



ДИНАМИКА ПОЧЕЧНОГО КРОВОТОКА НА МИКРО- И МАКРОСКОПИЧЕСКОМ УРОВНЯХ

А.Н. Павлов, О.В. Сосновцева, А.А. Анисимов, О.Н. Павлова

Исследуются изменения в динамике почечного кровотока при переходе от микроскопического уровня отдельных нефронов на макроскопический уровень всей почки в целом. Анализируются ритмические процессы, обусловленные механизмами авторегуляции, и их взаимодействие в форме синхронизации и модуляции колебаний. Обсуждаются отличия динамики при нормальном и повышенном артериальном давлении.

Введение

Почечная авторегуляция кровотока включает два различных механизма, которые действуют на уровне отдельных структурных элементов почки – нефронов (объектов, размер которых порядка 100 мкм) [1]. Первый механизм, так называемая канальцево-гломерулярная обратная связь (КГОС), регулирует входящий поток крови в зависимости от концентрации NaCl в фильтрате, который проходит по канальцам нефрона [2, 3]. Из-за относительно большой задержки во времени, связанной с прохождением потока жидкости по канальцам, данный механизм авторегуляции является неустойчивым и приводит к возникновению незатухающих колебаний величины давления фильтрата [4–6]. В экспериментах на крысах было показано, что при нормальном артериальном давлении эти колебания являются почти периодическими с периодом примерно 30–40 секунд [7]. Однако при повышенном артериальном давлении соответствующие колебания становятся сильно нерегулярными, демонстрируя типичные характеристики динамического хаоса [8, 9]. Таким образом, с точки зрения нелинейной динамики нефрон представляет собой интересный объект, для которого переход от регулярного режима функционирования к хаотическому наблюдается при изменении состояния организма от случая нормы к случаю гипертонии, и, следовательно, изучение проблемы гипертонии на микроскопическом уровне структурных элементов почки может представлять собой одно из практических приложений теории нелинейных колебаний. Отметим, что изменение режима функционирования наблюдается как в случае генетической формы гипертонии, так и при искусственно вызванной гипертонии Голдблетта (после проведения специальной операции). По этой причине в настоящее время считается установленным, что повышение артериального давления вызывает хаотизацию колебательных процессов, существующих на уровне индивидуальных нефронов.

Второй (миогенный) механизм приводит к активации гладких мышечных клеток стенок сосудов (артериол) при изменении давления крови, протекающей по ним [10, 11]. Считается, что данная активизация связана с синхронизацией межклеточной динамики Ca^{2+} в отдельных клетках, которая приводит к колебаниям радиуса артериол с периодом 5–10 секунд [12]. Оба механизма взаимодействуют между собой, и активация одного из них модифицирует отклик другого [13].

Значительное число исследований механизмов почечной авторегуляции было посвящено анализу характеристик и особенностей генерируемых ими ритмов в отсутствие внешних воздействий [14–16]. Наряду с этим в нескольких работах рассматривался отклик динамики почечного кровотока на внешнее периодическое или шумовое воздействие [17, 18]. В частности, было показано, что индивидуальные нефроны демонстрируют наличие резонансного отклика на частотах, соответствующих быстрым (миогенным) и более медленным (КГОС) колебаниям [18].

Согласно результатам исследования структуры почек млекопитающих, до 50% индивидуальных нефронов попарно подсоединены к общей междольковой артерии и до 10% нефронов организованы в триплеты. Это приводит к взаимодействию между соседними структурными элементами, которое основывается на двух различных механизмах: электрохимической и гемодинамической связи. Первая из них вызвана взаимодействием между электрохимическими сигналами, генерируемыми КГОС соседних нефронов, она приводит к синфазной синхронизации их колебаний. Гемодинамическая связь возникает из-за того, что сокращение приносящей артериолы одного нефрона увеличивает гидростатическое давление и кровоток в соседнем нефроне. В свою очередь, это увеличение будет приводить к сокращению приносящей артериолы второго нефрона и увеличению кровотока в первый. Как следствие, гемодинамическая связь порождает противофазную синхронизацию. В реальной динамике структурных элементов почек оба механизма действуют одновременно, но, согласно нашим предыдущим исследованиям, режим синфазной синхронизации встречается значительно чаще. Нами было показано [19, 20], что для нормотензивных крыс примерно в 80% парных нефронов, расположенных на поверхности почки, наблюдается полная (синфазная) синхронизация быстрых и медленных ритмов. Для гипертензивных крыс координированный нефронный отклик является менее выраженным, и в большинстве случаев наблюдается лишь частичная подстройка ритмов (только медленных или только быстрых) [20].

Целью данной работы является изучение возможности выявления координированного нефронного отклика на макроскопическом уровне всей почки. Мы изучаем особенности ритмической активности в динамике кровотока в левой почечной артерии и проводим сравнение с динамикой кровотока в выносящих артериолах индивидуальных нефронов. Мы также исследуем особенности взаимодействия ритмов под влиянием препарата L-name, который приводит к усилению миогенной динамики сосудов [21]. Данный препарат представляет собой ингибитор синтеза оксида азота (NO) и, согласно недавним исследованиям [21], он усиливает нелинейное взаимодействие механизмов почечной авторегуляции, проявляющееся, в частности, в увеличении интенсивности амплитудной модуляции миогенного ритма.

В целях изучения динамических особенностей процессов авторегуляции и нелинейного взаимодействия колебательных процессов мы используем метод вейвлет-анализа [22–24] с его модификацией – недавно предложенной техникой двойного

вейвлет-анализа [25,26]. Эти подходы позволяют идентифицировать различные ритмические компоненты в нестационарных сигналах, исследовать изменение во времени их амплитуд и частот и выявить возможные взаимодействия между данными ритмическими процессами. Ранее уже было установлено, что миогенные колебания индивидуальных нефронов промодулированы по амплитуде и частоте более медленным процессом (ритмом КГОС) [27, 28]. В этой работе мы впервые проводим сопоставление микро- и макрокопической динамики и показываем, что данный тип взаимодействия проявляется не только на уровне отдельных структурных элементов, но и на уровне всей почки в целом.

1. Эксперименты

Эксперименты проводились на нормотензивных крысах весом 210–370 граммов и спонтанных гипертензивных крысах весом 220–260 граммов. В рамках первой серии экспериментов регистрировалась величина потока крови в выносящей артериоле одного из поверхностных (корковых) нефронов с помощью лазерного доплеровского метода [1]. Излучение гелий-неонового лазера с длиной волны 633 нм было сфокусировано на поверхность почки. Измеряемый сигнал (доплеровское смещение частоты) анализировался с помощью специального процессора. Были записаны сигналы 11 крыс с нормальным и 17 крыс с повышенным артериальным давлением. Пример экспериментальной записи представлен на рис. 1, *а*. Даже визуально на фоне случайных изменений кровотока можно обнаружить ритмическую динамику, связанную с наличием задержки в цепи КГОС.

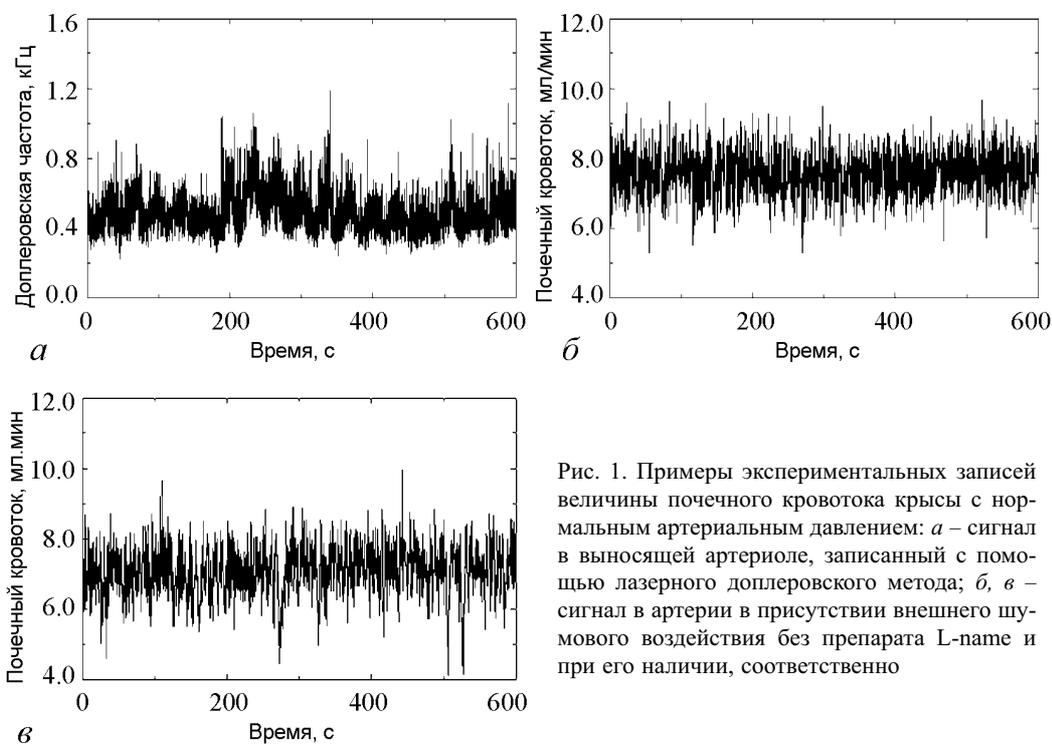


Рис. 1. Примеры экспериментальных записей величины почечного кровотока крысы с нормальным артериальным давлением: *а* – сигнал в выносящей артериоле, записанный с помощью лазерного доплеровского метода; *б, в* – сигнал в артерии в присутствии внешнего шумового воздействия без препарата L-name и при его наличии, соответственно

В рамках второй серии экспериментов регистрировался кровоток в левой почечной артерии при внесении флуктуаций в артериальное давление крови. Флуктуации генерировались с помощью специального насоса через капсулу, вставленную в дистальную аорту. Детальное описание данной процедуры приводится в работе [18]. Почечный кровоток измерялся с помощью установки Caroline Medical Electronics, King, NC. Аналогичные измерения проводились при дополнительном воздействии L-name в целях исследования влияния изменения уровня NO в крови на механизмы авторегуляции и на взаимодействие между генерируемыми ими ритмическими процессами. Были записаны данные 8 нормотензивных и 10 гипертензивных крыс. Рис. 1, б, в иллюстрируют примеры измеренных сигналов. Все эксперименты проводились в университете Копенгагена и университете Южной Калифорнии (Лос Анджелес); данные были предоставлены нам профессором N.-H. Holstein-Rathlou и профессором D.J. Marsh.

2. Вейвлет-анализ экспериментальных данных

2.1. Ритмические компоненты почечной авторегуляции. Как отмечалось во введении, механизмы почечной авторегуляции на уровне отдельных нефронов приводят к появлению колебаний давления и потока крови с двумя временными масштабами – сравнительно быстрого ритма, связанного с миогенной динамикой приносящей артериолы, и более медленного ритма, обусловленного наличием задержки в цепи КГОС [5, 6]. Амплитуда медленных ритмов $a_{\text{КГОС}}$ больше амплитуды $a_{\text{МК}}$ миогенных колебаний (особенно, у нормотензивных крыс). Это проиллюстрировано на рис. 2, где представлены усредненные спектры мощности. Средние значения и отношения амплитуд $a_{\text{МК}}/a_{\text{КГОС}}$ вместе со стандартными ошибками среднего принимают значения 0.67 ± 0.08 и 0.91 ± 0.09 для нормотензивных и гипертензивных крыс, соответственно. В приведенных спектрах также проявляются очень медленные процессы (менее 0.01 Гц), однако физиологические механизмы, приводящие к их появлению, до настоящего времени остаются непонятными. Как было показано в [29], эти колебания оказывают существенное влияние на все остальные ритмические процессы почечной авторегуляции. Далее мы также рассмотрим влияние очень медленных ритмов на миогенную динамику на макроскопическом уровне всей почки.

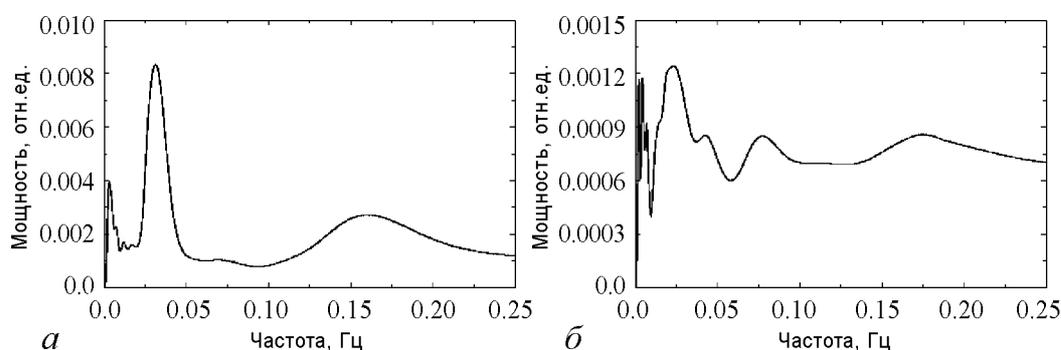


Рис. 2. Спектры мощности, вычисленные по записям потока крови в выносящей артериоле, усредненные по группам нормотензивных (а) и гипертензивных (б) крыс

Отметим, что заранее не известно, будет ли динамика, наблюдаемая на микроскопическом уровне отдельных нефронов, проявляться на макроскопическом уровне всей почки в целом, и возможно ли выявить ритмические процессы в кровотоке, регистрируемом в почечной артерии. Динамика на уровне всей почки является значительно более сложной, и выделение возможных ритмов на макроскопическом уровне осложняется их малой амплитудой. Из-за вариаций в анатомических и физиологических параметрах нефроны, скорее всего, должны демонстрировать различия частот генерируемых колебаний. И даже если бы все структурные элементы были идентичными, на макроуровне четкий ритм может не наблюдаться из-за случайного распределения фаз колебаний каждого нефрона. Тем не менее наличие разных форм взаимодействия может приводить к большей когерентности в силу взаимной подстройки частот и фаз индивидуальных структурных элементов [30, 31]. Формирование кластеров нефронов с синхронной динамикой может приводить к возникновению более выраженных колебаний на уровне почки. Кроме того, переходы между различными кластерами когерентной динамики могли бы служить одной из гипотез появления очень медленных ритмов почечной авторегуляции.

В свете данных обсуждений представляет несомненный интерес развитие специальных методов, которые позволили бы сделать ритмическую динамику более «видимой» и выявить особенности взаимодействия ритмов в случае нормы и патологии. Для усиления двух механизмов авторегуляции авторы работы [18] изучали отклик почечного кровотока на флуктуации артериального давления. Внешнее воздействие, меняющее артериальное давление (даже в форме флуктуаций, вносимых в артерию с помощью насоса), может служить в качестве пейсмекера динамики нефронов, приводя к усилению взаимной синхронизации их ритмов (хотя нужно отметить, что это лишь гипотеза, призванная объяснить экспериментально наблюдаемые результаты, и влияние флуктуаций на механизмы авторегуляции требует отдельного, более детального исследования). В то же время, такие эксперименты могут дать информацию о готовности нефронной системы к «устранению» вариаций артериального давления. Если динамика структурных элементов почки будет полностью синхронной, можно ожидать, что отклик системы в целом будет более сильным, тогда как ансамбль элементов с несинхронной динамикой предположительно будет реагировать медленнее и с менее выраженным откликом.

Анализ индивидуальных записей кровотока в левой почечной артерии (в присутствии флуктуаций, вносимых в артериальное давление) демонстрирует возможность идентифицировать два ритма в спектре мощности на уровне макроскопической динамики всей почки (рис. 3). Однако, в отличие от динамики в выносящей артериоле, мы наблюдаем более выраженные колебания в области миогенной ди-

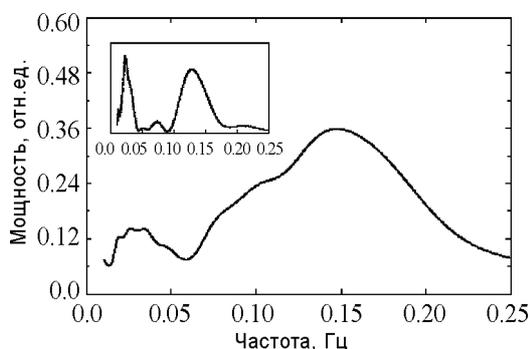


Рис. 3. Усредненный спектр мощности, характеризующий динамику кровотока в левой почечной артерии гипертензивной крысы в эксперименте с шумовым воздействием. Внутри – рисунок с локальным энергетическим спектром, полученным на основе вейвлет-анализа, на котором отчетливо виден спектральный пик в окрестности 0.03 Гц

Таблица 1

Средние значения частот ритмических компонент

Анализируемые данные	Частота, Гц	
	Ритм КГОС	Миогенный ритм
<i>нормотензивные крысы</i>		
микро	0.030 ± 0.004	0.158 ± 0.015
макро	0.031 ± 0.009	0.151 ± 0.028
L-name	0.033 ± 0.002	0.150 ± 0.011
<i>гипертензивные крысы</i>		
микро	0.027 ± 0.004	0.164 ± 0.019
макро	0.034 ± 0.004	0.143 ± 0.016
L-name	0.034 ± 0.003	0.141 ± 0.009

намики с частотой примерно 0.15 Гц и очень слабые колебания в области ритма КГОС (примерно 0.03 Гц). Это позволяет предположить, что миогенные колебания легче возбуждаются, чем медленный ритм, и демонстрируют захват фаз при наличии внешнего шумового воздействия. Частично это может быть связано со сравнительно высокой частотой генерации флуктуаций. Но даже несмотря на то, что медленный ритм является слабо выраженным, он может быть идентифицирован в локальных (мгновенных) спектрах. Пример мгновенного спектра продемонстрирован на рис. 3, где отчетливо виден пик на частоте примерно 0.03 Гц. Это позволяет предположить, что на основе локального спектрального анализа можно провести более детальное исследование ритмических процессов на уровне почечной артерии.

В табл. 1 приведены средние значения частот характерных ритмов вместе со стандартными ошибками среднего, полученные с помощью вейвлет-анализа. «Микро» обозначает динамику на микроскопическом уровне отдельной выносящей артериолы индивидуального нефрона в отсутствие внешних воздействий, «макро» обозначает результаты измерений кровотока в почечной артерии в экспериментах с шумовым воздействием, «L-name» соответствует результатам экспериментов с шумовым воздействием на фоне препарата L-name. Согласно этой таблице, частоты колебательных процессов на микро- и макроскопическом уровнях совпадают в пределах погрешности вычислений. На рис. 4 представлены усредненные результаты для групп нормотензивных и гипертензивных крыс. В отсутствие L-name ритмы очень слабо выражены (тем не менее их удается идентифицировать в каждой индивиду-

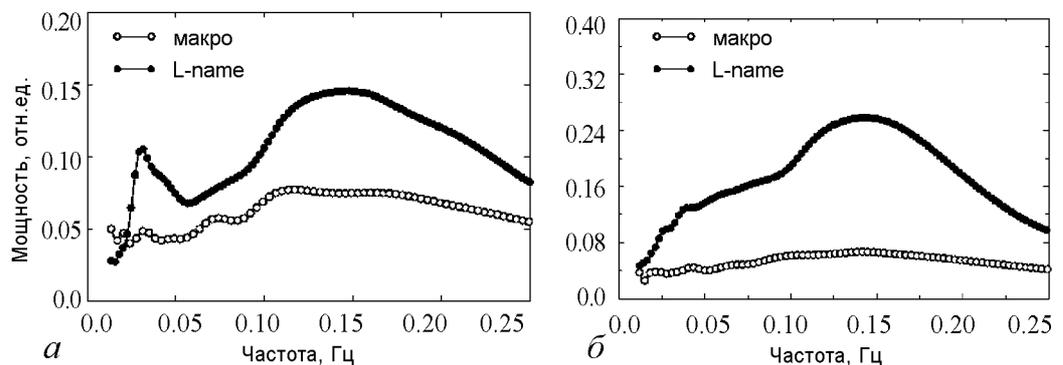


Рис. 4. Спектры мощности, характеризующие динамику почечного кровотока в артерии, усредненные по группам нормотензивных (а) и гипертензивных (б) крыс. Белыми кружками показана динамика в отсутствие воздействия. Черными кружками – после введения препарата L-name

альной записи). При изменении уровня NO (после введения препарата L-name) наблюдается значительное увеличение спектральной мощности. Данный эффект был обнаружен для 7 из 8 записей нормотензивных крыс и для всех 10 записей гипертензивных крыс. По-видимому, это свидетельствует о том, что изменение уровня NO в крови влияет на синхронизацию нефронных колебаний.

Наряду с ростом амплитуды колебательных процессов происходит изменение стабильности ритмов. Динамическая стабильность ритма может быть определена следующим образом [29]:

$$S = \frac{1}{\sigma},$$

где σ представляет собой стандартное отклонение мгновенной амплитуды (или частоты) от среднего значения. Чем больше S , тем более стабильным является исследуемый ритм. В экспериментах с L-name обычно наблюдается уменьшение динамической стабильности по сравнению со случаем только шумового воздействия. В частности, при анализе мгновенной амплитуды миогенного ритма динамическая стабильность уменьшается на 16% для нормотензивных и на 45% для гипертензивных крыс. Уменьшение S может быть вызвано более сильной модуляцией миогенной динамики колебаниями, связанными с механизмом КГОС, или еще более медленными ритмическими компонентами, которые можно наблюдать на рис. 2. Результаты статистического анализа стабильности амплитуды и частоты основных ритмов представлены на рис. 5.

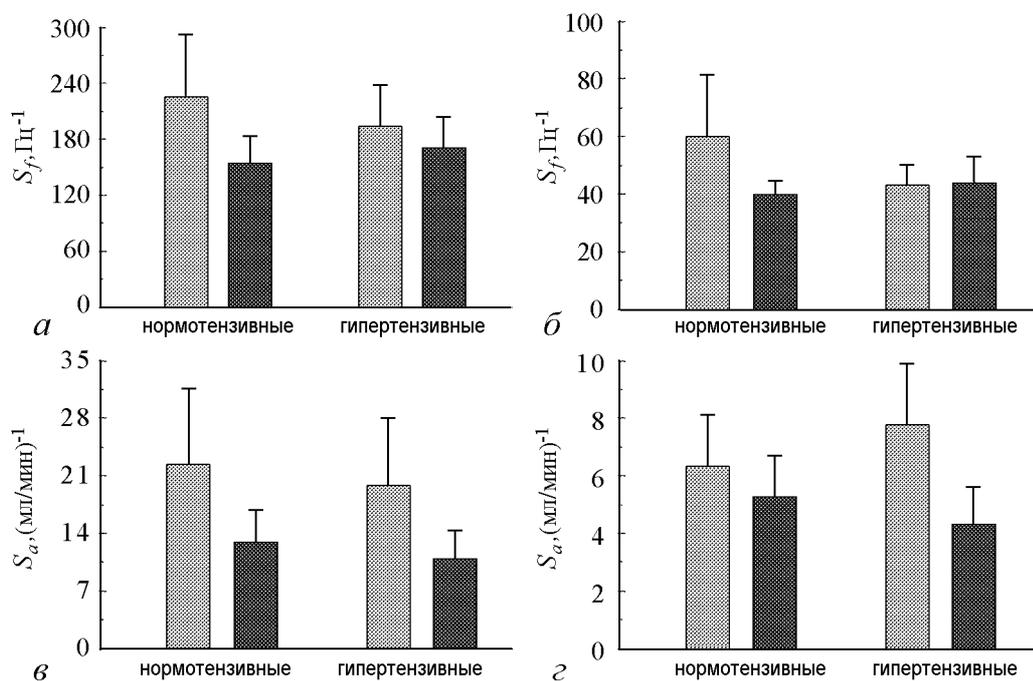


Рис. 5. Изменения параметра стабильности для мгновенных частот S_f (а, б) и амплитуд S_a (в, г) двух ритмических компонент: для колебаний, обусловленных механизмом КГОС (а, в), и для миогенной динамики (б, г). Серый цвет соответствует экспериментам только с шумовым воздействием, черный – с дополнительным введением препарата L-name. Линиями отмечены стандартные отклонения вычисленных средних значений по группам

2.2. Взаимодействие ритмов. Взаимодействие между сосуществующими ритмическими процессами в нелинейных системах может приводить к различным явлениям, включающим квазипериодическую и хаотическую динамику, синхронизацию и модуляцию колебаний. Для пространственно распределенных систем могут наблюдаться волновые процессы, например, волна, распространяющаяся вдоль сердца и управляющая его ритмическими сокращениями [32]. Электрохимическая связь соседних нефронов почки порождает подобные волны, которые распространяются вдоль гладких мышечных структур.

Важную роль в функционировании многих биологических систем играет синхронизация колебаний [33–35]. Известно, например, что сердцебиения могут синхронизоваться с дыханием таким образом, что на один период процесса дыхания будет приходиться точно 4 или 5 сердцебиений [33]. Сложная кооперативная динамика в мозге является чувствительной ко всем ментальным процессам. Однако чрезмерная синхронизация спайковой активности нейронных кластеров многими рассматривается в качестве причины, лежащей в основе развития паркинсоновского или других форм тремора [36]. Следовательно, важно осознавать, что переходам между различными состояниями синхронного поведения в некоторых случаях могут соответствовать заболевания, тогда как в других случаях синхронизация представляет собой важную составную часть нормальной физиологической регуляции [34]. В недавней работе [20] на основе записей давления фильтрата в проксимальном канальце (использовался метод регистрации давления с помощью катетера, помещенного в каналец нефрона) нами исследовалась синхронизация между ритмами колебаний, обусловленными механизмом КГОС и миогенной динамикой на уровне одиночного нефрона. Применялись различные методы диагностики режимов синхронной динамики (на основе расчета разности мгновенных фаз ритмических процессов и подстройки мгновенных частот колебаний). Было показано, что наблюдается эффект синхронизации, при котором отношение частот может принимать значения 4:1, 5:1 или 6:1 (другие варианты возможны, но их вероятность значительно меньше). Отношение частот 4:1 означает, что на 4 периода миогенных колебаний (МК) приходится один период колебаний, обусловленных механизмом КГОС.

Рис. 6 и рис. 7 показывают вероятности различных отношений частот ритмов $f_{\text{МК}}/f_{\text{КГОС}}$ в сигналах почечного кровотока для нормотензивных и гипертензивных крыс. Рассмотрены случаи динамики на микроскопическом уровне выносящей артериолы одиночного нефрона (рис. 6, *a* и 7, *a*) и макроуровне почечного кровотока в артерии (рис. 6, *б, в* и 7, *б, в*). На уровне артериол у нормотензивных крыс наблюдается сравнительно узкий пик распределения отношения частот в окрестности значения 5:1. Другие варианты (4:1, 6:1 и т.д.) также встречаются в экспериментальных записях, но не так часто. Отметим, что в данном случае мы можем говорить лишь о статистически наиболее вероятном отношении частот колебаний. Вопрос о возможном наличии синхронизации ритмов (особенно на макрокопическом уровне) требует отдельного изучения. Предварительные расчеты свидетельствуют о том, что возможные эффекты захвата частот ритмов часто фиксируются лишь на интервалах времени, меньших одного периода колебаний для ритма КГОС. Это не позволяет на данном этапе делать обоснованные выводы о синхронизации колебаний больших ансамблей нефронов. Для гипертензивных крыс (см. рис. 7, *a*) наблюдается значительно более широкое распределение величины $f_{\text{МК}}/f_{\text{КГОС}}$ с максимумом в окрест-

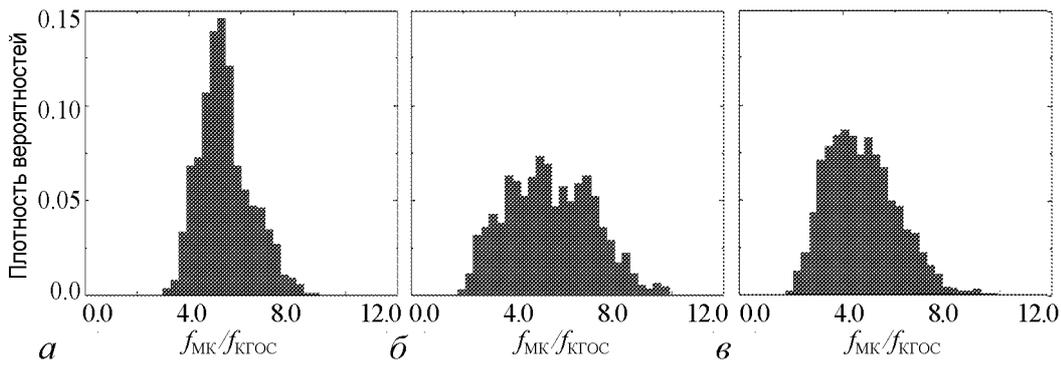


Рис. 6. Распределения отношений частот $f_{\text{МК}}/f_{\text{КГОС}}$ в сигналах почечного кровотока нормотензивных крыс на уровне одиночных нефронов (а) и на макрокопическом уровне левой почечной артерии в отсутствие (б) и при наличии (в) препарата L-name

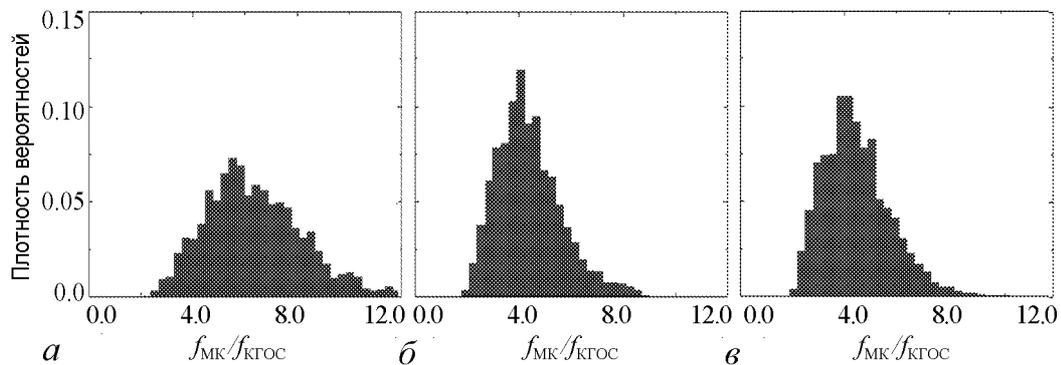


Рис. 7. Распределения отношений частот $f_{\text{МК}}/f_{\text{КГОС}}$ в сигналах почечного кровотока гипертензивных крыс на уровне одиночных нефронов (а) и на макрокопическом уровне левой почечной артерии в отсутствие (б) и при наличии (в) препарата L-name

ности отношения 5:1. Эти результаты находятся в хорошем соответствии с выводами работы [20], сделанными на основе анализа записей давления фильтрата в проксимальных канальцах. Небольшое отличие состоит лишь в том, что в последнем случае наблюдались более выраженные пики распределения в окрестности отношений 4:1 и 6:1, что, вероятно, объясняется меньшим уровнем шума в экспериментальных записях давления фильтрата (используемый в данной работе лазерный доплеровский метод приводит к более высокому уровню экспериментального шума, хотя имеет и некоторые преимущества, например, он позволяет наблюдать более выраженные миогенные колебания). Отметим, что динамика кровотока на уровне почечной артерии (при наличии шумового воздействия) демонстрирует существенно отличающиеся распределения величины $f_{\text{МК}}/f_{\text{КГОС}}$, и можно выделить несколько эффектов.

Для нормотензивных крыс. На уровне почечной артерии распределение становится значительно шире. При этом наблюдается динамика 3:1, которая не встречалась в сигналах индивидуальных нефронов, расположенных на поверхности почки. Увеличение ширины распределения на макрокопическом уровне всей почки может интерпретироваться как результат участия не только поверхностных нефронов, но и структурных элементов, расположенных внутри почки. Эти нефроны имеют анатомические и физиологические параметры, отличающиеся от поверхностных (на-

пример, более протяженные каналы). Как следствие, они могут демонстрировать колебательные процессы с немного отличающимися частотами. Внешнее шумовое воздействие на систему может также приводить к увеличению ширины распределения, поскольку флуктуации могут «переключать» систему из режима с одним фиксированным отношением частот $f_{\text{МК}}/f_{\text{КГОС}}$ в режим с другим отношением частот. Сопоставление рисунков 6, *a* и *в* показывает также, что максимум распределения смещается в область меньших значений $f_{\text{МК}}/f_{\text{КГОС}}$.

Чтобы количественно охарактеризовать данные изменения, рассмотрим характеристику степени упорядоченности динамики. С этой целью можно использовать параметр $\beta = 1 - H$, где $H = -\sum_{i=1}^n p_i \log_n p_i$ – энтропия Шеннона. Здесь p_i – вероятность обнаружения различных отношений частот, n – число различных состояний (в нашем случае $n = 40$). В случае равномерного распределения $H = 1$ и, следовательно, $\beta = 0$. Для распределения, демонстрирующего только одно состояние (если вероятность всех остальных равна нулю), $H = 0$, $\beta = 1$. Таким образом, чем больше β , тем более упорядоченным будет распределение. Для унимодальных распределений β позволяет получать информацию, которая часто коррелирует с шириной распределения. Однако при наличии нескольких максимумов не существует однозначной зависимости между величиной β и шириной распределения. Расчеты β демонстрируют, что динамика кровотока в почечной артерии является менее упорядоченной по сравнению с динамикой на микроуровне выносящей артериолы: β уменьшается от значения 0.28 (см. рис. 6, *a*) до 0.14 (см. рис. 6, *б*). Под влиянием L-паме эта характеристика увеличивается до $\beta = 0.2$ (см. рис. 6, *в*).

Для гипертензивных крыс. В отличие от случая нормотензивных крыс, ширина распределения величины $f_{\text{МК}}/f_{\text{КГОС}}$ на макроскопическом уровне почечного кровотока в артерии уменьшается, то есть наблюдается более упорядоченная динамика. Однако роль шума при этом является непонятной – вызван ли этот эффект синхронизацией в больших ансамблях нефронов, или мы наблюдаем индуцированное шумом более упорядоченное поведение? Этот вопрос требует отдельного исследования и проведения дополнительных экспериментов. Существенные изменения распределений можно количественно описать с помощью параметра β , который возрастает с 0.14 (см. рис. 7, *a*) до 0.25 (см. рис. 7, *б, в*). Таким образом, данный параметр увеличивается почти в 2 раза, в то время как для нормотензивных крыс наблюдались противоположные изменения (уменьшение в 2 раза).

Отметим, что длительность интервалов времени, в течение которых отношение частот $f_{\text{МК}}/f_{\text{КГОС}}$ принимает рациональные значения $k : 1$, не демонстрирует значительных изменений при переходе от микроскопического к макроскопическому уровню. Мы вычисляли соответствующие времена как интервалы, в течение которых отношение $f_{\text{МК}}/f_{\text{КГОС}}$ сохраняет рациональное значение $k : 1$ с погрешностью 5%. Рис. 8 показывает, что некоторые изменения происходят, но они являются весьма незначительными. В то же время меняется вероятность возникновения динамики с различными рациональными отношениями частот (табл. 2). Отметим, что на долю колебаний с кратным отношением частот приходится на каждом уровне кровотока от 20 до 40%, таким образом, 60–80% составляют колебания, для которых не выполняется подстройка ритмов. Наиболее сильные изменения при переходе от микро к макроуровню наблюдаются для отношения 3:1 и (в случае гипертензивных крыс) 4:1. Как уже отмечалось, динамика 3:1 практически не встречается на микро-

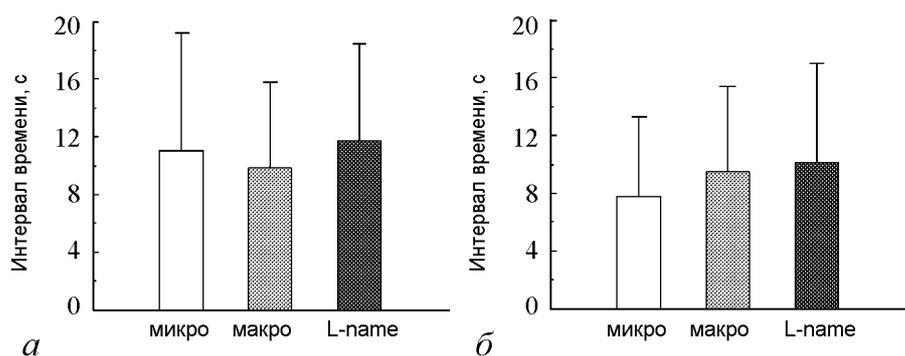


Рис. 8. Длительность временных интервалов с рациональными значениями $k : 1$ отношения частот $f_{\text{МК}}/f_{\text{КГОС}}$ для нормотензивных (а) и гипертензивных (б) крыс

пическом уровне отдельных нефронов, расположенных на поверхности почки, но наблюдается в экспериментальных данных почечного кровотока в артерии. Вероятность отношения частот 4:1 для гипертензивных крыс увеличивается более чем в 3 раза при переходе от микро- к макроскопическому уровню. Значительно (примерно в 2 раза) уменьшается вероятность отношения $f_{\text{МК}}/f_{\text{КГОС}}=5:1$ для нормотензивных крыс. Таким образом, можно сделать вывод о том, что переход от уровня кровотока в выносящей артериоле индивидуального нефрона к динамике в почечной артерии существенно меняет отношения частот ритмических процессов механизмов авторегуляции.

Рассмотрим теперь, какое влияние оказывает изменение уровня NO на нелинейное взаимодействие ритмов в форме модуляции миогенных колебаний механизмом КГОС. С этой целью можно воспользоваться техникой двойного вейвлет-анализа [27,28], которая позволяет определить, как мгновенная частота или амплитуда более быстрого колебательного процесса модулируется медленной динамикой. Для миогенных колебаний в модуляции могут участвовать как ритм, связанный с механизмом КГОС, так и более медленные процессы, включающие, в том числе, субгармоники базовой частоты ритма КГОС. Для исследования эффектов модуляции на-

Таблица 2

Вероятность динамики с различными рациональными отношениями частот $f_{\text{МК}}/f_{\text{КГОС}}$

Анализируемые данные	$f_{\text{МК}}/f_{\text{КГОС}}$				
	3 : 1	4 : 1	5 : 1	6 : 1	7 : 1
Вероятность, %					
<i>для нормотензивных крыс</i>					
микро	0	7	17	7	4
макро	5	8	9	6	5
L-name	7	11	10	6	2
<i>для гипертензивных крыс</i>					
микро	1	4	7	6	5
макро	9	14	8	4	2
L-name	9	14	10	4	2

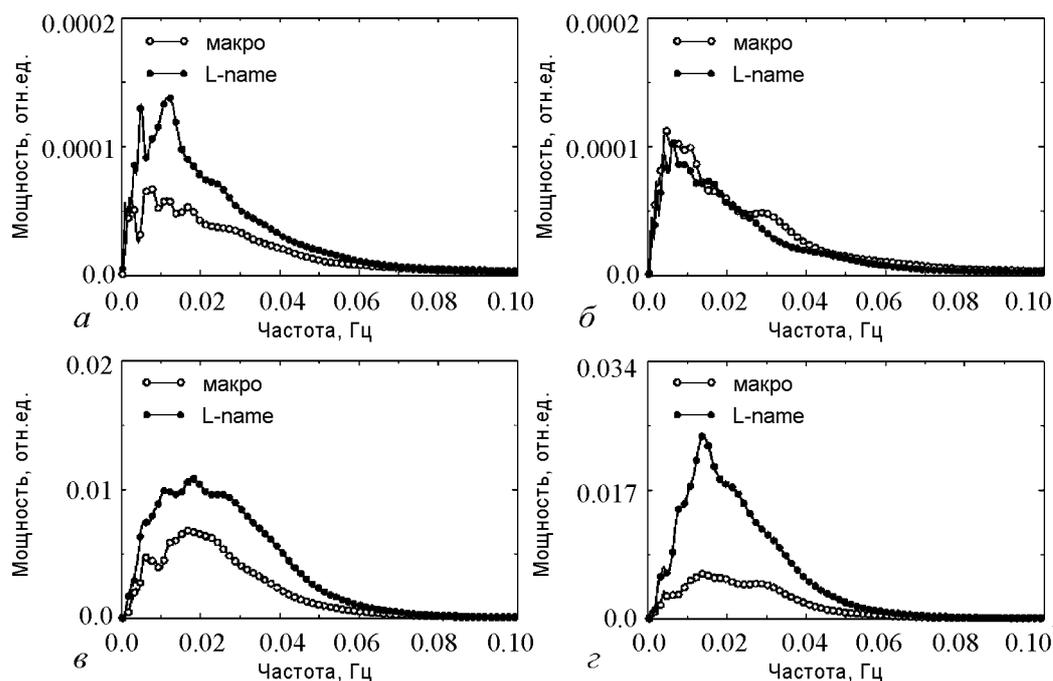


Рис. 9. Спектры мощности частотной (*a*, *б*) и амплитудной (*в*, *г*) модуляции миогенной динамики. *a*, *в* – для нормотензивных крыс, *б*, *г* – для гипертензивных крыс

ми проводилось повторное вейвлет-преобразование извлеченных мгновенных частот и амплитуд миогенной динамики. Применение такого подхода, рассмотренного в работах [25, 27], позволяет проанализировать изменение силы взаимодействия, а именно степени влияния более медленной динамики на миогенные колебания. На рис. 9 показаны спектры мощности частотной и амплитудной модуляции. За исключением случая частотной модуляции миогенных колебаний для гипертензивных крыс при уменьшении уровня NO под действием препарата L-name происходит заметное увеличение интенсивности модуляции. Для нормотензивных крыс (рис. 9, *a*, *в*) спектральная плотность мощности возрастает примерно в 2 раза как для амплитудной, так и для частотной модуляции. Для гипертензивных крыс (рис. 9, *б*, *г*) она возрастает только для амплитудной модуляции, но значительно сильнее (почти в 4 раза).

Заключение

Главная цель данной работы состояла в том, чтобы выявить изменения в механизмах почечной авторегуляции при переходе от микроскопического уровня – артериол к макроуровню – почечной артерии. С целью выявления ритмической динамики на макроуровне были рассмотрены эксперименты с внешним шумовым воздействием, влияющим на величину артериального давления. Выбор таких экспериментальных данных связан с тем, что ранее проводившиеся исследования [2, 18] показали возможность более четкого разделения ритмических компонент в присутствии флуктуаций, что позволяет лучше понять роль каждого механизма в авторегуляции кровотока. На основе вейвлет-анализа мы исследовали изменения мгновенных характеристик ритмических процессов – мгновенных частот и амплитуд колебаний и

отношения частот. Мы рассмотрели также влияние изменения уровня NO в крови на динамику ритмов и взаимодействие между КГОС и миогенным механизмом autoreгуляции. На основе вейвлет-анализа экспериментальных данных мы подтвердили, что воздействие L-name приводит к усилению ритмических процессов, в частности, происходит увеличение спектральной мощности в области миогенной динамики. Как нормотензивные, так и гипертензивные крысы демонстрируют при этом уменьшение динамической стабильности ритмических процессов.

В данной работе было впервые установлено наличие значительных изменений во взаимодействии ритмов при переходе от микроскопического уровня поверхностных нефронов к макроскопическому уровню всей почки. Для динамики почечного кровотока в артерии отношение частот $f_{МК}/f_{КГОС}$ смещается в область меньших значений, и при этом увеличивается вероятность рациональных отношений 3:1 и 4:1. Кроме того, наблюдаются различия в случае нормы и гипертонии. В наших экспериментах на макроскопическом уровне нормотензивные крысы демонстрировали эффект уменьшения степени упорядоченности динамики, тогда как для гипертензивных крыс, наоборот, наблюдалось более упорядоченное поведение взаимной динамики ритмов. Мы предполагаем, что этот эффект может быть вызван различиями механизмов синхронизации для больших ансамблей взаимодействующих элементов или быть следствием эффектов нетривиальной роли шума в динамике сложных систем [37,38]. Более детальный анализ отмеченных различий требует проведения специальной серии экспериментов с меняющейся интенсивностью внешнего шумового воздействия. Тем не менее можно констатировать, что изменения в распределениях, представленных на рис. 6 и 7, являются существенными. Под влиянием препарата L-name наблюдается более упорядоченная динамика для отношения частот $f_{МК}/f_{КГОС}$ (см. рис. 6, б, в), и для нормотензивных крыс происходит увеличение вероятности рационального отношения 4:1.

Мы также продемонстрировали изменение интенсивности модуляции миогенного ритма более медленными процессами. Спектральная плотность мощности модуляции возрастает при уменьшении уровня NO. Этот эффект наблюдается и для частотной, и для амплитудной модуляции в случае нормотензивных крыс и только для амплитудной модуляции в случае гипертензивных крыс. Изменение характеристик модуляции позволяет расширить существующие представления о взаимодействии ритмических процессов почечной autoreгуляции по сравнению с результатами недавних исследований в этой области [21,27].

Авторы выражают искреннюю признательность N.-H. Holstein-Rathlou и D.J. Marsh за предоставленные экспериментальные данные, а также E. Mosekilde за многочисленные дискуссии. Проводимые исследования поддержаны Министерством образования и науки РФ по программе «Развитие научного потенциала высшей школы (2006–2008 гг.)» и Германской службой академических обменов.

Библиографический список

1. Yip K.-P., Holstein-Rathlou N.-H. and Marsh D.J. Mechanisms of temporal variation in single-nephron blood flow in rats // Am. J. Physiol. 1993. Vol. 264. P. F427.
2. Daniels F.H., Arendshorst W.J., Roberds R.G. Tubuloglomerular feedback and autoregulation in spontaneously hypertensive rats//Am. J. Physiol. 1990. Vol.258. P.F1479.

3. Moore L.C. Tubuloglomerular feedback and SNGFR autoregulation in the rat // *Am. J. Physiol.* 1984. Vol. 247. P. F267.
4. Leyssac P.P. and Baumbach L. An oscillating intratubular pressure response to alterations in Henle loop flow in the rat kidney // *Acta Physiol. Scand.* 1983. Vol. 117. P. 415.
5. Leyssac P.P. and Holstein-Rathlou N.-H. Effects of various transport inhibitors on oscillating TGF pressure responses in the rat // *Pfluegers Arch.* 1986. Vol. 407. P. 285.
6. Holstein-Rathlou N.-H. and Leyssac P.P. TGF-mediated oscillations in the proximal intratubular pressure: differences between spontaneously hypertensive rats and Wistar-Kyoto rats // *Acta Physiol. Scand.* 1986. Vol. 126. P. 333.
7. Holstein-Rathlou N.-H. and Marsh D.J. Oscillations of tubular pressure, flow, and distal chloride concentration in rats // *Am. J. Physiol.* 1989. Vol. 256. P. F1007.
8. Jensen K.S, Mosekilde E. and Holstein-Rathlou N.-H. Self-sustained oscillations and chaotic behavior in kidney pressure regulation // *Mondes en Developement.* 1986. Vol. 54/55. P. 91.
9. Yip K.-P., Holstein-Rathlou N.-H. and Marsh D.J. Chaos in blood flow control in genetic and renovascular hypertensive rats // *Am. J. Physiol.* 1991. Vol. 261. P. F400.
10. Peng H., Matchkov V., Ivarsen A., Aalkjaer C., Nilsson H. Hypothesis for the initiation of vasomotion // *Circ. Res.* 2001. Vol. 88. P. 810.
11. Lamboley M., Schuster A., Bény J.L., Meister J.J. Recruitment of smooth muscle cells and arterial vasomotion // *Am. J. Physiol.* 2003. Vol. 285. P. H1156.
12. Savineau J.P. and Marthan R. Cytosolic calcium oscillations in smooth muscle cells // *News Physiol. Sci.* 2000. Vol. 15. P. 50.
13. Chon K.H., Chen Y.M., Marmarelis V.Z., Marsh D.J. and Holstein-Rathlou N.-H. Detection of interactions between myogenic and TGF mechanisms using nonlinear analysis // *Am. J. Physiol.* 1994. Vol. 267. P. F160.
14. Leyssac P.P. and Holstein-Rathlou N.-H. Tubulo-glomerular feedback response: enhancement in adult spontaneously hypertensive rats and effects of anaesthetics // *Pfluegers Arch.* 1989. Vol. 413. P. 267.
15. Holstein-Rathlou N.-H. and Marsh D.J. A dynamic model of the tubuloglomerular feedback mechanism // *Am. J. Physiol.* 1990. Vol. 258. P. F1448.
16. Layton H.E., Pitman E.B. and Moore L.C. Limit-cycle oscillations and tubuloglomerular feedback regulation of distal sodium delivery // *Am. J. Physiol.* 2000. Vol. 278. P. F287.
17. Sakai T., Hallman E. and Marsh D.J. Frequency domain analysis of renal autoregulation in the rat // *Am. J. Physiol.* 1986. Vol. 250. P. F364.
18. Holstein-Rathlou N.-H., Wagner A.J. and Marsh D.J. Tubuloglomerular feedback dynamics and renal blood flow autoregulation in rats // *Am. J. Physiol.* 1991. Vol. 260. P. F53.
19. Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E. and Holstein-Rathlou N.-H. Bimodal oscillations in nephron autoregulation // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 66. P. 061909.
20. Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E., Yip K.-P., Holstein-Rathlou N.-H. and Marsh D.J. Synchronization among mechanisms of renal autoregulation is reduced in hypertensive rats // *Am. J. Physiol.* 2007. Vol. 293. P. F1545.
21. Shi Y., Wang X., Chon K.H. and Cupples W.A. Tubuloglomerular feedback-dependent modulation of renal myogenic autoregulation by nitric oxide // *Am. J. Physiol.* 2006. Vol. 290. P. R982.

22. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. М.;Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
23. *Малла С.* Вэйвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005.
24. *Короновский А., Храмов А.* Непрерывный вейвлетный анализ. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2002.
25. *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H. and Marsh D.J.* Double-wavelet approach to study frequency and amplitude modulation in renal autoregulation // *Phys. Rev. E.* 2004. Vol. 70. P. 031915.
26. *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Brazhe N.A., Brazhe A.R., Erokhova L.A., Maksimov G.V., Mosekilde E.* Interference microscopy under double-wavelet analysis: A new tool to studying cell dynamics // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 94. P. 218103.
27. *Marsh D.J., Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Yip K.-P. and Holstein-Rathlou N.-H.* Frequency encoding in renal blood flow regulation // *Am. J. Physiol.* 2005. Vol. 288. P. R1160.
28. *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H. and Marsh D.J.* Double-wavelet approach to studying the modulation properties of nonstationary multimode dynamics // *Physiol. Meas.* 2005. Vol. 26. P. 351.
29. *Pavlov A.N., Makarov V.A., Mosekilde E., Sosnovtseva O.V.* Application of wavelet-based tools to study the dynamics of biological processes // *Briefings in Bioinformatics.* 2006. Vol. 7. P. 375.
30. *Kuramoto Y. and Nakao H.* Scaling properties in large assemblies of simple dynamical units driven by long-wave random forcing // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78. P. 4039.
31. *De Monte S., d'Ovidio F., Chaté H. and Mosekilde E.* Effects of microscopic disorder on the collective dynamics of globally coupled maps // *Physica D.* 2005. Vol. 205. P. 25.
32. *Holden A.V., Aslanidi O.V., Benson A.P., Clayton R.H., Halley G., Li P. and Tong W.C.* The virtual ventricular wall: A tool for exploring cardiac propagation and arrhythmogenesis // *J. Biol. Phys.* 2006. Vol. 32. P. 355.
33. *Pikovsky A., Rosenblum M. and Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2001.
34. *Glass L. and Mackey MC.* From Clocks to Chaos: The Rhythms of Life. New Jersey, Princeton University Press, 1988.
35. *Balanov A., Janson N., Postnov D., Sosnovtseva O.* Synchronization: From Simple to Complex. Springer: Berlin, Heidelberg, 2007.
36. *Tass P., Rosenblum M.G., Weule J., Kurths J., Pikovsky A., Volkman J., Schnitzler A. and Freund H.J.* Detection of $n : m$ phase locking from noisy data: application to magnetoencephalography // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 81. P. 3291.
37. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В.* Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999.
38. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2003.

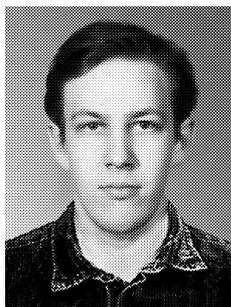
*Саратовский государственный
университет
Датский технический
университет*

*Поступила в редакцию 3.09.2007
После доработки 30.10.2007*

DYNAMICS OF RENAL BLOOD FLOW AT MICRO- AND MACROSCOPIC LEVELS

A.N. Pavlov, O.V. Sosnovtseva, A.A. Anisimov, O.N. Pavlova

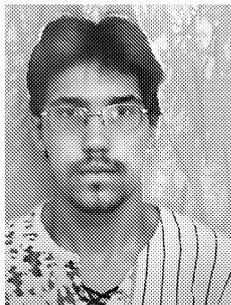
Changes in the dynamics of renal blood flow at the transition from the microscopic level of individual nephrons to the macroscopic level of the whole kidney are investigated. Rhythmic processes caused by the auto-regulatory mechanisms and their interactions in the form of synchronization and modulation are analyzed. Distinctions of the dynamics in the cases of normal and increased arterial pressure are discussed.



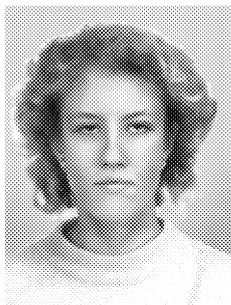
Павлов Алексей Николаевич – родился в Саратове (1973). Окончил физический факультет Саратовского университета по специальности радиофизика и электроника (1995). Кандидат физико-математических наук (1998). В настоящее время работает доцентом на кафедре радиофизики и нелинейной динамики. Область научных интересов: анализ временных рядов. Имеет более 60 работ, опубликованных в отечественной и зарубежной печати. E-mail: pavlov@chaos.ssu.runnet.ru



Сосновцева Ольга Владимировна родилась в 1966 году. Окончила физический факультет Саратовского университета (1989). Защитила кандидатскую диссертацию (1996). Неоднократно работала за рубежом: в Германии, Дании и Южной Корее. В настоящее время работает в Датском техническом университете (г. Люнбю). Научные интересы – явления самоорганизации в ансамблях нелинейных хаотических и стохастических систем; особенности синхронизации хаотической динамики и стохастических процессов, динамика биологических систем. Имеет около 70 публикаций в отечественной и зарубежной печати. E-mail: olga@fysik.dtu.dk



Анисимов Алексей Александрович – студент 5 курса кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ (специальность «биохимическая физика»). Область научных интересов: динамика биологических систем, анализ временных рядов.



Павлова Ольга Николаевна – студентка 5-го курса физического факультета Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (кафедра радиофизики и нелинейной динамики, специальность «биохимическая физика»). Область научных интересов – применение методов нелинейной динамики в исследованиях биологических систем. Имеет около 10 научных публикаций.



АВТОКОЛЕБАНИЯ ПРОВОДА, НАГРЕВАЕМОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ТОКОМ, С УЧЕТОМ ТЕНЗОРЕЗИСТИВНОГО ЭФФЕКТА

П.С. Ланда

Рассмотрен пример термомеханической системы, имеющий большое практическое значение. Эта система состоит из легкого металлического провода с грузом в середине, включенного в цепь переменного или постоянного тока. При определенных условиях груз и провод могут совершать автоколебания, имеющие довольно сложный характер. Практическое значение рассматриваемой задачи состоит в попытке объяснения явления раскачки проводов в линиях электропередачи даже в безветренную погоду. Для такого объяснения, прежде всего, необходимо исследование условий возбуждения автоколебаний в модели системы, подобной реальному проводу. Именно эта проблема решается в данной работе.

1. Исходные уравнения

Рассмотрим тонкий легкий металлический провод с грузом в середине, масса которого много больше массы провода. Приближенно такой провод будет изгибаться как невесомая струна. Геометрия такой струны, включенной в цепь переменного тока низкой частоты ω (такой, что выполняется условие квазистационарности), показана на рис. 1. Следует заметить, что в случае массы струны m , сравнимой с массой груза M , и (или) более высокой частоты геометрия была бы существенно более сложной, и систему следовало бы рассматривать как распределенную. При определенных условиях система, показанная на рис. 1, может совершать автоколебания как в вертикальной плоскости, так и вокруг оси O_1O_2 . Вертикальные колебания струны с грузом в схеме, подобной той, которая изображена на рис. 1, но содержащей дополнительно электромеханический прерыватель, были подробно изучены К.Ф. Теодорчиком в середине прошлого века [1, 2]. Рассмотрение вертикальных автоколебаний струны было проведено А.С. Вермелем [3],

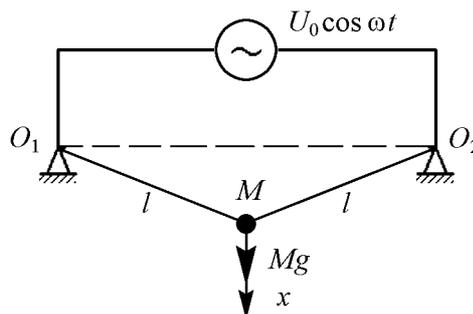


Рис. 1. Схематическое изображение натянутой металлической струны с грузом, включенной в цепь переменного тока частоты ω

а автоколебания вокруг оси O_1O_2 впервые были экспериментально обнаружены и исследованы Я.Б. Дубошинским и др. в 1971 г. [4].

Результаты детального теоретического исследования как вертикальных, так и вращательных автоколебаний изложены в [5,6]. Однако в этих работах рассмотрение указанных типов колебаний проводится отдельно, что является недостаточным для практических целей. Ниже будут приведены результаты совместного рассмотрения этих типов автоколебаний.

Уравнения автоколебаний можно получить исходя из функции Лагранжа \mathcal{L} и диссипативной функции \mathcal{D} . Введя обобщенные координаты r и φ , где r – расстояние от груза до оси O_1O_2 , находим

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{M}{2}\dot{r}^2 + \frac{Mr^2}{2}\dot{\varphi}^2 + \left(Mgr \cos \varphi - \int \frac{2F(r, \theta)r}{l} dr \right), \\ \mathcal{D} &= \frac{h_1\dot{r}^2}{2} + \frac{h_2r^2\dot{\varphi}^2}{2},\end{aligned}\quad (1)$$

где $l = \sqrt{r^2 + L^2}$ – половина длины струны при температуре $T = T_0 + \theta$, T_0 – температура окружающей среды, θ – изменение температуры за счет нагрева электрическим током, L – половина расстояния между опорами; $F(r, \theta)$ – сила натяжения струны, нагретой до температуры T ¹. Последняя равна

$$F(r, \theta) = ES \left(\frac{l - l_0(1 + \alpha\theta)}{l_0} \right), \quad (2)$$

где E – модуль Юнга; $S = \pi D^2/4$ – площадь поперечного сечения струны, D – диаметр струны; $l_0 = \sqrt{x_0^2 + L^2}$ – половина длины струны в ненатянутом состоянии при $\theta = 0$, x_0 – провисание струны в ненатянутом состоянии при $\theta = 0$; α – коэффициент линейного расширения струны. Далее будем считать, что x_0 настолько мало, что его можно положить примерно равным нулю. Тогда $l_0 \approx L$.

Принимая во внимание (2), из (9) получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - g \cos \varphi + \frac{2ES}{M} \left(\frac{l - L(1 + \alpha\theta)}{L} \right) \frac{r}{l} + 2\delta_1\dot{r} &= 0, \\ \ddot{\varphi} + \frac{2\dot{r}\dot{\varphi}}{r} + \frac{g}{r} \sin \varphi + 2\delta_2\dot{\varphi} &= 0,\end{aligned}\quad (3)$$

где $\delta_1 = h_1/(2M)$, $\delta_2 = h_2/(2M)$.

Уравнение для разности температур θ запишем в предположении, что охлаждение струны происходит по закону Ньютона с коэффициентом теплоотдачи q , являющимся функцией модулей скорости обтекания всех участков струны. Это возможно, если частота изменения скоростей невелика, так что можно предположить, что выполняется условие квазистационарности. Очевидно, что скорость обтекания участка струны, расположенного на расстоянии x от ее центра, равна

$$v(x, t) = \sqrt{h^2(x)\dot{\varphi}^2 + \dot{h}^2}, \quad (4)$$

где

$$h(x) = \frac{r}{l} x, \quad \dot{h} = \frac{x}{l} \left(1 - \frac{r^2}{l^2} \right) \dot{r}.$$

¹Предполагаем, что теплопроводность струны достаточно велика, так что за период колебаний температуры всех точек струны успевают стать одинаковыми.

Следовательно,

$$v(x, t) = \frac{x}{l} \sqrt{r^2 \dot{\varphi}^2 + \left(1 - \frac{r^2}{l^2}\right)^2 r^2}. \quad (5)$$

Таким образом, коэффициент теплоотдачи с учетом обтекания струны можно записать в виде

$$q(t) = \frac{1}{l} \int_0^l f(|v(x, t)|) dx, \quad (6)$$

где $f(0) \equiv q_0$ – коэффициент теплоотдачи при $v(x, t) \equiv 0$.

Предполагая, что груз теплоизолирован от струны, получаем следующее уравнение для разности температур θ :

$$mc\dot{\theta} = -q(t) \frac{S_0 l}{L} \theta + \frac{U_0^2}{R}, \quad (7)$$

где U_0 – эффективное напряжение источника питания, c – теплоемкость груза, R – электрическое сопротивление струны, $S_0 = \pi DL$ – площадь боковой поверхности ненатянутой струны. При нагревании струны и ее удлинении сопротивление R увеличивается², так что

$$R = R_0 \left(1 + \beta_1 \theta + \beta_2 \frac{l - L}{L}\right), \quad (8)$$

где β_1, β_2 – некоторые коэффициенты, причем коэффициент β_2 определяется материалом и геометрическими размерами провода [8], а коэффициент β_1 достаточно мал, так что членом $\beta_1 \theta$ пренебрегаем.

Обозначим стационарные значения переменных r и θ через r_0 и θ_0 и примем во внимание, что стационарное значение φ равно нулю. Из (3) и (7) следует, что уравнения стационарного состояния системы можно записать в виде

$$\frac{r_0^2 \beta_0 ES}{ML^3} = \omega_0^2, \quad \varphi_{\text{st}} = 0, \quad \theta_0 = \frac{U_0^2 L}{q_0 S_0 l_{\text{st}} R_{\text{st}}}, \quad (9)$$

где

$$l_{\text{st}} = \sqrt{r_0^2 + L^2}, \quad R_{\text{st}} = R_0 \left[1 + \beta_2 \left(\frac{l_{\text{st}}}{L} - 1\right)\right], \quad (10)$$

$$\beta_0 = \frac{2L^2}{r_0^2} \left(1 - \frac{L(1 + \alpha\theta_0)}{l_{\text{st}}}\right), \quad \omega_0 = \sqrt{g/r_0}.$$

2. Малые отклонения от стационарного состояния

Прежде всего рассмотрим поведение системы при малых отклонениях от стационарного состояния. Для этого введем новые переменные

$$\xi = \frac{r - r_0}{r_0}, \quad \vartheta = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_0} \quad (11)$$

²Изменение сопротивления при деформации называется тензорезистивным эффектом.

и примем во внимание, что $r_0 \ll L$, $\alpha\theta_0 \ll 1$ и $\beta_0 \approx 1 - \beta$, где

$$\beta = 2\alpha\theta_0 L^2 / r_0^2. \quad (12)$$

Заметим, что параметр β играет важную роль в возбуждении автоколебаний.

В этих переменных линеаризованные уравнения (3) и (7) принимают вид

$$\ddot{\xi} + 2\delta_1 \dot{\xi} + \Omega^2 \xi = \omega_0^2 k \vartheta, \quad \dot{\vartheta} + \gamma \vartheta = -a \gamma \xi, \quad \ddot{\varphi} + 2\delta_2 \dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (13)$$

где

$$\Omega \approx \omega_0 \sqrt{1 + \frac{2}{\beta_0}}, \quad k = \frac{\beta}{\beta_0}, \quad \gamma = \frac{q_0 S_0}{mc}, \quad a = \frac{(1 + \beta_2) r_0^2}{L^2}.$$

Отсюда видно, что в линейном приближении вращательные колебания груза не зависят от вертикальных колебаний и являются затухающими. Поэтому вращательные колебания не могут самовозбуждаться, но, как следует из дальнейшего, при выполнении условия резонанса, когда частота Ω близка к удвоенной частоте ω_0 , возможно параметрическое возбуждение этих колебаний при маленьком (порядка δ_2/ω_0) значении амплитуды колебаний переменной ξ . Вертикальные же колебания и колебания температуры, описываемые переменными ξ и ϑ , могут самовозбуждаться, если выполняется условие (см. [6])

$$ak > \frac{2\delta_1}{\omega_0^2} \left(\frac{\Omega^2}{\gamma} + 2\delta_1 + \gamma \right). \quad (14)$$

Отсюда видно, что самовозбуждение возможно даже в отсутствие тензорезистивного эффекта, так как в этом случае коэффициент a все равно отличен от нуля за счет увеличения теплоотдачи при удлинении провода. Заметим, что эта зависимость не была учтена в работах [3, 5, 6]. Из (7) следует, что механизмом самовозбуждения автоколебаний является не отрицательное трение, а инерционное взаимодействие между переменными ξ и ϑ (см. [6]). Для такого взаимодействия необходимо, чтобы параметр инерционности γ был меньше некоторого критического значения.

Правая часть неравенства (7) минимальна при $\gamma = \Omega$. При этом условие (7) принимает вид

$$ak > \frac{4\delta_1 \Omega}{\omega_0^2} \left(1 + \frac{\delta_1}{\Omega} \right). \quad (15)$$

Так как $\Omega \sim \omega_0$, условие (8) всегда выполняется при достаточно большой добротности системы.

Легко показать, что вблизи порога возбуждения переменные ξ и ϑ совершают почти гармонические колебания с частотой ω , где

$$\omega = \sqrt{\Omega^2 + 2\delta_1 \gamma} = \sqrt{\frac{\gamma(\Omega^2 + \omega_0^2 a k_{cr})}{\gamma + 2\delta_1}}, \quad (16)$$

$$k_{cr} = \frac{2\delta_1}{\omega_0^2 a} \left(\frac{\Omega^2}{\gamma} + 2\delta_1 + \gamma \right).$$

При малом коэффициенте затухания δ_1 и не очень большом значении γ частота ω близка к Ω .

Если же условие (7) не выполняется, но условие резонанса справедливо, то вся система может возбуждаться только жестко. При этом порог возбуждения будет существенно выше, чем в первом случае, который мы условно будем называть случаем мягкого возбуждения.

Заметим, что резонанс может иметь место, только если параметр β близок к значению $1/3$, то есть в небольшом диапазоне температур провода, зависящем от параметра r_0 . При выполнении этого условия $k \approx 0.5$ и $\beta_0 \approx 2/3$. В случае же, когда условие резонанса не выполняется, вращательные колебания могут возбуждаться только при большой амплитуде вертикальных колебаний. Этот случай можно исследовать только численно, потому что расчету он не поддается.

3. Конечные отклонения от стационарного состояния

Чтобы найти амплитуды автоколебаний и рассмотреть случай жесткого возбуждения системы, необходимо знать зависимость $q(t)$, а для этого необходимо знание функции $f(|v(x, t)|)$. Точное аналитическое выражение для этой функции неизвестно. В различных диапазонах скоростей эта функция может быть аппроксимирована разными формулами [9, 10]. При нулевой скорости обтекания в рассматриваемой нами системе теплоотдача обусловлена, в основном, конвективным переносом тепла и определяется числом Рэлея Ra . Большая часть имеющихся аппроксимаций зависимости q_0 от Ra относится к сравнительно большим значениям Ra ($Ra \geq 10^3$). При выбранных нами параметрах Ra меньше единицы. Из экспериментальных данных, приведенных в книге [10, гл. 7], следует, что в отсутствие обтекания число Нуссельта Nu_0 приблизительно равно 0.351113. Так как число Нуссельта связано с коэффициентом теплоотдачи q соотношением

$$Nu = \frac{qD}{\kappa}, \quad (17)$$

где D – диаметр провода и κ – коэффициент теплопроводности, то $q_0 \approx 0.351113\kappa/D$. (Для воздуха $\kappa \approx 0.031$ дж/(м·с·град) и $q_0 \approx (0.0121/D)$ дж/(м²·с·град); D измеряется в метрах).

Полная зависимость $f(|v(x, t)|)$ может быть найдена исходя из экспериментальных данных, приведенных в [10, гл. 10] и справедливых при $Re \geq 0.1$, где $Re = |v(x, t)|D/\nu$ – число Рейнольдса, ν – кинематическая вязкость воздуха. Принимая во внимание, что при $v = 0$ производная от q по v должна обращаться в нуль, и полагая, что при $Re \leq 0.1$ зависимость q от Re можно аппроксимировать параболой $q = q_0(1 + c_0 Re^2)$, из условия сшивания этой параболы с экспериментальными данными при $Re = 0.1$ находим $C_0 \approx 15.0563$.

В соответствии со сказанным и с данными, приведенными в книге [10], в различных диапазонах чисел Рейнольдса число Нуссельта $Nu = f(|v(x, t)r|)D/\kappa$ может быть аппроксимировано следующими формулами:

$$Nu = \begin{cases} Nu_0(1 + 15.0563Re^2) & \text{при } 0 \leq |Re| \leq 0.1, \\ 0.036197 - 0.0151621|Re| + 0.818618|Re|^{0.294252} & \text{при } 0.1 \leq |Re| \leq 1, \\ 0.337038 + 0.478723\sqrt{|Re|} & \text{при } 1 \leq |Re| \leq 100, \end{cases} \quad (18)$$

Отсюда видно, что при $|\text{Re}| \geq 1$ зависимость коэффициента теплопередачи от скорости обтекания провода определяется формулой

$$q = q_1 + q_2 \sqrt{|v|}, \quad (19)$$

где $q_1 = 0.337038\kappa/D$, $q_2 = 0.478723\kappa/\sqrt{D\nu}$. Именно такая формула при всех значениях v использовалась в работе [11], где колеблющаяся струна рассматривалась как выпрямитель переменного тока.

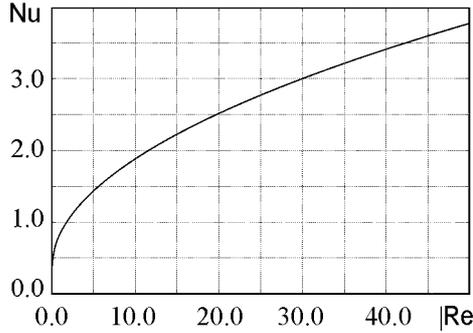


Рис. 2. Зависимость числа Нуссельта от числа Рейнольдса, построенная на основе аппроксимаций (18)

Заметим, что вычисленное таким образом q_1 оказывается несколько меньше, чем определенное раньше q_0 . Можно полагать, что разница определяется ошибками аппроксимации.

График зависимости числа Нуссельта Nu , построенный на основе аппроксимаций (10), приведен на рис. 2. За исключением маленького участка вблизи нуля, он довольно хорошо аппроксимируется формулой (19).

Рассмотрим теперь систему уравнений (3), (7) и перепишем ее в безраз-

мерных переменных ξ , φ и ϑ :

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + 2\delta_1 \dot{\xi} - (1 + \xi)\dot{\varphi}^2 + \omega_0^2(1 - \cos \varphi) + \Omega^2 \left(\xi + \frac{(3 + \xi)\xi^2}{3 - \beta} \right) &= \omega_0^2 k(1 + \xi)\vartheta, \\ \dot{\vartheta} &= -\frac{\overline{Nu}}{Nu_0} \frac{l}{L} \gamma(1 + \vartheta) + \frac{\gamma l_{st}}{L} \left(1 - \beta_2 \frac{r_0^2}{2L^2} \xi(2 + \xi) \right), \\ \ddot{\varphi} + \frac{2\xi\dot{\varphi}}{1 + \xi} + \frac{\omega_0^2}{1 + \xi} \sin \varphi + 2\delta_2 \dot{\varphi} &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \overline{Nu} &= \frac{1}{l} \int_0^l Nu(\text{Re}(x)) dx, \quad l = \sqrt{r_0^2(1 + \xi)^2 + L^2}, \\ \text{Re}(x) &= \frac{r_0 D x}{\nu l} \sqrt{\left[(1 + \xi)^2 \dot{\varphi}^2 + \left(1 - \frac{r_0^2(1 + \xi)^2}{l^2} \right)^2 \xi^2 \right]}. \end{aligned} \quad (21)$$

3.1. Случай мягкого возбуждения вертикальных колебаний. Резонансный режим. При рассмотрении указанного случая ограничимся малым затуханием и малым превышением коэффициента k над пороговым значением k_{cr} , когда $\delta_{1,2}/\omega_0 \sim k - k_{cr} \sim (\omega - 2\omega_0)/\omega \sim \varepsilon$, где ε – условный малый параметр, который в окончательных выражениях следует положить равным единице. В этом случае амплитуды колебаний будут малы. Принимая сказанное во внимание, разложим правые части уравнений (11) с учетом (21) в ряд по ε , полагая $r_0^2/L^2 \sim \alpha\theta_0 \sim \varepsilon$, и ограничимся членами порядка ε . В этом приближении можно положить

$$Nu(x) \approx Nu_0 \left(1 + 15.0563 \frac{D^2 v^2(x)}{\nu^2} \right), \quad (22)$$

где

$$v^2(x) \approx \frac{r_0^2 x^2}{l^2} (\dot{\varphi}^2 + \dot{\xi}^2).$$

Интегрируя по x , находим

$$\bar{N}u \approx Nu_0 \left(1 + \frac{d}{\omega_0^2} (\dot{\varphi}^2 + \dot{\xi}^2) \right), \quad (23)$$

где $d = 5.0154D^2 r_0^2 \omega_0^2 / v^2$.

В результате получаем следующие уравнения, справедливые при малых колебаниях:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + 2\delta_1 \dot{\xi} + \Omega^2 \xi - \omega_0^2 k_{cr} \vartheta &= \frac{\varepsilon}{4} \left(\omega^2 (k - k_{cr}) \vartheta - \frac{3\omega^2}{2} \xi^3 + 4\dot{\varphi}^2 - \omega^2 \varphi^2 \right), \\ \dot{\vartheta} + \gamma \vartheta + \gamma a \xi &= -\varepsilon \frac{4\gamma d}{\omega^2} (\dot{\varphi}^2 + \dot{\xi}^2), \\ \ddot{\varphi} + \frac{\omega^2}{4} \varphi &= \varepsilon \left[\frac{\omega^2}{2} \Delta \varphi - 2\delta_2 \dot{\varphi} + \frac{\omega^2}{4} \left(\frac{\varphi^2}{6} + \xi - \xi^2 \right) \varphi - 2\dot{\xi} \dot{\varphi} \right], \end{aligned} \quad (24)$$

где ω определяется выражением (16), $\Delta \approx \frac{\Omega}{2\omega_0} - 1$ – относительная расстройка частот.

Решение системы уравнений (24) можно приближенно искать методом Крылова–Боголюбова [12]. В качестве порождающих уравнений для системы (24) удобно взять следующие:

$$\ddot{\xi} + 2\delta_1 \dot{\xi} + \omega^2 \xi - \frac{\omega^2}{4} k_{cr} \vartheta = 0, \quad \dot{\vartheta} + \gamma \vartheta + \gamma a \xi = 0, \quad \ddot{\varphi} + \frac{\omega^2}{4} \varphi = 0. \quad (25)$$

Их решение может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \xi_0(t) = \frac{A_1}{2} (e^{i\psi_1} + e^{-i\psi_1}), \\ \vartheta(t) &= \vartheta_0(t) = -\frac{A_1}{2} \left(\frac{\gamma a}{\gamma + i\omega} e^{i\psi_1} + \frac{\gamma a}{\gamma - i\omega} e^{-i\psi_1} \right), \\ \varphi(t) &= \varphi_0(t) = \frac{A_2}{2} (e^{i\psi_2} + e^{-i\psi_2}), \end{aligned} \quad (26)$$

где $\psi_1 = \omega t + \Phi_1$, $\psi_2 = (\omega/2)t + \Phi_2$; A_1 , A_2 , Φ_1 и Φ_2 – произвольные постоянные.

Решение системы (24) ищем в виде рядов по степеням малого параметра ε

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \xi_0(t) + \varepsilon u_1(A_1, A_2, \psi_1, \psi_2) + \dots, \\ \vartheta(t) &= \vartheta_0(t) + \varepsilon u_2(A_1, A_2, \psi_1, \psi_2) + \dots, \\ \varphi(t) &= \varphi_0(t) + \varepsilon u_3(A_1, A_2, \psi_1, \psi_2) + \dots, \end{aligned} \quad (27)$$

где $A_{1,2}$ и $\Phi_{1,2}$ – медленно меняющиеся амплитуды и фазы, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{dA_{1,2}}{dt} &= \varepsilon f_{1,2}(A_1, A_2, \Phi_1, \Phi_2) + \dots, \\ \frac{d\Phi_{1,2}}{dt} &= \varepsilon F_{1,2}(A_1, A_2, \Phi_1, \Phi_2) + \dots, \end{aligned} \quad (28)$$

$f_{1,2}(A_1, A_2, \Phi_1, \Phi_2)$, $F_{1,2}(A_1, A_2, \Phi_1, \Phi_2)$, $u(A_1, A_2, \psi_1, \psi_2)$, $v(A_1, A_2, \psi_1, \psi_2)$ и $w(A_1, A_2, \psi_1, \psi_2)$ – неизвестные функции.

Вычислим производные $\dot{\xi}$, $\ddot{\xi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$ и $\ddot{\phi}$, исходя из выражений (26), (27), (28), и представим их в виде рядов по ε :

$$\begin{aligned} \dot{\xi} = & \frac{1}{2} \left[i\omega A_1 \left(e^{i\psi_1} - e^{-i\psi_1} \right) + \right. \\ & \left. + \varepsilon \left(\left(e^{i\psi_1} + e^{-i\psi_1} \right) f_1 + iA_1 \left(e^{i\psi_1} - e^{-i\psi_1} \right) F_1 + 2\omega \frac{\partial u_1}{\partial \psi_1} \right) + \dots \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} = & \frac{\omega}{2} \left[-\omega A_1 \left(e^{i\psi_1} + e^{-i\psi_1} \right) + \right. \\ & \left. + \varepsilon \left(i \left(e^{i\psi_1} - e^{-i\psi_1} \right) f_1 - A_1 \left(e^{i\psi_1} + e^{-i\psi_1} \right) F_1 + 2\omega \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi_1^2} \right) + \dots \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = & -\frac{1}{2} \left\{ i\omega A_1 \left(\frac{\gamma a}{\gamma + i\omega} e^{i\psi_1} - \frac{\gamma a}{\gamma - i\omega} e^{-i\psi_1} \right) + \varepsilon \left[\left(\frac{\gamma a}{\gamma + i\omega} e^{i\psi_1} + \frac{\gamma a}{\gamma - i\omega} e^{-i\psi_1} \right) f_1 + \right. \right. \\ & \left. \left. + iA_1 \left(\frac{\gamma a}{\gamma + i\omega} e^{i\psi_1} - \frac{\gamma a}{\gamma - i\omega} e^{-i\psi_1} \right) F_1 - 2\omega \frac{\partial u_2}{\partial \psi_1} \right] + \dots \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi} = & \frac{1}{2} \left[\frac{i\omega}{2} A_2 \left(e^{i\psi_2} - e^{-i\psi_2} \right) + \right. \\ & \left. + \varepsilon \left(\left(e^{i\psi_2} + e^{-i\psi_2} \right) f_2 + iA_2 \left(e^{i\psi_2} - e^{-i\psi_2} \right) F_2 + \omega \frac{\partial u_3}{\partial \psi_2} \right) + \dots \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} = & \frac{\omega}{4} \left[-\frac{\omega}{2} A_2 \left(e^{i\psi_2} + e^{-i\psi_2} \right) + \right. \\ & \left. + \varepsilon \left(i \left(e^{i\psi_2} - e^{-i\psi_2} \right) f_2 - A_2 \left(e^{i\psi_2} + e^{-i\psi_2} \right) F_2 + \omega \frac{\partial^2 u_3}{\partial \psi_2^2} \right) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Подставляя в правые части уравнений (24) порождающее решение (26), полагая $\omega_0 = \omega/2$ и приравнивая коэффициенты при ε , получаем уравнения для u_1 , u_2 и u_3 . Запишем эти уравнения только для составляющих функций u_1 и u_2 на частоте ω (мы обозначим эти составляющие U_1 и U_2), а для уравнения, содержащего функцию u_3 , запишем только условие отсутствия резонансных членов. Ограничиваясь членами порядка ε , получим

$$\begin{aligned} 2i\delta_1\omega U_1 - \frac{\omega^2 k_{\text{cr}}}{4} U_2 = & -2(\delta_1 + i\omega)(f_1 + iA_1 F_1) - \\ & - \frac{\omega^2}{4} (k - k_{\text{cr}}) \frac{\gamma a}{\gamma + i\omega} A_1 - \frac{9\omega^2}{32} A_1^3 - \frac{\omega^2}{4} A_2^2 e^{-i\Phi}, \end{aligned} \tag{29}$$

$$\gamma a U_1 + (\gamma + i\omega) U_2 = -\frac{\gamma a}{\gamma + i\omega} (f_1 + i A_1 F_1) + 2\gamma d A_2^2 e^{-i\Phi}, \quad (30)$$

$$f_2 + i A_2 F_2 = \left(-i\omega\Delta - 2\delta_2 + \frac{i\omega}{4} A_1 e^{i\Phi} \right) A_2,$$

где $\Phi = \Phi_1 - 2\Phi_2$.

Так как детерминант системы уравнений (29), определяющих U_1 и U_2 , равен нулю, одним из уравнений для функций f_1 и f_2 является условие совместности этой системы, приближенно имеющее вид

$$\begin{aligned} 2i\omega(\gamma + i\omega)(f_1 + i A_1 F_1) = \\ = -\frac{\omega^2}{4} \left[\gamma a (k - k_{cr}) A_1 + \frac{9(\gamma + i\omega)}{8} A_1^3 + (\gamma + i\omega - 2\gamma k_{cr} d) A_2^2 e^{-i\Phi} \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Это уравнение справедливо при $a \sim \delta_1 \sim \varepsilon$.

Уравнение (31) совместно с (30) позволяет записать уравнения для амплитуд и фаз колебаний в явном виде. Разделяя действительные и мнимые части, из (30), (31) находим

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 = \varepsilon \frac{\omega^2 \gamma}{4(\omega^2 + \gamma^2)} \times \\ \times \left\{ \left(a(k - k_{cr}) + \frac{9}{64} A_1^2 \right) A_1 - \left[2k_{cr} d \cos \Phi - \frac{\omega^2 + \gamma^2(1 - 2k_{cr} d)}{\omega \gamma} \sin \Phi \right] A_2^2 \right\}, \\ \dot{A}_2 = -\varepsilon \omega \left(\frac{2\delta_2}{\omega} + \frac{1}{4} A_1 \sin \Phi \right) A_2, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_1 = \frac{\varepsilon^2 \omega}{8(\gamma^2 + \omega^2)} \left\{ \gamma a (k - k_{cr}) + \frac{9(2\omega^2 + \gamma^2)}{32} A_1^2 + \right. \\ \left. + \left(\left[\gamma(1 - 2k_{cr} d) + \omega \right] \cos \Phi - \left[\omega(1 - 2k_{cr} d) - \gamma \right] \sin \Phi \right) \frac{A_2^2}{A_1} \right\}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\dot{\Phi}_2 = -\varepsilon \omega \left(\Delta - \frac{1}{4} A_1 \cos \Phi \right).$$

Из уравнений (32), (33) следует, что $A_1 \sim \varepsilon$ и $A_2 \sim \varepsilon^{3/2}$. Принимая это во внимание, видим, что $\dot{\Phi}_1 \sim \varepsilon^2$ и $\dot{\Phi}_2 \sim \varepsilon$, то есть $\dot{\Phi} \approx -2\dot{\Phi}_2$. Следовательно,

$$\dot{\Phi} \approx \varepsilon \omega \left(2\Delta - \frac{A_1}{2} \cos \Phi \right). \quad (34)$$

В стационарном режиме из второго уравнения (32) и уравнения (34) находим

$$\begin{aligned} \sin \Phi_{st} = -\frac{2\delta_2}{\sqrt{4\delta_2^2 + \omega^2 \Delta^2}}, \quad \cos \Phi_{st} = \frac{\omega \Delta}{\sqrt{4\delta_2^2 + \omega^2 \Delta^2}}, \\ A_{1st} = \frac{4\sqrt{4\delta_2^2 + \omega^2 \Delta^2}}{\omega}. \end{aligned} \quad (35)$$

Подставляя теперь (35) в первое уравнение (32), получаем

$$A_{2st}^2 = \frac{\gamma(4\delta_2^2 + \omega^2\Delta^2)(4\omega^2a(k - k_{cr}) + 9(4\delta_2^2 + \omega^2\Delta^2))}{2\omega^2[(\omega^2 + \gamma^2(1 - 2k_{cr}d))\delta_2 + \omega^2\gamma k_{cr}d\Delta]}. \quad (36)$$

Следует отметить, что в стационарном режиме частоты колебаний переменных ξ и φ отличаются от ω и $\omega/2$ на величины порядка ε^2 .

Исследуем теперь устойчивость найденного стационарного режима. Полагая $A_1 = A_{1st} + a_1$, $A_2 = A_{2st} + a_2$, $\Phi = \Phi_{st} + \phi$, где a_1 , a_2 и ϕ – малые отклонения от стационарного режима, запишем линеаризованные уравнения для этих отклонений

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= \frac{\omega^2\gamma}{4(\omega^2 + \gamma^2)}(b_1a_1 - b_2A_{2st}a_2 - b_3A_{2st}^2\phi) \\ \dot{a}_2 &= \omega A_{2st} \left(\frac{2\delta_2}{\sqrt{4\delta_2^2 + \omega^2\Delta^2}}a_1 - \Delta\phi \right), \\ \dot{\phi} &= - \left(\frac{\omega^2\Delta}{2\sqrt{4\delta_2^2 + \omega^2\Delta^2}}a_1 + 4\delta_2\phi \right), \end{aligned} \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} b_1 &= a(k - k_{cr}) + \frac{27(4\delta_2^2 + \omega^2\Delta^2)}{4\omega^2}, \\ b_2 &= \frac{4}{\sqrt{4\delta_2^2 + \omega^2\Delta^2}} \left(\frac{\delta_2(\omega^2 + \gamma^2(1 - 2k_{cr}d))}{\omega\gamma} + k_{cr}d\omega\Delta \right), \\ b_3 &= \frac{1}{\sqrt{4\delta_2^2 + \omega^2\Delta^2}} \left(4k_{cr}d\delta_2 - \frac{(\omega^2 + \gamma^2(1 - 2k_{cr}d))\Delta}{\gamma} \right). \end{aligned}$$

Отсюда находим характеристическое уравнение: $p^3 + c_1p^2 + c_2p + c_3 = 0$. С точностью до членов порядка ε коэффициенты c_1 , c_2 и c_3 равны:

$$\begin{aligned} c_1 &= 4\delta_2, \quad c_2 = \frac{\omega^2\gamma \left[4\delta_2(\omega b_2 A_{2st}^2 - 2b_1\sqrt{4\delta_2^2 + \omega^2\Delta^2}) - \omega^2 b_3 A_{2st}^2 \Delta \right]}{8(\omega^2 + \gamma^2)\sqrt{4\delta_2^2 + \omega^2\Delta^2}}, \\ c_3 &= \frac{\omega^3\gamma b_2 A_{2st}^2 (16\delta_2^2 + \omega^2\Delta^2)}{8(\omega^2 + \gamma^2)\sqrt{4\delta_2^2 + \omega^2\Delta^2}}. \end{aligned}$$

Известно, что необходимым (но не достаточным) условием устойчивости является положительность всех коэффициентов характеристического уравнения. Легко показать, что это условие выполняется при достаточно малых расстройках частот. Необходимым условием устойчивости является [6, 12]

$$c_1c_2 - c_3 \geq 0. \quad (38)$$

Это условие также выполняется при малых расстройках частот.

Таким образом, несмотря на то, что возбуждение вращательных колебаний происходит только после того, как амплитуда вертикальных колебаний достигает некоторого малого значения, режим установившихся колебаний с малыми амплитудами является устойчивым.

4. Жесткое возбуждение автоколебаний. Резонансный режим

Для исследования жесткого возбуждения, когда условие самовозбуждения вертикальных колебаний (7) не выполняется, рассмотрим систему уравнений (11), ограничиваясь нелинейными членами 3-й степени. При этом мы сможем вычислить только границу возбуждения, соответствующую неустойчивому предельному циклу.

Сохраняя только члены наименьшего порядка малости, уравнения (11) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} + 4\omega_0^2\xi &= \varepsilon\left(-2\delta_1\dot{\xi} - 8\omega_0^2\Delta\xi + \omega_0^2k\vartheta - \frac{3\omega_0^2}{2}\xi^3 + \dot{\varphi}^2 - \omega_0^2\varphi^2\right), \\ \dot{\vartheta} + \gamma\vartheta &= -\varepsilon\gamma\left(a\xi + \frac{d}{\omega_0^2}\left(\dot{\xi}^2 + \dot{\varphi}^2\right)\right), \\ \ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi &= \varepsilon\left(-2\delta_2\dot{\varphi} + \omega_0^2(1-\xi)\xi\varphi - 2\dot{\xi}\dot{\varphi} + \frac{\omega_0^2\varphi^3}{6}\right).\end{aligned}\tag{39}$$

Как и раньше, решение уравнений (39) будем искать методом Крылова–Боголюбова, полагая

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{A_1}{2}\left(e^{i\psi_1} + e^{-i\psi_1}\right) + \varepsilon u_1(A_1, A_2, \psi_1, \psi_2) + \dots, \\ \vartheta &= \varepsilon u_2(A_1, A_2, \psi_1, \psi_2) + \dots, \\ \varphi &= \frac{A_2}{2}\left(e^{i\psi_2} + e^{-i\psi_2}\right) + \varepsilon u_3(A_1, A_2, \psi_1, \psi_2) + \dots,\end{aligned}\tag{40}$$

где $\psi_1 = 2\omega_0 t + \Phi_1$; $\psi_2 = \omega_0 t + \Phi_2$; A_1 , A_2 , Φ_1 и Φ_2 – медленно меняющиеся амплитуды и фазы, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{dA_{1,2}}{dt} = \varepsilon f_{1,2}(A_1, A_2, \Phi_1, \Phi_2) + \dots, \quad \frac{d\Phi_{1,2}}{dt} = \varepsilon F_{1,2}(A_1, A_2, \Phi_1, \Phi_2) + \dots.\tag{41}$$

Вычислим производные $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$, $\dot{\xi}$, $\ddot{\xi}$ и $\dot{\vartheta}$, исходя из выражений (40), и представим их в

виде рядов по ε :

$$\begin{aligned} \dot{\xi} = & \frac{1}{2} \left[2i\omega_0 A_1 (e^{i\psi_1} - e^{-i\psi_1}) + \right. \\ & \left. + \varepsilon \left((e^{i\psi_1} + e^{-i\psi_1}) f_1 + iA_1 (e^{i\psi_1} - e^{-i\psi_1}) F_1 + 4\omega_0 \frac{\partial u_1}{\partial \psi_1} \right) + \dots \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} = & \frac{1}{2} \left[-4\omega_0^2 A_1 (e^{i\psi_1} + e^{-i\psi_1}) + \right. \\ & \left. + \varepsilon \left(2i\omega_0 (e^{i\psi_1} - e^{-i\psi_1}) f_1 - 2\omega_0 A_1 (e^{i\psi_1} + e^{-i\psi_1}) F_1 + 8\omega_0^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi_1^2} \right) + \dots \right], \end{aligned}$$

$$\dot{\vartheta} = \varepsilon \left(2\omega_0 \frac{\partial u_2}{\partial \psi_1} + \dots \right),$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} = & \frac{1}{2} \left[i\omega_0 A_2 (e^{i\psi_2} - e^{-i\psi_2}) + \right. \\ & \left. + \varepsilon \left((e^{i\psi_2} + e^{-i\psi_2}) f_2 + iA_2 (e^{i\psi_2} - e^{-i\psi_2}) F_2 + 2\omega_0 \frac{\partial u_2}{\partial \psi_2} \right) + \dots \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} = & \frac{1}{2} \left[-\omega_0^2 A_2 (e^{i\psi_2} + e^{-i\psi_2}) + \right. \\ & \left. + \varepsilon \left(i\omega_0 (e^{i\psi_2} - e^{-i\psi_2}) f_2 - \omega_0 A_2 (e^{i\psi_2} + e^{-i\psi_2}) F_2 + 2\omega_0^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi_2^2} \right) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Подставляя в правые части уравнений (39) порождающее решение и приравнявая коэффициенты при ε , из условий отсутствия резонансных членов находим уравнения для функций $f_1 + iA_1 F_1$ и $f_2 + iA_2 F_2$:

$$f_1 + iA_1 F_1 = -2\delta_1 A_1 + 4i\omega_0 \Delta A_1 + \frac{9\omega_0}{16} A_1^3 + \frac{i\omega_0}{2} A_2^2 e^{-i\Phi}, \quad (42)$$

$$f_2 + iA_2 F_2 = \left(-2\delta_2 + \frac{i\omega_0}{2} A_1 e^{i\Phi} + \frac{i\omega_0}{2} A_1^2 - \frac{i\omega_0}{8} A_2^2 \right) A_2, \quad (43)$$

где $\Phi = \Phi_1 - 2\Phi_2$.

Полагая $\vartheta = B(e^{i(\psi_1 + \Phi_3)} + e^{-i(\psi_1 + \Phi_3)})$, из второго уравнения (39) находим B и Φ_3 :

$$\begin{aligned} B = & \frac{\gamma}{2(\gamma^2 + 4\omega_0^2)} \sqrt{\gamma^2 \left(aA_1 - \frac{d}{2} A_2^2 \cos \Phi \right)^2 + \omega_0^2 d^2 A_2^4 \sin^2 \Phi}, \\ \tan \Phi_3 = & -\frac{2\omega_0 d A_2^2 \sin \Phi}{\gamma(2aA_1 - dA_2^2 \cos \Phi)}. \end{aligned} \quad (44)$$

Как будет видно из полученных далее результатов, $A_1 \sim A_2 \sim \varepsilon$. Учитывая это, из уравнений (42) получаем следующие уравнения для амплитуд A_1 , A_2 и фаз Φ_1 , Φ_2 и Φ :

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= \varepsilon \left(-2\delta_1 A_1 + \frac{\omega_0}{2} A_2^2 \sin \Phi \right), & \frac{dA_2}{dt} &= -\varepsilon \left(-2\delta_2 - \frac{\omega_0}{2} A_1 \sin \Phi \right), \\ \frac{d\Phi_1}{dt} &= 4\varepsilon\omega_0\Delta, & \frac{d\Phi_2}{dt} &= \frac{\varepsilon\omega_0}{2} A_1 \cos \Phi, & \frac{d\Phi}{dt} &= \varepsilon\omega_0(4\Delta - A_1 \cos \Phi). \end{aligned} \quad (45)$$

В стационарном режиме отсюда находим

$$\begin{aligned} \sin \Phi &= -\frac{\delta_2}{\sqrt{\delta_2^2 + \omega_0^2 \Delta^2}}, & \cos \Phi &= \frac{\omega_0 \Delta}{\sqrt{\delta_2^2 + \omega_0^2 \Delta^2}}, \\ A_1 &= 4\sqrt{\frac{\delta_2^2}{\omega_0^2} + \Delta^2}, & A_2 &= \sqrt{\frac{\delta_1}{\delta_2}} A_1. \end{aligned} \quad (46)$$

Найденные амплитуды A_1 и A_2 показывают наименьшие отклонения переменных ξ и φ , необходимые для возбуждения автоколебаний.

В заключение отметим, что из полученных результатов следует, что в рассматриваемой системе вращательные автоколебания возможны только в небольшом диапазоне соотношений между температурой и провисанием провода r_0 , определяемых параметром β (как уже указывалось, этот параметр должен быть близок к 1/3). В противном случае при выполнении условия (7) возможно возбуждение только вертикальных колебаний. Если же это условие не выполняется, то в отсутствие резонанса, когда β значительно отличается от 1/3, возбуждение автоколебаний, по-видимому, вообще невозможно.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 06-08-0025а

Библиографический список

1. Теодорчик К.Ф. Термомеханические автоколебательные системы // Радиотехника. 1937, № 6. С. 5.
2. Теодорчик К.Ф. Автоколебательные системы. Москва: Гостехиздат, 1952.
3. Вермель А.С. К вопросу о терморезистивных колебаниях // В сб. Некоторые вопросы возбуждения незатухающих колебаний. Владимир: Изд-во ВГПИ, 1974. С. 159.
4. Пеннер Д.И., Дубошинский Я.Б., Дубошинский Д.Б., Петросов В.А., Поротников А.А. Параметрические термомеханические колебания // В кн. Некоторые вопросы возбуждения незатухающих колебаний. Владимир: Изд-во ВГПИ, 1974. С. 168.
5. Ланда П.С., Дубошинский Я.Б. Автоколебательные системы с высокочастотными источниками энергии // УФН. 1989. Т. 158. Вып. 4. С. 729.
6. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1965.

8. Физическая энциклопедия. М.: Научное изд-во «Большая Российская энциклопедия», 1998. Т. 5. С. 70.
9. *Hilpert R.* // Forsch. Gebiete Ingenieurw. 1933. Vol. 4. P. 215.
10. *Мак-Адамс В.Х.* Теплопередача. Металлургиздат, 1961. 1954.
11. *Бакман М.Е., Теодорчик К.Ф.* Выпрямление переменного тока колеблющейся тонкой струной // ЖТФ. 1936. Т. 6. Вып. 2. С. 298.
12. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980.

*Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова*

*Поступила в редакцию 27.11.2007
После доработки 26.12.2007*

**SELF-OSCILLATION OF WIRE,
HEATING BY ELECTRIC CURRENT, WITH THE
STRAIN-RESISTIVE EFFECT TAKING INTO ACCOUNT**

P.S. Landa

On purpose to explain the wire swinging phenomenon in electro-transmission lines the investigation of the self-oscillations in a real-like model of a thermo-mechanical system is performed.



Ланда Полина Соломоновна – родилась в 1931 году в Киеве, окончила физический факультет МГУ в 1953 году. С 1956 года работает на физическом факультете МГУ. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1959) и доктора физико-математических наук в Горьковском госуниверситете (1972) в области теории колебаний и волн. Профессор, ведущий сотрудник МГУ. Область научных интересов – теория колебаний и волн, радиофизика, применение методов нелинейной динамики в различных областях науки. Автор и соавтор пяти монографий по колебаниям и волнам, в том числе монографии «Стохастические и хаотические колебания», переведенной на английский язык, а также монографии «Нелинейные колебания и волны в динамических системах», вышедшей в издательстве «Kluwer» (Голландия). Член Национального комитета по механике (Россия). Опубликовала много научных статей по направлениям, указанным выше. Член редакционной коллегии журналов «Chaos, Solitons and Fractals» и «Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика».
E-mail:landa@phys.msu.su



ДВЕ ТЫСЯЧИ СЕДЬМОЙ ГОД В ДАТАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

Д.И. Трубецков

Время – друг великих сочинений
И смертельный враг плохих.
Там поймешь, кто гений, кто не гений,
Где давно не будет нас в живых.

Александр Кушнер

Уважаемый читатель! Вашему вниманию предлагается материал лекций, частично прочитанных на Международной школе-семинаре «Хаотические автоколебания и образование структур (ХАОС-2007)» и на традиционной школе «Нелинейные дни в Саратове для молодых», прошедших в октябре 2007 года в Саратове. Лекции о Леонардо да Винчи вошли также в курс 2007–2008 учебного года «История и методология науки» для шестикурсников-магистрантов факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Сохранен, как продолжающий жанр, эпиграф к предыдущим публикациям¹. Выбор событий и героев, а также число выделенных дат, по-прежнему, на совести автора. Сохранена и стилистика предыдущих публикаций.

