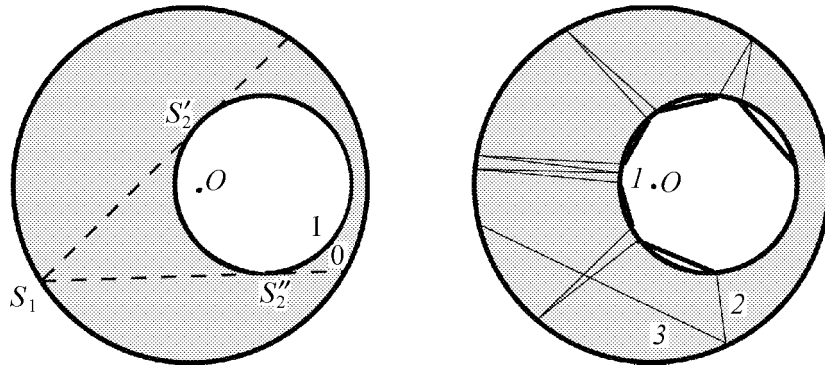


Рис. 4. Происхождение геометрических лакун (слева) и квазилакун (справа). Слева показан ограниченный штрихованными лучами сектор, входящие в который лучи не могут достичь внешней границы 0 из-за наличия внутренней 1. В фазовом пространстве такие лучи попадают в область лакуны на листе $\mathbb{T}_{|00|}^2$. Справа показана траектория, принадлежащая квазилакуне. В маршруте траектории нарушена периодическая последовательность 1001001... из-за появления серии отражений от внешней границы. Начальный луч 1 в фазовом пространстве находится вблизи точки (π, π) . После каскада преломлений и отражений луч 2 отражается от внешней границы, но затем не достигает внутренней 3 и продолжает свою серию отражений от внешней границы

маршрутами. Поэтому даже в развитом хаосе, когда почти вся часть фазового пространства доступна любой фазовой траектории с любым маршрутом, вероятность попадания в эти зоны будет невысока. В отличие от остальных зон на фазовом портрете они выглядят пустыми, поэтому их можно считать «квазилакунами», то есть областями, в которые типичная фазовая траектория практически не заходит. Объем квазилакун увеличивается с ростом асимметрии бильярда (см. рис. 3). Как можно видеть, области квазилакун соответствуют лучам, расположенным ближе к меньшему перешейку между внутренней и внешней границами бильярда. Кроме того, характерным свойством квазилакун является свойство «выталкивания» фазовых траекторий. Отметим, что этим свойством также обладает фазовая диагональ листа $\mathbb{T}_{|11|}^2$. Другими словами, траектории «простого преломления», которые содержат лучи с направлением движения, близким к касательному к внутренней границе (траектории со вставками типа «шепчущих галерей»), практически не наблюдаемы, то есть разрушены потоком.

Как видим, при достаточно большой асимметрии свойства системы сильно отличаются от невозмущенной системы. Для симметричной системы лист $\mathbb{T}_{|00|}^2$ в каскаде с преломлениями не участвовал вовсе. Он частично заполнялся за счет каскада отражений исключительно от внешней границы бильярда, то есть как в обычном кольцевом бильярде, но без отражений от внутренней границы, минуя при этом остальные листы фазового пространства. Любая фазовая траектория этого листа никогда не покидала его. Это свойство частично сохраняется и в случае асимметрии. Однако здесь на листе $\mathbb{T}_{|00|}^2$ уже появляются фазовые траектории, которые многократно приходят на него или уходят с него.

Любой луч внутри среды 1 можно выбрать в качестве начального для последующего каскада с преломлением и отражением лучей. Можно проверить, что для любого начального луча, выпущенного из внутреннего круга (фазовой точки на листе $|11|$), существует критический параметр асимметрии, при котором топология допустимых маршрутов разрешает сколь угодно длинные серии непрерывающихся посещений фазовой траекторией листа $|00|$. Так как во время движения во внешнем или внутреннем круге любая траектория ведет себя регулярным образом (как отдельная траектория кругового бильярда), то появление таких серий можно интерпретировать как длинные ламинарные фазы, изредка прерываемые быстрыми переходами из внешнего круга во внутренний и обратно. Такая динамика носит характер своеобразной перемежаемости, порожденной преломлением лучей. При этом доля траекторий, полученных в результате расщепления лучей, которые находятся в среде 0, в среднем будет больше доли траекторий, находящихся в среде 1. Как показывают численные расчеты, эта тенденция усиливается с ростом Δ и уменьшением r/R или n_1/n_0 .

4. Физические особенности фазовой динамики

Существует еще одна причина усложнения структуры маршрутов и появления настоящих лакун в фазовом пространстве кольцевого бильярда. Физически она связана с явлением полного внутреннего отражения. Для определенности примем $n_1 < n_0$, то есть показатель преломления внутренней среды асимметричного бильярда меньше, чем показатель преломления внешней среды. Тогда при распространении

нии луча в среде 0 он может попасть на внутреннюю границу под углом большим критического $\theta_{cr} = \arcsin(n_1/n_0)$. В этом случае он уже не проходит в менее плотную среду, а только отражается назад во внешней среде. Условие, при котором это происходит, можно записать в выбранных угловых координатах

$$\left| \frac{\rho \sin(\tilde{S}_2 - \tilde{S}_1)}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2r\rho \cos(\tilde{S}_2 - \tilde{S}_1)}} \right| > \frac{n_1}{n_0}, \quad (7)$$

где

$$\tilde{S}_{1,2} = S_{1,2} + \arcsin\left(\frac{\Delta}{\rho} \sin S_{1,2}\right), \quad \rho = \sqrt{R^2 + \Delta^2 - 2R\Delta \cos S_1}.$$

Если оно выполняется, то фазовая точка при очередной итерации формально попадает в запрещенную область на соответствующем листе $\mathbb{T}_{|11|}^2$, так как физически преломленный луч не существует. Множество всех таких точек и образует лауну. Аналогично при $n_1 > n_0$ появляется лакуна на листе $|00|$. Ей соответствует множество лучей во внутренней области бильярда, угол падения которых (на предыдущем шаге каскада) на внутреннюю границу больше критического. Отметим, что в общем случае наличие полного внутреннего отражения может также приводить к прореживанию допустимых маршрутов лучей.

В полный фазовый каскад вовлечены недиагональные листы $|01|$ и $|10|$. Рассмотрим один из них, например, $\mathbb{T}_{|01|}^2$. Принципиальной разницы между ними нет из-за обратимости траекторий бильярда. Поэтому фазовые портреты на этих листах будут одинаковыми. Для недиагональных листов существенным является возникновение лакун полного внутреннего отражения и геометрических лакун, обусловленных геометрией бильярда. Последние соответствуют лучам бильярда, которые попадают в область геометрической тени. На рис. 4 показано, что при фиксированном значении одной из координат луча S_1 на лист $|10|$ попадают только такие лучи, вторая координата которых лежит в промежутке $[S'_2, S_2]$. Все остальные лучи продолжают оставаться на листе $|00|$. Стоит отметить, что их дополнение на листе $\mathbb{T}_{|00|}^2$, в свою очередь, образует лауну – область геометрической тени, вызванную наличием внутренней границы.

Для симметричного бильярда все фазовые листы стратифицируются на одномерные инвариантные многообразия [13]. Для асимметричного бильярда все листы могут иметь хаотические области. На листах $|01|$ и $|10|$ образование хаотических зон наиболее интенсивно идет в областях, близких к диагонали фазового пространства, особенно вблизи точки $(0, 0)$. Это показано на рис. 5. В геометрическом пространстве хаотическая зона соответствует лучам, которые падают на внутреннюю границу под минимальными углами, в том числе в самом узком месте между внутренней и внешней границами. Именно для таких лучей угловое расширение пучков или разбегание фазовых траекторий максимально. В остальной части недиагональных фазовых листов динамика сильно замедлена и фазовые области долго остаются пустыми, так как их посещение затруднено эффектами полного внутреннего отражения и наличием геометрических лакун. Описанное динамическое поведение хорошо подтверждается в компьютерных экспериментах.

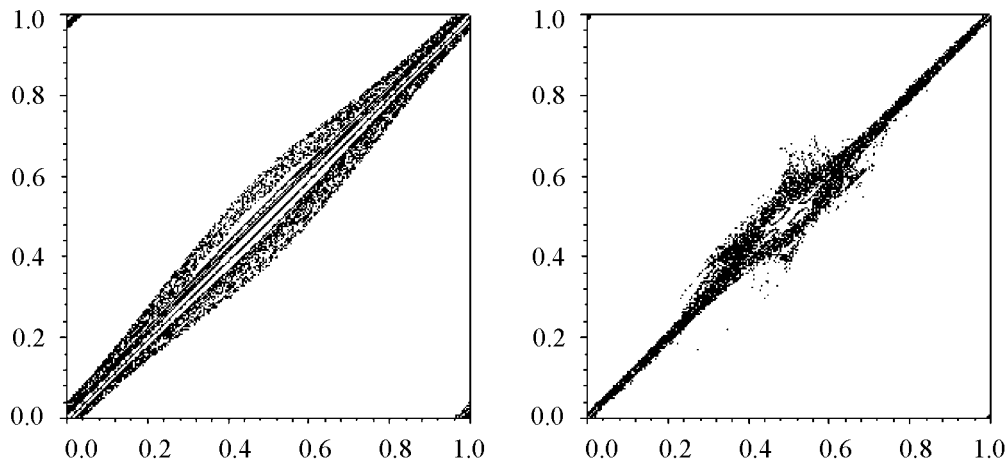


Рис. 5. Фазовый портрет на листе $|01|$ при Δ приблизительно равном $0.1r$ (слева) и при $0.3r$ (справа)

Что касается поведения показателя Ляпунова для типичной хаотической траектории, то на промежуточном этапе (при изменении Δ/r в интервале от 0 до 0.2), когда происходят описанные в предыдущих разделах фазовые перестройки, он ведет себя крайне нерегулярным образом (рис. 6). Это связано с появлением и исчезновением в фазовом пространстве регулярных островков устойчивости достаточно большого объема (см. рис. 3). Формально, появление каждого нового островка устойчивости должно сопровождаться уменьшением показателя Ляпунова, а его исчезновение – возрастанием. При большой асимметрии почти все островки разрушены и показатель Ляпунова начинает монотонно возрастать с ростом асимметрии. Он достигает своего максимального значения, когда внутренний и внешний круги кольцевого бильярда касаются друг друга.

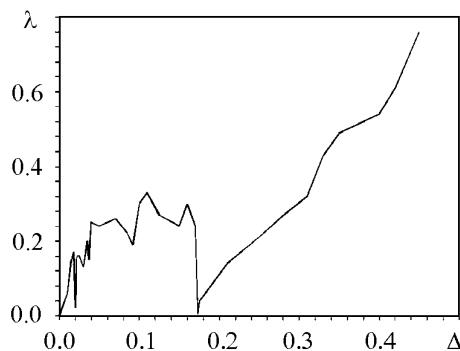


Рис. 6. Показатель Ляпунова типичной хаотической траектории (маршрут 100100...) при изменении управляющего параметра Δ (радиусы внешнего и внутреннего круга бильярда фиксированы $R = 2r = 1$)

Заключение

На примере сравнительно простого асимметричного кольцевого бильярда с расщеплением лучей установлены характерные особенности фазовой динамики лучей, которая допускает отражение и преломление. Помимо традиционных механизмов хаотизации лучей важную роль играет непредсказуемость их закона движения, который определяется маршрутом луча и может быть закодирован двоичной последовательностью, периодической или хаотической.

В бильярде с расщеплением лучей реализуется новый механизм хаоса, обусловленный континуальностью множества допустимых маршрутов лучей, среди которых заведомо присутствуют случайные маршруты. Обычно в динамических си-

стемах или отображениях хаос инициирует нелинейность, заложенная в уравнениях движения. В данном случае помимо этого фактора новым «элементом» является размножение и преломление лучей на внутренней границе раздела сред. Это приводит к новым динамическим эффектам в таких системах. Можно надеяться, что и в других бильярдах с расщеплением лучей следует ожидать обнаруженные в кольцевом бильярде особенности регулярной и хаотической динамики и тонкое влияние эффекта расщепления лучей на динамические и статистические характеристики такой бильярдной системы.

Приложение А

Рассмотрим асимметричный бильярд (см. рис. 1). В качестве лабораторной системы отсчета S выберем полярную систему координат (ρ, φ) с центром в точке O (нештрихованные координаты). Полярная система координат (ρ', φ') с центром в точке O' будет вспомогательной системой отсчета S' (штрихованные координаты). Некоторые соотношения вначале удобно получать в системе S' , а затем переходить к лабораторной системе. Получим отображения, описывающие распространение луча. Отображение F_{01} переводит луч (φ_1, φ_2) из среды 1 в луч (φ_2, φ_3) в среде 0.

Для любой точки декартовой плоскости связь между ее угловыми координатами в системах S и S' определяется формулой

$$\varphi' = \varphi + \arcsin \left(\frac{\Delta}{\rho} \sin \varphi \right) .$$

Для точек, находящихся на внешней и внутренней границах бильярда, соответственно,

$$\rho' = \sqrt{R^2 + \Delta^2 - 2R\Delta \cos \varphi} , \quad \varphi' = \varphi + \arcsin \left(\frac{\Delta}{\rho'} \sin \varphi \right) ,$$

$$\rho = \sqrt{r^2 + \Delta^2 + 2r\Delta \cos \varphi'} , \quad \varphi = \varphi' - \arcsin \left(\frac{\Delta}{\rho} \sin \varphi' \right) .$$

Падающий луч в среде 1 имеет наклон

$$k'_1 = \tan \varphi'_2 \equiv k_1 = \frac{R \sin \varphi_2 - \rho_1 \sin \varphi_1}{R \cos \varphi_2 - \rho_1 \cos \varphi_1} ,$$

где

$$\rho_1 = \sqrt{r^2 + \Delta^2 + 2r\Delta \cos \left(\varphi_1 + \arcsin \left(\frac{\Delta}{r} \sin \varphi_1 \right) \right)} .$$

Наклон преломленного луча (φ_2, φ_3) в среде 0

$$k_2 = \tan (\varphi'_2 + N\beta) ,$$

где $N = \text{sign} (\varphi'_2 - \varphi'_1)$ и штрихованные координаты следует выразить через нештрихованные по предыдущим формулам. Угол преломления луча (φ_1, φ_2) в системе S'

$$\beta = \arcsin \left[\frac{n_1}{n_0} \cos \left(\frac{\varphi'_2 - \varphi'_1}{2} \right) \right] .$$

Уравнение прямой, на которой лежит преломленный луч, в полярных координатах имеет вид

$$\rho \sin \varphi = k_2 \rho \cos \varphi + b_2 .$$

Коэффициент b_2 определяется из условия, что точка $S_2 = (\rho_2 \cos \varphi_2, \rho_2 \sin \varphi_2)$ принадлежит этой прямой, то есть из уравнения

$$b_2 = \rho_2 \sin \varphi_2 - k_2 \rho_2 \cos \varphi_2 ,$$

где

$$\rho_2 = \sqrt{r^2 + \Delta^2 + 2r\Delta \cos \left(\varphi_2 + \arcsin \left(\frac{\Delta}{r} \sin \varphi_2 \right) \right)} .$$

Угловая координата φ_3 точки S_3 определяется из условия пересечения указанной прямой окружностью $\rho = R$. Решая уравнения относительно φ , получим два возможных решения

$$\varphi_3 = \varphi_{\pm} = 2 \arctan \left(\frac{R \pm \sqrt{R^2 (1 + k_2^2) - b_2^2}}{b_2 + k_2 R} \right) .$$

Выбираем из них то, которое удовлетворяет условию $\varphi_2 \in [\varphi_2 - \theta_2, \varphi_2 + \theta_1]$. Здесь

$$\theta_1 = \arccos \left(\frac{\rho}{R} \cos \zeta \right) + \zeta ; \quad \theta_2 = \arccos \left(\frac{\rho}{R} \cos \zeta \right) - \zeta ; \quad \zeta = \arcsin \left(\frac{\Delta}{r} \sin \varphi_2 \right) .$$

Отображение F_{00} связывает луч (φ_2, φ_3) с лучом (φ_3, φ_4) после отражения от внешней границы. Наклон отраженного луча (φ_3, φ_4) в лабораторной системе

$$k_3 = \tan \varphi_4 = \tan (\varphi_4 - 2\delta) ,$$

где δ – угол отражения от внешней границы в точке S_3

$$\delta = \delta (\varphi_2, \varphi_3) = \arctan \left[\frac{\rho_2 \sin (\varphi_3 - \varphi_2)}{R - \rho_2 \cos (\varphi_3 - \varphi_2)} \right] .$$

Выполним аналогичные вычисления в системе S' с учетом того, что угловая координата точки S_4 определяется из условия пересечения прямой, на которой лежит луч (φ_3, φ_4) , с окружностью $\rho' = r$. Наклон этой прямой не зависит от выбора системы отсчета, то есть $k_2 = k'_2$, где k_2 выражена в лабораторных, а k'_2 в штрихованных координатах. Уравнение прямой в полярных координатах

$$\rho' \sin \varphi' = k'_3 \rho' \cos \varphi' + b'_3 .$$

Из условия, что этой прямой принадлежит точка $S_3 = (\rho'_3 \cos \varphi'_3, \rho'_3 \sin \varphi'_3)$, определяется постоянная b'_3

$$b'_3 = \rho'_3 (\sin \varphi'_3 - k'_3 \cos \varphi'_3) ,$$

где

$$\varphi'_3 = \varphi_3 + \arcsin \left(\frac{\Delta}{\rho'_3} \sin \varphi_3 \right) ; \quad \rho'_3 = \sqrt{R^2 + \Delta^2 - 2R\Delta \cos \varphi_3} .$$

Для точки $S_4 = (r \cos \varphi'_4, r \sin \varphi'_4)$ получим

$$\varphi'_4 = \varphi'_\pm = 2 \arctan \left(\frac{r \pm \sqrt{r^2 (1 + k_3^2) - b_3^2}}{b_3 + k_3 r} \right).$$

Возвращаясь в лабораторную систему координат, получим

$$\varphi_4 = \varphi_\pm = \varphi'_\pm - \arcsin \left(\frac{\Delta \sin \varphi'_\pm}{\sqrt{r^2 + \Delta^2 + 2r\Delta \cos \varphi'_\pm}} \right),$$

где штрихованные величины должны быть выражены через нештрихованные. Одно из решений нефизическое и соответствует второй (более удаленной от точки S_3) точке пересечения прямой с внутренней окружностью. Его следует отбросить. Искомое значение φ_4 определяется из условия минимальности длины отрезка $|S_3 S_4|$.

В отличие от симметричного бильярда при некоторых начальных данных луч после отражения от границы 0 может не попасть на границу 1. Это происходит при условии $r^2 (1 + k_3^2) - b_3^2 \leq 0$, когда квадратный корень в выражении для φ'_\pm становится мнимым. В этом случае угловая координата точки S_4 на внешней окружности равна $\varphi_4 = \pi + \varphi_3 - 2\delta$, то есть это сдвиг угловой переменной как для обычного бильярда в круге.

Отображение F_{10} переводит луч (φ_3, φ_4) из среды 0 в луч (φ_4, φ_5) в среде 1. При этом угол падения γ на внутреннюю границу связан с углом преломления ε соотношением

$$\sin \varepsilon = \frac{n_1}{n_0} \sin \gamma.$$

Угловая координата точки S_5 во вспомогательной системе отсчета определяется из системы уравнений

$$\varphi'_5 = \varphi'_4 + (\pi - 2\varepsilon); \quad \gamma = \varphi'_4 - \varphi_3 + \delta(\varphi_1, \varphi_2),$$

в которую входит и предыдущее уравнение. В этих уравнениях все величины должны быть выражены в штрихованных координатах. Эти уравнения легко получить из геометрических соображений. После обратного перехода в лабораторную систему отсчета получим нужный результат для φ_5 . Явные громоздкие выражения опускаем. Отметим только, что для определения φ_5 необходимо указать угол отражения δ при предыдущем отражении луча в среде 0, но окончательно этот угол можно выразить только в координатах φ_3 и φ_4 .

Отображение F_{11} связывает падающий луч (φ_1, φ_2) с отраженным $(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2)$ во внутренней среде. Поэтому его проще всего получить в штрихованной системе отсчета. В ней точка \bar{S}_2 имеет угловую координату $\bar{\varphi}'_2 = 2\varphi'_2 - \varphi'_1$ (как для бильярда в круге). Переходя в лабораторную систему, получим

$$\bar{\varphi}_2 = (2\varphi'_2 - \varphi'_1) - \arcsin \left[\frac{\Delta \sin (2\varphi'_2 - \varphi'_1)}{\sqrt{r^2 + \Delta^2 + 2r\Delta \cos (2\varphi'_2 - \varphi'_1)}} \right],$$

где штрихованные величины следует выразить через нештрихованные. Отображение $(S_3, S_4) \xrightarrow{F_{00}} (\bar{\varphi}_3, \bar{\varphi}_2)$ соответствует отражению луча от внутренней границы, но снаружи, во внешней среде 0. Громоздкое выражение для него также опускаем.

Приложение В

Проследим за распространением пучка лучей (не обязательно узкого) в симметричном бильярде. Для полного описания пучка достаточно задать три независимых координаты:

$$\varphi_1 - \varphi_0 ; \varphi'_1 - \varphi'_0 ; \Delta\varphi_0 .$$

При распространении в среде 0 пучок имеет угловой разброс $\Delta\varphi_0$. После преломления ширина пучка станет равной $\Delta\varphi$

$$\Delta\varphi = 2(\theta_1 - \theta_2) + \Delta\varphi_0 ,$$

где

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2} - \arcsin \left[\frac{n_1}{n_0} \cos \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2} \right) \right] + \arcsin \left[\frac{r}{R} \frac{n_1}{n_0} \cos \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2} \right) \right] ;$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi'_1 - \varphi'_0}{2} - \arcsin \left[\frac{n_1}{n_0} \cos \left(\frac{\varphi'_1 - \varphi'_0}{2} \right) \right] + \arcsin \left[\frac{r}{R} \frac{n_1}{n_0} \cos \left(\frac{\varphi'_1 - \varphi'_0}{2} \right) \right] .$$

Нетрудно получить, что $\partial\Delta\varphi/\partial\Delta\varphi_0 = 1$, то есть в этом случае коэффициент расширения пучка равен единице.

Для описания пучка в несимметричном кольцевом бильярде требуется задать не три, а четыре переменных. В их качестве удобно взять

$$\varphi_1 - \varphi_0 ; \varphi'_1 - \varphi'_0 ; \varphi_0 ; \Delta\varphi_0 .$$

Ширина прошедшего пучка определяется аналогичным выражением

$$\Delta\varphi = 2(\theta_1 - \theta_2) + \Delta\varphi_0 ,$$

но функции θ_1 и θ_2 имеют другой вид

$$\theta_1 = \alpha_1(\varphi_1, \varphi_0) - \mu_1(\varphi_1, \varphi_0) ; \theta_2 = \alpha_2(\varphi'_1, \varphi'_0) - \mu_2(\varphi'_1, \varphi'_0) .$$

Коэффициент расширения инфинитезимального пучка равен

$$\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\Delta\varphi_0} = 2 \frac{\partial\theta_1}{\partial\Delta\varphi_0} - 2 \frac{\partial\theta_2}{\partial\Delta\varphi_0} + 1 .$$

Так как θ_1 является функцией только независимых переменных $\varphi_1 - \varphi_0$ и φ_0 , то первое слагаемое в правой части последнего выражения обращается в ноль. Вычислим функцию θ_2 . Величина α_2 определяется из уравнения

$$\frac{r + \Delta \cos \varphi'_1}{\sin(\alpha_2 + \varphi_1 - \varphi_0)} = \frac{r + \Delta \cos \varphi'_0}{\sin \alpha_2} .$$

Его решение можно представить в виде

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi'_1 - \varphi'_0}{2} + \Delta\zeta .$$

Применяя теорию возмущений по Δ , находим выражение для неизвестной величины ζ

$$\zeta = \frac{1}{2r} (\sin \varphi'_1 - \sin \varphi'_0) .$$

В силу того что отклонение от симметрии мало $\Delta \rightarrow 0$, можно принять

$$\mu_2 = \arcsin \left[\frac{n_1}{n_0} \cos \left(\frac{\varphi'_1 - \varphi'_0}{2} + \frac{\Omega'_2 - \Omega'_1}{2} \right) \right] + \Omega'_2 - \\ - \arcsin \left[\frac{r + \Delta \cos \varphi_1}{R} \sin \left(\arcsin \left[\frac{n_1}{n_0} \cos \left(\frac{\varphi'_1 - \varphi'_0}{2} + \frac{\Omega'_2 - \Omega'_1}{2} \right) \right] + \Omega'_2 \right) \right] .$$

Учтем, что $\varphi'_1 = \varphi_1 + \delta_1$ и $\varphi'_0 = \varphi_0 + \delta_0$. Для простоты также примем $\delta_0 = 0$. Тогда функция $\theta_2 = \theta_2(\varphi_1, \varphi_0)$ приводится к виду

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi'_1 - \varphi'_0}{2} + \Delta \frac{1}{2r} \cot \left(\frac{\varphi'_1 - \varphi'_0}{2} \right) (\cos \varphi'_0 - \cos \varphi'_1) - \\ - \arcsin \left[\frac{n_1}{n_0} \cos \left(\frac{\varphi'_1 - \varphi'_0}{2} + \frac{\Omega'_2 - \Omega'_1}{2} \right) \right] - \Omega'_2 + \\ + \arcsin \left[\frac{r + \Delta \cos \varphi_1}{R} \sin \left(\arcsin \left[\frac{n_1}{n_0} \cos \left(\frac{\varphi'_1 - \varphi'_0}{2} + \frac{\Omega'_2 - \Omega'_1}{2} \right) \right] + \Omega'_2 \right) \right] ,$$

где $\varphi'_0 = \varphi_0$, $\varphi'_1 = \varphi_1 + \delta_1$, $\Omega'_1 \cong \frac{\Delta}{r} \sin \varphi_0$, $\Omega'_2 \cong \frac{\Delta}{r} \sin [\varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + \delta_1]$.

