

Журнал включен в «Перечень периодических научных и научно-технических изданий РФ,
рекомендованных для публикации основных результатов диссертаций
на соискание ученой степени доктора наук»

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

научно-технический журнал

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 17, № 1(95), 2009, Саратов

СО Д Е Р Ж А Н И Е

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН	
<i>Рыскин Н.М., Усачева С.А.</i> Синхронизация периодических колебаний автогенератора с запаздыванием внешним гармоническим сигналом	3
<i>Крюков А.К., Канаков О.И., Осипов Г.В.</i> Волны синхронизации в ансамблях слабонелинейных осцилляторов	13
<i>Маляев В.С., Вадивасова Т.Е., Тишина О.В., Анищенко В.С.</i> Эффекты подавления хаоса и сужения спектра в стабилизируемом шумом неустойчивом нелинейном осцилляторе	37
ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС	
<i>Мальшев А.И., Чижова Л.А.</i> Диффузия Арнольда в простой нелинейной системе: аналитические оценки и численное моделирование	46
<i>Ефимов А.В., Шабунин А.В.</i> Влияние перемешивания и диффузии на пространственно-временную динамику в стохастической системе Лотки–Вольтерры с дискретным фазовым пространством	57
НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НЕЙРОНАУКА	
<i>Нелинейно-динамический подход в нейронауке. Анохин К.В., Некоркин В.И., Сергеев А.М.</i>	77
<i>Касаткин Д.В.</i> Эффекты фазовой переустановки в ансамблях взаимодействующих нейронов ФитцХью–Нагумо	79
НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ	
<i>Братман В.Л., Кузьмин А.А., Савилов А.В.</i> Индуцированное рассеяние волн внутри МЦР	93
К СТОЛЕТИЮ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА	
<i>Григорьев М.А.</i> Я учился в Советском Союзе	103
НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA	
<i>Трубецков Д.И.</i> Две тысячи восьмой год в датах нелинейной динамики	117
<i>Георгий Моисеевич Заславский. 1935–2008. Берман Г.П., Васильев А.А., Ерохин Н.С., Зеленый Л.М., Игнатченко В.А., Иомин А., Коган Е.Я., Коловский А.Р., Мухин Р.Р., Нейштадт А.И., Пранц С.В., Тарасов В.Е., Фридман А.М.</i>	137
ИЗ КНИГ И ЖУРНАЛОВ	
<i>Заславский Г.М.</i> Стохастические волновые процессы	150
КНИЖНОЕ ОБОЗРЕНИЕ	
<i>Мухин Р.Р.</i> Очерки по истории динамического хаоса	162
<i>Проблемы математической истории. Отв. ред. Г.Г. Малинецкий, А.В. Коротаев</i>	166
<i>Малков С.Ю.</i> Социальная самоорганизация и исторический процесс	168

C O N T E N T S

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY	
<i>Ryskin N.M., Usacheva S.A.</i> Synchronization of periodic oscillation in a delayed-feedback oscillator by external harmonic driving	3
<i>Kryukov A.K., Kanakov O.I., Osipov G.V.</i> Synchronization waves in weak-nonlinear oscillatory ensembles	13
<i>Malyaev V.S., Vadivasova T.E., Tishina O.V., Anishchenko V.S.</i> Chaos suppression and spectrum narrowing in a noise-stabilized unstable nonlinear oscillator	37
DETERMINISTIC CHAOS	
<i>Malyshev A.I., Chizhova L.A.</i> Arnol'd diffusion in a simple nonlinear system: analytical estimations and numerical simulation	46
<i>Efimov A.V., Shabunin A.V.</i> Mixing and diffusion effect on spatial-temporal dynamics in stochastic Lotka–Volterra system with discrete phase space	57
NONLINEAR DYNAMICS AND NEUROSCIENCE	
Nonlinear dynamics methods in neuroscience. <i>Anokhin K.V., Nekorkin V.I., Sergeev A.M.</i>	77
<i>Kasatkin D.V.</i> The phenomenon of self-referential phase reset in ensembles of interacting FitzHugh–Nagumo neurons	79
INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS	
<i>Bratman V.L., Kuzmin A.A., Savilov A.V.</i> Induced waves scattering in cyclotron-resonance masers	93
TO CENTENARY OF SARATOV UNIVERSITY	
<i>Grigoriev M.A.</i> I studied in Soviet Union	103
HISTORY OF NONLINEAR DYNAMICS. PERSONALIA	
<i>Trubetskov D.I.</i> Nonlinear dynamics dates in 2008	117
G.M. Zaslavsky. 1935–2008. <i>Berman G.P., Vasiliev A.A., Erokhin N.S., Zeleny L.M., Ignatchenko V.A., Iomin A., Kogan E.Ya., Kolovsky A.R., Mukhin R.R., Neishtadt A.I., Prants S.V., Tarasov V.E., Fridman A.M.</i>	137
FROM BOOKS AND JOURNALS	
<i>Zaslavsky G.M.</i> Stochastic wave processes	150
BOOK REVIEW	
<i>Mukhin R.R.</i> Essays about history of dynamical chaos	162
Problems of mathematical history. <i>Edited by G.G. Malinetskii, F.V. Korotaev.</i>	166
<i>Malkov S.Y.</i> Social self-organization and historical process	168



СИНХРОНИЗАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ АВТОГЕНЕРАТОРА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ВНЕШНИМ ГАРМОНИЧЕСКИМ СИГНАЛОМ

Н.М. Рыскин, С.А. Усачева

Рассматривается динамика автогенератора с кубичной нелинейностью и запаздыванием под воздействием внешнего гармонического сигнала в случае, когда в автономном генераторе реализуется режим периодических колебаний. Получены аналитические выражения для резонансных кривых, то есть зависимости амплитуды колебаний в режиме синхронизации от частоты внешнего воздействия. Анализируются условия устойчивости режимов синхронизации. Построены языки синхронизации на плоскости параметров частота – амплитуда внешнего воздействия. Обсуждаются основные отличия от классической картины синхронизации системы с одной степенью свободы.

Ключевые слова: Автоколебательные системы с запаздыванием, синхронизация, внешнее воздействие, резонансные кривые, языки синхронизации

Введение

Синхронизация является одним из фундаментальных нелинейных явлений, имеющих разнообразные применения в технике. В последнее время изучение процессов синхронизации (в том числе синхронизации хаотических колебаний) выходит на передний план в нелинейной динамике, причем особое внимание привлекают распределенные автоколебательные системы с бесконечным числом степеней свободы. В настоящей работе рассматривается синхронизация автогенератора с запаздыванием внешним гармоническим сигналом. Под синхронизацией в данном случае понимаем установление режима одночастотных колебаний на частоте внешнего воздействия. Системы с запаздыванием широко распространены в природе и технике [1–3]. Представляется, что процессы синхронизации в подобных системах должны иметь ряд особенностей по сравнению с системами с конечным числом степеней свободы, что обусловлено, во-первых, их распределенным характером, во-вторых, способностью демонстрировать разнообразные режимы колебаний (одночастотные, многочастотные, хаотические).

В качестве примера рассмотрим достаточно простую модельную систему, которая тем не менее хорошо демонстрирует основные особенности поведения систем с запаздыванием

$$\dot{A} + \gamma A - \alpha e^{i\theta} \left(1 - |A(t-1)|^2\right) A(t-1) = F e^{i\omega t}. \quad (1)$$

Это уравнение приближенно описывает динамику системы, состоящей из замкнутых в кольцо нелинейного усилителя, резонансного фильтра и линии задержки (см., например, [2]). Схема автогенератора приведена на рис. 1. Здесь A – медленно меняющаяся амплитуда колебаний, несущая частота которых равна резонансной частоте фильтра; α – параметр, характеризующий коэффициент усиления; γ – параметр диссипации, обратно пропорциональный добротности фильтра; θ – набег фазы в цепи обратной связи; F – амплитуда внешней силы; ω – отстройка частоты воздействия от несущей частоты. Считается, что нелинейная характеристика усилителя аппроксимируется кубическим полиномом. Время задержки принято равным единице, чего всегда можно добиться перенормировкой переменных. Отметим, что в отсутствие запаздывания (1) превращается в укороченное уравнение ван дер Поля–Дуффинга под внешним воздействием, которое является классической моделью синхронизации систем с одной степенью свободы [1, 4–7].

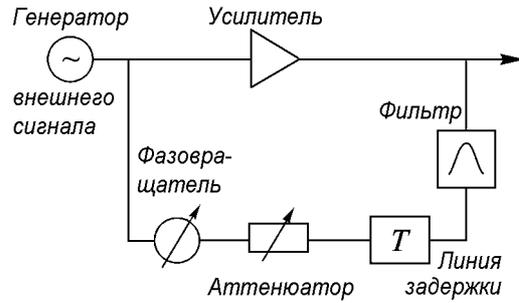


Рис. 1. Схематическое изображение модели автогенератора с запаздыванием

1. Собственные моды автономного генератора

Динамика системы (1) в автономном случае ($F = 0$) хорошо изучена [8]. Рассматривая решения в виде одночастотных колебаний с постоянной амплитудой

$$A = A_0 e^{i\omega t}, \quad (2)$$

можно показать, что частота ω удовлетворяет уравнению

$$\frac{\omega}{\gamma} = -tg(\omega - \theta). \quad (3)$$

Это уравнение имеет бесконечное число комплексных корней, то есть существует бесконечное число собственных мод, что отражает распределенную природу системы. Удобно решать уравнение (3) графически (рис. 2). Если занумеровать корни уравнения (см. рис. 2), становится очевидным, что все решения можно разделить на два класса. Для корней ω_n с четными номерами $n = 2k$ (здесь и далее ω_n – корень уравнения (3) с номером n) амплитуда колебаний удовлетворяет соотношению

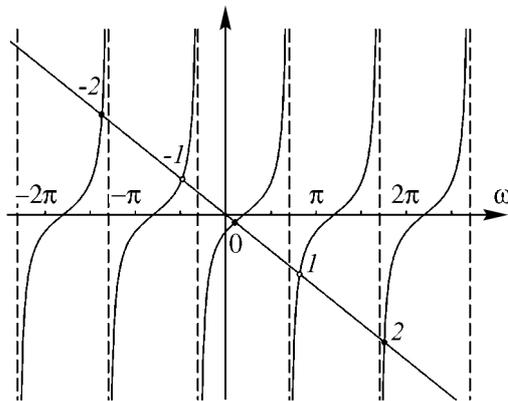


Рис. 2. Графическое определение собственных частот автогенератора с запаздыванием. Корни с четными номерами – частоты собственных мод. Корни с нечетными номерами – частоты автомодуляционных мод

$$\rho = 1 - \frac{\sqrt{\gamma^2 + \omega_{2k}^2}}{\alpha}, \quad (4)$$

где $\rho = |A_0|^2$. Эти решения существуют, когда параметр усиления α превышает порог самовозбуждения, $\alpha > \alpha_{st} = \sqrt{\gamma^2 + \omega_{2k}^2}$. Анализ их устойчивости показывает, что, если α превысит некоторую величину α_{sm} , одночастотные колебания становятся неустойчивыми в результате бифуркации Андронова–Хопфа и возникает автомодуляция [8].

Для мод с нечетными номерами $n = 2k + 1$ амплитуда колебаний определяется соотношением

$$\rho = 1 + \frac{\sqrt{\gamma^2 + \omega_{2k+1}^2}}{\alpha}. \quad (5)$$

Эти решения существуют при любых значениях параметров, однако всегда неустойчивы. Тем не менее они играют важную роль, поскольку возбуждаются на фоне колебаний на основной моде с достаточно большой амплитудой, чем и обусловлено возникновение автомодуляции (см. [8]). Будем в дальнейшем называть их автомодуляционными модами.

Как показано в [8], в автономном генераторе на плоскости параметров θ , α области самовозбуждения имеют вид периодически расположенных зон генерации. В центрах зон генерации при $\theta = 2\pi n$ порог самовозбуждения минимален, на границах при $\theta = 2\pi n + \pi$ – максимален.

Далее в настоящей работе анализируются режимы вынужденной синхронизации в системе (1) в области параметров $\alpha_{st} < \alpha < \alpha_{sm}$, то есть когда автономная система генерирует устойчивые одночастотные колебания. Случаи воздействия внешним сигналом на генератор в автомодуляционных и хаотических режимах будут рассмотрены в отдельной работе.

2. Режимы синхронизации неавтономного генератора с запаздыванием

Рассмотрим режим вынужденной синхронизации неавтономного генератора (1). Будем искать решения в виде (2), где ω – частота внешнего воздействия. В этом случае нетрудно получить соотношение

$$F^2 = \rho \left[(\gamma - \alpha(1 - \rho) \cos(\theta - \omega))^2 + (\omega - \alpha(1 - \rho) \sin(\theta - \omega))^2 \right], \quad (6)$$

с помощью которого можно построить резонансные кривые: зависимости амплитуды колебаний от ω при различных значениях амплитуды воздействия. Рассмотрим сначала случай $\theta = 0$, что соответствует центру зоны генерации, то есть оптимальным условиям для самовозбуждения. Выберем значение параметра диссипации $\gamma = 0.3$, параметра возбуждения $\alpha = 0.9$. При таком выборе параметров одночастотный режим в автономной системе устойчив, однако порог генерации $\alpha_{st} = 0.3$ превышен достаточно существенно. Порог автомодуляции в этом случае составляет $\alpha_{sm} \approx 1.33$.

Обсудим вид резонансных кривых, которые приведены на рис. 3. Очевидно, что при $F = 0$ уравнение (6) имеет решения $\rho(\omega)$, которые соответствуют колебаниям автономной системы (см. разд. 1). В данном случае это, во-первых, решение вида

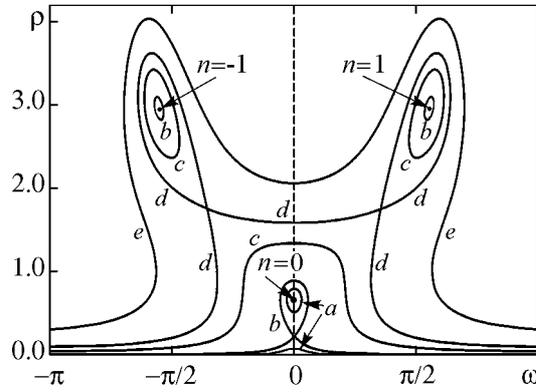


Рис. 3. Резонансные кривые при $\theta = 0$, $\gamma = 0.3$, $\alpha = 0.9$; $F = 0.1$ (a), 0.1886 (b), 0.7 (c), 1.038 (d), 1.8 (e)

(4), соответствующее основной собственной моде ($n = 0$, если следовать нумерации, введенной в разд. 1). В рассматриваемом случае, когда $\theta = 0$, частота этой моды $\omega_0 = 0$ (см. уравнение (3)), то есть генерация возникает точно на центральной частоте полосы пропускания фильтра¹. Для остальных собственных мод с четными номерами условия самовозбуждения не выполнены. Кроме того, существуют еще решения вида (5), соответствующие автомодуляционным модам, для которых $n = 2k + 1$, и тривиальное решение $\rho = 0$. Таким образом, при $F = 0$ резонансная кривая вырождается в горизонтальную ось и совокупность дискретных точек. На рис. 3 изображены три таких точки: одна, соответствующая основной моде с $n = 0$ (ее частота $\omega_0 = 0$), и две, соответствующие модам с $n = \pm 1$ ($\omega_{\pm 1} \approx \pm 0.55\pi$). Остальные точки, отвечающие высшим автомодуляционным модам, на рисунке не показаны.

При малых амплитудах воздействия (кривые a на рис. 3) резонансные кривые состоят из замкнутых ветвей, охватывающих описанные выше точки, и из нижней ветви, близкой к горизонтальной оси. При

При малых амплитудах воздействия (кривые a на рис. 3) резонансные кривые состоят из замкнутых ветвей, охватывающих описанные выше точки, и из нижней ветви, близкой к горизонтальной оси. При

$$F = \frac{2\alpha}{\sqrt{27}} \left(1 - \frac{\gamma}{\alpha}\right)^{3/2} \approx 0.1886$$

центральная замкнутая ветвь смыкается с нижней ветвью в точке

$$\omega = 0, \rho = \frac{1}{3} \sqrt{1 - \frac{\gamma}{\alpha}}.$$

При дальнейшем увеличении F нижняя ветвь смыкается с замкнутыми кривыми, окружающими точки, соответствующие автомодуляционным модам (кривые d на рис. 3). После этого резонансная кривая превращается в единственную ветвь, охватывающую все три точки сверху (кривая e). Далее аналогичные трансформации происходят с ветвями, сформировавшимися на основе высших автомодуляционных мод, которые на рисунке не показаны.

Таким образом, в области достаточно малых амплитуд резонансные кривые имеют тот же вид, что и при синхронизации системы с одной степенью свободы (см., например, [1, 5]). Однако в области больших амплитуд они существенно отличаются, что, очевидно, обусловлено многомодовым характером распределенной системы с запаздыванием.

Для того чтобы составить окончательное представление о режимах синхронизации, необходимо исследовать резонансные кривые на устойчивость. Зададим

¹Напомним, что мы рассматриваем уравнение как модель системы типа усилитель – фильтр – линия задержки, где переменная A имеет смысл медленно меняющейся амплитуды колебаний. Тогда ω есть отстройка частоты от центра полосы пропускания фильтра [8].

малое возмущение одночастотного решения (2), которое выберем в виде двух спутников, симметрично отстоящих от основной частоты

$$A = (A_0 + a_+ e^{i\Omega t} + a_- e^{-i\Omega t}) e^{i\omega t}, \quad (7)$$

где Ω – частота модуляции. Подставим (7) в исходное уравнение (1) и линеаризуем, сохранив только слагаемые, линейные по малым возмущениям. В результате после не представляющих принципиальной сложности преобразований придем к комплексному характеристическому уравнению

$$\left((i\Omega + \gamma)^2 + \omega^2 \right) e^{2i\Omega} - 2\alpha(1 - 2\rho) [(i\Omega + \gamma) \cos(\theta - \omega) + \omega \sin(\theta - \omega)] e^{i\Omega} + \alpha^2(1 - \rho)(1 - 3\rho) = 0. \quad (8)$$

На границе устойчивости частота Ω чисто вещественна. Разделив (8) на два вещественных уравнения, получим

$$\begin{aligned} & (\omega^2 + \gamma^2 - \Omega^2) \cos 2\Omega - 2\gamma\Omega \sin 2\Omega + 2\alpha(1 - 2\rho) [\Omega \sin \Omega \cos(\theta - \omega) - \\ & - \cos \Omega (\gamma \cos(\theta - \omega) + \omega \sin(\theta - \omega))] + \alpha^2(1 - \rho)(1 - 3\rho) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & (\omega^2 + \gamma^2 - \Omega^2) \sin 2\Omega + 2\gamma\Omega \cos 2\Omega - 2\alpha(1 - 2\rho) [\Omega \cos \Omega \cos(\theta - \omega) + \\ & + \sin \Omega (\gamma \cos(\theta - \omega) + \omega \sin(\theta - \omega))] = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Соотношения (9), (10) фактически представляют собой уравнения границ областей устойчивости режимов синхронизации на плоскости ω , ρ , заданные в параметрическом виде. На рис. 4 приведены границы этих областей, наложенные на резонансные кривые, построенные при различных значениях параметров.

Отметим, что уравнение (10) имеет очевидное решение $\Omega = 0$. Оно соответствует известному механизму синхронизации посредством захвата частоты, когда в фазовом пространстве происходит образование резонансного цикла на торе [4, 5, 7]. В этом случае из уравнения (9) получаем

$$\begin{aligned} & (\omega^2 + \gamma^2) - 2\alpha(1 - 2\rho) [(\gamma \cos(\theta - \omega) + \omega \sin(\theta - \omega))] + \\ & + \alpha^2(1 - \rho)(1 - 3\rho) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

На плоскости ω , ρ границы захвата частоты, построенные согласно (11), имеют вид замкнутых кривых, проходящих через точки, отвечающие стационарным состояниям автономного генератора. Внутри этих кривых режимы синхронизации неустойчивы (на рис. 4 они выделены темно-серым цветом), снаружи – устойчивы.

Кроме того, уравнения (9), (10) имеют решения, для которых $\Omega \neq 0$, причем таких решений бесконечное число, так как уравнения являются трансцендентными. Соответственно, на плоскости ω , ρ имеется, вообще говоря, бесконечное число линий, соответствующих появлению неустойчивых возмущений с различными частотами. Необходимо отобрать те из них, которые ограничивают область устойчивости синхронного режима. Для этого проводилось сопоставление результатов решения уравнений (9), (10) и непосредственного численного интегрирования исходного уравнения (1) при помощи метода Рунге–Кутты 4-го порядка, адаптированного для

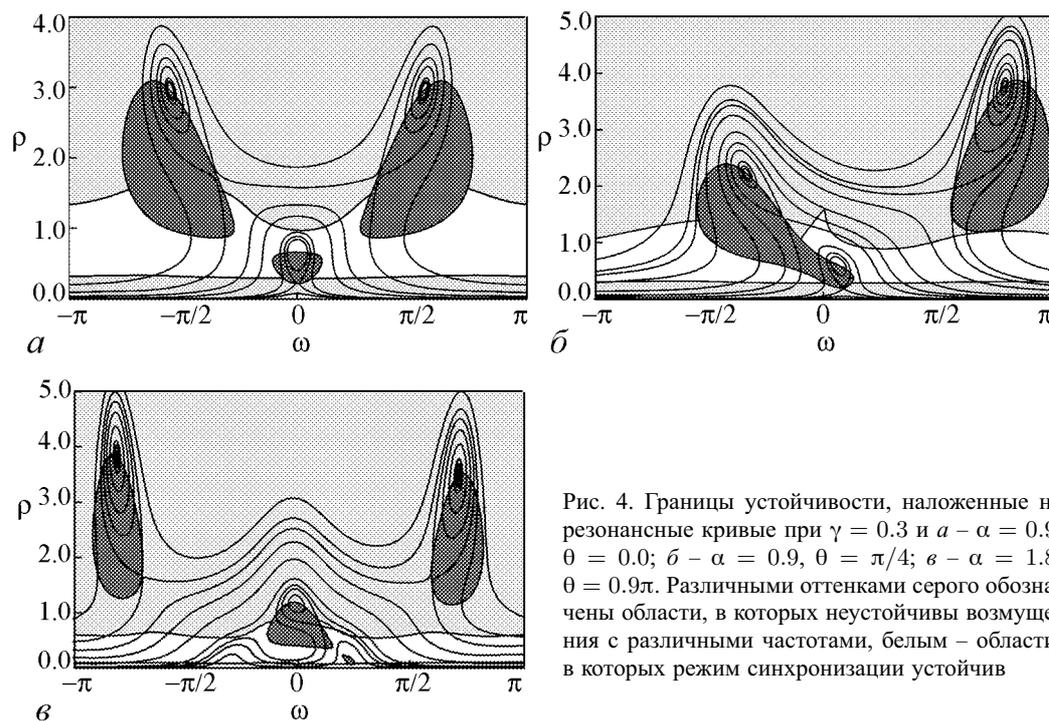


Рис. 4. Границы устойчивости, наложенные на резонансные кривые при $\gamma = 0.3$ и $a - \alpha = 0.9$, $\theta = 0.0$; $\delta - \alpha = 0.9$, $\theta = \pi/4$; $\epsilon - \alpha = 1.8$, $\theta = 0.9\pi$. Различными оттенками серого обозначены области, в которых неустойчивы возмущения с различными частотами, белым – области, в которых режим синхронизации устойчив

уравнений с запаздыванием [9]. В итоге можно получить окончательную картину резонансных кривых, представленную на рис. 4. Режим синхронизации устойчив в областях, показанных на рисунке белым цветом. Области, в которых неустойчивы возмущения с ненулевой частотой, закрашены светло-серым.

Нижняя часть картины, представленной на рис. 4, а, в целом аналогична классической картине резонансных кривых при синхронизации системы с одной степенью свободы (см., например, [1, 5]). В области малых амплитуд переход из неустойчивой области в устойчивую соответствует возникновению синхронизации. При малых расстройках синхронизация происходит через захват частоты, при больших – через подавление частоты, когда в фазовом пространстве тор мягко превращается в предельный цикл. Однако резонансные кривые неустойчивы как в области малых, так и в области больших амплитуд. При переходе в верхнюю неустойчивую область происходит возбуждение паразитных составляющих, примерно соответствующих частотам автомодуляционных мод автономного генератора (см. разд. 1). Хотя в автономном генераторе автомодуляции при выбранных значениях параметров нет, при интенсивном внешнем воздействии амплитуда колебаний увеличивается и возбуждение автомодуляционной моды становится возможным. Таким образом, имеет место автомодуляция, инициированная внешним сигналом.

При отстройке от центра зоны генерации (рис. 4, б) резонансные кривые становятся асимметричными. Собственные частоты смещаются вправо, причем частота автомодуляционной моды с номером $n = -1$ приближается к основной, а ее амплитуда, соответственно, уменьшается (см. формулу (5)). Частота моды с $n = 1$, напротив, удаляется от основной, а ее амплитуда увеличивается². В результате форма

²Разумеется, это справедливо при $\theta > 0$, а при $\theta < 0$ мы имеем противоположную картину.

областей неустойчивости искажается, в частности, области захвата частоты, которые формируются на базе основной и одной из автомодуляционных мод, сливаются воедино. Искажается также граница возникновения автомодуляции, на которой образуется излом вблизи частоты $\omega = 0$. Это связано с тем, что слева и справа от излома автомодуляция возникает с различными частотами. Действительно, как следует из формулы (3), при $\theta = 0$ собственные частоты симметричны относительно нуля, $\omega_{-n} = -\omega_n$. Следовательно, когда возникает автомодуляция, фактически возбуждаются обе моды, частоты которых $\omega_{\pm 1}$ расположены симметрично относительно основной. При $\theta \neq 0$ такой симметрии нет, поэтому возбуждается одна из мод, для которой ниже порог самовозбуждения. В неавтономном генераторе это мода, частота которой ближе к частоте воздействия.

Наиболее сложный вид имеет картина резонансных кривых вблизи границ зон генерации (рис. 4, в), где возможно самовозбуждение двух мод ($n = -2, 0$). В этом случае значение $\alpha = 0.9$ лежит ниже порога самовозбуждения, поэтому мы увеличили его до $\alpha = 1.8$, что по-прежнему соответствует устойчивой одночастотной генерации в автономной системе. При малых F резонансные кривые имеют два максимума в окрестности собственных частот $\omega_0 \approx 0.464\pi$ и $\omega_{-2} \approx -0.647\pi$, которые расположены примерно симметрично относительно нуля. Частота автомодуляционной моды ω_{-1} , напротив, оказывается вблизи нуля. На рис. 4, в масштаб изменения ρ и ω увеличен по сравнению с рис. 4, а, б, что позволяет видеть характерные структуры резонансных кривых в окрестности автомодуляционных частот $\omega_{-3} \approx -1.62\pi$ и $\omega_1 \approx 1.42\pi$. Как видим, картина резонансных кривых, приведенная на рис. 4, в, качественно отличается от системы с одной степенью свободы, в чем наглядно проявляется распределенный характер системы.

Наконец, обсудим форму языков синхронизации, то есть областей на плоскости параметров частота воздействия ω – амплитуда воздействия F , в которых синхронный режим устойчив (рис. 5). Они также существенно отличаются от языков синхронизации в сосредоточенных системах. Прежде всего, языки синхронизации имеют как внешнюю, так и внутреннюю границу. Выше внутренней границы, показанной на рис. 5 штриховыми линиями, имеет место автомодуляция, инициированная внешним сигналом. В центре зоны генерации язык синхронизации симметричен

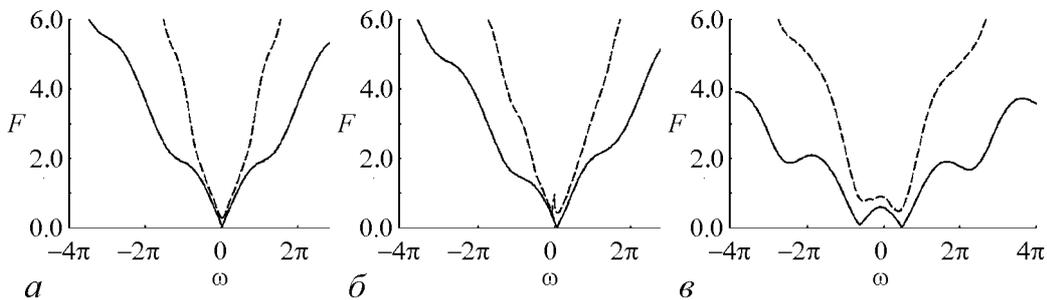


Рис. 5. Языки синхронизации системы (1) при $\alpha = 0.9$, $\theta = 0.0$ (а); $\alpha = 0.9$, $\theta = \pi/4$ (б); $\alpha = 1.8$, $\theta = 0.9\pi$ (в); $\gamma = 0.3$

относительно прямой $\omega = 0$. Его границы имеют волнистую форму, что обусловлено резонансами с различными собственными модами. Таким образом, высшие моды оказывают влияние на динамику неавтономного генератора, даже если их частоты лежат далеко от центра полосы пропускания. Разумеется, это влияние выражено тем сильнее, чем больше параметр γ , определяющий ширину полосы пропускания.

При $\theta = \pi/4$ язык становится асимметричным (рис. 5, б). Обратим внимание на сингулярность, возникающую на внутренней границе языка при $\omega \approx 0$; ее появление, как уже обсуждалось выше, вызвано конкуренцией двух автомодуляционных мод. Кроме того, следует отметить, что язык синхронизации сложным образом

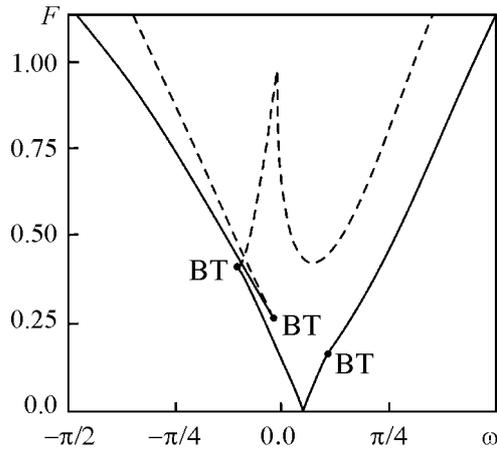


Рис. 6. Увеличенный фрагмент языка синхронизации, изображенного на рис. 5, б

трансформируется в области малых расстройек. Действительно, как видно из рис. 4, б, слияние двух областей захвата частоты приводит к тому, что область устойчивости синхронного режима распадается на две изолированные части. Соответственно, и язык синхронизации в этом случае также состоит из двух частей. Это хорошо видно на рис. 6, на котором приведен увеличенный фрагмент языка синхронизации. На рисунке показаны точки Богданова–Тakensа [10], в которых происходит пересечение линий захвата и подавления частоты и которые фактически определяют конфигурацию языка на плоскости параметров. Видно, что две части языка перекрываются в небольшой области, в которой, соответственно, присутствует бистабильность. Специфическая «тонкая структура» языков синхронизации в системе с запаздыванием, которая возникает благодаря слиянию областей захвата частоты различных собственных мод, более подробно будет обсуждена в отдельной работе.

В окрестности границы зон генерации язык синхронизации принимает наиболее сложную форму (рис. 5, в), фактически образуются два языка, соответствующие двум собственным модам, причем правый утыкается в горизонтальную ось в точке $\omega = \omega_0$, а кончик левого языка в точке $\omega = \omega_{-2}$ близок к оси, однако не примыкает к ней вплотную. Это обусловлено тем, что условия самовозбуждения при данном значении параметра α выполнены только для моды с $n = 0$.

Выводы

В работе рассмотрены режимы вынужденной синхронизации при воздействии внешнего гармонического сигнала на автоколебательную систему с запаздыванием и кубической нелинейностью. В случае, когда автономный генератор находится в режиме одночастотных колебаний, теоретически проанализированы резонансные кривые и языки синхронизации. В области малых амплитуд картина синхронизации

достаточно близка к классическому случаю синхронизации автогенератора с одной степенью свободы, однако с ростом амплитуды появляется целый ряд отличий. Эти отличия связаны с наличием бесконечного числа собственных мод, то есть, по существу, с тем, что система имеет распределенную природу. В частности, форма резонансных кривых в области больших амплитуд и расстроек усложняется, появляются многочисленные максимумы на частотах автомодуляционных мод. В области больших амплитуд режимы синхронизации становятся неустойчивыми и возникает автомодуляция, инициированная внешним воздействием. Соответственно, усложняются и языки синхронизации. Они имеют как внешнюю, так и внутреннюю границу, причем эти границы являются волнистыми, что обусловлено резонансами с автомодуляционными модами. Вблизи границы зон генерации наблюдается раздвоение языка синхронизации, что обусловлено конкуренцией двух собственных мод генератора с разными собственными частотами. Теоретические результаты полностью согласуются с результатами численного моделирования исходной системы (1).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 09-02-00707) и программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/1738). Работа Н.М. Рыскина поддержана также фондом «Династия».

Библиографический список

1. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Физматлит, 1997.
2. Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989.
3. Кузнецов С.П. Сложная динамика генераторов с запаздывающей обратной связью (обзор) // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25, № 12. С. 1410.
4. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
5. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
6. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М.: Наука, Физматлит, 2002.
7. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
8. Рыскин Н.М., Шигаев А.М. Сложная динамика простой модели распределенной автоколебательной системы с запаздыванием // ЖТФ. 2002. Т. 72, № 7. С. 1.
9. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир. 1990.
10. Гукенхеймер Дж., Холмс П. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.; Ижевск: РХД, 2002.

Поступила в редакцию 23.06.2008
После доработки 19.11.2008

**SYNCHRONIZATION OF PERIODIC OSCILLATION
IN A DELAYED-FEEDBACK OSCILLATOR
BY EXTERNAL HARMONIC DRIVING**

N.M. Ryskin, S.A. Usacheva

Dynamics of a delayed-feedback oscillator with cubic nonlinearity driven by an external harmonic signal is considered in a case when in the free-running oscillator periodic regime is realized. Resonance curves, i.e. amplitude–frequency responses of the oscillator are derived analytically. Stability conditions for synchronization regime are analyzed. Synchronization tongues on the driving amplitude – driving frequency parameter plane are presented. General differences from classical picture of synchronization of the systems with one degree of freedom are discussed.

Keywords: Delayed-feedback oscillator, synchronization, resonance curves, synchronization tongues.



Рыскин Никита Михайлович – родился в 1966 г. в Саратове. Окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1991). Защитил кандидатскую (1996) и докторскую (2005) диссертации. С 1997 г. работает на факультете нелинейных процессов СГУ, в настоящее время – профессор кафедры нелинейной физики. Область научных интересов – нелинейная динамика распределенных систем, нелинейные волны и солитоны, вакуумная сверхвысокочастотная электроника и микроэлектроника. Имеет более 100 научных публикаций по указанным выше направлениям, в том числе учебные пособия «Нелинейные волны» (в соавторстве с Д.И. Трубецковым; М.: Физматлит, 2000) и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и С.П. Кузнецовым; М.: Физматлит, 2002, 2005).

E-mail: RyskinNM@info.sgu.ru

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83



Усачева Светлана Александровна – родилась в Саратове (1987). Студентка 5 курса факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика автоколебательных систем с запаздыванием. Участник (с докладами) 6 конференций по нелинейной динамике.

E-mail: usasva@mail.ru

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83



ВОЛНЫ СИНХРОНИЗАЦИИ В АНСАМБЛЯХ СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

А.К. Крюков, О.И. Канаков, Г.В. Осипов

Изучается синхронизация в ансамблях локально диссипативно и консервативно связанных слабонелинейных осцилляторов ван дер Поля. Показано, что в цепочке из N элементов возможно сосуществование не менее 2^{N-1} устойчивых режимов глобальной синхронизации. Рассмотрены особенности кластерной синхронизации. Показано сосуществование множества распространяющихся фронтов переключения режимов синхронизации, свободно проходящих друг сквозь друга и отражающихся от границ среды. Описан обнаруженный в численных экспериментах режим, при котором происходит чередование синфазной и противофазной синхронизации.

Ключевые слова: Синхронизация, мультистабильность, численные методы, моделирование, комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау, волны синхронизации.

Введение

Системы связанных нелинейных осцилляторов встречаются в различных областях науки (биологии, нейрофизиологии, физике и химии) и техники (электронике, радиотехнике, системах передачи данных). Один из ключевых коллективных эффектов, возникающих в таких системах – это эффект синхронизации, заключающийся в установлении общих ритмов (частот) колебаний всех (глобальная синхронизация) или части (кластерная синхронизация) элементов. Глобальная и кластерная синхронизация наблюдалась в ансамблях как периодических, так и хаотических осцилляторов в предположении различных конфигураций связей [1–3]. Наиболее полно изучены ансамбли локально связанных периодических осцилляторов [3–5]. В нелинейной динамике существует несколько парадигматических моделей, чаще всего используемых для демонстрации тех или иных эффектов. Одна из таких моделей – осциллятор ван дер Поля. Это хорошо изученная система, которая применяется для моделирования широкого круга явлений и процессов [6]. В цепочке диссипативно связанных неидентичных осцилляторов ван дер Поля с ростом диссипативной связи происходит переход от полностью несинхронного поведения к кластерной синхронизации и далее к глобальной синхронизации [5].

В настоящей работе изучается синхронизация в цепочках локально связанных неидентичных осцилляторов ван дер Поля в случае двух типов связи – *диссипативной и консервативной*.

1. Модель

Рассмотрим модель в виде цепочки линейно связанных слабонелинейных элементов ван дер Поля со слабо различающимися индивидуальными частотами

$$\begin{cases} \dot{x}_j = y_j, \\ \dot{y}_j = \mu(1 - x_j^2)y_j - (1 + \mu\Omega_j)x_j + \\ \quad + \mu\alpha(x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}) + \mu\beta(y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}), \end{cases} \quad (1)$$

где $j = 1, \dots, N$, N – количество элементов в цепочке; Ω_j – параметр, определяющий частоту j -го элемента; $\mu \ll 1$; α и β – коэффициенты консервативной и диссипативной составляющих связи, соответственно. В работе анализируется коллективная динамика системы (1):

а) при граничных условиях типа «свободные концы»

$$\begin{cases} x_0(t) = x_1(t), \\ x_{N+1}(t) = x_N(t), \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} y_0(t) = y_1(t), \\ y_{N+1}(t) = y_N(t); \end{cases} \quad (3)$$

б) при периодических граничных условиях

$$\begin{cases} x_{j+N}(t) = x_j(t), \\ y_{j+N}(t) = y_j(t). \end{cases} \quad (4)$$

Применяя к (1) метод ван дер Поля, включающий переход к медленно меняющимся комплексным амплитудам z_j

$$x_j = z_j e^{it} + z_j^* e^{-it}, \quad y_j = iz_j e^{it} - iz_j^* e^{-it},$$

усреднение по периоду быстрых колебаний и переход к медленному времени $\tau = \mu t/2$, получим систему уравнений для комплексных амплитуд z_j , представляющую собой дискретный аналог комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау с пространственно неоднородным распределением индивидуальных частот [6]

$$\begin{aligned} \dot{z}_j &= [1 + i\Omega_j - |z_j|^2] z_j + (\beta - i\alpha)(z_{j+1} - 2z_j + z_{j-1}), \\ j &= 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (5)$$

Комплексное дискретное уравнение Гинзбурга–Ландау (5) описывает динамику взаимодействующих автоколебательных элементов вблизи бифуркации Андронова–Хопфа и применяется для моделирования явлений из различных областей физики: сверхпроводимость, сверхтекучесть, фазовые переходы, конденсация Бозе–Эйнштейна, физика жидких кристаллов, нелинейные волны и потоки в теории поля [6].

Переходя в (5) от комплексных амплитуд к действительным амплитудам R_j и фазам φ_j

$$z_j = \frac{1}{2} R_j e^{i\varphi_j}, \quad (6)$$

определим режим глобальной синхронизации как периодическое решение с частотой Ω_s – частотой синхронизации. Для этого решения все фазы φ_j растут во времени линейно с одинаковым коэффициентом Ω_s , то есть

$$\dot{\varphi}_j = \Omega_s = \text{const}. \quad (7)$$

Заметим, что соответствующая частота синхронных колебаний в исходной системе (1) $\omega_s = 1 + \mu\Omega_s/2$.

Ограничимся рассмотрением частного случая распределения индивидуальных частот вдоль цепочки по линейному закону

$$\Omega_j = \Delta(j - 1), \quad (8)$$

где Δ – частотная расстройка между соседними элементами. Без ограничения общности будем считать $\Delta > 0$.

Известно [5], что в случае чисто диссипативной связи ($\alpha = 0$) система (5) с линейным распределением индивидуальных частот допускает существование не более одного устойчивого режима глобальной синхронизации. Как показано далее, введение консервативной составляющей связи $\alpha \neq 0$ изменяет параметры этого синхронного режима, а также может привести к появлению мультистабильности синхронных режимов.

2. Два связанных элемента

Рассмотрим случай $N = 2$ в (5). Положим $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = \Delta$. Из (5) и (6) тогда следует замкнутая система уравнений для амплитуд R_1 , R_2 и разности фаз $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$:

$$\begin{cases} \dot{R}_1 = R_1(1 - \beta - R_1^2/4) + R_2(-\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi), \\ \dot{R}_2 = R_2(1 - \beta - R_2^2/4) + R_1(\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi), \\ \dot{\varphi} = -\Delta - \alpha \left(\frac{R_2}{R_1} - \frac{R_1}{R_2} \right) \cos \varphi - \beta \left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{R_1}{R_2} \right) \sin \varphi. \end{cases} \quad (9)$$

Синхронным режимам соответствуют устойчивые ненулевые состояния равновесия $(\bar{R}_1, \bar{R}_2, \bar{\varphi})$ этой системы.

В [7] было проведено детальное исследование синхронных режимов для двух связанных слабонелинейных осцилляторов на основе анализа уравнений вида (9)¹. Были найдены области параметров, соответствующие областям бистабильности и мультистабильности синхронных режимов, в частности, выделены режимы синфазной ($\bar{\varphi} \approx 0$) и противофазной ($\bar{\varphi} \approx \pi$) синхронизации. Также рассматривался эффект

¹Заметим, что определение фаз, принятое в [7], имеет противоположный знак по сравнению с (6).

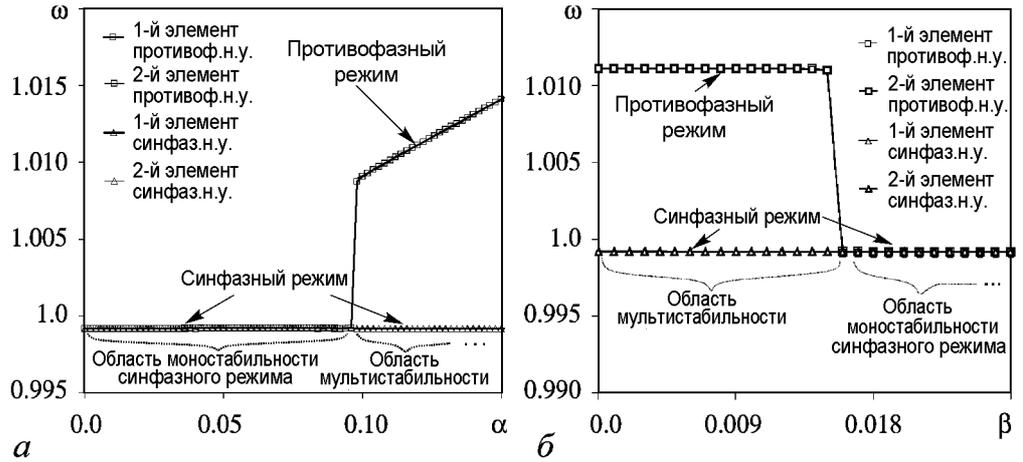


Рис. 1. Зависимость частот элементов от α при $\beta = 0.01$ (а) и от β при $\alpha = 0.12$ (б); $\mu = 0.1$, $\Delta = 2 \cdot 10^{-3}$

вымирания колебаний осцилляторов, проявляющийся при сложной связи. Была получена оценка частоты синхронизации

$$\Omega_s \approx \frac{\Delta}{2} + \alpha(1 - \cos \bar{\varphi}) \quad (10)$$

с точностью до слагаемых более высокого порядка по α, β [7]. В частности, в синфазном режиме частота синхронизации

$$\Omega_s \approx \frac{\Delta}{2}, \quad (11)$$

в противофазном режиме

$$\Omega_s \approx \frac{\Delta}{2} + 2\alpha. \quad (12)$$

Таким образом, в этом приближении частота синфазной синхронизации не зависит от значений параметров связи и устанавливается на средней частоте из индивидуальных частот элементов. Частота противофазной синхронизации выше, чем частота синфазной, и возрастает с увеличением консервативной составляющей коэффициента связи.

Компьютерные эксперименты с двумя связанными слабонелинейными элементами ван дер Поля показали, что для малых α при фиксированном β изначально наблюдается синфазный режим, с увеличением α , после некоторого порогового значения α реализуется мультистабильность синфазного и противофазного режима (рис. 1, а). То есть при наличии только диссипативной связи β (α мало) мультистабильности нет. При фиксированном α и малых значениях β в системе двух элементов наблюдается мультистабильность синхронных режимов (рис. 1, б). С увеличением диссипативной составляющей связи в системе реализуется синфазный режим. Заметим, что частота синфазного режима не зависит от значений параметров связи, а частота противофазного режима выше частоты синфазного, не зависит от диссипативной связи и линейно растет с увеличением консервативной связи.

3. Синфазная синхронизация в цепочке: теория

Исследуем режим глобальной синфазной синхронизации в уравнении Гинзбурга–Ландау (5) с граничными условиями «свободные концы», ограничиваясь фазовым приближением. Рассматривается линейное распределение индивидуальных частот элементов (8). Фазовое приближение возможно в пределе малой консервативной составляющей связи $|\alpha| \ll |\beta|$ на основе известного решения для случая чисто диссипативной связи [5].

Заменяя в уравнении (5) комплексные амплитуды на действительные амплитуды и фазы в соответствии с (6) и переходя в полученных уравнениях к фазовому приближению (пренебрегая динамикой амплитуд и полагая равными амплитуды соседних элементов в уравнениях для фаз, что справедливо при достаточно слабой межэлементной связи), получим систему

$$\dot{\varphi}_j = \Omega_j + \beta(\sin(\varphi_{j+1} - \varphi_j) + \sin(\varphi_{j-1} - \varphi_j)) - \alpha(\cos(\varphi_{j+1} - \varphi_j) + \cos(\varphi_{j-1} - \varphi_j) - 2) \quad (13)$$

с граничными условиями

$$\varphi_0(t) = \varphi_1(t), \quad \varphi_{N+1}(t) = \varphi_N(t). \quad (14)$$

Синхронный режим в (13) определяется условием (7). Подставляя (7) в (13), получим систему алгебраических уравнений, неизвестными в которой являются частота синхронизации Ω_s и статические значения фазовых расстройек $(\varphi_{j+1} - \varphi_j)$. В случае чисто диссипативной связи $\alpha = 0$ эта система сводится заменой $s_j = \sin(\varphi_{j+1} - \varphi_j)$ к линейному разностному уравнению, решение которого для линейного распределения индивидуальных частот (8) имеет вид [5]

$$\sin(\varphi_{j+1} - \varphi_j) = \frac{\Delta}{2\beta} j(N-j), \quad \Omega_s = \frac{\Delta(N-1)}{2}. \quad (15)$$

Выражение (15) задает 2^{N-1} различных синхронных состояний, из которых устойчивым является только то, для которого $|\varphi_{j+1} - \varphi_j| < \pi/2$, то есть реализуется режим глобальной синфазной синхронизации [5].