Итак, чем интересен для любящих науку читателей 2007 год?

¹Трубецков Д.И. Две тысячи четвертый год в датах нелинейной динамики // Изв. вузов. ПНД. 2005. Т. 13, № 1–2. С. 152; Трубецков Д.И. Две тысячи пятый год в датах нелинейной динамики // Изв. вузов. ПНД. 2006. Т. 14, № 1. С. 120; Трубецков Д.И. Синхронизация: ученый и время. Лекции на школах «Нелинейные дни в Саратове для молодых». Вып. 2. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2006, 112 с.; Трубецков Д.И. Две тысячи шестой год в датах нелинейной динамики // Изв. вузов. ПНД. 2007. Т. 15, № 1. С. 103; № 2. С. 92; № 3. С. 107; Трубецков Д.И. Даниил Семенович Данин и его кентавростика. Лекции. Вып. 3. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2007, 108 с.

*Памяти друга,
Юлия Александровича Данилова*

Леонардо да Винчи как нелинейное явление

В конце 1950-х британский ученый Ч.П. Сноу прочел доклад в Кембриджском университете, в котором сопоставил две несоизмеримые культуры: одну представляли интеллектуалы среди гуманитариев (включая художников и писателей), другую – интеллектуалы среди ученых (естественные науки и математика). Сноу заявил, что связи между этими двумя группами были в лучшем случае натянутыми, а в худшем не существовали вовсе. В начале XXI века мы все еще обсуждаем пропасть, разделяющую эти две культуры Сноу...

...У Леонардо, образцового художника-ученого-инженера, удивительное разнообразие интересов напоминает узоры великолепного гобелена. Раскрытие внутренних связей между различными интересами стало основой его поисков, постоянным экспериментированием, его методом. В любом случае, занимаясь наукой, инженерными расчетами или время от времени искусством, он работал как настоящий ученый. Это было взаимным обогащением идей, интеграцией их в единое целое, которое приводило ко многим удивительным открытиям. Единство науки и искусства, их взаимное дополнение и составляет модель Леонардо.

Спустя пятьсот пятьдесят лет после его рождения мы используем модель Леонардо, чтобы снова найти точки соприкосновения между наукой и искусством – в живописи, архитектуре, скульптуре, музыке, математике, физике, биологии и инженерном искусстве – и восстановить разорванные связи между культурами.

Аталай Бюлент [1, с. 13–15]

У Юлия Александровича Данилова есть замечательное эссе «Льюис Кэрролл как нелинейное явление» [2]. Несомненно, что Леонардо да Винчи следует трактовать так же.

Как указывает Данилов, поведение любой сложной системы (особенно такой сверхнеобычной, как Леонардо да Винчи) интересно вблизи ее особых точек.

И начинать надо с $t = 0$, то есть с момента рождения. 555 лет назад 15 апреля 1452 года в селении Анкиано около городка Винчи между Флоренцией и Пизой родился мальчик, которому при крещении было дано имя Леонардо.

Дата рождения установлена на основании документа, найденного сравнительно недавно в одном из архивов Флоренции. В дневнике деда Леонардо, Антонио да Винчи, есть следующая запись:

«1452 года родился у меня внук от сера² Пьеро, моего сына, 15 апреля, в субботу, в 3 часа ночи³. Получил имя Леонардо...»

²В Италии нотариусы, и только они, имели титул «сера». Не следует путать с английским «сэр».

³Отсчет ночных часов велся от захода Солнца, поэтому время рождения соответствует примерно 22 ч. 30 мин. 14 апреля.

Леонардо был незаконнорожденным ребенком. Его отец, Пьеро да Винчи был нотариусом синьории во Флоренции. Когда родился Леонардо, отцу было 25 лет. Семья отца принадлежала к среднему классу. В его роду (уходящем корнями в XIII век) были нотариусы, судьи, послы. Леонардо называли «Леонардо ди сер Пьеро да Винчи», что значит «сын Пьеро». Такое обращение указывало на аристократическое, благородное происхождение.

О матери Леонардо сведений мало, поэтому много домыслов. Предположительно, ее имя – Катерина. Некоторые исследователи полагают, что она была «хороших кровей», то есть происходила из хорошей семьи. Другие считают ее скромной дочерью дровосека или крестьянина. Третьи полагают даже, что она была рабыней, родившейся на среднем Востоке, приняла христианство, но так и не получила фамилии. Есть и еще одна, правдоподобная версия: Катерина служила в доме Пьеро.

Записки родственников⁴ Леонардо позволяют считать, что первые несколько лет жизни он жил вместе со своей матерью. Но потом Катерина вышла замуж (за гончара или пастуха; в разных источниках разные указания), переехав в соседнее селение, поэтому Леонардо отправили в дом его отца, который к тому времени был женат. Женится Пьеро спустя несколько месяцев после рождения Леонардо на шестнадцатилетней девушке из состоятельной семьи, Альбиере ди Джованни Амадори. Альбиера стала для Леонардо доброй мачехой. К сожалению, в 1464 году она умерла при родах. Впоследствии отец Леонардо был женат еще трижды, и у него было 12 детей. Таким образом, детство Леонардо было не совсем обычным: у него были неженатые родители, никогда не жившие вместе; у него было несколько мачех, множество единокровных сестер и братьев⁵. Может быть, именно такое разнообразие начальных условий для сложной системы по имени Леонардо и определило ее удивительную эволюцию во времени?⁶

Образованием Леонардо, скорее всего, занималась мачеха, Альбиера. Судя все по тем же записям, он изучал геометрию и письмо, хотя больше всего его интересовала окружающая природа. Леонардо да Винчи не мог учиться латыни и всю жизнь называл себя *uomo senza lettere*, что значит «человек неученый». Чтобы читать классические произведения, а также проверить некоторые предположения древних греков и римлян об искусстве, науке и жизни, Леонардо уже в зрелом возрасте самостоятельно выучил латынь.

Леонардо да Винчи был левшой и писал левой рукой справа налево. В его времена на левшей смотрели как на дьявольское отродье, и часто родители насильно заставляли таких детей пользоваться правой рукой. Леонардо научился одинаково хорошо пользоваться обеими руками. У некоторых историков существует мнение, что

⁴Записки составлены дедом Леонардо, его мачехой – донной Альбиерой и его отцом, Пьеро. Конечно, никто не может ни подтвердить, ни опровергнуть достоверность этих записок. В записях указано, в частности, что, когда Леонардо было 5 лет, он жил со своими бабушкой и дедушкой в Анкиано.

⁵Существует версия, что большую часть детства Леонардо провел рядом с младшим братом отца, Франческо.

⁶В книге [3] (мы еще вернемся к ней) в качестве ключевой категории ренессансной культуры вводится понятие «разнообразия» (*varietà* или *diversità*). Любопытен в этом плане и эпиграф к главе «Гуманистическое понятие природного «разнообразия» (варьета)»: «Природные различия оказываются такими и столькими, что божественное провидение... выглядит эпикурейским, раз оно захотело создать и уготовить людям все эти разнообразные и исполненные приятности роды живых существ и неодушевленных вещей...» (Джаноццо Манетти). Вторая часть книги носит название «Воплощенная варьета: Леонардо да Винчи» с эпиграфами: «Легко для того, кто умеет, сделаться универсальным» (Леонардо да Винчи) и «Все совершенное в своем роде должно выйти за пределы своего рода» (Гёте).

он использовал зеркальное письмо, чтобы сохранить написанное в секрете. Конечно, для прочтения можно было использовать зеркало, но Леонардо применял необычное написание букв и множество сокращений, поэтому суть текста все равно было трудно понять. Многие из своих изобретений он хотел скрыть от непосвященных, были у него и идеи, противоречащие учению Римско-католической церкви, например, о происхождении Земли, которые стоило скрывать. Любопытно, что письма и официальные документы он писал как обычно. То, что он был левшой, помогает подтвердить авторство картин Леонардо: на рисунках он выполнял штриховку слева направо (левше так удобнее), в то время как правша выполнял бы штриховку справа налево. Какими бы ни были причины зеркального письма Леонардо, он серьезно усложнил работу своих будущих исследователей.

Но вернемся к начальным условиям – к незаконному рождению гения. Положение незаконнорожденных детей в Италии XV века было двояким. С одной стороны, бастарды – незаконнорожденные дети – жили и воспитывались вместе с законнорожденными детьми и, более того, получали одинаковые с ними права на наследство и титулы. Но с другой стороны, бастарды не имели права занимать определенные должности, а главное, что им было отказано во вступлении в определенные гильдии. Леонардо не мог получить профессию и сделать карьеру, требующую официального университетского образования: он не мог стать медиком, юристом и, конечно, нотариусом вслед за отцом. Он мог заняться искусством, литературой, даже пойти в армию – многие кондотьеры, или наемники, были незаконнорожденными.

Нужно было выбирать профессию. Вот, что пишет по этому поводу Джорджо Вазари⁷: Леонардо, «...предаваясь разным занятиям, никогда не оставлял рисования и лепки, более всего волновавших его воображение. Видя это и принимая в соображение возвышенность его духа, Пьеро взял однажды несколько рисунков сына, отнес их Андреа Верроккьо, который был его большим другом, и убедительно просил сказать, достигнет ли Леонардо успехов, если предастся рисованию. Изумился Андреа, увидев великие достоинства первых опытов Леонардо, и укрепил Пьеро в мысли посвятить его живописи. Тогда Пьеро распорядился, чтобы Леонардо поступил в мастерскую Андреа, Леонардо исполнил это с особенною охотою и стал упражняться не только в одной этой профессии, но во всем, что имело отношение к рисованию» [4, с. 178].

Леонардо начал учиться и работать у мастера, великого флорентийского скульптора Андреа ди Чоне, названного Верроккьо (по прозвищу Правдивый глаз). Случилось это примерно в 1468 году, когда сер Пьеро перевез свою семью из Винчи во Флоренцию, ставшую в те времена культурным центром Италии – настоящим домом для художников, скульпторов, архитекторов и инженеров.

В книге Вазари описаны два эпизода из жизни Леонардо того времени. Испытывая способности Леонардо, Верроккьо предложил ему нарисовать ангела и пейзаж на заднем плане в картине «Крещение Иисуса». «...Леонардо написал ангела, держащего одежды. И хотя он был совсем юн, он сделал это с таким совершенством, что ангел оказался гораздо лучше, чем фигуры, написанные Андреа. Это обстоятельство явилось причиною того, что Андреа не хотел больше прикасаться к краскам, считая обидным для себя уступить в искусстве мальчику» [4, с. 181].

⁷ Джорджо Вазари (1511–1574) – флорентийский художник, архитектор, историк – по заказу римского кардинала написал книгу «Жизнеописания наиболее знаменитых живописцев, ваятелей и зодчих», опубликованную в 1550 году с посвящением великому князю Козимо Медичи. В этой книге собрано почти все, что известно сегодня о художниках Ренессанса.

Второй эпизод Вазари описывает так. Позволим себе длинную цитату.

«Говорят, что однажды, когда Пьеро да Винчи находился за городом, один поселянин обратился к нему с дружескою просьбой расписать ему круглый щит, приготовленный им из фигового дерева, срезанного на его земле. Пьеро с удовольствием взялся исполнить его просьбу, ибо этот крестьянин был большой мастер в охоте на птиц и в ужение рыбы, и Пьеро широко пользовался его услугами в этом отношении. Он отвез щит во Флоренцию и, ничего не говоря о его происхождении, попросил Леонардо что-нибудь написать на нем... Леонардо собрал в своей комнате, куда никто, кроме него, не входил, хамелеонов, ящериц, сверчков, змей, бабочек, омаров, летучих мышей и другие странные разновидности этих животных. Из всего этого множества животных, сложно скомбинированных, он составил одно чудовище в высшей степени ужасное и страшное, которое выдыхало на лету отраву и наполняло воздух пламенем. Это животное он изобразил вылетающим из темной расщелины скалы. Из открытой пасти его разливался яд, из глаз вылетал огонь, а из ноздрей дым столь удивительным образом, что все это представлялось в самом деле чем-то чудовищным и страшным...

Однажды утром Пьеро пошел за щитом и постучался в комнату, причем Леонардо, приотворив дверь, сказал ему, чтобы он немного обождал. Возвратившись в комнату, Леонардо приспособил щит на мольберте так, чтобы из окна падал на него слабый свет, а потом пустил отца посмотреть на него. Пьеро, при первом же взгляде, не понимая, в чем дело, внезапно отшатнулся от него, не веря, что перед ним щит, и менее всего допуская, что он видит перед собою живописное изображение. Леонардо подошел к нему сзади и, удерживая его, сказал: «Эта вещь отвечает своему назначению, возьмите ее и отнесите, потому что это именно и есть ожидаемый результат работы». Пьеро нашел эту вещь более чем удивительной и осыпал похвалами причудливый замысел Леонардо. Потом, тайно купив у торговца другой щит с изображением сердца, пронзенного стрелой, отдал его поселянину, который остался ему благодарен на всю жизнь. Вслед за тем Пьеро тайно продал расписанный Леонардо щит во Флоренцию каким-то купцам за сто дукатов, а через короткое время щит попал в руки герцога Миланского, перепроданный ему за триста дукатов» [4, с. 182–184].

Будем далее следовать хронологии жизни Леонардо да Винчи.

1472 Когда Леонардо было 20 лет, предположительно окончилось его официальное обучение у Верроккьо. Вступив в гильдию художников «Общество Святого Луки», он становится независимым художником и получает определенное признание. По видимому, он оставался у Верроккьо еще четыре года, работая в его мастерской и продолжая жить в его доме. Именно в это время он ассистирует своему учителю при написании картины «Крещение Христа», о чем уже упоминалось. В этом же году Леонардо начинает работу над картиной «Благовещение» (1472–1475).

1473 Леонардо пишет работу «Пейзаж долины реки Арно», дата написания которой доподлинно известна.

1476–1478 По некоторым данным, в это время Леонардо основал собственную мастерскую, но у него были достаточно сильные конкуренты (Андреа дель Верроккьо, Сандро Боттичелли и другие).

Однако 1476 год был омрачен обвинением Леонардо в гомосексуальной связи с подростком Джакапо Салтарелли, который был то ли подмастерьем, то ли учеником. Леонардо был заключен под стражу, где находился в течение примерно двух месяцев. В конце концов, из-за отсутствия доказательств вины был оправдан.

Вопрос о сексуальной ориентации Леонардо неоднократно обсуждался историками, что породило много домыслов и теорий. Этот вопрос изучал даже Зигмунд Фрейд в своей книге «Леонардо да Винчи» [5].

1478–1483 В этот период своей жизни во Флоренции Леонардо да Винчи выполнил несколько заказов, опираясь на рекомендации и помощь отца, среди них следующие работы.

«Мадонна с цветком» (эту картину называют также «Мадонна с гвоздикой», «Мюнхенская мадонна»). Хранится в Эрмитаже (Санкт-Петербург).

Роспись алтаря капеллы Св. Бернарда в Палаццо Веккью в здании правительства Флорентийской республики – первый крупный заказ, который он так и не закончил. Начала проявляться странность Леонардо – нежелание доводить работу до конца, что закрепило за ним репутацию ненадежного и чудаковатого художника.

«Святой Иероним». Леонардо не закончил и эту картину, отправившись в Милан. Работает над картиной «Мадонна Бенуа».

«Поклонение волхвов» – сцена с волхвами для церкви Сан Донато Скопето вблизи Флоренции. И эта картина не была завершена. В ней Леонардо впервые был использован метод пирамидального построения композиции и «золотое сечение» (золотая пропорция).

1482 Леонардо да Винчи пишет письмо правителю Милана Лодовико Сфорца – известному меценату, с которым познакомился еще во Флоренции, и предлагает свои услуги как военный инженер, поскольку Италия была на грани войны. Он предлагает герцогу список своих проектов в военной сфере.

1) Проекты мортир и легкого оружия (заряжаемый с дула арбалет с предохранителем; 33-ствольное ружье, смонтированное на вращающейся раме, способное одновременно выпускать 11 пуль – прообраз пулемета и др.).

2) Проекты катапульта и другого оружия для ситуаций, когда пушки неприменимы.

3) Проекты бронированных машин (танков) и пушек. В упомянутом письме Леонардо пишет следующее: «Я могу изготовить железные машины, безопасные и неприступные, которые войдут в сомкнутые ряды противника, вооруженного артиллерией, и нет такой силы, которая противостояла бы моим машинам. Пехота за ними получит возможность следовать почти невредимой и не встречая сопротивления».

4) Планы легких, прочных и не поддающихся разрушению мостов.

5) Способ слить воду из защитного рва; проекты стенобитных орудий и лестниц для преодоления препятствий.

6) Планы разрушения не каменных крепостей.

7) Планы создания кораблей для атакующих и оборонительных сражений на море.

8) Секрет перемещения под водой. Подводная лодка Леонардо представляла собой баллон, в котором располагался один человек; она не могла полностью погружаться в воду, но могла потопить другие корабли, протаранив их.⁸

9) Боевые повозки – колесницы-косилки.

В последнем, десятом пункте своего письма Леонардо писал: «Во времена мира считаю себя способным никому не уступить как архитектор в проектировании зданий и общественных и частных, и в проведении воды из одного места в другое. Также буду исполнять скульптуры из мрамора, бронзы и глины. Сходно и в живописи – все, что только можно, чтобы поравняться с всяким другим, кто бы он ни был».

⁸В своем романе «Двадцать тысяч лье под водой» Жюль Верн описал субмарину, которая довольно точно напоминала подводную лодку Леонардо да Винчи.

1483–1499 Леонардо да Винчи переселяется в Милан и начинается богатый творческими событиями миланский период его жизни. Леонардо зачислен в состав коллегии инженеров герцога Лодовико Сфорца и выступает в Милане как военный инженер, архитектор, гидротехник, скульптор, живописец. Интересно, что в официальных документах он именуется сначала «инженером», а потом – «художником».

Приблизительно в это же время он начинает работу над картинами «Дама с горностаем» и «Мадонна в скалах». Вместе с братьями Предис Леонардо получил заказ на роспись алтаря часовни Иммаколата в церкви Сан-Франческо Гранде в Милане.

Но вскоре после переезда Леонардо в Милан герцог начинает вместо применения военной силы вести переговоры с оппонентами, поэтому Леонардо как военный инженер в данный момент ему не нужен. Лодовико Моро Сфорца между 1487 и 1490 годами дает Леонардо да Винчи высокое звание придворного художника. Леонардо открывает собственную мастерскую, набирает учеников, занимается экспериментами в архитектуре и анатомии, организывает придворные праздники, придумывает костюмы и аттракционы для маскарадов и праздников. Не оставил он работу и над военными механизмами и новыми видами оружия.

Герцог Лодовико Сфорца мечтал о создании памятника своему отцу Франческо Сфорца – талантливому военачальнику – и поручил подготовить проект памятника Леонардо да Винчи. При работе над памятником, условно названным «Конь», Леонардо начал изучать анатомию и движение лошадей, сделал много эскизов и начал экспериментировать с бронзой. Примерно в 1489 году Леонардо приступил к изготовлению макета в глине. По его первоначальному замыслу Франческо Сфорца должен был сидеть на вздыбленном коне, стоящем на задних ногах, но Леонардо не смог решить эту сложнейшую техническую задачу, и в окончательном варианте военачальник спокойно едет на коне. Глиняный конь имел высоту около семи метров и весил 80 тонн. В 1492 году он был установлен на одной из площадей города Кастелло. Но работа не была закончена: слишком много требовалось бронзы для отливки, более того, началась война с французами, и стало не до «Коня».

Кончилась эта история печально, даже трагично: Лодовико попал в плен и умер в заточении, а глиняный памятник ради потехи расстреляли гасконские арбалетчики.

Любопытна история восстановления коня, которого не было. В 1977 году Чарльз Дент – американский миллионер-филантроп и скульптор-любитель – увидел в Национальной библиотеке Мадрида оригинал эскиза «Коня» Леонардо да Винчи и решил воспроизвести статую в натуральную величину, чтобы подарить Милану. Смысл поступка – извиниться перед Италией за те разрушения, которые произвела союзная авиация во время второй мировой войны, в которой Дент был военным летчиком и лично участвовал в бомбардировках. Он умер в 1994 году, но согласно его завещанию, самая большая в истории бронзовая статуя была создана в США и по частям перевезена в Италию. Двадцать лет над ее созданием трудилась скульптор Нина Акаму. Бронзовая статуя, созданная по эскизам Леонардо да Винчи, была установлена в Милане, в районе Сансиро, недалеко от Российского консульства. Статуя стала вторым символом Милана после Миланского собора. Ее вес около 15 тонн, высота 7.32 м, стоимость порядка семи миллионов долларов.

1498 Леонардо да Винчи приступает к работе над фреской «Тайная вечеря»; работает над дизайном зала делле Ассе во дворце Сфорца в Милане.

Примерно в это же время изобретает свою «летающую машину».

1499 Леонардо пишет «Мадонну с младенцем, Св. Анной и Иоанном Крестителем». В Милан входят французские войска, и Леонардо да Винчи отправляется в Мантую вместе с Лукой Пачоли (известным математиком, автором книги «Сумма об арифметике, геометрии, пропорциях и пропорциональностях», изданной в Венеции в 1491 году) и в сопровождении одного из своих любимых учеников – Салаи. Там Леонардо знакомится с Изабеллой Д'Эсте – женой герцога Мантуи, большой покровительницей искусств. Леонардо нарисовал эскиз к портрету Изабеллы, но сам портрет так и не был написан.

1500 Художник посещает Венецию, а потом отбывает во Флоренцию, оккупированную французской армией под предводительством Карла VIII. Он получил заказ на роспись алтаря для монахов нищенствующего ордена в женском монастыре Святой Аннунциаты, сделал этюд будущей картины и, по обыкновению, переключился на другое. Эту работу для монастыря – «Мадонна с младенцем, Св. Анной и агнцем» – Леонардо да Винчи закончил только в 1510 году.

1501 Леонардо углубляет свои знания по математике, пользуясь дружбой с Лукой Пачоли.

1502 В качестве военного инженера и придворного архитектора Леонардо да Винчи в возрасте 50 лет поступает на службу к Цезаре Борджиа, главнокомандующему папской армией, который возглавил военную кампанию по объединению воюющих государств Италии под властью Папской области. Историки считают, что они испытывали симпатию друг к другу, поскольку обоих привлекали и восхищали могущественные, сильные и изобретательные люди. Возможно, их сближало и то, что Борджиа также был незаконнорожденным ребенком: его отцом был Папа Александр VI. Напомним, что имя Борджиа вошло в историю как синоним жестокости, лжи и предательства.

Леонардо вместе с Борджиа путешествует по центральной и северной Италии, проектирует различные военные укрепления и гидротехнические сооружения, составляет несколько географических карт (большая часть его планов и чертежей не сохранилась), а также план города-крепости Имолы, куда после военных неудач вынужден был бежать Борджиа.

1503 В марте да Винчи возвращается во Флоренцию и начинает писать «Мону Лизу Джоконду» и также знаменитую картину «Битва при Аншари».

1504 Флоренция и Пиза постоянно враждовали между собой. Флоренция была расположена выше Пизы по течению реки Арно, поэтому жители Флоренции хотели изменить русло реки и направить ее мимо Пизы, чтобы лишить противника воды и выгодной транспортной магистрали.

План изменения русла реки Арно разрабатывают Леонардо да Винчи и Никколо Макиавелли (автор знаменитой книги «Государь»), но проект так и не был закончен.

Леонардо изучает геометрию, гидродинамику и полет птиц; продолжает работы по фортификационным сооружениям.

1505 Леонардо продолжает изучать полет птиц и начинает писать картину «Леда и лебедь».

1507 Французский король Луи XII назначает Леонардо да Винчи придворным художником и инженером.

1508 Леонардо заканчивает вторую версию картины «Мадонна в скалах»; работает над проектом памятника для надгробия маршала Жана Джакомо Тривульцио, используя при этом многие элементы «Коня».

Он продолжает свои исследования в гидродинамике, анатомии и городской планировке.

1509 Леонардо продолжает изучать анатомию и гидродинамику. Лука Пачоли опубликовал трактат «О Божественной пропорции» с рисунками да Винчи. Вот свидетельство самого Пачоли об этих рисунках: «...таковые были сделаны достойнейшим живописцем, перспективистом, архитектором, музыкантом и всеми совершенствами одаренным Леонардо да Винчи, флорентинцем, в городе Милане...». Считается, что именно под влиянием Леонардо да Винчи Пачоли начал писать свою «вторую великую книгу».

Таким образом, золотое сечение вошло в культуру Возрождения и стало эстетическим каноном, во многом благодаря Леонардо да Винчи.

1513 Леонардо да Винчи отправляется в Рим ко двору нового Папы Римского, которым стал Джованни Медичи под именем Лев X, брат Джулиано Медичи – покровителя Леонардо. В Риме да Винчи проводил опыты с летательными аппаратами, занимался оптикой, ботаникой, выполнил ряд архитектурных проектов. Ему пришлось изучать анатомию животных, поскольку церковь наложила строгий запрет на вскрытие мертвых тел.

1514 Леонардо проводит ряд научных исследований; разрабатывает план осушения Понтийских болот.

1515 Во время переговоров между королем Франции Франциском I (французские войска снова оккупировали Милан) и Папой Римским да Винчи демонстрирует своего механического льва. Когда Франциск I ехал по улицам, ему навстречу выскочил лев. Король ударил его жезлом, и из льва вдруг вылетел салют из лилий, считавшихся символом французской королевской фамилии.

1516 Джулиано Медичи умирает; Леонардо принимает приглашение французского короля Франциска I и уезжает во Францию. Там он проводит много времени в беседах с королем, занимается научными исследованиями, разрабатывает ряд архитектурных проектов. Однако годы берут свое: у Леонардо отнимается правая рука, и он уже не пишет картины.

1517 Леонардо да Винчи поселился в замке Клу близ города Амбуаза. За ним во Францию последовали его самые преданные ученики – Джакомо Салаи и Франческо Мельци. Здесь Леонардо продолжает серию эскизов (всего их было 16), посвященных различным природным катаклизмам и известных под общим названием «Потоп».

1518 Леонардо разрабатывает различные механизмы для придворных увеселений в Амбуазе.

1519 23 апреля Леонардо составил завещание.

2 мая Леонардо да Винчи скончался в замке Клу.



Рис. 1.

Ушел из жизни самый выдающийся человек – символ Ренессанса. Если, следуя опыту Ю.А. Данилова, изобразить спектрограмму интересов Леонардо да Винчи, то она будет содержать много больших пиков, которые при ближайшем рассмотрении все имеют тонкую структуру (см. рисунок).

Рассказать о каждой линии в спектре невозможно, но составить представление о них интересующийся может, заглянув, например, в небольшую книгу [4], а также в замечательный двухтомник [6] и книги [7, 8]. Можно порекомендовать еще одну необычную книгу [3] (мы цитировали ее раньше), в которой на конкретном рассмотрении живописного и графического наследия Леонардо да Винчи, а также его рукописей, обсуждаются вопросы, находящиеся на стыке искусствоведения с философией и теорией культуры, психологией, эстетикой, литературоведением. Наконец, для поверхностного ознакомления со всей палитрой творчества Леонардо да Винчи следует прочитать книгу [9]. Ее материал использован нами в ряде случаев со снятием имеющихся противоречий между основной частью книги и «Краткой хронологией эпохи и жизни Леонардо».

В Приложении к книге [7] В.П. Зубов справедливо замечает следующее.

«Судьба Леонардо-ученого трагична. Он принадлежит к числу тех гениев, научное наследие которых стало известно, и в целом, и в деталях, лишь спустя долгое время после их смерти... Современники не могли оценить его должным образом. Без преувеличения можно сказать, что только в наши дни это сделалось возможным.

Леонардо-живописца прославляли на протяжении столетий. Уже младшие его современники называли великого итальянского художника «дивным», «божественным», «небесным». Иное дело – Леонардо-ученый. Правда, биографы (например, Вазари) говорили о разносторонних талантах Леонардо да Винчи. Но все-таки, в конце концов, они говорили о разносторонности живописца. Научное наследие Леонардо оставалось неизвестным и не оцененным во всей полноте» [7, с. 876].

Любопытно, что в январе 2005 года при реставрации монастыря Святой Аннунциаты во Флоренции была обнаружена потайная комната, оказавшаяся утерянной студией Леонардо да Винчи, полной фресок. Ажиотаж вокруг находки усиливался

еще и тем, что это невероятное открытие случилось в самый разгар популярности романа Дэна Брауна «Код да Винчи».

Джираломо Кардано назвал Леонардо «чистым живописцем», отказав ему в звании медика и философа. А ведь написано Леонардо да Винчи всего 30 картин. В то же время он оставил тысячи и тысячи страниц записей, чертежей, рисунков и т.п. Известно, что хранил он их весьма небрежно, в беспорядке. Вот его собственное свидетельство этому в начале так называемого «Кодекса Арундель» (цитируется далее по [3, с. 209]).

«Напечатано во Флоренции в доме Пьеро ди Браччо Мартелли, марта 22 дня 1508 года.

И это будет собрание без порядка, извлеченное из многих бумаг, которые я здесь переписал, надеясь распределить их в порядке по своим местам, соответственно темам, о которых они трактуют. И я думаю, что прежде чем дойду до конца этого собрания, мне придется повторить одно и то же по многу раз, так что, читатель, не ругай меня, ибо предметов много, и память не может их сохранить и сказать: об этом не хочу писать, ибо писано ранее. И если б я не хотел впасть в подобную ошибку, необходимо было бы в каждом случае, когда мне захотелось бы снять копию, всегда пересчитывать все предыдущее, и в особенности в случае долгих промежутков времени от одного раза до другого при писании».

Комментируя этот текст и подобные ему, Л.М. Баткин пишет следующее.

«Леонардо лихорадочно работал долгую жизнь, написал тысячи и тысячи листов, задумывая трактаты по живописи, механике, гидродинамике, анатомии и многим другим наукам – и не только не написал ни одного законченного сочинения, но даже ни одного не довел до такого состояния, чтобы это было действительно похоже на материалы по трактату, чтобы можно было хотя бы теперь привести его фрагменты в систему.

Но мало того.

Леонардо упоминает о 120 подготовленных им книгах по анатомии, а нам известно, что книг таких не было. Иногда он мимоходом роняет: «...как показано в моем трактате о местном движении, силе, весе». Не было такого трактата. Или: «...как указывается в моей книге о движении»...

...Леонардо, видимо, всю жизнь собирался довести до завершения какие-то трактаты и даже всерьез воображал их как бы завершенными, но никогда и не думал начать по-настоящему хоть один из них и тем не менее ничуть не страдал от этого несомненного, на наш взгляд, противоречия.

Я ничего тут не понимаю. И вы ничего не понимаете. И никто во всем мире – с последней трети XIX века, когда рукописи Леонардо были извлечены из архивов – никто ничего не понимает.

Но если бы удалось как-то уяснить культурологическую содержательность и неслучайность нашего непонимания, то это и было бы приближением к пониманию. При том неременном условии, что загадка будет не снята, а переосмыслена, что Леонардо останется все таким же (нет, уже по-другому!) ошеломительно противоречивым.

Эудженио Гарен отозвался об «этих причудливых рукописях» так: «Это не фрагменты некой книги и не материалы к ней, а портрет напряженного дня, прожитого необыкновенным человеком, подчас запечатленный в самых тонких оттенках».

С последним определением хочется согласиться» [3, с. 212–213].

Дневники Леонардо разошлись по всему миру. К счастью, большую часть его записей удалось восстановить и распределить по темам. Причем даже многие рисунки к тексту оказались на нужном месте.

Автор книги [1], ссылаясь на Шервина Ньюланда, приводит следующий «красивый пассаж»:

«...Улыбка Моны Лизы таит в себе загадку силы ее создателя. Возможно, она представляет собой законченное послание Леонардо грядущим поколениям: «Во мне есть нечто большее, чем вы способны ухватить; хотя я был откровенен с вами в своих записях так же, как сам с собою, окончательное завещание хранилось в недрах моей души и того непостижимого источника, который сделал меня таким; ищите как можете – я буду с вами, но лишь до определенного предела; моим уделом было постичь вещи, для вас недоступные».

И далее.

«Ассоциация с магом порождена нашим собственным желанием понять такую индивидуальность – открытую и искреннюю с нами на одном уровне и совершенно закрытую и недоступную на другом. Гений такого масштаба полностью изолирован собственным же гением – вот лучшее объяснение такому противоречию. Звезда эпохи возрождения, ученый, художник и инженер, Леонардо лучше, чем кто-либо другой демонстрировал качества мага» [1, с. 276–277].

Возможно, подобные рассуждения привели Кэтлин Мэттьюз к созданию книги «Таро да Винчи». Изображения на картах позаимствованы с набросков портретов, масок и фантазий Леонардо. В колоде есть карта Маг с автопортретом Леонардо, написанным красным мелком, две карты Загадка с изображением Моны Лизы. Забавна цитата из хозяйственных записей Леонардо, которая приведена в [10, с. 7]: «per dire la venture: 6 soldi» – уплачено 6 сольди за предсказание будущего.

Каковы же основные типичные черты Леонардо да Винчи как естествоиспытателя? По мнению В.П. Зубова, к ним можно отнести следующие.

«Во-первых, Леонардо – мыслитель, начинающий программу нового экспериментального естествознания, страстный и неутомимый противник отживающего и отмирающего. Во-вторых, Леонардо не только наметил программу, но и сам неутомимо экспериментировал, разрабатывая самые различные отрасли естественных наук. В-третьих, бросается в глаза монолитность фигуры Леонардо-ученого, выступавшего при разработке конкретных проблем во всеоружии своих разносторонних знаний. И, наконец, в-четвертых, Леонардо-ученый неотделим от Леонардо – инженера, изобретателя, художника» [8, с. 905].

Когда я готовил лекции «Даниил Семенович Данин и его кентавристика», то знал, что в курсе кентавристики, который читал Данин в РГГУ, была лекция о Леонардо да Винчи. Мне рассказал об этом Ю.А. Данилов. Но, видимо, лекция осталась устной и нигде не была напечатана. Конечно, Леонардо да Винчи не просто кентавр, в определении Данина, он мультикентавр.

Очень точно пишет об этом все тот же В.П. Зубов. «Рассматривая отдельные стороны многогранной деятельности Леонардо-ученого, можно лишь искусственно изолировать их друг от друга. По-существу, нельзя рассматривать отдельно Леонардо-механика и Леонардо – конструктора летательных приборов, Леонардо-астронома и Леонардо-оптика и т.д.» [8, с. 911]. И, добавим от себя, везде присутствует Леонардо-художник. В дальнейшем изложении мы подробно коснемся гидродинамики Леонардо да Винчи и золотого сечения – истинного кода да Винчи.

Напомним, что главная черта нелинейной сложной системы, состоящей из частей, в том, что целое не есть их сумма, поскольку части взаимодействуют. Практи-

чески все линии в спектрограмме взаимодействуют между собой. Кроме того, сложность системы проявляется и в ее нетривиальном поведении.

Следуя идеям Ю.А. Данилова, из весьма краткого приведенного выше жизнеописания Леонардо да Винчи можно заключить, что стиль и пространственно-временные характеристики жизни и творчества великого флорентийца позволяют рассматривать его как нелинейную и сильно неравновесную систему с четко выраженными аттракторами, которым соответствуют линии в спектрограмме. Сюда прекрасно подходит относящаяся к Льюису Кэрролу фраза: «...переходы из области притяжения одного аттрактора к другому не сопровождаются у него катастрофами и бифуркациями, а происходят плавно» [1, с. 117].

Впрочем, на жизненном пути Леонардо были и бифуркации, когда он вынужден был менять покровителей (Медичи, Лодовико Сфорца, Франциск I) и место обитания (Италия, Франция), и катастрофы (разрушение знаменитой фрески «Тайная вечеря» началось почти сразу после окончания работы над ней).

Закончим эту часть повествования о Леонардо да Винчи отрывком из интересной книги А. Бюлента.

«...В последние часы перед смертью уже покорившийся неизбежности Леонардо спросил у своего ученика: «Скажи мне, хоть что-нибудь сделано?» ...В словах Леонардо... слышится нотка отчаяния из-за нереализованных идей и незавершенной работы. Не стоит отрицать, что осмысление решений, особенно в искусстве, и создание интеллектуальных изобретений и, особенно, научных и технологических теорий было для Леонардо важнее их реализации. Та любознательность и стремительность, с которыми он постоянно переходил от одной области знаний к другой, представляла собой реальную проблему. Незавершенные проекты и не доведенные до общественного признания работы обеспечили ему соответствующую репутацию. Тем не менее благодаря им он постоянно открывал новые горизонты знаний. Оглядываясь с порога XXI столетия, видя разнообразие и качество его достижений, мы удивляемся: «Может ли быть такое, чтобы под одним и тем же именем – Леонардо да Винчи – работал интеллект, равный по остроте и уровню одаренности дюжине талантливых людей?» [1, с. 270].

Библиографический список

1. *Бюлент А.* Математика и Мона Лиза. Искусство и наука в творчестве Леонардо да Винчи. М.: Техносфера, 2007. 304 с.
2. *Данилов Ю.А.* Причудливый мир науки. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2004. С. 113.
3. *Баткин Л.М.* Леонардо да Винчи и особенности ренессансного творческого мышления. М.: Искусство, 1999. 415 с.
4. *Джорджо Вазари.* Леонардо да Винчи, живописец и скульптор флорентийский (Из кн. Жизнеописание наиболее знаменитых живописцев, скульпторов и зодчих) // Леонардо да Винчи. Суждения о науке и искусстве. СПб.: Издательский дом «Азбука – классика», 2006. 224 с.
5. *Зигмунд Фрейд.* Леонардо да Винчи. М.: Типография Торг. д. «Мысль», 1912. 119 с.

6. Леонардо да Винчи. Избранные произведения: В 2 т. СПб.: Издательский дом «Нева»; М.: Изд-во «Олма-Пресс», 2000.
7. Леонардо да Винчи. Избранные естественно-научные произведения. М.: Изд-во Академии наук СССР, 1955. 1207 с.
8. *Зубов В.П.* Леонардо да Винчи. М.: Техносфера, 1962.
9. *Тайм Джессика, Барр Трейси.* Леонардо да Винчи для «чайников». М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. 304 с.
10. *Мэттьюз Кэйтлин.* Таро да Винчи. М.: ООО ТД Изд-во «Мир книги», 2006. 144 с.

*Саратовский государственный
университет*

Поступила в редакцию 14.06.2007



Трубецков Дмитрий Иванович – родился в Саратове (1938). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ, профессор, член-корреспондент Российской академии наук, заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования. Научный руководитель Лицея прикладных наук и факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: вакуумная электроника и микроэлектроника сверхвысоких частот, теория колебаний и волн, нелинейная динамика, история науки. Автор более двадцати учебных пособий и монографий, а также более двухсот статей в периодической печати.



ЗАДАЧИ ПО УЧЕБНОМУ КУРСУ «ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС»

С.П. Кузнецов, А.П. Кузнецов

Представлены задачи для решения с помощью компьютера по курсу «Динамический хаос». Система задач охватывает тематику от природы хаоса до сценариев его возникновения. Даны методические рекомендации.

Введение

Современная теория и исследование динамического хаоса в большой степени превратились в компьютерную науку. Поэтому очень важным является дополнение соответствующего курса лекций решением задач компьютерного характера. Предлагаем вниманию читателей ПНД подборку задач для компьютерного практикума по курсу «Динамический хаос», читаемого студентам факультета нелинейных процессов Саратовского госуниверситета. Подборка задач охватывает основные моменты теории хаоса: от его простейших иллюстраций и обсуждения природы хаоса – до сценариев его возникновения. Еще более полный вариант задач можно найти в четвертой главе книги «Нелинейность: от колебаний к хаосу» (см. раздел «Книжная полка студента» настоящего номера).

Сделаем несколько методических замечаний. Продолжительность курса два-три семестра. Семестровое задание должно содержать пять-шесть задач, так что разные студенты могут получать несколько различающиеся задания. Однако обязательными для всех студентов целесообразно считать задачи 4–9, 11, 14, 21. В пределах учебной группы студенты могут получать одинаковые задачи, отличающиеся выбором конкретной динамической системы. Студенты не должны использовать какие-либо стандартные программы, но могут использовать собственные программы (например, по построению карт динамических режимов), которые были подготовлены ими в рамках предшествующих учебных курсов, в первую очередь, курса «Динамические системы и бифуркации». Написание программы «своими руками» максимально приближает решение задач к реальной исследовательской работе. Заметим, наконец, что многие задачи при глубокой проработке и творческом подходе могут использоваться и как курсовые работы.

Хаос и его свойства

1. Природа хаоса в простейшей модели. Задайте случайный код из двух символов достаточно большой длины N , для чего используйте стандартную процедуру генерации случайных чисел.

а) Для логистического отображения $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$ при $\lambda = 2$ методом итераций в обратном времени получите значение x , с которого надо стартовать для того, чтобы последовательность знаков переменной при прямых итерациях воспроизвела вашу случайную последовательность. До каких N компьютер правильно воспроизводит последовательность?

б) Воспроизведите расчеты для меньших значений λ , например, $\lambda = 1.8$. Оцените, какой процент кодов определенной длины составляют запрещенные, приводящие на некотором шаге к появлению отрицательного числа под знаком квадратного корня.

в) При $\lambda = 2$ сопоставьте результаты прямых итераций, начиная от $x_0 = \sqrt{3}/2$, и расчета по аналитической формуле

$$x_n = -\cos(2^n \arccos(-x_0)).$$

При каких n наступает расхождение?

2. Перемешивание. Продемонстрируйте на экране компьютера несколько шагов итераций двумерных консервативных отображений – как деформируется закрашенная область, в качестве которой возьмите изображение кота, как у Арнольда. Прodelайте это:

- для отображения «кот Арнольда», заданного уравнениями

$$x_{n+1} = x_n + y_n, \quad y_{n+1} = x_n + 2y_n \pmod{1};$$

- для отображения пекаря

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n, & y_{n+1} &= y_n/2, & x_n &\leq 1/2, \\ x_{n+1} &= 2x_n - 1, & y_{n+1} &= (y_n + 1)/2, & x_n &> 1/2. \end{aligned}$$

В чем выражается наличие свойства перемешивания?

3. Система Лоренца. Проведите исследование системы Лоренца.

а) Составьте программу численного решения уравнений Лоренца

$$dx/dt = \sigma(y - x), \quad dy/dt = rx - y - xz, \quad dz/dt = xy - bz$$

стандартным методом Рунге–Кутты четвертого порядка. Постройте графики временной зависимости для динамических переменных от времени и проекции фазового портрета на плоскости (x, y) , (y, z) , (z, x) . Используйте «классический» набор параметров: $r = 28$, $b = 8/3$, $\sigma = 10$.

б) Запуская траекторию системы Лоренца из окрестности начала координат, отследите ее поведение при $r = 5, 12, 13.927, 20, 24.06, 28$. Остальные параметры стандартные: $\sigma = 10$, $b = 8/3$. Обсудите результаты в контексте бифуркационного анализа.

в) Составьте анимационную программу, показывающую вращение жидкости в конвективной петле, описываемое уравнениями Лоренца при $b = 1$. Распределение температуры кодируйте цветом. Пронаблюдайте разные типы динамики при различной интенсивности подогрева.

4. Регулярные режимы и хаос в трехмерных потоках. Постройте фазовые портреты аттракторов для следующих систем.

а) Система Ресслера

$$\frac{dx}{dt} = -(y + z), \quad \frac{dy}{dt} = x + ay, \quad \frac{dz}{dt} = b + z(x - c)$$

при $a = 0.2$, $b = 0.2$ и различных c в интервале от 2 до 5.

б) Генератор с инерционной нелинейностью Анищенко–Астахова

$$dx/dt = mx + y - xz, \quad dy/dt = -x, \quad dz/dt = g(-z + \Phi(x)), \quad \Phi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$$

при $g = 0.6$ и различных значениях m от 0.4 до 1.5.

в) Несколько систем Спротта

$$\begin{aligned} dx/dt &= yz, & dy/dt &= x - y, & dz/dt &= 1 - xy, \\ dx/dt &= -y, & dy/dt &= x + z, & dz/dt &= xz + 3y, \\ dx/dt &= yz, & dy/dt &= x^2 - y, & dz/dt &= 1 - 4x \\ dx/dt &= -0.2y, & dy/dt &= x + z, & dz/dt &= x + y^2 - z, \\ dx/dt &= xy - z, & dy/dt &= x - y, & dz/dt &= x + 0.3y, \\ dx/dt &= -2y, & dy/dt &= x + z^2, & dz/dt &= 1 + y - 2z. \end{aligned}$$

5. Неавтономные потоковые системы. Проведите исследование неавтономных систем по следующей схеме.

а) Постройте несколько различных реализаций $x(t)$ для значений параметров, отвечающих периодическим и хаотическим режимам.

б) Продемонстрируйте существование чувствительной зависимости от начальных условий, для чего слегка измените эти условия для хаотической реализации; подберите эту вариацию так, чтобы на экране дисплея реализации на начальном участке совпадали, а затем – расходились.

в) Продемонстрируйте чувствительную зависимость от начальных условий для фазовых траекторий на плоскости x, \dot{x} .

г) Создайте программу, рисующую проекцию портрета аттрактора на плоскость x, \dot{x} , и пронаблюдайте трансформацию аттрактора при вариации параметров.

д) Продемонстрируйте возможность сосуществования аттракторов при фиксированных значениях параметров.

е) Создайте программу, которая рисует не только фазовые траектории на плоскости x, \dot{x} , но и точки в сечении Пуанкаре (соответствующие сечения должны быть проведены через период внешнего воздействия); пронаблюдайте различные режимы с помощью таких сечений.

ж) Используя программу построения отображения Пуанкаре, получите карту динамических режимов на плоскости параметров (как правило, используйте плоскость амплитуда – частота воздействия).

Неавтономные системы для исследования.

- Система Уеды

$$d^2x/dt^2 + kdx/dt + x^3 = B \cos t.$$

- Осциллятор Дуффинга

$$d^2x/dt^2 + kdx/dt + x - x^3/6 = A \sin \omega t.$$

- Система ван дер Поля

$$d^2x/dt^2 - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = A \sin \omega t,$$

- Брюсселятор (положите $A = 0.4$)

$$\begin{aligned} dx/dt &= A - Bx + x^2y - x + A \cos \omega t, \\ dy/dt &= Bx - x^2y. \end{aligned}$$

6. Сечение Пуанкаре и метод Эно. Создайте программу, позволяющую строить сечения Пуанкаре для трехмерных потоков. Для определения координат точки пересечения с секущей плоскостью используйте метод Эно. Получите вид аттракторов в сечении Пуанкаре и наблюдайте их эволюцию при вариации параметров. Сопоставьте вид сечений с соответствующими фазовыми портретами. Модифицируйте программу так, чтобы она демонстрировала так же и отображение первого возвращения, используя в качестве переменной одну из координат точки пересечения фазовой траектории с плоскостью. Что можно сказать о динамике системы на основе полученных иллюстраций? Постройте бифуркационные деревья для той же переменной в зависимости от одного из параметров.

Динамические системы для исследования.

- Система Ресслера.
- Генератор с инерционной нелинейностью.
- Генератор Кислова–Дмитриева.

$$T \frac{dx}{dt} + x = F(z), \quad \frac{dy}{dt} = x - z, \quad \frac{dz}{dt} = y - z/Q,$$

где $F(z) = Mz \exp(-z^2)$ для $Q = 10$ и $T = 1$.

7. Двухпараметрическое исследование трехмерных потоков. Используя предыдущую программу и программу построения карт динамических режимов двумерных отображений, постройте карты для трехмерных потоков. Постройте трехмерные портреты аттракторов в характерных точках плоскости параметров. Наблюдайте каскад удвоений периода, хаотические аттракторы, аттракторы, отвечающие «островкам устойчивости» в хаотической области.

Динамические системы для исследования те же, что и в предыдущей задаче.

Устойчивость и показатели Ляпунова

8. Показатели Ляпунова. Составьте программы, позволяющие вычислять старший показатель Ляпунова для одномерных отображений, двумерных отображений и потоков. Получите графики зависимости этого показателя от какого-либо параметра. Самостоятельно подберите диапазон изменения управляющего параметра и значения остальных параметров, чтобы зафиксировать интересные особенности динамики (удвоения периода, хаос и др.). Отметьте точки циклов максимальной устойчивости, точки бифуркаций удвоения периода, области хаоса.

Одномерные отображения.

- Логистическое $x_{n+1} = \lambda - x_n^2$.
- Кубическое $x_{n+1} = a - bx_n + x_n^3$.
- Окружности $x_{n+1} = x_n + \Omega + k \sin 2\pi x_n, \text{ mod } 1$.

Двумерные отображения.

- Отображение Эно $x_{n+1} = \lambda - x_n^2 - by_n, y_{n+1} = x_n$.
- Отображение (комплексное) Икеды $z_{n+1} = A + Bz_n \cdot \exp(i|z_n|^2)$.
- Нелинейное модельное отображение с бифуркацией Неймарка–Сакера

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= Sx_n - y_n - (x_n^2 + y_n^2), \\y_{n+1} &= Jy_n - (x_n^2 + y_n^2)/5.\end{aligned}$$

Потоки.

- Система Ресслера.
- Система Лоренца.
- Система Уеды.
- Генератор с инерционной нелинейностью.
- Одна из систем Спротта: $d^2x/dt^2 + \lambda x - (dx/dt)^2 + x = 0, 2.12 < \lambda < 2.18$.

9. Двухпараметрический анализ Ляпунова. Составьте программу по построению карт показателя Ляпунова, на которых оттенком цвета отобразите его величину. Для положительных значений используйте оттенки желтого и оранжевого, а для отрицательных – голубого и синего. Как представлены на таких картах циклы максимальной устойчивости? Области crossroad area? Языки синхронизации?

Динамические системы для исследования.

- Кубическое отображение.
- Логистическое отображение под действием гармонического сигнала $x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + \varepsilon \cos 2\pi \omega n$, где частота ω принимает значения $1/3, 1/5, 1/7$.
- Отображение окружности.
- Отображение Эно.
- Отображение Икеды.
- Универсальное отображение с бифуркацией Неймарка–Сакера из предыдущей задачи.

10. Устойчивость по Пуассону и возвраты Пуанкаре.