Отсюда определяется коэффициент расширения пучка

$$\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \Delta \varphi_0} = 1 - 2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \delta_1} \frac{\partial \delta_1}{\partial \Delta \varphi_0} .$$

Связь между $\Delta \varphi_0$ и δ_1 легко определить, если считать что распространяющийся пучок является узким и принять $\varphi'_0 = \varphi_0$. В этом случае $\Delta \varphi_0 \cong \delta_1/4$. Тогда $\partial \Delta \varphi / \partial \Delta \varphi_0 = 1 + 8C$, где $C = -\partial \theta_2 / \partial \delta_1$. Дифференцируя θ_2 по δ_1 и введя обозначения A и B

$$A = 2 - \left(\frac{r}{R} \right) \left(\frac{n_1}{n_0} \right) \left(1 - \frac{R}{r} \right) \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2} \times \\ \times \left\{ \left[1 - \left(\frac{n_1}{n_0} \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} + \left[1 - \left(\frac{rn_1}{Rn_0} \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} ; \\ B = \cot \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2} \right) ,$$

получим окончательное выражение для коэффициента расширения пучка:

$$K = 1 + \frac{4\Delta}{r} (A \cos \varphi_1 - B \sin \varphi_1) ,$$

причем здесь $A \in [1, 2]$ и $B > 0$, так как $\varphi_0 < \varphi_1$ по построению пучка. Тригонометрическим преобразованием эту формулу легко привести (в обозначениях $\varphi_0 \rightarrow S_1$ и $\varphi_1 \rightarrow S_2$) к выражению (5). Из последнего выражения видно, что при разных значениях угловых параметров пучка, коэффициент его расширения может быть больше или меньше единицы. В частности, при $\pi/2 < \varphi_0 < \varphi_1 < \pi$ коэффициент меньше единицы, а при $3\pi/2 < \varphi_0 < \varphi_1 < 2\pi$ – больше единицы.

Библиографический список

1. *Крылов Н.С.* Работы по обоснованию статистической физики. М.: Изд-во АН СССР, 1950.
2. *Биркгоф Дж.* Динамические системы. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999.
3. *Benettin G., Strelcyn J.-M.* Numerical experiments on the free motion of a point mass moving in a plane convex region: Stochastic transition and entropy // *Phys. Rev.* 1978. Vol. A 17, № 2. P. 773.
4. *Berry M.V.* Regularity and chaos in classical mechanics, illustrated by three deformations of a circular billiard // *European J. Phys.* 1981. Vol. 2, issue 2. P. 91.
5. *Лазуткин В.Ф.* Выпуклый бильярд и собственные функции оператора Лапласа. Л.: ЛГУ, 1981.
6. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988.
7. *Gutzwiller M.C.* Chaos in Classical and Quantum Mechanics. New York: Springer, 1990.
8. *Лоскутов А.Ю., Рябов А.Б., Акиншин Л.Г.* Механизм ускорения Ферми в рассеивающих бильярдах с возмущаемыми границами // *ЖЭТФ.* 1999. Т. 116, № 5. С. 1781.
9. Proceedings of the International Conference on Classical and Quantum Billiards // *J. Stat. Phys.* 1996. Vol. 83, № 1-2. P. 1.
10. *Синай Я.Г.* К обоснованию эргодической гипотезы для одной динамической системы статистической механики // *Докл. АН СССР.* 1963. Т. 153, №6. С. 1261.
11. *Бунимович Л.А.* Об убывании корреляций в динамических системах с хаотическим поведением // *ЖЭТФ* 1985. Т. 89, № 4(10). С. 1452.
12. *Bunimovich L.A.* Conditions of stochasticity of two-dimensional billiards // *Chaos.* 1991. Vol. 1. P. 187.
13. *Барьяхтар В.Г., Яновский В.В., Найдёнов С.В., Курило А.В.* Хаос в композитных бильярдах // *ЖЭТФ* 2006. Т. 130, № 2(8). С. 335.
14. *Hentschel M., Richter K.* Quantum chaos in optical systems: The annular billiard // *Phys. Rev.* 2002. Vol. E 66. P. 056207-1 - 056207-13.
15. *Blumel R., Antonsen T.M., Georgeot B., Ott E., Prange R.E.* Ray splitting and quantum chaos // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 53, № 4. С. 3284.
16. *Hentschel M., Richter K.* Quantum chaos in optical systems: The annular billiard // *Phys. Rev.* 2002. Vol. E 66. P. 056207.
17. *Doron E., Frischat S.D.* Semiclassical description of tunneling in mixed systems: case of the annular billiard // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 75. P. 3661.
18. *Carvalho R.E. de, Souza F.C., Leonel E.D.* Fermi acceleration on the annular billiard // *Phys. Rev.* 2006. Vol. E73, P. 066229.
19. *Найдёнов С.В., Яновский В.В.* Геометрические особенности нелинейной динамики систем с упругими отражениями // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2002. Т. 10, № 1-2. С. 113.
20. *Найдёнов С.В., Яновский В.В., Тур А.В.* Бильярдная проблема в симметричных координатах // *Письма в ЖЭТФ.* 2002. Т. 75, № 8. С. 499.

21. *Чириков Б.В.* Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности. Новосибирск. Препринт ИЯФ, № 267, 1969.

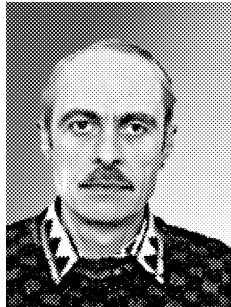
*Институт монокристаллов
НАН Украины, Харьков*

*Поступила в редакцию 14.06.2006
После доработки 23.10.2006*

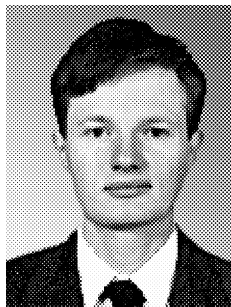
CHAOTIC MODES OF ASYMMETRIC CIRCULAR BILLIARD WITH BEAMS REFLECTION AND REFRACTION

V.V. Yanovsky, S.V. Naydenov, A.V. Kurilo

The paper studies the chaotic dynamics in circular asymmetric billiard with beams reflection and refraction. Phase dynamics is characterized by a variety of dynamics modes, which is connected with the effect of traditional chaotization mechanisms as well as with the complicity of allowable motion laws. In the multisheet symmetric phase space, the circular billiard reconstructions have been analysed its asymmetry degrees changes.



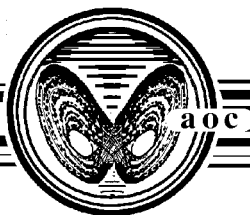
Яновский Владимир Владимирович – родился в 1950 году в г. Полтава, окончил Харьковский государственный университет в 1973 году. После окончания ХГУ работал в Физико-техническом институте (Харьков). В настоящее время работает в Институте монокристаллов (ИМ) НАН Украины. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук в Институте космических исследований (1983) и доктора физико-математических наук в ИМ НАНУ (1996) в области теоретической физики. Область научных интересов – теоретическая физика, хаос и теория турбулентности, нелинейная физика. Автор более 160 научных публикаций.



Найдёнов Сергей Вячеславович – родился в 1968 году в г. Харькове, окончил Харьковский государственный университет в 1993 году. После окончания ХГУ работает в Институте монокристаллов (ИМ) НАН Украины. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук в ИМ НАНУ (1998) в области теоретической физики. Область научных интересов – теоретическая и математическая физика, детерминированный хаос, теория конденсированного состояния вещества. Лауреат премии Президента Украины для молодых ученых (2003). Автор более 70 научных публикаций.



Курило Артем Викторович – родился в 1981 году в г. Купянске Харьковской области, окончил Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина в 2004 году. После окончания ХГУ работал в Институте монокристаллов НАН Украины. Область научных интересов – теоретическая физика, нелинейные явления и детерминированный хаос. Автор 3 научных публикаций.



АТТРАКТОР ЛОРЕНЦА В СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ

А.М. Мухамедов

В рамках ранее предложенной модели хаотической динамики сплошной среды получена реализация трехмерного режима пульсаций скорости течения, отвечающего аттрактору типа Лоренца. Решение представляет собой набор структур, определяющих геометрию редуцированного к трехмерному случаю расслоенного многообразия, образованного пульсациями скоростей течения среды. Сама динамика аттрактора Лоренца проявляется в виде временной зависимости пульсаций скоростей вдоль линий тока среднего течения.

Как известно, один из классических примеров детерминированного хаоса – аттрактор Лоренца – открытый в результате гидродинамических исследований прикладного характера, все еще не получил адекватного воспроизведения в формализме существующей турбулентной механики. В работах автора [1, 2] была высказана гипотеза о том, что классическое гидродинамическое решение этой задачи не может быть получено в принципе, и предложено обоснование такого вывода. В его основе лежало понимание того, что аттракторные модели хаотической динамики затрагивают мезоскопический уровень движения сплошной среды, и что в классических уравнениях Навье – Стокса этот уровень не представлен. Отсюда следовало предложение расширить варианты решения проблемы аттрактора Лоренца за счет явного включения в математический формализм гидродинамики дополнительных мезоструктур, выводящих аппарат этой теории за рамки классических операций с уравнениями Навье – Стокса.

В настоящее время аттракторные режимы динамики сплошных сред конструируются в рамках моделей, представляющих собой далеко уходящие абстракции движения сплошной среды, почти не использующие представления о механических взаимодействиях частиц среды друг с другом [3, 4]. В одних случаях эти абстракции отображают свойства операторов эволюционного типа, действующих в иерархии вложенных друг в друга гильбертовых пространств. В других случаях они отображают динамику конечномерных систем, воспроизводящих изменения состояний среды, но при этом каждое из состояний актуально представлено всего лишь точкой соответствующего фазового многообразия. Подобное моделирование не отвечает прикладному назначению гидромеханики, требующему воспроизведения всех существенных структур непосредственно, то есть в пространстве, занятом сплошной средой. Если учесть аргументы теоретических и экспериментальных данных в пользу

существования такого представления [5-7], то воспроизведение аттракторов в контексте динамики пространственно-временных характеристик среды представляется настоящей необходимостью.

В данной работе строится аттрактор Лоренца в рамках предложенной в [8] модели турбулентной динамики. Согласно этой модели, фазовыми пространствами турбулентных режимов являются расслоения струй *пульсаций* гидродинамических величин. Геометрия пульсационных расслоений предполагается априори произвольной, определяемой моделируемыми особенностями соответствующих хаотических режимов. Основным объектом моделирования является *хаотическая структура*, представляющая собой комплекс неустойчивых траекторий движения точек среды. Предполагается, что каждому *установившемуся* турбулентному режиму отвечает вполне определенная хаотическая структура. В [8] траектории хаотической структуры отождествлялись с множеством интегральных кривых неинтегрируемого (неголономного) распределения типа Пфаффа, заданного на расслоении пульсаций динамических переменных.

Характерной чертой предложенной модели является способ Лагранжа описания движения среды, не сводящийся, в общем случае, к описанию движения в переменных Эйлера. При этом оказалось, что описание Лагранжа замечательно приспособлено для отображения динамики систем со странными аттракторами. Вместо жестких ограничений парадигмы Эйлера описание Лагранжа накладывает гораздо более мягкие условия, служащие для определения геометрических объектов соответствующих неголономных распределений. Такое изменение акцента моделирования позволяет воспроизводить разнообразные аттракторы в динамике пучков частиц континуальных сред.

1. Зададимся уравнениями динамики пульсаций трехмодового режима [8]

$$dy^i + \omega_k^i(x, y^j) dx^k = A^i(x, y^j) dt \quad (i, j, k = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где x^k и y^i образуют наборы пространственных и динамических координат расслоения пульсаций, а объекты $\omega_k^i(x, y^j) dx^k$ и $A^i(x, y^j) dt$ определяют собой характер межмодовых взаимодействий режима. Можно рассматривать эти объекты и само уравнение (1) как правила образования производных от динамических координат по пространственным координатам и времени, определяемых реальной турбулентной эволюцией. Инвариантный геометрический смысл этих объектов состоит в том, что в расслоении пульсаций они определяют объект внутренней связности и вертикальное векторное поле, соответственно.

Предположим, что введенные выше динамические координаты имеют смысл пульсаций скорости течения среды, то есть актуальная скорость среды может быть разложена на поле скоростей среднего течения и пульсации по формуле

$$u^i(x, y) = u_0^i(x) + y^i. \quad (2)$$

Уравнения баланса массы и импульса примем в форме стандартного уравнения неразрывности и уравнения Навье – Стокса

$$\nabla u = 0, \quad (3)$$

$$\frac{du}{dt} = -\nabla p + \nu \Delta u. \quad (4)$$

Данная система уравнений еще не полна, так как в уравнение (4) входит давление, являющееся термодинамической переменной, динамика которой, в общем случае, выходит за рамки кинематики. Для описания пульсаций давления требуются новые динамические координаты, что увеличивает число необходимых степеней свободы для описания соответствующего турбулентного режима движения. Введем новую динамическую переменную, имеющую смысл пульсаций давления, то есть примем

$$p(x, y) = p_0(x) + y^4. \quad (5)$$

Таким образом, первоначальный набор требуемых динамических координат для отображения движения сплошной среды является четырехмерным.

Возможность редукции к трехмерной системе с динамикой, аналогичной динамике системы Лоренца, заключается в том, что в уравнение (4) давление входит в виде градиента. Отсюда следует, что редукция к трехмерной динамике пульсаций скоростей может быть выполнена, если входящий в уравнение (4) градиент давления будет содержать только первые три динамические координаты. Для этого достаточно потребовать, чтобы в уравнениях динамики для четвертой координаты

$$dy^4 + \omega_k^4(x, y)dx^k = A^4(x, y)dt \quad (6)$$

коэффициенты форм связности $\omega_k^4(x, y^j)dx^k$ зависели только лишь от первых трех динамических координат. Заметим, что трехмерный режим может оказаться неустойчивым с точки зрения более полного описания, включающего в себя рассмотрение всех возбуждаемых степеней свободы. Тем не менее, мы ограничимся моделированием именно этой априори возможной динамики.

Рассмотрим условия, накладываемые уравнениями баланса (3), (4) на выражения неизвестных величин $\omega_k^i(x, y^j)dx^k$ и $A^i(x, y^j)dt$, входящих в динамическое уравнение (1). Для этого подставим (2) и (5) в (3) и (4), и воспользуемся уравнениями (1) и (6). Для упрощения возникающих выражений будем считать пространственные координаты x^k декартовыми. В этом случае можно не различать верхние и нижние индексы, поднимая и опуская их по мере необходимости записи ковариантных выражений. Тогда получим следующие уравнения для коэффициентов уравнения (1)

$$\partial_k u_0^k - \omega_k^k = 0, \quad (7)$$

$$A^i + (u_0^k + y^k)(\partial_k u_0^i - \omega_k^i) = -(\partial^i p_0 - \omega^{4i}) - v D_k \omega^{ik}. \quad (8)$$

где введено обозначение $D_k = \partial_k - \omega_k^i \frac{\partial}{\partial y^i}$.

Для дальнейшего конкретизируем постановку задачи. Будем рассматривать режим, среднее поле скоростей которого описывает течение простого сдвига

$$u_0^i = Ax^3 \delta_1^i. \quad (9)$$

Кроме того, сделаем предположения и в отношении геометрии расслоенного пространства пульсаций. Будем считать связность расслоения линейной функцией по динамическим координатам, то есть $\omega_k^\alpha = \omega_{jk}^\alpha(x)y^j$ ($\alpha = 1, \dots, 4$). В этом случае из уравнения (8) сразу следует, что второй объект приобретает полиномиальную по динамическим координатам структуру. А именно, вертикальное векторное поле становится многочленом второго порядка по динамическим координатам, то есть

$$A^i = A_0^i(x) + A_k^i(x)y^k + A_{jk}^i(x)y^j y^k.$$

Таким образом, неизвестными функциями, определяющими уравнение динамики пульсаций рассматриваемого трехмодового режима, являются коэффициенты $\omega_{jk}^a(x)$, $A_0^i(x)$, $A_k^i(x)$ и $A_{jk}^i(x)$, для определения которых имеем уравнения (3) и (4). Заметим при этом, что уравнение (4) по существу сводится к определению коэффициентов вертикального векторного поля, тогда как выбор коэффициентов связности ограничивает только лишь уравнение неразрывности (3). Это уравнение оставляет значительный произвол в определении коэффициентов связности, оставляя тем самым широту моделирования пространственной структуры динамики пульсаций, согласованных с выбранным средним течением.

2. Рассмотрим возможность получения в данной задаче аттрактора типа Лоренца. С этой целью, прежде всего, обсудим разложение актуальных значений скорости на среднюю скорость и пульсации около среднего.

По смыслу пульсаций их временное среднее должно быть равным нулю, то есть

$$\langle y \rangle_T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0. \quad (10)$$

Вместе с тем, пульсации определяются как отклонения актуальных значений скорости от осредненного значения. Если среднее течение считать заданным, то отмеченное обстоятельство не позволяет выбирать в качестве модельного уравнения хаоса произвольную систему уравнений с хаотической динамикой. Для того чтобы переменные модельной системы уравнений можно было рассматривать как пульсации реальных гидромеханических величин, требуется выполнение условий (10). Если же (10) не выполняется, то это означает существование в динамике пульсаций неучтенного дрейфа. Соответственно, принятая модельная система оказывается несогласованной либо с учитываемыми действующими факторами, либо со структурой допусаемого среднего течения.

Далее, уравнение (1) является в общем случае не вполне интегрируемой системой типа Пфаффа. Свойство неинтегрируемости этого уравнения является принципиально важным, отвечающим характерной для турбулентного движения особенности. А именно, в процессе движения любые макроскопически малые турбулентные образования, частицы, моли, глобулы, утрачивают свою индивидуальность. Эта особенность учитывается неинтегрируемостью уравнения (1). По существу, (1) описывает ансамбль возможных траекторий движения точек континуума, образованного сплошной средой. Эти траектории определены в расслоении пульсаций. Их проекции на пространство, занимаемое сплошной средой, определяют динамику развития пульсаций вдоль соответствующих пространственных кривых. Заметим, что последние могут быть выбраны произвольно, определяя собой возможность рассмотрения динамики пульсаций вдоль любой пространственной кривой.

Рассмотрим для определенности динамику пульсаций вдоль линий тока среднего течения. Тогда имеем следующие динамические уравнения:

$$\dot{x}^i = u_0^i, \quad (11)$$

$$\dot{y}^i + \omega_{jk}^i y^j u_0^k = A^i. \quad (12)$$

Прежде чем рассматривать эту систему, преобразуем ее к безразмерным переменным. Для этого в исходном уравнении (4) вместо коэффициента вязкости введем

число Рейнольдса. Затем устраним явную зависимость от этого числа с помощью замены

$$\tilde{\omega}^i = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \omega^i, \quad \omega^4 = \tilde{\omega}^4, \quad \tilde{x} = x\sqrt{\text{Re}}, \quad \tilde{y} = y\sqrt{\text{Re}}, \quad \tilde{u}_0 = u_0\sqrt{\text{Re}}, \quad \tilde{p}_0 = \text{Re } p_0. \quad (13)$$

Опуская знак надчеркивания над переменными, из (12) получаем

$$\dot{y}^i = \Delta u_0^i - u_0^k \partial_k u_0^i - \partial^i p_0 + y^j (-\partial_j u_0^i + \omega_j^{4i} - \partial_k \omega_j^{ik} + \omega_s^{ik} \omega_{jk}^s) + y^j y^k \omega_{jk}^i. \quad (14)$$

Проанализируем (13). Заметим, что используемая модель предполагает развитую турбулентность, то есть число Рейнольдса должно считаться достаточно большим. Тогда, если безразмерные величины имеют значения порядка единицы, то реальные размерные величины в соответствии с (13) будут указывать масштаб проявления динамики. В частности, из (13) следует, что пространственные масштабы оказываются малыми. Тем самым, используемая модель должна рассматриваться, прежде всего, как модель процессов турбулентного перемешивания на мезоскопическом уровне разрешения сплошной среды.

Теперь обратимся к анализу (11) и (12). Легко видеть, что для выбранного среднего течения уравнение (11) имеет простые интегралы. Соответствующие этому уравнения линии тока среднего течения представляют собой прямые, параллельные координатной оси x^1 . Исключая пространственные координаты, из (12) получаем в общем случае систему неавтономных дифференциальных уравнений. При этом, если коэффициенты связности и градиент давления не зависят от координаты x^1 , то система (14) становится автономной, содержащей оставшиеся пространственные координаты x^2 и x^3 в качестве параметров. В этом случае открывается реальный путь к прямому моделированию пространственно неоднородной квазистационарной динамики пульсаций. Ниже будет приведен пример такого моделирования.

В заключение этого пункта заметим, что возникновение неголономного распределения, задаваемого системой Пфаффа (1), (6), является следствием предположения о том, что в состоянии установившейся сильной турбулентности класс возможных траекторий движения частиц среды является стабильным образованием. Необходимым условием этой новой стабильности является требование неустойчивости траекторий движения точек, что, в свою очередь, предполагает большие значения числа Рейнольдса. Попытка распространения подхода на малые значения числа Re является необоснованной.

3. Обратимся к построению примера, в котором пульсации скорости вдоль траекторий среднего течения описываются канонической системой типа Лоренца. Для простоты будем считать все коэффициенты связности постоянными. В этом случае получаем пространственно-однородную вдоль линий тока среднего течения динамику, которая, тем не менее, вдоль произвольных линий не является пространственно-однородной. Будем называть сделанное допущение квазиоднородным приближением.

Наша задача состоит в том, чтобы придать уравнению (14) вид канонической системы Лоренца. Первым видимым препятствием для этого оказывается неопределенность отождествления динамических координат и соответствующих переменных

из канонической системы. Полагая, что различные типы механизмов межмодовых взаимодействий позволят смоделировать любые из подобных отождествлений, выберем следующий вариант. Пусть структура уравнения (14) имеет следующий вид:

$$\dot{y}^1 = \sigma(-y^1 + y^2), \quad (15)$$

$$\dot{y}^2 = (r - \langle z \rangle)y^1 - y^2 - y^1 y^3, \quad (16)$$

$$\dot{y}^3 = -\gamma(y^3 + \langle z \rangle) + y^1 y^2, \quad (17)$$

где явно выделено регулярное слагаемое, которое в соответствии со сказанным в п. 2 должно быть исключено из выражения для пульсаций.

Прежде чем идти дальше, сделаем следующее замечание. Покажем, в каком смысле система (15) – (17) эквивалентна классической системе Лоренца

$$\dot{x} = \sigma(-x + y), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -\gamma z + xy. \quad (18)$$

Для этого предположим, что временные средние для переменных системы (18) существуют. Исходя из инвариантности этой системы относительно преобразований

$$x \rightarrow -x, \quad y \rightarrow -y, \quad z \rightarrow z \quad (19)$$

естественно ожидать, что средние для первых двух переменных должны быть нулевыми. Тогда подстановка

$$x \rightarrow x, \quad y \rightarrow y, \quad z \rightarrow z + \langle z \rangle \quad (20)$$

в (18) дает систему уравнений (15) – (17).