В случае четного N наибольшее по цепочке значение синуса фазовой расстройки между соседними элементами

$$\max_j \{ \sin(\varphi_{j+1} - \varphi_j) \} = \frac{\Delta N^2}{8\beta} \quad (16)$$

достигается при

$$j = j_m = \frac{N}{2}. \quad (17)$$

Тогда в качестве условия существования устойчивого режима глобальной синхронизации имеем [5]

$$\left| \frac{\Delta N^2}{8\beta} \right| < 1.$$

Выясним, как изменяются выражения (15) – (17) при введении малой консервативной составляющей связи $\alpha \neq 0$. Перейдем в уравнении (13) к пределу сплошной среды, который предполагает большое количество элементов и малость расстройки фаз между соседними элементами $|\varphi_{j+1} - \varphi_j| \ll 1$. Для режима глобальной синхронизации это условие выполняется вдали от границы ее срыва, что при $\alpha = 0$ означает $|\Delta N^2/(8\beta)| \ll 1$.

Введем непрерывную пространственную координату x и пространственную длину системы L

$$x = \lambda j, \quad L = \lambda(N - 1), \quad (18)$$

где λ – расстояние между соседними элементами. Пусть λ стремится к нулю при фиксированной конечной длине системы L . Число элементов в системе N тогда стремится к бесконечности.

От дискретного набора переменных $\varphi_j(t)$ перейдем к непрерывной функции действительных переменных $\varphi(x, t)$.

Используя разложение в ряд Тейлора функции $\varphi(x, t)$ по пространственной координате

$$\varphi(x + \lambda, t) = \varphi(x, t) + \varphi'(x, t)\lambda + \frac{\varphi''(x, t)}{2}\lambda^2 + O(\lambda^3) \quad (19)$$

(здесь и далее знак «'» означает дифференцирование по пространственной координате), а также разложения тригонометрических функций

$$\sin x = x + O(x^3), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4), \quad (20)$$

получим выражения

$$\sin(\varphi_{j+1}(t) - \varphi_j(t)) + \sin(\varphi_{j-1}(t) - \varphi_j(t)) = \varphi''(x, t)\lambda^2 + O(\lambda^3), \quad (21a)$$

$$\cos(\varphi_{j+1}(t) - \varphi_j(t)) + \cos(\varphi_{j-1}(t) - \varphi_j(t)) = 2 - (\varphi'(x, t))^2\lambda^2 + O(\lambda^3), \quad (21b)$$

где переменные x и j связаны соотношением (18). Подставляя (21a), (21b) в уравнение (13), вводя новые обозначения

$$\sigma = \lambda^2\beta, \quad \kappa = -\lambda^2\alpha \quad (22)$$

и при этом полагая $\lambda \rightarrow 0$, получим уравнение фазового приближения в пределе сплошной среды

$$\dot{\varphi} = \omega(x) + \sigma\varphi'' - \kappa(\varphi')^2 \quad (23)$$

с граничными условиями

$$\varphi'(0) = \varphi'(L) = 0. \quad (24)$$

Синхронный режим, при котором $\dot{\varphi} = \Omega_s$, определяется обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\omega(x) - \Omega_s + \sigma\varphi'' - \kappa(\varphi')^2 = 0. \quad (25)$$

В Приложении показано, что частота синхронизации

$$\Omega_s = \Omega_m \left(1 - \frac{(cL)^3}{60} + O((cL)^9) \right), \quad (26)$$

максимальное значение градиента фазы в уравнении (25)

$$\varphi'_{\max} = \frac{\delta L^2}{8\sigma} \left(1 - \frac{19(cL)^6}{57600} + O((cL)^9) \right), \quad (27)$$

а координата точки, в которой достигается это значение,

$$x_m = \frac{L}{2} \left(1 + \frac{7}{480}(cL)^3 + O((cL)^9) \right). \quad (28)$$

Возвращаясь теперь к дискретной пространственной координате, то есть переходя от непрерывного приближения (23) обратно к модели (13), получим выражения для частоты синхронизации, наибольшей по цепочке фазовой расстройки между соседними элементами, и номера элемента, на котором достигается эта наибольшая расстройка. Поскольку непрерывное приближение предполагает $N \rightarrow \infty$, в полученных выражениях можно заменить $(N - 1)$ на N без потери точности. Обозначая

$$M = -(cL)^3 = \frac{\alpha N^3 \Delta}{\beta^2}, \quad (29)$$

из выражений (26)–(28) находим частоту синхронизации

$$\Omega_s = \frac{\Delta(N - 1)}{2} \left(1 + \frac{M}{60} + O(M^3) \right), \quad (30)$$

максимум фазовой расстройки

$$\max_j \{\varphi_{j+1} - \varphi_j\} = \lambda \varphi'_{\max} = \frac{\Delta N^2}{8\beta} \left(1 - \frac{19}{57600} M^2 + O(M^3) \right) \quad (31)$$

и положение максимума фазовой расстройки в цепочке

$$j_m = \left\lceil \frac{N}{2} \left(1 - \frac{7}{480} M + O(M^3) \right) \right\rceil. \quad (32)$$

Здесь квадратные скобки $[\cdot]$ обозначают целую часть числа. Приближения, использованные при расчете, накладывают ограничения на область применимости полученных выражений, в том числе фазовое приближение требует $|\alpha|, |\beta| \ll 1$; приближение сплошной среды – $N \gg 1$ и $\Delta N^2 / (8\beta) \ll 1$; асимптотический метод – $|M| = |\alpha N^3 \Delta / \beta^2| \ll 1$.

При $M = 0$ выражения (30) – (32) переходят в (15) – (17) с учетом соотношения $\sin(\varphi_{j+1} - \varphi_j) \approx \varphi_{j+1} - \varphi_j$ при $|\varphi_{j+1} - \varphi_j| \ll 1$, что справедливо в рамках непрерывного приближения.

Как показывает полученный результат, введение ненулевой консервативной составляющей связи $\alpha \neq 0$ приводит к изменению характеристик режима глобальной синфазной синхронизации, в частности, к сдвигу частоты синхронизации и положения максимума фазовой расстройки (рис. 2). Знак этого сдвига для обеих величин

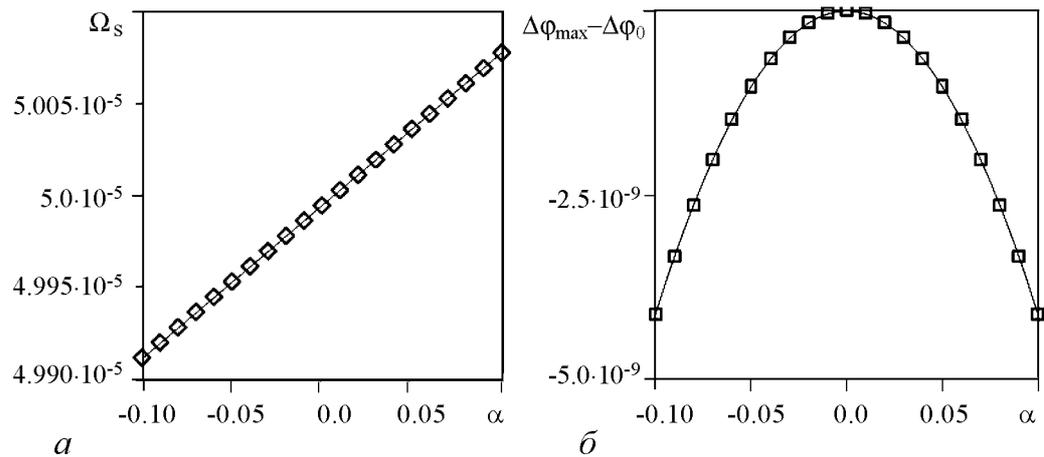


Рис. 2. Зависимость от α частоты синхронизации (а) и максимума фазовой расстройки, смещенной относительно своего максимального значения $\varphi_0 = 1.25 \cdot 10^{-3}$ (б); $N = 10$, $\Delta = 2 \cdot 10^{-5}$, $\beta = 0.1$

зависит от знака α . Величина максимальной фазовой расстройки при этом уменьшается независимо от знака α .

4. Синхронные режимы в цепочке: компьютерный эксперимент

Кроме режима глобальной синфазной синхронизации в цепочке слабонелинейных элементов ван дер Поля обнаружено сосуществование нескольких глобальных синхронных режимов. Среди них синфазный и противофазный режимы, а также ряд смешанных режимов. В компьютерных экспериментах в цепочке из 32 элементов рассматривались периодические граничные условия и граничные условия «свободные концы». В обоих случаях было обнаружено сосуществование нескольких синхронных режимов при одних и тех же значениях параметров. Таким образом, фиксируя значения параметров, задавая граничные и начальные условия, можно получать

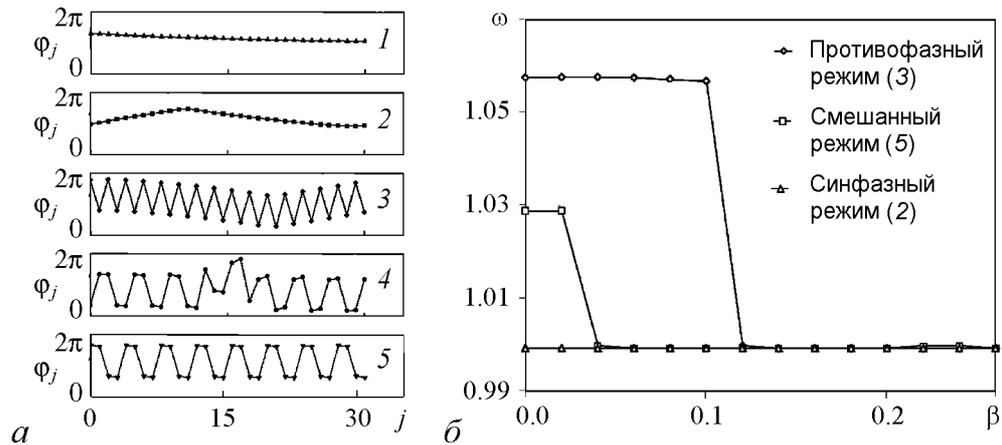


Рис. 3. а – Распределение фаз синхронных режимов при различных граничных условиях: 1 – синфазный режим, граничные условия – «свободные концы»; 2 – синфазный режим, периодические граничные условия, 3 – противофазный режим, периодические граничные условия; 4 – смешанный режим, граничные условия – «свободные концы»; 5 – смешанный режим, периодические граничные условия ($\mu = 0.1$, $\Delta = 2 \cdot 10^{-5}$, $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.03$). б – Эволюция частот элементов при начальных условиях, соответствующих противофазному режиму 3 (\diamond), смешанному 5 (\square) и синфазному 2 (Δ) режимам ($N = 32$, $\mu = 0.1$, $\Delta = 2 \cdot 10^{-5}$, $\alpha = 0.3$)

тот или иной синхронный режим в зависимости от начальных условий. Распределения фаз элементов в нескольких полученных синхронных режимах показаны на рис. 3, а. На рис. 3, б показана эволюция частот синфазного, смешанного и противофазного режимов зависимости от β в цепочке из 32 элементов при периодических граничных условиях. Видно, что при $\beta \leq 0.02$ все рассматриваемые режимы устойчивы. При дальнейшем увеличении β сначала исчезает смешанный режим, последним – противофазный. При большой диссипативной связи в системе реализуется синфазный синхронный режим.

Рассмотрим цепочку из K элементов. Пусть в ней существует M синхронных режимов. Добавим в цепочку новый элемент. Как видно из экспериментов, каждый из элементов может быть синхронизован синфазно и противофазно с соседним. Получаем M режимов в случае синфазной синхронизации нового элемента с соседним и еще M режимов в случае противофазной синхронизации нового элемента с соседним, всего $2M$ режимов. Таким образом, при добавлении нового элемента в цепочку количество синхронных режимов удваивается. А для двух элементов имеют место два режима (синфазный и противофазный). Отсюда несложно сделать вывод о существовании 2^{N-1} различных синхронных режимов в цепочке из N элементов.

Наличие фазового сдвига между соседними элементами в случае синхронного режима проявляется в существовании распространяющихся вдоль цепочки волновых фронтов. В синфазном режиме совокупность фазовых сдвигов образует известные фазовые волны [3]. Более сложные структуры возникают в противофазном и смешанных режимах. Например, в противофазном режиме распространение сдвига фаз вдоль цепочки имеет «пилообразный» вид. Таким образом, каждый синхронный режим может рассматриваться как структура, образованная волной синхронизации, задающей фазовый сдвиг между элементами.

При слабой связи поведение системы характеризуется кластерной синхронизацией. Чем меньше связь, тем больше кластеров в цепочке. При отсутствии связи каждый элемент осциллирует с собственной частотой. Исследовалось распределение частот элементов в цепочке при $\alpha = 0.12$ и различных значениях параметра связи β (рис. 4). При увеличении β число кластеров сокращается, и при некотором критическом значении β наступает глобальная синхронизация. Граница между глобальной и кластерной синхронизацией для цепочки из 20 элементов при $\Delta = 0.01$ показана на рис. 5.

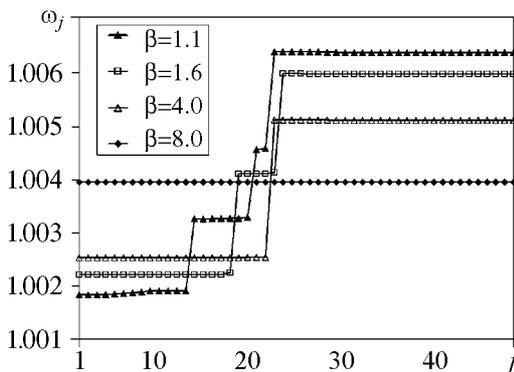


Рис. 4. Глобальная и кластерная синхронизация. $N = 50, \mu = 0.1, \Delta = 0.001, \alpha = 0.12$;

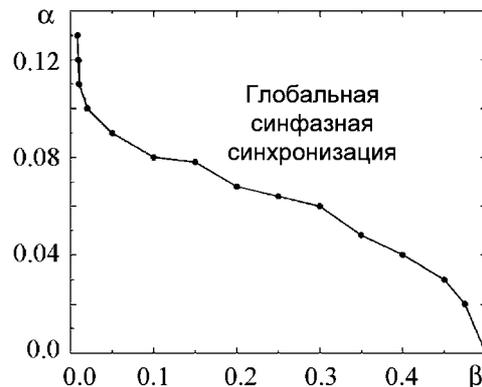


Рис. 5. Области глобальной и кластерной синхронизации ($N = 20, \mu = 0.1, \Delta = 0.01$)

5. Синфазная–противофазная синхронизация

При исследовании синхронизации в цепочке осцилляторов ван дер Поля ($N = 128, \mu = 0.1, \Delta = 2 \cdot 10^{-6}$) было обнаружено, что усредненные на большом временном интервале частоты парциальных систем при определенных значениях параметров выстраиваются симметрично относительно центра цепочки и линейно уменьшаются от центра к краям (рис. 6, *a*). Распределение фаз постоянно меняется, но практически все время в цепочке существует область около центра, в которой элементы синхронизованы в противофазе, и существуют области около краев, элементы в которых синхронизованы синфазно (рис. 6, *b*). Размеры этих областей меняются периодически. Эволюция этих областей показана на рис. 7. Области, где элементы синхронизованы синфазно, показаны светлым цветом, противофазные области – темным. Так, если в начальный момент элементы совершали колебания в противофазе, то противофазная область G_1 начинает уменьшаться и со временем практически исчезает около центра, при этом соответственно увеличивается область G_2 синфазной синхронизации. Далее область G_1 начинает увеличиваться, и через некоторое время практически все элементы колеблются противофазно, далее эта область снова уменьшается, потом увеличивается и т.д. Подчеркнем, что элементы внутри выделенных областей G_1 и G_2 синхронизованы. Так, усредненные на выделенном временном интервале (рис. 8, *a*) частоты элементов, не переходящих из одной области в другую, остаются неизменными и совпадают внутри каждой области. Усредненные частоты элементов, совершивших переход, выстраиваются линейно между частотами соответствующих областей (рис. 8, *b*).

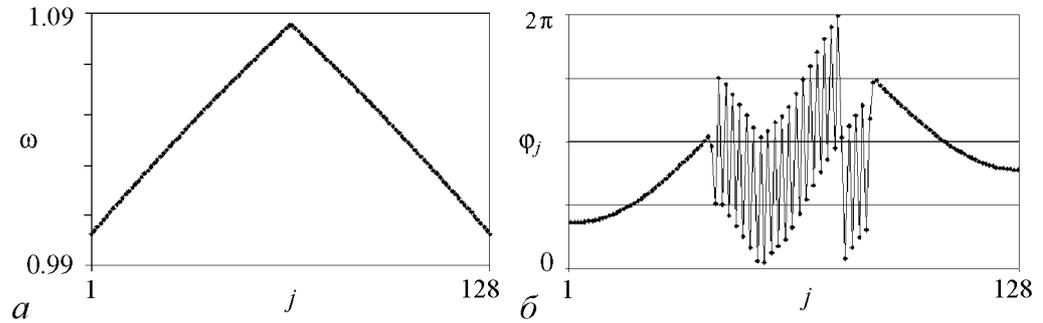


Рис. 6. *a* – Усредненные на большом временном интервале частоты. *b* – Типичное мгновенное распределение фаз в системе. Для рис. 6–11 значения коэффициентов связи $\alpha = 0.3, \beta = 0.01$

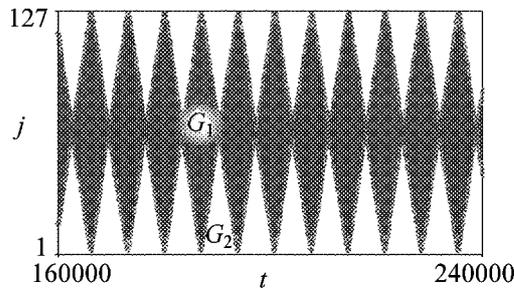


Рис. 7. Эволюция противофазных областей G_1 (здесь и далее выделенных темным цветом) и синфазных областей G_2 (здесь и далее выделенных светлым цветом). Граничные условия – свободные концы

Таким образом, в системе устойчивы фронты переключения режимов синхронизации. Эти фронты распространяются вдоль цепочки с некоторой скоростью в обоих направлениях и отражаются от границы. При заданных начальных условиях эти фронты распространяются навстречу и при пересечении в одной точке проходят друг через друга беспрепятственно. Таким образом, ключевым моментом для существования режима чередования во времени синфазной и противофазной синхронизации является существование в системе таких фронтов.

Как показали численные эксперименты, в системе возможно задание различных конфигураций фронтов переключения режима синхронизации, которые будут существовать как при свободных, так и при периодических граничных условиях. Так, на рис. 9 показан режим чередующейся синхронизации при изначально сонаправленных фронтах переключения, которые также отражаются от свободных концов и при столкновении проходят друг через друга беспрепятственно. На рис. 10 показан аналогичный режим с двумя сонаправленными фронтами переключения, но при периодических граничных условиях.

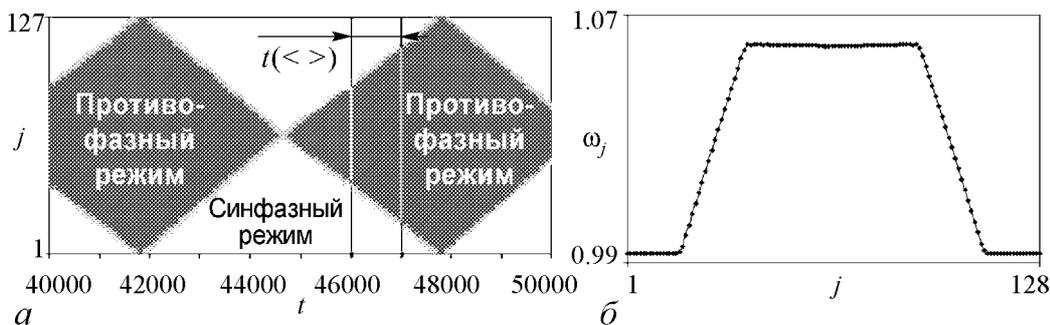


Рис. 8. а – Чередование синфазной и противофазной синхронизации и интервал для усреднения частот элементов; б – усредненные парциальные частоты на интервале (46000 : 47000)

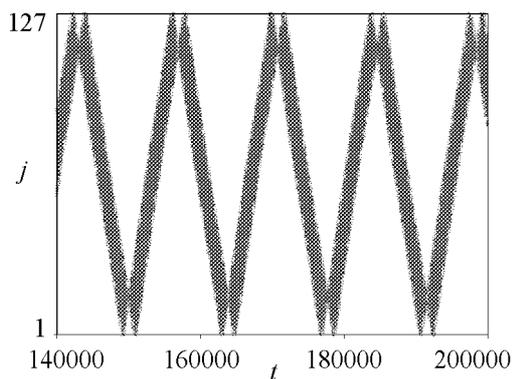


Рис. 9. Распространение двух изначально сонаправленных фронтов синхронизации: противофазной (передний фронт) и синфазной (задний фронт) в цепочке при граничных условиях «свободные концы»

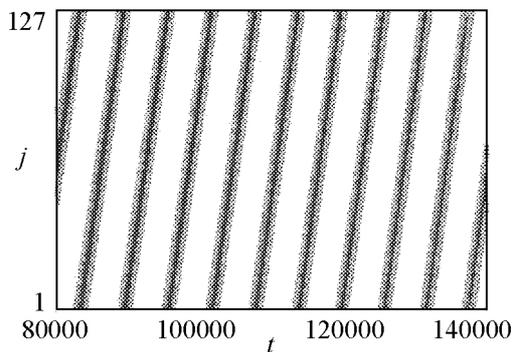


Рис. 10. Распространение двух сонаправленных фронтов синхронизации в цепочке при периодических граничных условиях

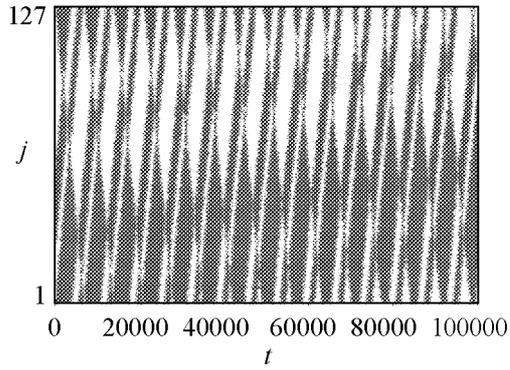


Рис. 11. Распространение четырех разнонаправленных фронтов синхронизации в цепочке при периодических граничных условиях

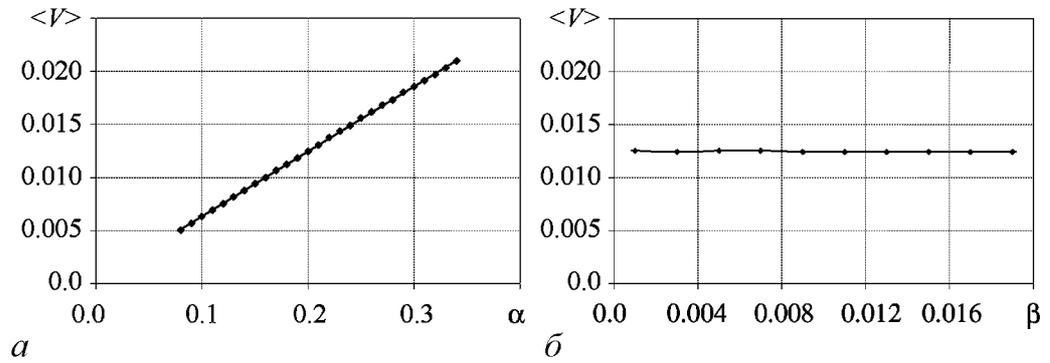


Рис. 12. Зависимость средней скорости распространения фронта от параметра связи α при $\beta = 0.01$ (а); от параметра связи β при $\alpha = 0.2$ (б). Граничные условия – «свободные концы»

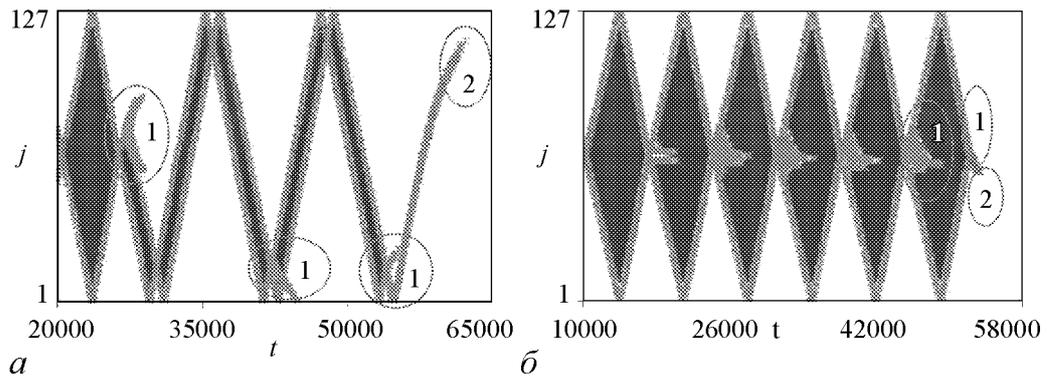


Рис. 13. Эволюция и исчезновение режима чередующейся синфазной – противофазной синхронизации при большом значении: а – параметра $\alpha = 0.354$ ($\beta = 0.01$); б – параметра $\beta = 0.019$ ($N = 128$, $\mu = 0.1$, $\Delta = 2 \cdot 10^{-6}$, $\alpha = 0.3$). Светло-серым цветом показаны высокоградиентные фазовые волны, обычно разграничивающие области G_1 и G_2 . Граничные условия – «свободные концы»

Как оказалось, в системе возможно существование большего числа фронтов переключения синхронных режимов. Так, на рис. 11 приведен случай сосуществования четырех разнонаправленных фронтов в системе с периодическими граничными условиями. Видно, что скорости фронтов в разных направлениях различны. Это обусловлено неидентичностью элементов в цепочке. Скорость распространения фронта переключения зависит как от индивидуальных параметров элементов, так и от связи между элементами. Данные зависимости приведены на рис. 12. Видно, что средняя скорость распространения фронта линейно возрастает при увеличении α и не зависит от β .

Режим чередующейся синфазной – противофазной синхронизации существует в ограниченной части плоскости параметров (α, β) . Разрушение этого режима происходит как при малой, так и при большой связи. На рис. 13, *a* показано исчезновение режима чередующейся синхронизации при большом значении α ($\alpha = 0.354$). На рис. 13, *б* показана эволюция и исчезновение синфазных и противофазных областей при большом значении β ($\beta = 0.019$). Видно, что срыв режима чередующейся синхронизации происходит в синфазный режим.

Примечательно то, что режим чередующейся синфазной – противофазной синхронизации переходит в синфазный синхронный режим и при малых значениях параметров связи, о чем свидетельствуют рис. 14 и рис. 15.

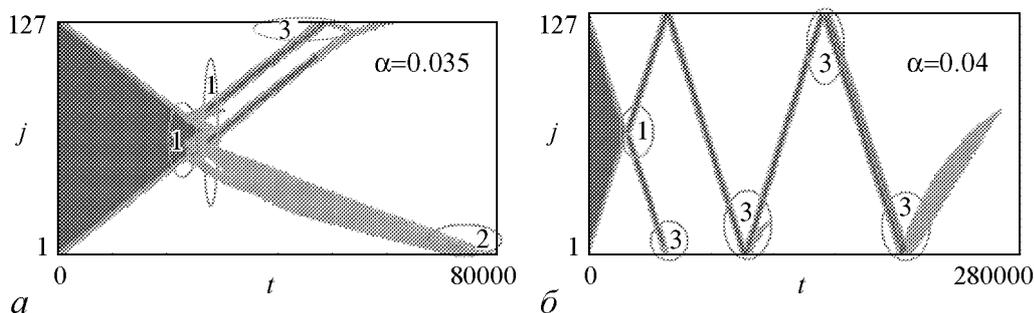


Рис. 14. Эволюция и исчезновение режима чередующейся синфазной – противофазной синхронизации при $\beta = 0.001$ и малом значении параметра α : 0.035 (*a*); 0.04 (*б*). Граничные условия – «свободные концы»

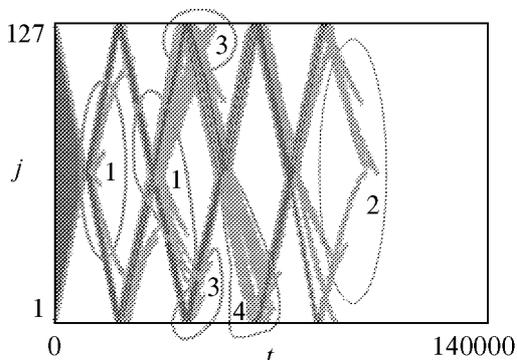


Рис. 15. Эволюция и исчезновение режима чередующейся синфазной – противофазной синхронизации при малых значениях параметров $\alpha = 0.01$ и $\beta = 0.01$. Граничные условия – «свободные концы»

На рисунках видны основные эффекты, предшествующие срыву перемежающейся синхронизации в синфазный режим. Их можно объединить в 3 группы:

- 1) изменение направления и/или количества фронтов переключения при столкновении фронтов;
- 2) разрушение фронтов переключения при их распространении в системе при значениях параметров, соответствующих неустойчивости перемежающейся синхронизации;
- 3) разрушение фронтов переключения при отражении от границы (в случае свободных граничных условий).

В системе присутствует также эффект зарождения фронтов переключения режимов синхронизации при отражении от границы высокоградиентных фазовых волн.

Типичный случай изменения направления распространения фронта переключения режима синхронизации, иллюстрирующий первый механизм, показан на рис. 16 (направления фронтов показаны стрелками). После столкновения фронтов, фронт, распространяющийся вправо (рис. 16, *a*), не может перевести элементы из синфазной синхронизации в противофазную. Из-за сильной связи они продолжают оставаться синхронизованными синфазно, хотя и с большим градиентом фазы, чем ранее (рис. 16, *б*). Динамические переменные выстраиваются так, что фронт переключения начинает распространяться в обратную сторону (рис. 16, *в*). При этом разности фаз между элементами, образующими высокоградиентную фазовую волну (рис. 16, *г*), уменьшаются с течением времени, и в результате элементы синхрони-

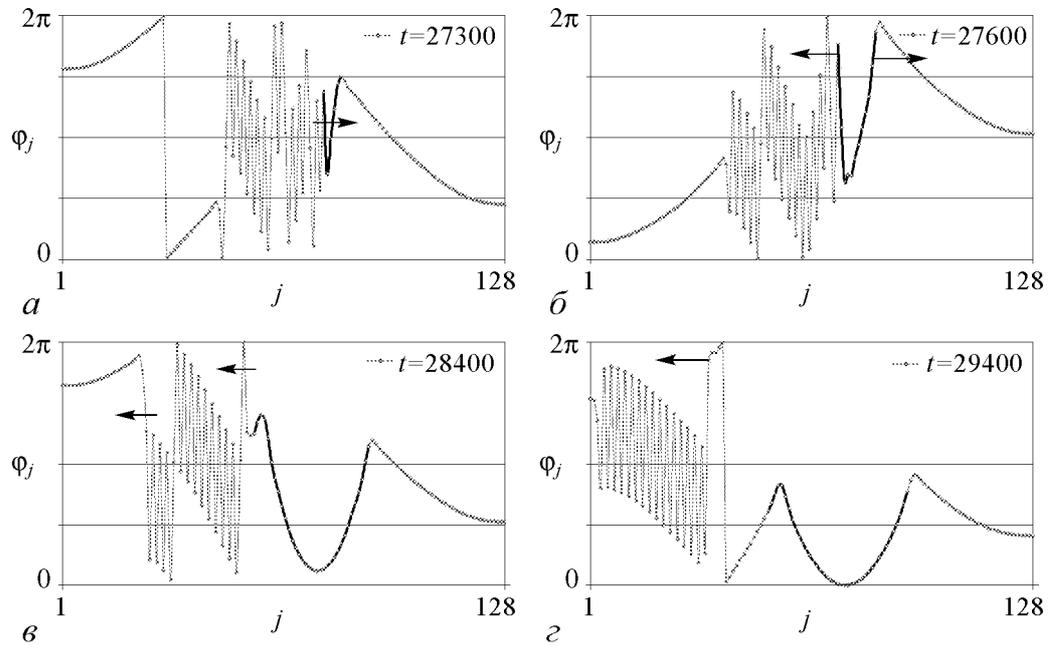


Рис. 16. Распределения фаз φ_j в различные моменты времени, иллюстрирующие механизм изменения направления одного из фронтов синхронизации при столкновении фронтов (см. рис. 13, *a* (1)); $\alpha = 0.354$, $\beta = 0.01$. Граничные условия – «свободные концы»

зуются синфазно. Характерный пример разрушения фронтов переключения при их распространении в системе показан на рис. 17. Два фронта распространяются параллельно с небольшим расстоянием друг от друга (рис. 17, *a*, *б*). После их отражения от границы два элемента остаются в противофазе (рис. 17, *в*). Однако при заданных параметрах системы режим чередующейся синхронизации неустойчив. Поэтому со временем разность фаз между элементами уменьшается (рис. 17, *г*: $\Delta\varphi \approx 1$), а затем наступает глобальная синфазная синхронизация (рис. 17, *д*, *е*). При значениях параметров, соответствующих неустойчивой чередующейся синхронизации, разрушение фронтов часто происходит при их отражении от свободных концов цепочки. В определенный момент времени из-за сильной связи противофазная синхронизация некоторых элементов около центра цепочки разрушается (рис. 18, *a*). В резуль-

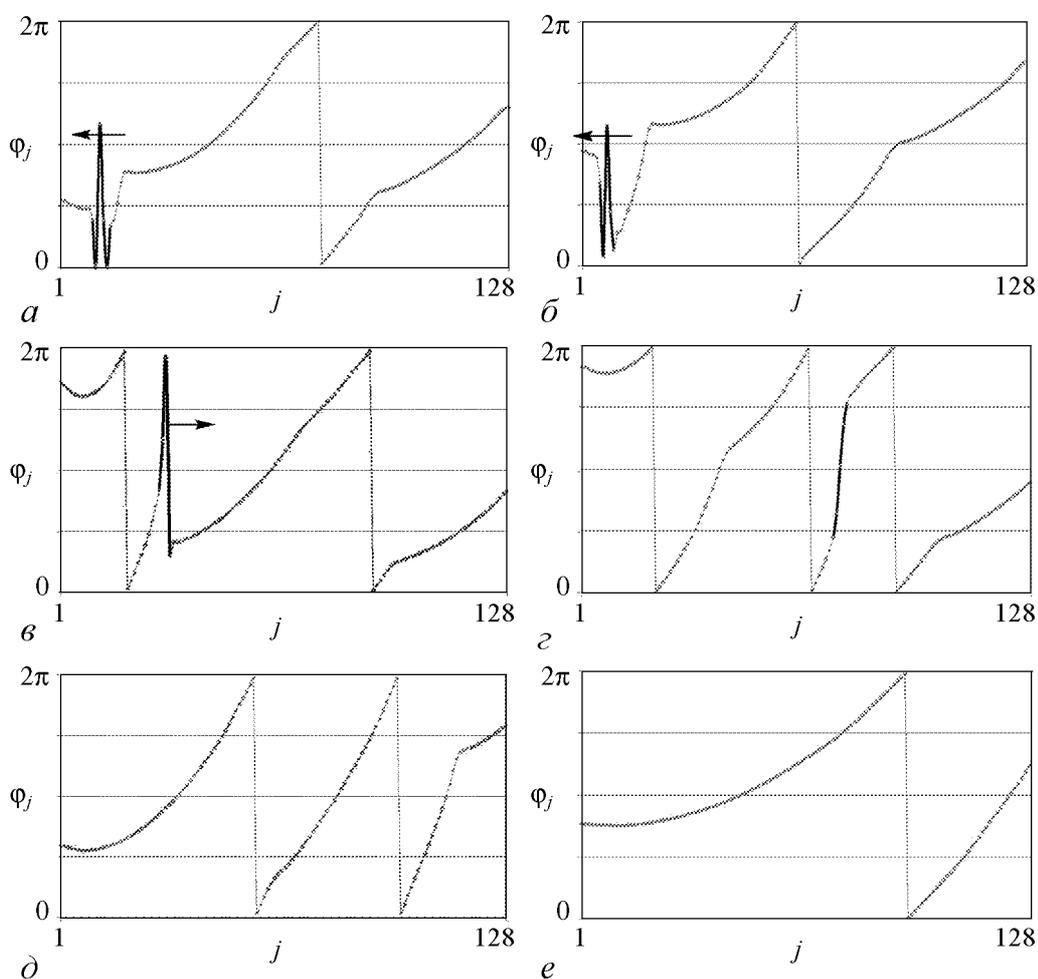


Рис. 17. Распределения фаз φ_j в различные моменты времени, иллюстрирующие механизм разрушения фронтов переключения при их распространении в системе при значениях параметров, соответствующих неустойчивости перемежающейся синхронизации (см. рис. 13, *a* (2)); $\alpha = 0.354$, $\beta = 0.01$. Граничные условия – «свободные концы»

тате рождаются новые фронты переключения и высокоградиентные фазовые волны (рис. 18, б). Эти фронты распространяются в цепочке (рис. 18, в) и доходят до границы (рис. 18, з). В результате отражения от границы разности фаз между элементами уменьшаются (рис. 18, д), и устанавливается синфазный синхронный режим (рис. 18, е). Помимо разрушения фронтов переключения в системе может реализоваться и возрождение фронтов при отражении от границы высокоградиентных фазовых волн. Этот эффект выглядит следующим образом: к левой границе приближаются высокоградиентные фазовые волны (рис. 19, а) (в среднем разность фаз элементов – порядка $\pi/4$, максимальная – порядка $\pi/2$). При отражении волн от границы (рис. 19, б, в, з) максимальная разность фаз увеличивается до π . Таким образом формируются фронты переключения (рис. 19, д), которые в дальнейшем распространяются по цепочке (рис. 19, е).

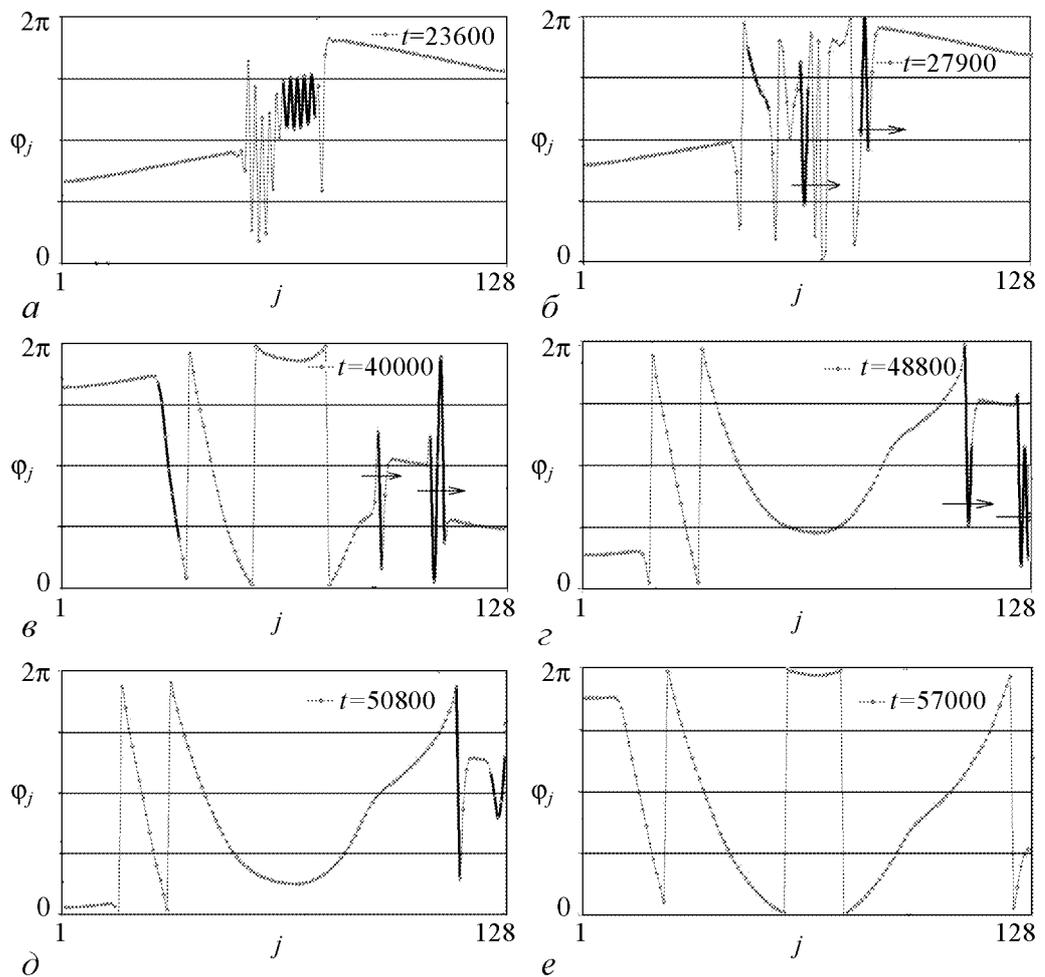


Рис. 18. Распределения фаз φ_j в различные моменты времени, иллюстрирующие механизм разрушения фронтов синхронизации при их отражении от границы (см. рис. 14, а (3)) ($\alpha = 0.035$, $\beta = 0.001$). Граничные условия – «свободные концы»

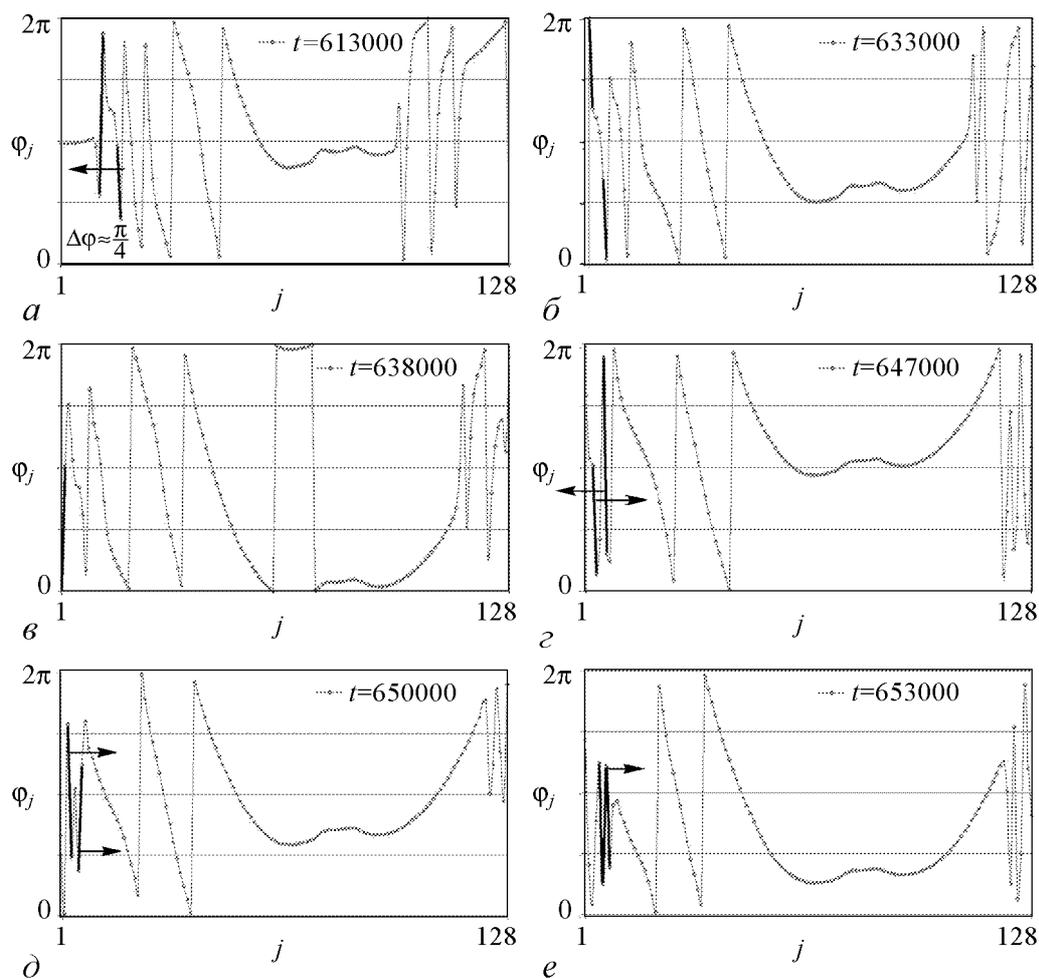


Рис. 19. Распределения фаз φ_j в различные моменты времени, иллюстрирующие механизм возрождения фронтов переключения синхронизации при отражении от границы высокоградиентных фазовых волн (см. рис. 15 (4)) ($\alpha = 0.01$, $\beta = 0.01$). Граничные условия – «свободные концы»

Заключение

На основании полученных результатов можно сделать вывод, что в цепочке из N консервативно и диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля при фиксированных значениях параметров может сосуществовать не менее 2^{N-1} различных режимов глобальной синхронизации. Аналитически показано сосуществование синфазного и противофазного режимов в ансамбле из двух связанных элементов. При малых связях в цепочках элементов наблюдается кластерная синхронизация. При увеличении связей количество кластеров уменьшается, и при сильной связи имеет место режим глобальной синхронизации. Это могут быть:

- а) синхронный режим синфазной синхронизации всех элементов;
- б) синхронный режим противофазной синхронизации всех элементов;
- в) синхронные режимы, при которых часть пар соседних элементов синхронизованы в фазе, а часть – в противофазе.

В случае режима глобальной синфазной синхронизации имеет место определенный сдвиг фаз между соседними элементами. Таким образом, в цепочке происходит распространение волновых фронтов. Аналогичные волновые фронты наблюдаются в случае режимов кластерной синхронизации: внутри каждого кластера скорости распространения и периоды волн различны и зависят от частоты синхронизации в кластере. Более сложные волновые структуры существуют при противофазной синхронизации: распространение сдвига фаз вдоль цепочки имеет «пилообразный» вид.

При определенных значениях параметров в цепочке существует режим чередования во времени синфазной и противофазной синхронизации, обусловленной наличием распространяющихся фронтов переключения режимов синхронизации. «Солитоноподобные» структуры и фронты переходов от синфазной к противофазной синхронизации обнаружены для достаточно широкой области параметров связи.

Нам представляется, что обнаруженная мультистабильность синхронных режимов и волновой характер их установления и исчезновения важны для понимания таких механизмов работы сетей, как хранение и распознавание изображений, выделение контуров изображений [8], визуальное восприятие [9], работа памяти [10], структурообразование, самоорганизация [11] и т.д. Рассмотренные эффекты могут быть полезны и для понимания сверхтекучести, сверхпроводимости, фазовых переходов, конденсации Бозе–Эйнштейна [6]. Полученные результаты могут также представлять интерес с точки зрения физики жидких кристаллов и описания нелинейных волн и потоков в теории поля, поскольку рассмотренная в работе классическая модель актуальна и для данных областей физики [6].

Приложение

Как известно, нелинейное уравнение

$$(\omega(x) - \Omega_s) + \sigma\varphi'' - \kappa(\varphi')^2 = 0 \quad (33)$$

с помощью замены

$$\varphi = -\frac{\sigma}{\kappa} \ln y \quad (34)$$

приводится к линейному

$$y'' - \frac{\kappa}{\sigma^2}(\omega(x) - \Omega_s) y = 0. \quad (35)$$

В случае линейного профиля индивидуальных частот (8) имеем

$$\omega(x) = \delta x, \quad \text{где} \quad \delta = \frac{\Delta}{\lambda}. \quad (36)$$

Уравнение (35) тогда принимает вид

$$y'' - \frac{\kappa\delta}{\sigma^2}(x - x_0)y = 0, \quad (37)$$

где точка x_0 определяется условием $\omega(x_0) = \Omega_s$, то есть

$$x_0 = \Omega_s/\delta. \quad (38)$$

Заменой независимой переменной

$$z = c^3(x - x_0), \quad c = \sqrt[3]{\frac{\kappa\delta}{\sigma^2}} \quad (39)$$

уравнение (37) сводится к линейному уравнению Эйри

$$y'' - zy = 0, \quad (40)$$

где символ «'» означает дифференцирование по новой независимой переменной z .