а) Для одной из систем с хаотической динамикой (Лоренца, Ресслера, или любой другой) отследите последовательность возвратов Пуанкаре, взяв несколько значений ε , задающих точность возврата. Какой характер носит последовательность временных интервалов между возвратами?

б) Рассмотрите систему двух осцилляторов с несоизмеримыми частотами. Отследите последовательность возвратов Пуанкаре, взяв несколько значений ε , задающих точность возврата. Какой характер носит последовательность временных интервалов между возвратами?

Геометрия странных аттракторов

11. Геометрия странных аттракторов.

а) Для отображения Эно при $b = -0.3$, $a = 1.4$ получите изображение странного аттрактора на плоскости (x, y) , а также в увеличенном масштабе фрагменты этого изображения, позволяющие рассмотреть канторо-подобную поперечную структуру аттрактора. Рассмотрите далее аналогичным образом критический аттрактор в точке $b = 0.3$, $a_c = 1.9516465$. В чем отличие этих случаев?

б) Придумайте способ графического изображения на экране компьютера процедуры последовательного построения аттрактора Смейла–Вильямса. Этот аттрактор имеет место в трехмерном отображении, определение которого в цилиндрических координатах (r, φ, z) таково:

$$r_{n+1} = 1 + 0.2(r_n - 1) + 0.1 \cos \varphi r_n, \quad z_{n+1} = 0.1 \sin \varphi r_n, \quad \varphi_{n+1} = 2\varphi r_n \pmod{2\pi}.$$

Связь цилиндрических координат с декартовыми: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$. Тор, фигурирующий на начальном этапе построения, в сечении имеет окружность радиуса 0.3.

12. Фрактальная размерность. Следующая процедура позволяет генерировать последовательность точек, принадлежащих двумасштабному канторову множеству с масштабными факторами a и b :

$$x_{2n} = b(x_n + 1), \quad x_{2n+1} = -a(x_n + 1), \quad x_0 = b/(1 - b).$$

Опробуйте на этом множестве алгоритм вычисления размерности по Grassberger–Procaccia. Специально рассмотрите случай $a = b = 1/3$, что соответствует классическому канторову множеству, а также $a = 2.5029\dots$, $b = a^2$, что отвечает аппроксимации аттрактора Фейгенбаума двумасштабным канторовым множеством. Сравните значение размерности с теоретическим.

13. Бассейны притяжения. Постройте бассейны притяжения отображения Эно при $b = 0.3$ и значениях параметра $\lambda = 1.15$, 1.395 и 1.405 . Укажите другими цветами аттракторы системы и седловые точки и циклы. Пронаблюдайте эволюцию границы бассейнов притяжения и ее фрактализацию.

Удвоения периода и теория Фейгенбаума

14. Удвоения периода. Создайте программу, демонстрирующую бифуркационное дерево для системы с удвоениями периода и одновременно – портрет аттрактора в выбранной с помощью «мыши» точке на дереве. Пронаблюдайте удвоения периода, хаотические режимы, основные периодические окна в хаотической области и

каскад удвоений на их базе, бифуркации слияния полос. Исследование проведите для одномерного необратимого, двумерного обратимого отображений и потока.

- Логистическое отображение.
- Отображение Эно.
- Система Ресслера.
- Что общего, а что различного обнаруживается для этих классов систем?

15. Скейлинг для систем с удвоениями периода. Представьте иллюстрации скейлинга на бифуркационном дереве и графике ляпуновского показателя для одномерного отображения, демонстрирующего удвоения периода. Предварительно определите положение критической точки.

Системы для исследования.

- Логистическое отображение.
- Отображение $x_{n+1} = \lambda \cos x_n$.

16. Фрактальные свойства критического аттрактора при переходе к хаосу через удвоения периода.

а) Составьте программу, позволяющую находить неустойчивые циклы периода $2, 4, 8, \dots, 2^k$ для логистического отображения $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$ в критической точке $\lambda_c = 1.401155189092$ и вычислите мультипликаторы этих циклов. Для нахождения циклов используйте хорошо сходящуюся рекуррентную схему $x^{(n+1)} = x^{(n)} + (f(x^{(n)}) - x^{(n)})/2.6$, где $f(x)$ обозначает результат 2^k -кратной итерации логистического отображения при старте из точки x .

б) Для логистического отображения получите на экране компьютера несколько первых уровней построения критического аттрактора, как кантороподобного множества.

в) Постройте график сигма-функции Фейгенбаума.

г) Вычислите размерность Хаусдорфа критического аттрактора Фейгенбаума D . Для этого составьте программу, вычисляющую сумму l_i^D , где l_i – длины интервалов, отвечающие k -му уровню построения аттрактора, и подберите D так, чтобы значения суммы для k -го и $(k + 1)$ -го уровней совпадали. Как зависит точность расчета от уровня k ?

д) Составьте программу, позволяющую получить спектр обобщенных размерностей Реньи D_q и скейлинг-спектр $f(\alpha)$. Постройте графики этих зависимостей при различном выборе уровня k . Сравните результаты с расчетами по модели двухмаштабного канторова множества. Вычислите по возможности точно информационную и корреляционную размерности критического аттрактора.

17. Воздействие шума на системы с удвоениями периода.

а) Постройте бифуркационное дерево и график показателя Ляпунова для логистического отображения под действием шума $x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + \varepsilon y_n$, где y_n – случайная последовательность, генерируемая компьютером. Покажите, что шум разрушает тонкую структуру дерева тем сильнее, чем более глубокий уровень организации дерева мы рассматриваем. Как влияет шум на положение границы хаоса?

б) Пр продемонструйте скейлинг на бифуркационном дереве и графике показателя Ляпунова. Для этого действуйте аналогично задаче 15, но пересчитывайте

амплитуду шума на каждом шаге преобразовании подобия в $\mu_F = 6.618\dots$ раз. (Константа μ_F найдена Кратчфильдом с соавторами).

в) Продумайте, как можно использовать свойство скейлинга для оценки константы μ для отображений $x_{n+1} = \lambda - x_n^N + \varepsilon y_n$ с другим порядком экстремума. Сделайте такие оценки для $N = 4, 6, 8$.

г) Постройте карты показателей Ляпунова для кубического отображения $x_{n+1} = a - bx_n + x_n^3 + \varepsilon y_n$ при различных значениях амплитуды шума. Как трансформируется граница хаоса и режимы максимальной устойчивости?

Переमेжаемость

18. Перемежаемость. Пронаблюдайте переход к хаосу через перемежаемость в логистическом отображении при выходе из окна периода 3 в сторону уменьшения параметра λ (начните с $\lambda = 1.76$). Постройте графики зависимости x от дискретного времени n для нескольких значений параметра λ меньших порога возникновения перемежаемости. Пронаблюдайте присутствие ламинарных и турбулентных стадий и изменение их длительности в зависимости от параметра λ .

Квазипериодические явления

19. Разложите в цепную дробь $157/225$.

20. Разложите в цепную дробь: $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$. Попробуйте самостоятельно подумать о свойствах цепных дробей, которые получаются при разложении \sqrt{n} , где n – натуральное число, не являющееся квадратом натурального числа.

21. Синхронизация и квазипериодические режимы для отображения окружности. Постройте карту динамических режимов для отображения окружности. Получите так называемую «чертову лестницу», дающую зависимость числа вращения от параметра при $K < 1$ и $K = 1$. Укажите на этой лестнице ступеньки, отвечающие нескольким последовательным уровням построения дерева Фейри. Получите увеличенный фрагмент чертовой лестницы в окрестности иррационального числа вращения, $\omega = (\sqrt{5} - 1)/2$, известного как «золотое сечение» при $K = 1$. Идентифицируйте ступеньки этой лестницы, отвечающие аппроксимации золотого сечения при помощи чисел Фибоначчи. Получите итерационные диаграммы, демонстрирующие циклы с числами вращения $1/3$ и $2/5$. Получите итерационную диаграмму, отвечающую какому-либо квазипериодическому режиму. Постройте спектр в этой точке. Как в структуре спектра проявляется квазипериодический характер режима?

22. Удвоения торов. Для логистического отображения с квазипериодическим воздействием

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + \varepsilon \cos(2\pi y_n), \quad y_{n+1} = y_n + \omega \pmod{1}, \quad \omega = (\sqrt{5} - 1)/2.$$

Пронаблюдайте при небольших ε ($\varepsilon \leq 0.1$) инвариантные кривые (торы). С помощью отображения первого возвращения для переменной x продемонстрируйте удвоения торов с ростом управляющего параметра λ при фиксированной амплитуде ε . Могут ли пересекаться инвариантные кривые, отвечающие удвоенному тору? Как

изображающая точка «прыгает» по 2-тору? 4-тору? Определите примерное положение линий удвоения торов на плоскости (λ, ε) . Какие значения параметра λ отвечают точкам, в которых эти линии подходят к оси λ ? Обсудите связь бифуркации удвоения торов с обычными удвоениями.

23. Странные нехаотические аттракторы. Для логистического отображения под действием квазипериодического воздействия с частотой, отвечающей золотому сечению,

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + \varepsilon \cos(2\pi y_n + \varphi), \quad y_{n+1} = y_n + \omega \pmod{1}, \quad \omega = (\sqrt{5} - 1)/2,$$

постройте отображения первого возвращения для переменной x при $\varepsilon = 0.3, \lambda = 0.9$; $\varepsilon = 0.15, \lambda = 0.9$; $\varepsilon = 0.45, \lambda = 0.8$; $\varepsilon = 0.45, \lambda = 0.9$. Какие из полученных объектов обладают фрактальной структурой? Найдите в каждом случае показатели Ляпунова. Классифицируйте соответствующие аттракторы. Значение $\lambda_c = 1.1580968$, $\varepsilon_c = 0.3602485$, $\varphi_c = 2.48323$ отвечают критической ситуации, в которой сходятся области существования странного нехаотического аттрактора, хаоса и различных торов. Постройте фазовый портрет аттрактора в этой точке. С помощью программы, рисующей фазовые портреты, просмотрите возможные режимы в окрестности критической точки на плоскости (λ, ε) .

Хаос в Интернете

24. Подготовьте интернет-страницу по нелинейной динамике, фракталам и аналогичной тематике. Она может: отражать Ваши личные научные интересы; быть посвящена какому-либо избранному вопросу нелинейной динамики; содержать, например, исторические сведения, персоналии, элементы учебного характера, литературу и т.д. Предварительно, используя поисковые системы и ссылки, которые можно найти на уже известных Вам страницах, найдите и ознакомьтесь в сети Интернет с аналогичными сайтами. Используйте Интернет для накопления материала для Вашего сайта и ссылок. Используйте знания и материалы, полученные Вами при обучении в университете – от лекций до решения задач (с указанием автора и с соответствующей ссылкой. Необходимо получить и согласие автора.) Тема сайта может быть как достаточно глобальной (бифуркации, катастрофы и их приложения и др.), так и более частной (золотое сечение, математический маятник и др.). Дизайн страницы может быть как предельно простым и лаконичным, так и изысканным – по Вашим вкусам и возможностям.

Демонстрации хаоса

32. Подготовьте несколько анимационных программ, иллюстрирующих явления нелинейной динамики (различные бильярды, «прыгающий шарик», двойной маятник, система Лоренца и т.д.). Сделайте программы удобными для демонстраций и пользования.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 25.01.2008

PROBLEMS FOR EDUCATIONAL COURSE «DYNAMICAL CHAOS»

A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov

Problems for students are presented to be solved with computer for the educational course «Dynamical Chaos». The set of problems covers topics from the nature of chaos to the scenarios of its appearance. Methodical recommendations are given.



Кузнецов Сергей Петрович – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). С 1988 – сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, в настоящее время – заведующий лабораторией теоретической нелинейной динамики. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиофизика. Профессор кафедры динамических систем. Автор учебно-научной монографии «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 150 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под руководством С.П. Кузнецова защищены семь кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994-1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».
E-mail: spkuz@rambler.ru



Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и школьной научной лаборатории. Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и лица прикладных наук СГУ, 10 учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002).
E-mail: alkuz@sgu.ru; www.sgtnd.narod.ru



НЕЛИНЕЙНОСТЬ: ОТ КОЛЕБАНИЙ К ХАОСУ

Задачи и учебные программы

А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Н.М. Рыскин, О.Б. Исаева

© Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М., Исаева О.Б., 2006
© Рисунки Соколов Д.В., Кузнецов С.П., 2006
© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006
М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. 188 с.
ISBN 5-93972-514-7

В сборнике представлено около 450 задач по нелинейным колебаниям, катастрофам, динамическим системам, бифуркациям, хаосу, нелинейным волнам, фракталам и комплексной аналитической динамике. Каждый раздел содержит как теоретические задачи, так и задачи исследовательского характера, решаемые при помощи компьютера. Исследовательские задачи могут использоваться для постановки компьютерных практикумов как курсовые работы и для самостоятельного решения. Представлен комплекс взаимосвязанных учебных программ по перечисленным дисциплинам. Задачи и учебные программы апробированы на факультете нелинейных процессов Саратовского госуниверситета. При разработке сборника использовались научные результаты, полученные в группах профессоров Кузнецова А.П., Кузнецова С.П. и Рыскина Н.М., а также опыт интеграции академической (Саратовский филиал ИРЭ РАН) и вузовской науки (ФНП СГУ). Сборник будет полезен преподавателям и студентам, интересующимся нелинейной теорией колебаний и волн и нелинейной динамикой. Может быть использован для построения системы образования, основанной на идеях и подходах нелинейной теории.

Использованы результаты исследований по грантам РФФИ № 00-02-17509, № 03-02-16074, № 03-02-16192, РФФИ-ННИО № 04-02-04011, а также по гранту Американского фонда гражданских исследований и развития.

Оглавление

Предисловие

Из предисловия к книге А.П. Кузнецова «Колебания, катастрофы, бифуркации, хаос»

Глава 1. Нелинейные колебания

Линейность и нелинейность. Нелинейные элементы. Зависимость периода нелинейных колебаний от амплитуды. Особенности спектров нелинейных систем. Мультистабильность и гистерезис. Динамические системы. Консервативные

и диссипативные системы. Фазовые портреты нелинейных систем. Нелинейный осциллятор. Приближение слабой нелинейности. Нелинейный осциллятор. Движение вблизи сепаратрисы. Метод медленно меняющихся амплитуд. Быстрые и медленные движения в случае сильной диссипации. Автоколебательные системы. Уравнения Ван-дер-Поля и Рэля. Жесткое возникновение автоколебаний. Релаксационные автоколебания. Сечение Пуанкаре. Одномерные дискретные отображения. Нелинейные колебания неавтономных систем. Синхронизация. Нелинейные колебания. Задачи для компьютерного исследования.

Глава 2. Катастрофы

Ряд Тейлора и модели. Понятия типичности и коразмерности. «Игрушки» теории катастроф. Критические точки функций одной переменной. Критические точки функций двух переменных. Катастрофа коразмерности один – складка. Катастрофа коразмерности два – сборка. Катастрофа коразмерности три – ласточкин хвост. Каспидные катастрофы в двумерных системах. Катастрофа коразмерности три – эллиптическая омбилика. Катастрофа коразмерности три – гиперболическая омбилика. Катастрофы и теория упругости. Катастрофы и физика фазовых переходов. Кривые и их особенности. Эволюты и эвольвенты. Каустики. Волновые фронты и их особенности. Колебания. Эффект смягчения мод. Нелинейный резонанс. Автоколебания и синхронизация. Катастрофы. Задачи для компьютерных исследований.

Глава 3. Динамические системы и бифуркации

Классификация и примеры динамических систем. Бифуркации одномерных потоков. Бифуркация Андронова–Хопфа. Бифуркации предельных циклов. Бифуркации одномерных отображений коразмерности один. Бифуркации двух- и трехпараметрических одномерных отображений. Бифуркации двумерных отображений. Неустойчивое и устойчивое многообразие. Квазипериодические режимы и синхронизация в двумерных и одномерных отображениях. Бифуркации и синхронизация в системах типа Ван-дер-Поля. Динамические системы и бифуркации. Задачи для компьютерных исследований.

Глава 4. Хаос

Хаос и его свойства. Устойчивость и япуновские показатели. Геометрия странных аттракторов. Удвоения периода и теория Фейгенбаума. Переमेжаемость. Квазипериодические явления. Хаос в Интернете. Демонстрации хаоса.

Глава 5. Нелинейные волны

Эвристический подход к нелинейным волновым уравнениям. Простые волны и образование разрывов. Уравнение Бюргера. Ударные волны. Стационарные нелинейные волны. Получение уравнения КдВ и других «длинноволновых» уравнений в конкретных физических задачах. Точные методы в теории солитонов. Модулированные волны в нелинейных средах. Нелинейные волны. Задачи для компьютерных исследований.

Глава 6. Фракталы и комплексная аналитическая динамика

Фракталы. Комплексная аналитическая динамика.

Глава 7. Учебные программы

Нелинейные колебания. Теория катастроф. Динамические системы и бифурка-

ции. Приложения теории катастроф и бифуркаций. Динамический хаос. Нелинейные волны. Фракталы и комплексная аналитическая динамика.

Литература к комплексу учебных программ «Нелинейность: от колебаний к хаосу»

Книги серии «Современная теория колебаний и волн». Учебники. Книги. Книги серии «Нелинейные волны». Обзоры. Статьи в Соросовском образовательном журнале.

Предисловие

Настоящее пособие представляет собой развитие книги А.П. Кузнецова «Колебания, катастрофы, бифуркации, хаос». Поэтому мы сочли возможным привести ниже предисловие к ней, которое не утратило свою актуальность. Настоящее издание, однако, существенно расширилось – увеличился коллектив авторов, добавились новые задачи и главы и соответственно изменилось название. Теперь мы представляем систему задач по восьми взаимосвязанным курсам нелинейной теории:

- нелинейные колебания,
- теория катастроф,
- динамические системы и бифуркации,
- приложения теории катастроф и бифуркаций,
- динамический хаос,
- от порядка к хаосу,
- нелинейные волны,
- фракталы и комплексная аналитическая динамика,

разработанных и читаемых авторами на факультете нелинейных процессов Саратовского госуниверситета.

Мы сочли, что будет полезным представить и учебные программы по этим курсам, которые вошли в главу 7. Заметим, что появление курса «Приложения теории катастроф и бифуркаций» обусловлено тем, что, как оказалось, после прочтения теории нелинейных колебаний, а затем теории катастроф и бифуркаций необходимо вновь вернуться к некоторым вопросам теории колебаний, чтобы на новом «уровне» обсудить их. (Например, не общеизвестным в учебной литературе является тот факт, что с нелинейным резонансом связана катастрофа сборки, важно дать четкую картину всех возможных бифуркаций в задачах синхронизации и т.д.) Это относится и к физическим аспектам приложений теории катастроф, таким как геометрическая оптика, физика фазовых переходов и т.д. Это необходимо и потому, что на факультете нелинейных процессов СГУ происходит раннее знакомство с нелинейной теорией – так, курс «нелинейные колебания» читается уже на втором курсе. При составлении задач, однако, выяснилось, что их более удобно поместить в главы «теория катастроф» и «динамические системы и бифуркации», поскольку в этом случае система задач выйдет более стройно. Мы представляем здесь и курс «нелинейные волны» вместе с соответствующими задачами. Отметим, что курсы «динамический хаос» и «от порядка к хаосу» в рамках учебной программы объединены также для удобства восприятия в одну главу. Весьма обширным (отчасти неожиданно) получился

курс, связанный с комплексной аналитической динамикой. Здесь наряду с привлекательным для студентов материалом по множествам Мандельброта, Жюлиа и т.д. обнаруживаются весьма нетривиальные и интересные физические приложения.

Отметим также, что мы добавили новые задачи исследовательского характера, которые требуют для решения применения компьютера. Они могут использоваться как в компьютерных практикумах, так и при выполнении курсовых работ и различных учебно-исследовательских практик. Заметим, что некоторые из них допускают очень глубокое исследование на уровне не только дипломной работы, но и аспирантских исследований (например, задачи 100 и 101 из главы 3 о синхронизации в автогенераторе типа ван дер Поля–Дуффинта с жестким возбуждением и их развитие).

В текст «вкраплены» и оригинальные результаты. Например, в задаче 94 из главы «динамические системы и бифуркации» появляются новые оригинальные отображения – «отображения катастроф». Также в задачах 95 и 103 (ив тексте учебной программы) можно видеть оригинальное отображение, названное «универсальным двумерным отображением». Его особенность – демонстрация всех основных бифуркаций двумерных отображений на плоскости след – якобиан линеаризованной матрицы, которые выбраны как его параметры, а также всех характерных сценариев перехода к хаосу. Его исследование также может быть проведено на «аспирантском» уровне. Весьма интересными, на наш взгляд, являются задачи 28 и 29 из 6-ой главы, которые позволяют дать физический пример множества Мандельброта (включая возможный эксперимент) в виде системы связанных систем с удвоениями периода.

При разработке сборника использовались научные результаты, полученные в группах проф. Кузнецова А.П., Кузнецова С.П. и Рыскина Н.М., а также опыт интеграции академической (Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН) и вузовской науки (Саратовский госуниверситет). Мы использовали результаты исследований по грантам РФФИ № 00-02-17509, № 03-02-16074, № 03-02-16192, РФФИ-ННИО № 04-02-04011, а также по гранту Американского фонда гражданских исследований и развития REC-006.

К комплексу учебных программ добавлена и литература. Заметим, что основными учебниками могут служить книги серии «Современная теория колебаний и волн», хотя они все же не находятся во взаимно-однозначном соответствии с настоящим задачником. (Например, в серии отсутствуют книги по теории катастроф, комплексной аналитической динамике и др.) Для удобства читателя мы сгруппировали литературу в отдельные блоки: учебники, книги, обзоры и т.д. Отметим, что очень привлекательными являются также образующие некоторую серию статьи в Соросовском образовательном журнале.

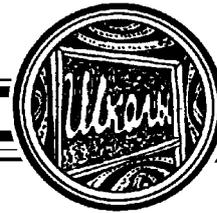
Мы надеемся, что сборник будет полезен преподавателям и студентам, интересующимся нелинейной теорией колебаний и волн и нелинейной динамикой. Он может быть использован для построения системы образования, основанной на идеях и подходах нелинейной теории.

Авторы выражают глубокую благодарность члену-корреспонденту РАН, проф. Д.И. Трубецкову за возможность реализации представленных задач в Саратовском государственном университете. Авторы весьма благодарны проф. Аркадию Пиковскому (университет Потсдама, Германия) за возможность обсуждения вопросов и проблем нелинейной динамики, некоторые из которых нашли отражение и в на-

стоящей книге. Мы благодарны декану ФНП Ю.И. Левину за многолетнее взаимодействие. Авторы благодарны всем преподавателям ФНП СГУ, которые вместе с нами участвовали в апробации задач на семинарах и компьютерных практикумах: Ю.В. Седовой, А.С. Ивановой, Л.В. Тюрюкиной, А.В.Савину, А.А. Балякину, А.А. Короновскому, Л.В. Красичкову, Е.С. Мчедловой и всем студентам факультета нелинейных процессов, принявшим активное участие в этих занятиях. Мы благодарны нашим ученикам и аспирантам, элементы работы над курсовыми, дипломными работами и кандидатскими диссертациями которых нашли отражение в настоящем сборнике. Мы благодарны Д.В. Соколову за рисунок «хаотического кота», открывающего книгу, а также И.Р. Сатаеву за помощь в подготовке компьютерного макета.

Компьютерные рисунки, представленные в начале каждой главы, демонстрируют соответственно конденсацию изображающих точек на фазовой плоскости на предельный цикл уравнения ван дер Поля, систему нормалей к параболе, демонстрирующую катастрофу сборки, бифуркационное дерево логистического отображения, карту ляпуновских показателей кубического отображения, столкновение двух солитонов и фрагмент множества Мандельброта. Рисунок кота и мыши, изучающих логистическое отображение, принадлежит проф. С.П. Кузнецову.

Авторы



Изв. вузов «ПНД», т. 16, № 1, 2008

**XI МЕЖДУНАРОДНАЯ ШКОЛА
ДЛЯ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ И СТУДЕНТОВ
ПО ОПТИКЕ, ЛАЗЕРНОЙ ФИЗИКЕ И БИОФИЗИКЕ**

SARATOV FALL MEETING – SFM’07

Саратов, 25–28 сентября 2007

Организаторы

- Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
- Научно-образовательный центр оптики и биофотоники Саратовского университета
- Научно-образовательный центр «Нелинейная динамика и биофизика» Саратовского университета, АФГИР и Минобрнауки РФ
- Международный научно-образовательный центр «Фотоника» Саратовского университета (проект «Российские инновационные университеты»)
- Институт точной механики и управления РАН, Саратов
- Поволжский региональный центр новых информационных технологий
- Саратовская клиническая железнодорожная больница

Программный комитет: Бабков Л.М., д.ф.м.н., профессор, СГУ; Березин В.И., д.ф.м.н., профессор, СГУ; Давидович М.В., д.ф.м.н., профессор, СГУ; Дербов В.Л., д.ф.м.н., профессор, СГУ; Хлебцов Н.Г., д.ф.м.н., профессор, ИБФРМ РАН (Саратов); Кочубей В.И., д.ф.м.н., профессор, СГУ; Мельников Л.А., д.ф.м.н., профессор, СГУ; Правдин А.Б., к.ф.м.н., СГУ; Рябухо В.П., д.ф.м.н., профессор, СГУ; Сергеев А.М., чл.-корр. РАН, Н. Новгород; Штыков С.Н., д.ф.м.н., профессор, СГУ; Еремина С.В., доцент, СГУ; Тучин В.В., д.ф.м.н., профессор, СГУ; Зимняков Д.А., д.ф.м.н., профессор, СГУ

Секция: Лазерная физика и фотоника IX

Сопредседатели: В.Л. Дербов, Л.А. Мельников, СГУ

Международный программный комитет: В.Л. Дербов, СГУ; А.П. Кузнецов, СФ ИРЭ РАН; Л.А. Мельников, СГУ; М. Марциняк, Национальный институт телекоммуникаций, Польша; А.П. Низовцев, Институт физики НАН Беларуси; В.А. Бек, MicroConnex Corporation (США); А.М. Желтиков, МГУ; В.П. Рябухо, СГУ, ИПТМУ РАН; А.В. Горохов, Самарский ГУ; Ю.В. Попов, МГУ; Б.Б. Жулакян, University of Metz (Франция); С.И. Виницкий, ОИЯИ, Дубна.

Рабочая программа секции

25 сентября 2007

Открытие школы. Пленарная сессия I

Priezzhev A.V., Lugovtsov A.E., Nikitin S.Yu. (Physics Department and International Laser Center, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia). Red blood cell in a laser beam: scattering of light and generation of force

Sensing Kexin Xu (State Key Laboratory of Precision Measuring Technology and Instruments, Tianjin University, P.R. China). New Development of Minimally Invasive Blood Glucose

Доклады

Popov Y.V., Kouzakov K.A. (Moscow State University, Moscow, Russia). Gauge-equivalent forms of the Schrödinger equation for a hydrogen-like atom in a nonstationary electric field

Blaschke D.B. (Joint Institute for Nuclear Research, Russia), *Filatov A.V., Prozorkevich A.V., Shkirmanov D.S., Smolyansky S.A.* (Saratov State University, Russia). Heavy ions beam in the super-intense laser pulse

Volkov A.V., Parshkov O.M. (Saratov State Technical University, Russia). Polarization effects in self-induced transparency on inhomogeneously broadened quantum transitions $J = 0 - J = 1$

Chuluunbaatar O., Gusev A.A., Vinitzky S.I. (Joint Institute for Nuclear Research, Russia), *Kaschiev M.S.* (Institute of Mathematics and Informatics, BAS, Bulgaria)

Serov V.V., Derbov V.L., Melnikov L.A. (Saratov State University, Russia). Resonance transmission and total reflection effects in scattering of electrons by protons in a homogeneous magnetic field

Bashkirov E.K. (Samara State University, Russia). Entanglement in Tavis-Cummings model with one- and two-photon transitions

26 сентября 2007

Пленарная сессия III

Khlebtsov N. (Institute of Biochemistry and Physiology of Plants and Microorganisms, Saratov State University, Russia). Engineering of plasmon-resonant nanoparticles and bioconjugates for biomedical applications

Whitcombe M. (Cranfield University, Silsoe, UK). Initiation of polymerisation in the evanescent wave field for surface plasmon resonance sensor applications

Доклады

Surmenko E.L., Sokolova T.N., Scherbinina O.N. (Saratov State Technical University, Russia). LIBS-study of formation of high-temperature superconducting thin coatings on the substrate

Mazhirina Y.A., Konukhov A.I., Melnikov L.A. (Saratov State University, Russia). Smoothing of the supercontinuum spectrum in the microstructure fibers with periodically modulated diameter

Gorbatenko B.B. (Saratov State Technical University, Russia). Image reconstruction by using the speckle-structure of scattered field

Fiks I.I. (Institute of Applied Physics RAS, Russia). Reconstruction of fluorophore distribution for fluorescence diffuse tomography based on Holder norm

Balalaev S.A. (Image Processing Systems Institute RAS, Russia). Aperture and spatial vibration of the hypergeometric modes with Bessel modes

Belousov A.A. (Image Processing Systems Institute RAS, Samara, Russia). LED forming optics calculation to focus into a required 2D domain

Стеновые доклады

Surmenko E.L., Sokolova T.N. (Saratov State Technical University, Russia). Focusing of laser radiation by axicon optical system for emission spectroscopy

Melnikov L.A., Derbov V.L., Derbov A.V. (Saratov State University, Russia). Self-action of phase-modulated beams in two-level saturated absorber with Doppler broadening

Dikov O.V., Abramov A.A., Ryabkho V.P., Shipovskaya A.B. (Saratov State University, Russia). Digital differential interferometry of phase objects

Khromova I., Melnikov L.A. (Saratov State University, Russia). Dispersion and symmetry properties of anisotropic photonic crystals: band gap calculation

Kozina O.N. (Saratov Division of the Institute of Radio-Engineering and Electronics RAS, Russia), *Melnikov L.A.* (Saratov State University, Russia). Generation conditions for the laser with 2D photonic crystal structures

Soloviev A.S., Konyukhov A.I., Melnikov L.A., Akishin S.A. (Saratov State University, Russia). Mode gain in microstructured optical fibers

Teper N. (Saratov State Social and Economical University, Russia), *Derbov V.* (Saratov State University, Russia). Laser-induced population dynamics in hydrogen atom

Ryabinina M.V., Melnikov L.A. (Saratov State University, Russia). Sub-femtosecond oscillations and high-harmonics of the light-induced polarization of two-level atom in the strong laser field

Chernyaev M.P., Rozhnev A.G. (Saratov State University, Russia). The calculation of dispersion characteristics of microstructure fibers

Международная школа для молодых ученых и студентов по оптике, лазерной физике и биофизике проводится уже в 11 раз. Основная тематика школы, и в частности, секции лазерной физики и фотоники была связана с современными проблемами оптики и фотоники, включая исследования, выполнявшиеся на переднем крае в лазерной физике, электродинамике, фотонным кристаллам, нелинейной и квантовой оптике.

Многие из представленных и обсужденных работ являлись результатом международного сотрудничества российских университетов, в том числе и Саратовского, в международных программах типа INTAS, BRNE и других, а также результатами

прямых научных и образовательных контактов с университетами США, Европы и Азии. На школе представили доклады и участвовали в обсуждении молодые ученые и студенты из Саратовского университета, Саратовского технического университета, МГУ и других российских вузов и учреждений РАН. Присутствие признанных ученых, выступивших с обзорными и оригинальными докладами, а также их участие в обсуждениях докладов, дало школе необходимый научный уровень. Научное сотрудничество невозможно без эффективного общения. Английский язык в настоящее время стал международным научным языком. Именно поэтому в программе школы появилась специальная секция, а рабочим языком являлся английский.

Для публикации в настоящем выпуске журнала «Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика» были выбраны те представленные на секции работы, тематика которых наиболее близка к тематике журнала.

Так, в докладе Ю. Мажириной (Yulia Mazhirina) были представлены результаты теоретического и численного исследования нелинейного распространения сверхкоротких (фемтосекундных) световых импульсов в оптических периодически модулированных по длине волноводах с нелинейной средой, причем среди нелинейных процессов учтены и вырожденное четырехволновое взаимодействие, и нестационарное вынужденное комбинационное рассеяние, и фазовая самомодуляция, и самоукрочение фронтов импульсов.

В докладе И. Хромовой (Irina Khromova) исследовались дисперсионные характеристики волноводов оптического диапазона, направляющее действие которых связано с отражением волн от стенок (брэгговские волноводы или фотонно-кристаллические), причем стенки представляют собой двумерную периодическую структуру, а пустоты в структуре заполнены анизотропным веществом, например ориентированным жидким кристаллом. Как известно, при слабой нелинейности среды возможность получения солитонных режимов распространения определяется именно знаком дисперсии групповой скорости. В отличие от одномерных или квазиодномерных структур собственные волны в таких волноводах, их классификация, а также расчет дисперсионных характеристик весьма нетривиален.

В докладах М. Рябиной и Н. Тепер представлены результаты изучения поведения достаточно простой атомной системы – водородного атома в сильном электромагнитном поле. Несмотря на то, что уравнение Шредингера есть уравнение в частных производных, линейное по неизвестной волновой функции и, в данном случае, имеющее коэффициенты, периодически изменяющиеся во времени, для средних (наблюдаемых) величин получаются существенно нелинейные уравнения, демонстрирующие нетривиальную динамику, особенно при учете состояний, соответствующих инфинитному движению электрона – континуальных состояний. Исследование таких квантовых систем вне рамок теории возмущений обычно требует использования методов нелинейной динамики.

В докладе А. Филатова обсуждались эффекты, связанные с лазерным ускорением тяжелых ионов в вакууме, который при сильных полях сам является нелинейной средой из-за рождения пар частиц.



СГЛАЖИВАНИЕ СПЕКТРА СУПЕРКОНТИНУУМА В МИКРОСТРУКТУРНЫХ ВОЛОКНАХ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ ДИАМЕТРА

Ю.А. Мажирина, А.И. Конюхов, Л.А. Мельников

Представлены результаты численного моделирования процесса генерации суперконтинуума в микроструктурном волокне при возбуждении его фемтосекундными многосолитонными импульсами. Динамика импульсов моделировалась при помощи модифицированного уравнения Шредингера, дисперсия и коэффициент нелинейности в котором рассчитывались для данного волокна методом плоских волн. При периодической модуляции легче выполнить условия фазового синхронизма для генерации дисперсионной волны. Показано, что периодическая модуляция диаметра волокна позволяет управлять спектром многосолитонных импульсов, приводя к спектральному уширению импульса и исчезновению провала между спектрами солитона и дисперсионной волны.

Введение

Микроструктурные волокна позволяют эффективно преобразовывать спектры фемтосекундных и пикосекундных импульсов [15]. При определенных условиях на выходе из волокна спектр занимает весь видимый диапазон, а также часть инфракрасного и ультрафиолетового диапазона. Такое излучение часто называют суперконтинуумом. Лазерная генерация суперконтинуума используется для решения задач оптической связи, метрологии, нелинейной спектроскопии, микроскопии, лазерной биомедицины, оптической когерентной томографии. В ряде задач требуется равномерное распределение интенсивности по длинам волн. Для генерации широкополосного суперконтинуума с равномерным распределением интенсивности по длинам волн было предложено множество различных методов: применение микроструктурных волокон с двумя частотами нулевой дисперсии [2], использование волокна с уменьшающейся по величине дисперсией [3], соединение волокон с различной дисперсией [4], изменение условий фазового синхронизма с помощью брэгговских решеток [5]. Волокна с быстрым уменьшением диаметра позволяют генерировать суперконтинуум уже при помощи отрезков 10-миллиметровой длины [6].

За генерацию суперконтинуума отвечают фазовая самомодуляция [15], распад солитонов и генерация дисперсионной волны [7], а также четырехволновое смешение [8] и вынужденное комбинационное рассеяние (ВКР) [7]. Для эффективной генерации дисперсионной волны необходимо обеспечить условия фазового синхронизма.

Для сглаживания частотного распределения интенсивности на выходе мы предлагаем применить периодически модулированные волокна. Периодическая модуляция диаметра волокна изменяет условия фазового синхронизма. Кроме того, с ее помощью можно контролировать процесс распада солитонов [9]. Когда период модуляции волокна и характеристический период солитона совпадают, появляются дисперсионные волны и(или) может произойти распад солитонов [10]. Дисперсионная волна, излучаемая солитоном, не взаимодействует с ним [11], поэтому энергия не передается назад от дисперсионной волны к солитону. В работе [12] было показано, что если период модуляции близок к $(1/8)z_0$ (z_0 – период солитона [11]), то в спектре солитона появляются локальные пики, связанные с генерацией дисперсионной волны. Аналогичный эффект возникает в волоконных лазерах [13], когда длина резонатора составляет величину $(1/8)z_0$. Для солитонов в волоконном лазере роль возмущения играет периодическое усиление.

В работах [10, 12, 13] появление дисперсионных волн рассматривалось без учета дисперсии высших порядков. В этом случае условия синхронизма для дисперсионной волны могут появиться только за счет периодического возмущения солитона. При наличии дисперсии третьего порядка в области нормальной дисперсии появляется частота, для которой условие синхронизма выполняется без периодической модуляции.

При распространении фемтосекундных солитонов высокого порядка спектр дисперсионной волны и солитонный спектр перекрываются в точках максимального сжатия импульсов. Для солитонов малого порядка спектр солитона отделен от спектра дисперсионной волны [7]. В данной работе мы обсуждаем возможность получения суперконтинуума со сглаженным частотным распределением интенсивности за счет периодической модуляции диаметра микроструктурного волокна. Периодическая модуляция изменяет условия фазового синхронизма так, что резонанс между солитоном и дисперсионной волной появляется на нескольких частотах. В результате выходной спектр сглаживается.

1. Модель

Моделирование динамики солитонов в микроструктурном волокне традиционно основывается на нелинейном уравнении Шредингера [7, 11, 14], модифицированным с учетом вынужденного комбинационного рассеяния и дисперсии высших порядков. Для решения модифицированного уравнения Шредингера, в первую очередь, необходимо знать закон дисперсии для данного волокна. В представленной работе для расчета дисперсионных характеристик мы используем метод плоских волн.

1.1. Моды микроструктурного волокна. При расчете дисперсионных характеристик решалась следующая задача на собственные функции $(\mathcal{H}_x, \mathcal{H}_y)$ и собственные значения β^2 для заданной частоты ω [15]:

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 \mathcal{H}_x + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n^2(x, y) \mathcal{H}_x + \frac{\partial \ln n^2}{\partial y} \left(\frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial x} \right) &= \beta^2 \mathcal{H}_x, \\ \nabla_{\perp}^2 \mathcal{H}_y + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n^2(x, y) \mathcal{H}_y + \frac{\partial \ln n^2}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y} \right) &= \beta^2 \mathcal{H}_y, \end{aligned} \quad (1)$$

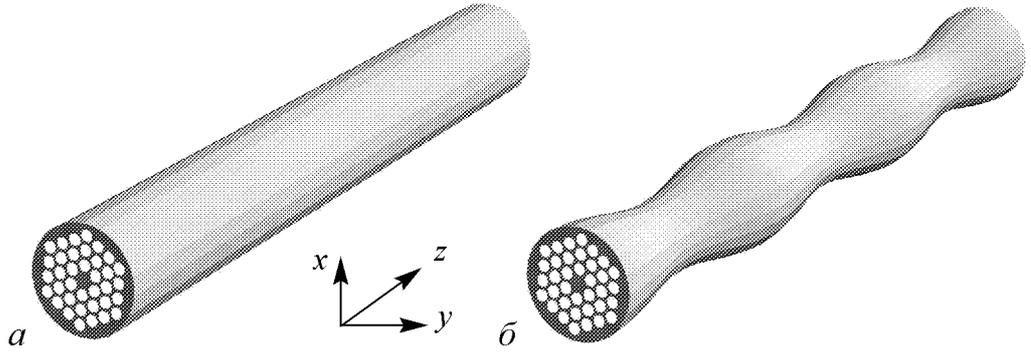


Рис. 1. Схематическое изображение микроструктурного волокна: *a* – без модуляции диаметра; *б* – с модуляцией. Белый цвет в поперечном сечении волокна соответствует воздушным отверстиям, серый цвет – стеклу

где c – скорость света в вакууме, $n(x, y)$ – распределение показателя преломления в плоскости (x, y) (рис. 3), $\vec{\mathcal{H}}_{\perp} = (\mathcal{H}_x, \mathcal{H}_y)$ – поперечные составляющие магнитного поля. В расчетах предполагалось, что волокно изготовлено из стекла ТФ10, характеристики которого были взяты из базы данных [16], показатель преломления воздуха предполагался равным единице. Каждое из решений – β и $(\mathcal{H}_x, \mathcal{H}_y)$ – представляет моду оптического волокна с постоянной распространения β . Постоянная распространения β и поля $(\mathcal{H}_x, \mathcal{H}_y)$ в задаче (1) рассчитывались методом плоских волн [17]. Зная данные величины, можно рассчитать любые другие компоненты векторов напряженности электрического и магнитного полей [15].

При моделировании динамики солитонов предполагалось, что импульс распространяется в основной моде (рис. 2), поэтому далее постоянная распространения β будет соответствовать основной моде.

Микроструктурное волокно с периодическим изменением диаметра может быть описано распределением показателя преломления $n(x, y)$, изменяющимся вдоль волокна (рис. 3, б). Вид функции $n(x, y)$ определяется периодом структуры Λ и радиусом воздушных отверстий R (см. рис. 2). Для того, чтобы охарактеризовать изменение Λ и R , введем масштабный множитель $s(z)$

$$\Lambda(z) = s(z)\Lambda_0, R(z) = s(z)R_0, \quad (2)$$

где $\Lambda_0 = 3.375$ мкм, $R_0 = 1.3$ мкм.

Для моделирования распространения импульса частотная зависимость постоянной распространения β аппроксимировалась функцией

$$\beta(\omega, s) = \left(\sum_{m=0}^3 a_m(s)\omega^m + \sum_{n=1}^6 b_n(s)\omega^{-n} \right) \frac{\omega}{c}. \quad (3)$$

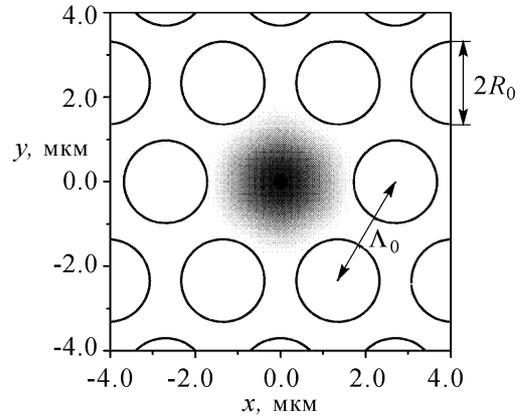


Рис. 2. Поперечное распределение z -компоненты вектора Пойтинга. Максимуму соответствует черный цвет. Окружности схематически показывают воздушные отверстия, Λ – период структуры, R – радиус воздушных отверстий

Каждый коэффициент $a_m(s)$, $b_n(s)$ аппроксимировался для заданного значения масштабного множителя s полиномом шестого порядка.

Вследствие анизотропии сердцевинны микроструктурного волокна, определяемой технологическими процессами изготовления, можно считать поляризацию основной моды волокна фиксированной. Задача, таким образом, сводится к скалярной [18].

При изменении диаметра волокна меняется не только дисперсия, но и коэффициент нелинейности γ [18]

$$\gamma = n_2 \left(\frac{\omega_0}{c} \right) \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} (|\mathcal{E}_x|^2 + |\mathcal{E}_y|^2)^2 dx dy}{\left[\iint_{-\infty}^{\infty} (|\mathcal{E}_x|^2 + |\mathcal{E}_y|^2) dx dy \right]^2}, \quad (4)$$

где $n_2 = 2.2 \cdot 10^{-13} \text{ км}^2 \text{ ВТ}^{-1}$ – нелинейный показатель преломления*. Поперечные компоненты вектора напряженности электрического поля $(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y)$ рассчитывались по известным значениям полей $(\mathcal{H}_x, \mathcal{H}_y)$ основной моды. Коэффициент нелинейности $\gamma = \gamma(s)$ аппроксимировался полиномом третьего порядка. Для несущей частоты $\omega_0 = 1.21 \text{ фс}^{-1}$ (длина волны $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0 = 1.55 \text{ мкм}$)

$$\gamma(s) = 593.61 - 973.93s + 623.83s^2 - 145.59s^3,$$

где $\gamma(s)$ имеет размерность $(\text{км} \cdot \text{ВТ})^{-1}$.

1.2. Уравнение Шредингера. Будем считать, что в волокне возбуждается только основная мода. Тогда поперечные компоненты вектора напряженности электрического поля изменяются по закону $(E_x, E_y) = A(z, t)(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y) \exp(-i\omega_0 t)$, где $A(z, t)$ – амплитуда основной моды. Изменение $A(z, t)$ описывается модифицированным уравнением Шредингера

$$\frac{\partial A(z, t)}{\partial z} = -\frac{\alpha}{2} A + (\hat{\mathbf{D}})A + i \left(P_{NL} + i \frac{2}{\omega_0} \frac{\partial P_{NL}}{\partial t} \right), \quad (5)$$

где $\hat{\mathbf{D}}$ – дисперсионный оператор. В частотном представлении данный оператор имеет вид

$$\hat{\mathbf{D}}(\omega, s) = i\beta(\omega, s) - i\beta(\omega_0, s) - i\beta_1(s)(\omega - \omega_0), \quad (6)$$

где $\beta_1(s) = (\partial\beta(\omega, s)/\partial\omega)|_{\omega=\omega_0}$. Как правило, оператор $\hat{\mathbf{D}}(\omega, s)$ записывается с использованием разложения постоянной распространения $\beta(\omega, s)$ в ряд Тейлора в окрестности частоты ω_0 . Для широкополосного излучения аппроксимация (3) является более предпочтительной, так как позволяет достаточно точно описать спектральную зависимость β малым числом слагаемых.

Нелинейная поляризация среды P_{NL} задается уравнением

$$P_{NL} = (1 - f_R)\gamma(s)|A|^2 A(z, t) + f_R\gamma(s)QA(z, t), \quad (7)$$

*Значение n_2 взято из работы [19], где представлены данные по нелинейности стекла SF6 – аналога стекла ТФ10.

где $f_R = 0.18$; $Q(t)$ - нелинейная восприимчивость, вызванная вынужденным комбинационным рассеянием [14], которая определяется из уравнения

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + \frac{2}{T_2} \frac{\partial Q}{\partial t} + \Omega^2 Q(z, t) = \Omega^2 |A(z, t)|^2, \quad (8)$$

где $T_2 = 32$ фс, $\Omega = 13.1$ ТГц.

Начальный импульс задавался в виде $A(0, t) = A_0 \text{sech}(t/\tau_0)$, где $\tau_0 = 200$ фс – длительность импульса. Динамика солитона, в основном, определяется его порядком [11, 18]

$$N = \tau_0 \sqrt{\frac{\gamma P_0}{|\beta_2|}}, \quad (9)$$

где $P_0 = |A_0|^2$ – пиковая мощность начального импульса, $\beta_2 = (\partial^2 \beta / \partial \omega^2)|_{\omega=\omega_0}$. Величины γ и β_2 в формуле (9) рассчитываются для $z = 0$. Во всех вычислениях использовалось $N = 4$.

2. Генерация дисперсионной волны в волокне с постоянным диаметром

Для демонстрации преимуществ, получаемых с помощью периодической модуляции диаметра микроструктурного волокна, рассмотрим сначала уширение спектра и генерацию дисперсионной волны в волокне с постоянным диаметром (рис. 3–5).