В этой связи отметим, что для различных значений параметров системы Лоренца возможны решения как с нулевыми, так и с отличными от нуля средними значениями первых двух переменных [9]. Имея это в виду, ограничим последующее рассмотрение первой из указанных возможностей. Кроме того, заметим, что подстановка (20) может быть выполнена и в том случае, когда слагаемое в третьем выражении (20) не будет иметь смысла временного среднего. При этом для последующей интерпретации может потребоваться новое определение процедуры осреднения. В общем случае пригодное определение потребует уточнения временных масштабов рассматриваемых явлений. Ясно то, что подобные переопределения потребуют более детального учета как начальных данных, так и вариаций параметров системы. Известный эффект взаимодействия хаотических аттракторов показывает, каким образом могут возникать неоднозначности в определении средних при малых вариациях параметров движения [10].

Вернемся к нашему рассмотрению. Сравнивая коэффициенты системы (15) – (17) и (14), получаем

$$(\Delta u_0^i - u_0^k \partial_k u_0^i - \partial^i p_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\gamma \langle z \rangle \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$(-\partial_j u_0^i + \omega_j^{4i} - \partial_k \omega_j^{ik} + \omega_s^{ik} \omega_{jk}^s) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma 0 \\ r - \langle z \rangle & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$y^j y^k \omega_{jk}^i = \begin{pmatrix} 0 \\ -y^1 y^3 \\ y^1 y^2 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Кроме того, из (7) имеем

$$\partial_k u_0^k = 0, \quad (24)$$

$$\omega_{jk}^k = 0. \quad (25)$$

Рассмотрим (21) и (24). Подставляя выражение (9), легко видеть, что (24) выполняется тождественно, а (21) сводится лишь к определению среднего градиента давления. При этом градиент оказывается перпендикулярным к средней скорости течения, что является следствием выбранного отождествления переменных канонической системы Лоренца и компонент пульсаций скорости.

Обратимся к уравнениям (23) и (25). Из (23) получаем однозначные выражения для симметризованных по нижним индексам компонент объекта связности. Антисимметричная часть определяется из (25) с некоторым произволом. Общее решение этих уравнений дается следующим выражением:

$$\omega_{jk}^i dx^k = \begin{pmatrix} adx^2 - bdx^3 & -adx^1 + cdx^3 & bdx^1 - cdx^2 \\ edx^2 - fdx^3 & -edx^1 + bdx^3 & (f-1)dx^1 - bdx^2 \\ pdx^2 - edx^3 & (-p+1)dx^1 + adx^3 & edx^1 - adx^2 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Обратимся к оставшемуся уравнению (22). Это матричное уравнение представляет собой систему из 9 квадратичных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - c(p+f) + \omega_1^{41} &= -\sigma, \\ ae - bp + \omega_1^{42} &= r - \langle z \rangle, \\ eb - af + \omega_1^{43} &= 0, \\ ae - bp + b + \omega_2^{41} &= \sigma, \\ -cf + e^2 + b^2 - (1-f)(1-p) + \omega_2^{42} &= -1, \\ -ec + ab + \omega_2^{43} &= 0, \\ -af + eb + a - A + \omega_3^{41} &= 0, \\ -ec + ab + \omega_3^{42} &= 0, \\ -cp - (1-f)(1-p) + e^2 + a^2 + \omega_3^{43} &= -\gamma. \end{aligned}$$

Неизвестными в ней являются 6 коэффициентов связности (26), 9 компонент тензора давления, 1 коэффициент, определяющий величину средней скорости, и 3 параметра системы Лоренца. Отсюда следует, что решение этой системы определяется со значительным параметрическим произволом. В рассматриваемом трехмерном режиме тензор градиента давления ω_j^{4i} является произвольным и за счет его конкретизации можно смоделировать желаемую динамику при любом, заранее фиксированном, выборе коэффициентов связности. Для многомерных режимов компоненты тензора давления включены в более полную систему уравнений, учитывающих динамику всех возбуждаемых степеней свободы. В этом случае тензор давления уже не может быть произвольным. В этой связи интересно рассмотреть различные частные варианты определения тензора давления, предполагая, что физически разумные допущения должны находить свои представления в более полных, учитывающих многомерную динамику, уравнениях. Будем предполагать тензор градиента давления диагональным с нулевой компонентой, отвечающей координате y^2 . В этом случае (22) имеет следующее точное аналитическое решение:

$$\omega_1^{41} = J - \sigma, \quad \omega_3^{43} = J - \gamma + 1, \quad J = (R - \sigma)\sigma - A^2, \quad R = r - \langle z \rangle, \quad (27)$$

$$a = A, \quad b = \sigma - R, \quad c = \frac{R - \sigma}{R}J, \quad p = \frac{R\sigma}{J}, \quad f = \frac{R - \sigma}{J}R, \quad e = -\frac{AR}{J}. \quad (28)$$

Рассмотрим полученное решение (27), (28). В нем остались произвольными величины A , r , σ , γ , определяющие величину градиента скорости среднего течения, и три параметра модельной системы Лоренца. Все остальные характеристики движения выражены как функции отмеченного набора величин. За счет выбора определенных значений этих величин можно варьировать динамику пульсаций, а по формулам (26), (27) находить соответствующие значения компонент объекта связности. Если учесть, что каждый объект определяет характер взаимодействий пульсаций, то тем самым появляется возможность варьировать различные типы самих взаимодействий. В частности, варьировать величину компонент тензора давления. Следует заметить, что в некоторых случаях эти компоненты можно обратить тождественно в нуль. Особенность решений (27), (28) состоит в том, что обратить компоненты тензора давления в нуль, оставаясь в области тех значений параметров системы, для которых возникает динамика Лоренца, оказывается невозможным. (Однако это вполне возможно в области тех значений параметров, при которых динамика пульсаций является регулярной.)

Произведем некоторые оценки. Пусть параметры модельной системы отвечают аттрактору Лоренца с параметрами $\sigma = 10$, $r = 28$, $\gamma = 8/3$. В этом случае расчеты показывают, что пульсации имеют характерное время $\tau \approx 0.7$. В пределах расчетного промежутка времени $t = 0 \div 50$, значения пульсаций принадлежат интервалам $y^1 = -17.3 \div 19.8$, $y^2 = -22.8 \div 27.2$ и $y^3 = -23.2 \div 23.7$.

Сопоставим абсолютные значения пульсаций скорости и градиента средней скорости. Из (13) следует, что пульсации получаются делением относительных значений на число $\sqrt{\text{Re}}$, тогда как градиент средней скорости остается неизменным. Примем для градиента скорости значение, равное единице по порядку величины, то

есть $A \sim 1$. Тогда при значении $Re=2000$, то есть при нижнем критическом значении [11], для пульсаций получаем порядок величины, равный 50% от величины градиента. Для случая $Re=40000$, пульсации скорости достигают только лишь 10% от принятого значения градиента средней скорости. Отсюда видно, что разумные пропорции между средней скоростью и пульсациями могут быть обеспечены лишь в некотором диапазоне чисел Re .

4. Новые данные выявляются при рассмотрении движения точек среды. Для динамики Лоренца в квазиоднородном приближении уравнения движения точек имеют вид

$$\dot{x}^i = u^i, \quad (29)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{u}^1 \\ \dot{u}^2 \\ \dot{u}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & A \\ r - \langle z \rangle & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A\sigma x^3 \\ -A(r - \langle z \rangle)x^3 \\ -\gamma \langle z \rangle \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Эта система оказывается линейной с постоянными коэффициентами. Ее общее решение легко может быть получено элементарным интегрированием. Поэтому отметим только качественные особенности траекторий движения точек. Из характеристического уравнения для скоростей движения получаем, что имеется два отрицательных и один положительный корень. Тем самым в каждой точке пространства выделяются два сжимающих и одно растягивающее направления. Эти особенности динамики являются инвариантными характеристиками, которые могут быть использованы для классификации аттракторов, отвечающих течениям с одинаковыми значениями средней скорости.

Как следует из общего решения системы (29) и (30), возможные перемещения точек среды в направлениях, трансверсальных к линиям тока среднего течения, не ограничены. А именно, в проекции на ось x^3 происходит регулярный дрейф. При этом точки, перемещаясь перпендикулярно линиям тока среднего течения, попадают в область больших значений скорости. В этом случае число Re возрастает, что ведет к уменьшению относительной величины пульсаций. В рамках сделанного квазиоднородного приближения этот эффект ведет к относительному уменьшению пульсаций и, в конечном счете, к их вырождению во флуктуации.

Библиографический список

1. *Mukhamedov A.M.* Turbulent models: problems and solutions // 17 IMACS Congress, Paper T4-1-103-0846, <http://imacs2005.ec-lille.fr>.
2. *Mukhamedov A.M.* Towards a gauge theory of turbulence // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2006. Vol. 29. P. 253.
3. *Ruelle D., Takens F.* On the nature of turbulence // *Commun. Math. Phys.* 1971. Vol. 20. P. 167.

4. *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989. 296 с.
5. *Mandelbrot B.* The fractal geometry of nature. Freeman. San Francisco, 1982.
6. *Benzi R., Paladin G., Parisi G., Vulpiani A.* On the multifractal nature of fully developed turbulence and chaotic systems // J. Phys. A. 1984. Vol.17. P.3521.
7. *Elnaschie M.S.* The Feynman path integrals and E-Infinity theory from the two-slit Gedanken experiment // International Journal of Nonlinear sciences and Numerical Simulations. 2005. Vol. 6(4). P. 335.
8. *Мухамедов А.М.* Ансамблевые режимы турбулентности в сдвиговых течениях // Вестник КГТУ им. А.Н.Туполева. 2003, № 3. С. 36.
9. *Юдович В.И.* Асимптотика предельных циклов системы Лоренца при больших числах Релея // ВИНТИ. 31.07.78. № 2611-78.
10. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
11. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.

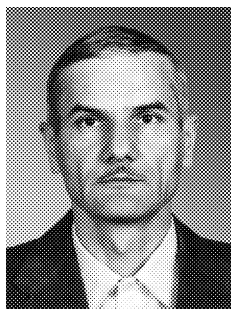
*Казанский государственный
технический университет*

*Поступила в редакцию 23.01.2006
После доработки 15.08.2006*

LORENZ ATTRACTOR IN FLOWS OF SIMPLE SHIFT

A.M. Mukhamedov

In the frame of a model given before for simulation of chaotic dynamics of continuum medium the Lorenz attractor is represented. The simulation is given with the help of the structures that define the geometry of a fiber bundle associated with 3-dimensional regime of velocity pulsations. Lorenz dynamics appears as time dependence of pulsations along the lines of average flow.



Мухамедов Альфэрид Мавиевич – родился в Казани (1953). Окончил физический факультет Казанского государственного университета по кафедре гравитации и теории относительности (1976). Докторант кафедры теоретической и прикладной механики Казанского государственного технического университета им. А.Н.Туполева. Автор 12 работ по данной тематике, а также монографии «Научный поиск и методология математики» (Казань: Изд-во КГТУ, 2005, в соавторстве с Г.Д. Тарзимановой). Область научных интересов – математические модели хаотической динамики, геометрия расслоенных многообразий, методология современной математики.



ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧЕ ХЕНОНА – ХЕЙЛЕСА

Г.В. Станкул, В.А. Личман, П.И. Хаджи

Методом совместного интегрирования уравнений движения и уравнений в вариациях найдены численно значения максимального характеристического показателя Ляпунова для задачи Хенона – Хейлеса в широких диапазонах энергии и времени. Из результатов подгонок следует, что наилучшей аппроксимирующей функцией является экспоненциальная, но с параметрами, отличающимися от ранее полученных в работе Бенеттина и др.

Хорошо известный пример, иллюстрирующий переход от практически регулярного движения к существенно хаотическому, был предложен Хеноном и Хейлесом [1, 2] для исследования особенностей динамики в астрофизической задаче трех тел. Авторы [1] путем численного интегрирования системы, задаваемой гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2) + q_1^2 q_2 - \frac{1}{3}q_2^3, \quad (1)$$

где q_1, q_2 – координаты, p_1, p_2 – сопряженные им импульсы, построили сечения Пуанкаре фазового пространства системы и обнаружили области хаотического движения. Эти области хаоса с возрастанием энергии расширяются, и при величине энергии $E = H = 1/6$ практически все фазовое пространство возможного движения заполнено хаотической компонентой [1].

Определить качественный характер движения позволяет вычисление характеристических показателей Ляпунова, которые имеют смысл средних скоростей экспоненциального расхождения бесконечно близких траекторий в фазовом пространстве. Отрицательное значение этих показателей указывает на регулярный характер движения, положительное – на хаотический. Нулевое значение показателей соответствует периодическому и квазипериодическому режиму. Движение системы является непредсказуемым на интервале времени, задаваемом величиной, обратной ее максимальному характеристическому показателю Ляпунова, знание которого во многих случаях достаточно для определения вида движения системы.

Бенеттин и др. [3], анализируя зависимость максимального показателя Ляпунова от энергии для системы с гамильтонианом (1), пришли к выводу, что она описывается экспоненциальной функцией. Данный результат получил широкую известность, вошел в монографию Лихтенберга и Либермана [2], посвященную нелинейной и хаотической динамике. Однако он оказался спорным. Так, в работах И.И. Шевченко и А.В. Мельникова [4, 5] показано, что эта зависимость не является экспоненциальной, а близка к степенной. Авторы [4, 5] отмечают, что этот результат был получен

исходя из довольно ограниченных численных данных. Бенеттин и др. [3] построили кривую зависимости показателя Ляпунова от энергии на основе только 28 точек численного моделирования на всем изучавшемся ими промежутке изменения энергии. Величина интервала времени (в $2 \cdot 10^4$ единиц нормированного времени), на котором они проводили интегрирование системы (1), оказалась совершенно не достаточной для получения верных асимптотических значений показателя Ляпунова.

В настоящей работе была исследована зависимость максимального характеристического показателя Ляпунова от энергии для задачи Хенона – Хейлеса с более высоким (более чем в 3 раза) разрешением. При этом значения искомого показателя определялись на значительно более протяженных интервалах времени (для t от нуля до 10^7 единиц нормированного времени), что позволило надежно верифицировать получаемые значения показателей Ляпунова.

Для вычисления величины показателя нами использовался метод совместного интегрирования уравнений движения и уравнений в вариациях [6]. Согласно (1), эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= p_1, & \dot{q}_2 &= p_2, & \dot{p}_1 &= -q_1 - 2q_1q_2, & \dot{p}_2 &= q_2^2 - q_2 - q_1^2, \\ \begin{pmatrix} \dot{\tilde{q}}_1 \\ \dot{\tilde{q}}_2 \\ \dot{\tilde{p}}_1 \\ \dot{\tilde{p}}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 - 2q_2 & -2q_1 & 0 & 0 \\ -2q_1 & 2q_2 - 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где величины $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2$, соответствуют отклонениям от траектории вдоль направлений q_1, q_2, p_1, p_2 . Выбирались следующие начальные значения: $q_1 = 0, q_2 = 0.15, p_2 = 0$. Величина $p_1 > 0$ при заданном значении энергии $E = H$ определялась из уравнения (1). Шаг итерации по времени был равен 10. Перенормировка длины вектора смещения от опорной траектории осуществлялась на каждом шаге итерации. Величина энергии варьировалась от значения 0.0841 до 0.1666 (то есть до предельного значения $E = 1/6$) с шагом 8×10^{-4} . Выбор минимального значения энергии определялся из того условия, что при меньших энергиях движение системы является регулярным. Максимальное значение энергии выбиралось из условия, что движение системы становилось не осцилляционным.

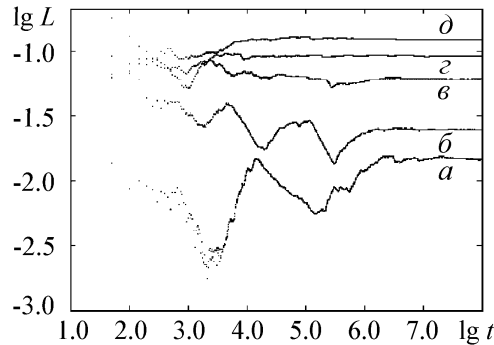


Рис. 1. Зависимость значения логарифма показателя Ляпунова системы (1) от логарифма времени при различных значениях энергии $\lg E$: -1.025 (а), -0.975 (б), -0.875 (в), -0.825 (г), -0.780 (д)

Интегрирование уравнений в стандартных математических пакетах, например, MATLAB, требует большого количества машинного времени, поэтому нами разработана специальная подпрограмма на языке C++, использующая быстрые алгоритмы. В проведенных нами численных экспериментах значения величин показателя определялись из графиков их эволюции на временах, когда кривые $L(t)$ показателя выходили на стационарное значение. Это способствует высокой степени надежности

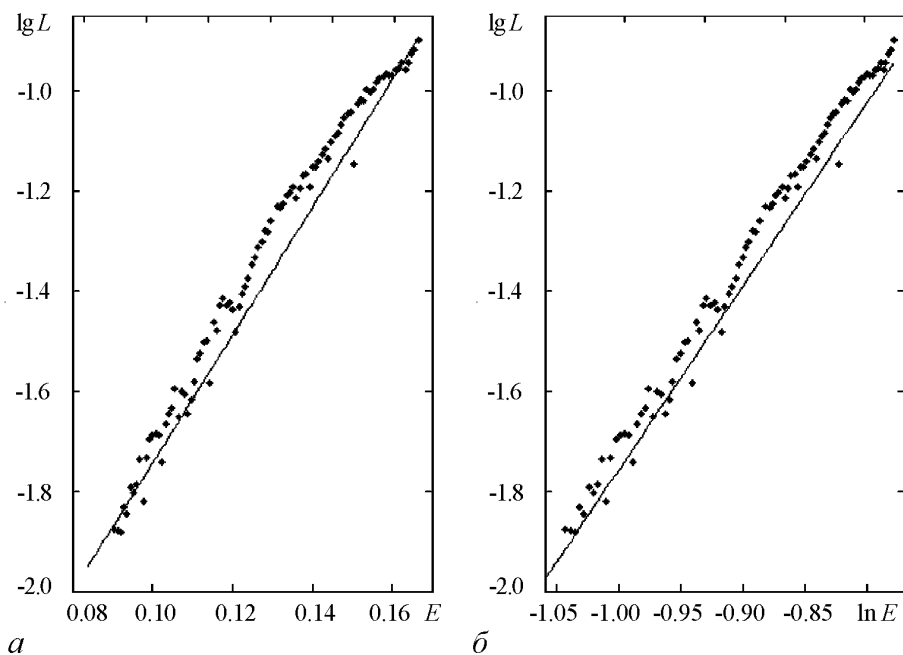


Рис. 2. Зависимость максимального показателя Ляпунова от энергии и ее экспоненциальная (а) и степенная (б) аппроксимация

полученных значений величин показателя. Отметим, что в [3] значения этих величин определялись при временах, когда кривые показателя еще испытывали нерегулярные колебания, что понижало уровень достоверности полученных величин показателя Ляпунова. Время выхода на плато составляло величину порядка $10^5 - 10^7$ и увеличивалось с уменьшением энергии (рис. 1).

На рис. 2 приведена полученная в расчетах зависимость $\lg L$ от энергии E . Здесь же изображены в логарифмических координатах экспоненциальная $L = k \exp(mE)$ и степенная $L = \beta E^\alpha$ зависимости, аппроксимирующие поведение показателя, от энергии. Для степенной аппроксимации были получены значения параметров $\alpha = 3.66$, $\beta = 1.9$, совпадающие с результатами, приведенными в [5]. Для коэффициентов экспоненциальной аппроксимирующей функции полученные значения параметров $m = 29.4$, $k = 9.476 \cdot 10^{-4}$ отличаются от результатов Бенеттина и др. ($m = 22$, $k = 3.4 \cdot 10^{-3}$) [3].

В качестве критерия соответствия зависимости значений максимального показателя Ляпунова от энергии – экспоненциальной или степенной функции – можно выбрать величину D , равную сумме квадратов отклонений экспериментальных точек от соответствующей кривой. В наших численных опытах для степенной функции данная величина составляет $D = 0.0085$, а для экспоненциальной функции $D = 0.0080$, что подтверждает определенную предпочтительность выбора в качестве аппроксимирующей экспоненциальной функции, но с коэффициентами, значения которых отличаются от полученных в работе [3].

Библиографический список

1. Henon M. and Heiles C. // Astron. J. 1964. Vol. 69. P. 73.
2. Лихтенберг А. и Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.

3. *Benettin G., Galgani L. and Strelcyn J.-M.* // Phys. Rev. A. 1976. Vol. 14. P. 2338.
4. *Shevchenko I.I.* // Phys. Lett. A. 1998. Vol. 241. P. 53.
5. *Шевченко И.И., Мельников А.В.* // Письма в ЖЭТФ. 2003. Т. 77. С. 772.
6. *Wolf A., Swift J., Swinney H.L. and Vastano J.A.* // Physica D. 1985. Vol. 16. P. 285.

Приднестровский государственный
университет, Тирасполь

Поступила в редакцию 6.07.2006
После доработки 3.10.2006

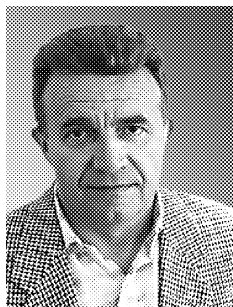
LYAPUNOV EXPONENTS IN THE HENON–HEILES PROBLEM

G.V. Stancul, V.A. Lichman, P.I. Khadzhi

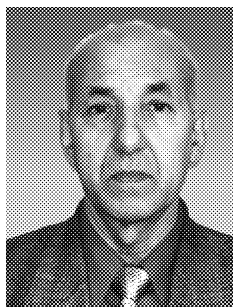
By the way of combined integrating of the motion and variation equations we calculated the maximal characteristic Lyapunov exponents in the wide limits of energy and time for the Henon–Heiles problem. It follows from the fitting procedure that the best approximate function is the exponential one with the parameter values, which are different from the earlier obtained parameter values (Benettin et al.).



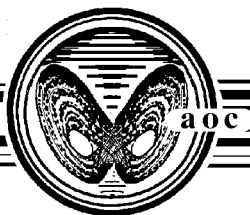
Станкул Григорий Валерьевич – родился в 1984 году. Студент инженерно-педагогического факультета Приднестровского госуниверситета. Область научных интересов – компьютерное моделирование нелинейных процессов.



Личман Владимир Александрович – родился в 1953 году. Окончил физический факультет МГУ (1977), кандидат физико-математических наук (1982). Доцент кафедры физики, математики и информатики Приднестровского госуниверситета. Область научных интересов – компьютерное моделирование в области физики и социально-экономических наук.



Хаджи Петр Иванович – родился в 1939 году, получил высшее образование на физико-математическом факультете Кишиневского госуниверситета (1962). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1969) и доктора (1983) физико-математических наук. Профессор по теоретической и математической физике, заведующий кафедрой нелинейной оптики и квантовой радиофизики Приднестровского госуниверситета (Тирасполь). Специалист в области нелинейной оптики, физики экситонов и биэкситонов в полупроводниках. Автор и соавтор около 400 научных работ, в том числе 8 монографий, среди которых «Кинетика рекомбинационного излучения экситонов и биэкситонов в полупроводниках», «Солитоны и нутация в экситонной области спектра», «Нелинейные оптические процессы в системе экситонов и биэкситонов в полупроводниках».



ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ГОМОКЛИНИЧЕСКОЙ ТРАЕКТОРИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛОРЕНЦА

С.А. Ляшко

Доказано свойство неустойчивого многообразия нулевого положения равновесия системы Лоренца, позволившее доказать одно достаточное условие существования гомоклинической траектории.

Рассмотрим систему Лоренца

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma(x - y), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy, \end{aligned} \tag{1}$$

где σ , b , r – положительные параметры, $r > 1$.

Пусть $\sigma(s)$, $b(s)$, $r(s)$ – гладкий путь в пространстве параметров этой системы. Обозначим через $x(t)^+$, $y(t)^+$, $z(t)^+$ сепаратрису седла $x = y = z = 0$, удовлетворяющую соотношениям

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)^+ = \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t)^+ = \lim_{t \rightarrow -\infty} z(t)^+ = 0, \quad x(t) > 0, \quad \forall t \leq t_0,$$

где $t_0 \ll 0$. В работе [1] доказан следующий результат.

Теорема 1. Пусть $2\sigma(s) > b(s)$, $\forall s \in [0, 1]$ и для любого $s \in [0, s_0)$ существуют числа $T(s) > \tau(s)$ такие, что выполнены следующие соотношения:

$$x(T)^+ = \dot{x}(\tau)^+ = 0, \tag{2}$$

$$x(t)^+ > 0, \quad \forall t < T, \tag{3}$$

$$\dot{x}(t)^+ \neq 0, \quad \forall t < T, \quad t \neq \tau. \tag{4}$$

Предположим, что для $s = s_0$ не существует пары $T(s_0) > \tau(s_0)$ такой, что выполнены соотношения (2)–(4). Тогда при $s = s_0$ траектория $x(t)^+$, $y(t)^+$, $z(t)^+$ является гомоклинической

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)^+ = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)^+ = \lim_{t \rightarrow +\infty} z(t)^+ = 0.$$

В [1–3] получен следующий результат.
 Пусть $2b_0 + 1 < 3\sigma_0$ и $b(s) \equiv b_0$, $\sigma(s) \equiv \sigma_0$, $r(s) : r(1) = 1$, $r(0) \gg 1$. Тогда для b_0 , σ_0 существует такое s_0 , что система (1) с $b = b_0$, $\sigma = \sigma_0$, $r = r(s_0)$ имеет гомоклиническую траекторию.