Для градиента фазы $\psi(x) = \varphi'(x)$ в новых переменных, в соответствии с (34) и (39), получаем выражение

$$\psi(x) = -\sqrt[3]{\frac{\sigma\delta}{\kappa^2}} \frac{1}{y(z)} \frac{dy(z)}{dz} \Big|_{z=c(x-x_0)} \quad (41)$$

или

$$\psi(x) = -\psi_0 p(z_0 + cx) \quad (42)$$

где

$$p(z) = \frac{y'(z)}{y(z)}, \quad \psi_0 = \sqrt[3]{\frac{\sigma\delta}{\kappa^2}}, \quad z_0 = -cx_0. \quad (43)$$

Вводя обозначение

$$\zeta = cL, \quad (44)$$

перепишем граничные условия (24) в виде

$$p(z_0) = p(z_0 + \zeta) = 0, \quad (45)$$

или

$$y'(z_0) = y'(z_0 + \zeta) = 0, \quad (46a)$$

$$y(z_0) \neq 0, \quad y(z_0 + \zeta) \neq 0. \quad (46b)$$

Как известно из теории, решение уравнения Эйри (40) представляется в виде линейной комбинации двух базисных функций, составляющих фундаментальную систему решений уравнения

$$y = as_1(z) + bs_2(z), \quad (47)$$

где функции $s_1(z)$ и $s_2(z)$ выражаются в виде всюду сходящихся степенных рядов

$$s_1(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n}}{3n(3n-1)(3n-3)(3n-4)\dots 3 \cdot 2}, \quad (48a)$$

$$s_2(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{(3n+1)3n(3n-2)(3n-3)\dots 4 \cdot 3}. \quad (48b)$$

Значения коэффициентов a и b в решении (47) должны быть выбраны так, чтобы решение удовлетворяло граничным условиям. Но, поскольку граничные условия (46) (как и само уравнение (40)) инвариантны относительно домножения решения на постоянный множитель, что соответствует в исходных переменных сдвигу фазы на постоянную величину, в решении (47) остается лишь один эффективный параметр, выбором которого необходимо удовлетворить граничным условиям. Значение одного из коэффициентов, таким образом, можно зафиксировать. Положим $a = 1$, тогда решение принимает вид

$$y = s_1(z) + bs_2(z). \quad (49)$$

В качестве второго параметра, определяемого из граничных условий, выступает величина z_0 , входящая в сами граничные условия и определяющая не известную заранее частоту синхронизации.

Уравнения (46a) тогда образуют систему с двумя неизвестными величинами z_0 и b :

$$s_1'(z_0) + bs_2'(z_0) = 0, \quad (50a)$$

$$s_1'(z_0 + \zeta) + bs_2'(z_0 + \zeta) = 0. \quad (50b)$$

Найдем решение этой системы в виде разложения по степеням параметра ζ , который будем полагать малым, после чего проверим выполнение условий (46b).

Выпишем разложения функций $s_1(z)$ и $s_2(z)$, а также их производных, с точностью, требуемой для дальнейших расчетов:

$$s_1(z) = 1 + \frac{z^3}{3 \cdot 2} + \frac{z^6}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{z^9}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} + O(z^{12}), \quad (51a)$$

$$s_2(z) = z + \frac{z^4}{4 \cdot 3} + \frac{z^7}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} + O(z^{10}), \quad (51b)$$

$$s_1'(z) = \frac{z^2}{2} + \frac{z^5}{5 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{z^8}{8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} + O(z^{11}), \quad (52a)$$

$$s_2'(z) = 1 + \frac{z^3}{3} + \frac{z^6}{6 \cdot 4 \cdot 3} + O(z^9). \quad (52b)$$

Подставив выражения (52) в уравнение (50a), получим

$$\frac{z_0^2}{2} + b + \frac{z_0^5}{30} + b\frac{z_0^3}{3} + \frac{z_0^8}{1440} + b\frac{z_0^6}{72} + O(z_0^{11}) + O(bz_0^9) = 0. \quad (53)$$

Это уравнение позволяет выразить b через z_0 с точностью до слагаемых порядка $O(z_0^{11})$. Подставим в (53) степенное разложение зависимости $b(z_0)$

$$b = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n, \quad (54)$$

в результате чего получим систему уравнений для коэффициентов разложения c_n . Вычислив первые три ненулевых коэффициента разложения, получим искомое выражение

$$b = -\frac{1}{2}z_0^2 + \frac{2}{15}z_0^5 - \frac{11}{288}z_0^8 + O(z_0^{11}). \quad (55)$$

Очевидно, аналогичное соотношение, в котором z_0 заменено на $(z_0 + \zeta)$, получается из уравнения (50б). Приравнявая эти два выражения для b , получаем уравнение

$$-\frac{1}{2} \left[(z_0 + \zeta)^2 - z_0^2 \right] + \frac{2}{15} \left[(z_0 + \zeta)^5 - z_0^5 \right] - \frac{11}{288} \left[(z_0 + \zeta)^8 - z_0^8 \right] + O \left[z_0^{11} \right] + O \left[(z_0 + \zeta)^{11} \right] = 0. \quad (56)$$

Раскрыв квадрат суммы в первых квадратных скобках, приведем это уравнение к виду

$$z_0 = -\frac{\zeta}{2} + \frac{2}{15} \frac{(z_0 + \zeta)^5 - z_0^5}{\zeta} - \frac{11}{288} \frac{(z_0 + \zeta)^8 - z_0^8}{\zeta} + O(\zeta^{10}) \quad (57)$$

(здесь учтено, что $z_0 = O(\zeta)$). Эту форму записи можно использовать для нахождения зависимости $z_0(\zeta)$ методом последовательных приближений. В качестве начального приближения полагаем

$$z_0 = -\frac{\zeta}{2} + O(\zeta^4). \quad (58)$$

Подставив это выражение в правую часть (57), найдем следующее приближение

$$z_0 = -\frac{\zeta}{2} + \frac{\zeta^4}{120} + O(\zeta^{10}). \quad (59)$$

Более высокой точности из уравнения (57) получить невозможно. Подставляя выражение (59) в (55), находим

$$b = -\frac{\zeta^2}{8} + \frac{301}{1843200} \zeta^8 + O(\zeta^{11}). \quad (60)$$

Выражения (59) и (60) представляют собой искомое решение системы (50а), (50б) с точностью до двух старших членов разложения по степеням ζ .

Выпишем решение (49) с точностью, определяемой точностью найденного выражения (60) для параметра b .

Поскольку решение ищется на интервале $z \in [z_0, z_0 + \zeta]$, а, согласно (59), $z_0 = O(\zeta)$, в дальнейших выкладках полагаем $z = O(\zeta)$. Подставляя в решение (49) значение параметра b (60), а также разложения функций $s_1(z)$ и $s_2(z)$ по степеням z (51), для решения уравнения (40) получим выражение

$$y(z) = 1 + \frac{z^3}{6} - \frac{\zeta^2 z}{8} + \frac{z^6}{180} - \frac{\zeta^2 z^4}{96} + \frac{z^9}{12960} - \frac{\zeta^2 z^7}{4032} + \frac{301 \zeta^8 z}{1843200} + O(\zeta^{12}). \quad (61)$$

Здесь слагаемые упорядочены по возрастанию суммы показателей степеней параметра ζ и независимой переменной z .

Заметим, что, согласно (61), на рассматриваемом отрезке $y(z) = 1 + O(\zeta^3)$, то есть при достаточно малых ζ найденное решение в ноль на концах отрезка не обращается. Таким образом, условие (46б) выполнено.

Получим теперь выражения для частоты синхронизации Ω_s , максимального значения градиента фазы φ'_{\max} и координаты этого максимума x_m .

Для частоты синхронизации, согласно (38), (43), (59), имеем

$$\begin{aligned}\Omega_s = \omega(x_0) = \delta x_0 &= -\frac{\delta}{c} z_0 = \frac{\delta}{c} \left(\frac{\zeta}{2} - \frac{\zeta^4}{120} + O(\zeta^{10}) \right) = \\ &= \frac{\delta}{c} \left(\frac{cL}{2} - \frac{(cL)^4}{120} + O((cL)^{10}) \right) = \Omega_m \left(1 - \frac{(cL)^3}{60} + O((cL)^9) \right),\end{aligned}\quad (62)$$

где $\Omega_m = \delta L/2$ – собственная частота в средней точке отрезка.

Для вычисления x_m и $\varphi'_{\max} = \psi_{\max}$ найдем сначала точку экстремума функции $p(z)$ (43) в зависимости от параметра b . Производная $p'(z)$ записывается следующим образом:

$$p'(z) = \frac{y''(z)y(z) - (y'(z))^2}{(y(z))^2}.\quad (63)$$

Приравняем к нулю числитель этой дроби, подставив в него решение (49), сохраняя лишь те порядки малости, которые необходимы для дальнейших выкладок

$$(z + O(z^4) + bO(z^2))(1 + O(z^3) + bO(z)) - (b + O(z^2) + bO(z^3))^2 = 0.\quad (64)$$

Решение этого уравнения есть искомая точка экстремума z_m

$$z_m = b^2 + O(z_m^4) + bO(z_m^2).\quad (65)$$

Учитывая, что $z_m = O(b^2)$, окончательно получаем

$$z_m = b^2 + O(b^5).\quad (66)$$

Найдем значение p_m функции $p(z)$ в точке экстремума. Запишем выражение для $p(z)$ с необходимой точностью

$$p(z) = \frac{z^2/2 + b + O(z^5) + bO(z^3)}{1 + bz + O(z^3) + bO(z^4)}.\quad (67)$$

Учитывая, что $z_m = O(b^2)$, для p_m тогда имеем:

$$\begin{aligned}p_m = p(z_m) &= \frac{z_m^2/2 + b + O(b^7)}{1 + bz_m + O(b^6)} = \\ &= (z_m^2/2 + b + O(b^7))(1 - bz_m + O(b^6)) = b - b^2 z_m + z_m^2/2 + O(b^7).\end{aligned}\quad (68)$$

Подставляя в это выражение значение z_m (66), находим

$$p_m = b - b^4/2 + O(b^7).\quad (69)$$

Подставляя в (66) и (69) найденное из граничных условий значение параметра b (60), получим выражение z_m и p_m через ζ

$$z_m = \frac{\zeta^4}{64} + O(\zeta^{10}),\quad (70)$$

$$p_m = -\frac{\zeta^2}{8} + \frac{19\zeta^8}{460800} + O(\zeta^{11}). \quad (71)$$

В соответствии с (39), (42)–(44), находим максимальные значения градиента фазы в уравнении (33)

$$\varphi'_{\max} = -\psi_0 p_m = \frac{\delta L^2}{8\sigma} \left(1 - \frac{19(cL)^6}{57600} + O((cL)^9) \right) \quad (72)$$

и координату точки, в которой достигается это значение,

$$\begin{aligned} x_m &= \frac{1}{c}(z_m - z_0) = \frac{1}{c} \left(\frac{\zeta}{2} + \frac{7}{960}\zeta^4 + O(\zeta^{10}) \right) = \\ &= \frac{\zeta}{2c} \left(1 + \frac{7}{480}\zeta^3 + O(\zeta^9) \right) = \frac{L}{2} \left(1 + \frac{7}{480}(cL)^3 + O((cL)^9) \right). \quad (73) \end{aligned}$$

Данная работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 06-02-16596, 07-02-01404, 08-02-92004 и 08-02-97049. Работа О. Канакова поддержана также Фондом некоммерческих программ «Династия».

Библиографический список

1. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., and Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Science. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
2. *Mosekilde E., Maistrenko Yu., and Postnov D.* Chaotic Synchronization. Applications to Living Systems. World Scientific, Singapore, 2002.
3. *Osipov G.V., Kurths J., and Zhou Ch.* Synchronization in Oscillatory Networks. Springer, Berlin, 2007.
4. *Afraimovich V.S., Nekorkin V.I., Osipov G.V., and Shalfeev V.D.* Stability, structures and chaos in nonlinear synchronization networks. Singapore, World Scientific, 1994.
5. *Osipov G.V. and Sushchik M.M.* // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58. P. 7198.
6. *Aranson I.S. and Kramer L.* // Rev. Mod. Phys. 2002. Vol. 74. P. 99.
7. *Ivanchenko M.V., Osipov G.V., Shalfeev V.D. and Kurths J.* Physica D. 2004. Vol. 189. P. 8.
8. *Macleod K., Bäcker A., and Laurent G.* Nature. 1998. Vol. 395. P. 693.
9. Ambiguity in Mind and Nature. New York / Eds P. Kruse, M. Stadler. Springer-Verlag, 1995.
10. *Mensour B. and Longtin A.* // Phys. Lett. A. 1995. Vol. 205. P. 18.
11. *Beuter A., Milton J.G., Labrie C., and Glass L.* Proc. IEEE Systems Man Cybern. 1989. P. 899.

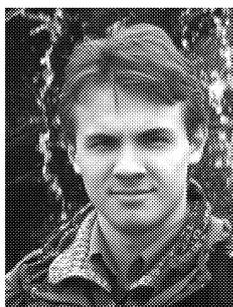
Поступила в редакцию 15.08.2008
После доработки 1.11.2008

SYNCHRONIZATION WAVES IN WEAK-NONLINEAR OSCILLATORY ENSEMBLES

A.K. Kryukov, O.I. Kanakov, G.V. Osipov

Synchronization is studied in ensembles of locally dissipative coupled and conservative coupled weak-nonlinear van der Pol oscillators. In the chain of N elements not less than 2^{N-1} different regimes of global synchronization are stable at the same values of parameters. Cluster synchronization is considered as well. Existing of multiple fronts of synchronization switching is shown. These fronts go one through another without of changing or reflections from free boundaries. Effect of alternated inphase – antiphase synchronization is observed, which was found before in numerical simulations.

Keywords: Synchronization, multistability, numerical methods, modeling, complex Ginzburg–Landau equation, synchronization waves



Крюков Алексей Константинович – родился в 1984 году, окончил Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (2007). Аспирант кафедры теории управления и динамики машин факультета ВМК ННГУ. Область научных интересов: структуры синхронизации в нелинейных системах, моделирование динамики биологических сред. Стипендиат некоммерческого фонда «Династия» (2006). Имеет 12 публикаций (в соавторстве) в том числе 2 журнальных. Лауреат стипендии имени академика Г.А. Разуваева (2008).

E-mail: alkryukov@gmail.com

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23



Канатов Олег Игоревич – родился в 1981 году, окончил Нижегородский государственный университет (2004). Старший преподаватель кафедры теории колебаний радиофизического факультета ННГУ, кандидат физико-математических наук. Область научных интересов: структуры и локализация энергии в нелинейных решеточных системах, моделирование динамики биологических сред. Награжден именными стипендиями некоммерческого фонда «Династия» и Президента Российской Федерации для аспирантов (2006). Имеет 10 журнальных публикаций и 2 учебно-методических пособия (в соавторстве).

E-mail: okanakov@rf.unn.ru

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23



Осипов Григорий Владимирович – родился в Горьком (1960), окончил Горьковский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (1982). В 1986–1988 годах учился в аспирантуре Научного совета по комплексной проблеме «Кибернетика» (НСК) АН СССР. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в НСК (1988) по математическому моделированию и доктора физико-математических наук в ННГУ (2004) по радиофизике. С 1988 года работает в ННГУ, с 2007 года в качестве заведующего кафедрой «Теории управления и динамики машин» факультета ВМК. Один из авторов монографий «Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации» и «Synchronization in oscillatory networks». Опубликовал 120 научных статей (в том числе 2 обзора) по теории колебаний и волн и математическому моделированию.

E-mail: osipov@vmk.unn.ru

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23



ЭФФЕКТЫ ПОДАВЛЕНИЯ ХАОСА И СУЖЕНИЯ СПЕКТРА В СТАБИЛИЗИРУЕМОМ ШУМОМ НЕУСТОЙЧИВОМ НЕЛИНЕЙНОМ ОСЦИЛЛЯТОРЕ

В.С. Маляев, Т.Е. Вадивасова, О.В. Тишина, В.С. Анищенко

В статье исследуется неустойчивый нелинейный осциллятор, в котором рост амплитуды колебаний ограничивается с помощью шумового воздействия. Рассчитываются характеристики стабилизированных шумом колебаний. Показано, что в системе при изменении интенсивности шума можно наблюдать такие эффекты, как подавление экспоненциальной неустойчивости траекторий и сужение спектра колебаний.

Ключевые слова: Шум в нелинейных системах, стабилизация колебаний шумом, случайный аттрактор, когерентный резонанс, стохастическая бифуркация

Введение

В последние годы заметно вырос интерес к исследованию влияния шума на нелинейные системы. Этот интерес связан как с неизбежным присутствием источников шума в любой реальной системе, так и с многообразием явлений, связанных с воздействием случайных сил. В классическом случае квазигармонического автогенератора шум приводит к флуктуациям амплитуды и фазы, к спаду автокорреляционной функции и конечной ширине спектральной линии автоколебаний [1, 2]. В системах с мультистабильностью, когда в фазовом пространстве сосуществуют несколько аттракторов, действие даже очень слабого гауссова шума приводит к объединению аттракторов и их бассейнов притяжения. При этом фазовая траектория с определенной средней частотой переключается между областями объединившихся аттракторов. Так возникают стохастические колебания в бистабильном осцилляторе под действием шума [3, 4]. По этой же причине добавление слабого гауссова шума приближает свойства систем с квазигиперболическими хаотическими аттракторами к свойствам систем с грубыми гиперболическими аттракторами [5].

Аттракторы в системах с гауссовым шумом не принадлежат ограниченной области фазового пространства, поскольку шум в принципе может «вытолкнуть фазовую» траекторию сколь угодно далеко от того аттрактора, которому она принадлежала в системе без шума. Существование аттрактора в зашумленной диссипативной системе означает существование стационарной эргодической вероятностной меры, не зависящей от начального распределения [6]. Исследование бифуркаций в системах с шумом представляет собой сравнительно новое и еще мало разработанное

направление в науке на стыке нелинейной динамики и теории случайных процессов. В [6] такие бифуркации названы стохастическими и разделены на два типа: феноменологические (Р-бифуркации) и динамические (D-бифуркации). Феноменологическая бифуркация проявляется в качественной перестройке вероятностной меры и экспериментально наблюдаемом изменении статистических характеристик, в то время, как динамическая бифуркация связана с изменением характера устойчивости траекторий на аттракторе. Стохастическая бифуркация может одновременно принадлежать к этим двум типам, а может являться бифуркацией только одного типа. Стохастические бифуркации могут вызываться непосредственно действием шума и наблюдаться при изменении интенсивности или других статистических характеристик шума, которые таким образом играют роль бифуркационных параметров динамической системы [7, 8].

Шум в нелинейных системах не всегда приводит к росту «беспорядка». Известен ряд явлений, которые можно рассматривать как переход системы под действием шума к более упорядоченному поведению. К таким явлениям можно отнести стохастический резонанс [9–11], когерентный резонанс [12, 13], подавление хаотической динамики [14, 15] и синхронизация ансамбля автогенераторов общим шумом [16]. К этому же ряду явлений можно добавить и недавно обнаруженный эффект стабилизации внешним шумом неустойчивых (растущих по амплитуде) колебаний нелинейного осциллятора [17].

В данной работе рассматривается поведение стабилизируемого шумом нелинейного осциллятора, исследованного в [17]. Нас интересуют, прежде всего, эффекты, не обнаруженные в [17]. Это – индуцированная шумом динамическая бифуркация, приводящая к локальной устойчивости траекторий на аттракторе, а также эффект сужения спектра стохастических колебаний с ростом интенсивности шума. Оба этих эффекта проявляются при шуме, более сильном, чем тот, который рассматривался в [17].

1. Исследуемая система. Эффект стабилизации шумом

Уравнения системы имеют вид [17]

$$\begin{cases} \dot{x} = (y - 1)x + \sqrt{2D}n(t), \\ \dot{y} = \varepsilon y^{\nu} - x^2 y, \quad y > 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $n(t)$ – нормированный источник гауссова белого шума; D – параметр, задающий интенсивность шума. Они описывают некоторые случаи взрывной неустойчивости плазмы в установке токамак [18, 19]. При $1 < \nu < 2$ система (1) имеет два неустойчивых фокуса с координатами $(x; y) = (\pm\sqrt{\varepsilon}; 1)$ и седло в нуле координат. Устойчивые сепаратрисы седла совпадают с осью $y = 0$, а неустойчивые – с осью $x = 0$. Параметры системы выбирались следующими: $\nu = 1.5$, $\varepsilon = 0.1$.

В отсутствие шума в системе (1) нет аттрактора. Фазовая траектория с начальным условием $y > 0$ раскручивается вокруг одного из фокусов, приближаясь к осям координат (рис. 1, *a*). При $t \rightarrow \infty$ амплитуда и период колебаний неограниченно растут. Однако в численных экспериментах этого наблюдать не удастся. Значения переменных x и y в определенные моменты времени становятся все ближе к нулю и в конце-концов достигают «машинного нуля», после чего колебания прекращаются. Систему (1) при $D = 0$ нельзя считать диссипативной. Дивергенция потока является

переменной и в разных точках фазовой плоскости имеет разный знак

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = y - 1 + \varepsilon \nu y^{\nu-1} - x^2.$$

Область положительных значений дивергенции расположена вдоль оси ординат. При вращении фазовой траектории вокруг фокуса она попадает то в область с положительной дивергенцией, то в область с отрицательной дивергенцией. Усредненная по времени вдоль конкретной траектории дивергенция $\langle \operatorname{div} \mathbf{f} \rangle$ не устанавливается на определенном уровне, а колеблется, меняя знак. В численных экспериментах удается получить зависимость $\langle \operatorname{div} \mathbf{f} \rangle$ от времени только на небольших временах (из за достижения переменными «машинного нуля»). Пример такой зависимости приведен на рис. 1, б.

Даже очень слабый шум, добавленный в первое уравнение системы (1), не дает траектории приближаться к неустойчивой сепаратрисе седла, что препятствует росту амплитуды и периода колебаний (рис. 2, а). Средняя дивергенция вдоль любой траектории при $t \rightarrow \infty$ стремится к одному и тому же отрицательному уровню (рис. 2, б).

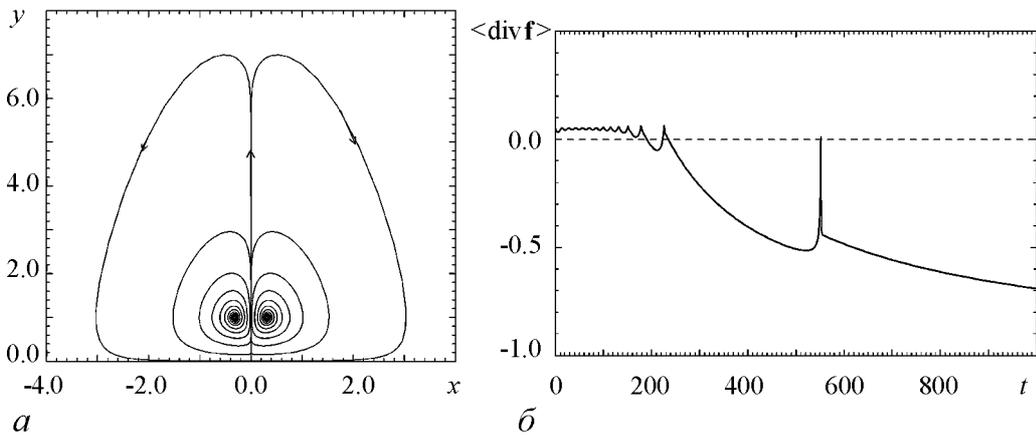


Рис. 1. Фазовый портрет системы (1) без шума (а) и зависимость средней вдоль траектории дивергенции от времени (б)

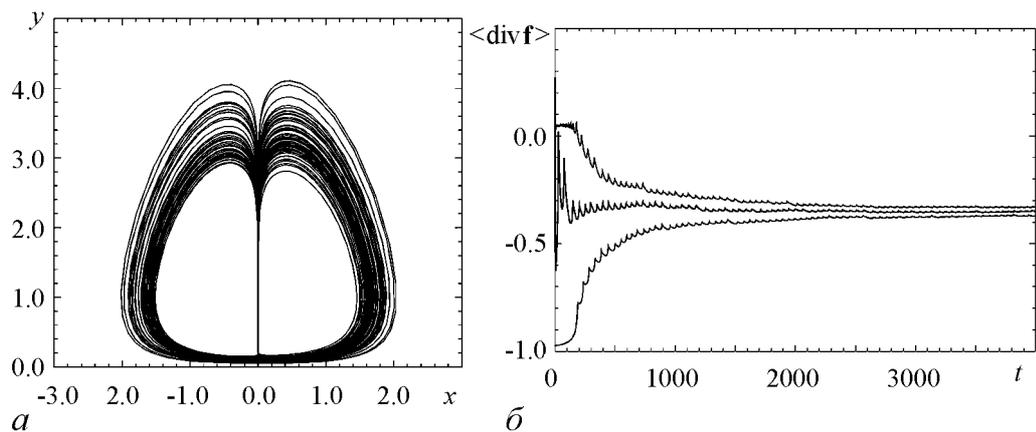


Рис. 2. Фазовый портрет системы (1) при шуме с интенсивностью $D = 10^{-8}$ (а) и зависимости средней дивергенции от времени, вычисленные для трех различных траекторий (б)

Отрицательная средняя дивергенция, также как и установление стационарного вероятностного распределения [17], свидетельствует о существовании в системе аттрактора. Так как система находится под действием шума, то траектории на аттракторе ведут себя нерегулярно. По внешнему виду фазовый портрет (см. рис. 2, а) похож на хаотические аттракторы, существующие в детерминированных системах с размерностью фазового пространства $N \geq 3$. Для того, чтобы установить, является ли аттрактор хаотическим, необходимо вычислить старший показатель Ляпунова. Согласно результатам, приведенным в [17], старший показатель – положителен и в стабилизированной шумом системе существует хаотический аттрактор.

2. Индуцированная шумом динамическая бифуркация в системе (1)

Результаты расчета показателя Ляпунова в [17] были получены для сравнительно слабого шума: $D \leq 10^{-4}$. Полученные нами результаты показывают, что при дальнейшем увеличении интенсивности шума старший показатель Ляпунова становится отрицательным. График зависимости λ_1 от D представлен на рис. 3.

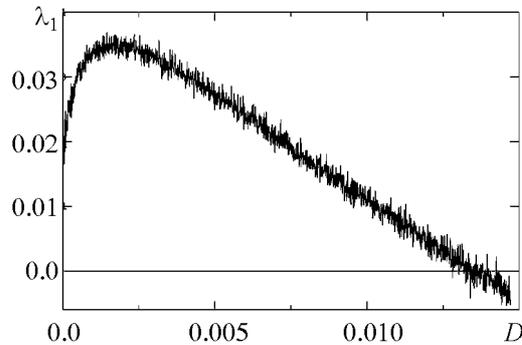


Рис. 3. Зависимость старшего показателя Ляпунова λ_1 от интенсивности шума D

Таким образом, в точке $D_0 \approx 0.014$ имеет место индуцированная шумом D-бифуркация, состоящая в исчезновении экспоненциальной неустойчивости (то есть режима динамического хаоса) при увеличении интенсивности шума. Подобная бифуркация при изменении интенсивности шума наблюдается в осцилляторе Дуффинга с гауссовым белым шумом при условии слабой диссипации [20]. Однако там с ростом шума происходит возникновение, а не подавление хаоса. В определенном смысле рассматриваемая система (1) с двумя потенциальными «горками» противоположна осциллятору Дуффинга, в котором шум переключает фазовую траекторию между двумя потенциальными «ямками». Однако характер вызванной шумом бифуркации в обоих случаях одинаков – это динамическая бифуркация не приводит к заметным изменениям наблюдаемых характеристик колебаний. Разумеется, с ростом интенсивности шума статистические характеристики колебаний изменяются, однако это происходит постепенно. Непосредственно до точки бифуркации и после нее не обнаруживается различий в характере вероятностного распределения и значениях моментов первого и второго порядка.

Обнаруженная стохастическая D-бифуркация приводит к качественному изменению случайного аттрактора. Используемое здесь понятие случайного аттрактора не надо путать с аттрактором, существующем в пространстве динамических переменных системы, находящейся под действием шума. Под случайным аттрактором понимается множество точек, к которому стремятся траектории множества идентичных систем с разными начальными состояниями, но находящихся под одним и тем же случайным воздействием [6,20] Это множество точек будет постоянно изменяться во времени, но спустя некоторый переходный период топология множества устано-

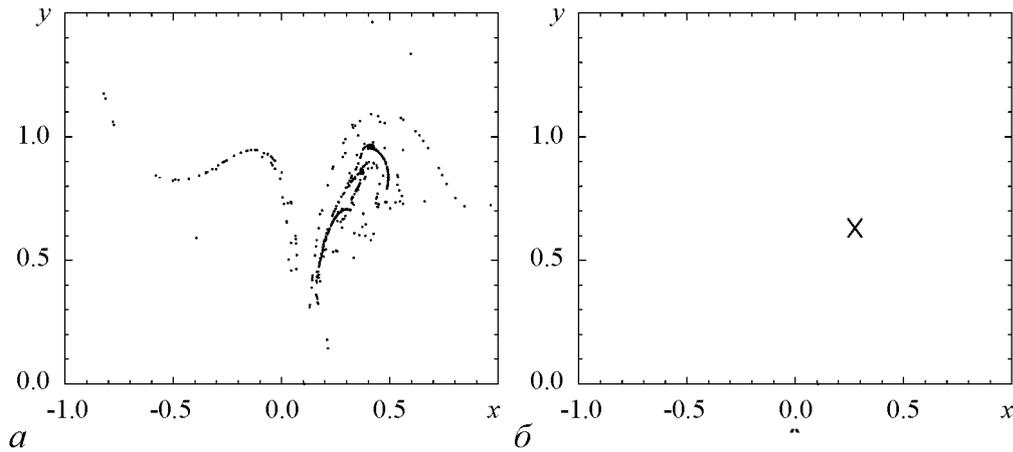


Рис. 4. Вид случайного аттрактора: *a* – до бифуркации подавления хаоса ($D = 0.01$); *б* – после бифуркации ($D = 0.015$). В случае (*б*) точки, принадлежащие случайному аттрактору, отмечены крестиком

вится неизменной. В режиме хаоса случайный аттрактор имеет сложную структуру, похожую на фрактальные множества, возникающие в сечении хаотических аттракторов детерминированных систем (рис. 4, *a*). После бифуркации траектории системы (1) становятся устойчивыми, и случайный аттрактор вырождается в точку (рис. 4, *б*). С физической точки зрения, данное изменение топологии случайного аттрактора означает, что после бифуркации ансамбль идентичных стохастических осцилляторов (1) вне зависимости от начальных условий синхронизуется общим шумом с интенсивностью $D > D_0$.

3. Спектрально-корреляционный анализ ограниченных шумом колебаний

В данной работе был проведен анализ эволюции спектров мощности и корреляционных функций стабилизированных шумом колебаний при изменении интенсивности шума D . Для вычисления спектра применялось быстрое преобразование Фурье с последующим усреднением на ансамбле окон. Значения спектральной плотности мощности нормировались на максимальное значение и представлялись в логарифмических единицах. Корреляционная функция рассчитывалась в предположении стационарности и эргодичности колебаний по формуле

$$\psi_x(\tau) = \langle x(t)x(t + \tau) \rangle - \bar{x}^2, \quad (2)$$

где скобками $\langle \dots \rangle$ обозначено усреднение по времени, а \bar{x} есть стационарное среднее значение. Затем корреляционная функция нормировалась на свое максимальное значение при $\tau = 0$

$$\Psi_x(\tau) = \frac{\psi_x(\tau)}{\psi_x(0)}.$$

Спектры имеют максимум на нулевой частоте, что соответствует процессу случайных переключений между двумя половинами фазовой плоскости, разделенными неустойчивой сепаратрисой седла. С ростом шума средняя частота переключений возрастает и спектральный пьедестал поднимается. Форма спектра колебаний $x(t)$

хотя и близка к лоренциану, но с заметными отклонениями. Ширина спектральной линии определяется, по-видимому, не только средней частотой переключений, но и особенностями поведения траекторий в каждой из полуплоскостей. Численные эксперименты показали, что характер спектра мощности ограниченных шумом колебаний не претерпевает качественных изменений при изменении знака старшего показателя Ляпунова в точке D_0 . Однако с изменением интенсивности шума спектр постепенно меняется, причем, если спектр колебаний $y(t)$ с ростом шума становится все более широким, то ширина спектра колебаний $x(t)$ на уровне половинной мощности зависит от интенсивности D немонотонным образом. Фрагменты спектров колебаний $x(t)$ для различных значений интенсивности шума, иллюстрирующие эффект сужения спектральной линии с ростом шума, и зависимость полуширины линии $\Delta\omega$ от интенсивности D представлены на рис. 5, *a* и рис. 5, *б*, соответственно.

Сужение основной спектральной линии можно связать с еще одним эффектом, проявляющимся в спектре колебаний $x(t)$. Он заключается в том, что при увеличении D в спектре появляется второй (локальный) максимум, соответствующий вращению в окрестности фокусов. Это происходит благодаря тому, что шум большей интенсивности выбрасывает траекторию дальше из окрестности сепаратрисы (линии $x = 0$) и она, попадая ближе к фокусу, чаще совершает вращательные движения.

Плотность вероятности $p(x)$ показывает перераспределение вероятностной меры из окрестности нуля в окрестность фокусов. Фрагменты графиков функций $p(x)$ для $D = 10^{-4}$ и $D = 10^{-3}$ приведены на рис. 6.

Перераспределение плотности вероятности между окрестностью фокусов и окрестностью сепаратрисы сопровождается заметным сужением основной спектральной линии. Таким образом, можно говорить об эффекте некоторой регуляризации колебаний под действием шума, подобном эффекту когерентного резонанса. При дальнейшем росте интенсивности шума второй спектральный максимум снова исчезает, а основная линия становится несколько шире (как и в случае когерентного резонанса).

Соответствующее поведение демонстрируют корреляционные функции колебаний $x(t)$ (рис. 7). Видно, что при $D = 0.5 \cdot 10^{-3}$ корреляционная функция имеет на хвосте осцилляции, которые отражают вращение изображающей точки вокруг фокусов.

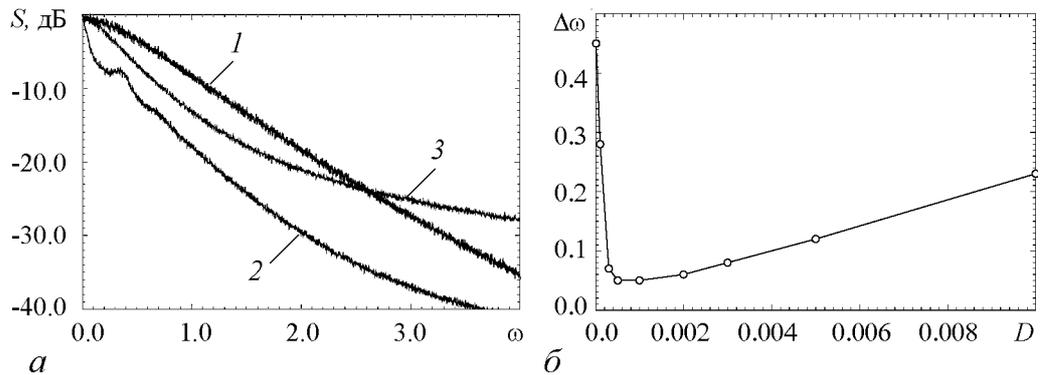


Рис. 5. *a* – фрагменты спектров мощности колебаний $x(t)$ при различных значениях интенсивности шума D : 1 – 10^{-5} ; 2 – $0.5 \cdot 10^{-3}$; 3 – 10^{-2} ; *б* – зависимость полуширины спектра от интенсивности шума

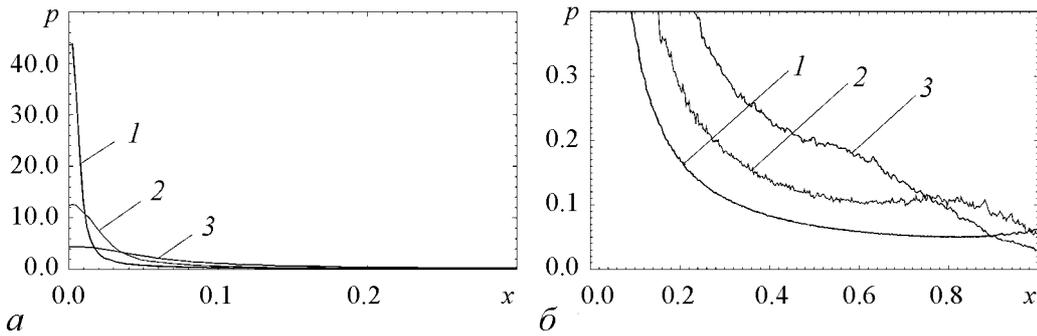


Рис. 6. Фрагменты распределения $p(x)$ для различных значений интенсивности шума D : 1 – 10^{-5} ; 2 – 10^{-4} ; 3 – $0.5 \cdot 10^{-3}$

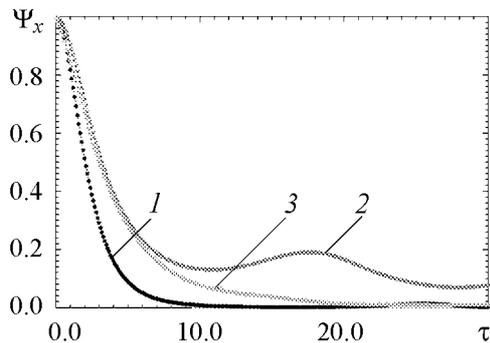


Рис. 7. Корреляционные функции $\Psi_x(\tau)$ при различных значениях интенсивности шума D : 1 – 10^{-5} ; 2 – $0.5 \cdot 10^{-3}$; 3 – 10^{-2}

Выводы

Проведенные численные эксперименты позволили изучить явление стабилизации системы (1) внешним шумовым сигналом, в результате чего удалось обнаружить следующие новые эффекты.

1. Обнаружена стохастическая бифуркация, приводящая к подавлению экспоненциальной неустойчивости колебаний с увеличением интенсивности шума. Таким образом, шум не только стабилизирует неустойчивый осциллятор, препятствуя росту амплитуды колебаний, но при большой интенсивности приводит к подавлению хаоса.

2. Обнаружен эффект, подобный когерентному резонансу: ширина спектра колебаний $x(t)$ зависит от интенсивности шума немонотонно. При некоторой интенсивности шума наблюдается минимальная ширина спектральной линии и наиболее медленный спад корреляционной функции.

Работа выполнена в рамках АВЦП МО и науки РФ «Развитие научного потенциала высшей школы».

Библиографический список

1. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.
2. Малахов А.Н. Флуктуации в автоколебательных системах. М.: Наука, 1968.
3. Kramers H.A. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions // Physica. 1940. Vol. 7. P. 284.

4. Ван Кампен Н.Г. Стохастические процессы в физике и химии. М.: Высшая школа, 1990.
5. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Окрокверцхов Г.А., Стрелкова Г.И. Статистические свойства динамического хаоса // Успехи физ. наук. 2005. Т. 175, № 2. С. 163.
6. Arnold L. Random dynamical systems. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1998.
7. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987.
8. Graham R. Macroscopic potentials, bifurcations and noise in dissipative systems // Noise in Nonlinear Dynamical Systems. Vol. 1: Theory of continuous Fokker-Planck systems / Ed. by. F. Moss and P.V.E. McClintock. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
9. Benzi R., Sutera A., Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance // J. Phys. A: Math. Gen. 1981. Vol. 14. P. L453.
10. Gammaitoni L., Marchesoni F., Menichella-Saetta E., Santucci S. Stochastic resonance in bistable systems // Phys. Rev. Lett. 1989. Vol. 62. P. 349.
11. Анищенко В.С., Нейман А.Б., Мосс Ф., Шиманский-Гаер Л. Стохастический резонанс: индуцированный шумом порядок // УФН. 1999. Т. 42, № 1. С. 7.
12. Pikovsky A.S., Kurths Yu. Coherence Resonance in a noise-driven excitable system // Phys.Rev.Lett. 1997. Vol. 78, P. 775.
13. Linder B., Schimansky-Geier L. Analytical approach to the stochastic FitzHugh-Nagumo system and coherence resonance // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 60, № 6. P. 7270.
14. Sánchez E., Matías M.A., Pérez-Muñuzuri V. Analysis of synchronization of chaotic systems by noise: An experimental study // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 56, № 4. P. 40.
15. Короновский А.А. и др. Обобщенная синхронизация и синхронизация, индуцированная шумом, единый тип поведения связанных хаотических систем // Док. РАН. 2006. Т. 407, № 6. С. 761.
16. Goldobin D.S., Pikovsky A. Synchronization and desynchronization of self-sustained oscillators by common noise// Phys. Rev. E. 2005. Vol. 71. P. 045201 (4).
17. Finn J.M., Tracy E.R., Cooke W.E., Richardson A.S. Noise stabilised random attractor // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 73. Page/Article 026220.
18. Zohm H. Edge-localized modes (ELMs)// Plasma Phys. Contr. Fusion. 1996. Vol. 38. P. 105.
19. Connor J.W. Are view of models for ELMs // Plasma Phys. Contr. Fusion. 1998. Vol. 40. P. 191.
20. Arnold L., Imkeller P. Stochastic bifurcation of the noisy Duffing oscillator. Report, Institut für Dynamische Systeme. Universität Bremen, 2000.

Поступила в редакцию 19.06.2008

CHAOS SUPPRESSION AND SPECTRUM NARROWING IN A NOISE-STABILIZED UNSTABLE NONLINEAR OSCILLATOR

V.S. Malyaev, T.E. Vadivasova, O.V. Tishina, V.S. Anishchenko

In the present paper we study an unstable nonlinear oscillator in which the growth of amplitude of oscillations is limited by noise influence. We calculate the characteristics of noise-stabilized fluctuations. It is shown when the noise intensity changes, the system

can demonstrate different effects such as the suppression of exponential instability of trajectories and the narrowing of the spectrum of fluctuations.

Keywords: Noise in nonlinear systems, noise stabilization of oscillations, random attractor, coherent resonance, stochastic bifurcation.



Маляев Владимир Сергеевич – родился в ноябре 1980 года в Саратове. Окончил Саратовский государственный университет по специальности радиофизика (2002). С 2003 года является аспирантом кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. Основные научные интересы – стохастические процессы. Автор нескольких научных публикаций.

E-mail: val@chaos.ssu.runnet.ru

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
410012 Саратов, Астраханская, 83



Вадивасова Татьяна Евгеньевна – родилась в 1958 году. Окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981), доктор физико-математических наук. В настоящее время – профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических осцилляторов, явление фазовой мультистабильности взаимодействующих хаотических систем, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, статистические характеристики динамического хаоса, роль флуктуаций в нелинейных системах и др. Автор более 60 публикаций в отечественной и зарубежной печати, включая 3 монографии.

E-mail: tanya@chaos.ssu.runnet.ru

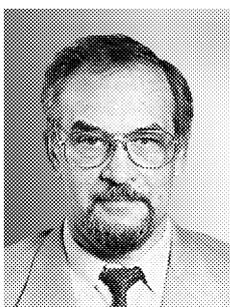
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
410012 Саратов, Астраханская, 83



Тишина Ольга Владимировна – студентка пятого курса физического факультета СГУ кафедры радиофизики и нелинейной динамики. Область научных интересов: нелинейная динамика, статистическая радиофизика, влияние шума на процессы в нелинейных системах.

E-mail: olgatshn@rambler.ru

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
410012 Саратов, Астраханская, 83



Анищенко Вадим Семенович – родился в 1943 году. Окончил физический факультет СГУ (1966). Защитил диссертацию на звание кандидата физико-математических наук (1970) и доктора физико-математических наук (1986). С 1988 года – заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. С 1979 и по настоящее время работает в области исследования нелинейной динамики и стохастических процессов в нелинейных системах. Является автором более 300 научных работ, среди которых 7 монографий на русском и английском языках и 4 учебника. Неоднократно читал лекции в ведущих вузах Германии в качестве приглашенного профессора. Член-корреспондент РАЕН, заслуженный деятель науки РФ (1995), Соросовский профессор, лауреат премии Фонда Александра Гумбольдта (1999).

E-mail: wadim@chaos.ssu.runnet.ru

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
410012 Саратов, Астраханская, 83



ДИФфуЗИЯ АРНОЛЬДА В ПРОСТОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ: АНАЛИТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

А.И. Малышев, Л.А. Чижова

Настоящая работа посвящена изучению диффузии Арнольда в системе с 2.5 степенями свободы вдоль резонанса с внешним переменным полем. Сделанная аналитическая оценка коэффициента диффузии хорошо согласуется с результатами численного моделирования. Показано, что на проявление и скорость диффузии Арнольда влияет как амплитуда внешнего поля, так и параметр, отвечающий за слабое взаимодействие двух пространственных степеней свободы.

Ключевые слова: Нелинейный резонанс, диффузия Арнольда.

Введение

Одним из основных понятий при изучении нелинейных систем является понятие нелинейного резонанса, который играет важную роль при возникновении стохастичности в гамильтоновых системах. Сложность динамики системы при взаимодействии нелинейных резонансов может привести к различным эффектам. Например, при числе степеней свободы, большем двух, стохастические слои различных резонансов в фазовом пространстве пересекаются и формируют единую связанную сеть, при движении по которой становится возможным переход траектории с одного резонанса на другой, даже если возмущение мало. Это явление получило название диффузии Арнольда [1].

К настоящему времени диффузия Арнольда достаточно подробно изучена на примере ряда систем. В этой связи можно упомянуть задачу о движении материальной точки между двумя гофрированными плоскостями [2], задачу о двух слабозадействующих осцилляторах, один из которых помещен во внешнее периодическое во времени поле [3]. В работе [4] авторы смогли визуализировать «паутину» Арнольда, образованную многими пересекающимися стохастическими слоями резонансов, для атома водорода, помещенного в скрещенные поля. Существуют также и работы, посвященные квантово-механическому описанию диффузии Арнольда [5, 6].

Настоящая работа посвящена изучению диффузии Арнольда на примере системы, состоящей из двух слабозадействующих осцилляторов, один из которых помещен во внешнее переменное поле. Однако, в отличие от работы [3], где изучалась диффузия вдоль резонанса связи двух пространственных степеней свободы, в данном случае рассчитывается диффузия Арнольда вдоль резонанса с внешним полем.