Для возбуждения дисперсионной волны на заданной частоте необходимо обеспечить выполнение условия фазового синхронизма между дисперсионной волной и солитоном [7, 11]

$$\Delta k = 0, \text{ где } \Delta k = \beta(\omega_d) - \beta(\omega_0) - (\omega_0 - \omega_d)\beta_1 - \gamma P_0. \quad (10)$$

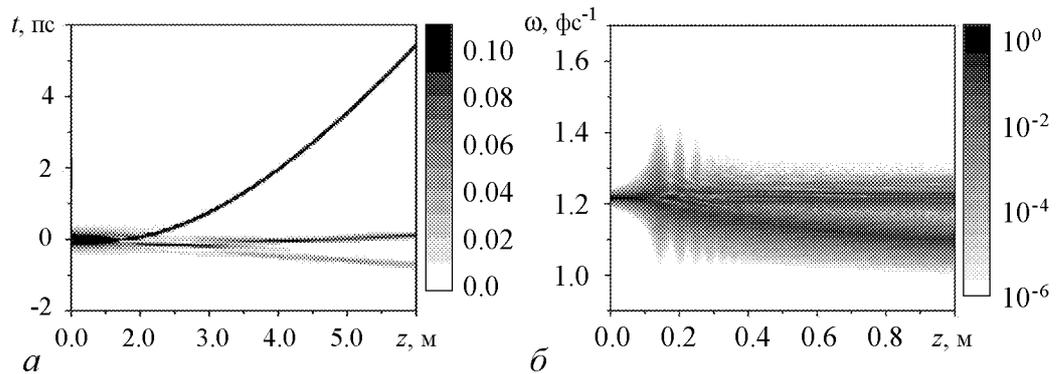


Рис. 3. Эволюция многосолитонного импульса (а) и его спектра (б) в микроструктурном волокне без модуляции. Период структуры $\Lambda = 2.7$ мкм, радиус воздушных отверстий $R = 1.04$ мкм, что соответствует масштабному множителю $s = 0.8$. Рис. б построен в логарифмическом масштабе. На рис. а плотность серого цвета соответствует мгновенной интенсивности. На рис. б плотность серого цвета соответствует распределению энергии в спектре импульса

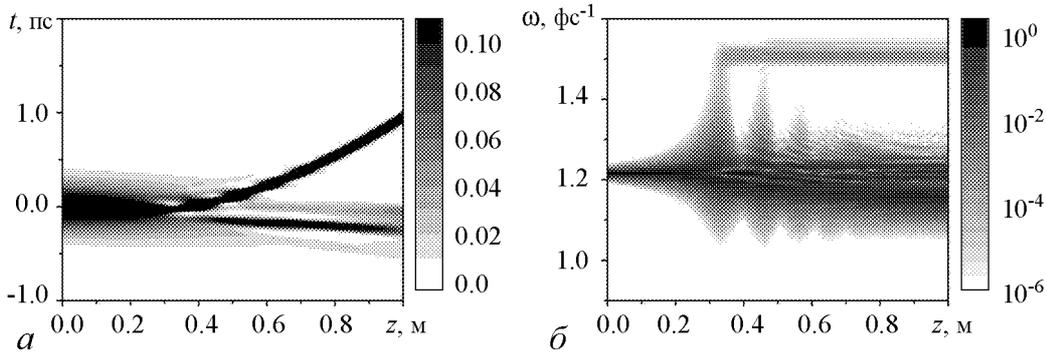


Рис. 4. Эволюция многосолитонного импульса (а) и его спектра (б) в микроструктурном волокне без модуляции. Период структуры $\Lambda = 3.375$ мкм, радиус воздушных отверстий $R = 1.3$ мкм, что соответствует масштабному множителю $s = 1.0$. Рис. б построен в логарифмическом масштабе

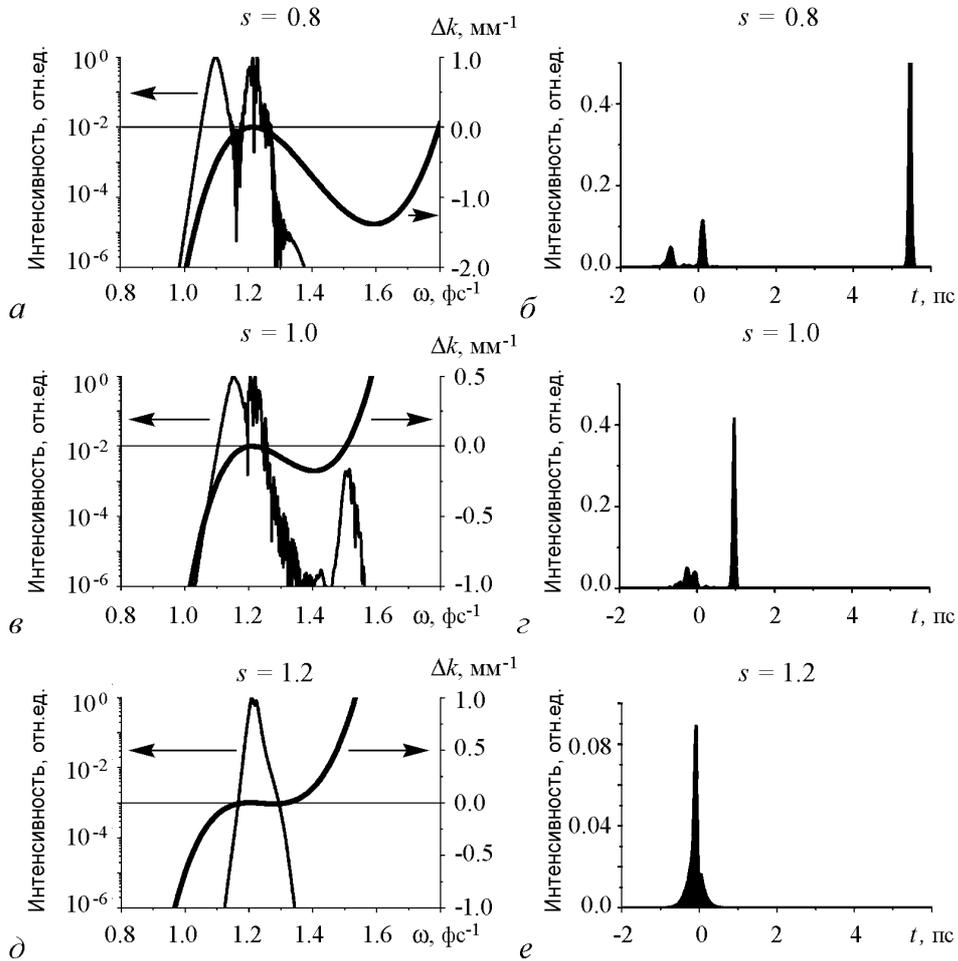


Рис. 5. Изменение характеристик импульсов на выходе из волокна ($z = 1$ м) с различным диаметром. Диаметр волокна, период структуры и радиусы воздушных отверстий задаются масштабным множителем s . а, б, д – спектры импульсов и фазовая расстройка Δk ; б, з, е – импульсы на выходе из волокна

На небольших дистанциях $z < 0.1$ многосолитонный импульс испытывает сжатие [11], что показано на рис. 4, *a*. Из-за солитонного сжатия спектр уширяется (рис. 4 *б*). На расстоянии $z = 0.2$ м многосолитонный импульс расщепляется, что вызвано влиянием дисперсии высших порядков и вынужденным комбинационным рассеянием [7, 8]. Для выбранных параметров волновода условия синхронизма достигаются на частоте $\omega_d = 1.797 \text{ фс}^{-1}$ (рис. 5 *a*). Однако при выбранных параметрах ($S = 0.8$) спектр уширен недостаточно (см. рис. 4, *б*).

Для волокна с большими радиусами отверстий и большим периодом (рис. 4, *б*) условия синхронизма достигаются на частоте $\omega_d = 1.5 \text{ фс}^{-1}$ (рис. 5, *в*). Данная частота расположена достаточно близко к несущей частоте солитона $\omega_0 = 1.21 \text{ фс}^{-1}$, и спектральное уширение при многосолитонном сжатии приводит к возбуждению дисперсионной волны при $z = 0.3$ м. Дисперсионная волна, находящаяся в высоко-частотной области спектра, является источником суперконтинуума [7].

На рис. 5 изображены характеристики импульсов после прохождения одного метра микроструктурных волокон, имеющих различные значения масштабного коэффициента s . Для появления дисперсионной волны, многосолитонный импульс должен сжаться настолько, чтобы его спектр включал частоту ω_d . На рис. 5, *в* для $s = 1.0$ показано, что самосжатия многосолитонного импульса достаточно для перекрытия спектра импульса с резонансной частотой ω_d , где достигается фазовый синхронизм и появляется дисперсионная волна. Нетрудно видеть, что спектр солитона и дисперсионной волны разделены спектральным провалом. На рис. 5, *д* дисперсионная волна не появляется из-за отсутствия условия фазового синхронизма. С увеличением масштабного коэффициента s расстояние между импульсами на выходе из волокна сокращается (рис. 5 *б*, *з*). Это связано с уменьшением коэффициента нелинейности γ и уменьшением коэффициентов дисперсии высших порядков. Для $s = 1.2$ (рис. 5, *е*) импульс практически не расщепляется.

3. Генерация дисперсионной волны в волокне с периодическим изменением диаметра

Чтобы проанализировать условия фазового синхронизма, разложим амплитуду $A(z, t)$ в ряд Фурье по координате z . Коэффициенты в модифицированном уравнении Шредингера являются периодическими функциями z . Принимая это во внимание, найдем решение в виде ряда Фурье

$$A(z, \omega) = \sum_{j=-N}^N F_j(\omega) \exp(i\beta_j z), \quad (11)$$

где

$$\beta_j = \beta(\omega) + j \frac{2\pi}{z_m}. \quad (12)$$

Таким образом, для периодической среды условия фазового синхронизма модифицируются

$$\Delta k_{jl}(\omega_d) = 0, \text{ где } \Delta k_{jl}(\omega) = \frac{2\pi}{z_m}(j-l) + \beta(\omega) - \beta(\omega_0) - (\omega - \omega_0)\beta_1 - \gamma P_0. \quad (13)$$

В результате появляется несколько частот, удовлетворяющих условию синхронизма.

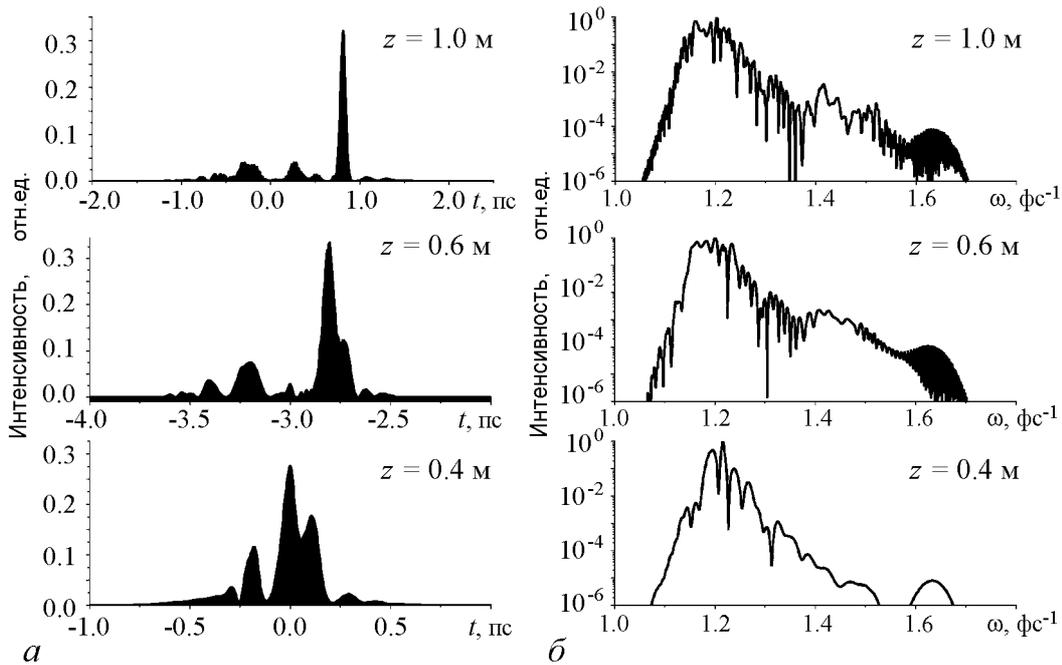


Рис. 6. Влияние периодической модуляции на дисперсионную волну. Импульс (а) и его спектр (б) после прохождения в микроструктурном волокне различных стадий дистанции z , м: 1.0, 0.6, 0.4

В расчетах масштабный коэффициент изменялся по закону

$$s(z) = 1 + 0.2 \sin(2\pi z/z_m + \pi), \quad (14)$$

где $z_m = 0.14$ м - период модуляции. Периодическая модуляция слабо воздействует на фундаментальные солитоны, которые получают за счет расщепления много-солитонного импульса. Поэтому для эффективного воздействия на импульс период модуляции должен быть меньше расстояния, соответствующего расщеплению много-солитонного импульса.

Рассмотрим характеристики импульсов (рис. 6) на расстояниях $z = 1.0$ м, $z = 0.6$ м и $z = 0.4$ м в микроструктурном волокне с модуляцией (14). Масштабный коэффициент выбран таким образом, чтобы вдоль волокна он изменялся в пределах $0.8 < s(z) < 1.2$. Величина $s(z)$ принимает каждое из значений, рассмотренных на рис. 5. В периодической среде условия фазового синхронизма достигаются легче. Это ведет к исчезновению спектрального провала (см. рис. 5, в) между спектрами солитона и дисперсионной волны. Очевидно, что в волокне с периодической модуляцией спектр импульса становится шире по сравнению со спектром, достигаемым в волокне без модуляции (ср. рис. 6, б и рис. 5, а, в, д).

После расщепления импульсы, распространяясь в волокне, уширяются (см. рис. 5, а). Однако их уширение практически не сказывается на ширине спектра (см. рис. 5, в). Наличие нескольких импульсов приводит к появлению быстрых осцилляций в их суммарном спектре.

Заключение

Для исследования возможности управления генерацией суперконтинуума было изучено распространение сверхкоротких световых импульсов в микроструктурном волокне с периодической модуляцией диаметра сердцевины. В работе представлены результаты численного моделирования, демонстрирующие спектральное уширение фемтосекундных солитонов высокого порядка. Показано, что периодическая модуляция вследствие изменения условий фазового согласования приводит к дополнительному спектральному уширению импульса и исчезновению провала между спектрами солитона и дисперсионной волны. Структура спектра на выходе волокна зависит от периода модуляции диаметра сердцевины.

На распад фемтосекундных и субпикосекундных солитонов, распространяющихся в микроструктурных волокнах, доминирующее влияние оказывает вынужденное комбинационное рассеяние. За счет вынужденного комбинационного рассеяния многосолитонный импульс распадается на фундаментальные солитоны и дисперсионную волну на расстоянии много меньшем периода солитона. Периодическая модуляция практически не оказывает влияния на динамику фундаментальных солитонов, поэтому для эффективного управления спектром суперконтинуума период модуляции должен быть достаточно малым в сравнении с периодом солитона и основное влияние модуляции связано с изменением условий фазового синхронизма.

Библиографический список

1. Желтиков А.М. Да будет белый свет: генерация суперконтинуума сверхкороткими лазерными импульсами // УФН. 2006. Т. 176. С. 23
2. Genty G., Lehtonen M., and Ludvigsen H. Enhanced bandwidth of supercontinuum generated in microstructured fibers // Opt. Expr. 2004. Vol. 12. P. 3471
3. Mori K., Takara H., Kawanishi S. Analysis and design of supercontinuum pulse generation in a single-mode optical fiber // J. Opt. Soc. Am. B. 2001. Vol. 18. P. 1780.
4. Hori T., et al. Flatly broadened, wideband and low noise supercontinuum generation in highly nonlinear hybrid fiber // Opt. Expr. 2004. Vol. 12. P. 317
5. Li Y., et al. Interaction of supercontinuum and Raman solitons with microstructure fiber gratings // Opt. Expr. 2005. Vol. 13. P. 998
6. Lu F., Deng Y., Knox W.H. Generation of broadband femtosecond visible pulses in dispersion-micromanaged holey fibers // Opt. Lett. 2005. Vol. 30. P. 1566
7. Cristiani I., et al. Dispersive wave generation by solitons in microstructured optical fibers // Opt. Expr. 2003. Vol. 12. P. 124.
8. Nikolov N.I., et al. Improving efficiency of supercontinuum generation in photonic crystal fibers by direct degenerate four-wave mixing // J. Opt. Soc. Am. B. 2003. Vol. 20. P. 2329
9. Bauer R.G., Melnikov L.A. Multi-soliton fission and quasi-periodicity in a fiber with a periodically modulated core diameter // Opt. Commun. 1995. Vol. 115. P. 190.
10. Hasegawa A., Kodama Y. Guiding center solitons // Phys. Rev. Lett. 1991. Vol. 66. P. 161

11. *Ахмедиев Н. и др.* Солитоны, нелинейные импульсы и пучки. Москва: Изд-во Физматлит, 2003.
12. *Mollenauer L., Gordon J., Islam M.* Soliton propagation in long fibers with periodically compensated loss // IEEE J. of Quant. Electron. 1986. Vol. 22. P. 157
13. *Nelson L.E., Jones D.J., Tamura K., Haus H.A., Ippen E.P.* Ultrashort-pulse fiber ring lasers // Appl. Phys. B. 1997. Vol. 65. P. 277
14. *Ахманов С.А., Коротеев Н.И.* Методы нелинейной оптики в спектроскопии рассеяния света. М.: Наука, 1981.
15. *Снайдер А., Лове Дж.* Теория оптических волноводов. М.: Радио и связь, 1987.
16. <http://www.glassbank.ru/eng/>
Дисперсионные характеристики стекла марки ТФ10 сходны с дисперсионными характеристиками стекла марки SF6 (Schott AG, Германия).
17. *Broeng J., et al.* Photonic crystal fibres: a new class of optical waveguides // Opt. l Fib. Tech. 1999. Vol. 5. P. 305
18. *Агравал Г.* Нелинейная волоконная оптика. М.: Мир, 1996.
19. *Feng X., Mairaj A.K., Hewak D.W., Monro T.M.* Nonsilica glasses for holey fibers // J. of Lightwave Tech. 2005. Vol. 23. P. 2046
20. *Golovchenko E. A., Dianov E. M., Prokhorov A. M., and Serkin V. N.* Decay of optical solitons //JETP Lett. 1985. Vol. 42. P. 87.
21. *Tai K., Hasegawa A., Bekki N.* Fission of optical solitons induced by stimulated Raman effect // Opt. Lett. 1988. Vol. 13. P. 392.

*Саратовский государственный
университет*

Поступила в редакцию 24.12.2007

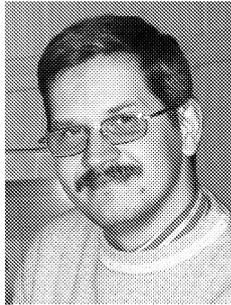
**SUPERCONTINUUM SPECTRUM SMOOTHING
IN THE MICROSTRUCTURE FIBERS
WITH PERIODICALLY MODULATED DIAMETER**

Yu.F. Mazhirina, A.I. Konukhov, L.A. Melnikov

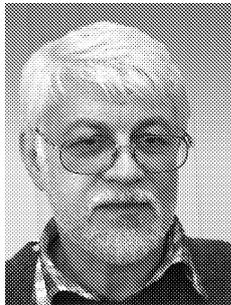
The results of numerical modelling of the supercontinuum generation in microstructure fibers excited by femtosecond multi-soliton pulses are presented. Pulse dynamics is modelled using the extended Schrodinger equation, in which the dispersion and nonlinear coefficient for given fiber are calculated by plane wave method. It is more easy to achieve the phase-matching conditions for the dispersive wave generation in the fibers with periodical modulated diameter. It is shown that the periodical modulation of fiber diameter allows to control the spectrum of multi-soliton pulses that leads to spectral broadening and disappearance of the gap between spectra of soliton and dispersive wave.



Мажирина Юлия Александровна – родилась в 1983 году, окончила физический факультет Саратовского государственного университета (СГУ) в 2005 году. С 2005 инженер, с 2006 аспирант, с 2007 ассистент кафедры лазерной и компьютерной физики СГУ. Область научных интересов: волноведущие свойства и численное моделирование фотонно-кристаллических волокон и фотонно-кристаллических структур, распространение солитонов в оптических волокнах, генерация суперконтинуума.
E-mail:mazhirina@mail.ru



Конюхов Андрей Иванович – родился в 1972 году, окончил физический факультет Саратовского государственного университета в 1994 году. С 1998 – кандидат физико-математических наук. С марта 1998 по февраль 2003 года работал в должности старшего научного сотрудника Саратовского филиала института радиотехники и электроники РАН. Доцент кафедры лазерной и компьютерной физики с марта 2003 года. Область научных интересов: физика лазеров, лазерные и волоконно-оптические измерительные системы, нелинейная динамика лазеров и оптических систем, нелинейное распространение световых пучков и импульсов в волноведущих и резонансных средах, лазеры сверхкоротких импульсов.
E-mail:kai@optics.sgu.ru



Мельников Леонид Аркадьевич – родился в 1949 году в Саратовской области. Окончил Саратовский университет в 1971 году, защитил кандидатскую диссертацию (1978) и докторскую (1992) – обе по физико-математическим наукам. С 1971 года начал работать ассистентом кафедры оптики СГУ. В 1992–2006 годы был заведующим лабораторией лазерных и волоконно-оптических систем Саратовского филиала ИРЭ РАН. С 1997 года – заведующий кафедрой лазерной и компьютерной физики СГУ, профессор (2007). Научные интересы включают: нелинейную динамику световых пучков и импульсов в лазерах и оптических волокнах, лазерную физику, физику сверхкоротких световых импульсов, лазерную спектроскопию экзотических атомов, применения лазеров в технике и науках о жизни, оптическую гироскопию, компьютерное моделирование лазерных систем, волоконную оптику, фотонные кристаллы и волокна, биочипы, стекловолоконную технологию, микроэлектромеханические системы, оптические датчики, физику и применение углеродных нанокластеров, оптику металло-диэлектрических наноструктур. Является членом Оптического общества Америки и Международного общества по оптической технике. Автор более чем 200 научных публикаций и редактор десяти тематических выпусков трудов SPIE.
E-mail:lam-pels@yandex.ru



**СОБСТВЕННЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ
В АНИЗОТРОПНЫХ ФОТОННЫХ КРИСТАЛЛАХ:
МЕТОД И ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА, СИММЕТРИЯ
ДИСПЕРСИОННОЙ ПОВЕРХНОСТИ
ДЛЯ ДВУМЕРНОГО КРИСТАЛЛА**

И.А. Хромова, Л.А. Мельников

Представлен полностью векторный метод плоских волн для расчета характеристик собственных электромагнитных волн в периодических диэлектрических средах с произвольной геометрией и размерностью, образованных как изотропными, так и анизотропными элементами. С его помощью исследуется влияние переориентации молекул анизотропного материала в фотонном кристалле на свойства симметрии дисперсионной поверхности. В статье показано, как форма неприводимой части зоны Бриллюэна двумерного фотонного кристалла зависит от ориентации молекул анизотропного материала в составе периодической структуры.

Введение

Фотонные кристаллы и устройства на их основе являются одними из самых популярных и изучаемых объектов в области оптики и фотоники, благодаря их необыкновенным свойствам, широкому спектру возможностей и относительной простоте реализации [1, 2].

Настоящая работа посвящена анизотропным фотонным кристаллам – искусственным периодическим диэлектрическим средам, компоненты которых изготовлены из анизотропного материала. Такой род фотонных кристаллов интересен с точки зрения дисперсионных свойств, а также возможности управления характеристиками устройств на их основе [3–7].

В работе представлен полностью векторный метод плоских волн для расчета периодических диэлектрических сред как изотропных, так и анизотропных, произвольной геометрии и размерности.

С помощью предлагаемого метода исследуется влияние переориентации молекул анизотропного материала в фотонном кристалле (что может происходить под внешним воздействием) на свойства симметрии его дисперсионной поверхности. Данный вопрос интересен как с феноменологической, так и с практической точек зрения. Последнее связано с тем, что при расчете положения запрещенных зон той или иной фотонно-кристаллической структуры используется контур внутри зоны

Бриллюэна, содержащий экстремумы дисперсионной поверхности, причем форма и расположение этого контура (границы неприводимой части зоны Бриллюэна) внутри зоны Бриллюэна сильно зависит от ориентации анизотропного материала в фотонном кристалле, что продемонстрировано в данной работе.

Показана также возможность управления положением и шириной запрещенных зон в анизотропных фотонных кристаллах и рассмотрены возможности применения анизотропных материалов в фотонно-кристаллических волноводах с поллой сердцевиной.

1. Метод плоских волн для анизотропных периодических сред

Для расчета фотонно-кристаллических структур традиционно существуют несколько групп методов: методы, в которых решаются непосредственно интегральные уравнения [8]; методы, представляющие решения в виде локализованных функций [9]; методы, связанные с разложением поля внутри структуры по плоским волнам [10–14].

Наиболее приемлемым при поиске локализованных мод (например, в структурах с дефектами) является метод локализованных функций. Однако при расчете дисперсии идеальной фотонно-кристаллической структуры как бесконечной среды он требует значительных временных затрат.

На фоне этого, метод разложения по плоским волнам является выгодным решением для расчета дисперсии бездефектных периодических сред. В частности он удобен для предварительного расчета запрещенных зон при моделировании сложных структур на базе периодических диэлектрических сред.

Анизотропность материалов, используемых при изготовлении фотонных кристаллов, осложняет расчеты, так как в дисперсионном уравнении появляется векторная величина диэлектрической проницаемости. При этом становятся неприменимыми скалярные приближения (см., например, [15, 16]), так как они дают довольно грубое приближение решений (это будет продемонстрировано ниже) и, кроме, того не позволяют рассчитывать структуры с негомеотропным заполнением анизотропными материалами.

В данной работе построен и применен метод плоских волн, позволяющий рассчитывать структуры с произвольной геометрией, размерностью и произвольными материалами (включая анизотропные и негомеотропные).

Рассмотрим бесконечную периодическую структуру, изготовленную в произвольном случае из изотропных и анизотропных материалов, например, из стекла с жидкокристаллическим заполнением. Как уже было упомянуто выше, анизотропия материала математически выражается тензором диэлектрической проницаемости, который в случае выбора декартовой системы координат с базисом, состоящим из векторов, сонаправленных с осями симметрии анизотропного материала, имеет вид

$$\hat{\epsilon}_0 = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где величины $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ характеризуют диэлектрическую проницаемость вдоль каждой из осей.

При выборе другой декартовой системы координат, соответствующей, в частности, переориентации молекул анизотропного материала под внешним воздействием, диэлектрическую проницаемость можно выразить через изначальное значение $\hat{\epsilon}_0$ и соответствующую матрицу поворота $\mathbf{T}(\mathbf{r})$, где \mathbf{r} – вектор координат,

$$\hat{\epsilon}_a(\mathbf{r}) = \mathbf{T}(\mathbf{r})\hat{\epsilon}_0(\mathbf{r})\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{r}). \quad (2)$$

Для описания диэлектрических свойств подобных смешанных структур удобно ввести функцию профиля $f(\mathbf{r})$, дискретные значения которой выражают соответствие данной координаты тому или иному материалу,

$$f(\mathbf{r}) = \begin{cases} f_0 = 0 & \text{для вмещающей среды,} \\ f_1 = 1 & \text{для материала 1,} \\ \dots \\ f_i = i & \text{для материала } i, \\ \dots \\ f_N = N & \text{для материала } N, \end{cases} \quad (3)$$

где N – число различных материалов, присутствующих в описываемой структуре.

В случае двухкомпонентного фотонного кристалла из стекла и воздуха (который впоследствии возможно заполнить анизотропным материалом) данная функция может быть определена следующим образом:

$$f(\mathbf{r}) = \begin{cases} f_0 = 0 & \text{для воздушных элементов,} \\ f_1 = 1 & \text{для стеклянных элементов.} \end{cases} \quad (4)$$

Функция $f(\mathbf{r})$ полностью описывает геометрию периодической структуры, определяя положение анизотропных и изотропных материалов, а также материалов с различными характеристиками. Используя данную функцию и обозначая для дальнейшего удобства обратный тензор диэлектрической проницаемости как $\hat{\eta}(\mathbf{r}) = \hat{\epsilon}^{-1}(\mathbf{r})$, можно записать обратный тензор диэлектрической проницаемости в произвольной точке структуры в виде

$$\hat{\eta}(\mathbf{r}) = \hat{\eta}_0(\mathbf{r}) \frac{\prod_{j=1}^N (f(\mathbf{r}) - j)}{\prod_{j=1}^N (f_0 - j)} + \sum_{i=1}^{N-1} \hat{\eta}_i(\mathbf{r}) \frac{\prod_{j=0}^{i-1} (f(\mathbf{r}) - j) \prod_{j=i+1}^N (f(\mathbf{r}) - j)}{\prod_{j=0}^{i-1} (f_i - j) \prod_{j=i+1}^N (f_i - j)} + \hat{\eta}_N(\mathbf{r}) \frac{\prod_{j=0}^{N-1} (f(\mathbf{r}) - j)}{\prod_{j=0}^{N-1} (f_N - j)}, \quad (5)$$

В случае двухкомпонентного фотонного кристалла, состоящего из изотропного и анизотропного материалов, имеем

$$\hat{\eta}(\mathbf{r}) = \hat{\eta}_{glass}f(\mathbf{r}) + \hat{\eta}_a(\mathbf{r})(1 - f(\mathbf{r})), \quad (6)$$

где

$$\hat{\eta}_a(\mathbf{r}) = \hat{\epsilon}_a^{-1}(\mathbf{r})$$

обратный тензор диэлектрической проницаемости анизотропного материала вида (2),

$$\hat{\eta}_{glass} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon_{glass}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\epsilon_{glass}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\epsilon_{glass}} \end{pmatrix}$$

обратный тензор диэлектрической проницаемости изотропного материала (в данном случае стекла), обладающего скалярной диэлектрической проницаемостью ϵ_{glass} .

Используя выражение (5) или (6) для определения обратной диэлектрической проницаемости в каждой точке и обозначая длину волны в свободном пространстве как λ , можно записать уравнение Гельмгольца

$$\nabla \times (\hat{\eta}(\mathbf{r})\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r})) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}), \quad (7)$$

описывающее поведение полей в рассматриваемой системе. В рассматриваемом методе решение уравнения представляется в виде суперпозиции плоских волн

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \sum_{\mathbf{G}} \mathbf{H}_{\mathbf{G}} \exp(i\mathbf{G}\mathbf{r}), \quad (8)$$

где \mathbf{G} – вектор обратной решетки фотонного кристалла, \mathbf{k} – вектор Блоха, $\mathbf{H}_{\mathbf{G}}$ – амплитуда разложения напряженности магнитного поля по плоским волнам.

Третье уравнение Максвелла $\text{div}\mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0$ в данной ситуации говорит о том, что вектор $\mathbf{H}_{\mathbf{G}}$ ортогонален вектору $\mathbf{e}_3 = (\mathbf{k} + \mathbf{G})/|\mathbf{k} + \mathbf{G}|$. Таким образом, специально выбранная система координат позволяет понизить число ненулевых компонент $\mathbf{H}_{\mathbf{G}}$ и тем самым понизить число решаемых уравнений. Вводя два ортогональных вектора \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 , каждый из которых ортогонален вектору \mathbf{e}_3 и зависит от вектора обратной решетки \mathbf{G} таким образом, что $\mathbf{H}_{\mathbf{G}} = \mathbf{H}_{\mathbf{G}}^{(1)}\mathbf{e}_1 + \mathbf{H}_{\mathbf{G}}^{(2)}\mathbf{e}_2$, можно в рамках созданного базиса $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ привести уравнение Гельмгольца (7) к матричному уравнению относительно $\mathbf{H}_{\mathbf{G}}$

$$\sum_{\mathbf{G}'} |\mathbf{k} + \mathbf{G}| \cdot |\mathbf{k} + \mathbf{G}'| \mathbf{M} \begin{pmatrix} H_{\mathbf{G}'}^{(1)} \\ H_{\mathbf{G}'}^{(2)} \end{pmatrix} = - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \begin{pmatrix} H_{\mathbf{G}}^{(1)} \\ H_{\mathbf{G}}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где \mathbf{M} – матрица, содержащая фурье-компоненты обратного тензора диэлектрической проницаемости $\hat{\eta}_{\mathbf{G}}$. В самом общем случае имеем

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^{\mathbf{G}'} \cdot [\mathbf{e}_2^{\mathbf{G}} \times (\hat{\eta}_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'} \cdot \mathbf{e}_2^{\mathbf{G}'})] - \mathbf{e}_1^{\mathbf{G}} \cdot [\mathbf{e}_2^{\mathbf{G}} \times (\hat{\eta}_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'} \cdot \mathbf{e}_1^{\mathbf{G}'})] \\ \mathbf{e}_2^{\mathbf{G}'} \cdot [\mathbf{e}_2^{\mathbf{G}} \times (\hat{\eta}_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'} \cdot \mathbf{e}_2^{\mathbf{G}'})] - \mathbf{e}_2^{\mathbf{G}'} \cdot [\mathbf{e}_2^{\mathbf{G}} \times (\hat{\eta}_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'} \cdot \mathbf{e}_1^{\mathbf{G}'})] \end{pmatrix}. \quad (10)$$

В случае гомеотропного анизотропного материала, когда ориентация молекул, а соответственно, и локальные диэлектрические свойства не зависят от координат (в пределах участков структуры, заполненной анизотропным материалом), $\hat{\eta}_a(\mathbf{r}) = \hat{\eta}_a$, все фурье-преобразование производится над функцией профиля $f(\mathbf{r})$ (3), (4). Тогда для двухкомпонентного случая (4) общее выражение для фурье-компонент обратного тензора диэлектрической проницаемости, входящего в (10), можно записать в виде

$$\hat{\eta}_{\mathbf{G}} = f_{\mathbf{G}}(\hat{\eta}_{glass} - \hat{\eta}_a) + \delta(\mathbf{G})\hat{\eta}_a, \quad (11)$$

где $f_{\mathbf{G}}$ – фурье-компонента функции профиля $f(\mathbf{r})$. В таком представлении собственные значения матрицы \mathbf{M} (10) рассчитываются несколько быстрее.

Решение задачи на собственные значения (9) для некоторой структуры дает набор собственных чисел (обратных значений длин волн) для каждого отдельного значения вектора Блоха \mathbf{k} . Значение вектора \mathbf{k} задается в пределах зоны Бриллюэна рассматриваемой фотонно-кристаллической решетки. В случае, когда для некоторого диапазона векторов \mathbf{k} не существует ни одного действительного собственного значения, то есть нет ни одного решения ни для каких частот при таком направлении распространения, говорят о наличии фотонной запрещенной зоны.

Применяя данный метод, можно довольно быстро рассчитывать положение запрещенных зон в диапазоне длин волн для фотонных кристаллов произвольной геометрии, размерности и диэлектрических свойств. В последствии возможно уточнение решений в уже известном диапазоне параметров с помощью методов более точных и требующих больших временных затрат.

Приведенные ниже результаты были получены с помощью описанного метода, реализованного в виде алгоритма на языке программирования ФОРТРАН.

2. Симметрия дисперсионной поверхности анизотропных фотонных кристаллов

Для нахождения запрещенных зон фотонного кристалла необходимо рассчитать частоты (длины волн), между которыми нет ни одного действительного решения задачи на собственные значения (9). Для простоты рассмотрим двумерный случай – диэлектрическую структуру, периодическую с точки зрения диэлектрических свойств в двух направлениях и постоянную в третьем. Такие структуры используются наиболее часто и являются важными объектами для оптики и фотоники. В них не существует абсолютных запрещенных зон, поскольку вектор Блоха становится двумерным, в то время как волновой вектор имеет три компоненты.

Дисперсионная поверхность двумерных фотонных кристаллов рассчитывается при фиксированном значении компоненты волнового вектора, отвечающей направлению, перпендикулярному плоскости периодичности структуры. Она демонстрирует зависимость частоты (длины волны) от компонент вектора Блоха, является сложной поверхностью, имеющей в случае существования запрещенных зон разрывы по оси частот (длин волн). Как известно, экстремумы дисперсионной кривой, соответствующие, в частности, границам запрещенных зон, принадлежат точкам и осям симметрий обратного пространства каждой конкретной фотонно-кристаллической структуры. В случае изотропных материалов симметрия определяется исключительно геометрией фотонно-кристаллической решетки.

На рис. 1 приведены различные листы дисперсионной поверхности (зависимости $K = (2\pi)/\lambda$, где λ – длина волны разрешенного состояния, от компонент вектора Блоха или поперечных компонент волнового вектора k_x, k_y), рассчитанные описанным ранее методом плоских волн для изотропной решетки кагоме [17] с периодом $p = 2$ мкм и толщиной стеклянных стенок, равной $\Delta = 300$ нм. Показатель преломления стекла $n = 1.52$. Воздушные пространства между стенками заполнены материалом с показателем преломления $n' = 1.4$. Для наглядности на рис. 1 шкалы значений $K = (2\pi)/\lambda$ различны для приведенных корней дисперсионного уравнения. Количество промежуточных уровней на всех контурных графиках, приведенных в этой статье, равно 15.

Ниже будем рассматривать только гексагональные решетки. Треугольник ГМК $\left\{ (0, 0), \left(0, \frac{2\pi}{p\sqrt{3}} \right), \left(\frac{2\pi}{p}, \frac{2\pi}{p\sqrt{3}} \right) \right\}$ соответствует границам неприводимой части зоны Бриллюэна, что означает возможность полной реконструкции последней путем действия на указанную неприводимую часть операторами симметрии группы D_6 , которой обладает гексагональная решетка кагоме. Ее границы содержат все экстремумы дисперсионной кривой, то есть для нахождения запрещенных зон, разграниченных экстремумами, достаточно решить уравнение (9) на границе неприводимой части зоны Бриллюэна.

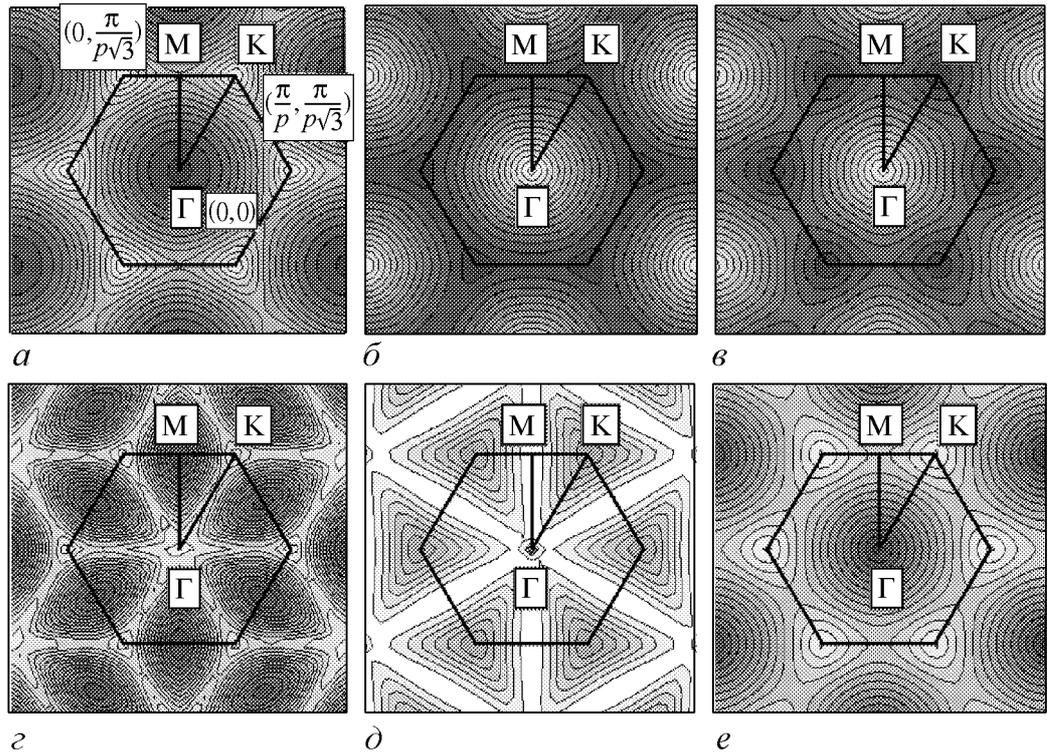


Рис. 1. Нормированные контурные графики различных корней дисперсионного уравнения (9) для решетки кагоме [17]. Черная сплошная линия обозначает зону Бриллюэна и ее неприводимую часть – треугольник ГМК. Минимумы волнового числа $K_{\min} = (2\pi)/\lambda_{\max}$ (обозначены темно-серым цветом) и максимумы $K_{\max} = (2\pi)/\lambda_{\min}$ (обозначены белым цветом) соответствуют значениям: а – $K_{\min} = 13.86$ рад/мкм, $K_{\max} = 13.91$ рад/мкм; б – $K_{\min} = 13.91$ рад/мкм, $K_{\max} = 14.02$ рад/мкм; в – $K_{\min} = 13.91$ рад/мкм, $K_{\max} = 14.03$ рад/мкм; г – $K_{\min} = 14.01555$ рад/мкм, $K_{\max} = 14.0210$ рад/мкм; д – $K_{\min} = 14.015$ рад/мкм, $K_{\max} = 14.027$ рад/мкм; е – $K_{\min} = 14.02$ рад/мкм, $K_{\max} = 14.18$ рад/мкм

В анизотропном случае такое приближение становится невозможным. Это нетрудно продемонстрировать, рассмотрев двумерный фотонный кристалл как трехмерную структуру из системы стеклянных трубок (рис. 2).

На рис. 3 показан один из элементов такого фотонного кристалла – стеклянная трубка с поллой сердцевиной, заполненная одноосным анизотропным материалом, и эквивалентная трехмерная зона Бриллюэна, высота которой может быть произвольной в виду нулевого периода по оси z [12]. В дальнейшем будем рассматривать одноосные анизотропные

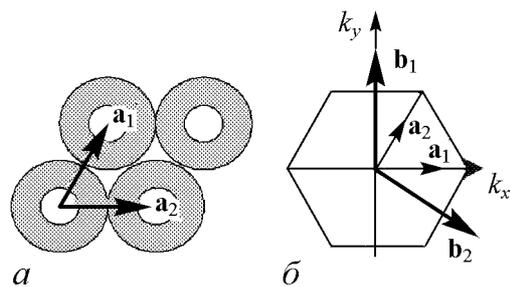


Рис. 2. *a* – схематичное изображение прямой решетки фотонно-кристаллической структуры, смоделированной стеклянными трубками, упакованными в виде правильной гексагональной решетки, здесь a_1, a_2 – векторы трансляции; *b* – b_1, b_2 – векторы обратной решетки и зона Бриллюэна

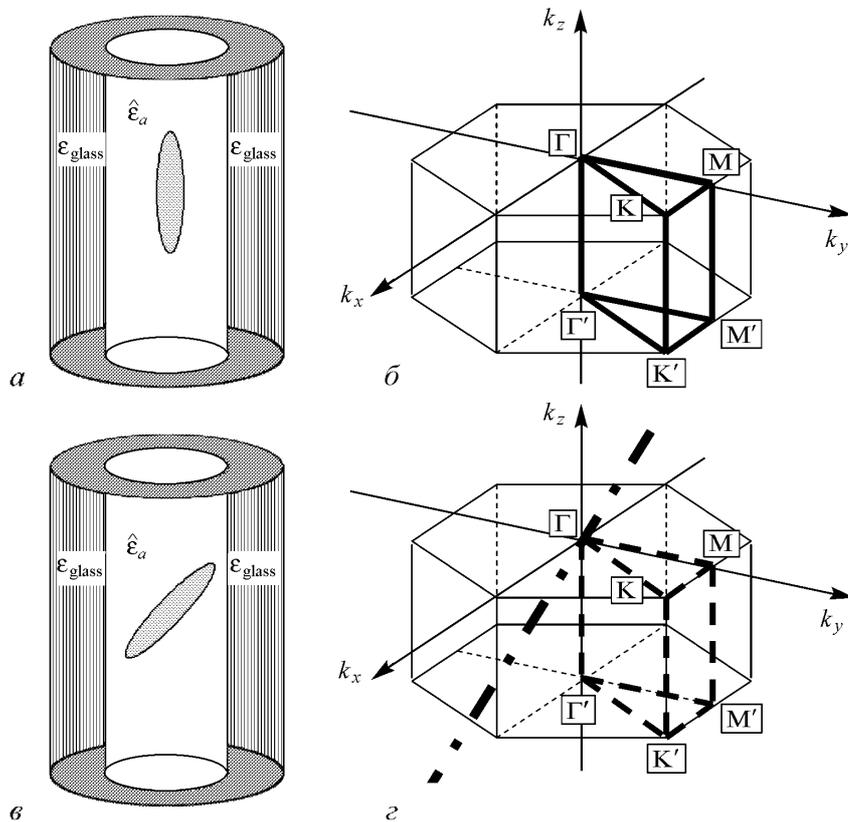


Рис. 3. Схема элемента двумерного ФК в виде стеклянной трубки и ориентация анизотропного материала относительно элемента фотонного кристалла при ориентации вдоль продольной оси фотонного кристалла (*a*) и произвольно (*c*). Эквивалентная трехмерная зона Бриллюэна для двумерного фотонного кристалла при ориентации молекул одноосного анизотропного материала вдоль продольной оси (*b*) и произвольно (*d*). Сплошной линией отмечена неприводимая часть зоны Бриллюэна, штрихованная линия обозначает некорректность данной зоны при произвольной ориентации анизотропного материала. Штрих-пунктирная линия обозначает направление директора одноосного анизотропного материала

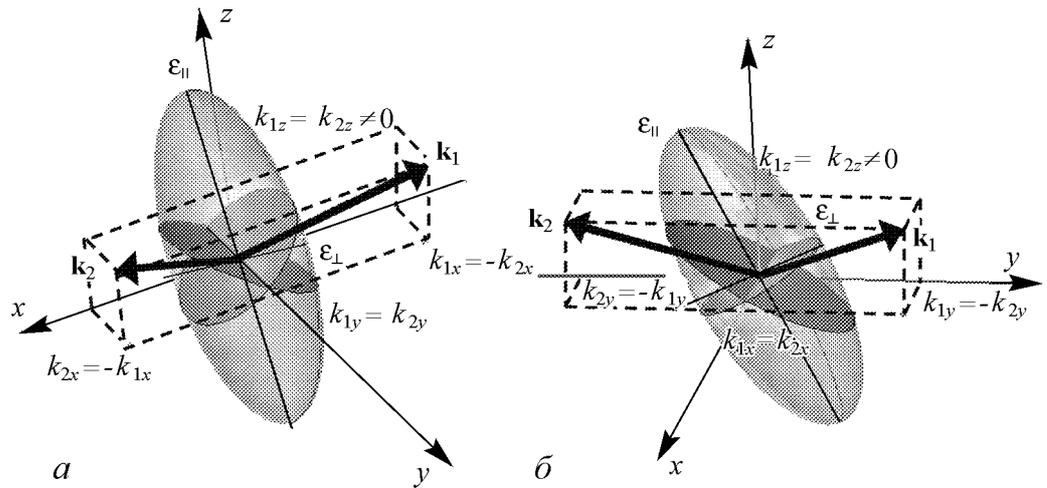


Рис. 4. Тензор диэлектрической проницаемости под углом 25° к оси z в плоскости (y, z) : a – одинаковые условия для волн с компонентами волновых чисел $k_{1z} = k_{2z} \neq 0$, $k_{1y} = k_{2y}$, $k_{1x} = -k_{2x}$; b – разные условия для волн с компонентами волновых чисел $k_{1z} = k_{2z}$, $k_{1x} = k_{2x}$, $k_{1y} = -k_{2y}$

материалы, к которым относится, например, жидкий кристалл, так как этот случай в достаточной степени раскрывает суть задачи. Подчеркнем, что декартова система координат выбрана так, что ось z перпендикулярна плоскости периодичности (x, y) фотонного кристалла, ось x сонаправлена с одним из векторов трансляции прямой решетки фотонного кристалла – в данном случае с вектором \mathbf{a}_1 (см. рис. 2), а ось y выбрана в плоскости периодичности фотонного кристалла так, чтобы образовать «правую» систему координат.

При ориентации одноосного анизотропного материала вдоль оси z любой вектор \mathbf{d} , принадлежащий прямой, соответствующей направлению директора анизотропного материала, имеет нулевую проекцию $\mathbf{d}_{(x,y)} = \mathbf{0}$ на плоскость периодичности фотонного кристалла. Данная ситуация соответствует изотропному случаю, так как симметрия, задаваемая тензором диэлектрической проницаемости, соответствует самой высокой группе симметрий и в пересечении с группой симметрии решетки дает последнюю как итоговую симметрию системы. То есть, зона Бриллюэна в такой ситуации обладает симметрией прямой решетки, что в случае гексагональной решетки отвечает группе D_6 .

При переориентации молекул (рис. 3, б) меняется характер и порядок симметрии дисперсионной поверхности, и в обратном пространстве появляется особое направление волновых векторов, соответствующее ориентации молекул анизотропного материала и не совпадающее более с осью k_z . Таким образом, неприводимая часть зоны Бриллюэна становится отличной от неприводимой части в изотропном случае.

Рассмотрим подробнее случай одноосного анизотропного материала с переориентацией молекул через вращение тензора его диэлектрической проницаемости, сопровождающееся появлением ненулевой проекции вектора \mathbf{d} в плоскости периодичности фотонного кристалла, параллельной какому-либо из векторов трансляции прямой решетки $\mathbf{d}_{(x,y)} \parallel (m\mathbf{a}_1 + n\mathbf{a}_2)$, $m, n \in \mathbb{N}$, где \mathbb{N} – множество целых чисел (см. рис. 2). Например, рассмотрим поворот вокруг оси x , соответствующей направлению вектора прямой решетки \mathbf{a}_1 . Такой поворот отвечает возникновению проекции $\mathbf{d}_{(x,y)} \parallel (-\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2)$ и особого направления в обратном пространстве в виде прямой, лежащей в плоскости (k_z, k_y) и образующей в проекции на плоскость

равных компонент k_z ось группы симметрий $D_1 \cap D_6 = D_1$. Это означает, что в этом случае две волны, имеющие компоненты волнового вектора $k_{1z} = k_{2z}, k_{1y} = k_{2y}, k_{1x} = -k_{2x}$ (x – ось поворота молекул анизотропного материала), будут отвечать одинаковой частоте, то есть будут распространяться в одинаковых условиях (рис. 4, а). В общем случае распространения волн вне плоскости периодичности (то есть при ненулевой компоненте k_z), в силу принципиальной трехмерности данной системы, симметрия относительно оси x (и оси k_x в обратном пространстве) наблюдаться не будет. Это связано с тем, что для волн, имеющих компоненты волнового вектора $k_{1z} = k_{2z}, k_{1x} = k_{2x}, k_{1y} = -k_{2y}$, сечение произвольно ориентированного эллипсоида диэлектрической проницаемости анизотропного материала будет выглядеть неодинаково (рис. 4, б). Исключения составляют случаи распространения волн в плоскости периодичности двумерного фотонного кристалла и случаи ориентации тензора диэлектрической проницаемости анизотропного материала в одной из выбранных координатных плоскостей (в системе координат, связанной с геометрией фотонного кристалла).