В статье [4] рассмотрен специальный путь $\sigma(s) \equiv \sigma_0$, $r(s) \equiv r_0$, $b(s) : b(0) = 0$, $b(1) = 2\sigma_0$, $b(s) \in (0, 2\sigma_0)$, $\forall s \in (0, 1)$, и два предельных случая: $|b(s) - 2\sigma_0| \leq \varepsilon$, где ε – достаточно малое число, и $b(0) = 0$.

В [5, 6] показано, что в первом предельном случае сепаратриса седла $x(t)^+$, $y(t)^+$, $z(t)^+$ стремится при $t \rightarrow +\infty$ к устойчивому состоянию равновесия и $x(t)^+ > 0$, $\forall t \in R^1$.

В [4] для второго предельного случая $b(0) = 0$ предложена замена

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \sqrt{2\sigma(r-1)}x, \\ y &\rightarrow \sqrt{2\sigma(r-1)}x + \sqrt{2\sigma(r-1)}y, \\ z &\rightarrow (r-1)(z+x^2), \\ t &\rightarrow \frac{t}{\sqrt{\sigma(r-1)}}, \end{aligned}$$

после которой система (1) с $b = 0$ принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -Ay - xz + x - x^3, \\ \dot{z} &= Cx^2, \end{aligned} \quad (5)$$

где $A = \frac{\sigma+1}{\sqrt{\sigma(r-1)}}$, $C = 2\sqrt{\frac{\sigma}{r-1}}$, $r > 1$; а соотношения (2)–(4) здесь принимают вид

$$x(T)^+ = y(\tau)^+ = 0, \quad (6)$$

$$x(t)^+ > 0, \quad \forall t < T, \quad (7)$$

$$y(t)^+ \neq 0, \quad \forall t < T, t \neq \tau. \quad (8)$$

В той же работе проведена численная проверка условий (6)–(8) и сформулирована следующая проблема. *Найти необходимые и достаточные условия выполнения соотношений (6)–(8) для системы (5).*

В настоящей работе получены достаточные условия выполнения соотношений (6)–(8) для системы (5).

Теорема 2. *При σ, r таких, что*

$$\frac{C^2}{2} \left(1 + \frac{C}{8} \left(A + \sqrt{A^2 + 4} \right) \right) \geq 1, \quad (9)$$

$$\frac{4(C-A)}{A^3 \left(4 + C \left(A + \sqrt{A^2 + 4} \right) \right)} \geq 1, \quad (10)$$

$$\frac{AC(C-A)^2}{4(2A-C)} \left(\frac{1}{2} \left(A + \sqrt{A^2 + 4} \right) + \frac{1}{A} \right) \geq 1 + \frac{A^2}{4}, \quad (11)$$

для системы (5) выполняются условия (6)–(8).

Из теоремы 1 и непрерывной зависимости от параметров куска сепаратрисы $x(t)^+$, $y(t)^+$, $z(t)^+$ ($t \leq T$) получаем следующий результат.

Следствие. Для σ, r , удовлетворяющих условиям (9)–(11), существует такое $b \in (0, 2\sigma)$, что система (1) имеет гомоклиническую траекторию.

Доказательству теоремы 2 предположим несколько лемм и два предложения.

Лемма 1. Если существуют числа $T > \tau$ такие, что выполнены соотношения

$$y(T)^+ = y(\tau)^+ = 0, \quad (12)$$

$$x(t)^+ > 0, \quad \forall t \leq T, \quad (13)$$

$$y(t)^+ \neq 0, \quad \forall t < T, \quad t \neq \tau, \quad (14)$$

то существует и число $T_1 \in (\tau, T)$, для которого

$$y(T_1)^+ = -\frac{C}{2}x(T_1)^+, \quad y(t)^+ > -\frac{C}{2}x(t)^+, \quad \forall t < T_1.$$

При этом, если $z(t)^+ < 1$, $\forall t \leq T_1$, то

$$\left(z(T_1)^+ + (x(T_1)^+)^2\right) - \left(z(\tau)^+ + (x(\tau)^+)^2\right) > \frac{C^2}{4}, \quad (15)$$

$$z(T_1)^+ - z(\tau)^+ > \frac{C^2}{2}. \quad (16)$$

Доказательство. Так как $y(T)^+ = 0$, $y(t)^+ < 0$, $x(t)^+ > 0$, $\forall t \in (\tau, T)$, то $\dot{y}(T)^+ \geq 0$ и

$$1 - (x(T)^+)^2 - z(T)^+ \geq 0. \quad (17)$$

Предположим, что

$$y(t)^+ > -\frac{C}{2}x(t)^+, \quad \forall t \in [\tau, T].$$

Тогда

$$\left(z(t)^+ + (x(t)^+)^2\right)' = x(t)^+ (Cx(t)^+ + 2y(t)^+) > 0, \quad \forall t \in [\tau, T]$$

(точка означает производную по времени в силу системы (5)) и так как $z(\tau)^+ + (x(\tau)^+)^2 \geq 1$, то $z(T)^+ + (x(T)^+)^2 > 1$, что противоречит (17). Существование числа T_1 доказано.

Для всех $t \in [\tau, T_1]$ выполняются следующие свойства:

1. $A \frac{y(t)^+}{x(t)^+} + \left(\frac{y(t)^+}{x(t)^+}\right)^2 < 0$, так как $A > \frac{C}{2}$;
2. $z(t)^+ + (x(t)^+)^2 - 1 \geq 0$ (равенство может достигаться только при $t = \tau$), так как $z(\tau)^+ + (x(\tau)^+)^2 - 1 \geq 0$, а при $t \in [\tau, T_1]$ функция $z(t)^+ + (x(t)^+)^2 - 1$ возрастает;
3. $\frac{(x(t)^+)^2}{z(t)^+ + (x(t)^+)^2 - 1} > 1$, так как $z(t)^+ < 1$;
4. $\left(\frac{y(t)^+}{x(t)^+}\right)' < 0$ (докажем это свойство в конце доказательства леммы).

Оцениваем теперь:

$$\begin{aligned}
& \left(z(T_1)^+ + (x(T_1)^+)^2 \right) - \left(z(\tau)^+ + (x(\tau)^+)^2 \right) = \int_{z(\tau)^+ + (x(\tau)^+)^2}^{z(T_1)^+ + (x(T_1)^+)^2} d \left(z(t)^+ + (x(t)^+)^2 \right) = \\
& = \int_0^{-C/2} \frac{d \left((x(t)^+)^2 + z(t)^+ \right)}{d \left(\frac{y(t)^+}{x(t)^+} \right)} d \left(\frac{y(t)^+}{x(t)^+} \right) = \int_0^{-C/2} \frac{\left((x(t)^+)^2 + z(t)^+ \right) \cdot}{\left(\frac{y(t)^+}{x(t)^+} \right) \cdot} d \left(\frac{y(t)^+}{x(t)^+} \right) = \\
& = \int_0^{-C/2} \frac{\left(2x(t)^+ y(t)^+ + C (x(t)^+)^2 \right) (x(t)^+)^{-2}}{\left(-A y(t)^+ - x(t)^+ z(t)^+ + x(t)^+ - (x(t)^+)^3 \right) x(t)^+ - (y(t)^+)^2} d \left(\frac{y(t)^+}{x(t)^+} \right) = \\
& = \int_{-C/2}^0 \frac{2 \frac{y(t)^+}{x(t)^+} + C}{A \frac{y(t)^+}{x(t)^+} + \left(\frac{y(t)^+}{x(t)^+} \right)^2 + z(t)^+ + (x(t)^+)^2 - 1} (x(t)^+)^2 d \left(\frac{y(t)^+}{x(t)^+} \right) > \\
& > \int_{-C/2}^0 \left(2 \frac{y(t)^+}{x(t)^+} + C \right) \frac{(x(t)^+)^2}{z(t)^+ + (x(t)^+)^2 - 1} d \left(\frac{y(t)^+}{x(t)^+} \right) > \\
& > \int_{-C/2}^0 \left(2 \frac{y(t)^+}{x(t)^+} + C \right) d \left(\frac{y(t)^+}{x(t)^+} \right) = \left(\left(\frac{y(t)^+}{x(t)^+} \right)^2 + C \frac{y(t)^+}{x(t)^+} \right) \Big|_{-C/2}^0 = \frac{C^2}{4}.
\end{aligned}$$

Аналогично находим

$$z(T_1)^+ - z(\tau)^+ > \frac{C^2}{2}.$$

Докажем теперь свойство 4. Так как $x(t)^+ > 0$ при $t \in [\tau, T_1]$, то для $y(t)^+ = -\frac{D}{2}x(t)^+$ ($D > 0$) имеем

$$\left(y(t)^+ + \frac{D}{2}x(t)^+ \right) \cdot = x(t)^+ \left(\frac{D}{2} \left(A - \frac{D}{2} \right) + 1 - z(t)^+ - (x(t)^+)^2 \right) < 0$$

при

$$z(t)^+ + (x(t)^+)^2 > 1 + \frac{D}{2} \left(A - \frac{D}{2} \right). \quad (18)$$

При условии (18) (и только при нем) для $y(t)^+ = -\frac{D}{2}x(t)^+$ выполняется $\left(\frac{y(t)^+}{x(t)^+}\right)' < 0$. Так как $y(t)^+$ убывает при $t = \tau$, то существует D_1 такое, что для любого $D \in [0; D_1]$ выполняется (18). Тогда при изменении $\frac{y(t)^+}{x(t)^+}$ от 0 до $-\frac{D_1}{2}$

$$\begin{aligned} & \left(z(\tau_1)^+ + (x(\tau_1)^+)^2\right) - \left(z(\tau)^+ + (x(\tau)^+)^2\right) > \int_{-D_1/2}^0 \left(2\frac{y(t)^+}{x(t)^+} + C\right) d\left(\frac{y(t)^+}{x(t)^+}\right) = \\ & = \left(\left(\frac{y(t)^+}{x(t)^+}\right)^2 + C\frac{y(t)^+}{x(t)^+}\right)\Bigg|_{-D_1/2}^0 = \frac{D_1}{2} \left(C - \frac{D_1}{2}\right), \end{aligned}$$

где τ_1 такое, что $\frac{y(\tau_1)^+}{x(\tau_1)^+} = -\frac{D_1}{2}$. Выбираем теперь D_2 – наибольшее из значений D , удовлетворяющих условию

$$\frac{D}{2} \left(A - \frac{D}{2}\right) \leq \frac{D_1}{2} \left(C - \frac{D_1}{2}\right).$$

Так как $A < C$, то $D_2 > D_1$. Теперь (18) выполняется для всех $D \in [0; D_2]$ и так далее. Через конечное число n шагов получим существование τ_n такого, что $\frac{y(\tau_n)^+}{x(\tau_n)^+} = -\frac{D_n}{2}$ и $\left(z(\tau_n)^+ + (x(\tau_n)^+)^2\right) - \left(z(\tau)^+ + (x(\tau)^+)^2\right) > \frac{A^2}{4} \geq \frac{D}{2} \left(A - \frac{D}{2}\right)$ для всех $\frac{D}{2} \in \left[\frac{A}{2}; C\right]$.

Свойство 4 и лемма 1 доказаны.

Лемма 2.

$$z(\tau)^+ \geq \frac{C}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{A^2}{4}} + \frac{A}{2}\right) (x(\tau)^+)^2.$$

Доказательство. Рассмотрим часть плоскости

$$y = \left(\sqrt{1 + \frac{A^2}{4}} - \frac{A}{2}\right)x + \varepsilon_1 (\varepsilon_1 > 0)$$

при $x \geq 0, z \geq 0$. Находим на ней

$$\begin{aligned} & \left(y - \left(\sqrt{1 + \frac{A^2}{4}} - \frac{A}{2}\right)x\right)' = -Ay - xz + x - x^3 - \left(\sqrt{1 + \frac{A^2}{4}} - \frac{A}{2}\right)y = \\ & = -\left(\sqrt{1 + \frac{A^2}{4}} + \frac{A}{2}\right) \left(\left(\sqrt{1 + \frac{A^2}{4}} - \frac{A}{2}\right) + \varepsilon_1\right) - xz + x - x^3 = \\ & = -xz - x^3 - \left(\sqrt{1 + \frac{A^2}{4}} + \frac{A}{2}\right)\varepsilon_1 < 0. \end{aligned}$$

Устремляя ε_1 к нулю, получаем, что для всех $t \in (-\infty; \tau]$ имеет место оценка

$$y(t)^+ \leq \left(\sqrt{1 + \frac{A^2}{4}} - \frac{A}{2} \right) x(t)^+. \quad (19)$$

Оцениваем теперь

$$\begin{aligned} z(\tau)^+ &= \int_0^{x(\tau)^+} \frac{dz(t)^+}{dx(t)^+} dx(t)^+ = \int_0^{x(\tau)^+} \frac{\dot{z}(t)^+}{\dot{x}(t)^+} dx(t)^+ = \int_0^{x(\tau)^+} \frac{C(x(t)^+)^2}{y(t)^+} dx(t)^+ \geq \\ &\geq \int_0^{x(\tau)^+} \frac{C(x(t)^+)^2}{\left(\sqrt{1 + \frac{A^2}{4}} - \frac{A}{2} \right) x(t)^+} dx(t)^+ = C \left(\sqrt{1 + \frac{A^2}{4}} + \frac{A}{2} \right) \int_0^{x(\tau)^+} x(t)^+ dx(t)^+ = \\ &= C \left(\sqrt{1 + \frac{A^2}{4}} + \frac{A}{2} \right) \cdot (x(\tau)^+)^2. \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Предложение 1. При условии (9) не существует чисел $T > \tau$ таких, что выполняются соотношения (12)–(14).

Доказательство. Если выполняются соотношения (12)–(14), то, по лемме 1, существует число $T_1 \in (\tau; T)$, для которого

$$y(T_1)^+ = -\frac{C}{2} x(T_1)^+.$$

Докажем, что $z(T_1)^+ \geq 1$. Предположим, что $z(T_1)^+ < 1$. Тогда из (15) имеем $x(T_1)^+ > \frac{C}{2}$ и $x(\tau)^+ > x(T_1)^+ > \frac{C}{2}$. По лемме 2

$$z(\tau)^+ \geq \frac{C}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{A^2}{4}} + \frac{A}{2} \right) (x(\tau)^+)^2 > \frac{C^3}{8} \left(\sqrt{1 + \frac{A^2}{4}} + \frac{A}{2} \right).$$

Отсюда и из (16) получаем

$$z(T_1)^+ = (z(T_1)^+ - z(\tau)^+) + z(\tau)^+ > \frac{C^2}{2} + \frac{C^3}{8} \left(\sqrt{1 + \frac{A^2}{4}} + \frac{A}{2} \right) \geq 1.$$

Итак, $z(T_1)^+ \geq 1$.

Из третьего уравнения системы (5) следует, что

$$z(t)^+ > 1, \quad \forall t > T_1.$$

Если бы имели место соотношения (12)–(14), то выполнялось бы

$$\dot{y}(T)^+ = x(T)^+ \left(1 - (x(T)^+)^2 - z(T)^+ \right) \geq 0,$$

что не выполняется из-за $z(T)^+ > z(T_1)^+ \geq 1$, $x(T)^+ > 0$. Предложение 1 доказано.

Лемма 3. Если выполнены условия (9) и

$$y(\tau)^+ = 0, \quad (20)$$

$$x(t)^+ > 0, \quad \forall t \in R, \quad (21)$$

$$y(t)^+ \neq 0, \quad \forall t \neq \tau, \quad (22)$$

то

$$y(t)^+ > -Ax(t)^+, \quad \forall t \in R. \quad (23)$$

Доказательство. После замены

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \tilde{x}, \\ y &\rightarrow -A\tilde{x} + \tilde{y}, \\ z &\rightarrow \tilde{z} \end{aligned}$$

система (5) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= -A\tilde{x} + \tilde{y}, \\ \dot{\tilde{y}} &= \tilde{x}(1 - \tilde{z} - \tilde{x}^2), \\ \dot{\tilde{z}} &= C\tilde{x}^2. \end{aligned} \quad (24)$$

Возможны два случая.

- Если $y(t)^+ > -\frac{C}{2}x(t)^+$, $\forall t \in R$, то доказано и (23) (так как $\frac{C}{2} < A$).
- Если же существует число T_1 , для которого

$$y(T_1)^+ = -\frac{C}{2}x(T_1)^+,$$

то из доказательства леммы 1 и предложения 1 вытекает, что $\tilde{z}(T_1)^+ = z(T_1)^+ \geq 1$. Из третьего уравнения системы (5) получаем $\tilde{z}(t)^+ > 1$, $\forall t > T_1$ и, следовательно,

$$\dot{\tilde{y}}(t)^+ = \tilde{x}(t)^+ \left(1 - \tilde{z}(t)^+ - (\tilde{x}(t)^+)^2\right) < 0.$$

А так как при выполнении условий (20)–(22) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{y}(t)^+ = 0$, то $\tilde{y}(t)^+ > 0$, $\forall t \in R$ и, следовательно, $y(t)^+ > -Ax(t)^+$, $\forall t \in R$. Лемма 3 доказана.

Обозначим

$$P = \frac{4(C - A)}{A^3 \left(4 + C \left(A + \sqrt{A^2 + 4}\right)\right)^2}, \quad Q = \frac{A^3}{4(C - A)}.$$

Лемма 4. Если

$$y(t)^+ > -\frac{A}{2}x(t)^+, \quad \forall t \in R$$

и выполнены условия (20)–(22), то $P < Q$.

Доказательство. Предположим, что $P \geq Q$. Рассмотрим следующие варианты.

Вариант *a*.

$$(x(\tau)^+)^2 \leq Q. \quad (25)$$

Рассмотрим систему (24). Пусть число T_2 таково, что $\dot{y}(T_2)^+ = 0$. Из второго уравнения (24) следует равенство

$$(\tilde{x}(T_2)^+)^2 + \tilde{z}(T_2)^+ = 1.$$

Из (19) получаем

$$\tilde{y}(t)^+ \leq \left(\sqrt{1 + \frac{A^2}{4}} + \frac{A}{2} \right) \tilde{x}(t)^+, \quad \forall t \in (-\infty; T_2] \quad (26)$$

и оцениваем, используя (26)

$$\begin{aligned} \tilde{y}(T_2)^+ &= \int_0^1 \frac{\dot{\tilde{y}}(t)^+}{\left((\tilde{x}(t)^+)^2 + \tilde{z}(t)^+ \right)} d \left((\tilde{x}(t)^+)^2 + \tilde{z}(t)^+ \right) = \\ &= \int_0^1 \frac{1 - \left((\tilde{x}(t)^+)^2 + \tilde{z}(t)^+ \right)}{2\tilde{y}(t)^+ - (2A - C)\tilde{x}(t)^+} d \left((\tilde{x}(t)^+)^2 + \tilde{z}(t)^+ \right) \geq \\ &\geq \int_0^1 \frac{1 - \left((\tilde{x}(t)^+)^2 + \tilde{z}(t)^+ \right)}{\left(\sqrt{A^2 + 4} - A + C \right) \tilde{x}(t)^+} d \left((\tilde{x}(t)^+)^2 + \tilde{z}(t)^+ \right) \geq \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{Q} \left(\sqrt{A^2 + 4} - A + C \right)} \int_0^1 \left(1 - \left((\tilde{x}(t)^+)^2 + \tilde{z}(t)^+ \right) \right) d \left((\tilde{x}(t)^+)^2 + \tilde{z}(t)^+ \right) = \\ &= \frac{\sqrt{C - A}}{A\sqrt{A} \left(\sqrt{A^2 + 4} - A + C \right)}. \end{aligned}$$

Теперь из (26) получаем

$$(\tilde{x}(T_2)^+)^2 \geq \frac{(\tilde{y}(T_2)^+)^2}{\left(\sqrt{1 + \frac{A^2}{4}} + \frac{A}{2} \right)^2} \geq P. \quad (27)$$

Так как $x(\tau)^+ > x(T_2)^+ = \tilde{x}(T_2)^+$, то $(\tilde{x}(\tau)^+)^2 \geq P$, что вместе с (25) противоречит предположению.

Вариант б.

$$(x(\tau)^+)^2 > Q.$$

При выполнении условий (20)–(22) $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)^+ = 0$ и существует $\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t)^+ = z^*$. Используя условие леммы, получаем

$$\begin{aligned} z^* - z(\tau)^+ &= \int_{x(\tau)^+}^0 \frac{C(x(t)^+)^2}{y(t)^+} d(x(t)^+) = \\ &= \int_0^{x(\tau)^+} \frac{C(x(t)^+)^2}{-y(t)^+} d(x(t)^+) \geq \frac{2}{A} \int_0^{x(\tau)^+} Cx(t)^+ d(x(t)^+) = \frac{C}{A} (x(\tau)^+)^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} z^* &\geq z(\tau)^+ + \frac{C}{A} (x(\tau)^+)^2 \geq \\ &\geq 1 - (x(\tau)^+)^2 + \frac{C}{A} (x(\tau)^+)^2 > \\ &> 1 + \left(\frac{C}{A} - 1\right) Q = 1 + \frac{A^2}{4}. \end{aligned}$$

Но при этом условии изображающая точка в малой окрестности положения равновесия $(0, 0, z^*)$ системы (5) совершает вращательное движение вокруг оси Oz , поэтому выполнение условий (20)–(22) невозможно.

Таким образом, в условиях леммы неравенство $P \geq Q$ не выполняется. Лемма 4 доказана.

Предложение 2. При выполнении (9)–(11) не выполняются условия (20)–(22).

Доказательство. Пусть условия (20)–(22) выполняются. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. Существует число T_3 , для которого

$$y(T_3)^+ = -\frac{A}{2}x(T_3)^+, \quad y(t)^+ > -\frac{A}{2}x(t)^+, \quad \forall t < T_3.$$

Из доказательства свойства 4 леммы 1 следует, что

$$(x(T_3)^+)^2 + z(T_3)^+ \geq 1 + \frac{A^2}{4}. \quad (28)$$

Здесь существуют две возможности.

a. $y(t)^+ > -\frac{C}{2}x(t)^+, \forall t > T_3.$

Тогда

$$\left((x(t)^+)^2 + z(t)^+ \right)' > 0, \forall t \in R \quad (29)$$

и

$$z^* = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left((x(t)^+)^2 + z(t)^+ \right) > 1 + \frac{A^2}{4},$$

что противоречит условиям (20)–(22).

б. Существует число T_4 , для которого

$$y(T_4)^+ = -\frac{C}{2}x(T_4)^+, \quad y(t)^+ > -\frac{C}{2}x(t)^+, \quad \forall t < T_4.$$

Снова возможны два случая.

$$1б. y(t)^+ < -\frac{C}{2}x(t)^+, \quad \forall t > T_4.$$

Так как для всех $t < T_4$ выполнены неравенства (28) и (29), то

$$(x(T_4)^+)^2 + z(T_4)^+ > 1 + \frac{A^2}{4}. \quad (30)$$

Используя лемму 3, получаем

$$z^* - z(T_4)^+ = \int_{x(T_4)^+}^0 \frac{C(x(t)^+)^2}{y(t)^+} d(x(t)^+) > \frac{C}{2A} (x(T_4)^+)^2 \quad (31)$$

и

$$z^* > z(T_4)^+ + \frac{C}{2A} (x(T_4)^+)^2 > 1 + \frac{A^2}{4} - \left(1 - \frac{C}{2A}\right) (x(T_4)^+)^2. \quad (32)$$

Из доказательства предложения 1 следует, что $z^* > z(T_4)^+ \geq 1$. Выполнение условий (20)–(22) возможно только при $z^* \leq 1 + A^2/4$. Линеаризуя систему (5) в окрестности положения равновесия $(0, 0, z^*)$, где $z^* \in (1; 1 + A^2/4]$, получаем, что либо

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)^+}{x(t)^+} = u_1, \quad \text{где } u_1 = \frac{-A + \sqrt{A^2 - 4(z^* - 1)}}{2},$$

либо

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)^+}{x(t)^+} = u_2, \quad \text{где } u_2 = \frac{-A - \sqrt{A^2 - 4(z^* - 1)}}{2}.$$

Так как $u_1 > -C/2$, то в рассматриваемом случае должны выполняться неравенства

$$u_2 \leq -\frac{C}{2},$$

$$\frac{-A - \sqrt{A^2 - 4(z^* - 1)}}{2} \leq -\frac{C}{2},$$

$$z^* \leq 1 + \frac{C(2A - C)}{4}.$$

Отсюда и из (32) получаем

$$1 + \frac{A^2}{4} - \left(1 - \frac{C}{2A}\right) (x(T_4)^+)^2 < 1 + \frac{C(2A - C)}{4},$$

откуда

$$(x(T_4)^+)^2 > \frac{A(C - A)^2}{2(2A - C)}. \quad (33)$$

Используя теперь лемму 2, условия (11), (31), (32) и неравенство $x(\tau)^+ > x(T_4)^+$, оцениваем

$$\begin{aligned} z^* > z(\tau)^+ &\geq \left(\frac{C}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{A^2}{4}} + \frac{A}{2} \right) + \frac{C}{2A} \right) (x(T_4)^+)^2 > \\ &> \left(\frac{C}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{A^2}{4}} + \frac{A}{2} \right) + \frac{C}{2A} \right) \frac{A(C-A)^2}{2(2A-C)} \geq 1 + \frac{A^2}{4}. \end{aligned}$$

Полученное противоречие доказывает предложение в рассматриваемом случае.