1. Описание модели. Геометрия резонансов

Для решения поставленной задачи о диффузии Арнольда в качестве модельной выберем следующую систему: пусть материальная точка совершает движение в двумерной бесконечно глубокой потенциальной яме размерами $a \times a$

$$U(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } |x| < a/2 \text{ и } |y| < a/2, \\ \infty, & \text{если } |x| \geq a/2 \text{ и } |y| \geq a/2, \end{cases} \quad (1)$$

помещенной во внешнее переменное поле $U_{\text{ext}}(x, t) = -f_0 x \cos \Omega t$. За слабое взаимодействие двух степеней свободы будет отвечать потенциал вида

$$U_{\text{int}}(x, y) = -\mu(x + y) \left(xy - \frac{1}{2} \left(\frac{4a}{\pi^2} \right)^2 \right), \quad (2)$$

где μ – малый параметр. Причины выбора потенциала взаимодействия в такой форме станут ясны далее. Массу материальной точки для простоты положим равной единице. Таким образом, внутри потенциальной ямы гамильтониан системы имеет следующий вид:

$$H(x, y, p_x, p_y, t) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} - f_0 x \cos \Omega t - \mu(x + y) \left(xy - \frac{1}{2} \left(\frac{4a}{\pi^2} \right)^2 \right). \quad (3)$$

В переменных действие–угол невозмущенной системы ($f_0 = \mu = 0$) ее гамильтониан выглядит известным образом:

$$H_0(I_x, I_y) = \frac{\pi^2}{2a^2} (I_x^2 + I_y^2), \quad (4)$$

а зависимость координаты x (как и y) от времени может быть представлена, например, в виде ряда Фурье

$$x(t) = \frac{4a}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)\omega_x t)}{(2n+1)^2} = \frac{4a}{\pi^2} \left(\cos \omega_x t + \frac{\cos 3\omega_x t}{9} + \frac{\cos 5\omega_x t}{25} + \dots \right), \quad (5)$$

где частота колебаний ω_x определяется обычным образом:

$$\omega_x = \frac{\partial H_0}{\partial I_x} = \frac{\pi^2}{a^2} I_x. \quad (6)$$

Поскольку вклад высоких гармоник в решение (5) достаточно мал, далее будем учитывать лишь первое слагаемое. Введя угловые переменные как $\theta_{x,y} = \omega_{x,y} t$, запишем гамильтониан (3) в переменных действие–угол, оставив при этом только наиболее медленные слагаемые

$$H(I_x, I_y, \theta_x, \theta_y, t) = \frac{\pi^2}{2a^2} (I_x^2 + I_y^2) - f_0 \frac{2a}{\pi^2} \cos(\theta_x - \Omega t) - \frac{\mu}{4} \left(\frac{4a}{\pi^2} \right)^3 (\cos(2\theta_x - \theta_y) + \cos(\theta_x - 2\theta_y)). \quad (7)$$

Из вида выражения (7) следует, что в изучаемой системе, кроме резонанса с внешним полем, определяемого равенством $\omega_x = \Omega$, в фазовом пространстве имеют место два резонанса связи, вызванные слабым взаимодействием двух степеней свободы: $\omega_x = 2\omega_y$ и $\omega_y = 2\omega_x$. Расположение этих резонансов, а также изоэнергетической кривой в плоскости частот представлено на рис. 1. Данный рисунок позволяет

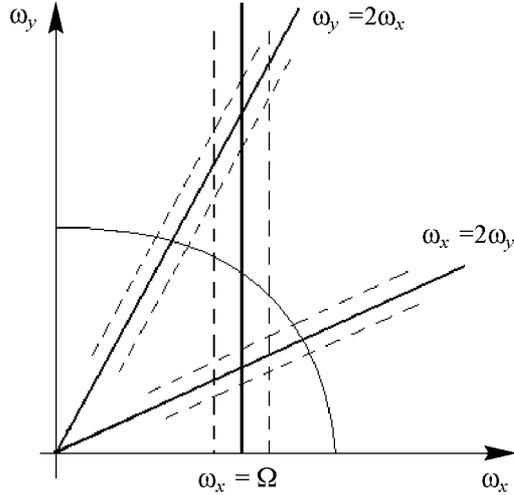


Рис. 1. Основные резонансы системы (7) в плоскости частот (ω_x, ω_y) . Схематично показаны ширины резонансов, а также изоэнергетическая кривая

достаточно наглядно проиллюстрировать механизм диффузии Арнольда. В случае, когда $\mu = 0$, при выборе начальных условий в области резонанса с внешним полем в горизонтальном направлении система ведет себя, подчиняясь известным законам внутри резонансной динамики. В вертикальном же направлении состояние не меняется, поскольку в этом случае $I_y = \text{const}$. Слабое взаимодействие двух пространственных степеней свободы ($\mu \ll 1$) порождает в фазовом пространстве системы два резонанса связи (именно это и определило выбор потенциала взаимодействия в форме (2)). Их влияние приводит к дополнительной хаотизации в области стохастического слоя резонанса с внешним полем и, самое главное, к медленному диффузионному изменению I_y – диффузии Арнольда.

Прежде чем обратиться к расчету скорости диффузии Арнольда, определим характеристики каждого из представленных резонансов. Что касается резонанса системы с внешним полем, то для него резонансный гамильтониан имеет известный вид

$$H(I_x, \psi) = \frac{\pi^2}{2a^2} (\Delta I_x)^2 - \frac{2af_0}{\pi^2} \cos \psi, \quad (8)$$

где новая фаза $\psi = \theta_x - \Omega t$. Отсюда нетрудно определить полуширину резонанса по частоте

$$(\Delta\omega)_{f_0} = 2\sqrt{\frac{2f_0}{a}} \quad (9)$$

и частоту малых колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2f_0}{a}}. \quad (10)$$

Нахождение полуширины резонанса связи требует более подробного рассмотрения. Для примера возьмем один из двух резонансов связи ($\omega_y = 2\omega_x$) и положим, что на систему не действует внешнее поле, то есть $f_0 = 0$, тогда гамильтониан системы примет вид

$$H = \frac{\pi^2}{2a^2} (I_x^2 + I_y^2) - \frac{\mu}{4} \left(\frac{4a}{\pi^2} \right)^3 \cos(2\theta_x - \theta_y). \quad (11)$$

Для нахождения резонансного гамильтониана воспользуемся производящей функцией

$$F_2 = (2\theta_x - \theta_y) \frac{I_1}{\sqrt{5}} + (\theta_x + 2\theta_y) \frac{I_2}{\sqrt{5}} \quad (12)$$

и перейдем к новым переменным – медленной фазе $\theta_1 = (2\theta_x - \theta_y)/\sqrt{5}$ и быстрой фазе $\theta_2 = (\theta_x + 2\theta_y)/\sqrt{5}$. Тогда

$$I_x = \frac{\partial F_2}{\partial \theta_x} = \frac{2I_1 + I_2}{\sqrt{5}} \quad \text{и} \quad I_y = \frac{\partial F_2}{\partial \theta_y} = \frac{2I_2 - I_1}{\sqrt{5}}. \quad (13)$$

Нетрудно заметить, что благодаря множителю $1/\sqrt{5}$ в производящей функции (12) преобразование переменных действия сводится к чистому повороту системы координат в плоскости (I_x, I_y) , при котором новая ось I_2 ориентируется вдоль рассматриваемого резонанса связи. В силу соотношения (6) такой же поворот происходит и в плоскости частот (ω_x, ω_y) .

В новых переменных гамильтониан (11) принимает вид

$$H = \frac{\pi^2}{2a^2} (I_1^2 + I_2^2) - \frac{\mu}{4} \left(\frac{4a}{\pi^2} \right)^3 \cos(\sqrt{5}\theta_1), \quad (14)$$

из которого следует, что действие I_2 является интегралом движения, переменные (I_1, θ_1) совершают медленные колебания на резонансе связи с частотой $4\sqrt{5}\mu a/\pi^2$, а полуширина резонанса связи по действию и частоте будет, соответственно:

$$\Delta I_1 = 8 \frac{a^2}{\pi^4} \sqrt{\mu a} \quad \text{и} \quad (\Delta \omega)_\mu = \frac{8}{\pi^2} \sqrt{\mu a}. \quad (15)$$

Параметры второго резонанса связи определяются аналогично и совпадают с приведенными.

Теперь можно определить момент перекрытия резонансов. Необходимо, однако, сразу отметить, что в данном случае, несмотря на очевидное сходство двух резонансов связи, перекрытие резонанса $\omega_x = \Omega$ с $\omega_y = 2\omega_x$ происходит при меньших значениях параметров f_0 и μ , чем его перекрытие со вторым резонансом связи $2\omega_y = \omega_x$, что проиллюстрировано на рис. 2. Таким образом, нужно установить лишь момент первого перекрытия, поскольку с дальнейшим возрастанием амплитуды поля f_0 или интенсивности взаимодействия μ на смену диффузии Арнольда придет более сильный эффект диффузии поперек стохастических слоев перекрывшихся резонансов.

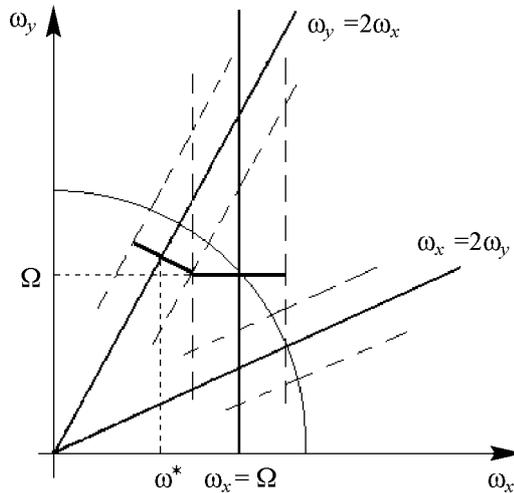


Рис. 2. Расположение основных резонансов системы (7) в плоскости частот (ω_x, ω_y) . Ширины резонансов $\omega_x = \Omega$ и $\omega_y = 2\omega_x$ соответствуют моменту их перекрытия

Итак, рассчитаем момент перекрытия двух резонансов – резонанса связи $\omega_y = 2\omega_x$ и резонанса с внешним полем $\omega_x = \Omega$. Из геометрических соображений (см. рис. 2) следует, что

$$\begin{cases} \omega^* + (\Delta\omega)_\mu \cos \alpha = \Omega - (\Delta\omega)_{f_0}, \\ 2\omega^* - (\Delta\omega)_\mu \sin \alpha = \Omega, \end{cases} \quad (16)$$

где $\sin \alpha = 1/\sqrt{5}$, $\cos \alpha = 2/\sqrt{5}$. Исключая из системы ω^* , с учетом (9) и (15) получаем

$$f_0 = \frac{a}{32} \left(\Omega - \frac{8}{\pi^2} \sqrt{5\mu a} \right)^2. \quad (17)$$

Найденное соотношение позволяет найти значение амплитуды внешнего поля f_0 , при котором при данной величине параметра связи μ происходит касание невозмущенных сепаратрис двух резонансов. На самом же деле вследствие разрушения сепаратрис и влияния резонансов более высокого порядка описанное перекрытие происходит несколько раньше.

2. Оценка скорости диффузии Арнольда

Для аналитической оценки скорости диффузии Арнольда будем следовать методике, изложенной в [3]: необходимо рассчитать дисперсию энергии в y -направлении $(\Delta E_y)^2$ за половину периода фазовых осцилляций T_a и разделить на саму величину T_a . Таким образом,

$$D_{\text{theor}} = \frac{\overline{(\Delta E_y)^2}}{T_a}. \quad (18)$$

Итак, в первую очередь рассчитаем изменение энергии

$$E_y = \frac{\pi^2}{2a^2} I_y^2 \quad (19)$$

за половину периода фазовых колебаний для начальных условий, помещенных внутрь стохастического слоя резонанса $\omega_x = \Omega$. Производная (19) по времени:

$$\dot{E}_y = \frac{\pi^2}{a^2} I_y \dot{I}_y \approx \frac{\Omega\mu}{4} \left(\frac{4a}{\pi^2} \right)^3 [2 \sin(\psi - \Omega t) + \sin(2\psi + \Omega t)]. \quad (20)$$

Зависимость $\psi(t)$ может быть представлена в виде [3]

$$\psi = 4 \arctg \left(e^{\pm \omega_0(t-t_n)} \right) - \pi, \quad (21)$$

где t_n – время, когда $\psi = 0$, а частота ω_0 была введена ранее (см. (10)). Здесь учтено также, что при малых изменениях по переменной I_y частота $\omega_y = \theta_y \approx \Omega$. Знаки « \pm » в показателе экспоненты отвечают за движение на разных ветвях сепаратрисы, причем знак « $+$ » относится к верхней ветви, а « $-$ » – к нижней. В соответствии с этим

у рассчитываемых далее величин верхним индексом будем указывать их принадлежность к той или иной области стохастического слоя. Интегрируя (20) по времени, для верхней ветви получим

$$\begin{aligned}\Delta E_y^+ &= \frac{\Omega\mu}{4} \left(\frac{4a}{\pi^2}\right)^3 \left(2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\psi - \Omega t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\psi + \Omega t) dt \right) = \\ &= -\frac{\lambda\mu}{4} \left(\frac{4a}{\pi^2}\right)^3 \sin \Omega t_n (2A_2(\lambda) - A_4(-\lambda)).\end{aligned}\quad (22)$$

Здесь $\lambda = \Omega/\omega_0$; $A_n(\lambda)$ – интеграл Мельникова–Арнольда [3]:

$$A_n(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{2}n\psi(t) - \lambda t\right) dt = \frac{2\pi}{(n-1)! \operatorname{sh}(\pi\lambda)} e^{\pi\lambda/2} (2\lambda)^{n-1} (1 + f_n(\lambda)), \quad (23)$$

причем $f_2(\lambda) = 0$ и $f_4(\lambda) = -2/\lambda^2$. Использование известного соотношения

$$A_n(\lambda < 0) = (-1)^n A_n(|\lambda|) \cdot e^{-\pi|\lambda|} \quad (24)$$

позволяет пренебречь последним слагаемым в (22) ввиду его экспоненциальной малости. В итоге имеем

$$\Delta E_y^+ = -\frac{\lambda\mu}{2} \left(\frac{4a}{\pi^2}\right)^3 \sin \Omega t_n A_2(\lambda). \quad (25)$$

Аналогично для нижней ветви получим

$$\Delta E_y^- = -\frac{\lambda\mu}{4} \left(\frac{4a}{\pi^2}\right)^3 \sin \Omega t_n A_4(\lambda). \quad (26)$$

Как видно из сравнения (25) и (26), вклады в изменение энергии, да и в формирование стохастического слоя резонанса в целом, от двух одинаковых по характеристикам резонансов связи оказываются различными. Таким образом, можно заключить, что при нахождении в верхней половине стохастического слоя резонанса с внешним полем система эффективно управляется лишь одним резонансом связи, вклад второго при этом оказывается экспоненциально мал (см. (24)). Эта ситуация качественно отличается от рассмотренной в работе [3], где влияние двух резонансов с внешним полем на формирование стохастического слоя резонанса связи, а в итоге и на диффузию Арнольда вдоль последнего, было одинаковым.

Поскольку внутри стохастического слоя величины t_n с хорошей точностью можно считать случайными, после возведения (25) и (26) в квадрат и усреднения будем иметь

$$\overline{(\Delta E_y^+)^2} = \frac{\lambda^2\mu^2}{8} \left(\frac{4a}{\pi^2}\right)^6 A_2^2(\lambda) \quad \text{и} \quad \overline{(\Delta E_y^-)^2} = \frac{\lambda^2\mu^2}{32} \left(\frac{4a}{\pi^2}\right)^6 A_4^2(\lambda). \quad (27)$$

Последние соотношения могут быть уточнены учетом некоторой корреляции моментов времени t_n , как это было сделано в [3].

Рассчитаем далее величину T_a , стоящую в знаменателе (18). Для этого воспользуемся сепаратрисным отображением [7]:

$$\begin{cases} h_{n+1} = h_n + \Delta h(t_n), \\ t_{n+1} = t_n + T_a(h_{n+1}). \end{cases} \quad (28)$$

Здесь $h_n = E_n/E_s - 1$ – безразмерный параметр, указывающий на отклонение текущего значения энергии E_n от энергии на сепаратрисе E_s , которая находится из (8)

$$E_s = \frac{2a}{\pi^2} f_0 = \frac{\omega_0^2 a^2}{\pi^2}. \quad (29)$$

Выражение

$$\Delta h(t_n) = -\frac{1}{E_s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial V}{\partial t} dt \quad (30)$$

представляет собой безразмерный интеграл Мельникова–Арнольда. Здесь

$$V = -\frac{\mu}{4} \left(\frac{4a}{\pi^2} \right)^3 (\cos(2\psi + \Omega t) + \cos(\psi - \Omega t)) \quad (31)$$

– возмущение, порождающее стохастичность в области сепаратрисы резонанса. Вид функции $T_a(h_n)$ для нелинейного маятника известен:

$$T_a(h_n) = \frac{1}{\omega_0} \ln \left(\frac{32e}{|h_n|} \right), \quad (32)$$

а моменты времени t_n , по-прежнему, соответствуют $\psi = 0$.

Проявлению хаоса в области сепаратрисы отвечает следующее условие:

$$\max \left| \frac{dt_{n+1}}{dt_n} - 1 \right| \geq 1, \quad (33)$$

которое указывает на экспоненциальное разделение траекторий. Используя (28) и оставляя знак равенства в последнем соотношении, можем получить выражение для полуширины стохастического слоя

$$h_{sl} = \frac{1}{\omega_0} \max \left| \frac{d(\Delta h(t_n))}{dt_n} \right|, \quad (34)$$

справедливое с точностью до множителя порядка единицы [7]. Беря интеграл (30), как и ранее, отдельно для каждой из ветвей сепаратрисы, получим

$$h_{sl}^+ = \mu \frac{16a}{\pi^4 \Omega^2} \lambda^4 A_2(\lambda) \quad \text{и} \quad h_{sl}^- = \mu \frac{16a}{\pi^4 \Omega^2} \lambda^4 A_4(\lambda). \quad (35)$$

В итоге для коэффициента диффузии имеем следующий результат:

$$\begin{aligned} D^+ &= \frac{(\Delta E_y^+)^2}{T_a(h_{sl}^+)} = \frac{\mu^2 \Omega}{8} \left(\frac{4a}{\pi^2} \right)^6 \frac{\lambda A_2^2(\lambda)}{\ln(32e/h_{sl}^+)}, \\ D^- &= \frac{(\Delta E_y^-)^2}{T_a(h_{sl}^-)} = \frac{\mu^2 \Omega}{32} \left(\frac{4a}{\pi^2} \right)^6 \frac{\lambda A_4^2(\lambda)}{\ln(32e/h_{sl}^-)}. \end{aligned} \quad (36)$$

Таким образом, можно заключить, что при нахождении системы в верхней части стохастического слоя резонанса с внешним полем вдоль последнего происходит диффузия Арнольда с коэффициентом D^+ , а при нахождении в нижней его части – с коэффициентом D^- . Для определения коэффициента диффузии внутри стохастического слоя в целом необходимо найти среднее значение квадрата суммы ΔE_y^+ и ΔE_y^- и разделить его на полный «период колебаний» на сепаратрисе – сумму $T_a(h_{sl}^+)$ и $T_a(h_{sl}^-)$. После возведения $(\Delta E_y^+ + \Delta E_y^-)$ в квадрат и последующего усреднения одно из слагаемых оказывается пропорциональным величине $\overline{\sin \Omega t_n^+ \sin \Omega t_n^-}$. В предположении, что движение в обеих частях стохастического слоя происходит независимо, усреднение этого слагаемого следует проводить отдельно по t_n^+ и t_n^- , в результате чего его вклад в коэффициент диффузии оказывается нулевым. Таким образом,

$$D_{\text{theor}} = \frac{\overline{(\Delta E_y^+)^2} + \overline{(\Delta E_y^-)^2}}{T_a(h_{sl}^+) + T_a(h_{sl}^-)}, \quad (37)$$

а все входящие сюда величины были определены ранее.

3. Численное моделирование

В численных экспериментах ширина потенциальной ямы a для простоты была положена равной единице, а частота внешнего поля Ω была принята равной $4/3$. Для достижения режима диффузии Арнольда начальное условие помещалось в область стохастического слоя резонанса с внешним полем, таким образом $I_x(0) = I_y(0) = (4/3)\pi^2$, $\theta_x(0) = \pi$. Начальное значение θ_y при этом роли не играет, поэтому при моделировании полагалось $\theta_y(0) = 0$.

Коэффициент диффузии рассчитывался согласно схеме, описанной в [3]:

$$D_n = \frac{1}{\Delta t_n} \overline{(\Delta \overline{E}_y)^2}. \quad (38)$$

Здесь \overline{E}_y – значение E_y (см. (19)), усредненное по времени на интервале $\Delta t_n = 10^n \cdot 2\pi/\Omega$, $\Delta \overline{E}_y$ – разность средних значений \overline{E}_y на соседних таких интервалах, а вторая черта означает усреднение разностей $\Delta \overline{E}_y$ по многим интервалам. Такая процедура выбрана для того, чтобы снизить эффект случайных колебаний величины энергии системы и подчеркнуть общую тенденцию роста разброса ее значений.

Полное время счета в численных экспериментах составляло 10^4 периодов внешнего поля. При фиксированном значении параметра μ амплитуда внешнего поля f_0 изменялась в некоторых пределах, причем для каждого значения f_0 расчеты были проведены для десяти различных начальных условий, обеспечивающих нахождение системы внутри стохастического слоя резонанса. Дальнейшее усреднение полученных результатов и расчет погрешностей с доверительной вероятностью 0.95 позволил построить графики, представленные на рис. 3. Здесь показаны зависимости коэффициентов D_2 и D_3 от $1/\sqrt{f_0}$ для двух значений параметра взаимодействия μ . Приведены также результаты аналитической оценки скорости диффузии Арнольда (37).

Как видно из рис. 3, *a*, существует область значений параметра f_0 , в которой коэффициенты D_2 и D_3 (с учетом погрешностей) совпадают, что указывает на диффузионный характер изменения энергии E_y . Таким образом, здесь наблюдается диффузия Арнольда вдоль рассматриваемого резонанса, причем экспериментальные данные хорошо согласуются с теоретической оценкой скорости диффузии. В области перекрытия резонанса $\omega_x = \Omega$ с резонансом связи $\omega_y = 2\omega_x$ (и далее со вторым

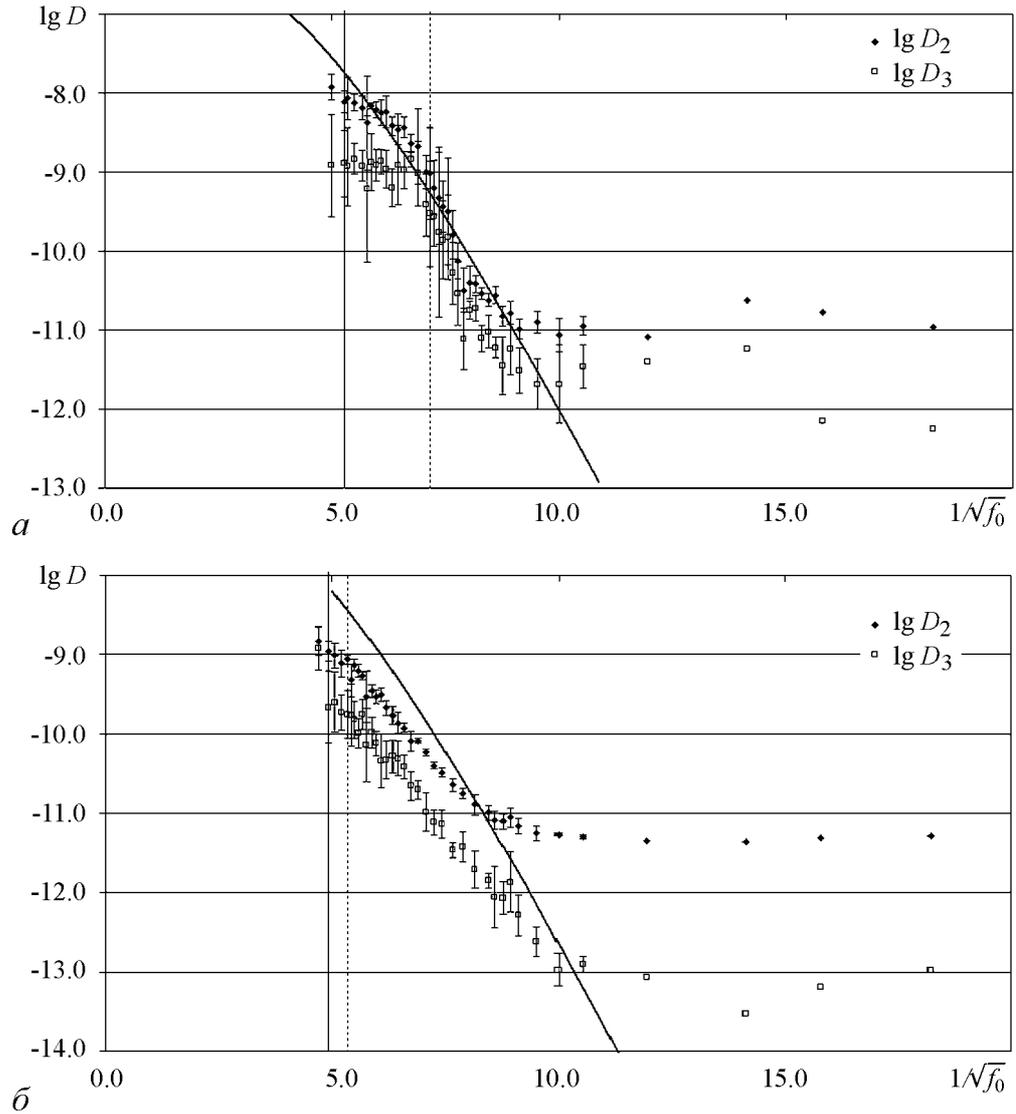


Рис. 3. Зависимости $\lg D$ от $1/\sqrt{f_0}$, полученные в результате численного моделирования, для различных значений параметра связи μ : 0.02 (*a*), 0.01 (*б*). Вертикальная сплошная линия отвечает аналитической оценке момента перекрытия резонансов (см. (17)), вертикальная пунктирная линия – моменту реального их перекрытия. Наклонная кривая – аналитическая оценка коэффициента диффузии (см. (37))

резонансом связи), то есть при $1/\sqrt{f_0} < 7$, коэффициент диффузии не растет с увеличением f_0 , а несколько падает, причем коэффициенты D_2 и D_3 по величине расходятся. Это указывает на уменьшение роли диффузии Арнольда *вдоль* резонанса с внешним полем в динамике системы по сравнению с более сильной диффузией *поперек* стохастических слоев перекрывшихся резонансов. Отметим также, что, если амплитуда внешнего поля f_0 мала (см. область $1/\sqrt{f_0} > 10$ на рис. 3, *a*), то диффузия не наблюдается, и эволюция системы определяется, главным образом, квазипериодическими колебаниями энергии системы под действием возмущения.

График, представленный на рис. 3, *б*, показывает, что при достаточно малой величине параметра μ и независимо от амплитуды внешнего поля диффузия Арнольда может не наблюдаться. Таким образом, на проявление диффузии Арнольда в изучаемой системе оказывает влияние не только амплитуда внешнего поля f_0 , но и параметр взаимодействия двух степеней свободы μ .

Следует также заметить, что на обоих графиках всегда $D_2 > D_3$, что указывает на перманентный вклад недиффузионных процессов [3].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 09-01-00268), а также фонда «Династия».

Библиографический список

1. Арнольд В.И. О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы // ДАН СССР. 1964. Т. 156. С. 9.
2. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. Череповец: Меркурий-ПРЕСС, 2000.
3. Chirikov B.V. A Universal instability of many dimensional oscillator systems // Phys. Rep. 1979. Vol. 52. P. 263.
4. Milczewski J. von, Diercksen G.H.F., Uzer T. Computation of the Arnol'd web for the hydrogen atom in crossed electric and magnetic fields // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76. P. 2890.
5. Demikhovskii V.Ya., Izrailev F.M., and Malyshev A.I. Manifestation of Arnol'd diffusion in quantum systems // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 88. P. 154101.
6. Демиховский В.Я., Малышев А.И. Квантовая диффузия Арнольда в канале с гофрированной границей в присутствии переменного электрического поля // Изв. вузов. ПНД. 2004. Т. 12, № 5. С. 3.
7. Заславский Г.М. Физика хаоса в гамильтоновых системах. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.

Поступила в редакцию 1.08.2008
После доработки 21.10.2008

ARNOL'D DIFFUSION IN A SIMPLE NONLINEAR SYSTEM: ANALYTICAL ESTIMATIONS AND NUMERICAL SIMULATION

A.I. Malyshev, L.A. Chizhova

We consider the Arnol'd diffusion in a system with 2.5 degrees of freedom along a resonance with an external oscillating field. The analytical estimation of the diffusion coefficient we made is in a good agreement with numerical results. It's also shown that both the amplitude of external field and the parameter of weak interaction between two spatial degrees of freedom have an influence on Arnol'd diffusion manifestation and its rate.

Keywords: Nonlinear resonance, Arnol'd diffusion.



Мальшев Александр Игоревич – родился в 1978 году в г. Бор Нижегородской области, окончил Нижегородский государственный университет в 2001 году. Работает на кафедре теоретической физики физического факультета ННГУ в должности старшего преподавателя. В 2006 г. защитил кандидатскую диссертацию на тему «Слабый квантовый хаос в наноструктурах: диффузия Арнольда». Основная область научных интересов – квантовый хаос.

E-mail: malyshev@phys.unn.ru

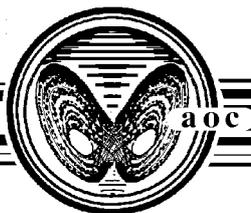
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23



Чижова Лариса Александровна – родилась в 1987 году в Нижнем Новгороде. Обучается в магистратуре физического факультета Нижегородского государственного университета. Тема магистерской диссертации – «Диффузия Арнольда вдоль резонанса системы с внешним полем в классическом и квантовом случаях». Стипендиат фонда Д. Зимина «Династия», а также фонда В. Потанина.

E-mail: Lar.Chizhova@gmail.com

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23



**ВЛИЯНИЕ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ И ДИФФУЗИИ
НА ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННУЮ ДИНАМИКУ
В СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ЛОТКИ–ВОЛЬТЕРРЫ
С ДИСКРЕТНЫМ ФАЗОВЫМ ПРОСТРАНСТВОМ**

А.В. Ефимов, А.В. Шабунин

В работе рассматривается влияние диффузии и перемешивания на динамику стохастической системы Лотки–Вольтерры. Моделирование осуществляется с помощью метода Монте-Карло. Показывается, что локальная диффузия сильно изменяет динамику модели, ускоряя процессы взаимодействий на решетке, а перемешивание приводит к появлению глобальных периодических колебаний. Выясняется, что рождение глобальных колебаний происходит благодаря явлению фазовой синхронизации. В работе подробно рассматриваются различные характеристики системы и их зависимости от параметров. Представленные в статье материалы служат основанием для дальнейших исследований, направленных на изучение возможности управления системами данного типа, а также демонстрируют одну из причин видового многообразия и устойчивости динамики популяций в экосистемах.

Ключевые слова: Пространственные структуры, синхронизация, самоорганизация.

Введение

На протяжении многих десятилетий ансамбли взаимодействующих частиц, а в частности, модели типа Лотки–Вольтерры не перестают интересовать ученых всего мира. На то есть несколько причин. Во-первых, это большая универсальность такого рода систем. Класс моделей Лотки–Вольтерры описывает различные процессы, такие как взаимодействия внутри популяций и в химических системах, пожары в лесах и другие явлениями, основу которых составляют взаимодействия автокаталитического характера. Во-вторых, динамика подобных систем оказывается очень богатой на различные нелинейные эффекты, которые сами по себе представляют немалый интерес для современных исследований. Это такие процессы, как синхронизация, образование пространственно-временных структур, индуцированные шумом переходы, различного рода бифуркации и т.д. [1–21].

Еще одной причиной пристального внимания ученых к системам типа Лотки–Вольтерры, особенно в последние годы [22–26], является расхождение между реаль-

ной эволюцией популяций и поведением, предсказанным динамическими моделями Лотки–Вольтерры. В рамках классической модели Лотки–Вольтерры в системе «хищник–жертва» существуют консервативные колебания численности видов. Как показали исследования [22], учет флуктуаций приводит к выживанию только одного вида, что соответствует экспериментальным данным, если в среде обитания есть сильное перемешивание. Однако чаще в реальных экологических и химических системах локальность взаимодействий сочетается с отсутствием сильного перемешивания. Это приводит к малым устойчивым колебаниям численностей видов вблизи состояния равновесия, то есть наблюдается межвидовое разнообразие, к которому мы все так привыкли. Кроме того, следует отметить, что такое поведение очень похоже на поведение диссипативных динамических систем.

В последнее время поиску объяснения подобного несоответствия было уделено достаточно большое внимание. Вопросы устойчивости колебаний и процессы самоорганизации в популяционных моделях подробно рассмотрены в работах [22, 24–26] и на данный момент причины расхождений в поведении классических динамических моделей типа Лотки–Вольтерры и реальных систем связывают с эффектами конечной численности популяций, наличием флуктуаций среды и миграционными (диффузионными) процессами. Однако, по-прежнему, остается не совсем ясным влияние каждого из вышеперечисленных эффектов на динамику конкретных моделей, а также то, какими изменениями в пространственной организации системы сопровождается добавление того или иного типа диффузии. Например, хорошо известно, что в открытых нелинейных системах типа «реакция–диффузия», находящихся вблизи пространственно-однородного состояния равновесия, диффузия взаимодействующих элементов приводит к образованию стационарных пространственных структур (структур Тьюринга) [27–29]. В классическом случае для развития такого сценария необходимо, чтобы скорости диффузии отдельных взаимодействующих компонентов стали различными. В данной работе рассмотрен случай, когда независимо от типа диффузионного процесса (локальная диффузия или нелокальное перемешивание) все элементы ансамбля частиц диффундируют с одинаковой скоростью. Более того, как было показано в предыдущих работах [7–9], в нашем случае возникновение пространственных структур (нестационарных) обусловлено чисто реакционными механизмами и протекает в отсутствие диффузии.

В качестве рабочей была выбрана известная система класса Лотки–Вольтерры (Lattice Lotka–Volterra в англоязычных изданиях, или сокращенно LLV) [7]. Мы показываем, что процессы перемешивания играют роль связи между отдельными участками пространства системы, в которых происходят несинхронные колебания. Увеличение степени перемешивания приводит к бифуркационному рождению устойчивых глобальных колебаний в системе, благодаря явлению фазовой синхронизации между локальными осцилляторами на поверхности.

Статья построена следующим образом. В первом разделе описывается исследуемая система и методы моделирования ее динамики. Во втором и третьем разделах с помощью разновидности метода Монте-Карло, представляющего собой «виртуальный эксперимент», проводится исследование влияния диффузии и перемешивания на систему. В четвертом разделе проводится исследование явления фазовой синхронизации локальных колебаний в системе. Наконец, в Заключение обсуждаются основные результаты.

1. Система LLV. Динамическая модель среднего поля и метод Монте-Карло

Рассмотрим квадратную решетку, содержащую $N = L \times L$ идентичных ячеек. Каждая ячейка представляет собой элемент ансамбля, который может находиться в одном из трех состояний (фаз), обозначенных далее по тексту X , Y и S . Каждый элемент ансамбля может совершать циклические вероятностные переходы из одной фазы в другую под воздействием своих ближайших соседей. Если кинетические константы, характеризующие вероятность переходов, обозначить как k_1 , k_2 и k_3 , то для исследуемой модели можно записать следующую схему превращений:



Первая строка схемы означает, что случайно выбранная ячейка X переходит в состояние Y с вероятностью, пропорциональной коэффициенту k_1 , если случайно выбранная соседняя ячейка находилась в фазе Y . Если соседняя ячейка находилась в любом другом состоянии, то ячейка X сохраняет свою фазу неизменной. Таким же образом осуществляются остальные переходы, описываемые второй и третьей строкой схемы.

Схема (1) принадлежит к классу вероятностных клеточных автоматов. Данная модель очень проста, однако она позволяет изучать ряд нетривиальных эффектов, возникающих в результате локальных взаимодействий в активных средах различной природы.

С динамической точки зрения подобные модели описываются с помощью уравнений среднего поля (так называемое среднеполевое приближение). Однако на сегодняшний день хорошо известно, что динамика систем, предсказанная в рамках этого приближения, плохо соответствует наблюдаемым на практике результатам. Расхождение результатов обычно связывают с конечным числом элементов в ансамбле, наличием пространственных ограничений в решеточных моделях и, как следствие, локальностью взаимодействий, которые не могут быть учтены методом среднего поля. Однако этот метод остается тем инструментом, с помощью которого можно легко узнать общую информацию о поведении системы в первом приближении.

Динамика системы (1) в приближении среднего поля подробно описана в работе [7], поэтому коротко упомянем лишь те результаты, которые будут необходимы для последующего рассмотрения. Уравнения среднего поля для исследуемой системы записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -k_1xy + k_3x(1 - x - y), \\ \dot{y} &= k_1xy - k_2y(1 - x - y), \end{aligned} \quad (2)$$

здесь x и y – динамические переменные, обозначающие относительные концентрации соответствующих состояний, а k_1 , k_2 и k_3 – кинетические константы фазовых переходов. При выводе уравнений (2) учтено свойство, отражающее постоянство

общего числа ячеек, что позволило исключить из рассмотрения относительную концентрацию s : $x + y + s = 1$. Уравнения (2) относятся к уравнениям типа Лотки–Вольтерры. Переменные имеют физический смысл в области, ограниченной следующими прямыми на фазовой плоскости: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$. Поэтому будем рассматривать поведение системы внутри замкнутого контура, образованного этими прямыми.

Система дифференциальных уравнений (2) является консервативной и имеет четыре состояния равновесия: три седловых точки $P_1(0; 0)$, $P_2(1; 0)$, $P_3(0; 1)$ и одну точку типа центр $P_4(k_2/(k_1 + k_2 + k_3); k_3/(k_1 + k_2 + k_3))$. Модель демонстрирует консервативные периодические колебания внутри рассматриваемой области. Фазовый портрет системы представляет собой континуум вложенных замкнутых траекторий вокруг центра P_4 . Вариации параметров системы k_i не приводят к качественным изменениям ее динамики в смысле бифуркаций, но влияют на частоту колебаний и на их форму.

В силу указанных выше недостатков метода среднего поля будем использовать другой метод, основанный на алгоритмах Монте-Карло, для моделирования кинетики ансамблей частиц (Kinetic Monte Carlo, далее по тексту КМС). Данный метод представляет собой разновидность вероятностного клеточного автомата и позволяет провести моделирование процессов на микроуровне. При использовании этого метода вначале осуществляется инициализация решетки в соответствии с начальными условиями. В данной работе рассматриваются статистически пространственно-однородные начальные распределения состояний по решетке. После инициализации производится моделирование динамики решетки в дискретном времени. Каждый временной шаг метода Монте-Карло (Monte-Carlo Step, далее по тексту MCS) состоит из $N = L^2$ микрошагов, где L – линейный размер решетки в ячейках. Каждый микрошаг алгоритма включает в себя три этапа, которые приведены ниже.

1. Случайный выбор ячейки решетки и одной из ее ближайших соседей. Ближайшими соседями будем считать ячейки, имеющие с выбранной смежные стороны.
2. Проверка состояний выбранных ячеек и их сопоставление с вариантами, описанными в исходной схеме (1).
3. Если ячейки удовлетворяют одной из строк схемы, то происходит соответствующий переход с вероятностью $k_i/\max(k_1, k_2, k_3)$. Если нет, то состояния ячеек остаются неизменными.

Считаем, что после N микрошагов алгоритма каждая ячейка была «посещена» в среднем один раз, и решетка переходит в новое, измененное состояние, а дискретное время увеличивается на $\Delta t = 1$ MCS.

Для получения результатов, представленных в данной работе, в качестве основного мы использовали этот же алгоритм, дополняя его необходимыми нововведениями, моделирующими либо локальную, либо нелокальную диффузию. Суть нововведений заключается в том, что после выполнения N микрошагов (то есть после каждого шага MCS), в алгоритм добавляется эффект тасования содержимого ячейки, соответствующий тому или иному типу диффузии. Эти части алгоритма будут подробно описаны в соответствующих разделах.

Результаты моделирования систем LLV без диффузии методом КМС описаны в статьях [7–9]. Прежде чем перейти к рассмотрению влияния различных типов диффузии на поведение системы, напомним известные результаты.

После инициализации решетки в соответствии с начальными условиями на поверхности начинается переходный процесс. В течение этого процесса одноименные состояния группируются во фрактальные структуры – кластеры. После окончания переходного процесса система переходит в стационарный режим. В силу особенностей исходной схемы (1) взаимодействуют только ячейки, принадлежащие границам кластеров. В ходе взаимодействий границы кластеров постоянно перемещаются, сами кластеры меняют форму и размеры, однако структурные изменения в системе не происходят. Если рассматривается решетка малых размеров ($L < 30$) или параметры k_i сильно отличаются друг от друга (например $k_1 = 0.1$, $k_2 = k_3 = 1.0$), то велика вероятность того, что система придет к одному из трех седловых состояний равновесия P_1 , P_2 или P_3 , предсказанных в рамках среднеполевого приближения (случай «отравления» решетки).

Подобная пространственная динамика приводит к соответствующему поведению системы во временном масштабе. В качестве переменных, описывающих состояние поверхности, удобно выбрать усредненные по пространству взаимодействия концентрации состояний ячеек. Обозначим их по аналогии с методом среднего поля как x и y . Такие переменные нельзя называть динамическими в строгом смысле, так как они неоднозначно описывают состояние системы. Одним и тем же значениям x и y (макроусловиям) могут соответствовать различные распределения состояний в пространстве (микроусловия). Однако, как показывают исследования, если разные микросостояния соответствуют одному и тому же макросостоянию, то и эволюция средних концентраций происходит одинаковым образом. То есть из каждой точки $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$ выходит единственная траектория $x(t)$, $y(t)$, аналогично фазовой траектории динамических систем. Соответственно, x и y ведут себя аналогично динамическим переменным.

Временная реализация системы (рис. 1) начинается с участка, соответствующего переходному процессу. Длительность участка и его форма зависят только от начальных макроусловий и параметров k_i и не зависят от начальных микроусловий (в случае их однородности) и линейного размера решетки, если он достаточно велик ($L > 30$). После переходного процесса начинается эргодический участок реализации. Усредненные по пространству взаимодействия концентрации состояний совершают нерегулярные колебания вокруг точки, имеющей в фазовом пространстве (x, y) координаты, близкие к координатам точки P_4 из метода среднего поля. Средний период таких колебаний определяется кинетическими параметрами системы, однако они слабо влияют на интенсивность колебаний. Только в случае сильно отличающихся кинетических параметров, то есть при приближении к порогу «отравления» решетки, наблюдается увеличение дисперсии процесса по сравнению со случаем равенства параметров между собой. Значительно сильнее интенсивность

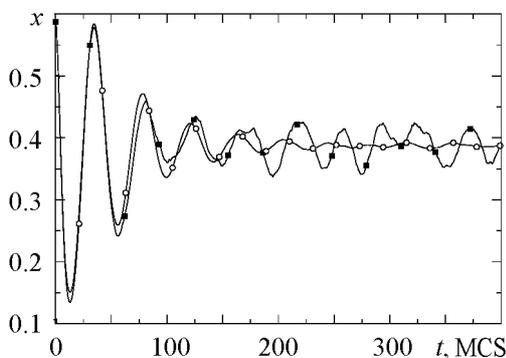


Рис. 1. Начальные участки временных реализаций $x(t)$ для решеток с линейными размерами $L = 128$ (■) и $L = 1024$ (○) ячеек. Начальные концентрации $x_0 = 0.6$, $y_0 = 0.25$. Кинетические параметры $k_1 = 0.7$, $k_2 = k_3 = 1.0$

колебаний зависит от размеров решетки. При увеличении L интенсивность колебаний спадает по закону $\sigma_x^2 \sim L^{-2}$. При достаточно больших размерах решетки колебания затухают, и динамика системы представляет собой малые флуктуации переменных вокруг состояния равновесия, расположенного на месте точки P_4 . Однако, в отличие от среднеполевого приближения, где P_4 – центр, состояние равновесия теперь проявляет себя как зашумленный устойчивый фокус.

Таким образом, можно заключить, что динамика системы в рамках модели Монте-Карло сходна с диссипативным поведением динамических систем, а поверхность решетки представляет собой набор пространственно-распределенных независимых либо слабо связанных стохастических осцилляторов.

2. Локальная диффузия в системе LLV

Как уже отмечалось выше, диффузионные процессы играют огромную роль в динамике активных сред. В химических системах диффузия может лимитировать скорости автокаталитических реакций или наоборот, ускорять их. Диффузионные процессы в сочетании с особенностями схемы реакции могут приводить к образованию на поверхности раздела сред автоволновых структур различного типа (реакция Белоусова–Жаботинского и др.) В экологических системах с диффузионными процессами обычно связывают разного рода миграции популяций. На протяжении длительного времени эти процессы тщательно исследуются учеными. Однако связь подобных перемещений популяций с динамикой их численностей не всегда очевидна. Немалую роль играет диффузия и в нанотехнологиях, где процессы образования и разрушения кластеров особенно важны.

Учет даже малой диффузионной составляющей в моделях вышеописанных систем может привести к сильно отличающимся результатам. Кроме того, независимо от природы рассматриваемой системы, фундаментальные аспекты влияния диффузии на динамику могут оказаться полезными для управления данными процессами.

Перед тем как перейти к обсуждению результатов, остановимся на описании алгоритма моделирования системы. Основу алгоритма составляет процедура, уже представленная нами в предыдущем разделе. Дополнением к ней служит алгоритм тасования содержимого ячеек. После каждого шага MCS случайно выбирается ячейка решетки. Далее случайно выбирается одна из ее ближайших соседей и выбранные ячейки обмениваются состояниями. Это приводит к тому, что состояние первой ячейки «перемещается» во вторую. Далее первое состояние «перемещается» в следующую выбранную соседнюю ячейку. Число подобных «перемещений» выбранного состояния определяется округлением случайной величины ξ , распределенной по нормальному закону с истинным средним $\langle \xi \rangle = D$ и стандартным отклонением $\sigma_\xi = v$, до ближайшего неотрицательного целого. Таким образом выбранное состояние совершает случайные блуждания вокруг своего первоначального положения. То же самое происходит с другими ячейками по всей поверхности, что достигается повторением вышеописанной процедуры для N случайно выбранных элементов ансамбля.

Таким образом, интенсивность и характер локальной диффузии на решетке определяется двумя параметрами: D и v . Первый из них представляет собой наибо-

лее вероятное число «перемещений», которые совершает содержимое каждой ячейки после очередного шага MCS, а второй – разброс числа «перемещений» относительно D . В данной работе не рассматривается зависимость поведения системы от параметра v , поскольку в ходе предварительных исследований не удалось выявить заметное влияние вариации этого параметра. Мы ограничились малым фиксированным значением $v = 0.4$, задав таким образом малую дисперсию для числа «перемещений». Как будет показано ниже, намного более заметный эффект на динамику системы оказывает вариация параметра D , отвечающего за интенсивность диффузии.

Рассмотрим влияние локальной диффузии на поведение исходной системы. Для начала обратимся к пространственной динамике. На рис. 2 представлены характерные пространственные распределения состояний ячеек поверхности в начальный момент времени и после переходного процесса для различных параметров диффузии. Состояния ячеек отображаются следующими цветами: X – серый цвет, Y – белый и S – черный. Начальное распределение состояний по поверхности решетки соответствует начальным макроусловиям, носит случайный характер и обладает свойством пространственной однородности (рис. 2, *а*, *б*). После переходного процесса ($t \approx 2000$ MCS) в отсутствие диффузии на поверхности образуются кластеры (рис. 2, *в*, *г*), фрактальная структура которых подробно исследовалась в работе [8]. В силу локального характера процессов на решетке без диффузии, ячейки соседних кластеров могут взаимодействовать только на их границах. Вследствие этого, количество ячеек, способных изменить свое состояние, после образования кластеров уменьшается. Чем больше размеры кластеров, тем меньше ячеек провзаимодействуют на каждом шаге алгоритма Монте-Карло.