На рис. 5 показано изменение симметрии одного из корней дисперсионного уравнения (9) для описанной выше решетки кагоме, воздушные пространства которой заполнены жидким кристаллом с показателями преломления $n_{||} = 1.7, n_{\perp} = 1.4$ при гомеотропном заполнении и ориентации молекул жидкого кристалла под различными углами к оси z в плоскости (x, z) , содержащей ось z и вектор прямой

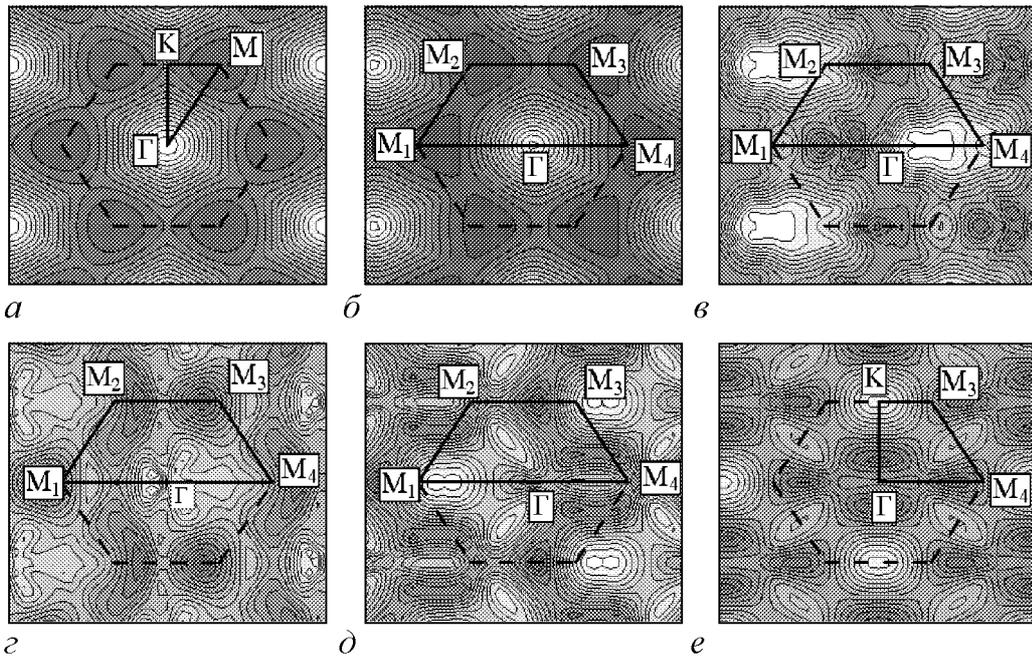


Рис. 5. Нормированные контурные графики корня дисперсионного уравнения рассматриваемого фотонного кристалла. Минимумы K_{\min} обозначены темно-серым цветом, максимумы K_{\max} обозначены белым цветом. Ориентация анизотропного материала в плоскости, содержащей ось z и вектор прямой решетки \mathbf{a}_1 , под различными углами α к оси z : а – 0° (идентично изотропному случаю), $K_{\min} = 14.40$ рад/мкм, $K_{\max} = 14.51$ рад/мкм; б – 10° , $K_{\min} = 14.38$ рад/мкм, $K_{\max} = 14.5$ рад/мкм; в – 30° , $K_{\min} = 14.22$ рад/мкм, $K_{\max} = 14.3$ рад/мкм; г – 60° , $K_{\min} = 13.85$ рад/мкм, $K_{\max} = 13.92$ рад/мкм; д – 70° , $K_{\min} = 13.72$ рад/мкм, $K_{\max} = 13.78$ рад/мкм; е – 90° (вдоль \mathbf{a}_1 в плоскости периодичности) $K_{\min} = 13.6$ рад/мкм, $K_{\max} = 13.69$ рад/мкм. Пунктирной линией обозначен контур зоны Бриллюэна, сплошной линией обозначена ее неприводимая часть

решетки фотонного кристалла \mathbf{a}_1 . Из изменения значений минимумов и максимумов волнового числа видно общее смещение дисперсионной поверхности в сторону более длинных волн, что объясняется изменением эффективного показателя преломления относительно плоскости периодичности фотонного кристалла и, соответственно, компонент вектора Блоха.

Степень симметрии дисперсионной поверхности повышается до $D_2 \cap D_6 = D_2$ при ориентации молекул в плоскости периодичности фотонного кристалла $\mathbf{d}_{(x,y)} \parallel (m\mathbf{a}_1 + n\mathbf{a}_2)$, $m, n \in \mathbb{N}$ и $d_z = 0$, так как тогда возникает вторая ось симметрии вдоль направлений, перпендикулярных ориентации молекул анизотропного материала. Данный эффект продемонстрирован: на рис. 4, б, где показана взаимная ориентация эллипсоида диэлектрической проницаемости анизотропного материала и волнового вектора; рис. 5, е, где неприводимой частью зоны Бриллюэна становится трапеция $\Gamma\text{KM}_3\text{M}_4$; на рис. 6, где приведены несколько корней дисперсионного уравнения, рассчитанные для ориентации одноосного анизотропного материала вдоль оси x , то есть вдоль вектора трансляции прямой решетки \mathbf{a}_1 .

Другой случай переориентации одноосного анизотропного материала – вращение молекул в плоскости периодичности фотонного кристалла, то есть в плоскости, содержащей координатные оси x и y . Произвольная ориентация одноосного анизотропного материала, не совпадающая с ориентацией ни с одним из векторов прямой решетки $\forall (m, n) \in \mathbb{N} \rightarrow (\mathbf{d}_{(x,y)} \parallel (m\mathbf{a}_1 + n\mathbf{a}_2))$ и $d_z = 0$, разрушает симметрию типа D_i и превращает ее в циркулярную, а в рассматриваемом случае в $C_2 \cap D_6 = C_2$.

На рис. 7 показаны контурные графики одного из корней дисперсионного уравнения при различных углах между директором молекул одноосного анизотропного материала и осью x . В этом случае не наблюдается общего смещения дисперсионной поверхности по шкале длин волн, так как эффективный показатель преломления не меняется относительно плоскости периодичности двумерного фотонного кристалла, а следовательно и компонент вектора Блоха.

Причины изменения вида симметрии объясняются аналогичным образом, что и в предыдущих случаях. В силу того, что симметрия становится циклической, невозможно однозначно определить неприводимую часть зоны Бриллюэна. По этой же причине при такой ориентации одноосного анизотропного материала не существует направлений, содержащих все экстремумы дисперсионной поверхности. Например, на рис. 8 продемонстрирован отличный от приведенного на рис. 7 корень дисперсионного уравнения идентичной системы.

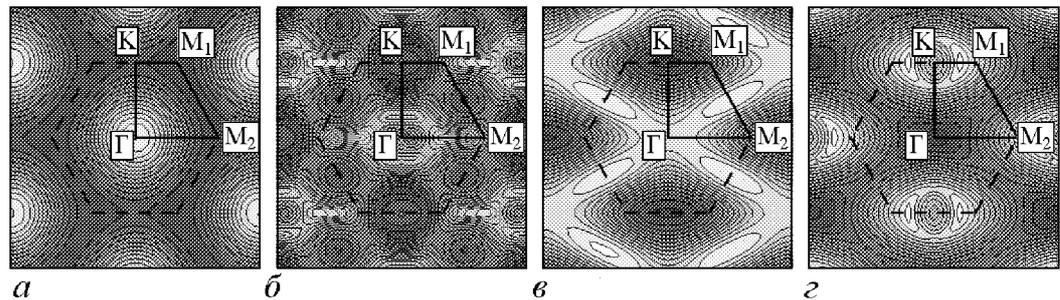


Рис. 6. Нормированные контурные графики корней дисперсионного уравнения рассматриваемого фотонного кристалла при ориентации анизотропного материала в плоскости периодичности структуры параллельно вектору прямой решетки \mathbf{a}_1 . Минимумы K_{\min} (темно-серый цвет) и максимумы K_{\max} (белый цвет) соответствуют: а – $K_{\min} = 13.198$ рад/мкм, $K_{\max} = 13.218$ рад/мкм; б – $K_{\min} = 13.57$ рад/мкм, $K_{\max} = 13.651$ рад/мкм; в – $K_{\min} = 13.228$ рад/мкм, $K_{\max} = 13.236$ рад/мкм; з – $K_{\min} = 13.535$ рад/мкм, $K_{\max} = 13.575$ рад/мкм. Пунктирной линией обозначен контур зоны Бриллюэна, сплошной линией обозначена ее неприводимая часть

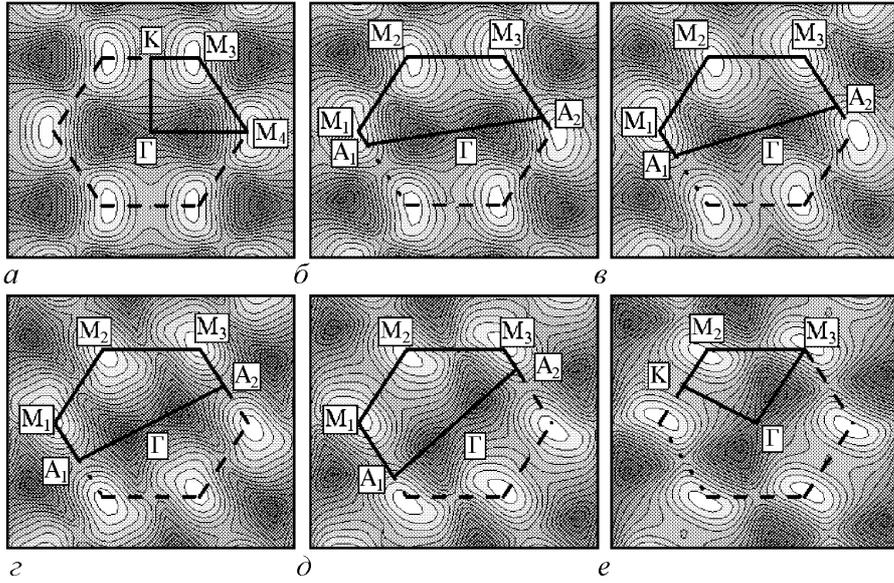


Рис. 7. Нормированные контурные графики корня дисперсионного уравнения рассматриваемого фотонного кристалла. Ориентация анизотропного материала в плоскости периодичности под различными углами α к вектору \mathbf{a}_1 : $a - 0^\circ$ (вдоль \mathbf{a}_1), $b - 10^\circ$, $c - 20^\circ$, $d - 45^\circ$, $e - 60^\circ$ (вдоль \mathbf{a}_2). Минимумы (темно-серый цвет) и максимумы (белый цвет) соответствуют значениям $K_{\min} = 13.63$ рад/мкм и $K_{\max} = 13.71$ рад/мкм. Пунктирной линией обозначен контур зоны Бриллюэна, сплошной линией обозначена ее неприводимая часть

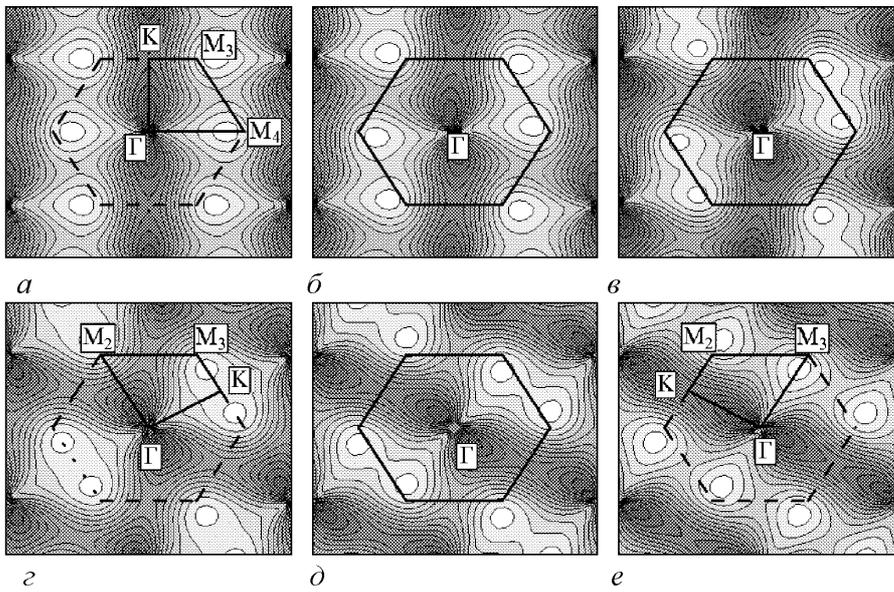


Рис. 8. Нормированные контурные графики корня дисперсионного уравнения рассматриваемого фотонного кристалла, отличного от приведенного на рис. 7. Ориентация анизотропного материала в плоскости периодичности под различными углами α к вектору \mathbf{a}_1 : $a - 0^\circ$ (вдоль \mathbf{a}_1), $b - 10^\circ$, $c - 20^\circ$, $d - 45^\circ$, $e - 60^\circ$ (вдоль \mathbf{a}_2). Минимумы (темно-серый цвет) и максимумы (белый цвет) соответствуют значениям $K_{\min} = 12.428$ рад/мкм и $K_{\max} = 12.446$ рад/мкм. Пунктирной линией обозначен контур зоны Бриллюэна, сплошной линией обозначена ее неприводимая часть

Очевидно, что расположение экстремумов двух корней сильно различается. В такой ситуации для нахождения границ запрещенных зон следует проводить расчет по всем точкам произвольно выбранной половины зоны Бриллюэна. На обоих рисунках показаны случаи ориентации одноосного анизотропного материала вдоль векторов трансляции прямой решетки фотонного кристалла, когда степень симметрии зоны Бриллюэна повышается до $D_2 \cap D_6 = D_2$ (ср. рис. 7, *a, z, e*, и рис. 8, *a, z, e*, соответствующие углам между направлением директора анизотропного материала и осью x , равным $\alpha = 0^\circ$ (вдоль \mathbf{a}_1), $\alpha = 30^\circ$ (вдоль $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$) и $\alpha = 60^\circ$ (вдоль \mathbf{a}_2)).

В оставшемся нерассмотренном случае произвольной ориентации директора одноосного материала, когда вектор \mathbf{d} имеет ненулевую компоненту вдоль оси z и его проекция на плоскость периодичности фотонного кристалла не сонаправлена ни с одним из векторов трансляции прямой решетки двумерного фотонного кристалла $\forall (m, n) \in \mathbb{N} \rightarrow (\mathbf{d}_{(x,y)} \parallel (m\mathbf{a}_1 + n\mathbf{a}_2))$ и $d_z \neq 0$, невозможно выделить неприводимую часть зоны Бриллюэна в силу отсутствия симметрий внутри последней, кроме тривиальной симметрии $C_1 \cap D_6 = C_1$, что продемонстрировано на рис. 9.

Стоит отметить, что приведенные выше рассуждения справедливы для любой фотонно-кристаллической решетки (треугольной, квадратной и гексагональной), разница в результатах заключается лишь в том, что общая симметрия структуры задается пересечением группы симметрий, задаваемой тензором диэлектрической проницаемости, и группы симметрий соответствующей решетки.

Таким образом, можно подвести итог всех рассмотренных ситуаций для произвольного двумерного фотонного кристалла, обозначив группу симметрий его решетки как G_{PC} , в виде четырех случаев ориентации директора одноосного анизотропного материала относительно выбранной системы координат.

1. При такой ориентации произвольного вектора \mathbf{d} , лежащего на прямой, соответствующей направлению директора анизотропного материала, что он полностью принадлежит плоскости периодичности двумерного фотонного кристалла и сонаправлен с каким-либо вектором трансляции прямой решетки фотонного кристалла,

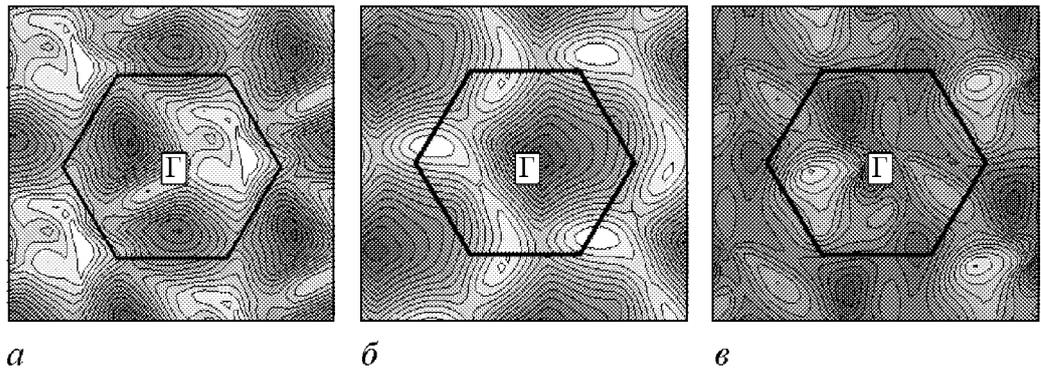


Рис. 9. Корни дисперсионного уравнения рассматриваемого фотонного кристалла. Ориентация анизотропного материала вне плоскости периодичности такая, что в проекции на плоскость периодичности направление директора не параллельно ни одному из векторов трансляции прямой решетки. Минимумы значений волнового числа K_{\min} обозначены темно-серым цветом, максимумы K_{\max} – белым цветом. Директор одноосного анизотропного материала направлен *a* – под углом $\alpha = 60^\circ$ к оси z и под углом $\alpha = 20^\circ$ к вектору \mathbf{a}_1 , $K_{\min} = 14.25$ рад/мкм, $K_{\max} = 14.33$ рад/мкм; *б* – под углом $\alpha = 30^\circ$ к оси z и под углом $\alpha = 35^\circ$ к вектору \mathbf{a}_1 , $K_{\min} = 13.95$ рад/мкм, $K_{\max} = 14.52$ рад/мкм; *в* – под углом $\alpha = 45^\circ$ к оси z и под углом $\alpha = 20^\circ$ к вектору \mathbf{a}_1 , $K_{\min} = 13.81$ рад/мкм, $K_{\max} = 13.88$ рад/мкм. Сплошной линией обозначен контур зоны Бриллюэна

то есть $\mathbf{d}_{(x,y)} \parallel (m\mathbf{a}_1 + n\mathbf{a}_2)$, $m, n \in \mathbb{N}$ и $d_z = 0$, симметрия зоны Бриллюэна определяется группой симметрий $D_2 \cap G_{PC}$. Осями симметрии D_2 в данном случае служат ось, сонаправленная с вектором \mathbf{d} и ось, перпендикулярная ей.

2. При такой ориентации вектора \mathbf{d} , что он полностью принадлежит плоскости периодичности двумерного фотонного кристалла и не сонаправлен ни с одним из векторов трансляции прямой решетки фотонного кристалла, то есть $\forall (m, n) \in \mathbb{N} \neg (\mathbf{d}_{(x,y)} \parallel (m\mathbf{a}_1 + n\mathbf{a}_2))$ и $d_z = 0$, симметрия зоны Бриллюэна определяется группой симметрий $C_2 \cap G_{PC}$ с симметрией C_2 относительно центра Γ зоны Бриллюэна.

3. При такой ориентации произвольного вектора \mathbf{d} , что он не принадлежит плоскости периодичности двумерного фотонного кристалла и его проекция на данную плоскость сонаправлена с каким-либо вектором трансляции прямой решетки фотонного кристалла, то есть $\mathbf{d}_{(x,y)} \parallel (m\mathbf{a}_1 + n\mathbf{a}_2)$, $m, n \in \mathbb{N}$ и $d_z \neq 0$, симметрия зоны Бриллюэна определяется группой симметрий $D_1 \cap G_{PC}$. Осью симметрии D_1 в данном случае служит ось, сонаправленная с проекцией $\mathbf{d}(x, y)$.

4. При такой ориентации вектора \mathbf{d} , что он не принадлежит плоскости периодичности двумерного фотонного кристалла и не сонаправлен ни с одним из векторов трансляции прямой решетки фотонного кристалла, то есть $\forall (m, n) \in \mathbb{N} \neg (\mathbf{d}_{(x,y)} \parallel (m\mathbf{a}_1 + n\mathbf{a}_2))$ и $d_z \neq 0$, симметрия зоны Бриллюэна определяется тривиальной группой симметрий $C_1 \cap G_{PC} = C_1$. То есть данный случай не предполагает наличия неприводимой части зоны Бриллюэна.

В случаях, когда итоговая симметрия является циркулярной (симметрией типа C_i), в силу неоднозначности определения неприводимой части зоны Бриллюэна, расчет границ запрещенных зон должен производиться по всем точкам i -й части зоны. В случаях итоговых симметрий группы D_i расчет может быть произведен только по контуру соответствующей неприводимой части зоны Бриллюэна, так как они содержат все экстремальные значения дисперсионной поверхности.

Многие работы, несмотря на принципиальную разницу между изотропными и анизотропными средами, используют в своих расчетах неизменную неприводимую часть зоны Бриллюэна [15, 16]. На рис. 10 приведено сравнение диаграммы за-

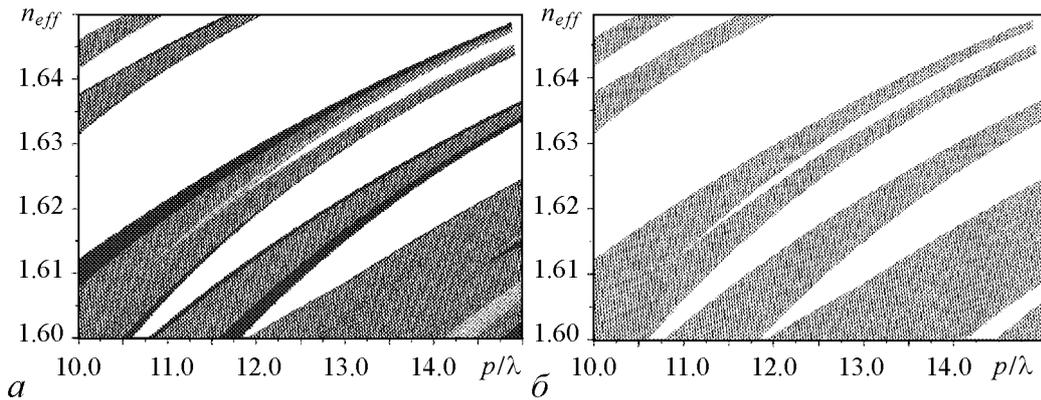


Рис. 10. Сравнение диаграмм запрещенных зон рассматриваемого фотонного кристалла с ориентацией анизотропного материала в плоскости периодичности под углом $\alpha = 45^\circ$ к вектору прямой решетки \mathbf{a}_1 , рассчитанных по всей зоне Бриллюэна (разрешенные зоны показаны черным цветом), по неприводимой части зоны Бриллюэна для изотропных сред (разрешенные зоны показаны темно-серым цветом) и рассчитанных по корректно выбранной части зоны Бриллюэна, то есть по всем точкам половины зоны Бриллюэна (показано светло-серым цветом); p/λ – отношение периода структуры к длине волны

прещенных зон, рассчитанных вдоль границы неприводимой части зоны Бриллюэна, выбранной, как рекомендуется в данной работе (рис. 10, *a*), и вдоль границ стандартно используемой для изотропных сред треугольной неприводимой части зоны Бриллюэна (рис. 10, *б*). Здесь черным цветом обозначены разрешенные зоны (области, где существует действительное решение дисперсионного уравнения), рассчитанные по всем точкам зоны Бриллюэна, темно- и светло-серыми цветами, соответственно, обозначены разрешенные зоны, рассчитанные вдоль контура ГМК и рассчитанные по всем точкам половины зоны Бриллюэна. Очевидно, что первый подход неверен и дает значительную ошибку в определении границ запрещенных зон, показанных на рисунке белым цветом.

3. Изменение ширины и положения фотонных запрещенных зон за счет внешнего воздействия в анизотропных фотонных кристаллах

С помощью данного метода, руководствуясь вышеизложенными соображениями в выборе контура неприводимой части зоны Бриллюэна для расчета границ запрещенных зон, были исследованы изменения дисперсионных диаграмм при переориентации анизотропных материалов в фотонных кристаллах [18, 19].

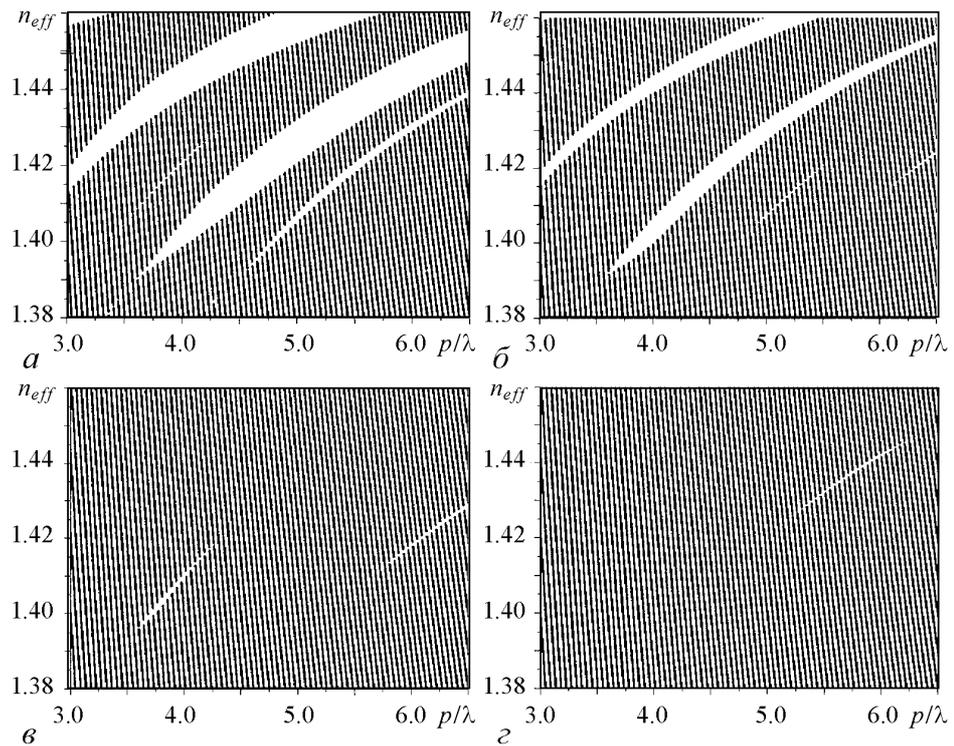


Рис. 11. Диаграммы запрещенных зон двумерного фотонного кристалла из стеклянной решетки кагоме, заполненного жидким кристаллом, при ориентации директора молекул жидкого кристалла под различными углами α к продольной оси двумерного фотонного кристалла: $a - 0^\circ$, $б - 5^\circ$, $в - 10^\circ$, $г - 15^\circ$. Поворот молекул происходит в плоскости, содержащей продольную ось и вектор прямой решетки \mathbf{a}_1 ; n_{eff} – эффективный показатель преломления; p/λ – отношение периода структуры к длине волны. Заштрихованные области соответствуют областям действительных решений, незакрашенные – запрещенным зонам

Для аналогии продолжим рассматривать гексагональную решетку кагоме из стеклянных стенок с показателем преломления $n = 1.52$, воздушные пространства в которой заполнены одноосным анизотропным материалом – жидким кристаллом – нематиком с показателями преломления $n_{\parallel} = 1.72$ и $n_{\perp} = 1.52$. Толщина стенок $\Delta = 300$ нм, период решетки $d = 2$ мкм.

На рис. 11 приведены диаграммы запрещенных зон для рассматриваемого анизотропного фотонного кристалла при продольной ориентации директора жидкого кристалла и его повороте в плоскости, содержащей продольную ось z и вектор прямой решетки \mathbf{a}_1 . Очевидно, что перестройкой ориентации жидкого кристалла внешним электрическим полем можно существенно повлиять на ширину и форму запрещенных зон.

На рис. 12 приведены диаграммы запрещенных зон при ориентации директора жидкого кристалла в плоскости периодичности рассматриваемой структуры. Также очевидна возможность управления свойствами анизотропного фотонного кристалла путем внешнего электрического воздействия, без изменения его геометрических и материальных свойств. В подтверждение правильности рассуждений о выборе неприводимой части зоны Бриллюэна стоит отметить, что, как и следовало ожидать, дисперсионные диаграммы для углов $\alpha = 0^\circ$ (рис.12, *a*) и $\alpha = 60^\circ$ (рис.12, *г*) абсолютно идентичны друг другу вследствие симметрии гексагональной решетки кагоме.

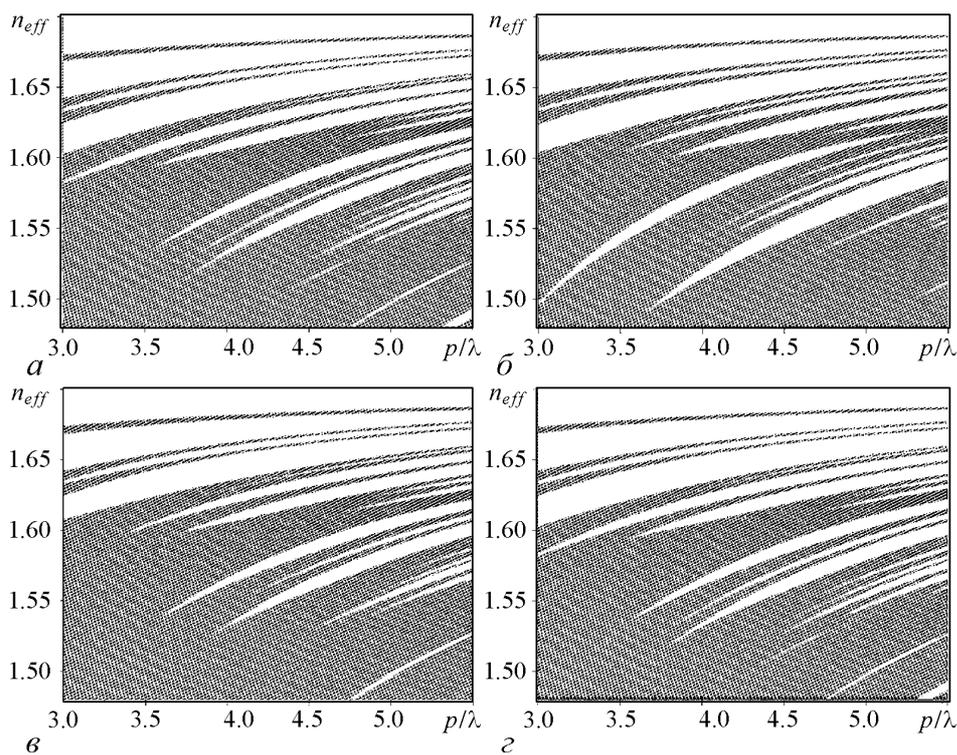


Рис. 12. Диаграммы запрещенных зон двумерного фотонного кристалла из стеклянной решетки кагоме, заполненного жидким кристаллом, при ориентации директора молекул жидкого кристалла под различными углами α к вектору трансляции \mathbf{a}_1 двумерного фотонного кристалла: *a* – 0° , *б* – 10° , *в* – 30° , *г* – 60° . Поворот молекул происходит в плоскости периодичности фотонного кристалла. n_{eff} – эффективный показатель преломления, p/λ – отношение периода структуры к длине волны. Заштрихованные области соответствуют областям действительных решений, незакрашенные – запрещенным зонам

Заклучение

В работе представлен векторный метод плоских волн для расчета бесконечных периодических структур с произвольной геометрией и диэлектрическими свойствами, включая случай анизотропных материалов, описываемых произвольно ориентированным тензором диэлектрической проницаемости.

Метод можно использовать не только для расчета идеальных фотонных кристаллов, но и (в совокупности с другими методами) для расчета более сложных объектов, таких как фотонно-кристаллические структуры с дефектами и волноводы [11].

На примере использования жидких кристаллов показано влияние ориентации анизотропного материала на симметрию дисперсионной поверхности внутри зоны Бриллюэна в анизотропных фотонных кристаллах и даны рекомендации по правильному выбору области зоны Бриллюэна, точки которой следует учитывать при расчете запрещенных зон анизотропного фотонного кристалла.

Выделено четыре случая ориентации директора одноосного анизотропного материала в двумерном фотонном кристалле с симметрией решетки группы G_{PC} , соответствующие разным симметриям зоны Бриллюэна. В случаях циркулярной итоговой симметрии (симметрии типа C_i), в силу неоднозначности определения неприводимой части зоны Бриллюэна, расчет границ запрещенных зон должен производиться по всем точкам i -й части зоны. В случаях итоговых симметрий группы D_i расчет может быть произведен только по контуру соответствующей неприводимой части зоны Бриллюэна, так как он содержит все экстремальные значения дисперсионной поверхности.

Руководствуясь приведенной выше классификацией и используя для расчетов соответствующую неприводимую часть зоны Бриллюэна, можно значительно сократить время, затрачиваемое на расчет запрещенных зон анизотропных фотонных кристаллов. В целях предотвращения ошибок в расчетах запрещенных зон следует использовать неприводимую часть зоны Бриллюэна, соответствующую симметрии дисперсионной поверхности при конкретной ориентации молекул анизотропного материала, что показано на примере, приведенном в данной работе.

Работа И.А. Хромовой поддержана ФНП «Династия».

Библиографический список

1. Joannopoulos J.D., Villeneuve P.R. and Fan S. Photonic crystals: putting a new twist on light // Nature. 1997. Vol. 386. P. 143.
2. Ho K.M., Chan C.T., and Soukoulis C.M. Existence of a photonic gap in periodic dielectric structures // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 65. P. 3152.
3. Larsen T.T. Optical devices based on liquid crystal photonic bandgap fibers // Optics Express. 2003. Vol. 11, № 20. P. 2589.
4. Alkeskjold T.T. All-optical modulation in dye-doped nematic liquid crystal photonic bandgap fibers // Optics Express. 2004. Vol. 12, № 24. P. 5857.
5. Du F., Lu Y.-Q., and Wu S.-T. Electrically tunable liquid-crystal photonic crystal fiber // Applied Physics Letters. 2004. Vol. 85, № 12. P. 2181.

6. *Kotynski R. et al.* Modeling of polarization behaviour of LC filled photonic crystal fibers // Proceedings Symposium IEEE/LEOS Benelux Chapter, 315-319, Dec. 2004, Ghent, Belgium.
7. *Scolari L.* Continuously tunable devices based on electrical control of dual-frequency liquid crystal filled photonic bandgap fibers // *Optics Express*. 2005. Vol. 13, № 19. P. 7483.
8. *Seydou F. et al.* Numerical computation of the Green's function for two-dimensional finite-size photonic crystals of infinite length // *Optics Express*. 2006. Vol. 14, № 23. P. 11362.
9. *Busch K. et al.* The Wannier function approach to photonic crystal circuits // *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2003. № 15. P. 1233.
10. *Johnson S.G., Joannopoulos J.D.* Block-iterative frequency-domain methods for Maxwell's equations in a planewave basis // *Optics Express*. 2001. Vol. 8, № 3. P. 173.
11. *Guo Sh., Albin S.* Simple plane wave implementation for photonic crystal calculations // *Optics Express*. 2003. Vol. 11, № 2. P. 167.
12. *Lokke M. et al.* Group-theoretical description of the triangular air-silica photonic crystal out-of-plane propagation // *Optics Express*. 2004. Vol. 12, № 25.
13. *Melnikov L., Khromova I., Sherbakov A., Nikishin N.* Soft-glass hollow core photonic crystal fibers // *Proc. SPIE*. 2005. 5950. P. 243.
14. *Hsue Y.-Ch., Yang T.-J.* A novel view of plane wave expansion method in photonic crystals // <http://arxiv.org/abs/physics/0307150v1>.
15. *Kotynski R.* Photonic crystal fibers with material anisotropy // *Optical and Quantum Electronics*. 2005. № 37. P. 253.
16. *Sun J., Chan C.C.* Effect of liquid crystal alignment on bandgap formation in photonic bandgap fibers // *Optics Letters*. 2007. Vol. 32, № 14. P. 1989.
17. *Couny F., Benabid F. and Light P.S.* Large-pitch kagome-structured hollow-core photonic crystal fiber // *Optics Letters*. 2006. Vol. 31, № 24. P. 3574.
18. *Khromova I.A., Melnikov L.A.* Liquid crystal infiltrated photonic bandgap fibers: dispersion and mode characteristics calculation // *Technical Digest of Conference «LOYS-2006»*, 2006 ThS7-03, 99;
19. *Khromova I.A., Melnikov L.A.* Dispersion Properties of photonic crystals and photonic band gap fibers with anisotropic elements // *Proceedings of 13th Student Seminar on Microwave Applications of Novel Physical Phenomena*, 38-40, 2006.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского*

Поступила в редакцию 27.12.2007

**THE EIGENWAVES OF THE ANISOTROPIC PHOTONIC CRYSTALS:
THE CALCULATION METHOD AND ITS FEATURES, THE SYMMETRY
OF THE DISPERSION SURFACE OF THE 2D CRYSTAL**

I.A. Khromova, L.A. Melnikov

Fully vectorial plane wave method is presented aimed the calculation of the electromagnetic eigenwaves in periodical dielectric media having arbitrary geometry and dimension with both isotropic and anisotropic elements. Using this method the effect of the reorientation of molecules of anisotropic material in photonic crystal on the dispersion surface is investigated.



Хромова Ирина Анатольевна – родилась в Саратове в 1983 году. Окончила факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета в 2005 году. В настоящее время является аспирантом кафедры лазерной и компьютерной физики СГУ и Отделения Электрической и электронной инженерии Общественного университета Наварры. Является автором 34 опубликованных работ. Область научных интересов: электромагнетизм, фотоника, нелинейная оптика, волоконная оптика, метаматериалы.
E-mail:KhromovaIA@yandex.ru



ДИНАМИКА АМПЛИТУД ВЕРОЯТНОСТИ В ВОДОРОДОПОДОБНОМ АТОМЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ С УЧЕТОМ ПЕРЕХОДОВ В КОНТИНУУМ

М.В. Рябина, Л.А. Мельников

Исследована динамика заселенностей уровней $4s$ и $3p$ атома водорода при действии сильного лазерного одночастотного линейно поляризованного поля в условиях одно-, двух- и трехфотонного резонанса, а также при достаточно большой отстройке частоты поля от частоты перехода без использования теории возмущений и приближения медленно меняющихся заселенностей. Показано, что существует низкочастотная модуляция оптических колебаний, частота которой при некоторых значениях амплитуды поля обращается в нуль. Для перехода $3s \leftrightarrow 2p$ исследована динамика заселенностей дискретных уровней $3s$ и $2p$, а также состояний в континууме, связанных с уровнем $3s$ оптическим переходом. Продемонстрированы когерентные осцилляции заселенности континуальных уровней.

Введение

Динамика процессов, происходящих в атомах под действием сильных и сверхсильных переменных полей, является в последнее время предметом интенсивных теоретических и экспериментальных исследований. Ранние работы были посвящены изучению стимулирования рекомбинации ионов и электронов лазерным излучением [1, 2, 4–13, 15] и лазерной ионизации атомов [14–17]. При этом использовались теоретические модели, связанные, в основном, с методом возмущений. Проекты, целью которых является создание антиводородных атомов [18–20], вызвали интерес к изучению лазерной стимуляции рекомбинации антипротонов и позитронов [21–26]. В настоящее время в рамках программы FLASH в DESY [27–30] проводятся эксперименты с использованием новых лазерных систем, которые обеспечивают когерентное коротковолновое излучение при интенсивностях, превышающих предел применимости теории возмущений для описания осцилляций заселенностей низколежащих состояний.

Большое число работ было посвящено теоретическому изучению поведения атомов в сильных световых полях и, в частности, генерации рентгеновского излучения и высших гармоник светового поля [31–35]. При этом использовались различные теоретические подходы. В работах [36–40] взаимодействие атома с полем исследуется в приближениях, когда длительность лазерного импульса считается настолько

малой, что волновая функция практически не успевает измениться. Однако результаты этих работ относятся только к ионизации атома сильным импульсным полем или к расчету вероятностей переходов на высележащие уровни. Использование приближения короткого импульса применялось нами к расчету вероятностей как ионизации, так и рекомбинации [41]. В работе [42] предложено матричное уравнение для решения задачи о взаимодействии атома с сильным полем, которое решается с учетом только дискретных состояний атома. Результаты расчетов динамики двухуровневой системы в сильном поле без приближения медленных изменений заселенности, но без учета переходов в континуум, представлены в статье [43]. Динамика водородного атома исследовалась путем численного решения временного уравнения Шредингера, однако при этом существуют трудности, связанные с тем, что приходится либо использовать приближение «плоского» атома [44], либо решать задачу с модельным потенциалом, с устраненной сингулярностью кулоновского потенциала [45–47].

Наиболее близким к использованному в настоящей работе теоретическому методу является метод, основанный на разложениях волновой функции по состояниям дискретного и непрерывного спектра изолированного атома [35]. В этой работе использовано приближение плоских волн для волновой функции непрерывного спектра, что привело к качественному различию результатов расчетов в рамках данной модели и результатов расчетов временной эволюции волновой функции в численном решении уравнения Шредингера.

В данной статье рассматривается динамика переходов в водородном (или водородоподобном) атоме вне рамок теории возмущений, а также с учетом переходов в континуум, причем используются точные волновые функции непрерывного спектра.

Теория возмущений предсказывает, что скорость переходов в конечные состояния вблизи резонанса пропорциональна квадрату модуля матричного элемента перехода и интенсивности света. При большей интенсивности, когда нельзя пренебрегать изменением заселенности первоначального состояния, следует использовать решение, полученное в приближении, когда можно пренебречь осцилляциями на двойной оптической частоте. Параметром, характеризующим скорость переходов между дискретными состояниями, в этом случае является частота осцилляций Раби. При больших интенсивностях частота Раби может быть сравнимой с оптической частотой перехода. При этом поле может быть еще достаточно слабым для того, чтобы было необходимо учитывать ионизацию. При дальнейшем увеличении поля переходы в континуум становятся существенными. Это происходит также и в случае, когда верхний уровень находится на таком расстоянии от границы ионизации, что поле может вызвать ионизацию. Тогда можно не учитывать ионизацию с нижнего уровня.

Частота Раби определяется как

$$\Omega = \frac{\wp E_0}{\hbar},$$

где \wp – дипольный момент перехода, E_0 – амплитуда поля плоской электромагнитной волны. Обычно при рассмотрении поведения двухуровневой системы пренебрегают слагаемыми, осциллирующими на двойной оптической частоте, что справедливо при малой частоте Раби. Отношение частоты Раби к частоте перехода

$$\frac{\Omega}{\nu} = \frac{\wp E_0}{\hbar \nu},$$

где ν – круговая частота перехода, может быть большим или малым, в зависимости от амплитуды поля, частоты и величины дипольного момента. При этом поле может оставаться малым по сравнению с внутриатомным. В то же время, частота Раби может, в принципе, оказаться больше частоты перехода. В таком случае изменение во времени амплитуд вероятностей $a(t)$ и $b(t)$ для уровней в двухуровневой системе может происходить с частотами, сравнимыми с $n\nu$, где n – целое число. Тогда нельзя пренебрегать слагаемыми с быстрыми изменениями амплитуд. То есть простого аналитического решения не существует, и даже для двухуровневой системы требуется использование численных методов [43].

1. Теоретическая модель

В данной работе исследуются переходы в атоме водорода (без учета спина электрона) под действием поля линейно поляризованной волны с направлением колебаний по оси z . Для атома водорода все матричные элементы переходов получаются в аналитическом виде, так же как и волновые функции дискретного и непрерывного спектра. Рассмотрим два перехода, длины волн которых лежат в видимом или ближнем ИК-диапазоне (рис. 1). Пусть начальным состоянием атома будет $2p$ и $3p$ (считаем, что существует источник накачки, создающий атомы в этих состояниях). Рассмотрим первый переход: $(n = 4, l = 0) \leftrightarrow (n = 3, l = 1)$, то есть переход $4s \leftrightarrow 3p$. Частота перехода в атомных единицах равна $\nu = -1/(2 \cdot 4^2) - (-1/(2 \cdot 3^2)) = 7/288$. В обычных единицах круговая частота

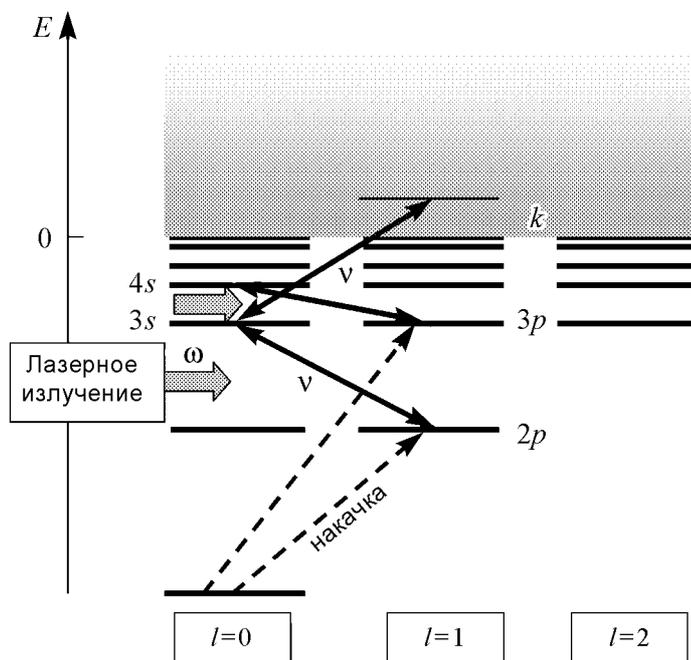


Рис. 1. Переходы $3s \leftrightarrow 2p$ и $4s \leftrightarrow 3p$ в атоме водорода и переход в континуум

равна $(7/288)(1/\hbar)4.37 \cdot 10^{-18} = 1.01 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$, что дает длину волны $\lambda = 2\pi c/\nu = 1.86 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 1.86 \text{ мкм}$. Нетрудно проверить, что, если прибавить к энергии верхнего уровня энергию светового кванта, то ее будет недостаточно для перехода в континуум: $-1/(2 \cdot 4^2) + 7/288 = -1/144 < 0$. Это означает, что переходы в континуум будут происходить лишь при двухквантовых переходах. Поэтому для данного перехода будем пренебрегать переходами в континуум.

Рассмотрим второй переход: $(n = 3, l = 0) \leftrightarrow (n = 2, l = 1)$, то есть переход $3s \leftrightarrow 2p$. Частота перехода в атомных единицах $\nu = -1/(2 \cdot 3^2) - (-1/(2 \cdot 2^2)) = 5/72$. В обычных единицах круговая частота равна $(5/72)(1/\hbar)4.37 \cdot 10^{-18} = 2.89 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$, что дает длину волны $\lambda = 2\pi c/\nu = 0.652 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 0.652 \text{ мкм}$.

Нетрудно проверить, что, если прибавить к энергии верхнего уровня энергию светового кванта, то ее будет уже достаточно для перехода в континуум: $-1/(2 \cdot 3^2) + 5/72 = 1/72 > 0$. Это означает, что переходы в континуум будут происходить уже при одноквантовых переходах в состояния с $k \approx 1/6$, так как энергия в непрерывном спектре равна $k^2/2$. Поэтому для данного перехода будем явно учитывать переходы в континуум.

Для решения задачи необходимы явные выражения для волновых функций. Выберем волновые функции в сферическом базисе, когда заданы энергия состояния, орбитальное и магнитное квантовые числа [48]. Волновая функция дискретного спектра

$$\begin{aligned} \langle \vec{r} | n, l, m \rangle &= \psi(r, \theta, \varphi, n, l, m) = \\ &= \frac{2^{1+l} n^{-2-l}}{(1+2l)!} \sqrt{\frac{(l+n)!}{(-1-l+n)!}} e^{-r/n} r^l {}_1F_1(1+l-n, 2+2l, \frac{2r}{n}) Y_{lm}(\varphi, \theta). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ${}_1F_1$ – вырожденная гипергеометрическая функция, Y_{lm} – сферическая гармоника.

Волновая функция непрерывного спектра

$$\begin{aligned} \langle \vec{r} | k, l, m \rangle &= \xi(r, \theta, \varphi, k, l, m) = 2 \sqrt{\frac{k}{1 - e^{-2\pi/k}}} \sqrt{2\pi} \left(\prod_{s=1}^l \sqrt{k^{-2} + s^2} \right) \times \\ &\times \frac{(2kr)^l}{(1+2l)!} e^{-ikr} {}_1F_1(1 + \frac{i}{k} + l, 2 + 2l, 2ikr) Y_{lm}(\varphi, \theta). \end{aligned} \quad (2)$$

Вычислим матричные элементы от $z = r \cos \theta$.

Первый переход

$$\begin{aligned} \wp_{ab} &= \langle 4, 0, 0 | z | 3, 1, 0 \rangle = \\ &= \int_0^\infty r \psi(r, \theta, \varphi, 4, 0, 0)^* \psi(r, \theta, \varphi, 3, 1, 0) r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta = -\frac{5750784 i}{5764801} \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Второй переход

$$\begin{aligned} \wp_{ab} &= \langle 3, 0, 0 | z | 2, 1, 0 \rangle = \\ &= \int_0^\infty r \psi(r, \theta, \varphi, 3, 0, 0)^* \psi(r, \theta, \varphi, 2, 1, 0) r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta = -\frac{3456 i}{15625} \sqrt{6}. \end{aligned}$$

Матричный элемент перехода в континуум

$$\begin{aligned} \wp_{ka} &= \langle k, 1, 0 | z | 3, 0, 0 \rangle = \\ &= \int_0^{\infty} r \xi(r, \theta, \varphi, k, 1, 0)^* \psi(r, \theta, \varphi, 3, 0, 0) r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta = \\ &= - \frac{(432 i) \sqrt{1+k^{-2}} k (7+27k^2) \sqrt{\pi} \sqrt{k \left(1 + \coth\left(\frac{\pi}{k}\right)\right)}}{\left(1 + \frac{6k}{i-3k}\right)^{i/k} (1+9k^2)^4}. \end{aligned}$$

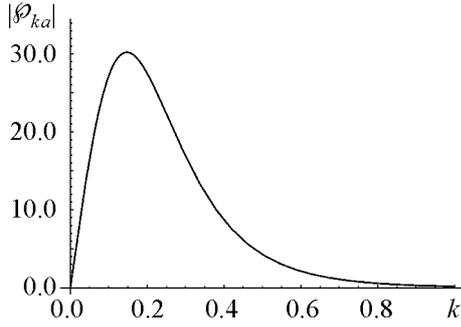


Рис. 2. Зависимость матричного элемента от k

Зависимость $|\wp_{ka}|$ от k показана на рис. 2. Видно, что диапазон изменений k ограничен: $0 < k < 1$, а матричный элемент в этом диапазоне изменяется достаточно медленно. Это позволяет интегрирование по k заменить суммированием по дискретному набору k .