2б. Существует число T_5 , для которого

$$y(T_5)^+ = -\frac{C}{2}x(T_5)^+, \quad y(t)^+ < -\frac{C}{2}x(t)^+, \quad \forall t \in (T_4, T_5).$$

Используя лемму 3, находим

$$\begin{aligned} z(T_5)^+ - z(T_4)^+ &= \int_{x(T_4)^+}^{x(T_5)^+} \frac{C(x(t)^+)^2}{y(t)^+} d(x(t)^+) = \\ &= C \int_{x(T_5)^+}^{x(T_4)^+} \left(-\frac{x(t)^+}{y(t)^+} \right) x(t)^+ d(x(t)^+) > \\ &> \frac{C}{A} \int_{x(T_5)^+}^{x(T_4)^+} x(t)^+ d(x(t)^+) = \frac{C}{2A} \left((x(T_4)^+)^2 - (x(T_5)^+)^2 \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Из доказательства свойства 4 леммы 1 следует, что

$$(x(T_5)^+)^2 \leq 1 + \frac{C}{2} \left(A - \frac{C}{2} \right) - z(T_5)^+. \quad (35)$$

Из (30), (34) и (35) получаем

$$\begin{aligned} x(T_4)^+ - x(T_5)^+ &> \frac{1}{4}(C-A)^2 + z(T_5)^+ - z(T_4)^+ > \\ &> \frac{1}{4}(C-A)^2 + \frac{C}{2A} \left((x(T_4)^+)^2 - (x(T_5)^+)^2 \right), \end{aligned}$$

откуда

$$(x(T_4)^+)^2 - (x(T_5)^+)^2 > \frac{A(C-A)^2}{2(2A-C)},$$

а так как

$$(x(T_4)^+)^2 > (x(T_4)^+)^2 - (x(T_5)^+)^2,$$

то доказательство завершается так же, как и в п. 1б.

Случай 2. $y(t)^+ > -\frac{A}{2}x(t)^+, \forall t \in R$. Этот случай невозможен, так как при условии (10) получим $P \geq Q$, что противоречит лемме 4. Предложение доказано.

Доказательство теоремы 2 сразу следует из предложений 1 и 2.

При $\sigma = 10$ условия (9)–(11) выполняются для $r \in [28.23; 29.21]$; при $\sigma = 16$ – для $r \in [39.84; 46.02]$.

Библиографический список

1. *Леонов Г.А.* Оценки аттракторов и существование гомоклинических орбит в системе Лоренца // Прикладная математика и механика. 2001. Т. 65, вып. 1. С. 21.
2. *Леонов Г.А.* Об оценке параметров бифуркации петли сепаратрисы седла системы Лоренца // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 6. С. 972.
3. *Леонов Г.А.* Об оценке бифуркации значений параметров системы Лоренца // Успехи мат. наук. 1988. Т. 43, № 3. С. 189.
4. *Леонов Г.А.* Эффективные критерии существования гомоклинических бифуркаций в диссипативных системах // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13, № 3. С.20.
5. *Leonov G.A., Reitman V.* Attraktoreingrenzung für nichtlineare systeme. Leipzig: Teubner, 1987.
6. *Леонов Г.А.* О существовании гомоклинических траекторий в системе Лоренца // Вестн. СПб. ун-та. Математика, механика, астрономия. 1999, № 1. С. 13.

*Балашовский филиал Саратовского
государственного университета*

Поступила в редакцию 29.05.2006

SUFFICIENT CONDITIONS OF THE LORENZ-SYSTEM HOMOCLINIC ORBIT EXISTENCE

S.A. Lyashko

The property of unstable manifold of the Lorenz-system zero equilibrium is proved. This permitted to prove the sufficient condition of homoclinic orbit existence.



Ляшко Сергей Андреевич – родился в 1960 году. Кандидат физико-математических наук (1994, СПбГУ). Доцент кафедры математического анализа Балашовского филиала СГУ. Автор ряда статей о свойствах инвариантных множеств динамических систем. E-mail: LyashkoS_M@mail.ru.



КАК «ОЗВУЧИТЬ» ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

А.А. Семёнов

Предложена необычная методика интерпретации результатов численного эксперимента в форме звуковых колебаний. Даны рекомендации по практической реализации предложенной методики и ее применению в различных областях исследовательской, конструкторской и учебной деятельности.

Может возникнуть вполне естественный вопрос: а зачем численный эксперимент озвучивать и что в результате этого можно услышать?

Встречаются ситуации, когда послушать необычный звук исследуемого объекта рекомендуют непосредственно авторы оригинальной научной работы. Такое пожелание высказывалось, в частности, исследователями динамической системы Л.О. Чуа [1], отличающейся простотой моделирования в физическом и численном экспериментах. Известные всем фазовый портрет и временная реализация колебательного режима, возникающего в этой системе (ставшей в настоящее время классической), приведены на рис. 1.

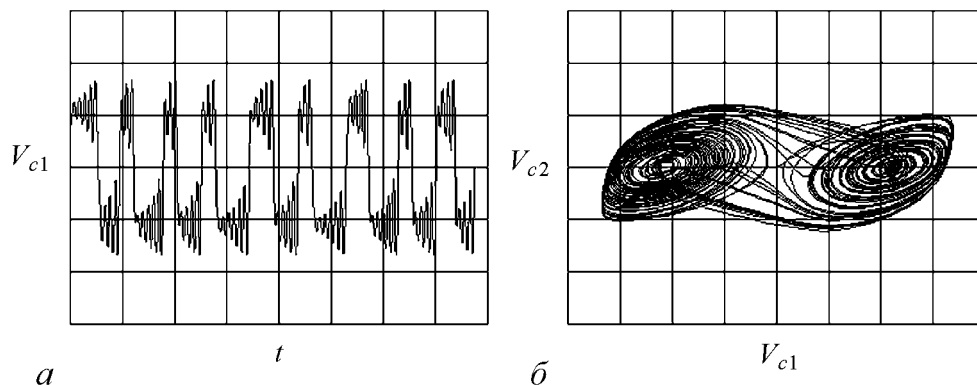


Рис. 1. Временная реализация колебательного режима в системе Л.О. Чуа (а), и проекция фазового объема на плоскость (V_{c1} , V_{c2}) (б)

Напомним, тем не менее, как охарактеризовал полученные экспериментальные результаты один из первопроходцев исследования этой системы: «... энергетический спектр сигнала $V_{c1}(t)$... оказывается непрерывным и широкополосным. Поскольку большинство частотных составляющих попадает в область звуковых частот, этот сигнал можно услышать. Звук имеет весьма интересный и даже несколько таинственный характер. Настоятельно рекомендуем читателю послушать его» [2].

Пожелание авторов статьи не вызовет затруднений при проведении физического эксперимента, но как воплотить его при исследовании системы Л.О. Чуа численными методами?

Необходимость услышать результаты численного эксперимента возникает при исследовании схем, выходные сигналы которых заведомо являются звуковыми. Так, популярные пакеты моделирования и расчета электронных схем (как, например, широко распространенный «Electronics Workbench» [3]) демонстрируют с помощью виртуальных приборов процессы работы генераторов, усилителей, модуляторов и т.д., имеют опцию сохранения результатов в текстовый файл (Oscilloscope/Expand/Save: filename.osc), но не дают возможности услышать полученные численными методами сигналы.

В то же время, исследуемые в таких схемах процессы фильтрации сигнала, ограничения и модуляции, генерации плавно изменяющейся частоты и формирования пакетов импульсов имеют весьма характерное звучание, услышать которое было бы весьма полезно, в частности, начинающим исследователям, но как?

И, наконец, как услышать результаты численного расчета, если необходимо сконструировать устройство, непосредственно формирующее заданный звуковой сигнал? Автор данной статьи столкнулся с такой практической задачей при формировании цифровыми методами сигнала, характерного для звука выстрела. Необходимый сигнал легче всего получить с помощью цифровых генераторов псевдослучайных последовательностей. В литературе такие устройства известны [4-7], их численное моделирование не вызывает затруднений. Но какая литература способна точно описать, каков будет реальный звук?

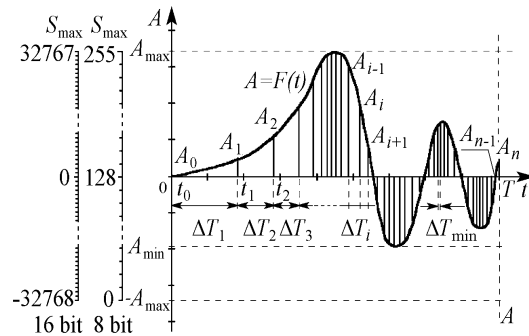


Рис. 2. Обобщенный вид временной реализации колебательного режима абстрактной динамической системы

В результате численного интегрирования системы дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями решение обычно получают в виде аппроксимации с фиксированной точностью функции $A = F(t)$ рядом дискретных зна-

Между тем, современные вычислительные средства позволяют любому исследователю не только увидеть, но и услышать практически любые колебания, используя компьютерные системы сравнительно невысокой мощности и не прибегая при этом к монтажу с паяльником соответствующих электронных схем.

Рассмотрим в общем случае решение, полученное при анализе той или иной динамической системы в виде временной реализации $A = F(t)$ (рис. 2).

чений $(A_0, t_0), \dots (A_i, t_i), \dots (A_n, t_n)$ (см. рис. 2), причем интервал $\Delta T_i = t_{i+1} - t_i$ между отдельными выборками в общем случае является неравномерным, что обусловлено особенностями численных методов с автоматическим выбором шага.

Большинство современных доступных компьютерных систем, оборудованных звуковой картой, способно воспроизводить звук в распространенном формате WAVE фирмы Microsoft. Файлы этого формата представляют собой снабженный документированным заголовком набор выборок (*sample*), характеризующих амплитуду звукового сигнала. Под выборкой понимаются целочисленные значения определенной размерности (8, 16, 24 и до 32 бит), которые, будучи переданы с указанием частоты их выдачи на аналогово-цифровой преобразователь звуковой карты, формируют электрические колебания и соответствующую им звуковую волну посредством излучателей. Частота следования выборок, называемая также частотой дискретизации, стандартизирована в диапазоне 5 – 48 кГц и для большинства распространенных звуковых карт при хорошем качестве звука составляет 44.1 кГц. Стандарт предусматривает хранение и воспроизведение наборов выборок от 1 до 4 каналов. WAVE-файлы являются подмножеством файлов RIFF-формата (Resource Interchange File Format), разработанного для хранения ресурсов мультимедиа.

Заголовок файла, содержащий все необходимые сведения для воспроизведения WAVE файла, имеет следующую структуру [8]:

```
// Заголовок RIFF-файла:
typedef struct {
    char id[4];           // = 0x46464952 («RIFF») – идентификатор файла
    long len;            // – длина файла без этого заголовка
} IDRiff;
// Подзаголовок WAVE-блока:
typedef struct {
    char id[4];           // = 0x45564157 («WAVE») – идентификатор блока
    char fmt[4];         // = 0x20746D66 («fmt») – идентификатор fmt-блока
    long len;            // – длина этого блока WAVE-файла
} IDChuckWave;
// Параметры выборки:
typedef struct {
    int type;            // = 1 (PCM – Pulse Code Modulation)– тип звуковых
                        // данных(просто набор выборок)
    int channels;        // = 1(2) – число каналов
    long SamplesPerSec; // – частота дискретизации (Гц)
    long AvgBytesPerSec; // – средняя частота выдачи байтов, для типа данных
                        // PCM вычисляется по формуле:
                        // (channels*SamplesPerSec*bits)/8
```

```

    int align; // – выравнивание данных в data-блоке,
               // для типа данных РСМ вычисляется по формуле:
               // (channels*bits)/8
    int bits; // – число бит на выборку (разрядность
              // дискретизации)
} IDWave;
// Подзаголовок блока данных:
typedef struct {
    char id[4]; // =0x61746164 («data»)– идентификатор блока данных
    long len; // – длина выборки (число байт)
} IDSampleWave;
// После заголовка непосредственно следуют данные выборки.
// В одноканальном WAVE-файле выборки располагаются последовательно:
sample[0],sample[1],sample[2]...
// в двухканальном WAVE-файле выборки следуют попарно:
left[0],right[0],left[1],right[1],left[2]...

```

Таким образом, задача «озвучивания» данных, полученных численными методами, в случае их принадлежности к звуковому диапазону сводится к процессу их переквантования (resampling) с выбором подходящей частоты дискретизации и нормированию расчетных амплитуд сигнала к величинам, определяемым разрядностью дискретизации (см. рис. 2). После чего соответствующие значения присваиваются переменным полям заголовка файла (с учетом приведенных формул) и, далее, заголовок, а также следующие за ним пересчитанные значения амплитуд выборок записываются в файл произвольного доступа с расширением WAV.

Численный эксперимент готов зазвучать – извольте слушать!

Следует отметить, что по этой же методике можно «услышать» сигналы, частоты которых лежат вне звукового диапазона. В этом случае после приведения данных к виду последовательности с нормированными значениями амплитуд и равномерными отсчетами по времени, можно присвоить им период максимальной частоты дискретизации звукового сигнала и сформировать звуковой файл. Как при исследовании звуков, издаваемых дельфинами, частота которых лежит в диапазоне ультразвука, сигнал сначала записывали на широкополосный магнитофон, после чего он воспроизводился с замедленной скоростью.

Остановимся подробнее на практических вопросах, связанных с переквантованием данных, полученных в результате расчета. В силу того, что численные данные уже получены с заданной точностью, при вычислении амплитуд, следующих с равномерным значением дискрета по времени (в качестве которого следует выбрать $\Delta T_{\min}/2$), без потери точности можно ограничиться линейной аппроксимацией функции $A = F(t)$ в промежутках между узлами $(A_i, t_i) \dots (A_{i+1}, t_{i+1})$.

В этом случае значение функции может быть вычислено по следующей формуле:

$$A_k = A_i + (A_{i+1} - A_i) \frac{\sum_{m=1}^k (\Delta T_{\min}/2) - \sum_{n=1}^i \Delta T_n}{\Delta T_{i+1}}. \quad (1)$$

Частоты вне звукового диапазона не воспроизводятся картой, но наличие их составляющих в спектре дискретного набора значений, формирующего WAVE-файл, может вызвать искажения полученного звука. В этом случае последовательность (A_k, t_k) желательно подвергнуть процедуре цифровой фильтрации для среза спектральных составляющих выше 20 кГц. Данное требование, безусловное для информативных сигналов, в случае хаотического сигнала может, по мнению автора, восприниматься как факультативное.

Следующей процедурой в процессе создания цифрового звука является преобразование к требуемой частоте дискретизации F_{samp} . Выбор частоты дискретизации ограничивается максимальным значением этого параметра для установленной в компьютерной системе пользователя звуковой карты. При отсутствии таких данных не будет ошибкой выбор значения 44.1 кГц, как приемлемого для большинства распространенных карт.

В общем случае процедура преобразования последовательности (A_k, t_k) в новую последовательность (A_i, t_i) с частотой дискретизации F_{samp} осуществляется по следующей формуле:

$$A_i = A_k + (A_{k+1} - A_k) \frac{\sum_{n=1}^i T_{\text{samp}} - \sum_{m=1}^k (\Delta T_{\text{min}}/2)}{\Delta T_{\text{min}}/2}, \quad (2)$$

где $T_{\text{samp}} = 1/F_{\text{samp}}$ – период частоты дискретизации, A_i – амплитуда выборки, попадающей в интервал $[(A_k, t_k), (A_{k+1}, t_{k+1})]$.

Процедура нормирования данных по амплитуде сводится к следующим шагам. Сначала в последовательности (A_i, t_i) ищутся (с учетом знака) максимальное A_{max} и минимальное A_{min} значения, что может быть совмещено с процессом равномерной дискретизации по времени. Далее в отсутствие постоянной составляющей, в качестве абсолютного значения максимальной амплитуды A_{abs} выбирается большее из $A_{\text{max}}, A_{\text{min}}$:

$$A_{\text{abs}} = \begin{cases} |A_{\text{max}}|, & |A_{\text{max}}| \geq |A_{\text{min}}|, \\ |A_{\text{min}}|, & |A_{\text{max}}| < |A_{\text{min}}|. \end{cases} \quad (3)$$

После этого значению A_{abs} ставится в соответствие максимально возможное число отсчетов звукового сигнала S_{max} (см. рис. 2), и все остальные значения результирующей последовательности (A_k, t_k) пересчитываются по формулам:

$$A_k = \text{Int} \left(S_{\text{max}} \frac{A_i}{A_{\text{abs}}} \right) \quad \text{при дискретизации 16 бит}, \quad (4)$$

$$A_k = \text{Int} \left(S_{\text{max}} \frac{A_i}{2A_{\text{abs}}} \right) \quad \text{при дискретизации 8 бит}. \quad (5)$$

При наличии в составе спектра исходной функции $A = F(t)$ постоянной составляющей, более строгим было бы ее отделение численными методами, но в силу того, что схемотехника звуковых карт в большинстве случаев предусматривает разделительную емкость между выходом карты и звуковым излучателем, задачу отделения постоянной составляющей вполне логично возложить на саму карту. В этом случае интервалу $A_{\text{max}} - A_{\text{min}}$ ставится в соответствие весь диапазон максимального числа

отсчетов звукового сигнала, и для нормирования остальных значений результирующей последовательности (A_k, t_k) используются следующие формулы:

$$A_k = \text{Int} \left(2S_{\max} \frac{A_i}{|A_{\max} - A_{\min}|} \right) \text{ при дискретизации 16 бит,} \quad (6)$$

$$A_k = \text{Int} \left(S_{\max} \frac{A_i}{|A_{\max} - A_{\min}|} \right) \text{ при дискретизации 8 бит.} \quad (7)$$

Формулы (4-7) отводят полезному сигналу 100% динамического диапазона звуковой карты. В случае заметных на слух искажений, вносимых картой при воспроизведении, следует оставить небольшой запас по динамическому диапазону, в этом случае в формулах (4-7) осуществляют замену S_{\max} на величину $(0.9 \div 0.97)S_{\max}$.

Отметим также, что полученный звуковой файл дает исследователю весьма реальное представление о длительности рассчитанной им временной реализации, аппроксимирующей поведение исследуемого объекта или системы. В случае если полученный звуковой сигнал имеет малую длительность, можно включить режим его непрерывного воспроизведения, но при этом хаотический звук приобретает заметную на слух периодичность.

Современные программные пакеты математического моделирования (в частности, старшие версии пакета «Mathcad») имеют встроенные возможности формирования звуковых файлов, но их использование накладывает ограничение на методы расчета и требует применения сравнительно мощных вычислительных систем, в то время как описываемые в статье алгоритмы легко реализуются на всех популярных языках программирования и не критичны к мощности используемой компьютерной системы. Основным ограничением во всех случаях является только размер свободного пространства жесткого диска пользователя.

Минимальные требования, предъявляемые к компьютерной системе при реализации предложенной методики, по современным меркам более чем приемлемы:

- IBM – совместимый компьютер с процессором не хуже i386;
- 8 мегабайт оперативной памяти;
- Sound Blaster 16 – совместимая звуковая карта;
- жесткий диск со средним временем доступа не более 12 миллисекунд;
- свободное место на жестком диске – не менее 500 Мбайт.

При работе следует учитывать следующее соотношение: двухканальный WAVE-файл с 16-разрядным квантованием и частотой дискретизации 44.1 кГц размером 10 Мбайт обеспечивает время звучания около одной минуты.

Следует также обратить внимание на то, что частота дискретизации может быть выбрана произвольной в диапазоне 5 – 48 кГц, если это удобно для формирования WAVE-файла из экспериментальных данных, но не все программы воспроизведения звука способны проиграть его с выбранной частотой. По наблюдениям автора, некоторые программные продукты (в частности, «Универсальный проигрыватель» Windows 98) воспроизводят такой звуковой файл с частотой дискретизации, ближайшей из ряда частот, считающихся стандартными: 8.0, 11.025, 22.05 кГц и т.д. В этом случае более верное воспроизведение файла может обеспечить программа «Звукозапись», имеющаяся во всех версиях системы Windows.

Автор надеется, что предложенная в статье методика окажется полезной не только для широкого круга исследователей в сфере нелинейной динамики, но также для преподавателей и студентов.

Автор также выражает благодарность Усанову Дмитрию Александровичу и Венигу Сергею Борисовичу за плодотворное обсуждение работы и ценные замечания.

Библиографический список

1. *Matsumoto T., Chua L.O., Komuro M.* The double scroll // IEEE Trans. Circuit Sysyt. Aug. 1985. Vol. CAS-32. P. 797.
2. *Мацумото Т.* Хаос в электронных схемах // ТИИЭР. 1987. Т.75, № 8. С. 66.
3. *Карлаицук В.И.* Электронная лаборатория на IBM PC. Программа Electronics Workbench и ее применение. М.: «Солон-Р», 1999. 506 с.
4. *Мардер М., Федосов В.* Цифровые генераторы шума // Радио. 1990. № 8. С. 69.
5. *Панкратьев Д.* Имитатор звуков стрельбы // Радио. 1999. № 6. С. 54.
6. *Безручко Б.П., Гуляев Ю.В., Пономаренко В.И., Селезнев Е.П.* Формирователь шумовых сигналов // А.с. СССР, МКИ H03B29/00, №1358745, Заявлено 09.01.85. Оpubл. 19.01.88.
7. *Гуляев Ю.В., Безручко Б.П., Кислов В.Я., Пономаренко В.И.* Формирователь шумовых сигналов // А.с. СССР, МКИ H03B29/00, № 1561792, Заявлено 25.07.88. Оpubл. 15.01.94.
8. Data Structure Overview // Microsoft Windows Multimedia Programmer's Reference, Microsoft Corporation, Microsoft Press, Redmond, WA.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 26.05.2006

HOW FORCE TO SOUND THE NUMERICAL EXPERIMENT RESULTS

A.A. Semenov

The unusual technique of interpretation of numerical experiment results as sound waves is offered. Recommendations for practical implementation of the offered technique and for its application in various areas of research, designer and educational activity are given.



Семёнов Андрей Андреевич – родился в 1965 году в Саратове. После окончания Саратовского государственного университета (1987) – инженер, аспирант, научный сотрудник отраслевой лаборатории при СГУ, доцент кафедры физики твердого тела. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1994) по специальности радиофизика, включая квантовую радиофизику. Область научных интересов – физика полупроводников, твердотельная электроника, радиофизика. По указанным направлениям опубликовал ряд статей в центральных и отраслевых научно-технических журналах. Неоднократный участник научно-технических выставок. Награжден золотой медалью и дипломом 1 степени Всероссийского научно-промышленного форума «Россия единая» в 2000 году за разработку устройства для защиты информации от несанкционированного доступа.
E-mail: SemenovAA@info.sgu.ru



Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 1, 2007

**ОБРАЗОВАНИЕ, НАУКА И КУЛЬТУРА –
МИССИЯ УНИВЕРСИТЕТА**
Комментарии к книге Хосе Ортеги-и-Гассета
«Миссия университета»

Д.И. Трубецков

Тот, кого мы сегодня называем «человеком образованным», не более чем век назад назывался «человеком просвещенным», то есть тем, кто видит пути жизни в ясном свете... Отсюда историческая важность необходимости вернуть университету его центральную задачу «просветить» человека, приобщить его к полноте культуры своей эпохи, открыть ему с ясностью и необходимостью огромный настоящий мир, в который он должен втиснуть свою жизнь, чтобы она стала аутентичной. Я сделал бы из «факультета культуры» ядро университета и всего высшего образования.

*Хосе Ортега-и-Гассет.
Миссия университета*

В XX веке университеты потеряли функцию приобщения студентов к «общей культуре», более того, культура потеряла свой первоначальный смысл воспитания определенных убеждений, которыми человек мог бы руководствоваться на протяжении всей своей жизни, помимо владения только системой представлений о мире и человечестве. Это было естественным, поскольку на университет была возложена ответственность за подготовку профессиональных специалистов и проведение научных исследований.