Теперь начнем постепенно увеличивать диффузию в системе. Как видно из следующей пары снимков поверхности (рис. 2, *д*, *е*), введение в систему даже слабой

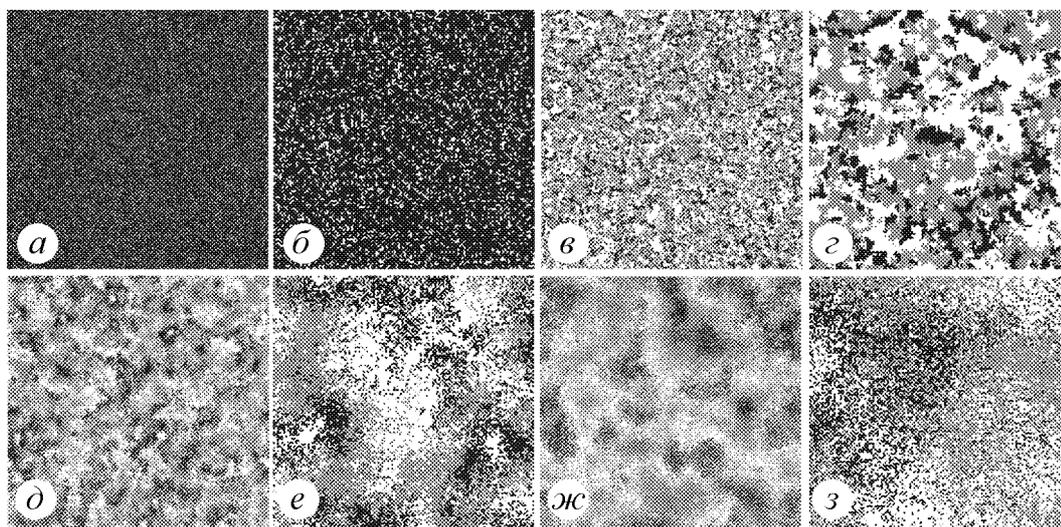


Рис. 2. *а* – поверхность решетки (512×512), *б* – ее увеличенный участок (128×128) при $t = 0$. Та же решетка после переходного процесса к моменту времени $t = 2000$ MCS: *в*, *г* – в отсутствие диффузии ($D = 0$); *д*, *е* – случай слабой локальной диффузии ($D = 2$); *ж*, *з* – случай сильной диффузии ($D = 10$). Начальные макроусловия и кинетические параметры для всех случаев: $x_0 = y_0 = 0.1$, $k_1 = 0.5$, $k_2 = k_3 = 1.0$

локальной диффузии ($D = 2$) приводит к росту размеров кластеров и к изменению их пространственной структуры. Границы кластеров как бы «расплываются», становясь более изрезанными, а сами кластеры при приближении к границам теряют свою однородность, оказываясь испещренными ячейками с другими состояниями. Дальнейшее увеличение интенсивности диффузии (рис. 2, ж, з) приводит к усилению вышеописанных эффектов.

Еще одним характерным следствием диффузии является образование спиральных и концентрических автоволновых структур на поверхности решетки. Однако при взаимодействии волны с большим количеством других пространственных структур велика вероятность ее разрушения. Поэтому такие волны, возникая в той или иной части поверхности, при слабой диффузии быстро разрушаются, уступая место новым волновым фронтам и другим пространственным формациям. При увеличении параметра диффузии количество пространственных структур на решетке падает вследствие роста размера каждой из них, что приводит к увеличению времени жизни автоволн. Все вышесказанное соответствует общим представлениям о влиянии локальной диффузии на пространственную динамику рассматриваемых систем.

Изменение пространственной структуры решетки приводит к соответствующим изменениям во временной динамике модели. Рис. 3 демонстрирует участки временных реализаций $x(t)$ после переходного процесса. Они соответствуют решеткам, «снимки» поверхности которых представлены на предыдущем рисунке. Даже без проведения дополнительных исследований видно, что степень регулярности колебаний увеличивается с ростом коэффициента диффузии. Также растут интенсивность и средняя частота колебаний. Кроме того, значение $x_{\text{ср}}$, около которого происходят колебания, становится ближе по значению к соответствующей координате точки равновесия P_4 из динамической модели.

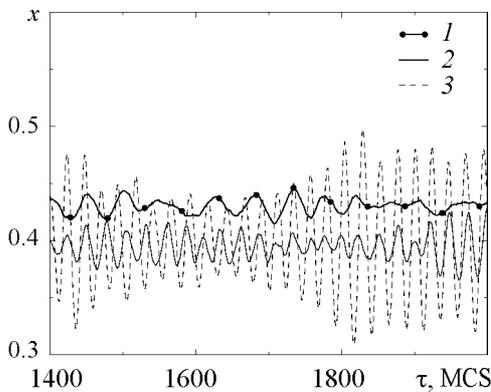


Рис. 3. Временные реализации для переменной x при отсутствии диффузии, $D = 0$ (кривая 1) и различной интенсивности локальной диффузии: $D = 2$ (кривая 2), $D = 10$ (кривая 3). Размер решетки, начальные условия и остальные параметры те же, что и на рис. 2

Для более детального изучения свойств колебаний рассмотрим спектральные и корреляционные характеристики процесса. На рис. 4 и рис. 5 изображены нормированные автокорреляционные функции и спектральные плотности для процесса $x(t)$ при различных параметрах диффузии. При введении даже слабой диффузии в систему время корреляции заметно возрастает, а ширина спектрального пика уменьшается, что соответствует увеличению регулярности колебаний. Сам спектральный пик смещается в область больших частот, что соответствует уменьшению характерного временного масштаба колебаний, то есть увеличению скорости всех процессов, протекающих на решетке. Кроме того, при достаточно сильной диффузии ($D = 20$) в спектре колебаний, помимо основного пика ($f_0 \simeq 0.0514 \text{ MCS}^{-1}$), появляется полочка, лежащая в интервале частот от $f_1 \simeq 0.04 \text{ MCS}^{-1}$ до $f_2 \simeq 0.047 \text{ MCS}^{-1}$. Таким образом, в дополнение к основным колебаниям со сред-

ним периодом $T_0 \simeq 20$ MCS, в системе появляется новый временной масштаб в интервале от 88 MCS до 227 MCS.

Подобные изменения во временной динамике системы при введении локальной диффузии можно объяснить следующим образом. При увеличении параметра диффузии кластеры теряют свою однородность, а общая длина границ кластеров резко возрастает (вследствие увеличения их изрезанности). Это, в свою очередь, означает рост числа взаимодействий на каждом шаге MCS, то есть уменьшение характерного временного масштаба системы. С дальнейшим усилением диффузии число взаимодействующих на каждом шаге ячеек должно увеличиваться за счет роста неоднородности кластеров и изрезанности их границ. Но этот эффект может в той или иной степени компенсироваться увеличением размеров пространственных структур, ведущим к снижению общей протяженности их границ. Таким образом, средняя частота колебаний f_0 может иметь довольно сложную зависимость от величины диффузии. Однако общая тенденция в этой зависимости – рост f_0 . Так, например, для представленного на рис. 5 диапазона параметра D средняя частота колебаний f_0 растет и достигает некоторого предельного значения, после чего практически не изменяется.

Образование на поверхности новых автоволновых структур, при значительной диффузии охватывающих большие области решетки, приводит к появлению нового временного масштаба, связанного с их временем жизни. Это время примерно на порядок больше периода T_0 и сильно зависит от конкретной пространственной конфигурации. Поэтому в спектре колебаний полочка на низкой частоте не имеет четких очертаний пика. Пока на решетке существует в более или менее неизменном виде текущая глобальная структура, образованная интерференцией отдельных автоволн, средняя интенсивность колебаний высока. Когда структура начинает разрушаться, на поверхности происходит перестройка к новому режиму, сопровождающаяся наличием большего числа более мелких образований, что приводит к уменьшению средней интенсивности колебаний. Далее процесс формирования новой структуры заканчивается и все повторяется. Вышеописанные явления также ответственны за измене-

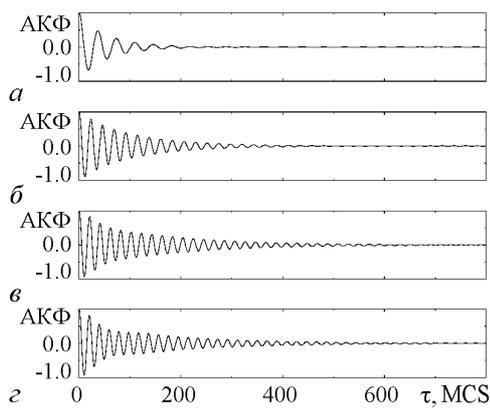


Рис. 4. АКФ процесса $x(t)$ при разных значениях диффузии D : (а) – 0.0; (б) – 1.0; (в) – 5.0; (г) – 20.0. $L = 256$ ячеек, $k_1 = k_2 = k_3 = 1.0$

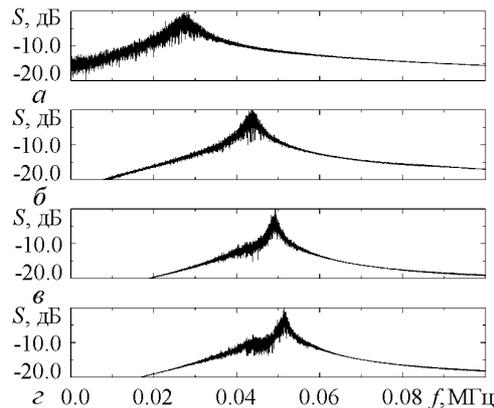


Рис. 5. Спектры мощности колебаний $x(t)$, построенные по АКФ, изображенным на рис. 4

ние характера спада автокорреляционной функции при последовательном увеличении параметра D (см. рис. 4).

Помимо прочего, образование глобальных структур на решетке и некоторая «перемешанность» состояний являются причиной роста регулярности и интенсивности колебаний. Остановимся более подробно на зависимости интенсивности колебаний от параметра диффузии D и линейных размеров решетки L . На рис. 6 представлены зависимости дисперсии процесса $x(t)$ для различных размеров решетки. Из графиков видно, что в указанном диапазоне дисперсия растет линейно с ростом параметра D . Это означает, что средняя амплитуда колебаний растет как квадратный корень из значения параметра, то есть $\sigma_x \sim \sqrt{D}$. Угол наклона характеристик на рис. 6 к оси абсцисс определяется линейным размером решетки. Запишем уравнение прямой, аппроксимирующей экспериментальные точки зависимости $\sigma_x^2(D)$ для фиксированного значения L в виде

$$\sigma_x^2(D) = kD + \sigma_x^2_0, \quad (3)$$

где $\sigma_x^2_0$ – дисперсия процесса в отсутствие диффузии, а k – угловой коэффициент прямой. Коэффициент k и слагаемое $\sigma_x^2_0$ зависят от L . Что касается второй зависимости, то ее вид качественно совпадает с аналогом для системы LLV большей размерности (см. [9]), а график хорошо аппроксимируется функцией $f(x) = ax^\alpha$, где $a = \text{const}$ и $\alpha = \text{const}$. График зависимости $k = k(L)$ изображен на рис. 7 в логарифмическом масштабе, и представляет собой прямую. Таким образом, если точки графика на рис. 7 принадлежат прямой $f(x) = \beta x + c$ (где β и c – некоторые константы), то исходная зависимость имеет следующий вид:

$$k(L) = e^c L^\beta. \quad (4)$$

Определив β и c из рис. 7, а также используя уже известные результаты для аппроксимации $\sigma_x^2_0$, на основании (3) и (4) получим итоговое оценочное выражение для значения дисперсии процесса:

$$\sigma_x^2(D, L) = c_1 L^\beta D + aL^\alpha, \quad (5)$$

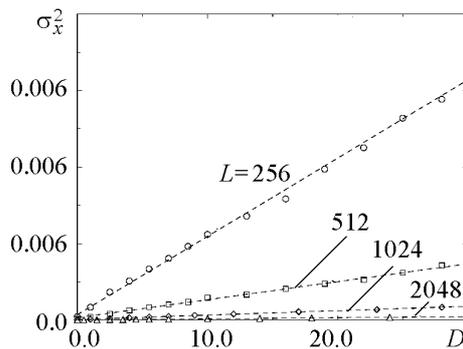


Рис. 6. Зависимость дисперсии колебаний $x(t)$ от параметра D в решетках различного размера. Параметры k_i были выбраны равными единице

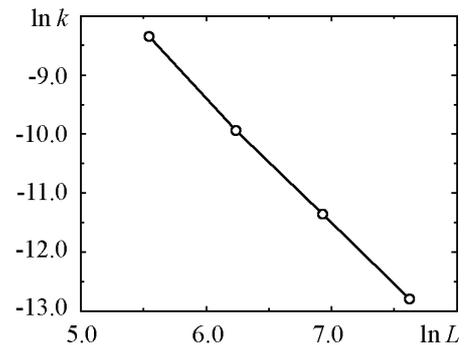


Рис. 7. Зависимость угловых коэффициентов прямых, аппроксимирующих экспериментальные точки графиков рис. 6, от линейного размера решетки в логарифмическом масштабе

где $c_1 = e^c = 32.83$, $a = 8.26$, а $\alpha \approx \beta \approx -2$. То есть $\sigma_x \sim 1/\sqrt{N}$, что свидетельствует о суперпозиции множества несинхронных колебаний на решетке.

Однако зависимости на рис. 6 можно описать формулой (5) только в приведенном на рисунке интервале значений параметра D . При более высокой степени диффузии зависимость $\sigma_x^2(D)$ становится нелинейной. При этом на поверхности решетки начинают формироваться пространственные структуры большого размера, охватывающие области порядка 100×100 ячеек и более (средний размер кластеров в системе без диффузии составляет примерно 20×20 ячеек). Отметим, что в силу случайного фактора размер, форма и тип структур не отличаются постоянством, потому приведенные выше цифры весьма условны. Кроме того, время жизни этих структур мало (в среднем не превышает 100 MCS), а зависимости их размеров от размеров всей решетки выявлено не было. При еще больших значениях диффузии происходит «отравление» решетки и колебания прекращаются. Кроме того, ход зависимости $\sigma_x^2(D)$ определяется еще и кинетическими параметрами системы. Здесь стоит отметить, что, чем ближе значения параметров k_i друг к другу, тем больше линейный участок вышеупомянутой зависимости и колебания в решетке продолжают существовать при больших значениях D .

3. Исследование влияния перемешивания на динамику решетки

Рассмотрим теперь систему с нелокальной диффузией. Как и при моделировании локальной диффузии, в этом случае дополнительным шагом к основному алгоритму также является обмен состояниями между парами случайно выбранных ячеек. Однако на этот раз выбираются не только соседние ячейки. Выбор любых двух ячеек теперь равновероятен и не зависит от их координат. Кроме того, при данном типе диффузии за один временной шаг выбранное состояние перемещается только один раз (если, конечно, случайный выбор снова не падет на него уже в новой ячейке). Интенсивность такого типа диффузии вводится как параметр $p = n/N$, где n – число пар ячеек, которые обмениваются состояниями на каждом шаге алгоритма MCS. Таким образом, если $p = 0$, то эффект нелокальной диффузии полностью отсутствует в системе, а при $p = 1.0$ в среднем каждая ячейка дважды обменяется своим состоянием с другой за $\Delta t = 1$ MCS.

В силу особенностей данной диффузии, связанных с равновероятным перемещением выбранного состояния в любую другую ячейку на поверхности, будем также называть этот тип диффузии перемешиванием. Модель системы с перемешиванием на первый взгляд может показаться несколько нереалистичной из-за нелокального характера такого типа диффузии. Однако это не совсем так. Например, в популяционных системах к подобному эффекту может привести деятельность человека, переселяющего представителей каких-нибудь малоподвижных видов с одного места на другое. Либо сами особи могут совершать дальние миграции с последующим пребыванием на одном месте (например, сезонные миграции птиц). В системах химической природы роль перемешивающего фактора могут играть сторонние частицы, осуществляющие транспорт реагентов, но сами не принимающие участия в реакциях.

Заметим, что перемешивание непосредственно не меняет значение средних концентраций состояний, однако, как и в случае с локальной диффузией, сильно влияет на пространственно-временные процессы в решетке. Изменения наблюдают-

ся как на микро-, так и на макроуровне. Рассмотрим сначала глобальное поведение. Пример временных реализаций $x(t)$ для $p = 0$ и $p = 0.03$ приведен на рис. 8. Видно, что, как и в случае с локальной диффузией, даже очень малое перемешивание меняет колебания в системе. Теперь вместо слабых флуктуаций вокруг состояния равновесия наблюдаются почти периодические колебания большой амплитуды. Причем, как показывают исследования, амплитуда колебаний больше не зависит от размера решетки. Форма колебаний напоминает колебания в динамической системе, их средний период изменяется при вариации параметров k_i так же, как и в среднеполевом приближении. Однако, если в модели среднего поля колебания являются консервативными, то в нашем случае налицо диссипативное поведение: как и прежде, траектория может быть разделена на стадии переходных и установившихся колебаний. Во время первой стадии траектория, стартуя от начальных условий, переходит на соответствующий «аттрактор» (кривые, обозначенные символами « \circ » и « Δ » на рис. 9).

Шум при моделировании методом Монте-Карло является неотъемлемой частью динамики системы. Но в предположении бесконечного размера решетки за

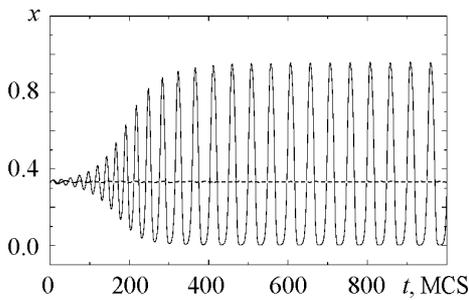


Рис. 8. Временные реализации $x(t)$ с начальными условиями $x_0 = 0.33$, $y_0 = 0.33$ для системы без перемешивания (пунктирная кривая) и для той же решетки с перемешиванием. Параметры $k_1 = k_2 = k_3 = 1.0$. Размер решетки $L = 2048$

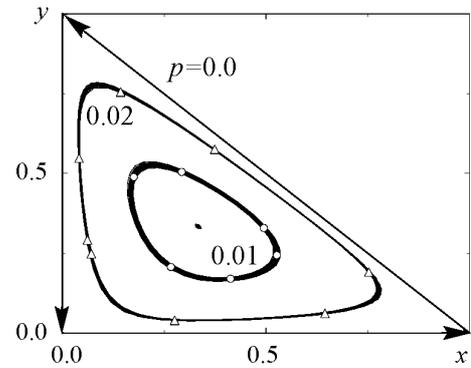


Рис. 9. «Аттракторы» для разных значений p . Размер решетки $L = 1024$. Начальные условия и параметры одинаковы для всех случаев и имеют те же значения, что и на рис. 8

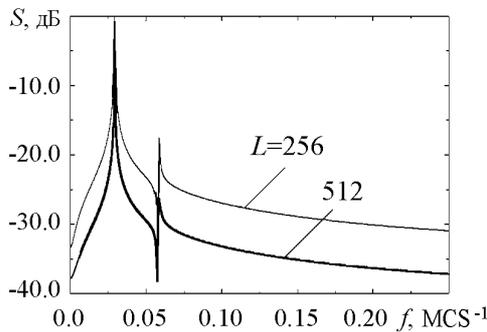


Рис. 10. Спектры мощности глобальных колебаний для двух различных размеров решетки L . Значение $p = 0.02$. Начальные условия и параметры имеют те же значения, что и на рис. 8

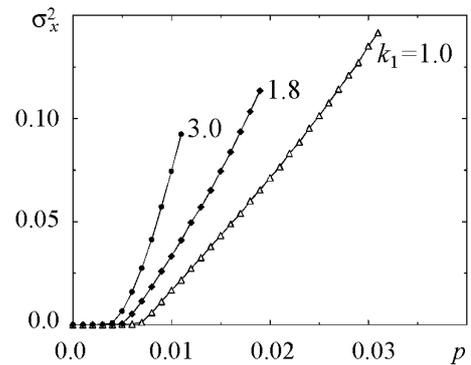


Рис. 11. Дисперсия процесса $x(t)$ в зависимости от интенсивности перемешивания p для разных значений k_1 . Параметры $k_2 = k_3 = 1.0$

счет лучшего усреднения колебания на «аттракторах» можно считать периодическими. Это подтверждается тенденциями в изменениях спектров колебаний с ростом L (рис. 10). Спектры колебаний имеют характерные пики на кратных частотах, а шумовой пьедестал значительно снижается при увеличении линейного размера решетки всего в два раза.

Рассмотрим теперь динамику системы при изменении параметра p более детально. Будем постепенно увеличивать уровень перемешивания в системе и следить за дисперсией колебаний. Графики такой зависимости отображены на рис. 11, а несколько фазовых портретов приведены на рис. 9. Пока перемешивание остается достаточно малым, значительных изменений в глобальном поведении системы не обнаруживается. Затем, при достижении p определенного порогового значения в системе происходит рождение периодических колебаний. Сразу отметим, что наличие порогового характера в появлении глобальных колебаний и их близость к периодическому процессу – главные отличия во временной динамике системы с перемешиванием по сравнению с системой с локальной диффузией. Дальнейшее увеличение перемешивания влечет за собой рост амплитуды колебаний. Как и в случае локальной диффузии, дисперсия глобальных колебаний растет линейно. Это означает, что амплитуда колебаний растет как квадратный корень из разности между текущим значением p и его критическим значением $p_{кр}$

$$\sigma_x(p) \sim \sqrt{p - p_{кр}}.$$

Таким образом, глобальные колебания рождаются так же, как предельный цикл при бифуркации Андронова–Хопфа в динамических системах. Рост амплитуды колебаний приводит к изменению их формы: они становятся релаксационными. При достаточно сильном перемешивании предельный цикл «влипает» в контур из инвариантных многообразий седловых точек равновесия, изображенный на рис. 9 стрелками. Это ведет к прекращению дальнейших колебаний на решетке и ее «отравлению» одним из состояний.

Детальный анализ глобальных колебаний показал, что их амплитуда и пороговое значение параметра $p_{кр}$ не зависят от размеров решетки, если он достаточно велик. Для небольших решеток картина иная. Это можно увидеть из рис. 12, где построена зависимость дисперсии колебаний от p для решеток разных размеров. Для малых решеток эта зависимость не имеет порогового характера: колебания начинаются практически сразу после «включения» перемешивания. Увеличение размера решетки приводит к изменению формы кривой: она становится ближе к кусочно-линейной зависимости, характерной для больших решеток. Для решеток с линейным размером более 300 элементов эта зависимость в дальнейшем почти не меняется.

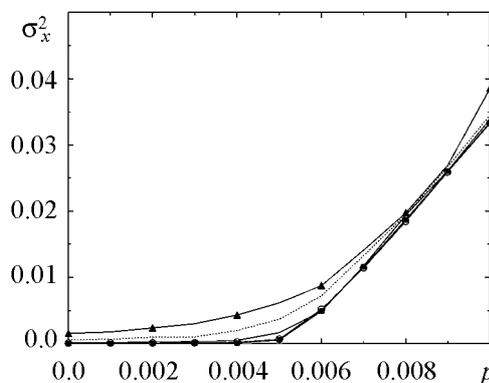


Рис. 12. Вид зависимости $\sigma_x^2(p)$ вблизи порога возникновения глобальных колебаний для разных значений L : 60 (\blacktriangle); 100 (...); 200 (—); 300 (\circ); 500 (\blacksquare). Параметры $k_1 = k_2 = k_3 = 1.0$

4. Синхронизация локальных колебаний на решетке

Из исследований глобальных колебаний видно, что малые и большие решетки ведут себя по-разному: если для больших решеток наблюдается порог возникновения колебаний, то на малых решетках колебания начинаются непосредственно с нулевого значения p . Чтобы объяснить это различие, можно предположить, что мы имеем дело с процессом синхронизации колебаний на разных частях большой решетки, результатом которого и является возникновение глобальных колебаний. Можно ли этот процесс синхронизации описать в терминах фазовой синхронизации, которая наблюдается для связанных динамических систем? Чтобы ответить на этот вопрос, нужно разделить большую решетку на малые части и рассмотреть колебания x и y на этих подсистемах.

Выберем две небольшие области на решетке, не имеющие общих границ. Обозначим средние концентрации частиц X на них как $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Рис. 13 отображает временные зависимости $x_1(t)$ и $x_2(t)$ для двух различных случаев: с перемешиванием и без. При отсутствии перемешивания колебания x_1 и x_2 выглядят несинхронными (рис. 13, а). «Включение» малого перемешивания ведет как к увеличению их амплитуды, так и к фазовой синхронизации между ними (рис. 13, б). Чтобы продемонстрировать явление фазовой синхронизации более наглядно, можно построить временную зависимость разности мгновенных фаз, полученную из этих реализаций. На рис. 14 приведены графики для трех значений p . Кривая, соответствующая случаю $p = 0$, демонстрирует броуновское движение разности мгновенных фаз, что говорит о полном отсутствии фазовой синхронизации. Если перемешивание присутствует, но значение p ниже порога возникновения глобальных колебаний ($p = 0.007$), наблюдаются короткие интервалы фазового захвата, перемежающиеся интервалами броуновского движения. Наконец, при переходе через порог ($p = 0.02$) фазы захватываются и наблюдается полная фазовая синхронизация.

В наличии синхронизации среди локальных осцилляторов в решетке с перемешиванием можно убедиться, обратившись к пространственным «сняткам» системы. На рис. 15 представлены такие «снятки» в момент времени $t = 1000$ MCS для разных значений параметра p . В отсутствие нелокальной диффузии мы наблюдаем

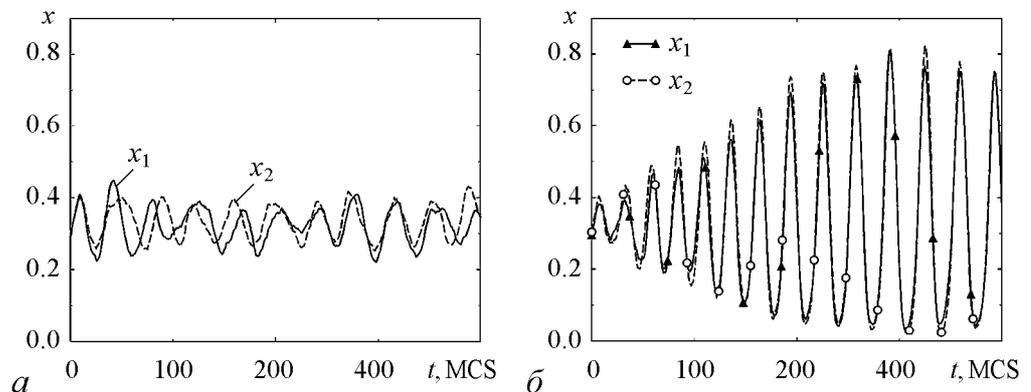


Рис. 13. Временные реализации локальных колебаний в разных участках решетки размером 64×64 ячеек при $p = 0$ (а) и $p = 0.02$ (б). Линейный размер всей решетки $L = 256$ элементов

известную кластерную структуру (см. рис. 2). Если решетку условно разделить на локальные осцилляторы, то они будут иметь случайный разброс начальных фаз, а колебания концентраций в них будут асинхронны. По мере увеличения степени перемешивания отдельные части решетки начинают вести себя как одно целое, равномерно окрашиваясь соответствующими оттенками. При сильном перемешивании (рис. 15, б) вся решетка поочередно окрашивается цветами определенных состояний, что соответствует большой амплитуде колебаний. Кластерные структуры в этом случае практически отсутствуют, либо имеют малый размер.

Фазовая синхронизация наблюдается также в системе с расстройкой по параметрам. Введем расстройку по управляющему параметру k_1 , распределенную случайным образом по решетке

$$k_1 = k_1^{(0)} + mf(i),$$

где i – номер подсистемы, f представляет собой случайную функцию i с равномерным распределением на интервале $(-k_1^{(0)}; 1 - k_1^{(0)})$, а $m < 1$ – параметр расстройки. Как известно из анализа среднего поля, значения k_1 влияют на собственную частоту колебаний. Поэтому в системе без перемешивания разность фаз почти монотонно меняется со временем (кривая 1 на рис. 16). Это означает, что средние периоды колебаний в разных областях решетки различаются. Данный случай соответствует отсутствию фазовой синхронизации. Перемешивание приводит к явлению частичной фазовой синхронизации в ее классическом смысле, когда горизонталь-

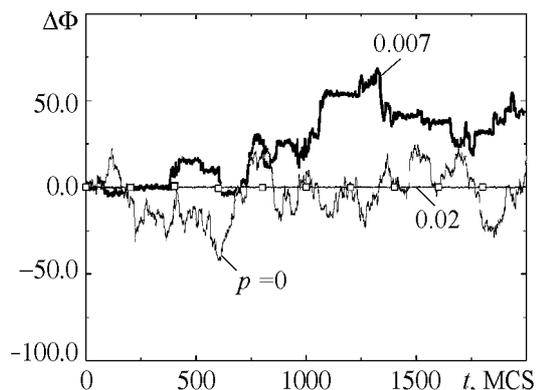


Рис. 14. Разности мгновенных фаз локальных колебаний для разных значений p

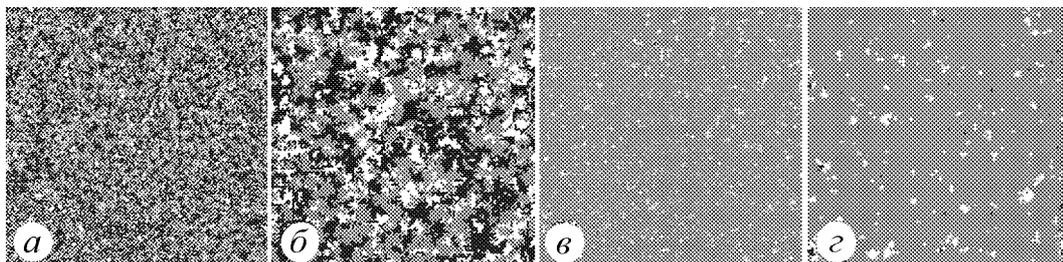


Рис. 15. а – поверхность решетки (512×512) и б – ее увеличенный участок (128×128) после переходного процесса к моменту времени $t = 2000$ MKS при различной степени перемешивания в системе p : а, б – 0.008; в, г – 0.02. Начальное состояние поверхности и пространственная динамика решетки без перемешивания приведены на рис. 2. Начальные макроусловия и параметры системы те же, что и на рис. 2

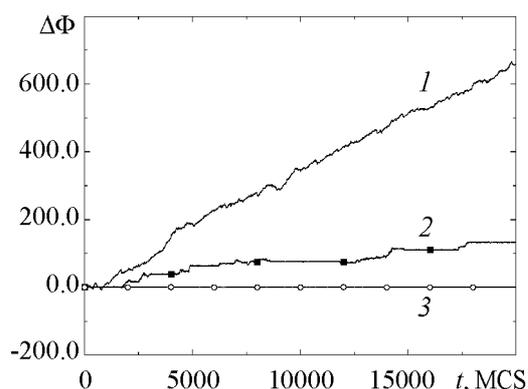


Рис. 16. Эволюция разности мгновенных фаз локальных колебаний на решетке с расстройкой по параметру k_1 для следующих значений p : 1 – 0.0, 2 – 0.025, 3 – 0.04

ные участки фазового захвата прерываются интервалами «проскальзывания» фазы (кривая 2 на рис. 16). Наконец, при достаточно большом p наступает полная фазовая синхронизация, когда разность фаз остается ограниченной все время.

Стоит отметить тот факт, что при сильном разбросе значений всех параметров k_i по подсистемам режим полной синхронизации может и не наступить при рассматриваемых значениях параметра перемешивания. Однако, увеличивая, примерно, на порядок параметр p , можно добиться такого состо-

яния решетки, когда колебания на ней обладают большей, чем без перемешивания, регулярностью, но амплитуда колебаний мала, то есть система находится вблизи равновесия. Поверхность решетки при этом напоминает начальное однородное случайное распределение состояний, что является следствием очень сильного перемешивания, а колебания в подсистемах оказываются почти полностью синхронизованными. Тем не менее, если две подсистемы значительно отличаются друг от друга, но разброс значений параметров в остальных подсистемах невелик, то полная фазовая синхронизация наступает и при малых значениях p и сопровождается ростом интенсивности колебаний в подсистемах.

Заключение

В работе исследовано влияние локальной и нелокальной диффузии на динамику системы LLV при ее моделировании с помощью метода Монте-Карло. При отсутствии диффузии ячейки, содержащие одноименные состояния, группируются во фрактальные структуры – кластеры. Процессы перехода ячеек из одной фазы в другую протекают только на границах кластеров, а их характерный размер не зависит от размеров решетки. В результате этого колебания усредненных концентраций состояний во времени представляют собой случайный процесс, интенсивность которого спадает с ростом линейного размера решетки по закону $\sigma^2 \sim 1/L^2$. Подобная зависимость характерна для ансамблей несвязанных либо слабосвязанных осцилляторов, совершающих несинхронные колебания.

Локальная диффузия увеличивает характерный пространственный масштаб системы и приводит к увеличению изрезанности границ кластеров. Вследствие этого растет число ячеек, состояния которых меняются на каждом шаге алгоритма. Это, в свою очередь, означает ускорение всех процессов и уменьшение среднего временного масштаба колебаний, а также приводит к росту регулярности и интенсивности колебаний. Зависимость дисперсии колебаний от параметра диффузии D носит линейный, возрастающий характер при малых значениях параметра ($D \lesssim 20$) и ста-

новится нелинейной при его увеличении. При достижении параметром диффузии некоторого порогового значения, зависящего от размера решетки и кинетических параметров исходной схемы, решетка «отравляется» одним из состояний, а колебания прекращаются. Угол наклона линейного участка зависимости $\sigma_x^2(D)$ определяется набором кинетических констант и размером решетки. Спектр колебаний при $D \gtrsim 10$, помимо основного, содержит дополнительный пик на меньшей частоте, соответствующей новому временному масштабу. Предположительно новый временной масштаб связан со средним временем жизни глобальной пространственной конфигурации, которая является результатом взаимодействия локальных структур и автоволн на поверхности решетки. Так как вид конкретной пространственной конфигурации, а значит и ее время жизни, определяется случайным фактором, то дополнительный пик в спектре не имеет четких очертаний.

Добавление нелокального перемешивания приводит к бифуркационному рождению глобальных колебаний в системе при превышении параметром перемешивания критического значения $p_{кр}$. Колебания носят периодический характер в предельном случае решетки бесконечного размера. Как и в случае локальной диффузии, увеличение перемешивания влечет за собой линейный рост дисперсии. В целом, механизм появления колебаний в системе очень похож на бифуркацию Андронова–Хопфа в динамических системах. При дальнейшем росте параметра перемешивания «предельный» цикл, соответствующий колебаниям усредненных концентраций, в пространстве $x-y$ «влипают» в контур, образованный инвариантными многообразиями седловых точек P_1 , P_2 и P_3 из модели среднего поля. После этого решетка «отравляется».

Как показали исследования, появление близких к периодическим колебаний в системе с перемешиванием происходит благодаря явлению фазовой синхронизации между отдельными участками решетки. При последовательном увеличении перемешивания разность мгновенных фаз двух локальных осцилляторов сначала совершает броуновское движение во времени, затем появляются интервалы фазового захвата, чередующиеся с интервалами «проскальзывания» фазы, и, наконец, разность фаз оказывается ограниченной на протяжении всего процесса. Также показано, что фазовая синхронизация под действием перемешивания возможна и в системе с расстройкой по параметрам при условии, что разброс значений параметра неидентичности (в нашем случае k_1) по подсистемам не слишком велик.

Таким образом, можно заключить, что учет шума, связанного со случайным характером взаимодействий в среде и конечным числом элементов ансамбля, в моделях Монте-Карло для систем типа LLV нарушает их консервативное поведение, предсказанное динамическим описанием среднего поля. Однако введение в систему перемешивания с заданной интенсивностью может стабилизировать колебания на предельном цикле, параметры которого не зависят от флуктуаций среды, а определяются лишь заранее заданной степенью перемешивания.

Авторы выражают свою признательность профессору Астеро Провате (Институт физической химии, научный центр «Demokritos», Афины, Греция) за проведенные обсуждения и консультации по материалам данной работы.

Библиографический список

1. Ziff R.M., Gulari E., Barshad Y. Kinetic phase transitions in irreversible surface-reaction model // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56. P. 2553.
2. Albano E.V. and Marro J. Monte Carlo study of the CO-poisoning dynamics in a model for the catalytic oxidation of CO // J. Chem. Phys. 2000. Vol. 113. P. 10279.
3. Tammaro M. and Evans J.W. Chemical diffusivity and wave propagation in surface reactions: lattice-gas model mimicking CO-oxidation with high CO-mobility // J. Chem. Phys. 1998. Vol. 108. P. 762.
4. Liu D.J. and Evans J.W. Symmetry-breaking and percolation transitions in a surface reaction model with superlattice ordering // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 84. P. 955.
5. De Decker Y., Baras F., Kruse N. and Nicolis G. Modeling the NO + H₂ reaction on a Pt field emitter tip: Mean-field analysis and Monte-Carlo simulations // J. Chem. Phys. 2002. Vol. 117. P. 10244.
6. Zhdanov V.P. Surface restructuring, kinetic oscillations and chaos in heterogeneous catalytic reactions // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 59. P. 6292.
7. Provata A., Nicolis G. and Baras F. Oscillatory dynamics in low-dimensional supports: A lattice Lotka–Volterra model // J. Chem. Phys. 1999. Vol. 110. P. 8361.
8. Tsekouras G.A. and Provata A. Fractal properties of the lattice Lotka–Volterra model // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 65. art. no 016204.
9. Shabunin A.V., Efimov A.V., Tsekouras G.A. and Provata A. Scaling, cluster dynamics and complex oscillations in a multispecies lattice Lotka–Volterra model // Physica A. 2005. Vol. 347. P. 117.
10. Monetti R., Rozenfeld A., Albano E. Study of interacting particle systems: The transition to the oscillatory behavior of a prey-predator model // Physica A. 2000. Vol. 283. P. 52.
11. Antal T., Droz M., Lipowski A. and Odor G. Critical behavior of a lattice prey-predator model // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64. P. 036118.
12. Droz M. and Pekalski A. Different strategies of evolution in a predator-prey system // Physica A. 2001. Vol. 298. P. 545.
13. Satulovsky J.E. and Tome T. Spatial instabilities and local oscillations in a lattice gas Lotka–Volterra model // J. Math. Biology. 1997. Vol. 35. P. 344.
14. Spagnolo B., Cirone M., La Barbera A. and De Pasquale F. Noise-induced effects in population dynamics // J. Phys.: Condensed Matter. 2002. Vol. 14. P. 2247.
15. Ertl G. Oscillatory kinetics and spatiotemporal selforganization in reactions at solid surfaces // Science. 1991. Vol. 254. P. 1750.
16. Ertl G., Norton P.R. and Rustig J. Kinetic oscillations in the platinum-catalyzed oxidation of CO // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 49. P. 177.
17. Voss C. and Kruse N. Chemical wave propagation and rate oscillations during the NO₂/H₂ reaction over Pt // Ultramicroscopy. 1998. Vol. 73. P. 211.
18. Theraulaz G., Bonabeau E., Nicolis S.C., Sole R.V., Fourcassie V., Blanco S., Fournier

- R., Jolly J.L., Fernandez P., Grimal A., Dalle P. and Deneubourg J.L.* Spatial patterns in ant colonies // Proceedings of National Academy of Sciences USA. 2002. Vol. 99, № 15. P. 9645.
19. *Ben-Jacob E., Shochet O., Tenenbaum A., Cohen I., Czirok A. and Vicsek T.* Generic modelling of cooperative growth patterns in bacterial colonies // Nature. 1994. Vol. 368. P. 46.
20. *Deneubourg J.L., Lioni A. and Detrain C.* Dynamics of aggregation and emergence of cooperation // Biological Bulletin. 2002. Vol. 202, № 3. P. 262.
21. *Saffre F. and Deneubourg J.L.* Swarming strategies for cooperative species // J. Theoretical Biology. 2002. Vol. 214, № 3. P. 441.
22. *Reichenbach T., Mobilia M. and Frey E.* Coexistence versus extinction in the stochastic cyclic Lotka–Volterra model. // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 74. P. 051907.
23. *Tokita K.* Statistical mechanics of relative species abundance // Ecological Informatics. 2006. Vol. 1, № 3. P. 315.
24. *Washenberger M.J., Mobilia M. and Täuber U.C.* Influence of local carrying capacity restrictions on stochastic predator-prey models // J. Phys.: Condensed Matter. 2007. Vol. 19. P. 065139.
25. *Valenti D., Schimansky-Geier L., Sailer X., Spagnolo B. and Iacomi M.* Moment equations in a Lotka–Volterra extended system with time correlated noise // Acta Physica Polonica B. 2007. Vol. 38, № 5. P. 1961.
26. *Refael A., Schiffer M. and Shnerb N.M.* Amplitude-dependent frequency, desynchronization, and stabilization in noisy metapopulation dynamics // Phys. Rev. L. 2007. Vol. 98. P. 098104.
27. *Turing A.M.* The chemical basis of morphogenesis // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B. Biological Sciences. 1952. Vol. 237, № 641. P. 37.
28. *Murray J.D.* A pre-pattern formation mechanism for animal coat marking // Journal of Theoretical Biology. 1981. Vol. 88, № 1. P. 161.
29. *Murray J.D. and Maini P.K.* A new approach to the generation of pattern and form in embryology // Science Progress. 1986. Vol. 70, № 280. Part 4. P. 539.

Поступила в редакцию 23.09.2008
После доработки 14.01.2009

**MIXING AND DIFFUSION EFFECT ON SPATIAL-TEMPORAL
DYNAMICS IN STOCHASTIC LOTKA–VOLTERRA SYSTEM
WITH DISCRETE PHASE SPACE**

A.V. Efimov, A.V. Shabunin

The influence of two types of diffusion on dynamics of stochastic lattice Lotka–Volterra model is considered in this work. The simulations were carried out by means of Kinetic Monte-Carlo algorithm. It is shown that the local diffusion considerably changes

the dynamics of the model and accelerates the interaction processes on the lattice, while the mixing results in appearance of global periodic oscillations. The global oscillations appear due to phenomenon of phase synchronization. Various characteristics of the system and their dependence on parameters have been considered in detail. Submitted results form the basis for further researches of the control possibilities for systems with competitive dynamics. They also demonstrate one of the plausible reasons of species diversity and stability of population dynamics in ecosystems.

Keywords: Spatial structures, synchronization, self-organization.



Ефимов Антон Викторович – окончил физический факультет СГУ по специальности радиофизика и электроника (2004). Работает инженером кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ, с осени 2005 года – аспирант кафедры. Автор нескольких научных публикаций. Область научных интересов: нелинейная динамика, хаос, образование структур, хаотическая синхронизация, ее количественный анализ, клеточные автоматы.

E-mail: efimov@chaos.ssu.runnet.ru

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83



Шабунин Алексей Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1990). Доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ, кандидат физико-математических наук (1998). Научные интересы – нелинейная динамика, теория колебаний, синхронизация и управление хаосом. Автор более 40 научных публикаций.

E-mail: alexey@chaos.ssu.runnet.ru

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83



НЕЛИНЕЙНО-ДИНАМИЧЕСКИЙ ПОДХОД В НЕЙРОНАУКЕ

В журнале открывается новая рубрика, посвященная проблемам нейронауки. Хотя, наверное, слово «открывается» является здесь не совсем точным, поскольку в журнале достаточно часто публикуются статьи по этой тематике. Однако в последнее время число работ, в которых методы нелинейной динамики применяются для исследования нейронных систем, стремительно растет и можно уже говорить о некотором самостоятельном направлении. Получен ряд интересных результатов о динамике нейронных систем, многие виды нейронной активности нашли адекватную интерпретацию в терминах теории динамических систем. Такие понятия, как регулярные и хаотические аттракторы, устойчивость, область притяжения, бифуркации и др., прочно вошли в обиход целого направления, связанного с изучением различных аспектов мозговой активности методами нелинейной динамики.

Проникновение методов нелинейной динамики в нейронауку объяснимо. Во-первых, благодаря значительному прогрессу в развитии методов регистрации нейронной активности (новые методы мультиэлектродной регистрации импульсной активности, оптический нейроимиджинг, позитронно-эмиссионная и магниторезонансная томографии и др.) получено большое число новых экспериментальных данных о режимах работы как отдельных нейронов, так и целых нейронных систем. Эти результаты послужили фундаментом для многих современных исследований в области нелинейной динамики нейронных систем. Во-вторых, теория динамических систем также получила значительное развитие. Сейчас построена, в основном, теория бифуркаций многомерных динамических систем и, в частности, достаточно полно изучена теория перехода от детерминированного поведения к хаотическому, проведено исследование нелинейных волн и локализованных состояний во многих пространственно-распределенных системах и др. Наконец, в-третьих, сама эволюционная природа и свойства режимов нейронных систем стимулируют привлечение методов нелинейной динамики в нейронауку.

На наш взгляд, приложение методов нелинейной динамики к исследованию нейронных систем представляется вполне обоснованным и привлекательным.

Однако, развитие нелинейно-динамического подхода наталкивается на значительные трудности, связанные с необычностью и сложностью нейронных систем. Вот лишь некоторые из таких свойств: наличие у малых ансамблей нейронов и даже у отдельных нейронов большого числа переменных и параметров; сложные, многочисленные и чаще всего нелокальные связи между нейронами; отсутствие моделей нейронных систем, полученных из первых принципов, то есть из некоторых хорошо известных и общепринятых базовых уравнений (таких, например, как уравнения Максвелла), что характерно для физических систем; отсутствие во многих случаях понимания архитектуры нейронных систем и принципов межсистемных взаимодействий. Тем не менее, несмотря на трудности, далеко не полный список которых приведен выше, нелинейно-динамический подход уже достаточно давно успешно применяется и продолжает эффективно развиваться в наше время.

В рамках новой рубрики планируется публикация работ как по исследованию нейронных систем методами нелинейной динамики, так и по экспериментам с «живыми» нейронами. Приглашаем всех коллег, интересующихся проблемами нелинейной динамики и нейронауки, принять участие в работе новой рубрики.

К.В. Анохин, чл.-корр. РАН и РАМН, д.ф.-м.н., НИИ НФ РАМН

В.И. Некоркин, д.ф.-м.н., ИПФ РАН

А.М. Сергеев, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., ИПФ РАН



ЭФФЕКТЫ ФАЗОВОЙ ПЕРЕУСТАНОВКИ В АНСАМБЛЯХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ НЕЙРОНОВ ФИТЦХЬЮ–НАГУМО

Д.В. Касаткин

Приводятся результаты исследования явления автопереустановки фазы колебаний в ансамблях взаимодействующих модельных нейронов с различной геометрией связей (локальных и глобальных). Показано, что в результате воздействия на один из нейронов ансамбля одиночного стимула-импульса фаза колебаний взаимодействующих нейронов переустанавливается к значению, определяемому амплитудой и длительностью импульса и не зависящему от начальных фаз. Получены условия на параметры внешнего воздействия (амплитуда, длительность импульса), при которых эффект фазовой переустановки реализуется в ансамбле взаимодействующих элементов. Исследовано влияние на параметры внешнего воздействия величины межэлементных связей. Определены зависимости установившейся фазы колебаний элементов ансамбля от параметров стимула.

Ключевые слова: Фазовая авто-переустановка, нейронный ансамбль, локальные и глобальные связи.

Введение

Типичным свойством различных нейронных систем является формирование структур колебательной активности, играющих важную роль в функционировании этих систем. Например, такие структуры в виде фазовых кластеров различной пространственной конфигурации определяют шаблоны мышечных сокращений в системе моторного контроля [1,2] или наблюдаются в сигналах ЭЭГ головного мозга [3–5]. Поэтому исследование ансамблей взаимодействующих модельных нейронов, позволяющих описать и объяснить основные механизмы формирования спонтанных и стимул-индуцированных структур активности, наблюдаемых в живых нейронных системах, является очень интересной и важной задачей. Решение данной задачи позволит лучше понять базовые принципы функционирования таких систем.