Уравнения для амплитуд вероятности в первом случае выводятся стандартным образом. Представим волновую функцию в виде суперпозиции состояний

$$|\psi\rangle = a(t) |4, 0, 0\rangle \exp\left(i\frac{1}{32}t\right) + b(t) |3, 1, 0\rangle \exp\left(i\frac{1}{18}t\right)$$

и подставим это выражение в уравнение Шредингера. Спроектируем результат на базисные состояния $|4, 0, 0\rangle, |3, 1, 0\rangle$. В результате получим

$$\begin{aligned} i\dot{a} &= \wp_{ab} b(t) E_0(t) \cos(\omega t) \exp\left(i\frac{7}{288}t\right), \\ i\dot{b} &= \wp_{ab} a(t) E_0(t) \cos(\omega t) \exp\left(-i\frac{7}{288}t\right). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь амплитуда поля E_0 может зависеть от времени, частота $\omega \approx 7/288$. Эта система уравнений записана в атомных единицах, то есть масштаб времени равен 0.024 фс. Период оптических колебаний равен $2\pi/\nu = 2\pi 288/7 \approx 260$ а.е. Ожидаемое значение z -компоненты дипольного момента атома $P(t)$ рассчитывается по формуле

$$P(t) = \langle \psi | z | \psi \rangle = \wp_{ab} a^*(t) b(t) \exp\left(i\frac{7}{288}t\right) + \text{к.с.} \quad (4)$$

2. Переход $4s \leftrightarrow 3p$

2.1. Резонансный случай. Вначале рассмотрим резонансный случай, когда частота внешнего поля ω точно равна частоте перехода. Результаты расчетов показаны на рис. 3. В первом сверху ряду графиков частота Раби меньше оптической частоты в 10 раз, во втором – больше в 4 раза, в третьем – больше в 9 раз. На рисунках

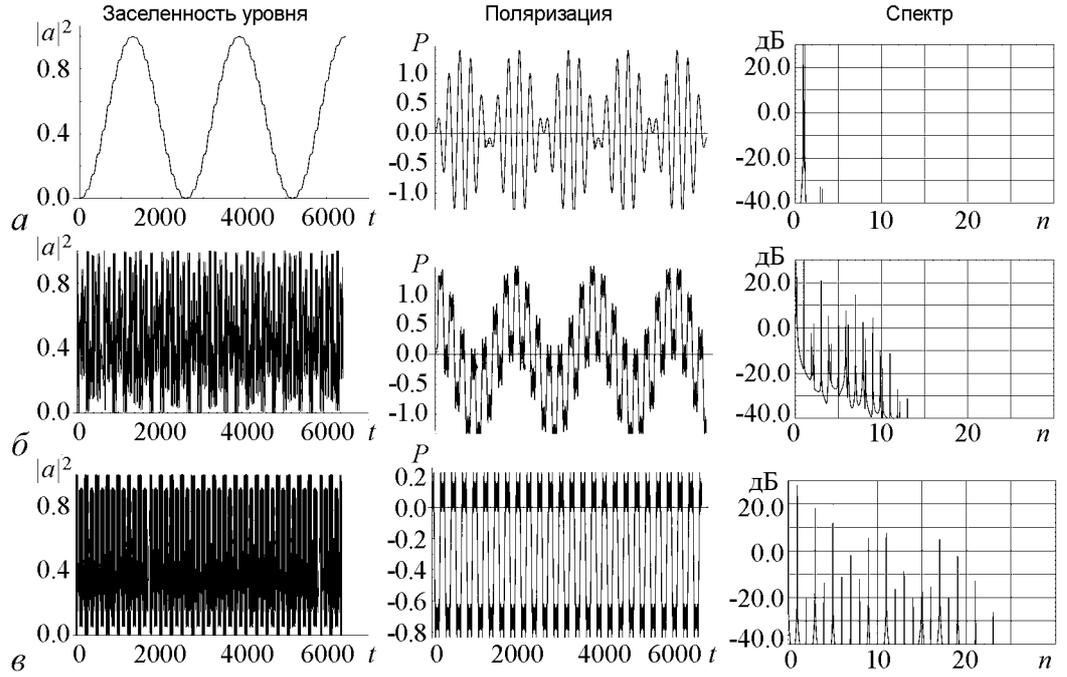


Рис. 3. Переход $4s \leftrightarrow 3p$. Точный резонанс. $(\varphi_{ab} E_0)/\nu = 0.1$ (а); 4.0 (б); 9.0 (в)

в первом ряду динамический режим представляет собой обычные Раби-осцилляции. Наведенная поляризация соответствует колебаниям на частоте перехода с модуляцией, определяемой Раби-осцилляциями. На рисунках во втором ряду (рис. 3, б) видны быстрые осцилляции Раби на экстремумах поляризации в виде темных полос. Видны также сравнительно низкочастотные колебания поляризации с периодом порядка 2000 атомных единиц времени (около 50 фс). Отметим, что аналогичные результаты получаются и при отношении частоты Раби и частоты перехода, равном 9 (рис. 3, в), однако низкочастотных пульсаций поляризации не наблюдается. Видно, что колебания несимметричны относительно оси времени, что означает существование ненулевой средней поляризации вдоль оси z . Величина ее составляет около 1 атомной единицы ($1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.53 \cdot 10^{-10} \approx 8.5 \cdot 10^{-30}$ Кл·м) на один атом. Если концентрация атомов при нормальных условиях 10^{25} м^{-3} , то соответствующая напряженность возникающего постоянного поля равна $E_{st} = P/\epsilon_0 = m \cdot 8.5 \cdot 10^{-30} \cdot 10^{25} \cdot 4\pi \cdot 10^9 = m \cdot 10^6 \text{ В/м}$, m – доля атомов, находящихся в состоянии $3p$.

Отсутствие низкочастотных колебаний поляризации наблюдается не только при $\varphi E_0/\nu = 9$, но и при отношении, равном 1.05, 2.75, 4.3, 5.8, 7.5, ... Для выяснения причин этого эффекта были проведены расчеты собственных значений параметра Флоке в решении системы уравнений (4). Напомним, что решение Флоке системы уравнений с периодическими коэффициентами отыскивается в виде

$$a(t) = \exp(i\lambda t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(ivnt),$$

$$b(t) = \exp(i\lambda t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \exp(ivnt).$$

После подстановки этих выражений в уравнение (4) и приравнивания коэффициен-

тов при одинаковых степенях e^{ivnt} , получаются соотношения

$$\begin{aligned} (i\lambda + ivn)a_n &= -i\frac{\wp_{ab}E_0(t)}{2}(b_n + b_{n-2}), \\ (i\lambda - ivn)b_n &= -i\frac{\wp_{ab}E_0(t)}{2}(a_n + a_{n+2}). \end{aligned} \quad (5)$$

Можно рассмотреть эти соотношения как матричное уравнение относительно неизвестных $a_n, b_n, -\infty < n < \infty$ с собственными значениями λ . Так как суммы, стоящие в определении a, b , являются периодическими функциями времени с периодом $2\pi/\nu$, то собственные значения λ определены с точностью до целых, умноженных на ν , так как изменение λ на ν приводит лишь к изменению номера гармоники a_n на единицу. На рис. 4 показаны зависимости собственных значений λ/ν от $\wp E_0/\nu$. Видно, что при указанных выше соотношениях частоты Раби и частоты перехода собственное значение равно точно $1/2$.

Решение уравнений (3), удовлетворяющее начальным условиям $a(0) = 0, b(0) = 1$, можно записать в виде

$$a(t) = \exp(i\lambda t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(ivnt) - \exp(-i\lambda t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(ivnt), \quad (6)$$

$$b(t) = \frac{1}{2} \left(\exp(i\lambda t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \exp(ivnt) + \exp(-i\lambda t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \exp(-ivnt) \right), \quad (7)$$

где a_n, b_n заданы решениями Флоке. При расчете дипольного момента по формуле (4) получаются слагаемые вида $\exp(-2i\lambda t + ivt)a_0^*b_0$. При $\lambda = \nu/2$, очевидно, возникает постоянный дипольный момент, наблюдающийся в численном эксперименте.

Рекуррентные соотношения для a_n, b_n можно переписать, исключив, например, b_n

$$b_n = -\frac{\wp E_0}{2}(a_n + a_{n+2})(\lambda + n\nu)^{-1}.$$

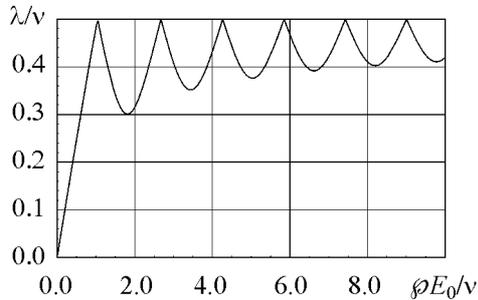


Рис. 4. Зависимость собственных значений от отношения частоты Раби и частоты перехода

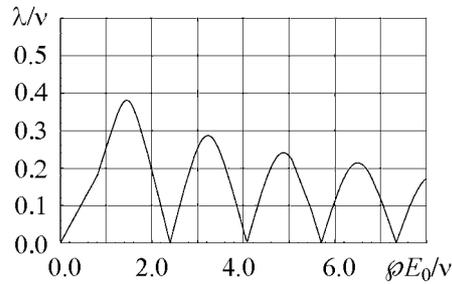


Рис. 5. Зависимость собственных значений от отношения частоты Раби и частоты перехода для двухфотонного перехода

Получим

$$A(n)a_{n-2} + B(n)a_n + C(n)a_{n+2} = 0,$$

$$A(n) = -\frac{g^2}{4(\lambda' + n - 2)}, \quad B(n) = \lambda' + n - \frac{g^2}{4(\lambda' + n)} - \frac{g^2}{4(\lambda' + n - 2)},$$

$$C(n) = -\frac{g^2}{4(\lambda' + n)}, \quad g = \frac{\varphi E_0}{\nu}, \quad \lambda' = \lambda/\nu.$$

Данная система уравнений будет иметь нетривиальное решение при определителе системы, обращаемом в нуль. Если ограничиться только членами a_{-2}, a_0, a_2 , то при $\lambda' = 1/2$ получим $g \approx 1.05, 2.77, \dots$

Найдем собственные значения для случая двухфотонных переходов, когда $\omega = \nu/2$. При этом уравнения (5) несколько изменяются:

$$(i\lambda + i\nu n)a_n = -i\frac{\varphi_{ab}E_0(t)}{2}(b_{n-1} + b_{n-3}),$$

$$(i\lambda + i\nu n)b_n = -i\frac{\varphi_{ab}E_0(t)}{2}(a_{n+1} + a_{n+3}).$$
(8)

На рис. 5 показана зависимость собственных значений от амплитуды поля для двухфотонного перехода.

Видно, что при $\varphi E_0/\nu = 1$ значение $\lambda \approx 0.25$. Следует напомнить, что значения λ определяют квазиэнергии. Собственные значения не достигают $1/2$ ни при каких амплитудах поля, однако обращаются в нуль при $\varphi E_0/\nu \approx 2.4, 4.1, 5.7, \dots$ Это означает, что следует ожидать ненулевой средней поляризации при таких полях.

2.2. Двухфотонные, трехфотонные и нерезонансные переходы. На рис. 6 показаны спектры поляризации для частоты поля, расстроенной примерно на $1/3$ своего значения (а), двухфотонного перехода $\omega = \nu/2$ (б) и трехфотонного перехода $\omega = \nu/3$ (в). Видно, что такие расстройки не препятствуют появлению высших гармоник. Спектр становится более плотным. Это связано с тем, что основная частота становится меньше и гармоники расположены ближе друг к другу.

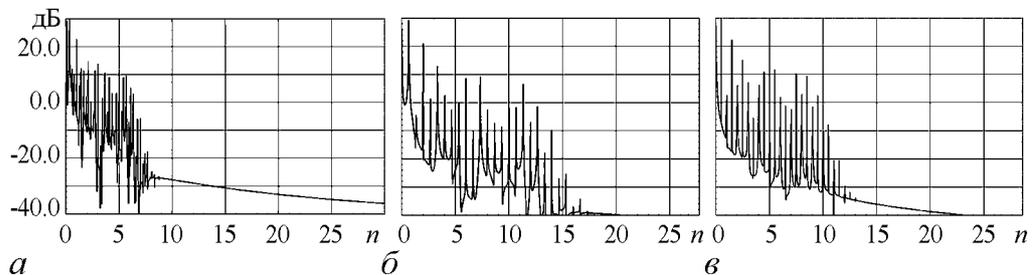


Рис. 6. Переход $4s \leftrightarrow 3p$. Нерезонансные переходы: а – $\omega = 2/3 \cdot 7/288$; б – двухфотонные переходы; в – трехфотонные переходы. $(\varphi E_0)/\nu = 9.0$

3. Переход $3s \leftrightarrow 3p$ с учетом континуума

Представим волновую функцию для данного случая в виде

$$|\psi\rangle = a(t) |3, 0, 0\rangle \exp\left(i\frac{1}{18}t\right) + b(t) |2, 1, 0\rangle \exp\left(i\frac{1}{8}t\right) + \int \frac{dk}{2\pi} d_k(t) |k, 1, 0\rangle \exp\left(-i\frac{k^2}{2}t\right).$$

Система уравнений с учетом переходов в континуум записана ниже.

$$\begin{aligned} i\dot{a} &= \wp_{ab} b(t) E_0(t) \cos(\omega t) \exp\left(i\frac{5}{72}t\right) + \int \frac{dk}{2\pi} V_{ak} d_k(t) \exp\left[-i\left(\frac{k^2}{2} + \frac{1}{18}\right)t\right], \\ i\dot{b} &= \wp_{ab} a(t) E_0(t) \cos(\omega t) \exp\left(-i\frac{5}{72}t\right), \\ i\dot{d}_k &= V_{ak} a(t) \exp\left[i\left(\frac{k^2}{2} + \frac{1}{18}\right)t\right], \\ V_{ak} &= i\wp_{ka} \cos(\omega t) E_0(t). \end{aligned} \quad (9)$$

Ожидаемое значение z -компоненты дипольного момента атома $P(t)$ рассчитывается по формуле

$$\begin{aligned} P(t) &= \langle \psi | z | \psi \rangle = \\ &= \wp_{ab} a^*(t) b(t) \exp\left(i\frac{5}{72}t\right) + a^*(t) \int \frac{dk}{2\pi} \wp_{ak} d_k(t) \exp\left[-i\left(\frac{k^2}{2} + \frac{1}{18}\right)t\right] + \text{к.с.} \end{aligned} \quad (10)$$

Интегрирование по k заменялось суммированием по правилу прямоугольников

$$\int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} f(k) \approx \int_0^1 \frac{dk}{2\pi} f(k) = \sum_{i=1}^M \frac{1}{2\pi M} f(k_i), \quad k_i = \frac{i-1}{M},$$

где M – число точек, на которые разбита область интегрирования. При расчетах M выбиралось таким образом, чтобы результаты интегрирования слабо зависели от M . Для этого аппроксимация интеграла по k от произведения матричного элемента перехода в континуум и интеграла $B(k) = \int_0^t dt' \exp\left[i\left(\frac{k^2}{2} + \frac{1}{18}\right)t'\right] \cos \omega t' a(t') \approx \int_0^t dt' \exp\left[i\left(\frac{k^2}{2} - \frac{1}{72}\right)t'\right] a(t')$ дискретной суммой должна быть достаточно точна. При больших временах, определяемых длительностью лазерного импульса, величина $B(k)$ изменяется по k довольно быстро, что и должно быть учтено при аппроксимации интеграла. При расчетах использовались значения M из диапазона 200...1000.

3.1. Точный резонанс $\omega = 5/72$. На рис. 7 и 8 показаны результаты расчетов для резонансного случая, когда $\omega = 5/72$ для $(\wp E_0)/\nu = 0.08$. В частности, показана динамика заселенности верхнего уровня, поведение во времени дипольного момента атома, спектра излучения атома, заселенности континуальных состояний.

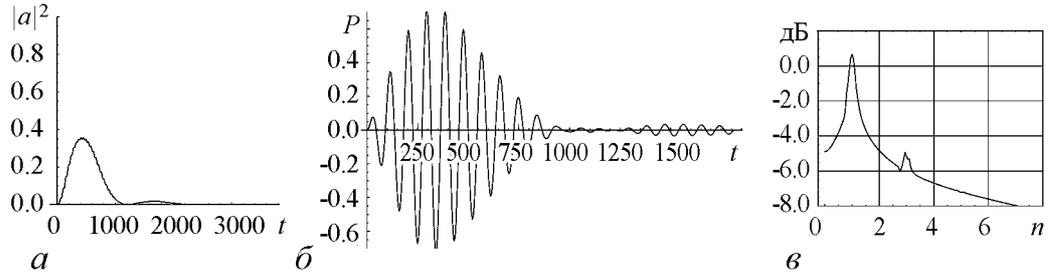


Рис. 7. Переход $3s \leftrightarrow 2p$ при $(\varphi E_0)/v = 0.08$. Резонансный переход: $\omega = 5/72$. Динамика заселенности верхнего уровня (а); зависимость от времени дипольного момента (б); спектр дипольного момента (в)

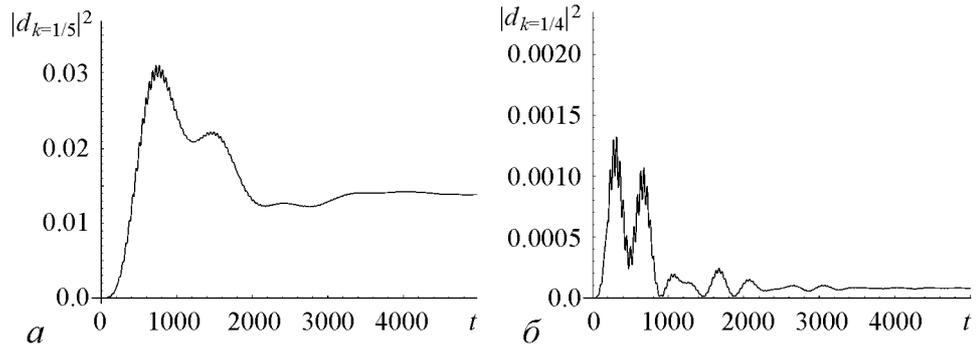


Рис. 8. Переход $3s \leftrightarrow 2p$ при $(\varphi E_0)/v = 0.08$. Резонансный переход: $\omega = 5/72$. Динамика заселенности континуальных состояний с $k = 1/5$ (а) и $1/4$ (б)

Видно, что заселенности континуальных состояний становятся существенными, начиная с момента времени $t \approx 1000$ (24 фс) (рис. 8). При этом заселенность верхнего уровня падает практически до нуля. Дипольный момент атома также становится нулевым. В спектре излучения атома можно наблюдать только первую гармонику поля.

Распределение заселенности континуальных состояний по k в различные моменты времени показано на рис. 9. С течением времени пики в распределении заселенностей становятся уже. Это означает, что фотоионизация приводит к увеличению заселенностей состояний, энергия которых удовлетворяет условию резонанса: $k \approx 1/6$. Если заселенность этой группы состояний становится заметной, то возможен и обратный процесс фоторекомбинации. При этом падает заселенность состояний, находящихся в точном резонансе (рис. 9, в). Это напоминает эффект по-

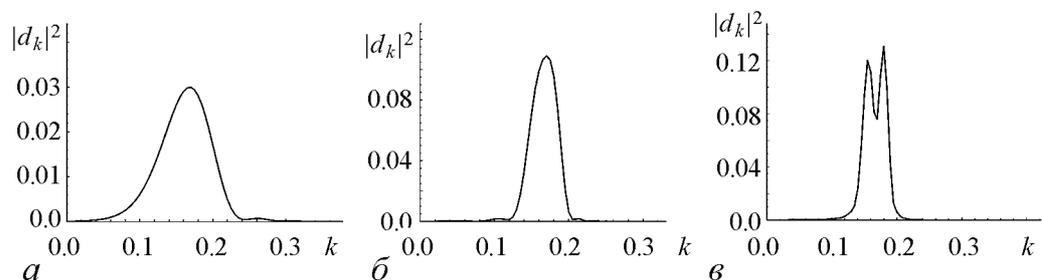


Рис. 9. Переход $3s \leftrightarrow 2p$ при $(\varphi E_0)/v = 0.08$. Резонансный переход: $\omega = 5/72$. Распределение заселенностей континуальных уровней по k при $t = 500$ (а), 1500 (б), 2500 (в)

явления сложной структуры провала Беннета в средах с неоднородно-уширенной линией перехода [49], связанный также с когерентными осцилляциями заселенностей уровней.

3.2. Двухфотонный переход $\omega = 5/144$. Как уже отмечалось, собственные значения решений Флоке задают расщепление уровней в сильном поле. Для двухфотонных переходов при достаточно больших амплитудах поля собственные значения не превышают 0.4 и даже могут обращаться в нуль (см. рис. 5). При этом расщепление уровней равно частоте перехода между уровнями.

Результаты расчетов показаны на рис. 10. Видно, что переходы в континуум уменьшают заселенность верхнего уровня и влияют на генерацию высших гармоник – спектр содержит всего 3 гармоники оптической частоты.

Следует отметить, что резонанс с континуальными уровнями наблюдается при $k \approx 0.26$. Если переход происходит с верхнего уровня, то резонансное значение k должно быть $1/6$, как в предыдущем случае. Различие в резонансных частотах происходит из-за того, что при сильном поле переходы происходят с квазиэнергетических состояний. Из рис. 10, *a* и формул (6) и (7) следует, что частота осцилляций заселенности верхнего уровня порядка $2\lambda + n\nu \approx 1.533\nu \leftarrow \lambda \approx \pm 0.467$. Это означает соответствующее расщепление уровней, типичное для системы в сильном поле. Значение λ , взятое из рис. 5 при $(\varphi E_0)/\nu = 1$ приблизительно равно 0.25. Расстояние между пиками в континууме соответствует частоте оптического перехода $k^2/2 = 0.26^2/2 + n\nu$. Это дает $k = 0.37$ при $n = 1$ и $k = 0.45$ при $n = 2$, что соответствует численным результатам, показанным на рис. 11.

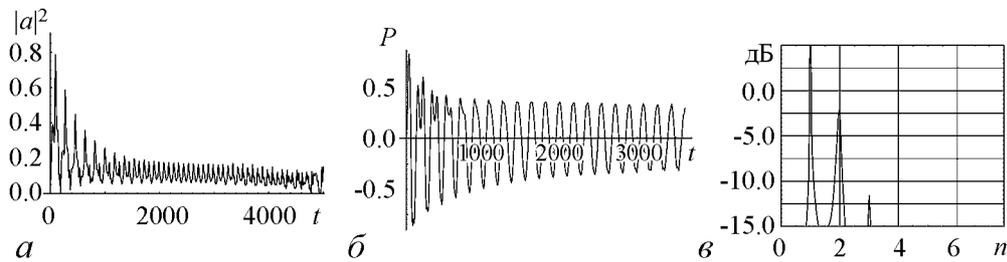


Рис. 10. Переход $3s \leftrightarrow 2p$ при $(\varphi E_0)/\nu = 1$. Двухфотонный переход: $\omega = 5/144$. *a* – заселенность верхнего уровня, *b* – дипольный момент, *c* – спектр

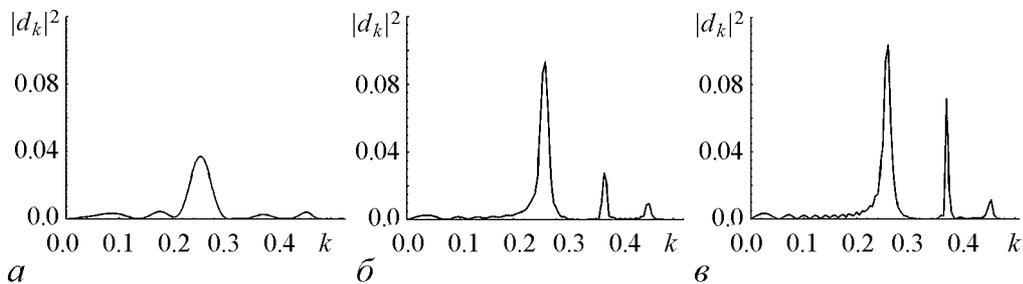


Рис. 11. Переход $3s \leftrightarrow 2p$ при $(\varphi E_0)/\nu = 1$. Двухфотонный переход: $\omega = 5/144$. Распределение заселенностей континуальных уровней по k при $t = 500$ (*a*), 1500 (*b*), 2500 (*c*)

Заключение

Сформулируем основные результаты работы.

С помощью численного моделирования и использования решений Флоке изучена динамика заселенностей уровней $4s$ и $3p$ атома водорода при действии сильного лазерного одночастотного линейно поляризованного поля в условиях одно-, двух- и трехфотонного резонанса, а также при достаточно большой отстройке частоты поля от частоты перехода без использования теории возмущений и приближения медленно меняющихся заселенностей.

Показано, что при амплитудах поля, при которых энергия взаимодействия атомного электрона с внешним полем φE_0 сравнима с энергией кванта оптического перехода, при совпадении частоты поля и частоты перехода дипольный момент атома осциллирует на частотах, соответствующих гармоникам оптической частоты, вплоть до двадцатой. Существует также низкочастотная компонента оптических колебаний, частота которой при некоторых значениях амплитуды поля обращается в нуль. Этот режим соответствует появлению постоянного ненулевого среднего дипольного момента среды. Такое явление также наблюдается для двухфотонного и трехфотонного резонансов и связано с полуцелыми или нулевыми собственными значениями решений Флоке.

Для перехода $3s \leftrightarrow 2p$ исследована динамика заселенностей дискретных уровней $3s$ и $2p$, а также состояний в континууме, связанных с уровнем $3s$ оптическим переходом. Для вычисления интегралов по континуальным состояниям использовался метод прямоугольников. При небольших полях, когда частота Раби меньше оптической, показано, что и в присутствии переходов в континуум заселенность верхнего уровня демонстрирует когерентные осцилляции, особенно в начальные моменты после включения поля. Затем заселенность верхнего уровня уменьшается за счет переходов в континуум. В спектре излучения атома присутствует только первая гармоника поля. Под действием поля заселяются континуальные уровни с энергией, соответствующей переходу с верхнего уровня, вызванному одним квантом оптического излучения. В распределении заселенностей континуальных уровней по энергиям (волновым числам) наблюдается структура, напоминающая обращенный провал, образующийся при взаимодействии газа с доплеровски уширенной линией перехода с лазерным полем. Форма этого пика связана с когерентными осцилляциями заселенности континуальных уровней (ионизацией и стимулированной рекомбинацией), связанными оптическим переходом с одним из дискретных состояний (в нашем случае – $3s$).

В условиях двухфотонного резонанса при достаточно большой амплитуде поля переходы в континууме происходят под действием одного, двух и трех квантов поля, так как каскадные переходы (континуум–континуум) в данной модели не учитывались. Учет каскадных переходов в данной модели может быть выполнен по методу, изложенному в работе [50].

Библиографический список

1. *Wolf A.* Laser-stimulated formation and stabilization of antihydrogen atoms // *Hyperfine Interact.* 1993. Vol. 76. P. 189.
2. *Borneis S., Bosch F., Engel T., Jung M., et al.* Laser-stimulated two-step recombination of highly charged ions and electrons in a storage ring // *Phys. Rev. Lett.* 1994. Vol. 72, P. 207.
3. *Schramm U., Wolf A., Scheussler T., Habs D., Schwalm D., Uwira O., Linkemann J. and Mueller A.* Laser-induced electron-ion recombination used to study enhanced spontaneous recombination during electron cooling // *Hyperfine Interactions.* 1997. Vol. 108. P. 273.
4. *Schiibler T., Schramm U., Grieser M., Habs D., Rider T., Schwalm D., Wolf A.* Laser induced two-step recombination for the study of Rydberg states in highly charged ions // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B.* 1995. Vol. 98. P. 146.
5. *Asp S., Schucha R., Dewitt D.R., Biedermann C., Gao H., Zong W., Andler G., Justiniano E.* Laser-induced recombination of D⁺ // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B.* 1996. Vol. 117. P. 31.
6. *Ritchie B.* Laser probe of the atomic ionization continuum: Stimulated recombination into an excited state // *Phys Rev.A.* 1984. Vol. 30. P. 1849.
7. *Leone C., Bivona S., Burlon R., and Ferrante G.* Strong-field and plasma aspects of multiphoton radiative recombination // *Phys. Rev. A.* 2002. Vol. 66. P. 051403.
8. *Fill E.* Gain on free-bound transitions by stimulated radiative recombination // *Phys. Rev. Lett.* 1986. Vol. 56. P. 1687.
9. *Schlusser T., Schramm U., Ruter T., Broude C. et al.* Laser-stimulated recombination spectroscopy for the study of long-range interactions in highly charged Rydberg ions // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 75. P. 802.
10. *Wolf A., Gwinner G., Linkemann J., Saghiri A.A. et al.* Recombination in electron coolers // *Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Research A.* 2000. Vol. 441. P. 183.
11. *Madsen L. B., Lambropoulos P.* Scaling of hydrogenic atoms and ions interacting with laser fields: Positronium in a laser field // *Phys. Rev.A.* 1999. V. 59, P. 4574.
12. *Gwinner G., Hoffknecht A., Bartsch T., Beutelspacher M., Eklow N. et al.* Influence of magnetic fields on electron-ion recombination at very low energies // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 84. P. 4822.
13. *Hahn Y.* Electron-ion recombination process – an overview // *Rep. Prog. Phys.* 1997. Vol. 60. P. 691.
14. *Keldysh L.V.* Ionization in the field of strong electromagnetic wave // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 1964. Vol. 47. P. 1945; *Sov. Phys. JETP.* 1965. Vol. 20. P. 1307.
15. *Faisal F.H.M.* Multiple absorption of laser photons by atoms // *J. Phys. B.* 1973. Vol. 6. P. L89.
16. *Reiss H.R.* Effect of an intense electromagnetic field on a weakly bound system // *Phys. Rev. A.* 1980. Vol. 22. P. 1786.
17. *Alaterre P., Matte J.-P., Lamoureux M.* Ionization and recombination rates in non-Maxwellian plasmas // *Phys. Rev.A.* 1986. Vol. 34. P. 1578.

18. Amoretti M. et al. Production and detection of cold antihydrogen atoms // *Nature*. 2002. Vol. 419. P. 456.
19. Gabrielse G. et al. Background-free observation of cold antihydrogen with field-ionization analysis of its states // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 89. P. 213401.
20. Bertsche W., Boston A., Bowe P.D., Cesar C.L. et al. The ALPHA experiment: a cold antihydrogen trap//AIP Conference Proceedings. 2005. Vol. 796, P. 301.
21. Меньшиков Л.И., Ландуа Р. Состояние исследований по холодному антиводороду//УФН. 2003. Т. 173, № 3. С. 233.
22. Ryabinina M.V., Melnikov L.A. Laser-induced antiproton-positron recombination in traps // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B*. 2004. Vol. 214. P. 35.
23. Wolf A. Recombination physics // *Nucl. Phys. A*. 2001. Vol. 692. P. 153.
24. Pahl A., Eikema K.S.E., Walz J., Hansch T.W. Combined trap for laser-stimulated recombination // *Hyperfine Interactions*. 2000. Vol. 127. P. 181.
25. Eikema K.S.E., Walz J., and Hansch T.W. Continuous coherent Lyman-alpha excitation of atomic hydrogen // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 86. P. 5679.
26. Storry C. H., Speck A., Le Sage D., Guise N. et al. First laser-controlled antihydrogen production // *Phys. Rev. Lett.* 2004. Vol. 93. P. 263401.
27. Laarmann T., de Castro A. R., Gurtler P., Laasch W., Schulz J., Wabnitz H. and Moller T. Photoionization of helium atoms irradiated with intense vacuum ultraviolet free-electron laser light. Part I. Experimental study of multiphoton and single-photon processes // *Phys. Rev. A*. 2005. Vol. 72. P. 023409.
28. Charalambidis D., Tzallas P., Papadogiannis N.A., Nikolopoulos L.A.A., Benis E.P. and Tsakiris G.D. Comment on «Photoionization of helium atoms irradiated with intense vacuum ultraviolet free-electron laser light. Part I. Experimental study of multiphoton and single-photon processes» // *Phys. Rev. A*. 2006. Vol. 74. P. 037401.
29. Laarmann T., de Castro A.R., Gurtler P., Laasch W., Schulz J., Wabnitz H. and Moller T. Reply to «Comment on ‘Photoionization of helium atoms irradiated with intense vacuum ultraviolet free-electron laser light. Part I. Experimental study of multiphoton and single-photon processes’» // *Phys. Rev. A*. 2006. Vol. 74. P. 037402.
30. Moshhammer R., Jiang Y. H., Foucar L. et al. Few-photon multiple ionization of Ne and Ar by strong free-electron-laser pulses // *Phys. Rev. Lett.* 2007. Vol. 98. P. 203001.
31. Zhang C., Liu X., Ding P. and Qi Y. The enhancement of efficiency of high-order harmonic in intense laser field based on asymptotic boundary conditions and symplectic algorithm // *J. Math. Chem.* 2006. Vol. 39. P. 451.
32. Benis E. P., Charalambidis D., Kitsopoulos T. N., Tsakiris G.D., and Tzallas P. Two-photon double ionization of rare gases by a superposition of harmonics // *Phys. Rev. A*. 2006. Vol. 74. P. 051402(R).
33. Uiberacker M., Uphues Th., Schultze M., Verhoef A. J. et al. Attosecond real-time observation of electron tunnelling in atoms // *Nature*. 2007. Vol. 446, doi:10.1038/nature05648.
34. Corkum P. B. and Krausz F. Attosecond science//*Nature physics*. 2007. Vol. 3. P. 381.

35. *Girju M. G., Hristov K., Kidun O. and Bauer D.* Nonperturbative resonant strong field ionization of atomic hydrogen // *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 2007. Vol. 40. P. 4165.
36. *Klews M. and Schweizer W.* Three-dimensional kicked hydrogen atom // *Phys. Rev. A.* 2001. Vol. 64. P. 053403.
37. *Duchateau G., Cormier E., Bachau H., Gayet R.* Coulomb–Volkov approach of atom ionization by intense and ultrashort laser pulses // *Phys. Rev. A.* 2001. Vol. 63. P. 053411.
38. *Duchateau G., Cormier E., Gayet R.* A simple non-perturbative approach of atom ionisation by intense and ultra-short laser pulses // *Eur. Phys. J.* 2000. Vol. D11. P. 191.
39. *Kaminski J.Z., Ehlotzky F.* Optimized X-ray generation by electron–ion recombination in the presence of powerful laser fields // *Optics Communications.* 2004. Vol. 234. P. 343.
40. *Gusev A.A., Chuluunbaatar O., Vinitzky S.I., Kaschiev M.S.* High accuracy splitting algorithms for the time-dependent Schrödinger equation with a train of laser pulses // *Proc. SPIE.* 2004. Vol. 5476. P. 5476-14.
41. *Ryabinina M.V., Melnikov L.A.* Phase-sensitive ionization and recombination of anti-hydrogen atom using zero-duration high intensity laser pulse // *AIP Conference Proc.* 2005. Vol. 796. P. 325.
42. *Андреев А.В.* Взаимодействие атома со сверхсильными лазерными полями // *ЖЭТФ.* 1999. Т. 116, № 3(9). С. 793.
43. *Bordyug N.V. and Krainov V.P.* Dynamic resonances in ultra-short laser pulses // *Laser Phys.Lett.* 2007. Vol. 4, № 6. P. 418.
44. *Hu S.X. and Collins L.A.* Phase control of the inverse above-threshold-ionization process with few-cycle pulses // *Phys. Rev. A.* 2004. Vol. 70. P. 035401.
45. *Giraud S., Piraux B. et al.* Strong field atomic ionization dynamics: role of the Coulomb potential studied by means of a model // *Proc. SPIE.* 2006. Vol. 6165. P. 616513.
46. *Волкова Е.А., Попов А.М., Тихонов М.А., Тихонова О.В.* Атом в лазерном импульсе высокой интенсивности: эффект стабилизации и приближение сильного поля // *ЖЭТФ.* 2007. Т. 132. Вып. 3. С. 596.
47. *Волкова Е.А., Гридчин В.В., Попов А.М., Тихонова О.В.* Туннельная ионизация атома водорода в лазерном импульсе короткой и ультракороткой длительности // *ЖЭТФ.* 2006. Т. 129. Вып. 1. С. 48.
48. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. М.: Наука, 1989.
49. *Летохов В.С., Чеботаев В.П.* Принципы нелинейной лазерной спектроскопии. М.: Наука, 1974.
50. *Ryabinina M.V., Melnikov L.A.* Coherent effects in free-bound transitions in hydrogen/antihydrogen atom under the action of ultra-short strong-field laser pulse // *Proc. SPIE.* 2007. Vol. 6537. P. 653705.

**DYNAMICS OF PROBABILITY AMPLITUDES IN HYDROGEN-LIKE
ATOMS UNDER THE ACTION OF STRONG VARIABLE
ELECTRIC FIELD OF ELECTROMAGNETIC WAVE
ACCOUNTING TRANSITIONS TO CONTINUUM**

M.V. Ryabinina, L.A. Melnikov

The dynamics of populations of $4s$ and $3p$ states in hydrogen atom is investigated under the action of ultra high laser single frequency linear-polarized pulse at one-, two- and three-photon resonance and at large detuning out of frame of perturbation theory and rotating wave approximation. It was shown the existence of low frequency modulation of optical oscillations, which frequency becomes zero at some values of laser field amplitude. For the transition $3s \leftrightarrow 2p$ the population dynamics of discrete states $3s$ and $2p$ is investigated, and also of the states in continuum which are bounded with the state $3s$ via optical transition. Coherent-like oscillations of the population of the states in continuum are demonstrated.



Рябинина Мария Викторовна – родилась в Саратове (1971). Окончила Саратовский университет (1993), защитила кандидатскую диссертацию (1999). С 2001 года работает в должности доцента кафедры лазерной и компьютерной физики. Ее научные интересы включают лазерную физику, физику лазерных систем генерации сверхкоротких световых импульсов, лазерную спектроскопию экзотических атомов. Автор 35 научных статей.



ДИНАМИКА ЗАСЕЛЕННОСТЕЙ В АТОМЕ ВОДОРОДА ПОД ДЕЙСТВИЕМ УЛЬТРАКОРОТКОГО ИМПУЛЬСА ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Н.И. Тенер, В.Л. Дербов

Динамика заселенностей высоковозбужденных состояний атома водорода под действием ультракороткого интенсивного лазерного импульса исследована посредством прямого численного решения уравнения Шредингера в конечном базисе собственных состояний дискретного и непрерывного энергетического спектра. Продемонстрирована существенная роль состояний непрерывного спектра. Обсуждается формирование локализованных волновых пакетов ридберговских состояний.

Введение

В результате суперпозиции ридберговских состояний водородоподобного атома с большими значениями квантовых чисел во всех степенях свободы могут возникать локализованные в пространстве квазистабильные волновые пакеты, движущиеся вдоль классической кеплеровской траектории на большом удалении (несколько тысяч боровских радиусов) от ядра. Такие состояния являются классическим пределом атома, а их динамика обнаруживает и классические, и квантовые свойства. Для таких волновых пакетов произведение неопределенностей координаты и импульса близко к минимальному значению, поэтому они являются хорошим приближением когерентного состояния.

Возможность создания волновых пакетов с различными значениями орбитального и магнитного квантовых чисел и разной степенью локализации, подтверждалась в многочисленных публикациях и привлекла внимание большого числа исследователей. Были предложены различные способы теоретического описания таких локализованных состояний [1] и методы их экспериментального получения [2–6].

Развитие новых подходов к получению локализованных волновых пакетов и исследование их свойств имеет большое значение для изучения принципа соответствия классического предела атома, установления связей между орбитами классически хаотических систем и движением квантового волнового пакета, управления поведением ридберговского электрона [7].

Формирование суперпозиции ридберговских состояний может быть достигнуто в результате взаимодействия атома в основном состоянии с коротким сильным

лазерным импульсом [8–11]: в этом случае одновременно заселяется большое число ридберговских уровней вокруг центрального уровня. Поскольку при дипольных переходах справедливо правило отбора $\Delta L = \pm 1$, такой пакет неизбежно представляет собой суперпозицию ридберговских состояний с низкими значениями орбитального и магнитного квантовых чисел. Как показано в [8–11], он локализован по радиальной переменной и совершает осцилляции между классическими поворотными точками. Другие исследователи предполагают, что увеличение продолжительности импульса, учет переходов между соседними уровнями, а также между стационарными состояниями и состояниями непрерывного спектра, позволяют получать волновой пакет, включающий состояния с высокими значениями орбитального квантового числа [12].

В данной работе рассматривается возможность создания волнового пакета, включающего ридберговские состояния атома водорода с различными значениями орбитального и магнитного квантовых чисел при использовании ультракоротких лазерных импульсов высокой интенсивности. Новым в работе является учет переходов между состояниями дискретного и непрерывного спектра. Посредством численного моделирования исследуется динамика заселенностей энергетических уровней и форма образующегося волнового пакета.

1. Возбуждение переходов под действием лазерного импульса

В работах [8–11], а также в проведенном нами ранее исследовании [13] процесс взаимодействия атома с лазерным импульсом рассматривался на основании упрощенной модели без учета состояний непрерывного спектра. Ввиду близости ридберговских уровней к границе ионизации, высокой мощности и малой длительности (и следовательно, большой спектральной ширине) исследуемых импульсов такой учет представляется необходимым. Для демонстрации этого рассмотрим вначале модель без непрерывного спектра.

Предположим, что в модели переходы имеют место только между основным состоянием и ридберговскими состояниями с $n = 20 \div 40$. Пусть поле имеет круговую поляризацию, тогда заселяются ридберговские уровни с $l = m = 1$. Волновая функция системы может быть записана в виде

$$\Psi(C, t) = \sum_{n=20}^{40} C_{n1}(t) R_{n1} Y_{11} + C_{10}(t) R_{10} Y_{00}, \quad (1)$$

где $C_{10}(t)$ и $C_{n1}(t)$ амплитуды заселенностей основного и ридберговских состояний; R_{01} и R_{n1} – радиальные функции основного и ридберговских состояний; Y_{00} и Y_{11} – сферические функции.

Пусть огибающая импульса задается гауссовой функцией $E(t) = E_0 \cdot \exp[-(2t/T)^2] \sin(\omega t)$, где T – продолжительность импульса, E_0 – амплитуда импульса, ω – его частота. Частоту внешнего поля выберем резонансной к переходу между основным состоянием и ридберговским состоянием с $n = 25$.

Численное решение системы уравнений для амплитуд заселенностей показало, что в результате действия импульса подходящей амплитуды и продолжительности

можно достичь почти полного перехода атомов из основного состояния в ридберговские. Динамика заселенностей в такой модели представлена на рис. 1.

На рисунке хорошо видно как заселенность из основного состояния перераспределяется между возбужденными уровнями с $n = 20 \div 40$ и $l = m = 1$.

Одновременное возбуждение большого числа состояний вблизи границы ионизации указывает на необходимость учета переходов в состояния непрерывного спектра. Поэтому рассмотрим модель, в которой наряду с дискретными уровнями учитывается часть непрерывного спектра, лежащая вблизи границы ионизации. Как часто делают в подобных случаях [12], используем дискретное представление непрерывного спектра последовательностью 40 состояний с равноотстоящими значениями волнового числа k , начиная от 0 с шагом 0.02; при этом покрывается энергетический интервал от 0 до 0.3 атомных единиц. Волновую функцию системы можно представить в виде

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=20}^{40} C_{n1}(t) R_{n1} Y_{11} + \sum_k C_{k1}(t) R_{k1} Y_{11} + C_{10}(t) R_{10} Y_{00}, \quad (2)$$

где $C_{n1}(t)$ и $C_{k1}(t)$ – амплитуды заселенностей соответствующих ридберговских состояний и состояний непрерывного спектра. Расчеты показали, что динамика заселенностей в системе с волновой функцией (2) существенно отличается от упрощенной модели (1) при тех же параметрах поля.

На рис. 2 показана временная зависимость суммарной заселенности состояний непрерывного спектра, а на рис. 3 – заселенности основного состояния. Видно, что примерно половина атомов переходит в непрерывный спектр, а половина остается в основном состоянии. Осцилляции заселенностей аналогичны осцилляциям Раби, их высокая частота связана с очень большой напряженностью поля. Анализ показал, что в более слабых полях эта частота понижается. Заселение высоковозбужденных состояний дискретного спектра оказывается незначительным (суммарная заселенность составляет около 0.2%). Напомним, что параметры импульса подобраны так, чтобы в упрощенной модели почти все атомы переходили в ридберговские состояния. При

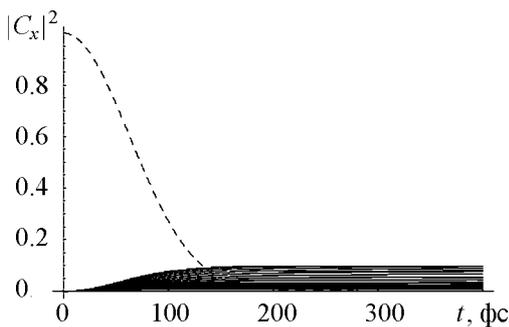


Рис. 1. Динамика заселенностей в упрощенной модели взаимодействия атома с лазерным импульсом. Заселенность основного состояния показана прерывистой линией, ридберговских – сплошными. Максимальная амплитуда E_0 напряженности лазерного поля составляла $5.1 \cdot 10^7$ В/см, продолжительность импульса 600 фс

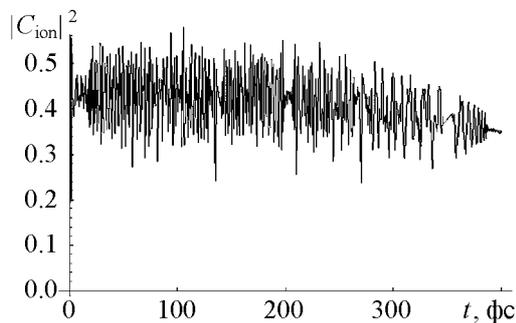


Рис. 2. Суммарная заселенность непрерывного спектра. $E_0 = 5.1 \cdot 10^7$ В/см, продолжительность импульса 600 фс

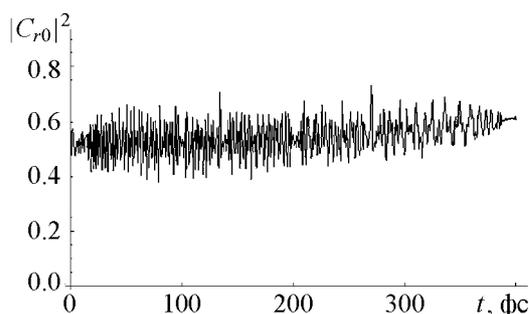


Рис. 3. Заселенность основного состояния. $E_0 = 5.1 \cdot 10^7$ В/см, продолжительность импульса 600 фс

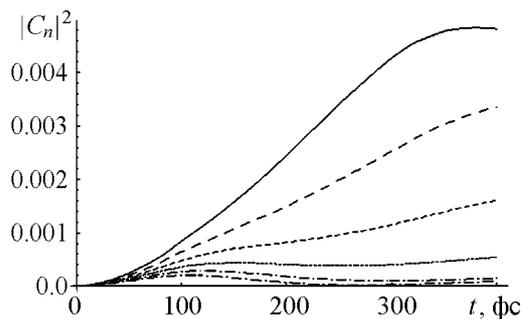


Рис. 4. Заселенность ридберговских состояний $n = 20 \div 25$. $E_0 = 4.6 \cdot 10^6$ В/см, продолжительность импульса 600 фс

наличии континуума такая напряженность поля оказывается завышенной и вместо заселения ридберговских уровней преобладает возбуждение состояний непрерывного спектра. Анализ показал, что наиболее интенсивное заселение ридберговских состояний происходит при существенно меньшей амплитуде поля (рис. 4). В этом случае их суммарная заселенность достигает около 1%.

Можно сделать вывод о неприменимости упрощенной модели без непрерывного спектра для описания процесса заселения ридберговских состояний и формирования волнового пакета в реальном атоме.

2. Получение состояний с высокими значениями орбитального и магнитного квантовых чисел

Дальнейшее расширение модели связано с включением в нее большего числа состояний с различными значениями n , l и m . Рассмотрим теперь модель, в которой для каждого энергетического уровня непрерывного спектра l принимает значения от 1 до 10. Таким образом, для описания непрерывного спектра используется 400 базисных функций. К базисному набору состояний дискретного спектра добавим уровни со значениями главного квантового числа n от 3 до 40 и орбитальным числом от 1 до 10. Общее число базисных состояний дискретного спектра составляет 328. Внешнее поле предполагается циркулярно поляризованным: разрешены переходы с увеличением l и m на 1. Поэтому в рассматриваемой модели для всех уровней $l = m$. Переходы между низковозбужденными состояниями дискретного спектра и континуумом достаточно далеки по частоте от несущей частоты лазерного поля, однако, как показывает анализ, они существенно участвуют во взаимодействии атома с полем из-за весьма высоких значений их дипольных моментов. Более того, их присутствие в модели открывает возможность каскадных процессов с повышением орбитального квантового числа и его проекции на единицу на каждом шаге. Полная схема переходов, включенных в модель, представлена на рис. 5.

Итак, конечное состояние атома представим в виде суперпозиции состояний дискретного и непрерывного спектра, общее число которых теперь составляет 728.

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n \sum_{l=m} C_{nl}(t) R_{nl} Y_{l,m=l} + \sum_k \sum_{l=m} C_{kl}(t) R_{kl} Y_{l,m=l}. \quad (3)$$

Первая сумма в выражении (3) представляет состояния дискретного, вторая – состояния непрерывного спектра. Для исследования динамики заселенностей численно решались уравнения для амплитуд заселенностей.

$$\begin{aligned} \frac{dC_{10}(t)}{dt} = i \sum_{n=20}^{40} d_{10}^{n1} \exp[i(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2})t] E(t) \cdot C_{n1}(t) + \\ + i \sum_k d_{10}^{k1} \exp[i(-E_k - \frac{1}{2})t] E(t) \cdot C_{k1}(t), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{dC_{n1}(t)}{dt} = i d_{10}^{n1} \exp[-i(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2})t] E(t) \cdot C_{10}(t) + \\ + i \sum_k d_{n1}^{k2} \exp[-i(-\frac{1}{n^2} - E_k)t] E(t) \cdot C_{k2}(t), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{dC_{nl}(t)}{dt} = i \sum_k d_{nl}^{kl-1} \exp[-i(-\frac{1}{n^2} - E_k)t] E(t) \cdot C_{kl-1}(t) + \\ + i \sum_k d_{nl}^{kl+1} \exp[i(-\frac{1}{n^2} - E_k)t] E(t) \cdot C_{kl+1}(t), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{dC_{kl}(t)}{dt} = i \sum_k d_{nl-1}^{kl} \exp[-i(-\frac{1}{n^2} - E_k)t] E(t) \cdot C_{nl-1}(t) + \\ + i \sum_k d_{nl+1}^{kl} \exp[i(-\frac{1}{n^2} - E_k)t] E(t) \cdot C_{nl+1}(t), \end{aligned} \quad (7)$$

где $d_{nl}^{kl'}$ – дипольные матричные элементы переходов, E_k – энергия состояния непрерывного спектра для заданного k . Для переходов между состояниями дискретного и непрерывного спектра матричные элементы рассчитывались путем численного интегрирования, а для переходов между состояниями дискретного спектра – по известным формулам [14].