Изменилось время. Пришел XXI век. Изменилось и предназначение университета – его миссия. Это не удивительно. Удивительно, что великий испанский писатель и философ, вообще один из выдающихся интеллектуалов XX века Хосе Ортега-и-Гассет написал об этом более семидесяти лет назад. Он полагал, что «современный "средний" европейский человек оказался лишенным культуры... Этот новый "варвар" является профессионалом, он более учен, чем когда бы то ни было прежде, но в тоже время и более бескультурен – инженер, врач, юрист, ученый».

Кто он, этот выдающийся мыслитель, которому в 2006 году исполнилось бы 123 года?

Ортега родился 9 мая 1883 года в Мадриде. Образование получил в Малаге и Мадриде. Доктором философии он стал в 1904 году, профессором метафизики Мадридского университета – в 1910.

Первая книга – «Размышления о Дон-Кихоте» – была опубликована в 1914 году. В том же году он прочитал свою знаменитую лекцию «Старая и новая политика» – своеобразный манифест молодых интеллектуалов того времени, в котором изложена их позиция в отношении политических и моральных проблем Испании. Ортега, как и многие профессора университета, отказался от должности, когда в декабре 1923 года генерал Primo de Rivera провозгласил себя диктатором Испании. С началом гражданской войны Ортега покидает страну и в 1936-1945 годах живет в Европе, Аргентине и Португалии. В 1948 году он основывает в Мадриде Институт гуманитарных наук. Умер Хосе Ортега-и-Гассет в Мадриде 18 октября 1955 года.

Главная идея в философии Ортеги в том, что человек не может рассматриваться в отрыве от окружающих его обстоятельств истории. Он определяет человека так: «Я есть Я и мое окружение».

Стиль Ортеги изобилует метафорами, он ярок и выразителен. Всемирную славу ему принесла переведенная на русский язык работа «Восстание масс» (1930). Удивительно свежо выглядит и работа «Миссия университета» (1930), в которой Ортега изложил свои представления об университете и его задачах.

Известная на русском языке часть работы Ортеги «Миссия университета» (глава IV) называется так: «То, чем современный университет должен быть в первую очередь. Университет, профессия и наука». Приведем фрагменты из главы с современным комментарием.

«Рассмотрим следующие положения:

А. Университет, *в первую очередь*, представляет собой высшее образование, которое должен получить средний человек.

В. Среднего человека нужно сделать, *прежде всего*, человеком культурным, поместить его вровень со временем. Таким образом, *первичная и центральная* функция университета – это преподавание главных культурно-значимых дисциплин.

Эти дисциплины, области знания:

1. Физическая картина мира (физика).
2. основополагающие темы органической жизни (биология).
3. Историческое развитие человеческого рода (история).
4. Структура и функционирование общественной жизни (социология).
5. План мироздания (философия)».

Если к первым двум указанным дисциплинам добавить «Науки о Земле», то мы приходим к курсу «Концепции современного естествознания». С позиций сегодняшнего дня все вместе указанные культурно-значимые дисциплины могут быть рассмотрены единым образом в рамках нелинейной динамики макроскопических открытых систем или синергетики. Макроскопические открытые системы состоят из многих объектов, принимаемых за элементы структуры. Элементы могут быть микроскопическими (атомы или молекулы в физических и химических системах), но могут быть малыми, оставаясь все же макроскопическими (макромолекулы в полимерах, клетки в биологических структурах). Они могут быть и не малыми телами (например, «элементарные» объекты в социологии). Из-за сложности открытых си-

стем в них возможно образование различного рода структур. Более того, сложность открытых систем представляет широкие возможности существования в них коллективных явлений. Подчеркивая роль кооперации при образовании структур, Герман Хакен ввел термин «синергетика», что означает коллективное действие.

По Ю.Л. Климонтовичу, «синергетика – не самостоятельная научная дисциплина, но новое междисциплинарное научное направление; цель синергетики – выявление общих идей, общих методов и общих закономерностей в самых разных областях естествознания, а также социологии и даже лингвистики; более того, в рамках синергетики происходит кооперирование различных специальных дисциплин».

Синергетика сегодня – это еще и мост между естественными и гуманитарными науками, мост между двумя культурами по Чарльзу Сноу.

В выступлении ректора МГУ В.А. Садовниченко на Всероссийском совещании заведующих кафедрами гуманитарных и социально-экономических дисциплин (Москва, МГУ, 20-21 ноября 2003 г.) есть раздел «Гуманитарный и естественно-научный секторы: взаимосвязь и взаимозависимость проблем». Садовничий, в частности, подчеркивает все большее и большее усложнение высшей школы из-за переплетения и роста взаимозависимости ее гуманитарного и естественно-научного секторов.

Гуманитарии, к сожалению, не видят необходимости в естественно-научном образовании и боятся естествознания. Конечно, это рудименты. Как справедливо пишет В.А. Садовничий, десятилетиями естественно-научное образование гуманитариев считалось надуманной проблемой. Позволим себе длинную цитату.

«Полагали, что краткий курс материалистической диалектики с цитатами из "Анти-Дюринга" и "Диалектики природы" – вот все, что нужно для естественно-научной подготовки гуманитария и обществоведа. Неважно, что он не отличал "бином" от "генома".

Вместе с тем, сущность естественно-научного образования специалистов гуманитарного профиля очень точно полвека тому назад раскрыл Эрвин Шредингер, подчеркнув, что "все естественные науки связаны с общечеловеческой культурой" и что "научные открытия, даже кажущиеся в настоящий момент передовыми и доступными пониманию немногих избранных, все же бессмысленны вне своего культурного контекста", что теоретические построения науки "служат в итоге для включения в концепции, предназначенные для надежного усвоения образованной прослойкой общества и превращения в органическую часть общей картины мира"».

Как указывает ректор МГУ, само гуманитарное образование нуждается в новых идеях, причем поиски его нового облика идут нелегко. По С. Аверинцеву, «понимание – главная проблема гуманитарных наук».

Разумеется, еще одна причина того, что гуманитариям нужно естествознание, – применение количественных методов исследования в истории, лингвистике, социологии, не говоря уже об экономике и психологии. По поводу двух последних дисциплин трудно сказать, чего в них больше, – естественно-научного или гуманитарного. Естественно-научная культура живет будущим. Гуманитарная – прошлым. Первая умеет. Вторая – желает и мечтает. Пропасть между ними – из-за непонимания, незнания или недооценки языка коллег. В этом опасность для будущего цивилизации.

Следующий шаг Ортеги.

«С. Нужно сделать из среднего человека хорошего специалиста. Наряду с обучени-

ем культуре, университет – средствами интеллектуально более трезвыми, непосредственными и эффективными – учит студентов быть хорошими медиками, хорошими судьями, хорошими преподавателями математики или истории».

А как же наука?

«Д. У среднего человека нет никакой причины становиться ученым, он не обязан посвятить себя науке. Скандальный вывод: наука в прямом смысле слова, то есть научное исследование, не является прямой и базовой функцией университета, и без особой причины и не должна являться таковой. Тем не менее в некотором смысле университет неотделим от науки и, следовательно, должен включать также и научное исследование...»

На указанную тему есть любопытный пример в статье Арнольда В.И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели (Природа, 1998, № 4). Хорошо известно, что простейшая модель роста населения Земли ($dx/dt = kx$), предложенная Мальтусом, ведет к экспоненциальному росту населения. С определенными оговорками эта жесткая модель применима, например, к развитию науки в 1700–1950 гг., измеряемому, допустим, числом научных статей. Продолжение экспоненциального роста в следующем веке быстро привело бы к исчерпанию чернил и бумаги, а число ученых достигло бы 1/2 населения земного шара. Общество не может допустить этого, и развитие науки должно быть подавлено.

Сегодня существует и особое мнение о будущем науки, заключающееся в вопросе: «Станет ли наука экзотикой?» Так, в частности, называется статья, излагающая беседы двух известных физиков, большую часть своей жизни проработавших в Советском Союзе и в разное время эмигрировавших из него – М.Я. Азбеля и М.И. Каганова. Мы вернемся к этой теме, а сейчас вновь обратимся к работе Ортеги.

Прежде всего, он предлагает отделить профессию от науки, подчеркивая, что «в первоначальном понимании наука – это только исследование: формулировать проблемы, биться над ними и приходиться к решению». И далее: «Как только достигнута эта цель, все остальное наукой уже не является. Поэтому не является наукой изучение науки или преподавание... Наука это одна из самых возвышенных вещей, которые человек создает и производит. Поэтому она выше университета, в котором только учат. Наука – это творчество, а педагогическая деятельность только стремится обучать этому творчеству, передавать его и обеспечивать его усвоение. Наука – вещь столь возвышенная и тонкая, что просто не дает приблизиться к себе среднему человеку. Она ждет избранных. Ученый представляет собой своеобразного инока...»

И что важно, наука – вещь высокого уровня. Наука, но не ученый. Человек в науке – это один из способов человеческого существования, столь же ограниченный, как и любой другой, и даже более».

Профессиональное образование и научное исследование должны быть разделены. Первое включает в себя, главным образом, получение систематизированных знаний, то есть речь идет о содержании, а не об исследовании.

На языке сегодняшнего дня речь идет о качестве преподавания и государственных стандартах, которые стали всячески клеймить: они изжили себя «как инструмент отбора и содержания образования», они были «весьма полезны для периода ломки и перемен», а теперь тормозят включение в содержание образования «новейших достижений теории», мешают ориентации на потребности профессиональной деятельности и т.д., и т.п.

Анализируя ситуацию, В.А. Садовничий в уже упоминавшемся выступлении указывает следующее.

«Я придерживаюсь противоположного мнения. Отказ от госстандартов – никакая не либерализация системы образования, а широкая дорога для проникновения в нее шарлатанов и всяких уличных невежд».

В качестве отрицательной иллюстрации «взрывного характера» гуманитарного сектора образования ректор МГУ приводит политологию, время жизни которой у нас 10-12 лет, что для становления университетской дисциплины крайне мало, если вспомнить, из чего произошла наша политология. Вспомним Ахматову:

Когда б вы знали, из какого сора
Растут цветы, не ведая стыда,
Был скромный одуванчик у забора,
А выросла такая лебеда.

Лебеда выросла внушительная: по специальности ВАКа «23.00.00 – Политические науки» уже защищены сотни кандидатских и докторских диссертаций. Возникла индустрия постградуальной подготовки политологов.

Прочитируем вновь В.А. Садовничего.

«Поставленная на поток подготовка кадров – политологов высшей квалификации отнюдь не означает их действительно высокого в научном и педагогическом отношении уровня. Могу сказать, что такая работа под силу, да и то при существенных ограничениях на количество соискателей, лишь развитым научным школам, о какой бы отрасли знаний и науки речь бы ни шла. Я не знаю, есть ли такие научные школы в нынешней российской политической науке, в наших университетах и вузах? Ведь большая часть диссертационных защит приходится на вузы. А это должно, по меньшей мере, означать, что в этих вузах существует развитая научная политология, имеется серьезный научно-исследовательский потенциал».

Вряд ли за российское время жизни политологии появились признанные научные школы. В связи с этим вспоминается фраза Герцена Шера, идеолога с американской стороны программы Фундаментальные исследования и высшее образование: «Только не ставьте во главе проекта политолога».

Стандарты необходимы. Они должны четко определять, что представляет собой врач, судья, адвокат, учитель и т.п. Как это отражено в общественном сознании, кто этим занимается, где это зафиксировано и как? Полного ответа на эти вопросы нет.

Другое различие, выделяемое Ортегой, – между наукой и культурой. Начнем с его определения культуры.

«Культура – это система жизненных идей, которой обладает каждая эпоха. Или так: это система идей, благодаря которым время живет... Действительность, которую мы привыкли называть "человеческой жизнью", наша жизнь, жизнь каждого не имеет ничего общего с наукой об органических телах... Первоначальный и более истинный смысл слова "жизнь" является не биологическим, а биографическим. Это слово означает комплекс того, что мы делаем и чем являемся, – тяжелый труд, который каждый человек должен делать самостоятельно, – удержаться в мироздании, быть в ладах с миром и определенным образом вести себя среди вещей и живых существ этого мира.

Жить – уж точно значит взаимодействовать с миром, стремиться к нему, реализоваться в нем, заниматься им... Итак, человек не может жить, не реагируя на начальный

аспект своего окружения, не создавая в воображении его интеллектуальную интерпретацию и свое возможное поведение в мире».

Культура (образованность, ступень развития), по Ортеге – самая современная система жизненных идей, которая представляет высший уровень времени. «Кто останется ниже нее, кто живет идеями архаичными, тот обрекает себя на жизнь низшую, более тяжкую, печальную и примитивную. Это позиция человека или народа необразованного... Он обладает идеей мира менее точной, чем другие. Будучи человеком ниже жизненного уровня своего времени, он превращается в человека неполноценного».

Культура не является наукой, потому что в науке есть разделы, не представляющие собой культуру, а лишь научную технологию. Культура обязана владеть целостной идеей мира и человека. Вот почему синергетика так близка к культуре как носительнице высшего уровня времени. Удивительно ярко пишет на эту тему Ортега. «Жизнь не может ждать, пока науки научным образом объясняют Мироздание... Живут здесь и сейчас. Жизнь – это выстрел в упор. И культура, которая является лишь интерпретацией жизни, также не может ждать. Это подтверждает ее отличие от науки. Опираясь на науку, не живут. Если бы физик должен был жить исходя из идей своей физики, будьте уверены, что он не жеманился и не ждал, что через 100 лет другой исследователь дополнит наблюдения, которые он начал. Он отказался бы от полностью точного решения и досрочно дополнил бы приблизительными или правдоподобными соображениями то, чего пока не хватает и чего не будет хватать всегда в доктринальном корпусе физики».

Ортега называет культуру планом жизни, путеводителем по лесу существования. Он видит историческую миссию университета в просвещении человека, приобщении его к культуре своей эпохи, в открытии ему огромного настоящего мира и определении его места в нем.

Ортега пишет следующее.

«Я сделал бы из "факультета культуры" ядро университета и всего высшего образования. Выше была изображена картина его предметов. Каждый носит два названия. Например, "физический образ мира" (физика). Этой двойственностью в названии хотят показать разницу между культурологической дисциплиной и соответствующей наукой, от которой она питается. На "факультете" культуры не будет изучаться физика, как она предстает тому, кто собирается стать физико-математическим исследователем. Физика культуры – строгий идеологический синтез образа и функционирования материального мира, которые опираются на исследования физики, наработанные на сегодняшний день. Кроме того, этот предмет будет демонстрировать способ познания, который использует физик, чтобы прийти к своему чудесному сооружению. Такой подход позволит студенту ясно осознать, что примерно представлял собой "мир", в котором жил человек вчера и позавчера, либо тысячу лет назад, и, наоборот, получить ясное понимание специфики нашего современного мира».

Для реализации сказанного удачно подходит новая специальность «Физика открытых нелинейных систем» с квалификацией «Физик, системный аналитик». В ее рамках легко соблюсти указанную выше двойственность. Здесь нет страха перед тем, что математика не позволит чего-то понять. Математика обширна, но не столь уж премудра, она «ясна как дважды два». К тому же сегодня использование вычислительных машин значительно уменьшает сложность математических методов, необходимых физике. По-существу, речь идет об упрощении преподавания математики за счет обучения новым информационным технологиям.

Ортегу трудно (да и не нужно) пересказывать. Он предлагает некую квинтэссенцию сравнения науки и культуры.

«Вот повод, чтобы в первый раз торжественно провозгласить: если не будет осуществляться этот тип интеллектуальной деятельности, посвященной не столько возвышению науки в привычном смысле исследования, сколько упрощению и выделению ее квинтэссенции, без потери сущности и качества, то будущее науки будет катастрофическим...

Нужно гуманизировать ученого. Нужно, чтобы человек науки перестал быть тем, кем он с плачевной частотой является сейчас – варваром, который много знает о некотором предмете. К счастью, первые фигуры поколения настоящих ученых чувствовали себя вынужденными, по внутренней необходимости своей собственной науки, дополнять свою специализацию всесторонней образованностью. Остальные неизбежно пойдут по их следам».

И далее.

«Это заставляет предпринять попытку новой интеграции знания, которое сегодня продолжает делить мир на части... Сегодня отсутствует полностью, хотя это может показаться клеветой, университетская педагогика. Если наука навела порядок в жизни, сейчас необходимо будет навести порядок в науке, организовать ее. Поскольку невозможно ее регламентировать, надо сделать возможным ее здоровое сохранение. Для этого нужно наполнить ее жизнью, то есть придать ей форму, совместимую с человеческой жизнью, которая ее создала и для которой она была создана. В противном случае не стоит опираться на праздный оптимизм: наука сублимируется, и человек не будет интересоваться ею.

В общем, все сказанное заставляет нас видеть в университетском учреждении орган спасения самой науки. Необходимость проводить жизнестойкий синтез и систематизацию знания для преподавания на "факультете" культуры разовьет тип научного таланта, который до сих пор возникал только по воле случая – таланта интегрирования. Люди, наделенные этим подлинным талантом, будут намного ближе к тому, чтобы быть хорошими преподавателями, чем те, которые погружены в традиционное исследование».

Все, что пишет Ортега, и разумно, и красиво. Но не все так просто сегодня. На общем собрании Российской академии наук 18 декабря 2003 года академик Н.П. Шмелев сделал доклад «Духовное здоровье российского человека», который начинался словами о сегодняшнем духовно-нравственном кризисе общества. И, конечно, все дело в тех условиях, в которых мы живем. О какой духовной нравственности можно говорить, если 40% населения страны живет в нищете, если вокруг ложь и коррупция, нет достойной пенсии, нет достойных медицинских услуг и т.д., и т.п. Наш человек никому не верит, он не доверяет жизни вообще. Более того, СМИ методично превращают человека в зверя. Разруха в жизни и в головах взаимосвязаны. Спасти Россию могут сохранение благополучия и потенциала народа. Нужно воспитать уважение к личности и к собственности.

Как сказал Н.П. Шмелев: «Любить надо не только березки, но и тех, кто живет среди них». Общество перестало верить власти, которая бросает деньги на ветер, а на образование, на науку, на искусство тратятся деньги «по цене спичек». Кто виноват? Виноваты бешеные прибыли и коррупция, СМИ и творческая интеллигенция, позволившая сделать себя ненужной обществу. Шмелев считает, даже убежден, что наибольшее падение общества произошло в 1998 году, поскольку непоправимых ошибок теперешняя власть не совершила. Но доверие к себе ей еще предстоит восстановить.

Замечу, что предлагаемые «комментарии...» писались в 2004 году. С тех пор произошли изменения в лучшую сторону: улучшилось финансирование науки и образования через программы и проекты, а образования – еще и через гранты учителям. Но сказанное выше не перестало быть актуальным.

Духовность и нравственность – сегодня понятия, далекие от общества. Но нельзя опускать руки. Что делать? По мнению Ольги Миттельман, учителя русского языка и литературы школы № 590 из Санкт-Петербурга, необходимо, по крайней мере, «образовывать литературой, по хорошему слову Джанни Родари: «не для того, чтобы все стали художниками, а чтобы никто не был рабом».

Вернемся к вопросу: «Станет ли наука экзотикой?» Он тесно связан с вопросом о духовном здоровье российского человека и со всем, о чем говорилось выше. Слово профессору Азбелю в его диалоге с профессором Кагановым:

«Мы с тобой хорошо помним то время, когда слово «ученый» было почти синонимом слов «добрый волшебник», а портрет Эйнштейна украшал множество обложек и висел на стенах в знакомых домах наравне с портретами предков. Эйнштейн воспринимался как квинтэссенция мудрости, не было такого положительного эпитета, который бы к нему не применялся, он стал символом всего хорошего.

Если мы сейчас полистаем газеты и журналы, то обнаружим, что хотя Эйнштейн еще и не стал символом всего плохого, но в них уже можно прочесть, что он был бабником и что украл основные работы даже не у Д. Гильберта или А. Пуанкаре (это было бы еще полбеда, все-таки они были великими учеными), а у своей первой жены Милевы Марич. Поэтому он с ней потом развелся, заранее при разводе отдав ей Нобелевскую премию, которую тогда еще не получил, но был уверен, что получит. Сделал он это не из благородства – просто самое малое, что он мог для Милевы сделать – это отдать заслуженную ею премию (насчет того, что отдал Нобелевскую премию – факт)... Сегодня ученые становятся символом всего плохого. Почему?»

Причин Азбель видит две: наука не обогатила те фирмы, которые на это справедливо рассчитывали, и не сделала обывателей счастливыми. Первое связано с тем, что патент, основанный на фундаментальном открытии, выдаваемый сейчас примерно на 20 лет, устаревает быстрее, чем начинает приносить дивиденды. Фирмам, занимающимся разработками в области фундаментальных наук, это не выгодно, да и конкуренция велика.

По поводу счастья обывателя. А что он слышит о науке каждый день? Либо, что она создала все зло на свете – от атомной бомбы до загрязнения окружающей среды, либо заклинания властей о важности науки, в которую обязательно надо вкладывать деньги, но, вот беда, – их нет. Наука, по мнению обывателя, поглощает бешеные деньги, он не понимает, что по сравнению со всем остальным – это абсолютные гроши. Кто ему это объяснит? Пресса? Она настроена антинаучно, она живет на деньги обывателя и с восторгом кричит науке «улюлю». В свободном обществе, если в науке никто не заинтересован – ни предприниматель, ни обыватель, ни правительство – никто на науку деньги тратить и не будет. Всерьез обсуждается вопрос о том, нужны ли точные науки, когда важнее готовить юристов, экономистов, психологов, социальных работников и т.п. Может ли в такой ситуации выжить наука?

Эта ситуация – не российская, она во всем мире (примером может быть Уотсоновский научный центр в ИВМ).

Беда в том, что ученые до сих пор не понимают, что должны себя защищать, не воспринимают себя как некую социальную группу.

Вернемся к диалогу профессоров.

Каганов: «Так что же, дай Бог, чтобы наука дожила до 2025 года?»

Азбель: «Или даже до 2015... Я не имею в виду, что перестанут существовать ученые. Просто научная деятельность станет экзотикой, вроде вырезания китайского шара в шаре».

Каганов: «Ты думаешь, что за ближайшие два десятилетия масштабы могут заметно измениться?»

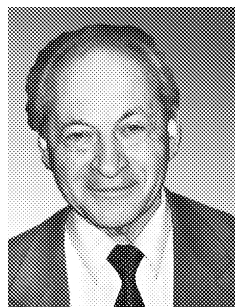
Азбель: «Да, скажем, вдвое. Я думаю, что количество денег, отпускаемых на науку, не будет существенно меняться, но за счет инфляции реальное их количество сильно уменьшится. Если, конечно, ученые не отвлекутся от своих бумаг и не создадут свое лобби, которое разъясняло бы обществу, что наука занимается нужными для него вещами...»

На классический вопрос: «Что делать?» однозначного ответа нет. Да, нужно лобби, потому что обществу необходимо объяснять роль фундаментальной науки в развитии цивилизации, его надо научить сравнивать затраты, скажем, военно-дипломатические и научные. Делать это надо постоянно и профессионально. При этом важную роль должны иметь научно-популярные издания, телевизионные передачи и кинофильмы. А будет ли безграмотное в научном отношении общество читать, смотреть передачи и фильмы? Если нет, то их не будут писать, печатать, создавать. Замкнутый круг? Но для того и нужно лобби.

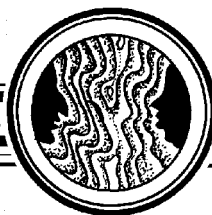
Возвращаясь к названию статьи, процитируем вместо заключения Великую хартию университетов – MAGNA CHARTA UNIVERSITATUM):

«Университет является автономным институтом, функционирующим внутри обществ, организованных по-разному из-за различия географических условий и исторического наследия; путем исследований и обучения он производит культурные ценности, исследует их, оценивает и передает следующим поколениям.

Чтобы отвечать потребностям окружающего мира, в своей исследовательской и образовательной деятельности университет должен быть морально и интеллектуально независим от любой политической власти, равно как и от какой бы то ни было экономической силы».



Трубецков Дмитрий Иванович – родился в Саратове (1938). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ, профессор, член-корреспондент Российской академии наук, заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования. Научный руководитель Лицея прикладных наук и факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: вакуумная электроника и микроэлектроника сверхвысоких частот, теория колебаний и волн, нелинейная динамика, история науки. Автор более двадцати учебных пособий и монографий, а также более двухсот статей в периодической печати.



ДВЕ ТЫСЯЧИ ШЕСТОЙ ГОД В ДАТАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

Д.И. Трубецков

Время – друг великих сочинений
И смертельный враг плохих.
Там поймешь, кто гений, кто не гений,
Где давно не будет нас в живых.

Александр Кушнер

Уважаемый читатель! Вашему вниманию предлагается материал лекций, частично прочитанных на «традиционных днях в Саратове для молодых» в октябре 2006 года и на научном семинаре факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета.