Одним из известных в настоящее время механизмов, обеспечивающих формирование и поддержание фазовых кластеров, является эффект фазовой переустановки. Этот эффект был обнаружен нейрофизиологами при исследовании нейронов нижних олив, входящих в оливо-мозжечковую систему. Было показано, что в ответ на воздействие внешнего стимула подпороговые колебания нейронов нижних олив изменяют

свою фазу, переустанавливаясь в синфазные [6]. При этом значение новой установившейся фазы не зависит от момента прихода стимула и определяется только параметрами самого стимула. Динамический механизм данного явления был детально изучен в работах [7–9]. В этих работах предложена математическая модель, позволяющая описать основные режимы активности отдельного нейрона нижних олив, и на основе введенной модели объяснен эффект фазовой переустановки. На основе этого эффекта можно формировать в ансамбле невзаимодействующих нейронов фазовые кластеры заданной пространственной конфигурации [8] благодаря выбору соответствующей амплитуды стимула, который воздействует на каждый конкретный нейрон. Состояние, когда нейроны не связаны, не является постоянным и может смениться на состояние, которое характеризуется наличием взаимодействия нейронов друг с другом. Заметим, что нейроны нижних олив взаимодействуют с другими нейронами посредством электрических синапсов.

В этой статье исследуется влияние связи между нейронами нижних олив на эффект фазовой автоперустановки. Мы рассмотрим характерные особенности данного явления на примере ансамблей электрически связанных модельных нейронов как с локальным (взаимодействие с ближайшими соседями), так и глобальным (каждый взаимодействует с каждым) типами связи. Для моделирования собственной динамики нейронов будем использовать, аналогично [8], модель ФитцХью–Нагумо.

Динамические процессы в рассматриваемых моделях нейронных ансамблей описываются следующими уравнениями:

для случая локального характера взаимодействия между нейронами

$$\begin{aligned}\dot{u}_j &= f(u_j) - v_j + d(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}), \\ \dot{v}_j &= \varepsilon_j(u_j - I - \delta(j, l)I_{ext}(t))\end{aligned}\quad (1)$$

и для случая ансамблей глобально связанных нейронов

$$\begin{aligned}\dot{u}_j &= f(u_j) - v_j + d \sum_{k=1}^N (u_k - u_j), \\ \dot{v}_j &= \varepsilon_j(u_j - I - \delta(j, l)I_{ext}(t)),\end{aligned}\quad (2)$$

$$j = 1, 2, \dots, N, \quad u_0(t) \equiv u_1(t), \quad u_{N+1}(t) \equiv u_N(t),$$

где

$$f(u_j) = u_j(u_j - a)(1 - u_j), \quad \delta(j, l) = \begin{cases} 0, & j \neq l, \\ 1, & j = l. \end{cases}\quad (3)$$

Здесь j – номер элемента (нейрона); N – число элементов, образующих ансамбль; переменная u_j качественно описывает динамику мембранного потенциала j -го нейрона ансамбля; v_j – совокупность действия всех ионных токов, проходящих через мембрану этого нейрона и отвечающих за восстановление состояния покоя мембраны. Параметр I задает уровень деполяризации нейрона; ε_j – параметр, определяющий характерные временные масштабы импульса возбуждения; d характеризует величину взаимодействия между нейронами. Сигнал $I_{ext}(t)$ описывает действие внеш-

него стимула в виде прямоугольного импульса определенной амплитуды и длительности, а функция $\delta(j, l)$ задает номер элемента l , на который оказывается внешнее воздействие.

Будем рассматривать ансамбли, элементы которых в отсутствие связей ($d = 0$) находятся в режиме так называемых подпороговых колебаний [7]. Парциальный элемент характеризуется простой индивидуальной динамикой [8], определяемой наличием в фазовом пространстве отдельного элемента неустойчивого состояния равновесия и устойчивого предельного цикла. При наличии связей ($d \neq 0$) и в отсутствие внешнего воздействия ($I_{ext}(t) = 0$) элементы ансамбля также демонстрируют колебательную активность в форме подпороговых колебаний. При этом наличие связей приводит к взаимной синхронизации колебаний элементов ансамбля. В ансамбле устанавливается режим, при котором элементы совершают колебания с одинаковой частотой, а разность фаз колебаний элементов ансамбля близка к нулю.

1. Переустановка фазы в ансамбле взаимосвязанных элементов с локальным типом взаимодействия

Исследуем влияние локальных связей между элементами на эффект фазовой переустановки. Для этого рассмотрим динамику неавтономной системы (1), ограничившись случаем малого ансамбля $N = 3$. Зафиксируем для определенности следующие значения параметров системы: $a = 0.01$, $I = 0.01$, $\varepsilon_1 = 0.02$, $\varepsilon_2 = 0.0201$, $\varepsilon_3 = 0.0198$. Параметры системы (1) выбираются таким образом, чтобы элементы ансамбля совершали квазисинусоидальные колебания [8, 9], которые можно интерпретировать как подпороговые колебания нейрона. Заметим, что механизм фазовой переустановки для отдельного элемента связан с сильным сжатием фазового объема вследствие релаксационного характера системы, поэтому и в данном случае выбираем параметры $\varepsilon_i \ll 1$ ($i = 1, 2, 3$). Кроме того, рассмотрим более общий случай, когда объединяемые элементы имеют небольшую расстройку по параметру. Таким образом, мы объединяем в ансамбль элементы не являющиеся идентичными и в отсутствие связи совершающие колебания сравнительно малой амплитуды (подпороговые колебания) с незначительно различающимися периодами. Включение связи приводит к тому, что все элементы начинают совершать колебания (по форме напоминающие колебания отдельного элемента) с одинаковым периодом. В фазовом пространстве данному режиму соответствует устойчивый предельный цикл с некоторым периодом T . Для дальнейшего рассмотрения определимся с методом вычисления относительной фазы колебаний элементов ансамбля. С этой целью введем в рассмотрение в качестве опорного сигнала некоторый периодический сигнал $u_{ref}(t)$, период которого совпадает с периодом предельного цикла T , определяющего режим подпороговых колебаний взаимодействующих элементов ансамбля (1). Относительную фазу колебаний будем определять следующим образом:

$$\vartheta = 2\pi \frac{t_u - t_{u_{ref}}}{T}, \quad (4)$$

где $t_{u_{ref}}$ и t_u – моменты времени, отвечающие максимумам опорного сигнала и одного из элементов ансамбля. Для вычисления фазы можно выбрать колебания любого

из элементов ансамбля, поскольку в системе реализуется режим, когда колебания элементов синфазны. Для определенности будем отсчитывать относительную фазу по колебаниям первого элемента u_1 .

При исследовании влияния связи на эффект автопереустановки фазы на один из нейронов (элемент с номером l) подавался внешний сигнал в виде прямоугольного импульса с амплитудой I_{st} и длительностью τ . Моменты поступления импульса совпадают с максимумом опорного сигнала. После прекращения действия стимула и завершения процесса установления амплитуда и частота колебаний возвращаются к значениям, определяемым невозмущенным предельным циклом, и после этого измеряется фаза колебаний ансамбля способом, изложенным выше. В результате воздействия стимула фаза колебаний изменяет свое значение от начального ϑ_1 к некоторому новому значению ϑ_2 . На рис. 1, *a* представлен этот процесс для ансамбля (1) трех взаимодействующих элементов-нейронов при внешней стимуляции первого элемента ($l = 1$).

Рассмотрим как происходит процесс фазовой переустановки в фазовом пространстве системы (1). Исследуемая система имеет единственное состояние равновесия в точке $O(I, f(I), I, f(I), I, f(I))$, которое при выбранных значениях параметров является неустойчивым. Наличие малых параметров позволяет разделить фазовое пространство системы на области быстрых и медленных движений. В зависимости от параметров, движение системы (1) либо локализовано в области медленных движений, либо состоит из участков, принадлежащих областям быстрых и медленных движений. В отсутствие стимула ($I_{ext}(t) = 0$) существует устойчивый предельный цикл (отвечает подпороговым колебаниям элементов), определяемый медленными движениями системы. Положение изображающей точки на предельном цикле, существующем в системе при $I_{ext}(t) = 0$, отвечает соответствующему значению фазы колебаний элементов ансамбля. Рассмотрим процесс преобразования кривой, представляющей проекцию предельного цикла на плоскость фазовых переменных первого элемента при воздействии на систему прямоугольного импульса (рис. 1, *б*). В течение времени действия стимула динамика ансамбля описывается автономной системой (1) с эффективным параметром деполяризации первого нейрона $I + I_{st}$. Амплитуда импульса I_{st} выбирается таким образом, что динамика системы (1) определяется наличием в фазовом пространстве состояния равновесия $O(I + I_{st}, f(I + I_{st}) - dI_{st}, I, f(I) + dI_{st}, I, f(I))$, которое становится устойчивым. Это условие выполняется как в области положительных, так и отрицательных значений I_{st} при превышении некоторого значения эффективного параметра деполяризации ($I + I_{st}$). За время действия стимула $t \in (0, \tau)$ траектории системы будут стремиться к устойчивому состоянию равновесия. Образ исходной кривой, отвечающей проекции предельного цикла, в момент окончания импульса будет определяться некоторой замкнутой кривой при $t = \tau$. После завершения действия импульса $t > \tau$ динамика системы определяется исходным параметром деполяризации первого нейрона I , и образ кривой продолжает эволюционировать по траекториям невозмущенной системы (1). При движении вдоль устойчивых областей (по отношению к быстрым движениям $v_i = v_i^0 = \text{const}$, $i = 1, 2, 3$) многообразия медленных движений происходит сжатие образа. Об этом свидетельствует вид замкнутых кривых при $t = 1.5T$, $t = 2.4T$, $t = 2.6T$. В результате исходный образ возвращается в окрестность устойчивого предельного цикла ($t = 6T$). Процесс, приведенный на рис. 1, *б*, повторяет поведение одного элемента [9]. Таким образом, механизм фазовой переустановки в

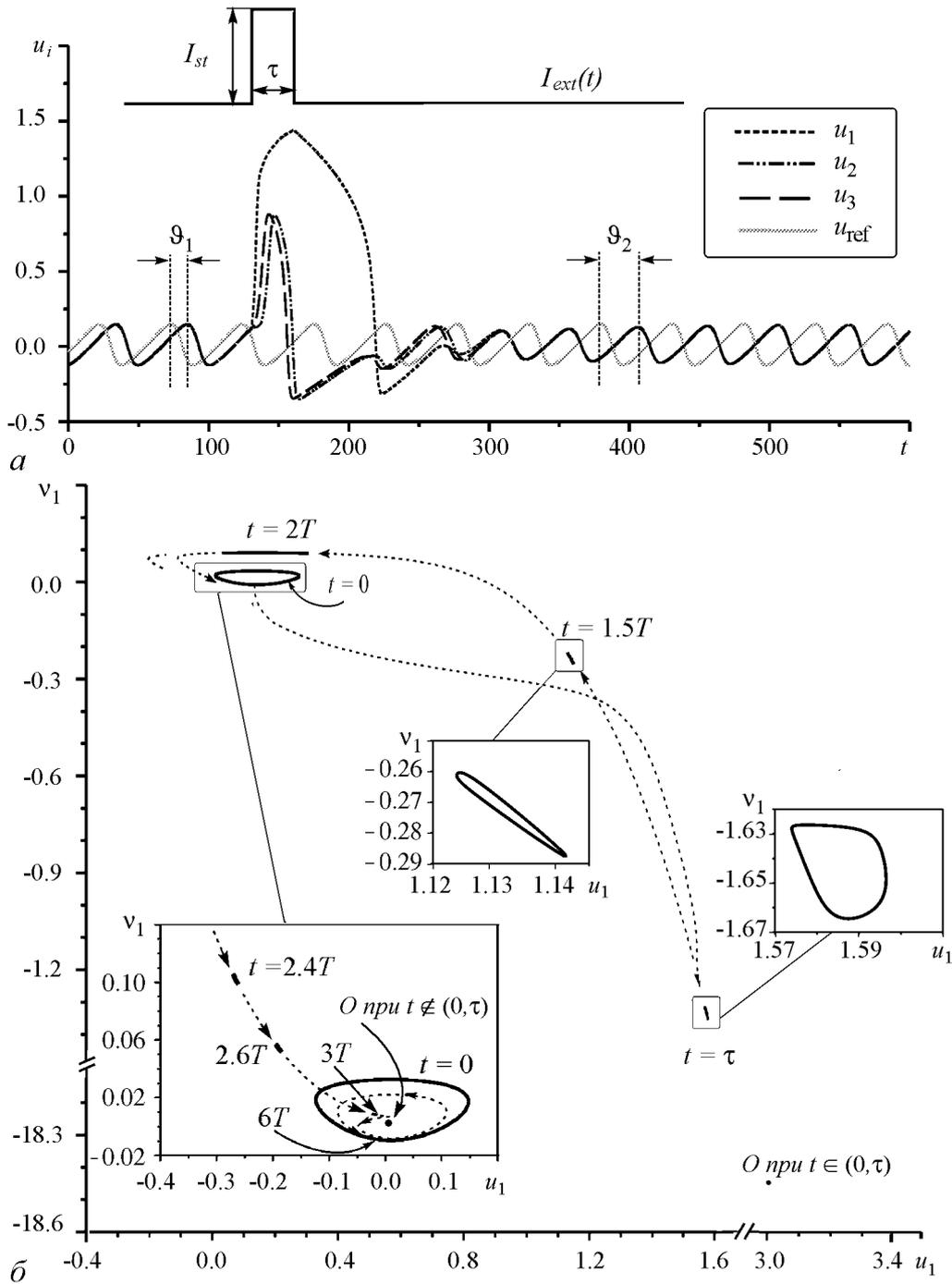


Рис. 1. *a* – временные реализации колебаний трех элементов ансамбля (1) и опорного колебания $u_{ref}(t)$ при воздействии стимула-импульса на первый элемент ансамбля: (----) u_1 , (-.-.-) u_2 , (—) u_3 , (—) u_{ref} . *b* – преобразование замкнутой кривой, отвечающей проекции предельного цикла на плоскость (u_1, v_1) . Последовательность мгновенных снимков 500 начальных условий, равномерно распределенных по предельному циклу при $t = 0$. Параметры: $d = 0.1$, $I_{st} = 3$, $\tau = 0.7T$

ансамблях взаимодействующих элементов, как и в случае парциального элемента, связан с наличием в фазовом пространстве областей с сильным сжатием фазового объема вследствие релаксационного характера системы ($\varepsilon_j \ll 1, j = \overline{1, N}$).

Наличие в системе (1) эффекта фазовой переустановки означает, что при воздействии внешнего стимула на ансамбль, характеризуемый любым значением фазы ϑ_1 , выбранным в интервале $[0, 2\pi]$, фаза установившихся колебаний ϑ_2 будет одинаковой. Для иллюстрации такого поведения построим отображение фазы, полученное в результате действия последовательности импульсов, синхронизованных по времени с максимумом опорного сигнала и с достаточно большим интервалом следования (достаточным, чтобы траектория вернулась к предельному циклу невозмущенной системы (1))

$$\vartheta_{i+1} = \Pi(\vartheta_i), \quad (5)$$

где ϑ_i – фаза колебаний на момент прихода i -го стимула. Отображение (5) является отображением окружности и определено на интервале $[0, 2\pi]$. На рис. 2 приведен ряд кривых фазового отклика, определяемых функцией Π (нормированной на 2π) и построенных для различных значений связи d и элементов ансамбля l , на которые поступает внешнее воздействие.

Каждая кривая отображения (5), приведенная на рис. 2, имеет единственную неподвижную точку. Координаты этих неподвижных точек определяют фазу, установившуюся в системе (1) в результате действия последовательности импульсов, и зависят от параметров стимула. Представленные зависимости демонстрируют, что в результате действия внешнего стимула с фиксированными характеристиками ($I_{st} = 3, \tau = 0.7T$) любые начальные фазы колебаний из интервала $[0, 2\pi]$ отображаются в некоторую окрестность $\delta\vartheta$ неподвижной точки. Величина $\delta\vartheta$ показывает результат действия отображения (5) на интервал $[0, 2\pi]$ и определяет одну из характеристик исследуемого эффекта – точность переустановки фазы. Нетрудно заметить, что интервал $\delta\vartheta$ изменяется в зависимости от величины связи и порядкового номера элемента ансамбля, на который подается внешнее воздействие, и при определенных условиях $\delta\vartheta \rightarrow 0$, а функция фазового отклика близка к константе.

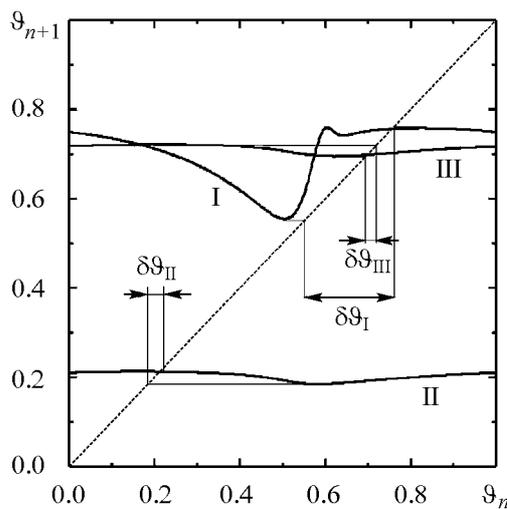


Рис. 2. Отображение фазы при внешней стимуляции системы (1) нормированное на 2π . Стимул: $I_{st} = 3.0, \tau = 0.7T$; I: $d = 0.1, l = 1$; II: $d = 0.2, l = 1$; III: $d = 0.1, l = 2$

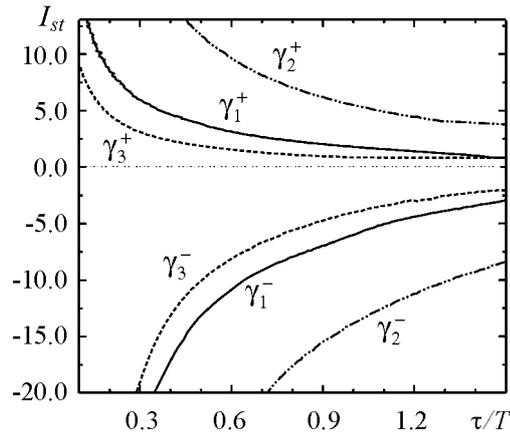


Рис. 3. Границы областей существования фазовой переустановки в ансамбле (1) на плоскости параметров внешнего стимула-импульса: (—) $d = 0.2, l = 1$; (-.-.-) $d = 0.1, l = 1$; (- - - -) $d = 0.1, l = 2$

Рассмотрим более подробно, как влияют на точность переустановки фазы параметры стимула (амплитуда, длительность импульса и номер элемента, на который поступает импульс) и величина связи. На рис. 3 представлен график, определяющий условия на параметры внешней стимуляции, при которых наблюдается эффект фазовой переустановки в системе (1). Кривые определяют границы областей параметров стимула, при воздействии которого на систему (1) разброс значений переустановленных фаз $\delta\vartheta$ не превышает 3% от диапазона изменения значений начальных фаз $[0, 2\pi]$. Выполнение условия $\delta\vartheta \leq 0.03$ будем считать достаточным критерием для существования эффекта фазовой переустановки в рассматриваемых ансамблях. Области параметров стимула, при которых наблюдается фазовая переустановка, расположены выше кривых γ_j^+ и ниже кривых γ_j^- ($j = 1, 2, 3$), отвечающих различным значениям параметров d и l . Анализируя представленные зависимости, можно отметить следующее: исследуемый эффект наблюдается как при стимуляции положительным, так и отрицательным импульсом; однако во втором случае требуется приложить импульс гораздо большей амплитуды и длительности. Кроме того, на требуемые параметры стимула также влияет величина связи между элементами. Увеличение связи приводит к сближению границ областей существования эффекта, то есть переустановка фазы наблюдается при действии импульса меньшей амплитуды и длительности. Данный факт подтверждает расположение границ существования эффекта, построенных для случая воздействия импульса, поступающего на первый элемент ансамбля (1) для различных значений связи. Еще большее влияние на данные характеристики эффекта оказывает выбор элемента ансамбля (1), на который подается внешнее воздействие. Для этого достаточно сравнить взаимное расположение кривых $\gamma_2^{+,-}$ и $\gamma_3^{+,-}$ на рис. 3, отвечающих значению связи $d = 0.1$ и различным значениям l .

Еще одной характеристикой исследуемого эффекта является зависимость установившейся фазы колебаний ансамбля от параметров стимула. На рис. 4 представлены зависимости разброса фаз $\delta\vartheta$ и значения установившейся фазы колебаний от амплитуды импульса (при фиксированной длительности $\tau = 0.5T$), поступающего во второй элемент ($l = 2$) ансамбля (1). Эти зависимости вычислены для 150 временных реализаций с начальными фазами, равномерно распределенными в ин-

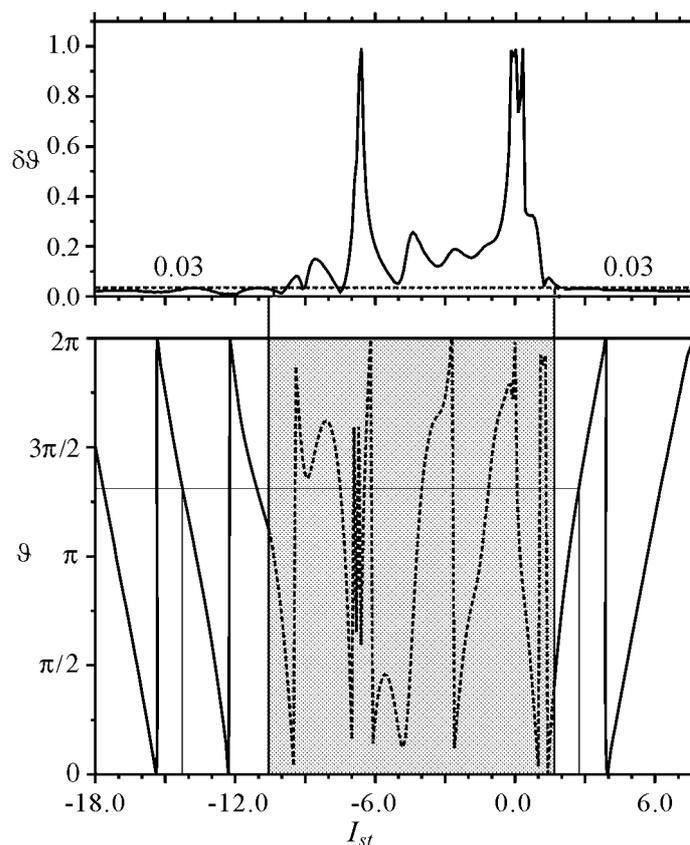


Рис. 4. Зависимости разброса фаз колебаний $\delta\theta$ (верхний график) и значения установившейся фазы колебаний (нижний график) от амплитуды импульса фиксированной длительности $\tau = 0.5T$, воздействующего на второй элемент ($l = 2$) ансамбля (1) при $d = 0.1$

тервале $[0, 2\pi]$. Заметим, что увеличение числа временных реализаций не влияет на результаты исследования характеристик эффекта. Верхний график свидетельствует, что при малой амплитуде импульса фазовой переустановки не происходит (серая область на нижнем графике), фаза остается распределенной в диапазоне значений, превышающем определенные нами 3% от интервала $[0, 2\pi]$. Для значений амплитуды I_{st} вне закрашенной области величины установившихся фаз сосредоточены в малой окрестности некоторого среднего значения, зависимость которого от амплитуды приведена на нижнем графике. Величина установившейся фазы может принимать любые значения в интервале $[0, 2\pi]$ в зависимости от амплитудного воздействия независимо от начальной фазы.

2. Переустановка фазы в ансамбле глобально связанных элементов

Рассмотрим теперь особенности эффекта фазовой переустановки в ансамбле трех глобально связанных элементов, динамика которого в этом случае описывается системой уравнений (2). При рассмотрении ансамбля глобально связанных элементов используется та же методика определения относительной фазы колебаний элементов ансамбля, что и введенная ранее для системы (1). Заметим, что для случая глобальных связей не имеет принципиального значения, на какой элемент посту-

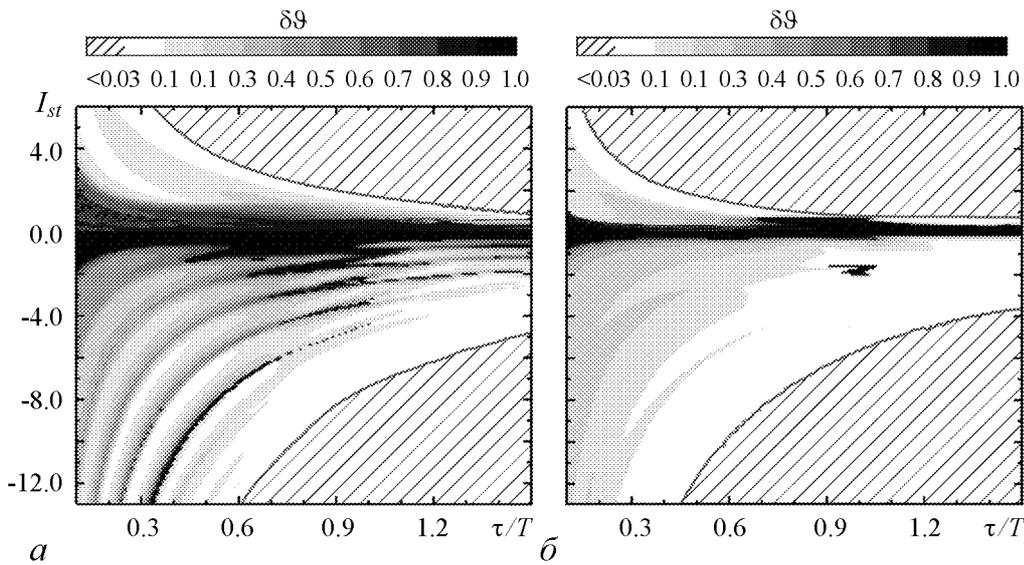


Рис. 5. Двухпараметрические диаграммы зависимости точности фазовой переустановки $\delta\vartheta$ от параметров стимула-импульса, действующего на один из элементов ансамбля (2) при: $d=0.05$ (а) и $d=0.1$ (б)

пает внешний стимул, поэтому далее для определенности считаем, что происходит стимуляция первого элемента $l = 1$. Будем рассматривать систему (2) при тех же значениях параметров, что и систему (1).

На рис. 5 приведены двухпараметрические диаграммы, иллюстрирующие зависимость точности фазовой переустановки ансамбля (2) для $N = 3$ от значений параметров импульса. Цветом задается значение величины $\delta\vartheta$ (точность переустановки) в соответствии со шкалой, приведенной на рисунке. Представленные диаграммы позволяют проследить динамику данной характеристики при изменении величин I_{st} и τ . Построение этих диаграмм проводилось на основе анализа 150 временных реализаций с начальными фазами колебаний элементов, равномерно распределенными в интервале $[0, 2\pi]$. Области существования эффекта, определяемые в соответствии с введенным ранее критерием ($\delta\vartheta < 0.03$), выделены штриховкой. Сравнение рис. 3 с рис. 5, б свидетельствует, что поведение границ этих областей качественно не изменилось по сравнению с системой (1), но поменялось их расположение в пространстве параметров импульса $(\tau/T, I_{st})$. Заметим, что при относительно малой амплитуде импульса фазовой переустановки не происходит, разброс установившихся после действия импульса фаз остается распределенным практически на весь интервал от 0 до 2π . При увеличении амплитуды импульса разброс установившихся фаз $\delta\vartheta$ уменьшается, и начиная с некоторого граничного значения выполняется условие фазовой переустановки ($\delta\vartheta < 0.03$). Причем, это граничное значение амплитуды тем меньше, чем больше длительность импульса и параметр связи d . Как и в случае локальных связей, переустановка может быть осуществлена положительным и отрицательным импульсом, при этом точность также выше для положительного импульса.

Исследуем теперь зависимость установившейся фазы от амплитуды и длительности стимула. На рис. 6 представлены такие зависимости от амплитуды импульса для трех различных значений τ . Нетрудно заметить, что при увеличении длительно-

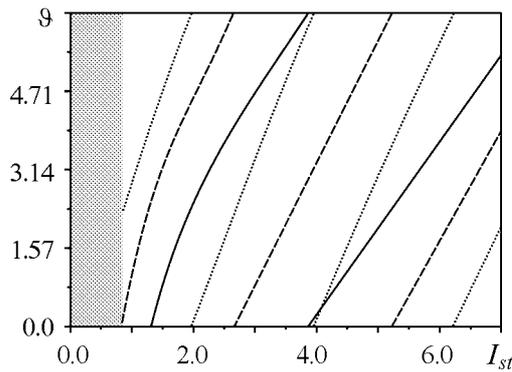


Рис. 6. Зависимость установившейся фазы колебаний элементов системы (2) от амплитуды импульса при $d = 0.1$ для трех различных значений длительности τ : (—) $0.5T$, (- - -) $0.7T$, (...) $0.9T$; серая область отвечает значениям параметров импульса, где нет фазовой переустановки

сти импульса закон изменения фазы с ростом амплитуды (в области существования эффекта) становится линейным, сужается интервал значений I_{st} , находясь внутри которого можно изменять величину установившейся фазы от 0 до 2π .

Проведем сравнительный анализ характеристик эффекта фазовой переустановки для ансамблей (1)-(2), состоящих из трех взаимодействующих элементов. Рис. 7 дает представление о взаимном расположении границ областей существования эффекта на плоскости параметров внешнего стимула для ансамблей (1)-(2), характеризуемых различными значениями параметра связи d . Анализируя зависимости для ансамблей с различным типом связи, можно отметить одно общее свойство: увеличение параметра связи d позволяет получить фазовую переустановку при стимуляции более слабым и коротким импульсом. Для этого достаточно сравнить взаимное расположение границ существования эффекта $\gamma_1^{+,-}$ и $\gamma_2^{+,-}$ для случая локальных связей, и $\gamma_3^{+,-}$ и $\gamma_4^{+,-}$ для глобально связанных элементов. Это объясняется тем, что при сильных связях система взаимодействующих элементов ведет себя как одно целое. Еще больше такое поведение усиливает наличие глобального типа связи, когда каждый элемент ансамбля взаимодействует с остальными. Данный факт находит свое подтверждение при сравнении взаимного расположения границ эффекта для систем (1) и (2) с одинаковыми значениями параметров (например, кривые $\gamma_1^{+,-}$ и $\gamma_3^{+,-}$ на

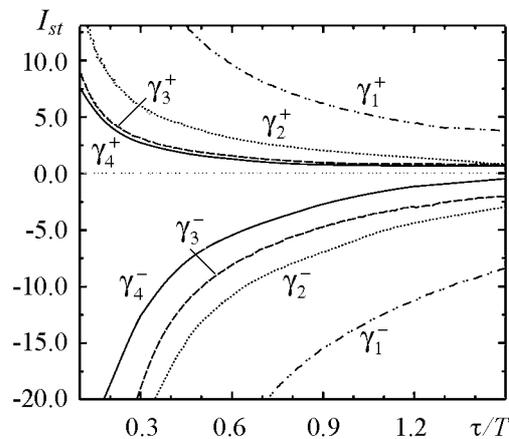


Рис. 7. Границы областей существования фазовой переустановки на плоскости параметров импульса для ансамблей трех локально и глобально связанных нейронов. Глобальные связи: (- - -) $d = 0.1$, (—) $d = 0.2$. Локальные связи: стимул ($l = 1$), (-.-.-) $d = 0.1$, (...) $d = 0.2$. Области существования эффекта фазовой переустановки: $I_{st} > \gamma_i^+(\tau)$, $I_{st} < \gamma_i^-(\tau)$, $i = \overline{1, 4}$

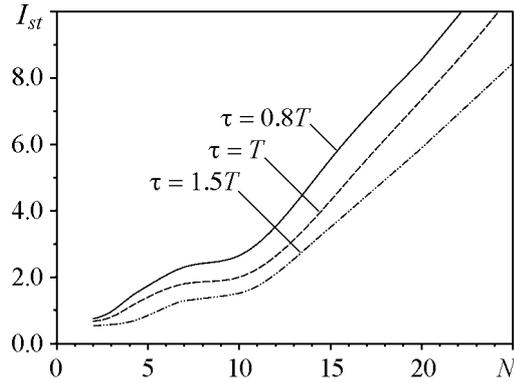


Рис. 8. Зависимость минимальной амплитуды импульса, обеспечивающего фазовую переустановку при увеличении числа элементов, образующих ансамбль (2) для трех фиксированных значений длительности импульса τ . Параметры: $a = 0.01$, $I = 0.01$, $\varepsilon_j = 0.02$, ($j = \overline{1, N}$), $d = 0.1$

рис. 7). Следовательно, в данном случае при одних и тех же значениях параметров наличие глобальных связей позволяет получить эффект фазовой переустановки при воздействии на систему более слабым и коротким импульсом. Однако, как мы отмечали ранее, для ансамблей с локальными связями существенное значение играет то, на какой элемент подается внешнее воздействие. Так, например, при стимуляции второго элемента ($l = 2$) в ансамбле с локальными связями (при $d = 0.1$) границы областей существования эффекта фазовой переустановки совпадают с границами эффекта для ансамбля глобально связанных элементов при тех же значениях параметров (кривые $\gamma_3^{+, -}$). Таким образом, если воздействие оказывается на второй элемент ($l = 2$), то в случае ансамблей, состоящих из трех элементов, рассматриваемые типы связей являются равнозначными для наблюдаемого эффекта.

До этого все представленные результаты относились к случаю ансамблей, состоящих из трех взаимодействующих элементов. Далее мы рассмотрим, как влияет на характеристики исследуемого эффекта увеличение числа взаимодействующих элементов N , образующих ансамбль. Численное исследование моделей (1) и (2) для различных N показало, что данный эффект наблюдается не только в случае малых ансамблей ($N = 3$), но и в системах, состоящих из большего числа взаимодействующих элементов. Увеличение числа объединяемых элементов приводит к изменению условий на параметры стимула, обеспечивающие существование эффекта фазовой переустановки. Для достижения эффекта в ансамблях, образованных всего из нескольких десятков взаимодействующих элементов требуется существенно увеличить амплитуду и длительность воздействующих импульсов. При этом существенно возрастает время процессов установления исходного режима подпороговых колебаний после прекращения действия стимула. В качестве примера на рис. 8 приведены зависимости минимальной амплитуды возбуждающего стимула ($I_{st} > 0$), обеспечивающего фазовую переустановку, при увеличении числа элементов в ансамбле с глобальными связями. Представленные зависимости демонстрируют, что переход к большим ансамблям требует существенного увеличения амплитуды импульса для достижения исследуемого эффекта. При этом минимальное значение амплитуды воздействующего импульса тем выше, чем короче импульс. Еще большее увеличение параметров стимула (амплитуда, длительность) требуется при подавляющем импульсном воздействии ($I_{st} < 0$). При рассмотрении ансамблей с локальными связями с ростом числа элементов наблюдаются изменения, аналогичные тем, что

имеют место для ансамблей с глобальными связями. Для этих изменений характерно еще большее, по сравнению с глобальным типом взаимодействия, увеличение граничных значений параметров стимула, обеспечивающих эффект. Для больших ансамблей локально связанных элементов ($N > 3$) варьирование номера стимулируемого элемента не позволяет значительно снизить требования на параметры стимула, обеспечивающие наличие эффекта, как это было для случая $N = 3$. Одним из возможных способов достижения эффекта в большом ансамбле, состоящем даже из сотен элементов, является воздействие достаточно длительным импульсом (несколько периодов колебаний), чтобы траектория успела как можно ближе подойти к устойчивому состоянию равновесия (существует в системе на протяжении времени действия стимула).

Заключение

В работе исследовано явление фазовой переустановки в ансамблях взаимодействующих элементов-нейронов ФитцХью–Нагумо с локальным и глобальным типом взаимодействия. Показано, что при воздействии на ансамбль взаимодействующих элементов импульсом наблюдается переустановка фазы колебаний элементов к значению, не зависящему от начальной фазы (на момент прихода стимула-импульса) и определяемому только параметрами самого импульса. Механизм фазовой переустановки в ансамблях взаимодействующих элементов, как и в случае отдельного элемента, связан с наличием в фазовом пространстве областей с сильным сжатием фазового объема вследствие релаксационного характера системы. Изучены зависимости характеристик эффекта – значение установившейся фазы и точность ее установки – от величины взаимодействия и параметров стимула. Фазовая переустановка имеет место как для положительной амплитуды импульса ($I_{st} > 0$), так и для отрицательной ($I_{st} < 0$). Однако во втором случае для достижения необходимой точности эффекта ($\delta\vartheta < 0.03$) требуется импульс с большим значением амплитуды и длительности. Точность фазовой переустановки при фиксированных параметрах внешнего воздействия выше для ансамблей, характеризующихся более высоким значением величины межэлементного взаимодействия. Установлено, что в случае локального характера взаимодействия эта характеристика также зависит от элемента, на который оказывается внешняя стимуляция. Для переустановки фазы не требуется подавать импульс на каждый элемент ансамбля. Достаточно воздействия стимула-импульса на один из элементов ансамбля.

Эффект фазовой автоперустановки позволяет получить синхронизацию и формирование фазовых кластеров в нейронной сети, состоящей из нескольких одинаковых групп взаимодействующих между собой нейронов. Элементы взаимодействуют между собой внутри отдельно взятой группы и не связаны с элементами других групп. При одновременном воздействии на один элемент из каждой группы стимулирующим импульсом одинаковой амплитуды, происходит переустановка фазы колебаний элементов в каждой группе к одному и тому же значению, то есть получаем синхронизацию колебаний элементов всей сети. Благодаря соответствующему подбору параметров импульсов (например, амплитуды) можно переустановить фазу

колебаний элементов каждой группы к требуемому значению, таким образом сформировав в сети фазовые кластеры наперед заданной конфигурации. Для формирования кластеров в этом случае достаточно подать импульсы с соответствующими амплитудами в один из элементов каждой группы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (гранты 06-02-16137, 07-02-01404), гранта Президента РФ для поддержки молодых ученых (МК-4659.2007.2).

Библиографический список

1. *Llina's R. I of the Vortex: From Neurons to Self.* MIT Press. Cambridge, Massachusetts. 2001.
2. *Welsh J.P., Lang E.J., Sugihara I., Llina's R.* Dynamic organization of motor control with the olivocerebellar system // *Nature.* 1995. Vol. 374. P. 453.
3. *Ito J., Nikolaev A.R., van Leeuwen C.* Spatial and temporal structure of phase synchronization of spontaneous alpha EEG activity // *Biological Cybernetics.* 2005. Vol. 92. P. 54.
4. *Bhattacharya J., Petsche H., Feldmann U., Rescher B.* EEG gamma-band phase synchronization between posterior and frontal cortex during mental rotation in humans // *Neuroscience Letters.* 2001. Vol. 311. P. 29.
5. *Gong P., Nikolaev A.R., van Leeuwen C.* Scale-invariant fluctuations of the dynamical synchronization in human brain electrical activity // *Neuroscience Letters.* 2003. Vol. 336. P. 33.
6. *Leznik E., Makarenko V.I., Llina's R.* Electrotonically mediated oscillatory patterns in neuronal ensembles: An in vitro voltage-dependent dye-imaging study in the inferior olive // *J. Neuroscience.* 2002. Vol. 22. P. 2804.
7. *Kazantsev V.B., Nekorkin V.I. et al.* Self-referential phase reset based on inferior olive oscillator dynamics // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* 2004. Vol. 101, № 52. P. 18183.
8. *Казанцев В.Б., Некоркин В.И.* Фазово-управляемые колебания в нейродинамике // *Нелинейные волны – 2004 / Ред. А.В. Гапонов-Грехов, В.И. Некоркин.* Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2005.
9. *Некоркин В.И., Казанцев В.Б.* Фазовая авто-переустановка и колебательные структуры активности в автогенераторных моделях нейронных систем // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2005. Т. 13, № 4. С. 56.

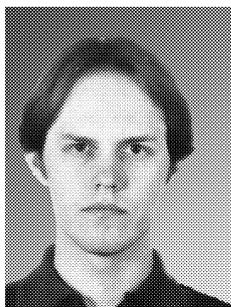
Поступила в редакцию 2.05.2008
После доработки 4.02.2009

THE PHENOMENON OF SELF-REFERENTIAL PHASE RESET IN ENSEMBLES OF INTERACTING FITZHUGH–NAGUMO NEURONS

D.V. Kasatkin

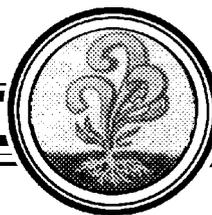
The phenomenon of self-referential phase reset are investigated in ensembles of interacting FitzHugh–Nagumo neurons with different topology of couplings. It is shown that the reset phase of neurons oscillation is independent of the initial phase and is defined by the stimulus parameters. This process does not require direct influence on all elements of the ensemble and takes place when stimulus is applied to one of the interacting neurons only. The influence of inter-neuron couplings and stimulus parameters on ensemble dynamics and phase reset phenomenon is studied.

Keywords: Self-referential phase reset, neural network, local and global couplings.



Касаткин Дмитрий Владимирович – родился в 1978 году в Нижнем Новгороде, окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (2001). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2004, ННГУ). С 2002 года работает в Институте прикладной физики РАН. Область научных интересов – теория нелинейных колебаний и волн, динамический хаос, нейродинамика. Имеет более 30 научных публикаций по указанным направлениям.

E-mail: kasatkin@neuron.appl.sci-nnov.ru
Институт прикладной физики РАН
603950, Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46



ИНДУЦИРОВАННОЕ РАССЕЙЯНИЕ ВОЛН ВНУТРИ МЦР

В.Л. Братман, А.А. Кузьмин, А.В. Савилов

Для мазеров на циклотронном резонансе исследована возможность индуцированного комбинационного рассеяния встречной (по отношению к поступательному движению частиц) волны обратной связи в попутную волну более высокой частоты. Этот эффект может быть использован для получения мощного терагерцового излучения в генераторе миллиметрового диапазона длин волн.

Ключевые слова: Мазеры на циклотронном резонансе, волна обратной связи, индуцированное рассеяние, высокочастотная генерация.

Введение

Индуцированное рассеяние волн на релятивистских электронных пучках с большим доплеровским преобразованием частоты представляет собой хорошо известный процесс [1], лежащий, по существу, в основе действия лазеров на свободных электронах (ЛСЭ) [2–6]. В наиболее известной разновидности ЛСЭ в качестве волны накачки обычно используется сравнительно легко реализуемое пространственно-периодическое магнитное поле («волна с нулевой частотой») – поле ондулятора. При малых периодах накачки такое поле обладает однако очевидным недостатком: оно быстро спадает в поперечном направлении, что делает очень сложным использование ондуляторов с периодами менее 1 см. От этого недостатка свободна схема с бегущей волной накачки, но для ее реализации требуются очень высокие мощности накачки, которые, как правило, могут быть обеспечены лишь при использовании генераторов на сильноточных релятивистских электронных пучках или лазеров. Важным упрощением является схема [7–11], в которой один и тот же сильноточный электронный пучок используется как для возбуждения мощной волны накачки, так и для ее рассеяния с повышением частоты. Для накачки в таких системах [10] использовались наиболее простые и надежные релятивистские электронные СВЧ-генераторы типа релятивистских ламп обратной волны (ЛОВ), а рассеяние должно было происходить в отдельных секциях. Однако в экспериментах [10] было обнаружено мощное коротковолновое излучение в широком диапазоне частот, возникающее уже внутри самой релятивистской ЛОВ. Причиной этого излучения могла быть целая серия близких между собой и трудно различимых эффектов, а именно: индуцированное рассеяние внутри ЛОВ, происходящее благодаря наличию в ее

периодической электродинамической системе обнаруженных в [10] подходящих по структуре поля высокочастотных высокочастотных колебаний; прямое возбуждение этих колебаний одновременно с низкочастотной генерацией ЛОВ вследствие наличия поперечных осцилляций частиц в периодическом квазимагнитоэлектростатическом или квазиэлектростатическом поле, создаваемом при помещении периодической электродинамической системы ЛОВ в импульсное магнитное поле и поле сильнофокусированного электронного пучка, соответственно (механизм резонансной ондуляторной ЛБВ). Причина мощной высокочастотной генерации в ЛОВ не была окончательно выяснена, но из сказанного ясно, что ее картина является довольно сложной и трудно управляемой.

В настоящей работе рассмотрено рассеяние излучения внутри мазеров на циклотронном резонансе (МЦР). Следует отметить, что создание самого МЦР-генератора является, как правило, более трудной задачей, чем создание ЛОВ, но зато в таком генераторе может быть использован резонатор с гладкими стенками, что существенно упрощает возможность селективного возбуждения высокочастотных колебаний, а также облегчает последующую интерпретацию результатов. Рассмотрение индуцированного рассеяния внутри МЦР необходимо не только для оценки перспективности этого метода для генерации мощного коротковолнового (например, терагерцового) излучения, но и с точки зрения исследования спектра излучения МЦР.

Изложены результаты исследования двухчастотного генератора, в котором первичное излучение попутной электронам низкочастотной волны происходит за счет циклотронного механизма, а затем часть мощности генерируемой волны возвращается назад в рабочее пространство в виде встречной волны обратной связи. Встречное комбинационное рассеяние этой низкочастотной волны на электронном пучке и предлагается использовать для получения высокочастотного излучения.

1. Совместное возбуждение низкочастотной и высокочастотной волн

Исследуем совместную генерацию низкочастотной (НЧ) и высокочастотной (ВЧ) волн поперечно-электрического типа в МЦР-генераторе с высокочастотным резонатором (рис. 1). Для определенности примем, что резонатор образован отрезком волновода кругового сечения, ограниченным на катодном конце заградительным для обеих волн участком и выходным рефлектором, обеспечивающим коэффициенты отражения по мощности R_i и R_s для НЧ- и ВЧ-мод, соответственно. Предположим, что генератор возбуждается приосевым электронным пучком, все частицы которого двигаются по винтовым траекториям, совершая циклотронное вращение вокруг оси резонатора. Попутная электронам НЧ-волна «с» с частотой ω_i и продольным волновым числом h_i (рис. 2) возбуждается электронным пучком в условиях циклотронного резонанса

$$\omega_i - h_i V_z \approx \Omega. \quad (1)$$

Здесь V_z и $\Omega = (eB_0)/(mc\gamma)$ – продольная скорость и циклотронная частота электрона; e , m и γ – его заряд, масса и лоренц-фактор, соответственно; c – скорость света; B_0 – индукция магнитоэлектростатического поля.