Исследование динамики заселенностей проводилось для различных длительностей импульса. Амплитуда напряженности лазерного поля составляла $3.57 \cdot 10^8$ В/см. В момент включения поля атомы находились в основном состоянии с $n = 1, l = 0, m = 0$. На рис. 6 и 7 изображено действие импульса продолжительностью 5 фс.

На рис. 6 изображена временная зависимость заселенности основного состояния и четырех состояний непрерывного спектра с энергиями близкими к нулю. Видно, что существенная часть атомов переходит из основного состояния в состояния непрерывного спектра. Затем происходят переходы из непрерывного спектра на дискретные уровни с различными значениями n , которые сопровождаются увеличением орбитального и магнитного квантовых чисел на 1. Такой процесс обмена заселенностей иллюстрируется рис. 7, где показана заселенность уровней с $n = 3 \div 7$ и $l = 2$. Хорошо заметны осцилляции, связанные с переходами из непрерывного спектра и обратно. На начальном этапе максимально заселяется уровень с $n = 3$, затем заселенность перераспределяется между другими уровнями благодаря переходам через

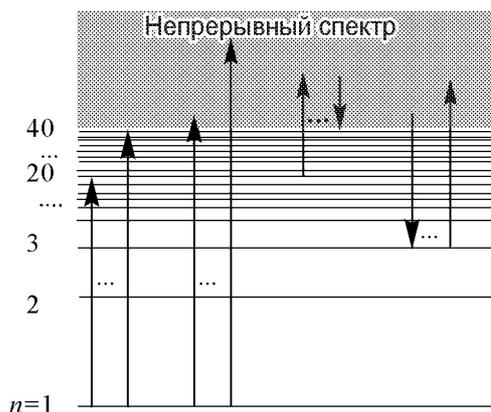


Рис. 5. Схема переходов в модели, допускающей возбуждение состояний с высокими значениями орбитального момента и его проекции под действием лазерного импульса с круговой поляризацией

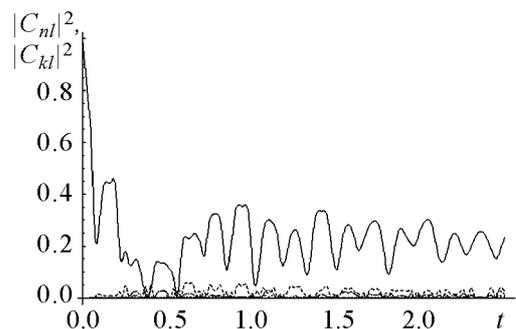


Рис. 6. Динамика заселенностей под действием импульса продолжительностью 5 фс при максимальной напряженности поля $E_0 = 3.57 \cdot 10^8$ В/см. Сплошная линия – заселенность основного состояния, штриховые линии – заселенности четырех состояний непрерывного спектра с энергиями близкими к нулю

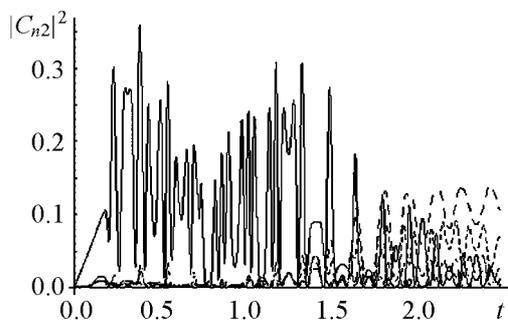


Рис. 7. Заселенность стационарных состояний с $l = 2$: сплошная линия – $n = 3$, штриховые линии – $n = 4, 5, 6, 7$. $E_0 = 3.57 \cdot 10^8$ В/см

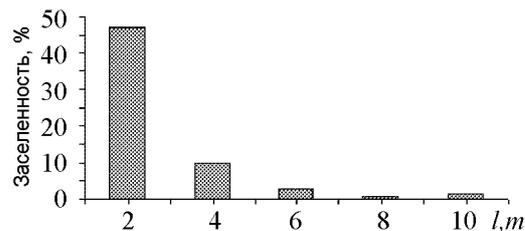


Рис. 8. Распределение заселенности по l и m в процентах

непрерывный спектр. Существенно заселяются состояния с $l = m = 2$, что соответствует результатам, полученными другими авторами [12]. Часть атомов остается в основном состоянии.

Аналогичная динамика заселенностей наблюдается для лазерного импульса продолжительностью 25 фс. Заметно, что за более длительное время действия импульса успевает произойти большее число переходов в континуум и обратно, в результате чего заселяются состояния с большими значениями орбитального и магнитного квантовых чисел. В конце действия импульса примерно 30% атомов переходит в непрерывный спектр, примерно 13% – остается в основном состоянии. Остальные атомы перераспределяются между связанными состояниями с различными значениями n, l и m . Распределение населенности в зависимости от l представлено на рис. 8.

На рисунке виден заметный вклад состояний с высокими значениями орбитального и магнитного квантовых чисел в общую заселенность сформировавшегося в результате действия импульса волнового пакета. Можно отметить, что состояния с нечетными значениями l и m (1, 3, 5, 7, 9) практически не заселяются. Это объясня-

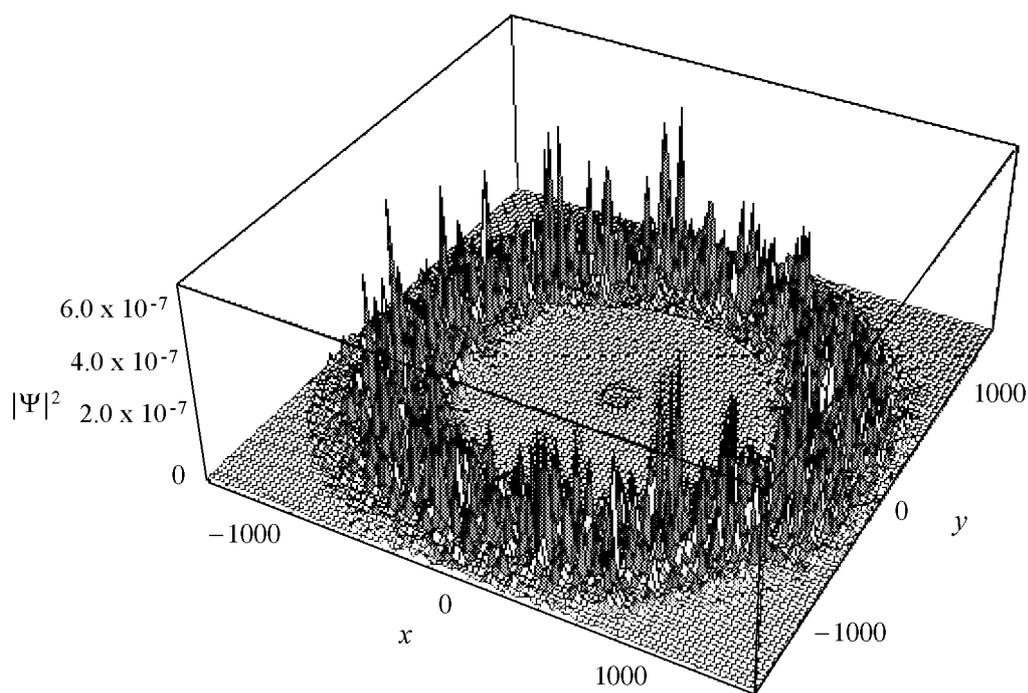


Рис. 9. Распределение плотности вероятности для волнового пакета, сформированного импульсом с круговой поляризацией продолжительностью 25 фс

ется сохранением четности в системе [15]. На основе рассчитанных коэффициентов $C_{nl}(t)$ можно построить пространственное распределение плотности. На рис. 9 такое распределение изображено в плоскости $z = 0$. Видна локализация электрона по радиальной переменной и отсутствие локализации по азимутальному углу, что является характерным для суперпозиции с преобладанием состояний с низкими значениями орбитального и магнитного квантовых чисел.

Заключение

Результаты исследований показали, что упрощенная модель и модель с учетом непрерывного спектра дают принципиально различные результаты. Без учета дополнительных уровней дискретного спектра не удастся получить заметного заселения ридберговских состояний. В то же время существенная часть заселенности переходит в непрерывный спектр. Более точные расчеты с использованием расширенной модели, включающей большое число дискретных состояний и состояний непрерывного спектра с различными значениями орбитального и магнитного квантовых чисел, показали, что в результате действия импульса заселение ридберговских уровней происходит вследствие обмена заселенности между стационарными состояниями и непрерывным спектром. Наблюдается рост заселения состояний с более высокими значениями орбитального и магнитного квантовых чисел по мере увеличения длительности импульса. Можно предположить, что выбор подходящей продолжитель-

ности и амплитуды импульса позволит достигать высоких значений l и m , вплоть до максимальных. Преимущественно каскадный характер заселения дискретных уровней через континуум подтверждается и тем обстоятельством, что в отличие от модели с чисто дискретным спектром практически не заселяются состояния с $l = m = 1$, что объясняется четным числом участвующих в процессе фотонов.

Библиографический список

1. *Gaeta Z.D. and Stroud C.R.* Classical and quantum-mechanical dynamics of quasi-classical state of the hydrogen atom // *Phys. Rev. A.* 1990. 42. P. 6308.
2. *Gaeta Z.D., Noel M.W. and Stroud C.R.* Excitation of the classical-limit state of an atom // *Phys. Rev. Lett.* 1994. 73. P. 636.
3. *Bromage J. and Stroud C.R.* Excitation of a three-dimensionally localized atomic electron wave packet // *Phys. Rev. Lett.* 1999. 83. P. 4963.
4. *Hulet G. and Kleppner D.* Rydberg atom in «circular» states // *Phys. Rev. Lett.* 1983. 51. P. 1430.
5. *Hare J., Gross M. and Goy P.* Circular atoms prepared by a new method of crossed electric and magnetic fields // *Phys. Rev. Lett.* 1988. 61. P. 1938.
6. *Cheng C.H., Lee C.Y. and Gallaghe T.F.* Production of circular Rydberg states with circularly polarized microwave fields // *Phys. Rev. Lett.* 1994. 73. P. 3078.
7. *Shapiro E.A., Kalinski M. and Eberly J.H.* Non-circular Trojan-like wavepackets: quantum theory and application to quantum control // *J. Phys. B.* 2000. 33. P. 3079.
8. *Alber G., Ritsch H. and Zoller P.* Generation and detection of Rydberg wave packets by short laser pulses // *Phys. Rev. A.* 1986. 34. P. 1058.
9. *Parker J. and Strong C.R.* Coherence and decay of Rydberg wave packets // *Phys. Rev. Lett.* 1986. 56. P. 716.
10. *Wolde A. et al.* Observation of radially localized atomic electron wave packets // *Phys. Rev. Lett.* 1988. 61. P. 2099.
11. *Noordam L.D., Duncan D.I. and Gallagher T.F.* Ramsey fringes in atomic Rydberg wave packets // *Phys. Rev. A.* 1992. 45. P. 4734.
12. *Nilsen H.M. and Hansen J.P.* Generation of an angular and radial Rydberg wave packet in a single laser pulse // *Phys. Rev. A.* 2000. 63. P. 011405.
13. *Тенер Н.И., Дербов В.А.* Лазерное возбуждение локализованных волновых пакетов Ридберговских атомов // Проблемы оптической физики / Материалы 10-й Международной молодежной научной школы по оптике, лазерной физике и биофизике. 26–29 сентября, 2006, Саратов, Саратов: Изд-во «Новый ветер», 2007. 248 с.
14. *Бете Г., Солпитер Э.* Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. М.: Физматгиз, 1960.
15. *Делоне Н.Б., Крайнов В.П.* Атом в сильном световом поле. 2-е изд., перераб. М.: Энергоатомиздат, 1984.

Саратовский государственный
социально-экономический университет
Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 12.01.2008

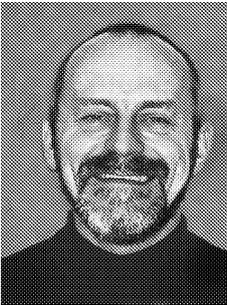
**POPULATION DYNAMICS IN A HYDROGEN ATOM
UNDER THE ACTION OF AN ULTRA-SHORT PULSE
OF LASER RADIATION**

N.I. Teper; V.L. Derbov

Population dynamics of highly excited states of a hydrogen atom under the action of an ultra-short intense laser pulse is studied by means of direct numerical solution of Schrödinger equation in the finite basis of eigenstates of the discrete and continuous energy spectrum. The essential role of continuous spectrum states is demonstrated. Formation of localized wave packets of Rydberg states is discussed.



Тепер Наталья Игоревна – родилась в Ульяновске (1975), окончила Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского (1997). В 2001 году окончила аспирантуру СГУ по специальности «лазерная физика». С 2000 года работает преподавателем в Саратовском государственном социально-экономическом университете. Автор 8 научных статей по теории и численному моделированию воздействия лазерного излучения на атомные и молекулярные системы.



Дербов Владимир Леонардович – родился в Саратове (1949), окончил физический факультет СГУ (1972), аспирантуру СГУ (1975). Защитил диссертацию на соискание звания кандидата (1977) и доктора (1998) физико-математических наук по специальности «оптика». Работал на кафедре теоретической и ядерной физики СГУ, в НИИ механики и физики СГУ, на кафедре оптики, а затем лазерной и компьютерной физики СГУ. В настоящее время профессор, зав. кафедрой теоретической и ядерной физики СГУ. Автор более 140 печатных работ. Область научных интересов – нелинейная оптика, квантовая механика, взаимодействие атомов и молекул с лазерным излучением.



ЛАЗЕРНОЕ УСКОРЕНИЕ ПУЧКОВ ТЯЖЕЛЫХ ИОНОВ В ВАКУУМЕ

Д.Б. Блашке, А.В. Прозоркевич, А.В. Филатов, Д.С. Шкирманов

Изучается возможность дополнительного ускорения релятивистских пучков тяжелых ионов на выходе обычных ускорителей с помощью жестко сфокусированных ультракоротких лазерных импульсов. Применительно к условиям действующего ускорителя Нуклотрон (ОИЯИ) показано, что возможны режимы захвата тяжелых ионов с монотонным набором энергии при интенсивностях лазерного поля порядка 10^{25} Вт/см², которые могут быть достигнуты в ближайшие годы. Используется простая модель классического точечного заряда, движущегося в поле гауссовой формы, которая приводит к многопараметрической нелинейной системе дифференциальных уравнений. Зависимость приращения энергии ионов от некоторых управляющих параметров, таких как начальная скорость ионов или длительность лазерного импульса, является существенно немонотонной, поэтому поиск оптимального режима ускорения является нетривиальной задачей. Схема со скрещенными лазерными лучами оказывается более эффективной, чем однолучевая схема, но требует определенной фазировки лучей, которую непросто обеспечить при такой интенсивности излучения. Кроме того, заметное влияние могут оказать такие нелинейные эффекты, как вакуумное рождение пар или поляризация вакуума.

Введение

Идея ускорения заряженных частиц с помощью лазерных полей, впервые предложенная в работах [1, 2], интенсивно изучается на протяжении многих лет. Особое внимание уделяется методам ускорения, использующим взаимодействие плазмы с лазерным лучом. Концепция ускорения в «кильватерном» поле, предложенная в [3], получила наиболее широкое признание и в настоящее время подошла вплотную к своей практической реализации [4, 5]. Одной из разновидностей этого метода является взаимодействие лазерных импульсов с твердыми мишенями, такая схема может оказаться востребованной в самых различных областях – от управляемого термоядерного синтеза [6–8] и до медицинских приложений [9, 10].

Ожидаемое в ближайшие годы быстрое развитие сверхмощных «настошных» лазеров [11, 12] открывает неожиданную перспективу формирования нового направления на стыке физики высоких энергий и лазерной физики. В частности, предполагается создание ускорителей, для которых отсутствует ограничение на допустимые градиенты поля, характерное для традиционных схем ускорения. Как было недавно продемонстрировано экспериментально в лаборатории SLAC [13], наличие короткоживущей плазмы может само по себе приводить к существенному ускорению

части ионов даже без участия поля лазера. Была высказана идея использовать в качестве промежуточного шага мощные оптические лазеры на выходе действующих ускорителей для повышения их эффективности вместо более дорогостоящей их модернизации. Так, например, один из лучших ускорителей тяжелых ионов, установка Нуклотрон Объединенного института ядерных исследований в Дубне [14] может разгонять ионы золота до релятивистских энергий 4 ГэВ/нуклон, что немного меньше энергии, необходимой для экспериментов по изучению кварк-глюонной плазмы. Поэтому в качестве одного из возможных вариантов модернизации Нуклотрона рассматривалась возможность использования оптических лазеров. В предыдущей нашей работе [15] было показано, что подобная схема может быть работоспособной при интенсивностях лазерного излучения порядка 10^{25} – 10^{26} Вт/см². Наличие большого числа управляющих параметров, от которых результат ускорения зависит существенно немонотонно, оставляет надежду для поиска более оптимальных режимов ускорения. Так, например, в работе [16] было сделано заключение о том, что для ускорения электронов наиболее эффективной является круговая поляризация поля лазера. Напротив, мы обнаружили, что для ускорения тяжелых ионов линейная поляризация предпочтительнее. С другой стороны, при таких интенсивностях полей и подходящей их конфигурации может активироваться механизм вакуумного рождения пар [17–19], что может значительно изменить условия движения ионов. Прямой расчет скорости вакуумного рождения пар для лазерного поля гауссовой формы не представляется возможным, поэтому мы ограничились здесь некоторыми косвенными оценками при помощи инвариантов поля. В работе используется естественная система единиц $c = \hbar = 1$.

1. Однолучевая схема

Следуя [16,20], рассмотрим ускорение тяжелых ионов как движение классической точечной частицы в заданном электромагнитном поле, моделирующем сфокусированный лазерный импульс во втором порядке параксиального приближения:

$$\dot{\mathbf{p}} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{v} = \mathbf{p}/\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}, \quad (1)$$

$$E_z = -\frac{S}{kw^2}[(x+y)\sin\phi_{\parallel} + (x-y)\sin(\phi_{\parallel} + \phi_p)], \quad (2)$$

$$E_{x,y} = \frac{w_0 S}{2w}[\cos\phi_{\perp} \pm \cos(\phi_{\perp} + \phi_p)], \quad (3)$$

$$B_z = \frac{S}{kw^2}[(x-y)\sin\phi_{\parallel} - (x+y)\sin(\phi_{\parallel} + \phi_p)], \quad (4)$$

$$B_x = -E_y, \quad B_y = E_x, \quad (5)$$

$$S = E_0 \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2}\right), \quad (6)$$

где E_0 – амплитуда поля, ϕ_{\parallel} и ϕ_{\perp} – фазы продольной и поперечной компонент поля,

$$\phi_{\parallel} = \phi_{\perp} + \arctan\left(\frac{z}{z_c}\right), \quad (7)$$

$$\phi_{\perp} = \phi_0 + \eta + \arctan\left(\frac{z}{z_c}\right) - \frac{z}{z_c} \frac{x^2 + y^2}{w^2}, \quad (8)$$

$z_c = kw_0^2/2$ – дифракционная длина, $\eta = \omega t - kz$, ω – частота лазерного излучения,

$$w^2 = w_0^2[1 + (z/z_c)^2], \quad (9)$$

w_0 – минимальный радиус пучка лазера в фокусе, ϕ_0 – начальная фаза поля, параметр ϕ_p определяет поляризацию поля (линейная при $\phi_p = 0$ и круговая при $\phi_p = \pi/2$). Предполагается, что при $t = t_0$ ион попадает на ось луча на расстоянии z_0 от точки фокуса с начальной скоростью v_0 вдоль оси z . Такая задача Коши $\mathbf{x}(t_0) = (0, 0, z_0)$, $\mathbf{v}(t_0) = (0, 0, v_0)$ для уравнения (1) решалась нами численно стандартным методом Рунге–Кутты с набором основных параметров, приведенных в таблице (использование иных значений параметров оговаривается в подписи к соответствующему рисунку).

Таблица

Базовый набор параметров

I , Вт/см ²	λ , нм	τ , $T = 2\pi/\omega$	ϕ_0	ϕ_p	w_0 , λ	e	M , ГэВ	v_0 , c	t_0 , τ	z_0 , λ
$5 \cdot 10^{25}$	1000	20	0	0	100	79	179	0.968	-1	-100

Здесь I – интенсивность лазерного излучения, λ – его длина волны, T – период, τ – длительность импульса; e – заряд иона, M – его масса, v_0 – начальная скорость, z_0 – начальная координата.

Основной интересующей нас характеристикой является приращение энергии иона Δ за время действия поля. Выбор типа иона (ядро золота Au^{79+}) соответствует условиям ускорителя Нуклотрон [14], для которого энергия ионов на выходе равна 4 ГэВ/нуклон.

Типичная форма зависимости энергии иона от времени показана на рис. 1. Монотонное возрастание энергии означает, что происходит захват тяжелого иона лазерным полем, при котором эффект фазового проскальзывания [21] отсутствует. При таком режиме значительную роль играют фазовые соотношения, что показывает, например, зависимость приращения энергии от начальной фазы ϕ_0 (рис. 2). Наиболее выраженное влияние ϕ_0 наблюдается при линейной поляризации поля и наименее – при круговой поляризации. Монотонный характер ускорения демонстрирует рис. 3, на котором представлена зависимость приращения энергии от длины волны лазерного излучения. Чем больше длина волны, тем большее время ион получает энергию, поскольку увеличивается длина взаимодействия. Инфракрасный лазер с длиной волны 1053 нм (типа Phelix [22]) оказывается в три раза более эффективным ускорителем, чем 527 нм лазер (типа Astra [23]), при одинаковых интенсивностях излучения. Аналогичный характер имеет зависимость приращения энергии иона от интенсивности лазерного излучения (рис. 4). Оказалось неожиданным, что

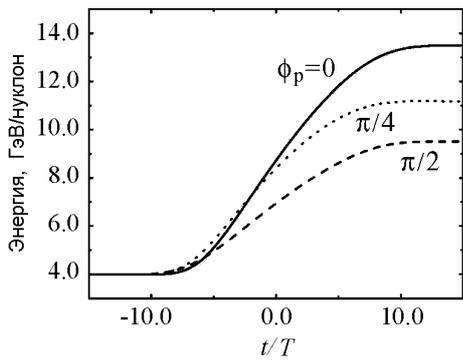


Рис. 1. Зависимость энергии иона Au^{79+} от времени (в периодах) для лазерных полей различной поляризации

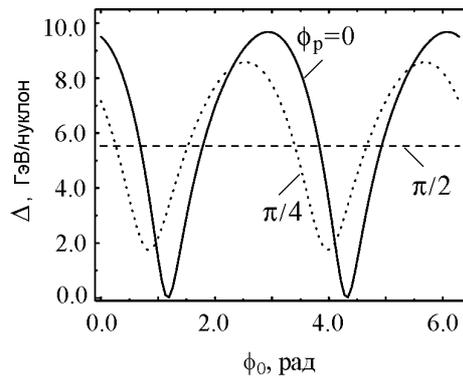


Рис. 2. Зависимость приращения энергии иона Δ от начальной фазы ϕ_0

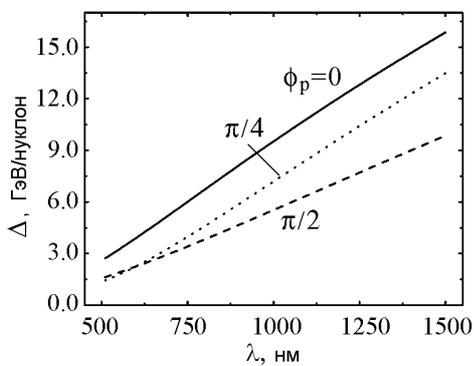


Рис. 3. Зависимость Δ от длины волны лазерного излучения

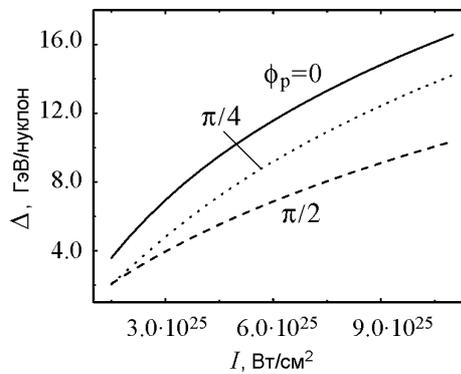


Рис. 4. Зависимость Δ от интенсивности поля при $\lambda=1053$ нм, соответствующей частоте лазера PheLix [22]

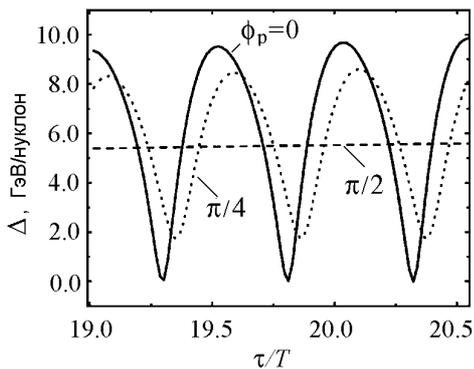


Рис. 5. Зависимость Δ от длительности лазерного импульса в малом временном масштабе по отношению к периоду излучения лазера

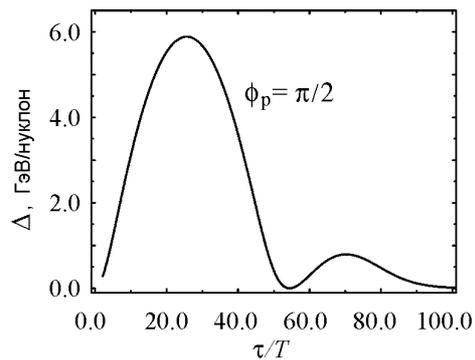


Рис. 6. Приращение энергии Δ в зависимости от длительности импульса в больших временных масштабах

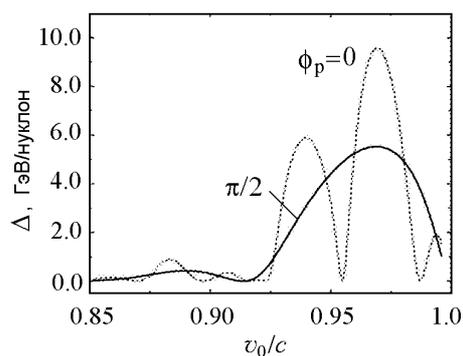


Рис. 7. Приращение энергии Δ в зависимости от начальной скорости ионов в области ультрарелятивистских энергий

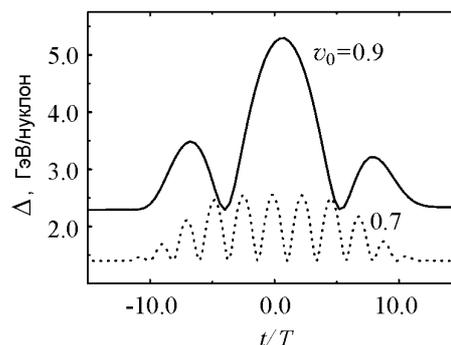


Рис. 8. Эффект фазового проскальзывания

зависимость приращения энергии от длительности импульса τ имеет существенно немонотонный характер. Для линейно поляризованного поля это проявляется уже на малом временном масштабе порядка периода поля (рис. 5), а для поля круговой поляризации – на временном масштабе порядка длительности импульса (рис. 6). Кривая на рис. 6 одновременно представляет огибающую быстрых осцилляций энергии для случая линейной поляризации.

Аналогичное поведение демонстрирует зависимость энергии от начальной скорости ионов (рис. 7). Положение локального экстремума на этой кривой может изменяться при вариации других параметров, таких как длительность импульса или интенсивность поля. Такое свойство, в принципе, можно использовать для уменьшения разброса скоростей ионов («охлаждение» пучка): если согласовать спадающий участок кривой и среднюю скорость пучка частиц, то дисперсия скоростей ионов после прохождения лазерного импульса должна уменьшиться.

Решающее значение для реализации режима захвата играет, по-видимому, начальная энергия ионов, что демонстрирует рис. 8 в сравнении с рис. 1: чем меньше начальная скорость, тем сильнее выражен эффект фазового проскальзывания.

2. Схема с двумя скрещенными лучами

Использование специальных геометрических схем для повышения эффективности лазерного ускорения обсуждалось многими авторами [24–28]. В этих работах предложено направлять пучок частиц через область скрещивания двух лазерных лучей, где образуется продольное ускоряющее электрическое поле. Формирование такого поля определяется, в основном, фазовыми соотношениями двух исходных лазерных лучей, выполнение которых представляет собой отдельную техническую задачу [29]. Двухлучевая конфигурация находит применение также и в плазменных ускорителях [30].

Рассмотрим два линейно поляризованных луча лазера, распространяющихся под углами $\pm\theta$ к оси z в соответствии с рис. 9, так что суммарное поле определяется

следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
 E_x &= (E_{x1} + E_{x2}) \cos \theta + (E_{z1} - E_{z2}) \sin \theta, \\
 E_z &= -(E_{x1} - E_{x2}) \sin \theta + (E_{z1} + E_{z2}) \cos \theta, \\
 x_{1,2} &= x \cos \theta \mp z \sin \theta, \\
 z_{1,2} &= \pm x \sin \theta + z \cos \theta,
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

где $\mathbf{E}_1(\mathbf{x}_1, t)$, $\mathbf{E}_2(\mathbf{x}_2, t)$ определены уравнениями (2)–(6). Для того чтобы получить на оси z аксиальное поле, достаточно обеспечить $E_{01} = -E_{02}$ [25].

Основной характеристикой такой схемы является зависимость приращения энергии от угла между лучами. Эта зависимость представлена на рис. 10 для базового набора параметров (см. таблицу). Кривая $\Delta(\theta)$ существенно немонотонная и имеет несколько ярко выраженных максимумов в области небольших углов. Форма кривой зависит от других параметров, таких как начальное положение иона z_0 или длительность импульса τ . Например, при уменьшении параметра $|z_0|$ кривая $\Delta(\theta)$ становится более гладкой. В любом случае, оптимальное значение угла скрещивания лежит в области порядка 20° , что находится в хорошем соответствии с результатами [15, 28]. Эффективность схемы со скрещенными лучами оказывается примерно в три раза выше однолучевой схемы при прочих равных условиях и без учета нелинейных эффектов типа вакуумного рождения пар или поляризации вакуума.

Возможны и более технически сложные варианты многолучевой схемы [15, 26], обеспечивающие многоступенчатый характер взаимодействия пучка частиц с лазерными лучами, например, с помощью каскада зеркал, расположенных симметрично относительно направления ускорения частиц.

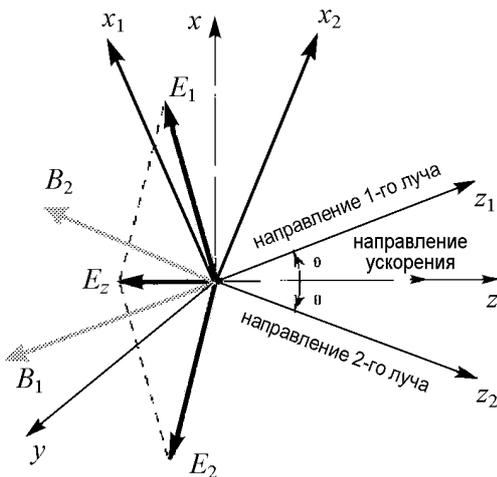


Рис. 9. Геометрия схемы с скрещенными лучами в соответствии с [25] для случая линейной поляризации

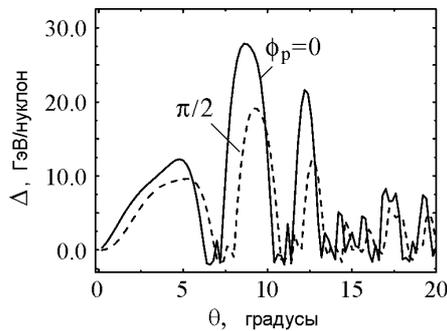


Рис. 10. Приращение энергии Δ в зависимости от угла между лазерными лучами

3. Вакуумное рождение электрон-позитронных пар

Известно, что однородное электрическое поле создает довольно плотную квазичастичную плазму (до 10^{20} см^{-3}) уже при напряженности порядка 10^{11} В/см [19]. Поле такого типа может быть реализовано, например, в фокусе двух встречных лазерных пучков. После прохождения поля плазма практически полностью исчезает за счет многофотонной аннигиляции, поэтому рождение свободных частиц не происходит. Однако присутствие квазичастичной плазмы может быть обнаружено по косвенным эффектам, например, излучению мягких γ -квантов или изменению показателя преломления в области лазерного фокуса [31, 32]. Средняя (за период поля) плотность квазичастичной плазмы пропорциональна интенсивности излучения, поэтому при $I \sim 10^{25} \text{ Вт/см}^2$ она может превысить твердотельный уровень, что может оказать заметное влияние на движение ионов.

Прямое вычисление скорости рождения пар в лазерных полях гауссова типа остается пока за рамками существующей теории. Мы можем сделать только косвенные оценки при помощи полевых инвариантов $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$, $\mathbf{E}\mathbf{B}$, предполагая, что степень отличия этих величин от нуля характеризует «креативную» способность электромагнитного поля. Этот прием основан на аналогии с известным свойством плоской волны, в которой оба инварианта равны нулю и рождение пар не происходит при любой напряженности.

Очевидно, что поле одного гауссова пучка близко к полю плоской волны, поскольку продольная компонента подавляется фактором $\lambda/w_0 \ll 1$, так что

$$\xi = \frac{\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2}{E_0^2} \lesssim \left(\frac{\lambda}{w_0}\right)^2, \quad \eta = \frac{\mathbf{E}\mathbf{B}}{E_0^2} \sim \xi. \quad (11)$$

Естественно предположить, что для такого поля скорость рождения пар будет пренебрежимо мала. И наоборот, при определенной геометрии и фазировке скрещенные лучи могут образовывать в локальных областях пространства поля электрического типа. Так, например, формируются стоячие волны в случае встречно направленных лучей. На рис. 11 представлены значения параметров ξ, η при оптимальном угле

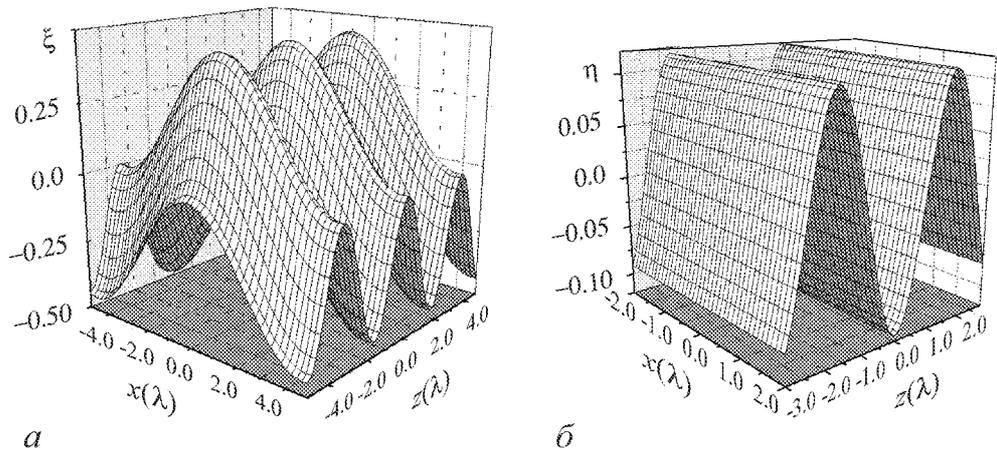


Рис. 11. Пространственное (x, z) распределение параметров (11) при $t = 0, y = 0$ и оптимальном угле скрещивания лазерных лучей $\theta = 20^\circ$, а – линейная поляризация, б – круговая.

скрещивания лазерных лучей. Такая качественная оценка показывает, что области с достаточно большим уровнем ξ, η занимают значительную часть области фокуса и можно ожидать, что эффект вакуумного рождения пар будет оказывать влияние на ускорение ионов.

Заключение

Показано, что оптические лазеры следующего поколения с интенсивностью излучения порядка 10^{25} Вт/см² могут быть, в принципе, использованы для дополнительного ускорения релятивистских пучков тяжелых ионов. Наиболее эффективной является схема с двумя скрещенными пучками, однако в этом случае возможно влияние таких нелинейных эффектов, как вакуумное рождение пар и поляризация вакуума.

Авторы благодарны С.А. Смолянскому за полезные замечания.

Библиографический список

1. *Shimoda K.* Proposal for an electron accelerator using an optical maser // *Appl. Opt.* 1962. Vol. 1. P. 33.
2. *Ashkin A.* Acceleration and trapping of particles by radiation pressure // *Phys. Rev. Lett.* 1970. Vol. 24. P. 156; 1970. Vol. 25. P. 1321.
3. *Tajima T. and Dawson J.M.* Laser electron accelerator // *Phys. Rev. Lett.* 1979. Vol. 43. P. 267.
4. *Malka V. et al.* Electron acceleration by a wake field forced by an intense ultrashort laser pulse // *Science* Vol. 298. 2002. P. 1596.
5. *Patel N.* Accelerator physics: the plasma revolution // *Nature.* 2007. Vol. 449. P. 133.
6. *Roth M. et al.* Fast ignition by intense laser-accelerated proton beams // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 86. P. 436.
7. *Bychenkov V.Yu., Rozmus W., Maksimchuk A., Umstadter D., and Capjack C.E.* Fast ignitor concept with light ions // *Plasma Phys. Rep.* 2001. Vol. 27. P. 1017.
8. *Atzeni S., Temporal M., and Honrubia J.J.* A first analysis of fast ignition of precompressed ICF fuel by laser-accelerated protons // *Nucl. Fusion.* 2002. Vol. 42. P. L1.
9. *Maksimchuk A. et al.* TH-C-230A-06: high-energy proton acceleration driven by ultra-intense ultra-clean laser pulses // *Med. Phys.* 2006. Vol. 33. P. 2272.
10. *Borghesi M., Campbell D.H., Schiavi A., Haines M.G., Willi O.* Electric field detection in laser-plasma interaction experiments via the proton imaging technique // *Phys. Plasmas.* 2002. Vol. 9. P. 2214.
11. *Mourou G., Tajima T., Bulanov S.V.* Optics in the relativistic regime // *Rev. Mod. Phys.* 2006. Vol. 78. P. 309.
12. *Ren J., Cheng W., Li S. and Suckewer S.* A new method for generating ultraintense and ultrashort laser pulses // *Nature Physics.* 2007. Vol. 3. P. 732.

13. *Blumenfeld I. et al.* Physicists pitch biggest accelerator // *Nature*. 2007. Vol. 445. P. 741.
14. <http://nucloserv.jinr.ru/index.htm>.
15. *Blaschke D.B., Prozorkevich A.V., Smolyansky S.A., Shkirmanov D.S., Chubaryan M.* Laser acceleration of ion beams // GSI Report 2007-03, ILIAS, Ion and Laser Beam Interaction and Application Studies / Eds P. Mulser and T. Schlegel. P. 34.
16. *Бахару А., Таранухин В.Д.* Лазерное ускорение электронов в вакууме до энергий $\sim 10^9$ эВ // *Квантовая электроника*. 2004. Т. 34. С. 129.
17. *Ringwald A.* Pair production from vacuum at the focus of an X-ray free electron laser // *Phys. Lett. B*. 2001. Vol. 510. P. 107.
18. *Roberts C.D., Schmid S.Mt., and Vinnik D.V.* Quantum effects with an X-ray free-electron laser // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 89. P. 153901.
19. *Blaschke D.B., Prozorkevich A.V., Roberts C.D., Schmidt S.M., and Smolyansky S.A.* Pair production and optical lasers // *Phys. Rev. Lett.* 2006. Vol. 96. P. 140402.
20. *Salamin Y.I., Hu S.X., Hatsagortsyan K.Z., and Keitel C.H.* Relativistic high-power laser-matter interactions // *Phys. Rep.* 2006. Vol. 427. P. 41.
21. *Scully M.O. and Zubairy M.S.* Simple laser accelerator: Optics and particle dynamics // *Phys. Rev. A*. 1991. Vol. 44. P. 2656.
22. <http://www.gsi.de/forschung/phelix/>
23. <http://www.clf.rl.ac.uk / Facilities/ AstraWeb/ AstraGeminiHome.htm>
24. *Haaland C.M.* Laser electron acceleration in vacuum // *Opt. Comm.* 1995. Vol. 114. P. 280.
25. *Esarey E., Sprangle R., Krall J.* Laser acceleration of electrons in vacuum // *Phys. Rev. E*. 1995. Vol. 52. P. 5443.
26. *Huang Y.C., Zheng D., Tulloch W.M., and Byer R.L.* Proposed structure for a crossed-laser beam, GeV per meter gradient, vacuum electron linear accelerator // *Appl. Phys. Lett.* 1996. Vol. 68. P. 753.
27. *Salamin Y.I., Keitel C.H.* Subcycle high electron acceleration by crossed laser beams // *Appl. Phys. Lett.* 2000. Vol. 77. P. 1082.
28. *Salamin Y.I., Mocken G.R., Keitel C.H.* Relativistic electron dynamics in intense crossed laser beams: Acceleration and Compton harmonics // *Phys. Rev. E*. 2003. Vol. 67. P. 016501.
29. *Aiello A. and Woerdman H.* The reflection of a Maxwell–Gaussian beam by a planar surface // *arxiv:0710.1643*.
30. *Faure J., Rechatin C., Norlin A., Lifschitz A., Glinec Y. and Malka V.* Controlled injection and acceleration of electrons in plasma wakefields by colliding laser pulses // *Nature*. 2006. Vol. 444. P. 737.
31. *Blaschke D.B., Prozorkevich A.V., Smolyansky S.A. and Tarakanov A.V.* Observable manifestation of an electron–positron plasma created by the field of an optical laser // *Journal of Physics: Conference Series*. 2006. Vol. 35. P. 121.
32. *Blaschke D.B., Filatov A.V., Egorova I.A., Prozorkevich A.V., Smolyansky S.A.* Observable effects caused by vacuum pair creation in the field of high-power

optical lasers // Proceedings of SPIE, 2007, Vol. 6537, Saratov Fall Meeting 2006: Laser Physics and Photonics, Spectroscopy and Molecular Modeling VII / Editors V.L. Derbov, L.A. Melnikov, L.M. Babkov. P. 653708.

*Саратовский государственный
университет
Вроцлавский университет, Польша*

Поступила в редакцию 27.12.2007

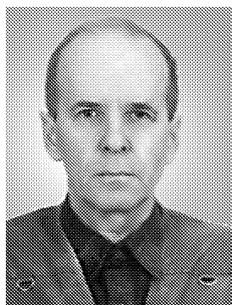
LASER ACCELERATION OF HEAVY ION BEAMS IN VACUUM

D.B. Blaschke, A.V. Prozorkevich, A.V. Filatov, D.S. Shkirmanov

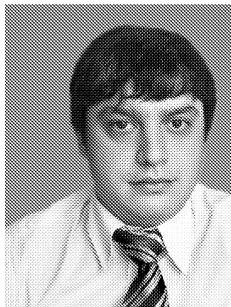
The possibility of heavy ion additional acceleration in laser beams is investigated. The main observation is the existence of a big variety of acceleration modes due to many fitting parameters even for only one Gaussian beam and for crossed ones even more so. An essentially non-monotonic dependence of energy gain on relevant variables such as initial velocity or pulse duration is found which makes the search for the most effective acceleration modus very complex. There is a threshold level for the intensity ($\sim 10^{25}$ W/cm²) when the ion moves in the capture mode in one direction. The crossed beam scheme is at least three times more effective than one beam scheme within the considered range of parameters. However, such a scheme works only for certain phasing of the beams which is difficult to provide at such field intensity. Moreover, the other nonlinear effects as pair creation and vacuum polarization can also be active.



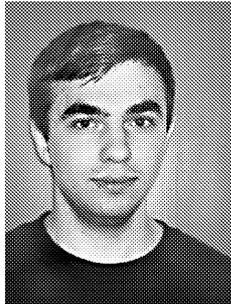
Блашке Давид Бернхард – родился в Гюстрове (Германия, 1959). Окончил университет в Росток (1983). Защитил диссертацию на соискание звания кандидата физико-математических наук (1987) и доктора физико-математических наук («Квантовая статистика эффективных кварковых моделей адронной материи», 1995). С 1981 года член Германского физического общества, с 1990 – член Европейского физического общества, с 1995 – член Европейского центра теоретических исследований в ядерной физике и связанных областях (Тренто, Италия). Работает в университете Вроцлава (Польша). Автор более 60 научных работ, ответственный редактор двух книг: «Understanding Deconfinement in QCD» (World Scientific, Singapore, 2000), «Physics of Neutrons Star Interiors» (Springer, Heidelberg, 2001.)



Прозоркевич Александр Васильевич – родился в Калининграде (1947). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (кафедра теоретической физики, 1970). Защитил кандидатскую диссертацию на соискание звания кандидата физико-математических наук (1981). Работает доцентом кафедры теоретической и математической физики СГУ.



Филатов Андрей Викторович – родился в Саратове (1982). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2004). Аспирант кафедры теоретической и математической физики СГУ.



Шкирманов Дмитрий Сергеевич – родился в 1987 году. Студент 3-го курса физического факультета СГУ. Научные интересы – теоретическая физика, лазерное ускорение тяжелых ионов. Имеет 2 научные публикации в зарубежных журналах.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ

Рукописи, объемом не более 16 стр. и 8 рис. принимаются в редакцию в 2 вариантах: бумажном и электронном.

1. **Бумажный вариант** должен быть напечатан через 1,5 интервала и распечатан в 2-х экз. Если рисунки (только черно-белые!) не вставлены в текст, то они выполняются на отдельных страницах также в 2-х экз. Под рисунком указывается его номер, фамилии авторов, название статьи; подрисуночные подписи печатаются на отдельном листе и не должны дублировать внутритекстовое описание рисунка.

Требования к оформлению текста.

На первой странице перед текстом статьи должны быть напечатаны: индекс УДК, название статьи, инициалы и фамилии авторов, краткая аннотация статьи, составленная по форме удобной для непосредственного включения ее в РЖ, издаваемые ВИНТИ.

К статье прилагаются в 1 экз.:

- перевод на английский язык названия статьи, инициалов и фамилий авторов, аннотации;
- краткие сведения об авторах с фотографиями в графических форматах JPG, GIF и т.д.; фотографии можно прислать по электронной почте, сканированные с разрешением не менее 300dpi без дополнительной компьютерной обработки.

Краткие сведения об авторах составляются по следующей форме:

Сидоров Петр Иванович - родился в 1938 году в Москве, окончил Московский физико-технический институт в 1961 году. После окончания МФТИ работает в ФИАН. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1964) и доктора физико-математических наук (1977) в области теории колебаний и волн, радиофизика и электроника, применение нелинейной динамики в различных областях науки. Автор монографии «Детерминированный хаос и экономика» и учебника «Волны в экологии» (в соавторстве с...). Опубликовал 120 научных статей по направлениям, указанным выше. Лауреат Государственной премии СССР. Редактор журнала International Journal of Chaos Theory и член редакционной коллегии журнала «Физика и жизнь».

В библиографическом списке нумерация источников должна соответствовать очередности ссылок на них в тексте. В списке указываются:

- а) для книг - фамилия автора, инициалы, название книги, город, издательство, год издания, том;
- б) для журнальных статей - фамилия автора, инициалы, название статьи, название журнала, серия, год, том, номер, выпуск, первая страница статьи;
- в) для депонированных статей - название статьи, инициалы, фамилия автора, название организации, в которой выполнена работа, город, год, объем статьи, название депонирующей организации, дата депонирования, регистрационный номер;
- г) для препринта - фамилия автора, инициалы, название издания, полное название издающей организации, год, количество страниц;
- д) для материалов конференций, школ, семинаров - фамилия автора, инициалы, название статьи, название издания, время и место проведения конференции, город, издательство, год, первая страница статьи.

В конце статьи авторы должны указать наименование программы, в рамках которой выполнена работа, или наименование фонда поддержки.

2. **Электронный вариант.** Статья оформляется с использованием макропакета LATEX 2e. Рекомендуется пользоваться компилятором MiKTeX (MiKTeX2.4), так как именно им пользуются в редакции. В виде исключения принимаются статьи, подготовленные с помощью текстового редактора Microsoft Word (все формулы должны быть набраны при помощи Equation или MathType).

Все иллюстрации, включенные в оригинал-макет, предоставляются в виде отдельных файлов, записанных в любом из форматов: TIFF, GIF, JPEG. Название файла должно соответствовать номеру рисунка в тексте.

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина*
Оформление художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, О.Н. Строгановой
в пакете *L^AT_EX*

Подписка на 2008 год осуществляется
по каталогу Агентства Роспечать
«Газеты. Журналы», индекс 73498
и по договору между Подписчиком
(юридическим или физическим лицом)
и Издателем (Саратовским государственным университетом)

Стоимость подписки на 2008 год 450 руб. (6 номеров)
Заявки на заключение договора принимаются
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64
E-mail: and@nonlin.sgu.ru

Распространение журнала осуществляется
редакцией журнала по адресной системе

Сдано в набор 6.02.08. Подписано к печати 28.02.08
Формат 70x108/16. Бумага «Снегурочка». Печать трафаретная
Усл. печ. л. 11,9(8,5). Уч.-изд. л. 11,0. Тираж 200. Заказ 401

Отпечатано на ризографе GR 3750 редакции журнала

© Редакция журнала
«Известия вузов. ПНД», 2008
© Оформление художника
Д.В. Соколова, 2008