Даты определили расположение материала следующим образом:

- Бенджамин Франклин – 300 лет со дня рождения;
- «Электронные» даты как зеркало нелинейной науки: Дж. Дж. Томсон, Ирвинг Ленгмюр, Ли де Форест, звездное скопление «магнетронных» дат и др.;
- даты других важных событий, относящихся к нелинейной динамике.

Сохранен, как продолжающий жанр, эпиграф к предыдущим публикациям [1]. Выбор событий и героев, а также число выделенных дат по-прежнему на совести автора. Сохранена и стилистика предыдущих публикаций.

Итак, чем интересен для читателей журнала 2006 год?

Бенджамин Франклин – 300 лет со дня рождения

«...История науки не может не интересовать ученых-естественников: ученый находит в ней... многочисленные уроки и, умудренный собственным опытом, он может лучше, чем кто-либо иной, истолковать со знанием дела эти уроки».

Луи де Бройль

Вместо введения

Когда я начал писать о Франклине, то вспомнил, что во дворе университета штата Вайоминг (США) есть статуя Франклина, около которой я даже сфотографировался. Появился запоздалый вопрос: «Почему она в Вайоминге и связана ли какая-либо история с этой скульптурой?» Во времена Франклина по поводу Вайоминга был известен лишь трагический эпизод Войны за независимость – «резня в долине Вайоминг» – взятие городка Вайоминг в Пенсильвании и последовавшие за этим рейды индейцев по долине Вайоминг 3-6 июля 1778 года, в ходе которых пострадало несколько городов. Отряд численностью более тысячи человек, состоящий из лоялистов, английских рейнджеров и ирокезов (во главе отряда стоял некто Дж. Батлер), напал на гарнизон коннектикутских поселенцев (во главе отряда гарнизона по чистой случайности стоял человек также по фамилии Батлер). Англичане потеряли контроль над действиями индейских союзников, и те зверски убили двести сорок защитников поселения; только около шестидесяти человек сдались в плен. Это событие, произошедшее 3 июля, не только сплотило патриотов, но и позволило Дж. Вашингтону в 1779 году осуществить экспансию против ирокезов. Возмущена была резней и общественность Великобритании. Поэтому английские военные власти пересмотрели практику заключения союзов с индейцами против американских поселенцев.

Университет штата Вайоминг был основан в 1886 году (не при жизни Франклина) на дарованной земле. Экскурс в историю ответа на поставленный вопрос не дал. Поэтому я обратился к Л.М. Страховой, которая налаживала первые контакты Саратова со штатом Вайоминг, а затем была проректором Саратовского университета по международным отношениям и связям с общественностью, с просьбой связаться с ее коллегой из Вайоминга, почетным доктором Саратовского университета Люисом Бэгби и задать ему упомянутый выше вопрос. Ответ не заставил себя долго ждать и оказался интересным. Вот отрывок из письма Бэгби. «...Бен Франклин – популярный герой и основатель страны. Он вышел из низших слоев общества и сумел дорасти до выдающейся личности в американской истории. Он уважаем в академических институтах, включая и Вайомингский университет, прежде всего потому, что он был человеком Ренессанса с соответствующими навыками и знаниями в самых разнообразных областях жизни: от наук до дипломатии, от искусств до философии и политической мысли. Местный скульптор Роберт Рассин, бывший преподаватель университета Вайоминг (сейчас ему за девяносто), продолжающий активно творить, создал скульптуру Бенджа-

мина Франклина в ознаменование его многих интеллектуальных достижений. Ключ в руке Франклина имеет двойной смысл: прежде всего, это – обычный ключ, который использовали ученые в опытах с электричеством, а также это – символ ключа к знаниям».

Новой оказалась вторая часть письма, о скульпторе. Л.М. Страхова любезно разыскала для меня информацию о Роберте Рассине, который известен в Вайомингском университете не только своими скульптурными творениями [2]. Как преподаватель факультета искусств, более сорока лет он руководил многими студентами. Родился Рассин в Нью-Йорке (1914), в колледже Нью-Йорка получил степень бакалавра и магистра, а выпускную работу выполнил в Beaux Arts Institute of Design. Ему не было и двадцати пяти лет, когда он выиграл два национальных федеральных конкурса по скульптуре. После приезда в Ларамии для работы в Вайомингском университете он получил грант Фонда Форда для работы в Италии, куда он часто возвращался для воплощения проектов. Его скульптуры украшают многие уголки Ларамии и других городов, в том числе и за пределами штата. «Вайомингская семья» и «Бен Франклин» в кампусе университета, монументальная голова Линкольна, возвышающаяся над Ларамии, «Прометей» в Каспере, «Вайомингский кристалл» в Капитолии – по-видимому, наиболее известные из его творений в период работы в Вайомингском университете. Бывший американский сенатор Алан Симпсон сказал: «Он (Рассин. – *Д.И.Т.*) принес известность нашему штату своими замечательными дарами, и поэтому будет жить в сердцах людей Вайоминга».

Впереди времени и вне времени

6 января 1706 года в семье свечника в Бостоне (штат Массачусетс) родился Бенджамин Франклин. Он стал пятнадцатым ребенком в семье. Мальчик рано пристрастился к чтению и рано проявил себя одаренным во многих областях. В грамматическую школу он поступил восьми лет и за год прошел программу трех лет обучения. Увы, на этом его образование закончилось. И всем своим удивительным успехам в жизни он обязан таланту, природной пытливости, воле и настойчивости.

С 10 лет он начал помогать отцу, но вскоре овладел профессией типографа (в типографии старшего брата) и очень гордился этим даже и тогда, когда стал крупным общественным деятелем и ученым, известным журналистом.

С 18 лет судьба Франклина навсегда связана с Филадельфией (штат Пенсильвания). Именно здесь он самостоятельно изучает латынь, французский, итальянский, испанский языки, общественно-политические, экономические и естественно-научные труды, что позволяет ему стать одним из образованнейших людей своего времени.

Обратимся далее к очерку «Бенджамин Франклин» в книге Митчела Уилсона [3]. Раздел «Личность» начинается так.

«Глубокой осенью 1732 года на листе бумаги родился старик. Автор, вызвавший старика из небытия, был стройным молодым человеком с гибким станом и плечами пловца». Его герой – полуголодный ученый старик, который признается, что пишет не во имя общественного блага, а потому, что «...чрезвычайно беден, а издатель обещал... солидный куш». Комического, довольно «напыщенного» героя допекает сварливая жена, он благочестиво рассуждает о пользе бережливости, подмигивает молоденьким женщинам..., и за все это его любят читатели.

Литературный персонаж получился столь живым, что последующие поколения путали Франклина с его героем. Это было связано еще и с тем, что все известные портреты Франклина написаны с него в старости. По Уилсону, «...при жизни Франклина не было случая, чтобы его не узнали или приняли за другого. Разные люди: дельцы и ученые, титулованные особы и ... хорошенькие женщины, раз повстречавшиеся с ним, уже не путали его ни с кем. Всегда веселый, обезоруживающий своим обаянием, Франклин «был величайшим обольстителем», интеллектуальным beau ideal своего времени.

Со времени Возрождения история не знала столь разносторонне одаренного и многогранного человека. Франклин был блестящим дельцом, дипломатом, писателем, вдумчивым наблюдателем природы и неотразимым сердцеедом».

По-видимому, главным для Франклина было решение политических и нравственных проблем американского общества, его просвещение. Как указывает П.Н. Щербаков [4], «...он немало сделал для создания рационально обоснованной системы подготовки специалистов в Пенсильвании, лично воспитал школу физиков в Филадельфии и внес заметный вклад в создание Пенсильванского университета. Что же касается средней школы, то она, по его убеждению, должна обучать учащихся прежде всего наукам, а не теологии. Поэтому и учебные пособия должны давать учащимся научное представление об окружающем мире и помогать им рационально мыслить и действовать на практике».

Франклин как журналист и писатель формировал в сознании общества представления о совершенствовании личности. Он очень гордился изданием знаменитого календаря, который стал популярным во всем мире и принес пользу, как и книги Франклина, просвещению во многих странах.

Умеренность, молчаливость, соблюдение порядка, решимость, бережливость, прилежание, искренность – вот собственный моральный кодекс, разработанный Франклином. В уже цитированной выше статье Щербакова отмечается, что «автобиография» Франклина «...до сих пор остается своеобразным учебным пособием по этике». По этому же поводу Уилсон пишет: «Франклин шел впереди своего времени. Вообще говоря, он был вне времени. Вот почему автобиографическая книга Франклина поражает нас своей современностью. Такой же она покажется читателям две тысячи лет спустя, и такой же современной показалась бы она Чосеру, а до него – Цицерону».

Франклин умел находить понимание у ремесленников, торговцев, чиновников, у государственных деятелей и дипломатов, у поэтов и философов. Он считал: «Почти у каждого человека есть естественное и сильное желание, чтобы люди им гордились и его ценили» (это – психология добропорядочных граждан) и «Если бы негодяи понимали все преимущества добродетели, они из бесчестных стали бы честными» (это – для безнравственных в поведении). К сожалению, последнее суждение сомнительно, особенно в наши дни.

Суммируя послужной список Франклина, Щербаков пишет следующее.

«Владелец собственной типографии и газеты, секретарь Законодательного собрания Пенсильвании, почтмейстер Филадельфии и заместитель генерального почтмейстера американских колоний, полковник милиции, один из основных авторов Декларации независимости и первой американской Конституции, посол во Франции, бессменный Президент Филадельфийского философского общества – таков далеко не полный перечень общественных и государственных должностей Франклина, которые он честно и энергично исполнял на протяжении своей жизни». Этот великолепный послужной список можно дополнить некоторыми подробностями (см. [5]).

В 1729-1748 годах Франклин издавал «Пенсильванскую газету», а в 1732–1758 – ежегодник «Альманах бедного Ричарда». Он основал в 1731 году в Филадельфии первую в английских североамериканских колониях публичную библиотеку, в 1740 – Пенсильванский университет, в 1751 – Филадельфийскую академию. Бенджамин Франклин в 1736–1751 годах служил секретарем Пенсильванской ассамблеи, в 1737–1753 был почтмейстером Пенсильвании, в 1753–1774 – заместителем почтмейстера всех североамериканских колоний. В 1754 году на созванном по его инициативе первом конгрессе представителей колоний в Олбани он предлагает план объединения колоний. После того как в течение нескольких лет Франклин представлял североамериканские колонии в Лондоне, в 1775 году он избран членом второго Континентального конгресса. Вскоре он был назначен советником генерала Джорджа Вашингтона и стал членом комитета по разработке Декларации независимости. В 1776–1785 годах Франклин – полномочный министр и посол в Париже. Американо-французский договор 1778 года о союзе и Версальский мирный договор 1783 года, на основании которого Великобритания признала независимость США, были заключены при его содействии и участии. Бенджамин Франклин в 1785 году был избран президентом Законодательного собрания штата Пенсильвания, участвовал в работе Конституционного конвента по выработке Конституции США (1787 год). 12 февраля 1790 года он подписал памятную записку Конгрессу с призывом об отмене рабства.

Франклин к естественным и неотъемлемым правам человека относил жизнь, свободу и собственность. Он выступал против усиления роли исполнительной власти, в частности, против предоставления Джорджу Вашингтону чрезвычайных полномочий, за всеобщее избирательное право, не ограниченное имущественным цензом. Он сформулировал трудовую теорию стоимости... Фактически Франклин был одним из основателей США, одним из создателей нового государства. Франклин стал даже своеобразным мериллом благосостояния американцев, поскольку 100-долларовую купюру украшает портрет этого удивительного человека. Он был также основателем науки этого государства, внеся большой вклад в мировую науку.

Еще один любопытный факт, который замалчивается в биографиях Франклина.

4 июля 1776 года Конгресс поручил Джону Адамсу, Бенджамину Франклину и Томасу Джефферсону придумать девиз для главной печати Соединенных штатов. 10 августа 1776 года Конгресс поддержал латинскую фразу: «E Pluribus Unum» (на английском «One from many» или «One from many parts»). Она впервые появилась на монетах в 1795 году. Этот девиз был основой плана свободных законов создания Нового мирового порядка, объединяющего мировые правительства и религии, а также денежные системы в нечто единое, которым можно управлять.

Конечно, нас интересует Франклин-ученый.

В 1727 году он организует кружок любителей наук «Джунту» («Клуб кожаных фартуков»). В нем Франклин, его друзья и соратники изучают основы философии и натурфилософии, участвуют в научно-просветительской и социальной жизни своего города. В 1743 году кружок превратился в Американское философское общество, первым и бессменным президентом которого до конца своей жизни оставался Франклин. Членами этого общества в период с 1770 по 1860-е годы были избраны 24 русских ученых, среди которых – Е.Р. Дашкова (1789), И.Ф. Крузенштерн (1824), В.Я. Струве (1853).

Щербаков считает, что научными исследованиями Франклин занялся случайно. Так ли это?

Вновь слово Митчелу Уильямсу.

«Спустя двенадцать-четырнадцать лет после того, как Франклин открыл типографию, он преуспел настолько, что мог устраниваться от дел с ежегодным доходом в тысячу фунтов стерлингов. Ему исполнилось в то время сорок лет. Доход его был равен жалованью королевского губернатора – самой высокопоставленной персоны провинции Пенсильвания – что-то около 30 тысяч долларов в год по сегодняшним масштабам. Для человека с франклинским неутомимым нравом отставка означала лишь переход от одного рода всепоглощающей деятельности к другому. Наука – или, как принято было говорить, натурфилософия – манила Франклина на протяжении многих лет».

По-видимому, прав Уилсон, а не Щербаков.

В 1747 году Франклин приступает к исследованиям в области электричества. К этому времени был накоплен большой фактический опытный материал, который из-за отсутствия понятий представлял собой результаты несвязанных наблюдений и запутанных туманными терминами теорий. Что было известно к этому времени? Было известно два вида электричества и их взаимодействие, известно, что существуют проводники и изоляторы, были изобретены «лейденская банка» и электростатическая машина. Франклин систематизировал известное и создал достаточно связную теорию электрических явлений, изложенную им во «Взглядах и предложениях касательно свойств и действий электрической субстанции». Именно он ввел общепринятые сейчас термины, такие как конденсатор, проводник, батарея, обмотка, заряд, разряд и другие. Ему же принадлежат обозначения «+» и «-» противоположных электрических зарядов.

Упомянутая выше теория включает преобразование популярной в то время идеи эфира в понятие «электрической жидкости», которая одна во всех телах, а положительный и отрицательный заряды суть избыток или недостаток «электрической жидкости» в теле по сравнению с ее обычным количеством. «Более того, – пишет Уилсон, – Франклин утверждал, что электричество, по всей вероятности, состоит из "мельчайших частиц", которые могут проникать внутрь металлов с такой же легкостью, с какой газ распространяется в атмосфере. Дж. Дж. Томсон, который впоследствии открыл электрон и заложил основу современной электронной теории, отзывался о Франклине с таким же восхищением, что и его современники».

Начинал Франклин свои исследования с «лейденской банки», которая в его опытах представляла собой обыкновенную закупоренную бутылку с водой и погруженным в нее металлическим стержнем, пропущенным через пробку.

-
1. Бостон, XVIII в.
 2. Дом в Бостоне, в котором родился Б. Франклин.
 3. Мать Бенджамина, Абиан Фольгер Франклин, 1707 г.
 4. Молодой Бенджамин – ученик печатника. Барельеф на постаменте памятника Франклину в Филадельфии.
 5. Гравюра из Энциклопедического словаря Д. Дидро и др., изображающая типографию с двумя прессами.
 6. Старый мельничный склад в Бостоне.
 7. Б. Франклин, отправляющийся из Бостона в Филадельфию.

фото

φOTO

фото

φOTO

фото

φOTO

Немного занимательной истории по Митчелу Уилсону.

«Известие об изобретении лейденской банки было настолько ошеломляющим, что оно в мгновение ока облетело Европу, и опыт повторялся всюду. Для просвещения французского короля опыт был произведен на цепи из ста восьмидесяти взявшихся за руки гвардейцев. При электрическом разряде все 180 человек высоко подпрыгнули, словно собираясь маршировать в воздухе. В парижском монастыре семьсот монахов, взявшись за руки, повторили тот же эксперимент. Подобно вороху желтых листьев, подхваченных ветром, все семьсот монахов разом подскочили. Устраивались общественные демонстрации, и смельчаки из публики рвались на себе испытать действие электрического разряда. Электричество стало самым модным зрелищем сезона. Франклин присутствовал на одной из таких публичных демонстраций в Бостоне. Она пробудила в нем интерес к электричеству».

Франклин задался вопросом: «Что в лейденской банке служит резервуаром для электрической энергии?» Для этого он провел ряд последовательных опытов, которые описывает так.

«Чтобы узнать, где именно аккумулируется энергия, мы поместили наэлектризованную бутылку на стекло, вынули пробку со стержнем. Затем взяли бутылку в одну руку и поднесли палец другой руки к отверстию в горлышке. Из воды выскочила сильная искра... Это доказывает, что энергия собирается не в стержне.

...Затем, чтобы проверить, не собирается ли энергия в воде...как нам казалось раньше, мы снова наэлектризовали бутылку. Далее пробку со стержнем опять вынули и перелили воду из наэлектризованной бутылки в ненаэлектризованную. В том случае, если заряд находился в воде, вторая бутылка испускала бы искры, чего не было.

...Тогда мы рассудили, что электрический заряд либо исчезает при переливании воды, либо остается в первой бутылке. Второе оказалось верным, так как при прикосновении к бутылке вылетали искры, хотя наполнена она была обычной ненаэлектризованной водой из чайника».

Возник новый вопрос: «Собирается ли заряд в бутылке из-за того, что она сделана из стекла, или благодаря ее форме?» И вновь простой и остроумный опыт. Франклин взял кусок оконного стекла и разместил по его краям тонкие полоски свинца. Полученное устройство было наэлектризовано. Снятые со стекла свинцовые полоски не давали искры, в то время как при прикосновении к стеклу возникало много искр. Очевидный теперь вывод: стекло собирает электрический заряд.

В итоге, он изготавливает плоский конденсатор со стеклянной прослойкой.

1. Скульптурная группа, изображающая Бенджамина Франклина и французского короля Людовика XVI во время подписания договора о дружбе и сотрудничестве между Америкой и Францией 6 февраля 1778 г.

2. Портрет Франклина работы Давида Мартена, 1767 г.

3. Русская корреспондентка Франклина Е.Р.Дашкова.

4. Филадельфия – Independence Hall (Зал Независимости), где в 1776 году была принята декларация независимости, а в 1787 году – Конституция США.

5. Американские представители на предварительных торговых переговорах с Англией, 1783 – 1785 гг. В центре – Б.Франклин. Эскиз американского художника Уэста.

6. Б. Франклин, гравюра, 1781 г.

7. Обсуждение Декларации независимости.

8. Подписание Декларации независимости. Филадельфия, 4 июля 1776 г.

Важным открытием Франклина, которое принесло ему мировую славу, было экспериментальное доказательство электрической природы молнии. Он обнаружил, что при протекании «электрической жидкости» через воздух при получаемых в экспериментах разрядах возникает обычная искра, а при природных разрядах – молния. Было установлено, что:

- свет и звук для молнии и искры подобны друг другу;
- электрическая искра, подобно молнии, способна воспламенять предметы, и обе они способны убивать живое существо (было проверено на курице);
- обе вызывают механические повреждения, способны расплавить металлы и создают запах, похожий на запах горячей серы;
- и молния, и искра распространяются по одним и тем же проводникам, особенно легко проходя через острия (по существу это допущение о существовании электрического тока);
- обе могут уничтожить намагниченность и даже перемагнитить полюсы магнита (существует явная связь между электричеством и магнетизмом).

В своей книге «Опыты и наблюдения над электричеством» [6] Франклин пишет, что «электрический огонь любит воду, сильно притягивается к ней, и они могут существовать вместе». И далее. «Если вода наэлектризована, то пар, поднимающийся из нее, также должен быть наэлектризован и, перемещаясь в воздухе в форме облака или в каком-либо другом виде, будет сохранять это количество электрического огня, пока не встретится с другими облаками или предметами».

Следовательно, грозы будут там, где много наэлектризованных облаков, разряжающихся на выступающие предметы – шпили, башни, горы, деревья и т.п.

Понимая это, Франклин предлагает громоотвод.

«Не могут ли сведения об (электрической) силе заостренных предметов принести пользу человечеству в деле спасения домов, храмов, кораблей и т.п. от удара молний, побудив нас устанавливать на самых высоких местах вертикальные железные прутки, заостренные, как игла...» Французские ученые Бюффон, Далибар и Делор, а в 1752 году и сам Франклин при запуске специально изготовленного им воздушного змея убедительно подтвердили идею громоотвода. Изобретение Франклина явилось крупнейшим научным событием XVIII века. Более того, большинство людей полагает, что только опыты с воздушным змеем принесли ему научную известность, что, конечно, не так: к началу этих опытов слава Франклина-ученого уже прочно утвердилась во всем мире. Заметим, что громоотводы широко распространились в Америке, а затем и в странах Западной Европы, несмотря на противостояние религиозных деятелей. В 1769 году великий герцог Тосканский приказал оборудовать громоотводами все склады пороха в герцогстве. В 1770 году Джираломо Мария Фонда предложил конструкцию громоотвода со щеточкой. Он справедливо полагал, что предохраняющее действие острия будет сильнее при большом числе острий.

Кстати, Франклин, соглашаясь с существованием Бога, как и большинство американских просветителей, считал, что признание вмешательства Бога в естественный ход вещей и нарушение им законов природы недопустимо. Он призывал изучать законы природы и подчеркивал, что «полагаться в своих взглядах на веру – значит закрывать глаза разуму».

Что касается теории электричества Франклина, то основной ее недостаток – отсутствие математического аппарата. У него нет результатов, сопоставимых с полученными Ньютоном в механике, что, впрочем, не помешало современникам Фран-

клина уже при жизни назвать его Ньютоном электричества, а эпоху его деятельности и сейчас называют «Веком Франклина».

По мнению Роберта Милликена, в своей унитарной теории Франклин понимал дискретность и материальную реальность «электрической частицы или атома... с той единственной разницей, что наша современная электронная теория основывается на большом количестве чрезвычайно прямых и убедительных доказательств». Нет нужды сомневаться в том, что молниеотвод Франклина, его конденсатор и другие изобретения стали сегодня неотъемлемой частью нашей современной жизни.

Франклин появился в науке как любитель и через несколько лет возглавил мощное научное направление. О своих экспериментах он писал письма П. Коллинсону, Дж. Митчеллу и другим английским ученым. Эти письма в 1751 году Коллинсон опубликовал в виде отдельной книги, вызвавшей восхищение во всей Европе. Письма были переведены на немецкий и итальянский языки и выдержали десять изданий на английском и французском языках.

Несколько слов о Питере Коллинсоне (1694–1768).

Он был членом Королевского общества и пытался опубликовать работы Франклина в «Philosophical Transactions» («Философских трудах»), но эти работы были отторгнуты как недостойные публикации, а проект извлечения искр из облаков признан фантастическим.

Марио Льюцци в [7] указывает, что «...некоторые историки видят в этом отказе отражение политических взаимоотношений между Англией и ее непокорной колонией, стремившейся получить свободу». Он продолжает: «Может быть, и так, но, пожалуй, большую роль сыграл консервативный дух, который на всех этапах развития науки сдерживал и тормозил авантюристические устремления, которые могут сбить с пути, а порой и сбивают с пути научные исследования, но без которых научный прогресс представляется почти невозможным».

После получения отказа от Королевского общества Коллинсон опубликовал письма Франклина за свой счет.

Через 18 лет после опубликования писем Джозеф Пристли (1733–1804) писал: «Нет ничего написанного об электричестве, что читали и чем восхищались бы во всей Европе больше, чем этими письмами. Почти не было такого европейского языка, на который бы их не перевели; и как будто этого было недостаточно – они были в конце концов переведены и на латинский язык» [8].

Заметим, что через три года после отказа в публикации писем Бенджамину Франклину Королевское общество присудило Королевскую медаль, а в 1753 году избрало его членом Королевского общества.

В России теорию Франклина знали (впервые его имя было упомянуто в Санкт-Петербургских ведомостях 12 июня 1752 года в связи с опытами по созданию громоотвода), но после гибели Г.В. Рихмана в 1753 году исследования молнии были запрещены, и собрание трудов Франклина, куда вошли «Автобиография» и «Письма», появилось на русском языке только после его смерти, в 1791 году. Впрочем, с конца 1770 года он стал одним из наиболее известных иностранных писателей и ученых в России. Первую биографию Франклина на русском языке написал И.А. Тургенев, а Д.И. Фонвизин имел возможность неоднократно общаться с ним в Париже в 1777–1778 годах. В Европе с ним встречались русский посланник во Франции И.С. Барятинский, русский посланник в Англии С.Р. Воронцов, сестра Воронцова княгиня Екатерина Дашкова (с ней Франклин состоял в переписке). Франклина откровенно

не любила Екатерина II. Его имя часто фигурировало в беседах и переписке декабристов, в частности, в 1820-х годах его труды переводили, будучи в ссылке, декабристы И.И. Пущин и В.И. Штейнгель.