Рис. 1. Схема двухчастотного генератора, в котором попутная (по отношению к поступательному движению электронов) низкочастотная волна возбуждается винтовым электронным пучком в условиях циклотронного резонанса; встречная низкочастотная волна обратной связи рассеивается на пучке в волну на более высокой частоте

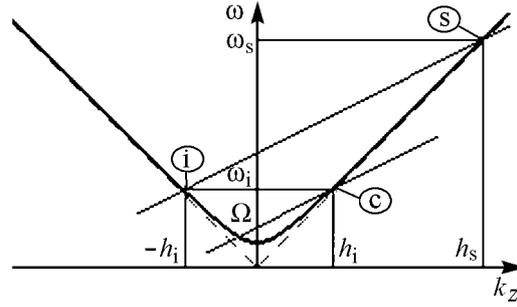


Рис. 2. Дисперсионная диаграмма для двойного резонанса: волна «с» находится в циклотронном резонансе с электронным пучком, часть её мощности за счёт элемента обратной связи преобразуется в волну накачки «i», которая резонансным образом рассеивается на том же пучке в высокочастотную волну «s»

Выходной рефлектор преобразует часть мощности попутной волны во встречную НЧ-волну обратной связи «i», рассеивающуюся на электронном пучке в попутную ВЧ-волну «s» (см. рис. 2), для которой выполнено условие комбинационного синхронизма

$$\omega_i + h_i V_z \approx \omega_s - h_s V_z. \quad (2)$$

Рассмотрим движение электрона в однородном магнитостатическом поле и поле волн «с», «i» и «s», вводя следующие комплексные комбинации поперечных компонент импульса электрона и поперечных компонент полей

$$p_+ = p_x + ip_y, \quad A_+ = A_x + iA_y, \quad E_+ = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_+}{\partial t}, \quad B_+ = i \frac{\partial A_+}{\partial z}. \quad (3)$$

Пренебрегая продольным магнитным полем волн, представим уравнение движения электрона в виде

$$\frac{dp_+}{dz} = \frac{e}{c} \frac{dA_+}{dz} + i\Omega \frac{p_+}{V_z}, \quad (4)$$

$$\frac{dp_z}{dz} = -\frac{e}{c} \text{Re} \left(\frac{p_+}{p_z} \frac{\partial A_+^*}{\partial z} \right), \quad (5)$$

где A_+ – суммарный (по трем волнам) вектор-потенциал, который вблизи пучка представляет собой комбинацию плоских волн

$$A_+ = -\frac{i}{2} \{ A_c \exp i(\omega_i t - h_i z) + A_i \exp i(\omega_i t + h_i z) + A_s \exp i(\omega_s t - h_s z) \}. \quad (6)$$

Подобно [4] и [12], произведем усреднение уравнений (4) и (5), считая, что взаимодействие электрона с несинхронными волнами приводит лишь к небольшим осцилляциям на фоне основного циклотронного движения. Учитывая эти осцилляции методом возмущений, запишем комплексный поперечный импульс электрона в следующем виде:

$$p_+ = -igmc(\alpha_i e^{i\theta_i} + \alpha_s e^{i\theta_s}) + p_c e^{i\varphi_c}. \quad (7)$$

Здесь $\alpha = e|A|/(2mc^2)$ – нормированная амплитуда волны; $\theta = \omega t - k_z z + \arg A$ – её фаза;

$$g = \frac{\omega_i + h_i V_z}{\omega_i + h_i V_z - \Omega} \approx \frac{\omega_s - h_s V_z}{\omega_s - h_s V_z - \Omega}$$

– фактор, описывающий увеличение амплитуды осцилляций электрона в поле несинхронных волн при приближении этих волн к циклотронному резонансу с электронами. Амплитуда и фаза циклотронной составляющей комплексного поперечного импульса описываются уравнениями

$$\frac{dp_c}{dz} = \alpha_c mc \frac{d\theta_c}{dz} \cos(\theta_c - \varphi_c), \quad \frac{d\varphi_c}{dz} = \frac{\Omega}{V_z} + \alpha_c \frac{mc}{p_c} \frac{d\theta_c}{dz} \sin(\theta_c - \varphi_c). \quad (8)$$

Усреднённое уравнение для энергии электрона $W = mc^2\gamma$ представим в виде

$$mc^2 \frac{d\gamma}{dz} = \frac{e}{c} \operatorname{Re} \left\langle \frac{p_+}{p_z} \frac{\partial A_+^*}{\partial t} \right\rangle. \quad (9)$$

Выделим здесь составляющую, связанную с возбуждением НЧ-волны, и часть, описывающую рассеяние в ВЧ-волну: $\gamma_0 - \gamma = (\gamma_0 - 1)(w_c + w_s)$. Тогда из уравнения (9) находим

$$\frac{dw_c}{dz} = -\frac{\alpha_c \omega_i p_c}{cp_z(\gamma_0 - 1)} \cos \vartheta_c, \quad \frac{dw_s}{dz} = \alpha_s \alpha_i \frac{m(\omega_s - \omega_i)g}{p_z(\gamma_0 - 1)} \sin \vartheta_s. \quad (10)$$

Здесь введены медленные циклотронная и комбинационная фазы электрона. Их изменение описывается уравнениями

$$\frac{d\vartheta_c}{dz} = \frac{\omega_i - h_i V_z - \Omega}{V_z} - \frac{\alpha_c mc (\omega_i - h_i V_z)}{p_c V_z} \sin \vartheta_c, \quad \frac{d\vartheta_s}{dz} = \frac{\omega_s - \omega_i}{V_z} - (h_s + h_i). \quad (11)$$

Соответствующие начальные фазы $\vartheta_c^{(0)}$ и $\vartheta_s^{(0)}$ взаимно независимы, каждая из них равномерно распределена в интервале $[0, 2\pi)$. В правой части уравнения для комбинационной фазы ϑ_s^0 опущено слагаемое, пропорциональное амплитуде комбинационной волны $\alpha_s \alpha_i$ и ответственное за так называемую «силовую» группировку электронов.

Усредняя уравнение для продольного импульса электрона в (5) по быстрым осцилляциям и интегрируя по z , находим изменение продольного импульса

$$\Delta p_z = -mc^2(\gamma_0 - 1) \left(\frac{h_i}{\omega_i} w_c + \frac{h_s + h_i}{\omega_s - \omega_i} w_s \right). \quad (12)$$

С квантовой точки зрения, первое слагаемое в правой части (12) соответствует однофотонному взаимодействию электрона с попутной НЧ-волной [12], в процессе которого переход электрона вниз на один уровень Ландау сопровождается излучением кванта с энергией $\hbar\omega_i$ и импульсом $\hbar h_i$. Изменения энергии и продольного импульса электрона в результате такого процесса относятся как $\Delta W/\Delta p_z = \omega_i/h_i$. Второе слагаемое в правой части (12) описывает двухфотонный процесс рассеяния на электроне кванта встречной НЧ-волны в квант попутной ВЧ-волны [4]. Результатом этого процесса являются следующие изменения энергии и импульса частицы в каждом акте: $\Delta W = \hbar(\omega_i - \omega_s)$ и $\Delta p_z = \hbar(h_i + h_s)$.

Согласно [13], уравнения возбуждения ВЧ- и НЧ-мод в рассматриваемой задаче имеют вид

$$\frac{d\alpha_s}{dz} + i\alpha_s \frac{d \arg A_s}{dz} = iG_s \alpha_i \left\langle g \frac{mc}{p_z} e^{-i\vartheta_s} \right\rangle_e, \quad (13)$$

$$\frac{d\alpha_c}{dz} + i\alpha_c \frac{d \arg A_c}{dz} = -G_i \left\langle \frac{p_c}{p_z} e^{-i\vartheta_c} \right\rangle_e, \quad (14)$$

$$\frac{d\alpha_i}{dz} + i\alpha_i \frac{d \arg A_i}{dz} = -iG_i \alpha_s \left\langle g \frac{mc}{p_z} e^{i\vartheta_s} \right\rangle_e, \quad (15)$$

где $G_{i,s} = \kappa^2 e I / (2N m c^3 h_{i,s})$, N – норма волны, κ – поперечное волновое число (считаем поперечные структуры ВЧ- и НЧ-волн одинаковыми), I – величина электронного тока, $\langle \dots \rangle_e$ – обозначает усреднение по ансамблю электронов. Из уравнений возбуждения (13)–(15) следуют уравнения баланса мощности в резонаторе и закон сохранения числа квантов при рассеянии

$$\frac{dP_c}{dz} = (\gamma_0 - 1) \frac{mc^2 I}{e} \frac{d \langle w_c \rangle_e}{dz}, \quad \frac{dP_s}{dz} + \frac{dP_i}{dz} = (\gamma_0 - 1) \frac{mc^2 I}{e} \frac{d \langle w_s \rangle_e}{dz}, \quad (16)$$

$$\frac{P_i}{\omega_i} + \frac{P_s}{\omega_s} = \text{const}, \quad (17)$$

где $P_q = \omega_q k_{z,q} N |A_q|^2 / (4\kappa^2)$ – мощности, переносимые волнами ($q = c, i, s$).

2. Анализ стартовых условий возбуждения высокочастотной волны

Если относительное изменение энергии электронов при их взаимодействии с волнами невелико, то уравнения движения могут быть сведены к форме, универсальной для всех приборов, основанных на инерционной группировке частиц [14]. Действительно, в таком приближении в правых частях уравнений (10) можно пренебречь изменением амплитудных множителей, преобразовав эти уравнения к следующему виду:

$$\frac{dw_{c,s}}{dz} = \text{Re}(a_{c,s} e^{i\vartheta_{c,s}}). \quad (18)$$

Здесь $a_c = -\omega_i \beta_{\perp 0} \alpha_c / (c \beta_{z0} (\gamma_0 - 1))$, $a_s = -i(\omega_s - \omega_i) g \alpha_s \alpha_i / (c \beta_{z0} \gamma_0 (\gamma_0 - 1))$ – нормированные амплитуды попутной низкочастотной и комбинационной волны соответственно. Для достаточно добротного резонатора амплитуды полей можно считать однородными (причем $\alpha_i \approx \alpha_c$). Их величины связаны с усредненными потерями энергий электронов уравнениями баланса, которые следуют из (16) после интегрирования по всей длине резонатора с учётом (17), а также условий отражения волн на границах

$$\frac{\omega_i}{Q_i} W_i = \eta_{LF} IU, \quad \frac{\omega_s}{Q_s} W_s = \eta_{HF} IU. \quad (19)$$

Здесь U – ускоряющее напряжение; $W_{i,s} = mc^2 N \omega_{i,s}^2 L \alpha_{i,s}^2 / (2\kappa c^2)$ – энергия, запасённая в НЧ- и ВЧ-моде резонатора; $Q_q = 2\omega_q L \beta_{ph}^{(q)} / ((1 - R_q)c)$ – добротность моды,

$\beta_{ph}^{(q)} = \omega_q / (ch_q)$ ($q = i, s$), L – длина резонатора;

$$\eta_{LF} = \langle w_c(L) \rangle_e - \frac{\omega_i}{\omega_s - \omega_i} \langle w_s(L) \rangle_e$$

– эффективность взаимодействия частиц с НЧ-модой с учётом отдачи, возникающей при рассеянии;

$$\eta_{HF} = \frac{\omega_s}{\omega_s - \omega_i} \langle w_s(L) \rangle_e$$

– эффективность взаимодействия частиц с ВЧ-модой.

Исследуем стартовые условия возникновения генерации ВЧ-волны на фоне установившейся низкочастотной циклотронной генерации, когда воздействие ВЧ-волны на циклотронную генерацию НЧ-волны пренебрежимо мало. Уравнения для фаз в пренебрежении силовой группировкой частиц приводятся в этом случае к универсальному виду

$$\frac{d\vartheta_{c,s}}{dz} = \delta_{c,s} + \nu_{c,s} w_{c,s}, \quad (20)$$

где $\delta_c = \frac{\omega_i - \Omega_0}{V_{z0}} - h_i$, $\delta_s = \frac{\omega_s - \omega_i}{V_{z0}} - (h_s + h_i)$ – начальные расстройки синхронизмов; $\nu_c = \frac{\omega_i(\gamma_0 - 1)}{V_{z0}\gamma_0} ((\beta_{ph}^{(i)})^{-2} - 1)$, $\nu_s = \frac{(\omega_s - \omega_i)(\gamma_0 - 1)}{V_{z0}\gamma_0} (\beta_{z0}^{-2} - 1)$ – параметры неизохронности.

Оценим условия, необходимые для эффективной циклотронной генерации НЧ-волны. Для формирования компактного электронного сгустка и оптимизации энергоотбора кинематическое и динамическое фазовые смещения на длине резонатора должны быть порядка π [14]:

$$\delta_c L \sim \pi, \quad |\nu_c| \Delta w L \sim \pi. \quad (21)$$

Оценивая изменение энергии электронов в поле попутной НЧ-волны как $\Delta w \sim |a_c| L$, получим оптимальное значение длины системы и расстройки циклотронного синхронизма

$$L \sim \sqrt{\pi / |\nu_c a_c|}, \quad \delta_c \sim \pi / L. \quad (22)$$

Решение стандартных асимптотических уравнений (18) и (20) для энергии w_s и фазы ϑ_s в приближении малой амплитуды ВЧ-волны [14] дает следующее выражение для КПД в линейном режиме:

$$\eta_{HF} = \frac{\omega_s}{\omega_s - \omega_i} \frac{\nu_s |a_s|^2 L^3}{2} \left. \frac{d\varphi(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=\delta_s L}, \quad (23)$$

где $\varphi(\xi) = (1 - \cos \xi) / \xi^2$ – интенсивность спектра высокочастотной силы, действующей на электрон внутри резонатора. Линейный КПД генерации ВЧ-моды максимален, если начальная расстройка $\delta_s \approx -5\pi/6L$, при этом $d\varphi/d\xi \approx 0.13$.

Подстановкой (23) в (19) находим стартовый ток для генерации ВЧ-волны

$$\frac{eI_{st}}{mc^3} = \left(\frac{2N^2}{g^2 |\varphi'(\delta_s L)|} \frac{(1 - R_s)(1 - R_i) c^3 \omega_s}{\eta_{LF} \omega_i^2 (\omega_s - \omega_i)^2 L^3} \frac{(\beta_{ph}^{(i)})^3 \beta_{z0}^5 \gamma_0^3}{\beta_{ph}^{(s)} ((\beta_{ph}^{(i)})^2 - 1)^2 (1 - \beta_{z0}^2) (\gamma_0 - 1)} \right)^{1/2} \quad (24)$$

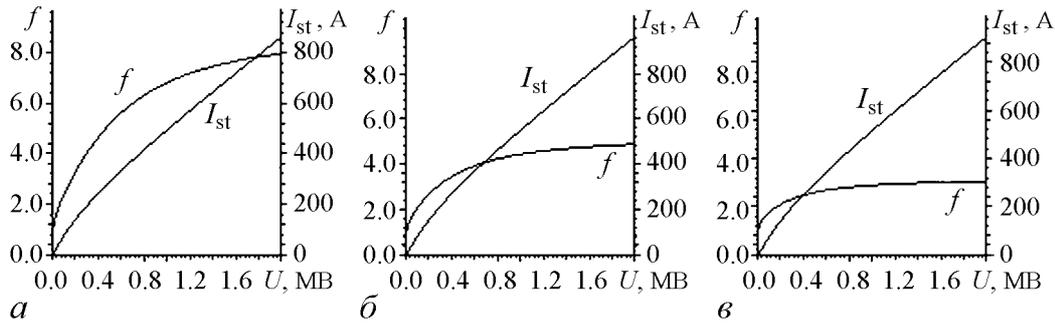


Рис. 3. Зависимости стартового тока высокочастотной генерации I_{st} и фактор преобразования частоты $f = \omega_s/\omega_i$ от ускоряющего электроны напряжения U при значениях питч-фактора 0.7 (а), 1.0 (б) и 1.5 (в)

На рис. 3 показаны зависимости от ускоряющего электроны напряжения U стартового тока ВЧ-генерации I_{st} и преобразования частоты $f = \omega_s/\omega_i$ при нескольких значениях питч-фактора $\beta_{\perp 0}/\beta_{z0}$. При получении этих кривых полагалось, что эффективность циклотронной генерации НЧ-волны составляет 10%. Считалось также, что фазовая скорость НЧ-волны достаточно сильно отличается от скорости света ($\beta_{ph}^{(i)} = 1.4$), в то время как для ВЧ-волны полагалось $\beta_{ph}^{(s)} = 1$. Факторы обратной связи для обеих волн полагались одинаковыми и достаточно большими: $R_i = R_s = 0.8$.

Как видно из рис. 3, генерация ВЧ-моды при напряжении $U = 500$ кВ возникает при токах, превышающих 300 А; при этом преобразование частоты относительно невелико ($f = 2 \div 5$). Если же напряжение $U = 1$ МВ, то необходим ток $I > 450$ А (преобразование частоты при этом $f = 7$). В принципе, стартовый ток генерации ВЧ-волны может быть снижен путем увеличения питч-фактора электронов. Однако такое увеличение ведет к снижению преобразования частоты.

3. Численное моделирование совместной генерации двух волн

Для более точного определения порога генерации ВЧ-моды, а также для исследования нелинейного режима вынужденного рассеяния было проведено численное моделирование уравнений (10), (11) и (13)–(15). При этом рассматривалась генерация волн TE_{11} приосевым электронным пучком. Фазовые скорости и факторы обратной связи волн были выбраны такими же, как в предыдущем разделе. Длина резонатора оптимизировалась для получения максимальной мощности излучения ВЧ-волны.

Выходные мощности НЧ-и ВЧ-волн в процессе установления стационарного режима приведены на рис. 4. Временную динамику в численной модели характеризует номер прохода волны по резонатору n . Переход на следующий проход описывается граничным условием

$$\alpha^{(n+1)}(z = 0) = \sqrt{R}\alpha^{(n)}(z = L). \quad (25)$$

Согласно расчетам, при напряжении 500 кВ и питч-факторе $0.6 \div 0.7$ стартовый ток генерации ВЧ-волны оказывается равным 100 А. Расхождение с оценкой (24) из предыдущего раздела обусловлено тем, что при её получении длина резонатора оценивалась приближенно, причем исходя из условия оптимальной циклотронной

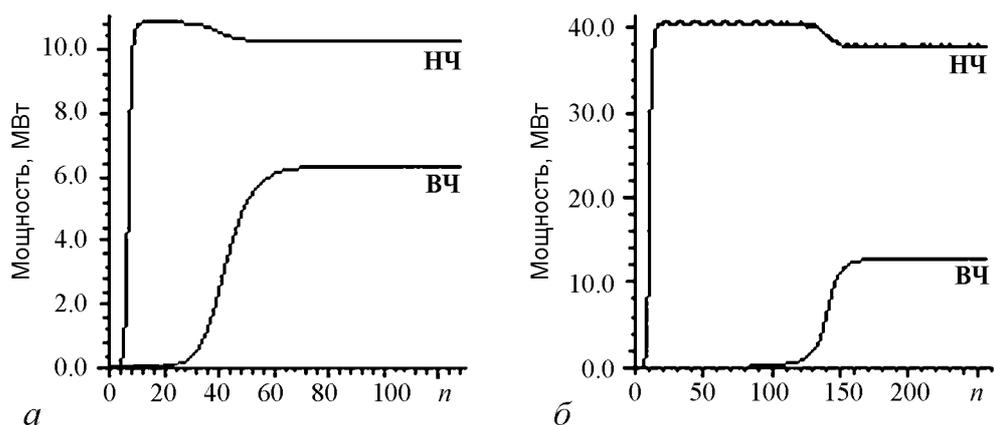


Рис. 4. Временная динамика выходной мощности высокочастотного и низкочастотного излучения в режимах $U = 500$ кВ, $I = 200$ А (а) и $U = 1$ МВ, $I = 250$ А (б)

генерации НЧ-волны. Выбор же оптимального режима ВЧ-генерации требует увеличения этой длины и, в соответствии с (24), это приводит к снижению стартового тока. При токе 200 А эффективность генерации НЧ-волны составляет 10%, преобразование частоты равно 5, а КПД генерации ВЧ-моды достигает 6%, что соответствует выходной мощности 12 МВт (рис. 4, а). Увеличение ускоряющего напряжения до 1 МВ приводит к росту как оптимального питч-фактора (до $0.8 \div 0.9$), так и стартового тока генерации ВЧ-волны (до 200 А). При токе 250 А эффективности генерации НЧ- и ВЧ-волн составляют 15 и 5%, соответственно (рис. 4, б).

Заключение

Использование в МЦР-генераторе встречной волны обратной связи для ее рассеяния на электронном пучке в попутную волну, излучаемую на более высокой частоте, может стать привлекательным методом повышения частоты генерации циклотронных мазеров. Согласно расчетам, в случае энергий частиц $0.5 \div 1$ МэВ такой метод может обеспечить достаточно эффективную (с КПД, составляющим несколько процентов) ВЧ-генерацию на частоте, в пять раз превышающей частоту МЦР-генератора. Таким способом можно, например, получать мощное субмиллиметровое излучение в релятивистском МЦР-генераторе миллиметрового диапазона длин волн.

Библиографический список

1. Motz H. Applications of the radiation from fast electron beams // J. Appl. Phys. 1951. Vol. 22. № 5. P. 527.
2. Pantell R.H., Soncini G., Puthoff H.E. Stimulated photon electron scattering // IEEE J. of Quant. Electr. 1968. QE-4, № 11. P. 905.
3. Братман В.Л., Гинзбург Н.С., Петелин М.И. Нелинейная теория вынужденного рассеяния волн на релятивистских электронных пучках // ЖЭТФ. 1979. Т. 76, вып. 3. С. 930.
4. Братман В.Л., Гинзбург Н.С., Петелин М.И., Сморгонский А.В. Убитроны и

- скаттроны // Релятивистская высокочастотная электроника. Вып. 1. Горький: ИПФ АН СССР, 1979. С. 217.
5. Free-electron generators of coherent radiation// Physics of quantum electronics. Vol.7-9 / Ed. S.F.Jacobs et al. Addison Wesley, 1980 (Vol. 7), 1982 (Vols 8-9).
 6. Генераторы когерентного излучения на свободных электронах. Сборник статей. М.: Мир, 1983.
 7. Жуков П.Г., Иванов В.С., Рабинович М.С. и др. Вынужденное комптоновское рассеяние волн на релятивистском электронном пучке // ЖЭТФ. 1979. Т. 76, № 6, С. 2065.
 8. Carmel Y., Granatstein V.L., Gover A. Demonstration of a two-stage backward-wave-oscillator free-electron laser // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 51, № 7. P. 566.
 9. Александров А.Ф., Галузо С.Ю., Канавец В.И. и др. Релятивистский генератор синхротронного излучения на резонансном рассеянии // Радиотехника и электроника. 1984. Т. 29, № 6. С. 1788.
 10. Bratman V.L., Denisov G.G., Ginzburg N.S., Smorgonsky A.V., Korovin S.D., Polevin S.D., Rostov V.V., Yalandin M.I. Stimulated scattering of waves in microwave generators with high-current relativistic electron beams: simulation of two-stage free-electron lasers // Int. J. Electron. 1985. Vol. 59. P. 24.
 11. Peskov N.Yu., Kaminsky A.K., Kalynov Yu.K., Kuzikov S.V., Kornishin S.Yu., Perelshtein E.A., Savilov A.V., Sedykh S.N. Sub-millimeter Bragg FEM based on moderately relativistic electron beam: project and first experiments // Proc. of 2007 Joint 32nd International Conference on Infrared Millimeter Waves and 15th International Conference on Terahertz Electronics (Cardiff, UK, Sept. 2007), Vol. 2, P. 837.
 12. Братман В.Л., Гинзбург Н.С., Нусинович Г.С., Петелин М.И., Юлпатов В.К. Циклотронные и синхротронные мазеры // Релятивистская высокочастотная электроника. Вып.1. Горький: ИПФ АН СССР, 1979. С. 157.
 13. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: «Радио и связь», 1988.
 14. Братман В.Л., Гинзбург Н.С., Ковалёв Н.Ф., Нусинович Г.С., Петелин М.И. // В кн.: Релятивистская высокочастотная электроника. Горький. Изд-во ИПФ АН СССР, 1979, с. 249.

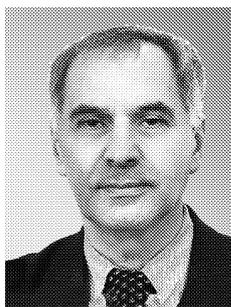
Поступила в редакцию 27.10.2008
После доработки 17.02.2009

INDUCED WAVES SCATTERING IN CYCLOTRON-RESONANCE MASERS

V.L. Bratman, A.A. Kuzmin, A.V. Savilov

For masers on cyclotron resonance it is researched a possibility of induced scattering of the opposite feedback wave on relativistic electron beam to the following wave of higher frequency. This effect can be used for powerful TGz-radiation receipt in a generator of millimeter range of wavelengths.

Keywords: Masers on cyclotron resonance, feedback wave, induced scattering, high-frequency generation.



Братман Владимир Львович – родился в 1945 году, окончил Горьковский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (1967). После окончания аспирантуры работал в НИИ «Салют», Научно-исследовательском радиофизическом институте и с 1977 года – в ИПФ РАН. Защитил кандидатскую (1977) и докторскую (1992) диссертации в области электроники. В настоящее время заведует отделом высокочастотной релятивистской электроники ИПФ РАН, профессор Нижегородского университета. Соросовский профессор, лауреат Государственной премии РФ. Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Радиофизика».

E-mail: bratman@appl.sci-nnov.ru
Институт прикладной физики РАН
603950, Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46



Кузьмин Алексей Александрович – родился в Горьком (1986). Студент второго курса магистратуры Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (факультет «Высшая школа общей и прикладной физики»). Работает в ИПФ РАН.

Email: alexeyhsgar@yandex.ru
Институт прикладной физики РАН
603950, Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46



Савилов Андрей Владимирович – родился в Рязанской обл. (1968), окончил с отличием Нижегородский государственный университет (Высшая школа общей и прикладной физики) в 1992 году. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ИПФ РАН (1997) и доктора физико-математических наук (2005) в области физической электроники, физики плазмы и релятивистских электронных пучков. Работает в ИПФ РАН ведущим научным сотрудником отдела высокочастотной релятивистской электроники.

Опубликовал более ста научных статей по направлениям, указанным выше. Лауреат Премии и Медали РАН для молодых ученых (2000).

E-mail: savilov@appl.sci-nnov.ru
Институт Прикладной Физики РАН
603950, Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46



Я УЧИЛСЯ В СОВЕТСКОМ СОЮЗЕ

М.А. Григорьев

Скажу, что время наступило,
Мне о себе писать пора.
Хотя давно всё в жизни было
И безвозвратно всё уплыло,
Но память – пища для пера.

Родители

Я родился 3 августа 1928 года в деревне Хилино под Великими Луками, называли Михаилом.

Мой отец, Алексей Никитьевич, 1901 года рождения, окончил до революции 4 класса земской школы. На гражданскую войну он ушёл из деревни, когда ему было 16 лет. Вступил в РКП/б/, когда служил в Красной Армии, в кавалерии. После демобилизации учился в Комвузе, а затем заочно в Саратовском пединституте на историческом факультете, который закончил в 1940 году. На второй день войны был призван в армию и, как ограниченно годный, по состоянию здоровья был направлен на должность старшего политрука в Саратовский военный госпиталь № 360, где и работал до конца войны. В начале войны он принимал участие в развёртывании филиалов госпиталя, в основном, в школах, по секретному плану на случай войны.

Мать, Марфа Борисовна, 1904 года рождения, рано осталась без отца, в многодетной семье. Из 16 человек детей выросли лишь трое. Остальные умирали в младенчестве в условиях глухой деревни Смоленской области, когда у семьи не было ни дома, ни скота, ни земли. С семи лет была отдана в няньки. Летом работала по найму, а зимой училась и в 1915 году окончила начальную школу. В 1916 году поступила во второклассную учительскую школу, где за хорошую успеваемость училась за казённый счет. Благодаря постоянному стремлению к учёбе и возможностям, которые предоставляла Советская власть беднейшим, она в 1921 году стала учительницей начальной школы. В 1941 году заочно закончила физико-математический факультет Саратовского пединститута.

В 1937 году родился мой брат Юрий. Теперь он учёный секретарь Саратовского филиала ИРЭ РАН, доктор физико-математических наук.

Авиатехникум

После неоднократных переездов семья оказалась в 1935 году в городе Сердобске (тогда Саратовской области), где я пошёл в школу. В следующем году мы окончательно переехали в Саратов. Когда началась война, я учился в 6 классе.

В 1942 году, окончив 7 класс, поступил в Саратовский авиационный техникум. Занятия в нём шли бесперебойно даже в самые тяжёлые годы войны, когда Саратов был прифронтовым городом, а на улицах появлялись грузовики, привозившие раненых с фронта. Ежегодно мы проходили практику на авиационном заводе, который в то время назывался заводом комбайнов. Работали в токарном, деревообделочном, литейном и других цехах. Приходилось работать и в ночную смену. В токарном и деревообделочном моим наставникам, как и мне, было лет 15. Чтобы мы могли доставать до рукояток токарного станка, на полу лежала специальная деревянная подставка. По инициативе директора техникума И.В. Елифёрова, который ранее служил начальником ОТК завода, мне с моим товарищем Л. Кромом, как наиболее активным студентам, был оформлен пропуск во все цеха, включая и заводской аэродром. Мы должны были подбирать учебные экспонаты для техникума. Благодаря этому я получил возможность подробно познакомиться со всем производством на авиационном заводе. В сборочном цехе стояло Красное Знамя – награда Государственного Комитета Обороны за высокие достижения в производстве самолётов-истребителей для фронта. Значительно позже, через десятилетия, я бывал на многих заводах, но в моей памяти этот сохранился как образец высокой культуры и организации производства.

Моя дипломная работа, руководителем которой был инженер КБ авиазавода Туманов, была посвящена расчёту и конструированию пневматического механизма управления закрылками истребителя.

Сталинград

Наиболее ярким впечатлением в годы войны стала поездка в Сталинград летом 1944 года. Следует сказать, что в ходе Сталинградской битвы, начавшейся 17 июля 1942 года и окончившейся 2 февраля 1943 года, общие потери составили около трех миллионов человек. Только военных и транспортных самолётов было сбито с обеих сторон приблизительно 5700.

В Сталинград я поехал в составе группы студентов авиатехникума для разборки сбитых самолётов на металлолом. Плыли на старом пассажирском пароходе, на палубе, дня два. При остановке парохода в Быковых Хуторах мы с базарчика, расположенного на крутом волжском берегу, натаскали много спелых арбузов и устроили на корме весёлое пиршество. Приближаясь к Сталинграду, двигались очень медленно, возможно это было связано с тем, что на дне реки после боёв осталось много опасных предметов. В одном месте у острова на отмели торчал хвост самолёта. Нам открылась жуткая панорама разрушенного города, вытянувшегося на много километров вдоль берега. Когда мы оказались в самом городе, то представившаяся картина ещё более нас ужаснула. Сталинград являл собой страшное зрелище, вместо домов лежали груды кирпича. Удивительно, что на улицах, спускающихся к Волге, практически целым остался асфальт. Встречались лишь следы разорвавшихся мин в виде

радиальных линий, прочерченных осколками по асфальту от точки падения. Железные фонарные столбы были практически все пробиты снарядами и осколками во многих местах. У стоявшей невдалеке от берега трансформаторной будки западная сторона была изуродована снарядами, а на восточной – светлооранжевая штукатурка сохранилась нетронутой. Улицы были пустынные, людей на них практически не было. Лишь на базарчике-барахолке оказался народ, мальчишки продавали пресную питьевую воду из чайников. Жили мы в палатках в южной части города, недалеко от обрывистого берега. Кирпичных домов там не было, а деревянные все сгорели, остались лишь печки. Питьевую воду себе мы добывали в паровозе, стоявшем неподалёку от нашего палаточного городка на железнодорожной ветке.

В Сталинграде мне довелось «пропустить через свои руки» почти все военные самолёты Второй мировой войны: немецкие Мессершмитты, Фокке-Вульфы, Юнкерсы, английские Харрикейны, Спитфайры, американские Аэрокобры, советские Як-1, МиГи, Илы, Ту-2, Тб-3 и другие. Обломки сбитых самолётов были свезены в большой овраг. Мы отделяли моторы и вооружение, остальное разбивали на куски кувалдами и топорами. Некоторые детали упаковывали для посылки в техникум для учебных пособий. От отечественных самолётов, подбитых в бою, оставались лишь сварные каркасы из стальных труб, поскольку их деревянные крылья, фюзеляжи и хвостовое оперение обычно сгорали. Лишь только в конце войны от дерева отказались, и советская авиация стала цельнометаллической.

Лодка для Сталинграда

Хочу рассказать о другом, поразившем меня ещё в годы войны, удивительном факте. В самый тяжелый для страны 1942 год, когда в июле-августе фашисты дошли до Сталинграда, и наши войска, оборонявшие город, были прижаты к Волге, снабжение и пополнение защитников города могло происходить только через реку, которая днём и ночью простреливалась немецкими артиллерией и авиацией. В это время в Саратове, были мобилизованы лодки, принадлежавшие населению. У моего приятеля, Бориса Бурлакова, жившего на Полезном переулке в маленьком частном доме, была вёсельная лодка длиной примерно 8 м, которую сделал его отец дядя Вася. В неё можно было посадить около 15 человек. Все подобные лодки в Саратове собрали и отправили в Сталинград, где они использовались для перевозки людей и оружия. Когда закончились бои под Сталинградом, уцелевшие лодки вернули их владельцам. Вернулась и лодка моего приятеля в целостности и сохранности. Впоследствии, когда закончилась война, и я был уже студентом университета и вернулся с фронта старший брат Бориса Михаил, мы ещё довольно долго, пристроив к лодке маленький четырехсильный подвесной моторчик, плавали на ней на рыбалку, перевозили картошку с огорода на Зелёном острове и сено для коз моего приятеля, отдыхали на Казачьем острове с компанией своих друзей.

О Ферапонте Головатом

В 1944 году я вместе с другими студентами авиатехникума перевозил с товарной станции в Краеведческий музей доставленный с фронта Як-1. Самолёт был

привезён на железнодорожной платформе с крыльями, отделенными от фюзеляжа. Корпус мы закрепили на специальной заводской тележке, буксируемой автомобилем. Крылья, как одно целое, подняли на стремянки, привязанные к кузову грузовика. Это был первый самолёт, построенный на деньги колхозника-пчеловода Саратовской области Ферапонта Петровича Головатого. На нём воевал лётчик гвардии майор Б.Н. Ерёмин. В настоящее время этот истребитель стоит в музее в Саратовском Парке Победы на Соколовой горе. Второй самолёт (Як-3), подаренный Ф.П. Головатым тому же лётчику в 1944 году, находится сейчас в одном из музеев США. Как эта национальная реликвия оказалась за океаном неясно. Это стало возможным в стране с экономикой купли-продажи. Любопытно ещё одно обстоятельство. Немецкие военнопленные, ремонтировавшие здание техникума в 1945 году, увидев подобный самолёт (с обрезанными крыльями) в коридоре, не хотели верить, что он изготовлен в Саратове и не является американским.

Спустя почти 30 лет мне довелось вспомнить о Ф.П. Головатом. В октябре 1973 года я, будучи доцентом кафедры электроники физического факультета СГУ, в составе группы студентов со второго по пятый курсы (всего сто два человека) и пяти преподавателей поехал на уборку картофеля. Мы попали в село Степное, Калининского района, где в прошлом председателем колхоза «Стахановец» был Ф.П. Головатый. На деревенском кладбище стоял скромный обелиск над его могилой. Пожилые жители с уважением вспоминали Головатого и рассказывали о нём, как о человеке небогатом и честном труженике. В годы войны мёд был большой ценностью и все вырученные за него деньги он отдал для покупки самолётов-истребителей. Председателем колхоза стал уже после войны. Наши студенты, вместе с руководителями, собирали картофель и складывали его в большие бурты. Начались заморозки, и надо было срочно вывозить урожай с поля. В совхозе «Степной», преобразованном из колхоза, имелись большегрузные самосвалы, но местные водители отказались работать, требуя повышения оплаты. Не дождавшись машин на поле, мы с доцентом Н.И. Синицыным отправились за 3 км в село для разговора с водителями. Мы им сказали примерно следующее: «Вы знаете, что студенты работают здесь уже много дней. Они приехали, прервав свои занятия, не за “длинным” рублём, а для того, чтобы помочь вам спасти урожай. Так поработайте и вы на общее дело. Вспомните же о бескорыстном поступке вашего земляка Головатого и не забывайте о том, что большинство из вас – комсомольцы». Ответом нам было молчание. После этого мы ушли. Спустя полчаса, когда мы вернулись на поле к студентам, из села двинулись в нашу сторону самосвалы.

Саратовский университет

В 1946 году я получил диплом с отличием по специальности техника механика по самолётостроению и поступил на физический факультет СГУ. Страна восстанавливала и развивала народное хозяйство после тяжелейшей войны. В Ленинском районе Саратова, как грибы после дождя, росли корпуса больших заводов и посёлки жилых домов. Бурно развивались и геофизические исследования, направленные на поиски нефти и газа. Требовалось много молодых специалистов. В Саратовском университете в 1945 году открылся физический факультет, который образовался в

результате разделения физико-математического факультета. Первые приёмы составляли около 100 человек. Университет встретил меня трудными математическими дисциплинами, которые быстро сбили спесь с зазнавшегося выпускника авиационного техникума. После третьего курса студентов для узкой специализации распределили по девяти кафедрам. Я выбрал кафедру геофизики, которая в то время была на физическом факультете, и весь четвертый курс занимался по этой специальности, а летом 1950 года практиковался в сейсморазведочной партии в степях Заволжья. Вернувшись к 1 сентября на занятия в университет, узнал, что по приказу Министерства высшего образования (МВО) СССР меня в составе группы из 17 человек переводят для продолжения обучения в Харьковский госуниверситет (ХГУ).

Харьковский университет

В эту группу также входили студенты разных кафедр: Виктор Горбелик, Роберт Людаев, Анатолий Плюто, Владислав Ерохин, брат и сестра Насыровы (фронтвик Федоиль и Альфия), Леонид Шишкин, Виктор Зеленский, Владимир Заграфов, фронтвик Николай Тарасов, Иосиф Турецкий, Дмитрий Кардаш, Георгий Романов, Евгения Козлова, Идея Лукашова, Юрий Гаркун. Нас определили на спецотделение физико-математического факультета, где научным направлением была ядерная физика. Там учились не только саратовцы, но и студенты, переведённые в разные годы из Одессы, Киева, Днепропетровска, Ленинграда, Воронежа и Москвы. Следует отметить, что ещё до войны в Харькове сформировалась авторитетная в СССР научная школа по ядерной физике. В университете существовала кафедра экспериментальной физики, созданная профессором А.К. Вальтером, которая впоследствии стала называться – кафедрой экспериментальной ядерной физики. При разделении на теоретиков и экспериментаторов не слишком прислушивались к нашему желанию. Меня определили в экспериментаторы. Нам читали лекции и занимались с нами: профессор А.И. Ахиезер, написавший книгу в соавторстве с И.Я. Померанчуком «Некоторые вопросы теории ядра»; академик, директор Украинского физико-технического института (УФТИ) К.Д. Синельников; профессор А.К. Вальтер и другие.

Л.Д. Ландау и Л.М. Пятигорский

Расскажу о судьбе старшего преподавателя Л.М. Пятигорского, читавшего нам лекции. Он был соавтором Л.Д. Ландау первого издания 1940 года I тома курса теоретической физики «Механика». Этот курс они начали писать ещё в 30-е годы в Харькове. В 1919 году, когда Пятигорскому было десять лет, в местечке, где он жил со своими родителями, происходили еврейские погромы. В один из них бандиты поставили у стенки группу приблизительно из пятнадцати человек и расстреляли их. Среди них была мать Пятигорского. Один из погромщиков потребовал, чтобы отец отдал ему свои ценности. Отец повёл его на конюшню и там, в земле откопал шкатулку с деньгами. Бандит вывел отца и застрелил его на глазах у сына. Сын бросился на бандита и стал рвать на нём рубашку. Погромщик оттолкнул мальчишку и, уходя, выстрелил в него. Пуля попала в правую руку. Спустя некоторое время, поскольку возникла угроза гангрены, местный фельдшер ампутировал ему руку. После прихода

в местечко Красной Армии и установления Советской власти Пятигорского отправили в детский дом, который находился в Харькове. В детском доме он был с 1920 по 1925 год, где учился и самостоятельно готовился для поступления в вуз. В этом ему помогал профессор одного из институтов Харькова. В 1931 году Пятигорский стал первым аспирантом Ландау и первым сдал ему знаменитый теоретический минимум. В 30-е годы он был заведующим кафедрой теоретической физики в ХГУ, а Ландау профессором этой кафедры. Причиной разрыва Ландау и Пятигорского послужили их различные отношения к секретным работам в УФТИ, где Ландау был начальником теоретического отдела, а Пятигорский его сотрудником. Пятигорский, который был членом ВКП/б/, в отличие от Ландау считал, что секретные работы в интересах обороны могут проводиться в УФТИ. Конфликтная ситуация началась в УФТИ ещё в 1935 году. В связи с этим Ландау необоснованно заподозрил, что Пятигорский, якобы, написал на него донос. Л.М. Пятигорский потерял возможность защитить кандидатскую диссертацию, поскольку Л.Д. Ландау забрал у него тему и передал другому аспиранту. Они прекратили совместную работу, и во втором издании I тома, вместо Пятигорского, по решению Л.Д. Ландау, появилась фамилия Лившиц, а книга практически осталась прежней. Пятигорский незаслуженно пострадал, и лишь в 1956 году он смог защитить диссертацию на другую тему в Зеленограде. Из лекций Пятигорского остались в памяти два эпизода. Первый касался создания водородной бомбы. В советских газетах в то время утверждалось, что это – выдумка американской пропаганды для устрашения СССР. Любопытно, что в своём рассказе о принципе её действия Пятигорский серебро назвал золой, так как высвободить ядерную энергию из его ядра невозможно ни слиянием (синтезом), ни его делением. Более лёгкие, чем серебро, элементы могут быть использованы для получения энергии путём слияния их ядер, а более тяжёлые – с помощью деления. Второй эпизод был посвящён углеродному методу определения времени, прошедшего с момента гибели древних объектов органического происхождения. Дело в том, что в живых организмах и растениях за счёт обмена веществ с окружающей средой поддерживается постоянная относительная концентрация радиоактивного изотопа углерода, а в мёртвых эта концентрация экспоненциально уменьшается с известным периодом полураспада. По интенсивности радиоактивного излучения от объектов определяется искомое время.

Жизнь в Харькове

Хочу кратко рассказать о нашей жизни в Харькове. Хотя прошло всего пять лет после окончания войны, Харьков встретил нас красивым, зелёным, утопающим в цветах городом с отлично налаженным общественным транспортом и торговлей. Мы жили в лучшем общежитии университета на улице Артёма, д. 49, в комнатах по 6 человек. Получали стипендию 600 руб. (для сравнения, ассистент в вузе имел 1050 руб.). Каждое утро, вставая с постели и второпях позавтракав тем, что приготовили себе с вечера, мы разбегались из общежития кто куда.

Одни торопились пешком в УФТИ, другие на троллейбусную остановку – «зупинку», чтобы ехать в университет или в читальный зал. Нам, саратовцам, было непривычно видеть образцовый порядок в общественном транспорте, когда троллейбус останавливался так, что задняя дверь его оказывалась точно у начала очереди.

фото

Люди входили в салон спокойно, оставшиеся ждали следующего. Обедая в студенческой столовой, а, завершив рабочий день около 7–8 часов вечера, отправлялся в общежитие обычно пешком. По пути заходил в один из «Гастрономов», где покупал себе еду на ужин и на завтрак. Прилавки были полны разными продуктами. Часто я покупал небольшое количество любительской колбасы, которую продавец нарезал тонкими ломтиками. Заниматься в общежитии практически было невозможно, приходилось уходить в читальный зал библиотеки, где засиживались до её закрытия. Выходной был один, его проводили обычно в городе. Ходили в парки, в зоопарк, в кино, либо опять шли в библиотеку. В летние дни иногда ездили купаться и загорать на пруд в Лозовеньки. Хотя в Харькове и есть две реки: Лопань и Харьков с бетонными берегами и автомобильными мостами, но в них никто не купается. Харьковчане шутят: «Хоть лопни, Харьков не течёт».

Саратовская «диаспора» в общежитии отличалась весёлым нравом. Наши шутки порой будоражили всё общежитие. Расскажу об одной из них. На противоположной стороне коридора, недалеко от нашей комнаты жили студенты историки. Мы решили подшутить над старостой этой комнаты, кажется, его звали Павел. У историков был всеволновый радиоприёмник, а у нас радиолы Урал-47, принадлежавшая Ф. Насырову. С помощью радиолы мы организовали радиопередачу на коротких волнах, которую можно было принимать в других комнатах. Мы подговорили одного из историков, чтобы он включил свой радиоприёмник и настроил его на волну, излучаемую нашей радиолой, в присутствии Павла. «Передача» была построена как последние известия Харьковского радио на украинском языке. Она начиналась следующими словами: «Говорить Харків. Працює радіостанція на хвилі сорок дев'ять і три десятих метра. Передаємо останні вісті. Нещодавно наш кореспондент, побувавши у гуртожитку Харківського державного університету,...». Далее говорилось, что горисполком Харькова решил премировать Павла за образцовое санитарное состояние и порядок в комнате, где он был старостой. После окончания «передачи» (выключения приёмника) все бросились поздравлять Павла, намекая, что это событие следует отметить, пригласив коменданта общежития, что и состоялось. На следующий день нас по одному вызывали в спецчасть университета, где незнакомый человек в штатском начинал беседу словами: «К нам поступили сведения, что вы построили радиопередатчик и ведёте передачи». Каждый из нас как мог, давал объяснения по этому поводу. Суть объяснений сводилась к следующему. В любом супергетеродинном радиоприёмнике имеется местный генератор, называемый гетеродином, который излучает слабые электромагнитные волны, на частоте, отличной от принимаемого сигнала на 465 кГц. Это даёт возможность принимать другим радиоприёмником волны, излучаемые гетеродином. Так что никакого радиопередатчика мы не построили, а воспользовались одним из известных недостатков электронных ламп, называемым микрофонным эффектом. Чтобы провести радиопередачу, мы вскрыли заднюю стенку радиоприёмника и положили на его гетеродинную лампу лист чертёжной бумаги (ватмана). Для передачи надо было громко говорить в непосредственной близости от этого листа. Нашими объяснениями, по-видимому, удовлетворились, ограничившись нравоучительной беседой.

Следует сказать, что со студентами спецотделения проводилась и воспитательная работа. Правда, у нас не было еженедельных агитчасов, как в Саратовском университете, которые по сути дела являлись политинформацией, рекомендованной

парткомом университета. В ХГУ время от времени нас собирали для бесед. Например, были собрания, на которых учили, как следует соблюдать секретность. На них называли фамилии студентов, которые в троллейбусе или в столовой вели разговоры о своей учёбе, дипломных работах, чего нельзя было делать, учитывая закрытый характер наших занятий. Естественно, при этом провинившимся студентам делались серьёзные замечания.

Дипломная работа

В начале второго семестра 1950/51 учебного года нам выдали темы дипломных работ. Почти все студенты стали выполнять их в УФТИ. В старом, наполовину уцелевшем во время войны, здании университета остались лишь двое. Я и мой товарищ из Одессы Анатолий Львов, фронтовик, который был принят на работу лаборантом, работали в большой комнате (около 50 кв.м.), в которой кроме нас никого не было. Наши руководители по основной работе были сотрудниками УФТИ и приходили к нам не чаще, чем раз в неделю. Мой руководитель А.П. Ключарев, фронтовик, в то время к.т.н., был заместителем директора УФТИ. Темой моей дипломной работы являлась разработка установки для получения пучка протонов, предназначенных для впрыскивания в ускоритель. Свои дипломные работы мы выполняли в течение двух семестров. Помнится, в это время нам не читали лекции, или читали очень мало.

Недостатка материалов и приборов для моей установки не было. Кроме того, два раза в неделю в университет по вечерам приходил очень квалифицированный стеклодув-кварцедув из УФТИ Петушков, выполнявший только наши заказы, а также был штатный кафедральный токарь. Более сложные работы я мог заказать в УФТИ. Вот здесь-то мне и пригодилось приобретённое в авиатехникуме умение конструировать и выполнять чертежи. Например, чертежи на магнитный анализатор для моей установки руководитель без поправок передал в мастерские УФТИ. Готовое изделие было получено в пределах недели. Установка, которую я, в конце концов, собрал и запустил, состояла из источника протонов, ускорительной трубки на 50 кВ и магнитного анализатора, предназначенного для отклонения пучка ускоренных протонов. Вакуумная камера этого анализатора располагалась между полюсами электромагнита. Анализатор давал возможность экспериментально доказать, что полученный пучок состоит из протонов. Начальным источником ядер водорода служила плазма, образованная высокочастотным газовым разрядом в кварцевой колбе, в которую через палладиевый натекаТЕЛЬ впускался сверху предварительно осушенный и профильтрованный водород. Последний получался с помощью электролиза воды. Вокруг кварцевой колбы располагалась спираль из медной трубки, по которой пропусклась охлаждающая вода. Параллельно этой спирали был подключён переменный конденсатор. К образованному таким образом колебательному контуру подводилась по кабелю ВЧ (порядка 10 МГц) мощность от генератора в 200 Вт, при этом в разреженном водороде зажигался газовый разряд с ярко красным свечением. В металлическом дне кварцевой колбы имелось отверстие, через которое она сообщалась с ускорительной трубкой. Через это отверстие ионизированный водород вытекал в объём (около 10 л) трубки. Здесь образовывался пучок протонов посредством четырёх электростатических линз. Потенциалы на электроды этих линз

задавались с помощью резисторного делителя напряжения от источника на 50 кВ. Пучок протонов, пройдя через магнитный анализатор, попадал на металлическую пластинку, покрытую порошком кварца. В том месте, куда он попадал, наблюдалось ярко синее свечение. Напряжённость магнитного поля я измерял с помощью проволочной рамки и баллистического гальванометра. Установка откачивалась паромасляным (имеющим скорость откачки 40 л/с) и форвакуумным механическим насосами. Контур, состоящий из спирали и переменного конденсатора, посредством диэлектрической штанги настраивался на частоту генератора, при этом свечение газового разряда в кварцевой колбе достигало максимума. Следует отметить, что колба была на высоте около трех метров, а спираль с ВЧ генератором находилась под потенциалом 50 кВ по отношению к земле (попутно замечу, что у моего товарища использовалось напряжение в 200 кВ). Ток протонного пучка достигал 100 мкА. Любопытно, что когда меня на защите спросили, какова температура кварцевой колбы, то я простодушно ответил: «Не измерял, но, если плюнуть, – шипит», чем вызвал хохот присутствующих. После защиты комиссия в полном составе спустилась этажом ниже и прошла в лабораторию, где работала моя установка, запущенная ещё с утра. Сама работа и установка произвели впечатление на комиссию. По-видимому, позднее это сказалось на получении мной назначения на работу.