В 1789 году Франклин стал первым из американских ученых членом Петербургской АН.

Франклин многое совершил в науке. Вот некоторое из сделанного им:

- он создал прообраз электродвигателя – так называемое колесо Франклина, которое стало распространенным демонстрационным устройством в школьных кабинетах физики;
- доказал, что точка кипения воды зависит от атмосферного давления;
- Франклин экспериментально показал, что разлитое по поверхности жидкое масло обладает свойством успокаивать волны; он был близок к догадке, что слой масла на поверхности воды – мономолекулярный слой;
- он был одним из первых американских метеорологов; в частности, ввел понятие низкого и высокого атмосферного давления; его объяснение водяного смерча до сих пор считается безупречным; при его участии были проведены измерения скорости, ширины и глубины Гольфстрима, и это течение (название ему дал Франклин) было нанесено на карту;
- Франклин изучал распространение звука в воде; создал труд по теории постройки судов;
- он разработал популярную в дальнейшем во многих странах конструкцию камина;
- изобрел музыкальный инструмент с трущимися стеклянными шарами; усовершенствовал уличные фонари Филадельфии;
- создал бифокальные очки.

Казалось, за что бы Франклин ни брался, все у него получалось без ошибок. Но это не так. Уилсон описывает одну из ошибок Франклина, обернувшуюся трагедией, в маленькой главе «Но и Франклин иногда ошибается». Вот отрывок из нее: «Когда Франклин был еще совсем молодым, в Бостоне разразилась эпидемия оспы. Коттон Мэтер, известный в истории как один из первых "охотников за ведьмами", выступил тогда горячим сторонником прививок. Мэтер впервые услышал о прививках от своего черного раба и заставил местного врача Бойлстона проводить их как можно шире. Но население Бостона воспротивилось этому, и Мэтер, даже в большей степени, чем Бойлстон, стал мишенью гражданского негодования. Франклин присоединился к выступлениям невежд. И лишь трагические обстоятельства заставили его признать свое заблуждение. Любимый сын Франклина Фрэнсис умер от оспы только потому, что ему не сделали прививку. После этого Франклин присоединился к призывам сторонников прививок».

Бенджамин Франклин умер 17 апреля 1790 года, прожив более 84 лет. Нравственность и талант сделали его имя бессмертным и в Америке, и во всем цивилизованном мире.

Прав Уилсон, утверждая, что «его мысль умела проникать сквозь трясину незначущих вещей к лежащей под спудом простой истине. Из всех человеческих талантов это, пожалуй, самый редкий, хотя люди в слепом тщеславии называют его "здравым смыслом"».

Автор выражает признательность Л.М. Страховой и Л. Бэгби за помощь в подборе материалов статьи.

Приложение 1

В современных учебниках физики трудно найти описание некоторых изобретений Франклина и даже лейденской банки. Так, в известном Берклеевском курсе физики [9] есть лишь следующая задача.

«3.2. Лейденская банка. В 1746 году профессор Мушенброк в Лейдене заряжал воду в бутылки при помощи провода, идущего от горлышка бутылки к электростатической машине. Когда его ассистент, державший бутылку одной рукой, попробовал передвинуть другой рукой провод, он почувствовал сильный удар... Открытие "лейденской банки" произвело революцию в опытах с электричеством. Уже в 1774 году Бенджамин Франклин описывал свои эксперименты с "чудесной бутылкой мистера Мушенброка". Банка представляет собой простое стекло с проводниками по обеим сторонам. Чтобы понять, почему она вызвала такую сенсацию, определите емкость банки, сделанной из литровой бутылки со стенками в 2 мм толщиной; диэлектрическая постоянная стекла равна 4. Сфера какого диаметра в воздухе имела бы ту же емкость?» И все.

В [10] есть описание колеса Франклина и объяснение действия громоотвода. «На остриях заряженного проводника поверхностная плотность электричества может быть настолько большой, что электричество начинает с них стекать. В сильном и сильно неоднородном поле вблизи острия молекулы воздуха заряжаются через влияние и притягиваются к нему. Коснувшись острия, молекулы заряжаются одноименно с ним и отталкиваются. Сила отталкивания превосходит ранее действовавшую силу притяжения, так как она действует на заряженные молекулы, а сила притяжения – на нейтральные. По этой причине заряженные молекулы будут удаляться от острия с большими скоростями, чем они приближались к нему. Возникает поток заряженных частиц воздуха, направленный от острия, называемый электрическим ветром. Им можно погасить зажженную свечу.

В демонстрационном приборе – колесе Франклина – электрический ветер, стекающий с остриев, приводит во вращение легкий крест из металлических проволок... В другом демонстрационном опыте электрический ветер с остриев приводит во вращение легкий цилиндр, насаженный на вертикальную ось (электрический ротор). В сильных электрических полях механизм утечки зарядов с острия становится более сложным. Вблизи острия молекулы воздуха ионизируются сильным электрическим полем. Воздух становится проводником электричества. Возникает сильный электрический ток, направленный к острию или от него (электрический пробой). Этот ток снимает электрические заряды с острия. На этом основано действие громоотвода».

Замечательное описание первого эксперимента с будущей «лейденской банкой» приведено в [11]. «Хочу сообщить Вам о новом, но ужасном опыте, который не советую Вам ни в коем случае повторять самому... Я проводил некоторые исследования по силе электричества. Для этой цели я подвесил на двух голубых шелковых шнурах железный ствол, получивший сообщаемое ему электричество от стеклянного шара, который быстро вращали вокруг оси, прижимая к нему руки и, тем самым, потирая его; с другого конца свисала латунная проволока, конец которой был погружен в круглый стеклянный сосуд, частично заполненный водой, который я держал в правой руке, а другой рукой пытался извлечь искры из электрического железного ствола; вдруг моя правая рука была поражена с такой силой, что все мое тело содрогнулось как от удара молнии! Сосуд, даже если он сделан из тонкого стекла, обычно не разбивается, а рука несколько не смещается от такого сотрясения; но на руку и на все тело это оказывает такое ужасное воздействие, что я даже не могу это выразить; одним словом, я думал, что мне конец». Так писал из города Лейдена голландский физик Питер ван Мушенбрук (1692–1761) французскому коллеге Рене Антуану де Реомюру (1683–1757) о своем эксперименте 1745 года.

Как объяснить результат «ужасного» опыта Мушенбрука? Стенка сосуда из тонкого стекла – диэлектрик, вода и ладонь экспериментатора, держащая сосуд, – обкладки. Иными словами, устройство, получившее название «лейденской банки», было первым конденсатором.

Несколько слов о самом Мушенбруке. Голландский физик Питер ван Мушенбрук родился в Лейдене. Окончил Лейденский университет, был профессором Дуйсбургского, Утрехтского и Лейденского университетов. Его исследования были посвящены электричеству, теплоте и оптике. В 1746 году независимо от немецкого физика Эвальда Юргена фон Клейста (1700–1748) Мушенбрук создал конденсаторы различной формы, диэлектриком в которых были стенки стеклянных банок (отсюда название первого конденсатора – «лейденская банка»). Проводя опыты с конденсатором, он первым обратил внимание на физиологическое действие электрического разряда, о чем и писал Реомюру.

Мушенбрук осуществил исследования теплового расширения твердых тел, исследовал избирательное поглощение различных цветов в воздухе. Он был автором двухтомного курса физики «Введение в натуральную философию». Эти книги представляли собой энциклопедию знаний по физике того времени.

Более подробно описание первых экспериментов с электричеством и первых электрических устройств есть только в старых книгах (см. например учебник А.В. Цингера [12], изданный в 1915 году).

Приложение 2

В статье Л.Н. Крыжановского «Громоотвод, политика и... шляпки» [13] есть несколько забавных эпизодов, связанных с громоотводами. Вот некоторые из них. Возражая Франклину, его английский тезка Бенджамин Вильсон доказывал, что для громоотвода больше подходят проводники с тупыми вершинами, а не острыми. Как указано в статье Л.Н. Крыжановского, ситуация «... напоминала борьбу тупоконечников с остроконечниками из "Путешествия Гулливера" Джонатана Свифта (первое издание книги вышло в 1726 году)». И хотя Королевское общество выступило против мнения Вильсона, король Георг III в 1777 году во время войны с американскими колониями, чтобы не пользоваться изобретением противника, приказал заменить в Англии все остроконечные громоотводы на тупоконечные. В связи с этим появилась эпиграмма:

Тупым проводником в восторг
Был приведен король Георг,
Но в нации разброд.
А Франклину все громы – вздор,
У Франклина острее взор,
Острее громоотвод.

В 1750 году австрийский профессор Иозеф Франц пригласил чешского священника Прокопа Дивиша – «*magus electricus*» (который в 1754 году построил молниеотвод независимо от Франклина), чтобы показать ему свои опыты по электричеству. В цитируемой статье их встреча описана так.

«У Франца был типичный для того времени генератор статического электричества – вращаемый стеклянный шар с подвешенным на шелковых шнурах кондуктором

(отводом) в виде металлической трубки или прута. Чтобы провести любой электрический опыт, нужно было вращать стеклянный шар, который при этом электризовался трением и сообщал заряд конденсатору.

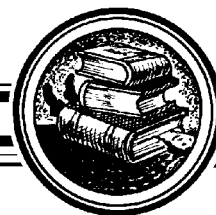
Дивиш прибыл к Францу в парике, как того требовала мода. Но парик был с секретом: весь утыкан обрезками проволоки. Уже давно было известно, что металлическое острие «отнимает электричество» (это – одно из явлений, на котором основано действие молниеотвода). Наклоняя голову к кондуктору, Дивиш отводил тем самым электрический разряд. Вероятно, Дивиш испытывал неприятные ощущения, отводя разряд в землю через свое тело, но чего не стерпишь ради хорошей шутки! Франц был обескуражен: он никак не мог получить разряд на кондукторе. Ему так и не удалось удивить «мага электричества».

Если бы Дивиш провел заземление от обрезков проволоки (скрытым образом, разумеется), он был бы избавлен от неприятных ощущений».

Во второй половине XVIII века такая идея была реализована в шляпах-молниеотводах: на шляпах парижских модниц был укреплен металлический стержень, к которому присоединялась металлическая цепочка, спускающаяся до пят.

Библиографический список

1. *Трубецков Д.И.* Две тысячи четвертый год в датах нелинейной динамики // Изв. вузов. ПНД. 2005. Т.13, № 1-2. С. 152; *Трубецков Д.И.* Две тысячи пятый год в датах нелинейной динамики // Изв. вузов. ПНД. 2006. Т. 14, № 1. С. 120; *Трубецков Д.И.* Синхронизация: ученый и время. Лекции на школах «Нелинейные дни в Саратове для молодых». Вып. 2. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2006. С. 58.
2. <http://uwadmnweb.uwyu.edu/A&S/Development/People/r-russin.html>.
3. *Уилсон М.* Американские ученые и изобретатели. М.: Знание, 1964.
4. *Щербаков П.Н.* Он отнял у небес молнию и власть тиранов // Вестник РАН. 2006. Т. 76, №3.
5. <http://www.foxdesign.ru/aphorism/biography/franklin.html>.
6. *Франклин Б.* Опыты и наблюдения над электричеством. Серия «Классики науки». М.: Изд-во АН СССР, 1956.
7. *Льоцци М.* История физики. М.: Мир, 1970.
8. *Priestley J.* The History and Present State of Electricity, with Original Experiments. London, 1767.
9. *Парселл Э.* Электричество и магнетизм. М.: Наука, Главная редакция ФМЛ, 1971.
10. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. III. Электричество. М.: Наука, Главная редакция ФМЛ, 1977.
11. Энциклопедия для детей. Т. 14. Техника. М.: Аванта +, 2000.
12. *Цингеръ А.В.* Начальная физика. Первая ступень. Москва: Типография В.М. Саблина, 1915.
13. *Крыжановский Л.Н.* Громоотвод, политика и... шляпки // Квант. 1989. № 1. С. 13, 20, 33.



НЕФОРМАЛЬНАЯ ФИЗИКА

А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Л.А. Мельников, А.В. Савин

© А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов,
Л.А. Мельников, А.В. Савин, 2006
Саратов: Изд-во «Научная книга», 2006. 104 с.
ISBN 5-9758-0163-X

Книга вводит школьника и студента младшего курса в «творческую лабораторию» физика-исследователя. В форме задач она знакомит с «неформальной» физикой, которая связана с окружающим миром. Представлены задачи на оценки физических величин, методы размерностей и подобия, задачи для решения с помощью компьютера. Представлены также задачи исследовательского характера, которые могут быть использованы в рамках школьной научной лаборатории. Книга будет полезна школьникам, интересующимся физикой и исследовательской работой, а также учителям физики и студентам младших курсов.

Предисловие

...Как лететь с Земли до звезд,
Как поймать лису за хвост,
Как из камня сделать пар,
Знает доктор наш Гаспар...

Олеся Ю. Три толстяка

Профессия ученого-исследователя очень увлекательна. Она посвящена раскрытию тайн и загадок природы. Если Вы – настоящий исследователь, то для Вас, наряду с обычным миром проблем и катаклизмов, существует и другой: мир науки. Как попасть в этот мир?

В определенной мере первым шагом в овладении профессией исследователя служит решение задач. Однако обычные задачи нацелены на *усвоение* учебного материала. Даже олимпиадные задачи все равно ориентированы на известные закономерности, включенные в школьную программу и установленные уже очень давно.

Но в реальной жизни исследователи сталкиваются с совершенно другой ситуацией – когда надо *устанавливать новые законы и взаимосвязи*. Это означает, что научные задачи по своему характеру существенно иные, чем учебные. Поэтому мы постарались подобрать такие задачи, которые вводят читателя в «творческую лабораторию» физика-исследователя.

В первую очередь, это задачи на оценки (приближенное определение значений) физических величин, которые для своего решения требуют четкого понимания связи объекта исследования с окружающим миром. Далее, это задачи на метод размерностей и подобия, которые позволяют устанавливать физические закономерности, не решая соответствующих уравнений. Современному читателю будут интересны задачи для решения с помощью компьютера. Значительную часть книжки составляют задачи, которые мы назвали *исследовательскими*. Они максимально приближены по своему характеру к тем научным задачам, которые встречаются в работе ученых.

В большинстве случаев мы не выходим за рамки школьной программы. Если это не так, то необходимые сведения обычно сообщаются в самом условии (например, закон излучения Стефана – Больцмана). При решении большинства задач исследовательского характера тоже можно ограничиться этими рамками – ведь вы сами выбираете метод решения. Однако в этом случае нам бы хотелось, чтобы вы были более смелы в выборе методов и подходов. Ведь в реальной исследовательской работе нет такого правила – «используй только те знания, которым ты «официально» обучен»! Оно во многом искусственно и «навязано» традиционной технологией обучения в школе. Поэтому вы можете смело выходить за рамки школьной программы, используя учебники, справочники, Интернет и консультации. Особенно мы рекомендуем использовать возможности Интернета, например, если вы сталкиваетесь с новым термином или понятием. При решении некоторых задач исследовательского характера одним из компонентов решения может являться численный анализ дифференциальных уравнений. Обычно с соответствующими методами знакомят в вузе, после серьезной подготовки по аналитическим методам. Однако это совершенно не обязательно – численное решение дифференциальных уравнений, по своей сути, проще аналитических подходов. Для максимального упрощения восприятия численных методов мы подготовили специальное Приложение.

К большинству задач даны решения либо определенные комментарии. Мы рекомендуем познакомиться с решениями в любом случае, даже если Вы уверены, что решили задачу, ведь всегда могут быть определенные «тонкости», с которыми полезно познакомиться. Тем более это стоит сделать, если после приложенных усилий задачу решить не удалось. К задачам исследовательского характера мы даем некоторые подсказки, ознакомившись с которыми вы сможете продолжить решение. Решения также содержат новые полезные сведения, например, о «золотом» среднем, каустиках и сборках, овалах Кассини и т.д.

Эта книжка в определенной мере опирается на опыт школьной научной лаборатории факультета нелинейных процессов Саратовского университета и лаборатории теоретической нелинейной динамики Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. В течение ряда лет учащиеся разных лицеев и школ Саратова занимались исследовательской работой в школьной лаборатории. Их работы докладывались на различных конференциях, включая студенческую конференцию ФНП СГУ. Авторы хотели бы выразить благодарность член-корр. РАН, профес-

сору Д.И. Трубецкову и профессору Ю.И. Левину, поддержавших идею школьной научной лаборатории и исследовательской работы школьников. Мы также благодарны профессору В.С. Анищенко и Американскому фонду содействия гражданских исследований и развития за материальную поддержку школьной лаборатории. Мы благодарим юных исследователей, в разные годы активно занимавшихся исследовательской работой: Ирину Прохорову, Анастасию Подосинникову, Юлию Максименко, Наталью Иванову, Михаила Бурдейного и других. Мы благодарны заслуженному учителю РФ Л.В. Правдиной, активно стимулировавшей исследовательскую работу учащихся. Мы благодарны коллегам из Института прикладной физики РАН Нижегородского госуниверситета, Института прикладной математики РАН им. Келдыша, обмен идеями с которыми стимулировал исследовательские подходы в образовании.

По нашему мнению, предлагаемые задачи будут полезны как школьникам, так и студентам младших курсов. Часть из них использовалась авторами в качестве курсовых работ для студентов Саратовского госуниверситета.

Авторы

Оглавление

Предисловие	3
1. Оценки, размерность, подобие	7
Оценки	9
Размерность	11
Подобие	14
2. Задачи для компьютера	17
3. Исследовательские задачи	23
4. Решения, комментарии	35
Оценки	36
Размерность	44
Подобие	51
Задачи для компьютера	58
Исследовательские задачи	70
Приложение: О численном решении дифференциальных уравнений	102

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ

Рукописи, объемом не более 16 стр. и 8 рис. принимаются в редакцию в 2 вариантах: бумажном и электронном.

1. **Бумажный вариант** должен быть напечатан через 1,5 интервала и распечатан в 2-х экз. Если рисунки (только черно-белые!) не вставлены в текст, то они выполняются на отдельных страницах также в 2-х экз. Под рисунком указывается его номер, фамилии авторов, название статьи; подрисуночные подписи печатаются на отдельном листе и не должны дублировать внутритекстовое описание рисунка.

Требования к оформлению текста.

На первой странице перед текстом статьи должны быть напечатаны: индекс УДК, название статьи, инициалы и фамилии авторов, краткая аннотация статьи, составленная по форме удобной для непосредственного включения ее в РЖ, издаваемые ВИНТИ.

К статье прилагаются в 1 экз.:

- перевод на английский язык названия статьи, инициалов и фамилий авторов, аннотации;
- краткие сведения об авторах с фотографиями в графических форматах JPG, GIF и т.д.; фотографии можно прислать по электронной почте, сканированные с разрешением не менее 300dpi без дополнительной компьютерной обработки.

Краткие сведения об авторах составляются по следующей форме:

Сидоров Петр Иванович - родился в 1938 году в Москве, окончил Московский физико-технический институт в 1961 году. После окончания МФТИ работает в ФИАН. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1964) и доктора физико-математических наук (1977) в области теории колебаний и волн, радиофизика и электроника, применение нелинейной динамики в различных областях науки. Автор монографии «Детерминированный хаос и экономика» и учебника «Волны в экологии» (в соавторстве с...). Опубликовал 120 научных статей по направлениям, указанным выше. Лауреат Государственной премии СССР. Редактор журнала *International Journal of Chaos Theory* и член редакционной коллегии журнала «Физика и жизнь».

В библиографическом списке нумерация источников должна соответствовать очередности ссылок на них в тексте. В списке указываются:

- а) для книг - фамилия автора, инициалы, название книги, город, издательство, год издания, том;
- б) для журнальных статей - фамилия автора, инициалы, название статьи, название журнала, серия, год, том, номер, выпуск, первая страница статьи;
- в) для депонированных статей - название статьи, инициалы, фамилия автора, название организации, в которой выполнена работа, город, год, объем статьи, название депонирующей организации, дата депонирования, регистрационный номер;
- г) для препринта - фамилия автора, инициалы, название издания, полное название издающей организации, год, количество страниц;
- д) для материалов конференций, школ, семинаров - фамилия автора, инициалы, название статьи, название издания, время и место проведения конференции, город, издательство, год, первая страница статьи.

В конце статьи авторы должны указать наименование программы, в рамках которой выполнена работа, или наименование фонда поддержки.

2. **Электронный вариант.** Статья оформляется с использованием макропакета LATEX 2 ϵ . Рекомендуется пользоваться компилятором MiKTeX (MiKTeX2.4), так как именно им пользуются в редакции. В виде исключения принимаются статьи, подготовленные с помощью текстового редактора Microsoft Word (все формулы должны быть набраны при помощи Equation или MathType).

Все иллюстрации, включенные в оригинал-макет, предоставляются в виде отдельных файлов, записанных в любом из форматов: TIFF, GIF, JPEG. Название файла должно соответствовать номеру рисунка в тексте.

Шаблон статьи

```

\documentclass[11pt,twoside]{article}
\usepackage{mathtext,amssymb,amsmath}
\usepackage[cp866]{inputenc}           % кодировка входного
                                       % документа;
\usepackage[T2A]{fontenc}             % кодировка
                                       % для шрифтов LN
\usepackage[english,russian]{babel}  % включение русификации,
                                       % русских и английских
                                       % стилей и переносов
\usepackage{graphicx}                 % включение графических
                                       % изображений
\usepackage{cite}                     %

%Библиография оформляется с использованием окружения ltrtr:
\newenvironment{ltrtr}{
\vspace{0.5\baselineskip} \noindent {\bf{Библиографический
список}} \vspace{-0.5\baselineskip}
\begin{enumerate}
\partopsep=0pt\topsep=0pt\itemsep=1pt\parsep=0pt\parskip=0pt}
{\end{enumerate}}

\begin{document}

УДК

\begin{center}
{\bf НАЗВАНИЕ СТАТЬИ}%Название статьи прописными буквами
{\it И.О. Фамилия1, И.О. Фамилия2}
\end{center}

\begin{abstract}
Текст аннотации
\end{abstract}

```

%Основной текст статьи

```
\section*{Введение}      %Введение и Заключение не нумеруются
\section{Формирование заголовка секции}
\subsection{Формирование заголовка подсекции}
\section*{Заключение}

% Пример ссылок на литературу \cite{famil_1},
% \cite{famil_2,famil_3,famil_4}.
% Кавычки в тексте должны быть угловыми
% (<<абвгд>>).
% Автор самостоятельно определяет способ
% нумерации окружений и математических
% выражений, следит за работой соответствующих счетчиков.
% При переносе математических формул знак математической
% операции в выключных формулах указывается в верхней
% и нижней строках разбиваемой формулы.
% Рисунки должны быть черно-белыми, в формате *.eps
% (Encapsulated PostScript).
% Библиографический список оформляется:
\begin{ltrtr}
\bibitem{Abarbanel}
{\it Абарбанель Г.Д., Рабинович М.И., Селверстон А. и др.}
Синхронизация в нейронных ансамблях //Усп. Физ. Наук. 1996.
Т.~166, №~4. С.~363.
%
\bibitem{Postnov1999}
{\it Postnov D., Han S. K., Kook H.} Synchronization of
diffusively coupled oscillators near the homoclinic bifurcation //
Phys. Rev. E. 1999. Vol.~60. P.~2799.
%
\bibitem{Landa1980}
{\it Ланда П.С.} Автоколебательные системы с конечным числом
степеней свободы.М.: Наука. 1980.
\end{ltrtr}

{\it Полное название организации, город, e-mail}
```

\end{document}

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина*
Оформление художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, О.Н. Строгановой
в пакете *L^AT_EX*

Подписка на 2007 год осуществляется
по каталогу Агентства Роспечать
«Газеты. Журналы», индекс 73498
и Саратовским государственным университетом
по заключению договора между Подписчиком
(юридическим и физическим лицом) и Издателем

Стоимость подписки на 2007 год 450 руб. (6 номеров)
Заявки на заключение договора принимаются
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64
E-mail: and@nonlin.sgu.ru

Распространение журнала осуществляется
редакцией журнала по адресной системе

Сдано в набор 15.01.07. Подписано к печати 26.02.07
Формат 70x108/16. Бумага «Снегурочка». Печать трафаретная
Усл. печ. л. 11,20(8,0). Уч.-изд. л. 10,9. Тираж 200. Заказ 388

Отпечатано на ризографе GR 3750 редакции журнала

© Редакция журнала
«Известия вузов. ПНД», 2007
© Оформление художника
Д.В. Соколова, 2007