Собеседование

Незадолго до защит всем дипломникам было устроено собеседование с незнакомым человеком, имя которого осталось неизвестным. Он сидел в ректорате, в отдельном кабинете, отделённом от коридора свободной комнатой. Мы входили к нему поодиночке. По слухам, это был, возможно, Курчатов. Фамилия эта витала в воздухе, но мы о нём тогда ничего не знали. Он задавал самые разные вопросы, их тематика заранее нам не сообщалась. Например, меня он спросил: «Вы из Саратова? Существует ли в Саратове сад Липки? Какая рыба ловится в Волге? Многие ли в Саратове носят рубашки с короткими рукавами, как у Вас?» Получив мои короткие ответы, он сказал: «Благодарю Вас, можете идти». Складывалось впечатление, что он как бы отбирает себе будущих работников, располагая подробными сведениями об их учёбе и дипломных работах.

Госэкзамен

Особенно запомнилась торжественная сдача госэкзамена по физике. Это происходило в аудитории, подобной Горьковской в СГУ. Члены государственной экзаменационной комиссии (ГЭК) сидели в первом ряду. Перед ними, за отдельным столиком, сидел председатель ГЭКа академик К.Д. Синельников. Экзаменационные билеты лежали на длинном столе вблизи доски. Студенты, взявшие билеты, располагались через ряд за комиссией. Ещё через ряд сидели остальные студенты и «болельщики». Отвечавший на билет стоял перед всей аудиторией, иллюстрируя свой рассказ рисунками и формулами мелом на доске. Пользоваться листочком при ответе считалось предосудительным. После наиболее удачных ответов, председатель выходил из-за стола, благодарил студента и пожимал ему руку. Экзамен продол-

жался целый день с перерывом на обед. После завершения экзамена и объявления оценок студенты преподнесли всем членам комиссии цветы, чем вызвали слёзы на глазах у некоторых из них, да и у самих студентов. Мы были растроганы тем, что заканчивается важный этап нашей жизни.

Назначение на работу

29 декабря 1951 года нам выдали дипломы об окончании физико-математического факультета Харьковского госуниверситета им. А.М. Горького по специальности физика, и мы разъехались по своим городам. В феврале все снова собрались в Харькове в своём общежитии. Спустя некоторое время нас проводили в Москву для получения направлений на работу в различные организации Советского Союза. Не могу без волнения вспомнить, что на вокзал провожать нас пришли все преподаватели, которые занимались с нами на протяжении полутора лет. Пришла и начальник спецчасти университета Мария Петровна Жукова. Её внимание и опеку мы чувствовали всё время обучения и на выпускном вечере студенты выстроились в очередь целовать Марию Петровну. В 1956 году, будучи в командировке в Харькове, я первым делом поехал в спецчасть университета повидаться с ней, и она встретила меня очень приветливо.

На перроне вокзала в Харькове собрались выпускники физико-математического факультета и спецотделения химического факультета, всего около 25 человек, но ехали мы с ними в разных вагонах. Выйдя из поезда на Курском вокзале в Москве, мы ещё не знали, куда следовать дальше. Нас никто не встречал. Но тут проявился один из наших выпускников, знавший московский адрес, куда надо ехать. Рекомендовано было добираться на такси. Через некоторое время весь наш коллектив собрался в глубине двора у неприметной двери многоэтажного здания. Возможно, это был жилой дом. Сбоку около двери висела табличка «Редакция...» какой-то газеты. В документах, выданных нам впоследствии здесь, эта организация именовалась «База №...». За дверью располагалась комнатка порядка 10 кв.м. Из неё начиналась лестница на верхние этажи, а также было типичное окошко бюро пропусков, где сказали, что мы должны собраться здесь в определённый час, получить направление в спецгостиницы и вернуться сюда на следующий день. Мне с двумя моими товарищами пришлось поехать с Курского вокзала на электричке до N-ской остановки. К 12 часам ночи мы добрались до небольшого домика, окружённого сугробами снега, в окошке горел свет. Постучали, открылась дверь, мы вошли в дом. Дежурная проверила документы и повела нас в большую тёмную комнату, где на кроватях спали какие-то люди, и указала на свободные места. Нам пришлось несколько дней ездить в Москву и возвращаться обратно, до получения ожидаемых назначений. Меня вместе с В. Ерохиным послали в московскую организацию, которая называлась в то время Лаборатория измерительных приборов АН СССР (ЛИПАН СССР). Значительно позднее эта организация была переименована в Институт атомной энергии им. И.В. Курчатова. Нас поселили в одном из двухэтажных коттеджей, построенных на территории соснового бора вблизи института. В каждой комнате жили два или три человека. Мы жили в этом общежитии несколько дней, проходили медкомиссии и дожидались допуска на территорию лаборатории. Внезапно организация, выда-

вавшая путёвки на работу, отозвала нас из ЛИПАН СССР и без объяснения причин перенаправила в МВО. Позднее мы сами сделали вывод, что причиной этого явилась случайная встреча с иностранцем.

Абиссинец

В один из этих дней мы с Ерохиным в московском ресторане «Аврора» провожали своих однокашников, уезжавших по назначению на Восток. За столиком рядом сидел чернокожий человек. Мы решили проявить к нему внимание, считая, что на Западе их притесняют, а мы, советские люди, относимся к ним со всей душой. Мы пригласили его к нашему столику и выпили с ним за мир, за дружбу, изъясняясь на ломаном русско-английском языке. Он оказался из Абиссинии, окончившим Лондонский университет. К нам подошёл офицер и, наклонившись, тихонько сказал: «Ребята, вы поосторожнее». Мы не придали этому предупреждению серьёзного значения. Беседа с абиссинец продолжалась не более 10 минут. Вскоре абиссинец вернулся к своему столику, а мы вышли из ресторана и распрощались. Больше с нашими однокашниками мы не встречались.

Возвращение в Саратов

В направлении, которое мы представили в МВО, было сказано, что «База №...» Министерства... СССР, направляет молодых специалистов Григорьева и Ерохина для устройства на работу по специальности. Здесь нам сказали буквально следующее: «Вы уж извините нас, ребята, но устроить вас в середине учебного года в Москве затруднительно, походите, пожалуйста, по главам Министерства и выберете города и вузы из тех, которые вам будут предлагать». Мы походили по главам, после некоторых раздумий попросили послать нас на работу в Саратовский университет. Просьбу нашу незамедлительно удовлетворили. На имя ректора СГУ выписали направление с той же формулировкой, что и в документе, с которым мы явились в МВО. С марта 1952 года я начал работать старшим лаборантом на кафедре общей физики. Летом в колхоз, а с сентября стал ассистентом. Ерохин некоторое время работал на кафедре радиофизики ассистентом. Так закончилась моя учёба и началась работа.

О саратовцах, переведённых в ХГУ

Получив назначения в Москве, мои однокашники разъехались кто куда.

В Арзамасе-16 (ныне город Саров, РФЯЦ), где в то время уже работали около 10 саратовцев, **В.Г. Заграфов** попал в теоретический отдел к Андрею Дмитриевичу Сахарову, впоследствии трижды Герою Соц. Труда. Он получил Ленинскую премию, стал доктором физико-математических наук, профессором. **Р.З. Людаев** там же поступил в экспериментальное подразделение, получил Ленинскую премию, стал доктором физико-математических наук, профессором. **Ф. Насыров** также поступил в экспериментальное подразделение, получил Государственную премию.

В Томск уехали: **В.В. Горбелик** – стал начальником цеха номерного завода; **А. Насырова** – поступила на закрытое предприятие.

В Сухуми в институт, называемый «Объект Юга», в сектор, руководимый Нобелевским лауреатом и впоследствии лауреатом Сталинской премии Густавом Герцем, попал **А.А. Плютто**, стал доктором физико-математических наук.

В Харькове остались: **В.Ф. Зеленский** – стал доктором технических наук, профессором, директором УФТИ, академиком Украинской АН; **Л.А. Шишкин** – был направлен в аспирантуру к А.И. Ахиезеру, стал доктором физико-математических наук, профессором, заведующим кафедрой в ХГУ; **Н.Д. Тарасов** – стал старшим научным сотрудником УФТИ.

В Обнинск уехал **Д. Кардаш**; позднее там была построена первая атомная электростанция.

В Подмоскowie в один из п/я была направлена **И.П. Лукашова**; отработав там несколько лет, она вернулась в Саратов, работала в НИИМФ СГУ.

В Саратов уехали: **М.А. Григорьев** – в СГУ стал доктором физико-математических наук, профессором; **В.В. Ерохин** – в СГУ был ассистентом кафедры радиофизики, затем работал в НИИ-28.

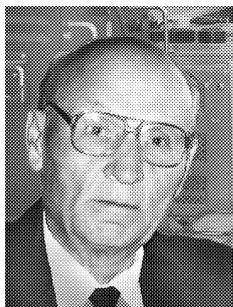
В Киев уехал **Ю.И. Гаркун**, кандидат физико-математических наук, профессор, учёный секретарь академического института.

И. Турецкий и **Е.В. Козлова** по разным причинам вернулись в Саратов и закончили СГУ.

О **Г. Романове** сведений не имею. Более подробной информацией о моих одноклассниках по Харькову я не располагаю.

В заключении выражаю свою благодарность своему старинному другу Л.Я. Майофису за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания.

Поступила в редакцию 6.02.2009



Григорьев Михаил Алексеевич – родился в 1928 году в деревне Хилино Ильинского района Великолукской области. В 1946 году с отличием окончил Саратовский авиационный техникум и поступил на физический факультет СГУ. В 1950 году по приказу Министерства высшего образования был переведён на спецотделение физико-математического факультета Харьковского госуниверситета, который окончил в декабре 1951 года. Работает в СГУ с 1952 года, в настоящее время профессор кафедры электроники, колебаний и волн. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (1965, СГУ) и доктора физико-математических наук (1988, СГУ) в области электроники СВЧ, акустоэлектроники и акустооптики. Соавтор и соредатор книги «Электронные приборы сверхвысоких частот», допущенной Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для вузов, а также 4 учебных пособий. Автор более 140 научных статей по направлениям, указанным выше.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83



ДВЕ ТЫСЯЧИ ВОСЬМОЙ ГОД В ДАТАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

Д.И. Трубецков

Настоящая публикация – продолжение публикации «Какие даты круглыми назвать?»¹. В ней собраны «некруглые» даты, представляющие, на наш взгляд, определенный интерес для читателей журнала.

Ключевые слова: Землетрясения, ударная волна, Жан Батист Жозеф Фурье, эллиптические функции, ДНК.

245 лет назад, в 1763 году Михаил Васильевич Ломоносов в работе «О слоях земных» предложил классификацию четырех типов землетрясений по интенсивности и «способу отклонений». Он изложил свои представления о строении и развитии Земли.

В том же веке Джон Мичелл пришёл к выводу, что сотрясения Земли происходят из-за прохождения через земную толщу упругих волн.

Считают, что современная сейсмология берет начало с появления в 1862 году красочно иллюстрированного двухтомника «Великое неаполитанское землетрясение 1857 года: основные принципы сейсмологических наблюдений» [1, с. 11]. Книгу написал ирландский инженер Роберт Маллет, который составил карту пораженной территории, разделив её на четыре зоны и повторив тем самым Ломоносова. В первой зоне населенные пункты были уничтожены полностью; во второй были разрушены крупные строения и имелись человеческие жертвы; в третьей имели место лишь небольшие повреждения и не было несчастных случаев; наконец, в четвертой не было отмечено повреждений, хотя толчок и ощущался. Таким образом, Маллет вслед за Ломоносовым предложил первую примитивную шкалу интенсивности землетрясений.

В настоящее время распространена шкала, в которой выделено двенадцать степеней сотрясения: от едва ощутимого толчка до ужасающих разрушений.

Простейшая модель землетрясения – модель сильного «точечного» взрыва внутри сплошного твердого тела. Условие сильного взрыва означает малость характерного давления в твердом теле по сравнению с давлением на фронте ударной волны. Закон движения ударной волны получается таким же, как при сильном «точечном»

¹ Д.И. Трубецков. «Какие даты круглыми назвать?» // Изв. вузов «ПНД», т. 16, № 3, 2008, с. 22–32.

взрыве в атмосфере. Под «точечным» взрывом в атмосфере понимают взрыв заряда, имеющего малый размер и массу, но обладающего большой энергией. Простое и изящное решение этой задачи, которое привело к весьма нетривиальному результату, было дано академиком Л.И. Седовым. Напомним её постановку и решение (см., например, [2]).

Пусть в течение очень короткого времени в атмосфере выделилась столь большая энергия, что при дальнейшем распространении ударной волны можно пренебречь атмосферным давлением за ударной волной. Масштабы явления должны зависеть от «мгновенно» выделившейся энергии взрыва \mathcal{E} и инерционных свойств атмосферы – плотности ρ . Закон движения ударной волны определяется зависимостью расстояния до центра взрыва от \mathcal{E} , ρ и момента времени t взрыва, то есть $r = f(\mathcal{E}, \rho, t)$. Тогда в системе LMT матрица размерности имеет вид:

$$\begin{array}{ccccc} & r & \mathcal{E} & \rho & t \\ L & 1 & 2 & -3 & 0 \\ M & 0 & 1 & 1 & 0 \\ T & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}$$

и $r = C\mathcal{E}^\alpha \rho^\beta t^\gamma$. Следовательно, $L = (L^2MT^{-2})^\alpha (L^{-3}M)^\beta T^\gamma$ и $1 = 2\alpha - 3\beta$, $0 = \alpha + \beta$, $0 = -2\alpha + \gamma$. Из последней системы уравнений находим:

$$\alpha = \frac{1}{5}, \quad \beta = -\frac{1}{5}, \quad \gamma = \frac{2}{5}.$$

Окончательно имеем

$$r = C\mathcal{E}^{1/5} \rho^{-1/5} t^{2/5}. \quad (1)$$

Для грубой оценки плотности энергии в момент времени t поделим \mathcal{E} на объем шара с радиусом $r(t)$. Исходя из размерности этой величины, можно думать, что это и есть какое-то характерное давление на фронте ударной волны (на поверхности шара):

$$p = \frac{3}{4\pi C^3} \mathcal{E}^{2/5} \rho^{3/5} t^{-6/5}. \quad (2)$$

Вернемся к модели землетрясения. Роль характерного давления теперь играет модуль Юнга G . Радиус разрушения r_0 с учетом соотношений (1) и (2) определяется из выражения

$$\mathcal{E} \sim Gr_0^3. \quad (3)$$

Скорость движения ударной волны находится из формулы

$$v(t_0) \sim \frac{r(t_0)}{t_0} \sim \left(\frac{\mathcal{E}}{\rho}\right)^{1/5} t_0^{-3/5}, \quad (4)$$

где t_0 – время после взрыва, $r(t_0)$ – расстояние, на которое уходит ударная волна от точки взрыва за время t_0 . Из формулы (4) находим, что

$$v^2(t_0) \sim \left(\frac{\mathcal{E}}{\rho}\right)^{2/5} t_0^{-6/5}. \quad (5)$$

Сравнивая соотношения (5) и (2), видим, что

$$v^2(t_0) \sim \frac{p}{\rho} \quad \text{и} \quad v(t_0) \sim \sqrt{\frac{p}{\rho}},$$

то есть скорость ударной волны через время t_0 после взрыва имеет порядок скорости звука.

Землетрясения относятся к редким катастрофическим событиям, математическим образом которых являются степенные законы распределения вероятностей («распределения с тяжелыми хвостами»). Американские сейсмологи Гутенберг и Рихтер установили в 1941 году закон распределения землетрясения по энергиям

$$\mathcal{N}(\mathcal{E}) \sim \mathcal{E}^{1+\alpha}, \quad (6)$$

где \mathcal{N} – число землетрясений с энергией \mathcal{E} , $\alpha \sim 0.6$.

Красивое исследование числа землетрясений в масштабе всего земного шара провел академик Георгий Сергеевич Голицын, используя анализ размерностей и подобия (см., например, [3]).

Приведем его рассуждения, следуя [3, с. 101–103]. Заметим, что в 2008 году исполнилось 600 лет великому роду Голицыных, а Г.С. Голицын всей своей научной жизнью связан с нелинейной динамикой. Количественной характеристикой силы землетрясений в настоящее время считается величина сейсмического момента

$$\mathcal{M} = \mu_c S \cdot s, \quad (7)$$

где μ_c – модуль сдвига пород, разрываемых при землетрясении, S – площадь разрыва хрупкой коры, s – среднее смещение соседних блоков коры при землетрясении. Величина \mathcal{M} измеряется в ньютонах на метр ($L^2 MT^{-2}$), то есть имеет размерность энергии (сравните формулу (7) с формулой (3)).

В процессе землетрясения высвобождается напряжение $\Delta\sigma$, накопленное в процессе землетрясения при движении литосферных плит ($[\Delta\sigma] = L^{-1} MT^{-2}$). Как показано в [3], величина $\Delta\sigma$ незначительно меняется вокруг своего среднего значения (порядка 40 атм = 4 МПа = $4 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2} = 4 \cdot 10^6 \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-3}$), хотя величина \mathcal{M} может при этом отличаться на несколько порядков. Последнее очень важно, поскольку позволяет каждому землетрясению приписать свой пространственный масштаб длины L_m , площади $S_m = L_m^2$ или объема $V_m = L_m^3$;

$$L_m = \left(\frac{\mathcal{M}}{\Delta\sigma} \right)^{1/3}, \quad S_m = \left(\frac{\mathcal{M}}{\Delta\sigma} \right)^{2/3}, \quad V_m = \frac{\mathcal{M}}{\Delta\sigma}. \quad (8)$$

Величины L_m и S_m – меры длины и площади разрыва, образующегося в процессе землетрясения. Знание модуля сдвига μ_c позволяет определить и среднее смещение s . Из соображений размерности можно записать

$$\mathcal{M} = a_S \mathcal{P} \tau(\geq \mathcal{M}), \quad (9)$$

где a_S – постоянный множитель, \mathcal{P} – мощность, вводимая в систему², $\tau(\geq \mathcal{M})$ – среднее время ожидания события с сейсмическим моментом, равным или большим \mathcal{M} . Вид формулы (9) соответствует распределению для землетрясения в тонкой

²Как указано в [3], в случае глобальной статистики \mathcal{P} – полное значение геотермической мощности, равной $4 \cdot 10^{13}$ Вт при среднем значении потока $0.08 \text{ Вт} \cdot \text{м}^2$.

коре вблизи срединно-океанических хребтов, где она зарождается и имеет толщину около 5 км [3]. В сейсмологии вводят среднюю частоту повторения землетрясений $\mathcal{N}(\geq M) = 1/\tau(\geq M)$. Тогда соотношение (9) переписывают в виде:

$$\mathcal{N}(\geq M) \sim \frac{\mathcal{P}}{M^n}, \quad (10)$$

где показатель n , согласно тщательно проверенной статистике событий, по одним данным равен 1.05, а по другим 0.94, то есть очень близок к единице [3]. Постоянный коэффициент a_S определяют по данным наблюдений.

Приведенному закону распределения подчиняется лишь небольшая часть землетрясений. Большинство из них происходит вдали от срединных хребтов в океане, они имеют момент $M \leq 10^{21}$ Н · м⁻¹, значение показателя n считают равным 0.66 ± 0.03 .

Вернемся к формулам (8). Последняя из них определяет объем пространства, в котором происходит разгрузка напряжений. Первопричиной создания напряжений в коре толщиной h является поток тепла, подаваемый на площадь S_m . Он действует на объем $hS_m = h(M/(\Delta\sigma))^{2/3}$ (см. вторую формулу в (8)).

С учетом формулы (9) и того, что $\mathcal{N} = 1/\tau$, сказанное можно записать в виде:

$$\frac{1}{V_m}(\mathcal{M}\mathcal{N}(\geq M)) = a_S \mathcal{P} \frac{1}{hS_m}. \quad (11)$$

Подставляя в (11) $V_m = M/(\Delta\sigma)$ и $hS_m = (M/(\Delta\sigma))^{2/3}h$, окончательно получим:

$$\mathcal{N}(\geq M) = a_S \mathcal{P} \cdot h^{-1} M^{-2/3} (\Delta\sigma)^{-1/3}. \quad (12)$$

Приведем далее цитату, комментирующую формулу (12).

«Эта формула, опубликованная автором в 1995 году, не только объясняет природу показателя $0.66 \pm 0.03 \approx 2/3$, но и выявляет факторы, способствующие землетрясению. Например, чем тоньше кора, тем меньше среднее время ожидания землетрясения заданной силы. Различие между двумя показателями связано с тем, что в первом случае, при $n = 1$, рвется вся кора толщиной h , а во втором случае, при $n \approx 2/3$, это не происходит, и образуется лишь частичный разрыв в коре с площадью S такой, что $\sqrt{S} < h$. Поэтому землетрясения, регистрируемые в тонкой океанической коре, имеют распределение с $n = 1$, а подавляющее большинство их в толстой коре соответствуют $n \approx 2/3$ » [3, с. 103].

240 лет назад, 21 марта 1768 года в Осере (Оксерр), родился выдающийся французский математик и физик, член Парижской академии наук с 1817 года Жан Батист Жозеф Фурье [4]. Он автор известной работы «Аналитическая теория тепла» (1822), которая имела большую значимость для развития математической физики. Именно Фурье вывел дифференциальное уравнение теплопроводности. Ему принадлежит и метод представления функции тригонометрическими рядами (ряды Фурье), широко применяемый в различных разделах физики. Не менее известен интеграл Фурье. Но жизнь Фурье не была жизнью кабинетного ученого. Как пишет Араго [5], «...поприще нашего товарища было наполнено тревогами и опасностями...»

Фурье родился в семье простого портного и на восьмом году жизни остался круглым сиротой. Будем следовать далее биографии Фурье, написанной Араго [5],

иногда не пересказывая её, а цитируя (в дальнейшем выделяем цитируемое лишь кавычками, не указывая соответствующих страниц в [5]).

Благодаря оксерскому епископу, Фурье был принят в военную школу, где «...он учился словесным наукам с удивительно быстрыми успехами». В тринадцать лет Фурье понял, что школьных знаний ему мало. «Собирая свечные огарки в кухне, коридорах и классах, он усаживался с ними в камине, закрывался ширмами и всю ночь посвящал занятиям, плоды которых скоро прославили его имя и принесли честь его отечеству».

Фурье хотел быть солдатом, подобно Декарту, но «...его просьба о допущении на экзамен в артиллерию... была отвергнута с цинизмом, достойным памяти». И это несмотря на поддержку знаменитого Лежандра. «Фурье, – отвечал министр, – как неблагородный, не может быть принят в артиллерию, хотя бы он был второй Ньютон!» На самом деле, как подчеркивает Араго, причина была в другом. «...Фурье получил отказ не строго за свое неблагородство, но за то, что у него не было дохода в несколько сотен ливров, без которых главы тогдашнего правления за ничто считали гений, равносильный Ньютону».

В 1789 году Фурье отказался от духовного звания и возглавил главную кафедру математики в военной оксерской школе. Причем он легко заменял заболевших профессоров риторики, истории, философии, давая уроки, «...блиставшие глубокой ученостью и изящным изложением».

Грянула Великая французская революция, в которой Фурье принимал активное участие. С 1795 года он работал в Нормальной школе³, а после её преобразования – в Политехнической школе. Араго пишет об этом периоде следующее. «Вступив в это знаменитое заведение сперва в качестве наблюдателя за уроками фортификации и потом перейдя на кафедру анализа, Фурье оставил по себе почетную память профессора, преподававшего ясно, методически и с глубокой ученостью; к этому я прибавляю: он доказал, что преподавание математики не чуждо изяществу».

Лекции Фурье не были собраны. В «Журнале Политехнической школы» помещена только одна его статья «О начале возможных скоростей». Это сочинение, без сомнения, служившее текстом для одной из его лекций, показывает, что его тайна великого профессора состояла в искусном сочетании истин отвлеченных с любопытными приложениями и малоизвестными историческими подробностями, почерпаемыми из оригинальных источников, – что ныне встречается весьма редко».

Фурье был советником Наполеона по науке, принимал участие в походе в Египет и некоторое время даже управлял этой страной. Сразу же после взятия французами Каира (памятная победа при пирамидах) Бонапарт для возрождения древнего царства фараонов учредил Египетский Институт по образцу Парижской академии наук. Сам Бонапарт принадлежал к математическому отделению, Монж был первым президентом, а место бессменного секретаря занял Фурье, занимаясь почти всеми исследованиями Института. Он занимался математическими задачами, вопросами механики, теоретическими и историческими исследованиями о водопроводе из Нила в Каир и об оазисах, планами работ на месте древнего Мемфиса и всех гробниц. Фурье представил Институту описание машины для орошения полей, приводимой в движение ветром.

³В Нормальной школе началось публичное преподавание начертательной геометрии – великого творения Монжа, который умер 190 лет назад. Она перешла почти без изменений в Политехническую школу, а затем на заводы, мануфактуры и самые бедные мастерские.

Араго подчеркивает дипломатические способности Фурье, приводя много любопытных примеров. Резюмируя, он пишет следующее.

«Мало людей, юношеские мечты которых не уничтожались бы одна за другой печальной действительностью зрелого возраста. Фурье представляет редкое исключение. Вспомним 1789 год и посмотрим, чего мог ожидать скромный монастырский послушник: немного литературной славы, благосклонного внимания к его проповедям в церквах столицы, иметь удовольствие произнести панегирик тому или другому важному лицу, прославленному из официальности. Что же вышло? Едва прошло девять лет, и наш товарищ стал во главе Египетского института и сделался оракулом, любимцем общества, между членами которого были Бонапарт, Бертолле, Монж, Малюс, Жеффруа Сент-Иллер, Конте и пр.; генералы возлагали на него труднейшие поручения и, наконец, восточная армия, богатая разного рода знаменитостями, не пожелала другого оратора для прославления высоких дел падшего героя⁴».

Фурье принадлежит и «Историческое предисловие» к проекту «Общее сочинение о Египте», принятому Каирским институтом, в котором собраны и приведены в порядок все материалы египетского похода.

После возвращения в Европу в 1802–1815 годах Фурье был префектом департамента Изеры; в этот период он начал работать над теорией тепла.

Во Введении к «Аналитической теории тепла» Фурье четко формулирует поставленные им задачи.

«Сущность поставленных мною вопросов следует из перечисления главного содержания этой теории. Каковы элементарные качества, которые необходимо наблюдать в каждом веществе, и в чем состоят самые подходящие эксперименты для их точного определения? Если общие законы управляют распределением тепла в твердом теле, то каково математическое выражение этих законов? При помощи какого анализа можно вывести из этих математических выражений полное решение основных вопросов?...

Дифференциальные уравнения распространения тепла выражают самые общие условия и сводят физические вопросы к проблеме чистого анализа, что, в сущности, и есть предмет теории...

Уравнения движения тепла, так же как уравнения, описывающие колебания тел либо колебания жидкостей, принадлежат к недавно открытой области математики, которую было важно усовершенствовать...

Мы видим, например, что одно и то же уравнение, которое математически рассматривается как выражение абстрактных свойств и которое в этом отношении принадлежит общему анализу, одновременно является уравнением движения света в атмосфере; это же выражение описывает законы диффузии тепла в твердом теле, и оно же входит во все главные задачи теории вероятностей» (цит. по [6]).

В качестве напоминания рассмотрим уравнение теплопроводности и один его современный способ решения.

При построении теории теплопроводности Фурье естественно исходил из представлений теории теплорода, которой в те времена пытались объяснить все тепловые явления. Эти представления неверны. Однако, если объем системы или давление поддерживаются постоянными, то явления протекают так, как если бы тепло

⁴Имеется в виду гибель от руки фанатика-убийцы легендарного военачальника Клебера – героя египетской кампании, с которым Фурье дружил.

было каким-то веществом, которое может только перемещаться в пространстве, но не может создаваться или уничтожаться. Количество тепла следует отождествить с внутренней энергией, если постоянен объем системы, и с энтальпией⁵ системы, если постоянно давление. В обоих случаях математические основы теории остаются верными, в то время как их физическое обоснование не имеет ничего общего с представлениями, из которых исходил Фурье.

Рассмотрим неограниченную среду, в которой поток тепла распространяется в направлении оси x [7]. Свойства среды могут меняться в направлении x и зависеть от времени. Поэтому плотность потока \vec{q} является функцией x и t , то есть $\vec{q} = \vec{q}(x, t)$. Плотностью потока тепла называется вектор \vec{q} , совпадающий по направлению с направлением распространения тепла и численно равный количеству тепла, проходящему в одну секунду через площадку в один квадратный сантиметр, перпендикулярную к направлению потока тепла. Выведем закон Фурье – уравнение, которому удовлетворяет \vec{q} в одномерных задачах.

Выделим мысленно в среде бесконечно длинный цилиндр с образующими, параллельными оси x , и рассмотрим бесконечно малый участок такого цилиндра AB длиной dx (рис. 1). Количество тепла, поступающее в цилиндр AB за время dt через основание A с координатой x , равно $q(x)Sdt$, где S – площадь поперечного сечения цилиндра. Количество тепла, уходящее за то же время через основание B , есть $q(x + dx)Sdt$. Поскольку через боковую поверхность тепло не поступает, полное количество тепла, поступающее за время dt в анализируемый участок цилиндра, равно

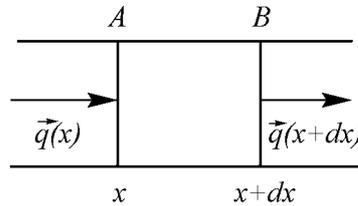


Рис. 1.

$$[-q(x + dx) + q(x)]Sdt = -\frac{\partial q(x)}{\partial x} Sdxdt. \quad (13)$$

С другой стороны, это тепло можно представить в виде $dM \cdot c_v dT$, где $dM = \rho Sdx$ – масса цилиндра AB , c_v – удельная теплоемкость, dT – повышение температуры. Тогда с учетом (13) имеем:

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}. \quad (14)$$

Установим связь между плотностью потока тепла q и температурой среды T , для чего рассмотрим случай бесконечной однородной пластинки толщиной l . Если на одной стороне пластинки поддерживается температура T_1 , а на другой – температура T_2 и $T_1 \geq T_2$, то, как показывает опыт, поток тепла пропорционален разности температур $(T_1 - T_2)$ и обратно пропорционален толщине пластинки l , то есть

$$q = \kappa \frac{T_1 - T_2}{l}, \quad (15)$$

⁵Напомним, что энтальпию можно определить как функцию состояния, приращение которой при изобарическом процессе дает тепло, полученное системой.

где κ – коэффициент теплопроводности, в общем случае $\kappa = \kappa(x)$. Если пластинка бесконечно тонкая и $l = dx$, $T_1 = T(x)$, $T_2 = T(x + dx)$, то из (15) следует, что

$$\frac{T_2 - T_1}{l} = \frac{T(x + dx) - T(x)}{dx} = \frac{\partial T}{\partial x},$$

и формула (15) принимает вид закона Фурье

$$q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (16)$$

Формула (16) может быть получена более просто. Действительно, поток тепловой энергии возникает в среде из-за наличия градиента температуры. При малых градиентах плотность потока теплоты q из общих соображений разложения в ряд Тейлора пропорциональна первой степени градиента температуры $\partial T/\partial x$ в направлении x её изменения, что и дает формулу (16).

Подставим соотношение (16) в уравнение (14). Тогда имеем уравнение

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (17)$$

которое, как известно, носит название уравнения теплопроводности. В частном случае, когда среда однородна и коэффициент κ не зависит от температуры, уравнение (17) принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (18)$$

$\chi = \kappa/(\rho c_v)$ – коэффициент температуропроводности среды.

Решим на уровне оценки задачу о распространении тепла в среде в следующей постановке⁶. Пусть в начальный момент времени в определенной точке жидкости выделилось некоторое количество Q тепловой энергии. Оценим, как со временем расширяется область нагрева и как падает со временем температура в этой области.

Пусть t – характерное время, за которое теплота распространяется от источника на область с характерным размером R . Тогда из уравнения (18) получаем

$$\frac{T}{t} \sim \frac{\chi T}{R^2}$$

и

$$R \sim (\chi t)^{1/2}, \quad (19)$$

то есть область расширяется пропорционально корню квадратному из времени. Соотношение (19) можно интерпретировать иначе: если вещество с характерным размером R нагрето неравномерно, то вследствие переноса теплоты температура выравнивается за характерное время

$$\tau \sim \frac{R^2}{\chi}, \quad (20)$$

которое называется временем релаксации.

⁶Мы следуем книге Крайнова В.П. Качественные методы в физической кинетике и гидрогазодинамике. М.: Высшая школа, 1989, с. 147–151.

Если в одномерном случае обозначить Q количество теплоты, выделившееся с единичной площади источника, представляющего собой плоскость yz , перпендикулярную направлению распространения теплоты, то

$$Q \sim \rho c_v T R \sim \rho c_v T (\chi t)^{1/2}.$$

Тогда

$$T \sim \frac{Q}{\rho c_v} (\chi t)^{-1/2}, \quad (21)$$

то есть температура падает со временем как $t^{-1/2}$.

Далее рассмотрим типичную нестационарную задачу теплопроводности, в которой плоский источник теплоты имеет температуру $T_0(t)$, которая колеблется со временем с частотой ω : $T_0(t) = T_0 \sin \omega t$, и следует оценить характерное расстояние x_0 , соответствующее затуханию тепловой волны, возникающей от источника теплоты.

Полагая решение в виде монохроматической волны

$$T(x, t) = T_0 e^{i(\omega t - \kappa x)},$$

из уравнения (18) находим для волнового числа

$$\kappa = i \sqrt{\frac{i\omega}{\chi}}. \quad (22)$$

Из формулы (22) видно, что κ является комплексным, причем мнимая и действительная части одинаковы. Таким образом, длина волны $\lambda \sim (\text{Re } \kappa)^{-1}$ и длина $x_0 \sim (\text{Im } \kappa)^{-1}$, на которой имеет место существенное затухание волны, в данном случае одинаковы. Последнее означает, что распространение тепловой волны представляет собой аperiодический процесс, при котором осцилляция и затухание происходят на одной и той же длине

$$x_0 \sim \left(\frac{\chi}{\omega}\right)^{1/2}.$$

Заметим, что этот результат линейной теории, который, казалось бы, интуитивно ясен, «заставил» ученых проглядеть важный эффект, не имеющий линейных аналогов. Об этом ярко написал Ю.А. Данилов [10] «Линейные теории теплопроводности и диффузии по существу тождественны: в линейном приближении законы Фурье и Фика «устроены» одинаково, уравнения теплопроводности и диффузии с точностью до обозначений совпадают. Если создать начальное возмущение температуры или концентрации, то со временем оно «рассосется», распределение температуры и концентрации будет стремиться к постоянному. Каково же было изумление ученых, когда выяснилось, что, если диффузия сопровождается химической реакцией или теплопроводность наблюдается в среде с распределенным источником тепла, то начальное возмущение может переходить в бегущую волну, движущуюся со скоростью, намного превышающей скорость диффузии! Важность открытия волнового режима в системах диффузионного типа станет ясной, если учесть, что такие системы описывают процессы, происходящие при

горении газовых смесей, распространении нервного импульса, транспорта ионов через клеточные мембраны, динамику популяций различных организмов и многое другое».

Далее Ю.А. Данилов цитирует обзор Элвина Скотта «Электрофизика нервного волокна».

«...То, что математики не сумели своевременно изучить уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова, не может быть объяснено слабостью их техники перед лицом огромных математических трудностей... Препятствие, вероятно, заключалось в том, что математики автоматически перенесли вывод о неволновом поведении решений волнового дифференциального уравнения на нелинейный случай.

...Чтобы иметь наглядный пример нелинейной диффузии, достаточно взять обыкновенную свечу, веками освещавшую рабочие столы ученых. Диффузия тепла от пламени освобождает от воска все новые участки фитиля, которые, в свою очередь, загораются и служат новыми источниками тепла».

Но вернемся к уравнению (18) и для разнообразия перепишем его для случая диффузии в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \quad (23)$$

Здесь ρ – плотность среды, D – постоянный коэффициент диффузии. Построим особое (автомодельное)⁷ решение этого уравнения [9]. Для построения автомодельных решений привлечем соображения размерности. Из величин x , t , D , которые могут входить в решение, можно составить с точностью до возведения в степень лишь одну безразмерную комбинацию

$$S = \frac{x^2}{Dt}. \quad (24)$$

Поэтому, если в решение входит какая-либо безразмерная функция от безразмерного аргумента, то она должна иметь вид $f(s) = f(x^2/(Dt))$. Добавляя в качестве множителя степень t , которая сохраняется с точностью до постоянного коэффициента при изменении масштаба, приходим к виду решения

$$\rho = At^\alpha f\left(\frac{x^2}{Dt}\right) \quad (25)$$

с разменным постоянным коэффициентом A .

⁷Напомним смысл автомодельности [8]. Явление, развивающееся во времени, называется автомодельным, если распределения его характеристик в разные моменты времени получаются одно из другого преобразованием подобия. То, что одна из независимых переменных отождествлена со временем, не имеет значения: она может иметь любой физический смысл. Предположим, что мы имеем задачу математической физики с двумя независимыми переменными r и t , приводящую к решению системы уравнений в частных производных.

В такой задаче автомодельность означает, что можно так выбрать переменные масштабы, скажем, $\vec{u}_0(t)$ и $r_0(t)$, что представленные в новых масштабах характеристики явления выразятся через функции одной переменной:

$$\vec{u} = \vec{u}_0(t) \cdot U(\xi), \quad \xi \simeq \frac{r}{r_0(t)}.$$

Решение задачи при этом приводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений для функции $U(\xi)$.

Теперь необходимо подобрать функцию f и показатель α так, чтобы удовлетворить уравнению (23). Коэффициент A при этом остается постоянным в силу линейности уравнения (23). Будем считать решение (25) четной функцией числа x и уменьшим количество подбираемых параметров, воспользовавшись законом сохранения массы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, t) dx = M_0 = \text{const},$$

который для решения (25) имеет вид

$$2 \int_0^{\infty} At^{\alpha} f\left(\frac{x^2}{Dt}\right) dx = \text{const},$$

или с использованием замены переменной интегрирования $S = x^2/(Dt)$ имеем

$$dx = \frac{\sqrt{Dt}}{2\sqrt{S}} dS$$

и

$$2 \int_0^{\infty} At^{\alpha} f(S) \sqrt{Dt} \frac{dS}{2\sqrt{S}} = 2A\sqrt{Dt}^{\alpha+1/2} \int_0^{\infty} S^{-1/2} f(S) dS = \text{const}.$$

Так как результат не должен зависеть от t , то

$$\alpha + \frac{1}{2} = 0, \quad \text{то есть } \alpha = -\frac{1}{2}. \quad (26)$$

Нечетное по x решение построено в [9, § 11, глава V].

Используя (25) и (26), приходим к форме решения

$$\rho = At^{-1/2} f\left(\frac{x^2}{Dt}\right). \quad (27)$$

Сравните (27) с оценочной формулой (21).

Для нахождения функции f подставим выражение (27) в уравнение (23), для чего вычислим производные

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{A}{2} t^{-3/2} f(S) - \frac{A}{D} x^2 t^{-5/2} f'(S),$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{2A}{D} x t^{-3/2} f'(S),$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \frac{2A}{D} t^{-3/2} f'(S) + \frac{4A}{D^2} x^2 t^{-5/2} f''(S),$$

где $f' = df/dS$, $f'' = d^2 f/dS^2$.

Подставим эти соотношения в (23) и умножим обе части полученного уравнения на $(2/A)t^{3/2}$. Тогда получим

$$-f(S) - 2\frac{x^2}{Dt}f'(S) = 4f'(S) + \frac{8x^2}{Dt}f''(S),$$

то есть обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами

$$8Sf''(S) + (2S + 4)f'(S) + f(S) = 0. \quad (28)$$

Левая часть уравнения (28) допускает факторизацию, то есть представление в виде итерации двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$8Sf''(S) + (2S + 4)f'(S) = \left(2S\frac{d}{dS} + 1\right) \left(4\frac{d}{dS} + 1\right) f.$$

Обозначив $(4d/dS + 1)f = h$, перепишем уравнение (28) в виде

$$\left(2S\frac{d}{dS} + 1\right) h = 0, \quad \text{то есть } 2S\frac{dh}{dS} + h = 0.$$

Разделяя переменные, получаем

$$\frac{dh}{h} = -\frac{dS}{2S}, \quad \text{то есть } h = \frac{C_1}{\sqrt{S}},$$

где $C_1 = \text{const}$. Возвращаясь к функции f , имеем

$$\left(4\frac{d}{dS} + 1\right) f = \frac{C_1}{\sqrt{S}} \quad \text{и} \quad 4f'(S) + f = \frac{C_1}{\sqrt{S}}.$$

Решение этого уравнения приводит к формуле

$$f(S) = \left\{ \frac{C_1}{4} \int \frac{e^{S/4}}{\sqrt{S}} dS + C_2 \right\} e^{-S/4}, \quad \text{где } C_2 = \text{const}.$$

Таким образом, имеют место два линейно независимых решения

$$f_1(S) = e^{-S/4} \int_0^S \frac{e^{S_1/4}}{\sqrt{S_1}} dS_1, \quad f_2(S) = e^{-S/4}.$$

Ограничимся рассмотрением второго решения, что с учетом (27) позволяет получить автомодельное решение уравнения (23)

$$\rho(x, t) = At^{-1/2} e^{-\frac{x^2}{Dt}}, \quad (29)$$

где A – произвольная постоянная.

Графики найденного автомодельного решения при различных $t > 0$ приведены на рис. 2.

Кривые описывают распределение Гаусса и хорошо известны в теории вероятностей⁸. Площадь, заключенная между любым из графиков рассматриваемого семейства и осью x , одна и та же и равна суммарной массе диффундирующих частиц

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx = \frac{A}{\sqrt{t}} 2\sqrt{Dt} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = 2A\sqrt{\pi D}, \quad (30)$$

где $x = 2\sqrt{Dt}y$, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$. Результат не зависит от t . Так как при стремлении t к нулю колокол все сильнее прижимается к оси ρ , становясь выше, то есть растягиваясь от оси x во столько же раз, то в пределе при $t = +0$, функция (29) становится пропорциональной дельта-функции δx . Учитывая (30), получаем

$$\rho(x, +0) = 2A\sqrt{\pi D}\delta(x).$$

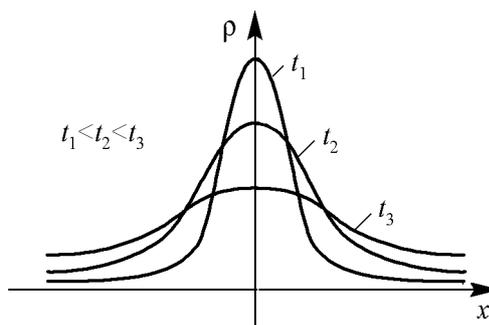


Рис. 2.

Вернемся к биографии Фурье. Мы оставили его, когда он был префектом в Изере. У Араго находим: «Занятия по управлению Изерским департаментом мало отвлекали Фурье от литературы и геометрии. К его жизни в Гренобле относятся важнейшие его сочинения; здесь он составил “математическую теорию тепла”, заслужившую признательность всего ученого мира».

Следует заметить, что Лаплас, Лагранж и Лежандр, признавая, что истинные уравнения распространения тепла найдены, критиковали способы их получения и интегрирования (в последнем случае речь шла о строгости нахождения решения). Фурье никогда не соглашался с критикой и болезненно ее воспринимал.

Однако сомнение великих не выходило из его головы и отравляло даже радость от большой математической награды, полученной им за решение задач о распространении тепла. Любопытно по этому поводу замечание Араго. «Мало того: раздражение его кончилось тем, что он всегда огорчался усилиями геометров, пытавшихся усовершенствовать его теорию. Вот странное заблуждение ума гениального! Наш товарищ забыл, что никто не доводил ученых вопросов до окончательного совершенства: разве великое открытие Ньютона не совершенствовалось бессмертными трудами Даламбера, Клеро, Эйлера, Лагранжа и Лапласа?... Время оправдывает только те действия целых обществ и частных людей, которые подчиняются власти рассудка».

После возвращения Наполеона с острова Эльбы император приказал Фурье оставить Гренобль в течение пяти дней, но затем назначил его префектом Роны с титулом графа. Однако префектом Фурье оставался недолго и уехал в Париж. Позволим себе длинную цитату из Араго.

⁸Вспомним приведенную на стр. 122 цитату из Введения к «Аналитической теории тепла» Фурье: «...это же выражение описывает законы диффузии тепла в твердом теле, и оно же входит во все главные задачи теории вероятностей».

«Вторая реставрация застала Фурье в Париже без должности и в беспокойстве о будущем. Управляющий пятнадцать лет большим департаментом, заведовавший дорожными работами и собравший миллионы для уничтожения болот Бургоина не имел даже двадцати тысяч франков. Эта почетная бедность и воспоминание о полезных трудах не обращали на себя внимание министров, озабоченных политикой и требованиями иностранцев. Просьба о пенсии была отвергнута с пренебрежением. Но парижский префект, господин Шаброль, узнает, что старый его профессор в Политехнической школе, секретарь Египетского института и автор “теории тепла” должен уроками снискивать пропитание. Это известие взволновало его и, несмотря на крики партий, он определяет Фурье директором статистической комиссии Сены, с жалованием в шесть тысяч франков. Не нужно молчать о таком деле. Науки признательны всем, кто им покровительствует, особенно, когда покровительство не безопасно. В Академию Фурье был избран со второй попытки, но затем, после смерти Даламбера стал секретарем Академии. Он возвратился к любимым своим занятиям, но пережитое сказалось на здоровье Фурье».

Закончим рассказ еще одной цитатой из Араго.

«Телесное сложение Фурье обещало долгую жизнь, но самая счастливая натура не может устоять против антигигиенических привычек. Боясь самой легкой простуды, товарищ наш в самое жаркое время года одевался как путешественник, собирающийся зимовать в полярных льдах. “Меня, – говаривал он, смеясь, – считают толстяком; но если попробуют раздеть, как снимают покрыва с египетской мумии, то найдут один скелет”. Заимствуя сравнение из климата берегов Нила, я скажу, что в тесных и сильно нагретых комнатах нашего товарища течение воздуха походило на самум, который в огненной пустыне равняется чуме...

Еще в Египте и Гренобле Фурье чувствовал припадки аневризма в сердце. В Париже уже нельзя было сомневаться в причине частых его страданий... 15 мая 1830 года он почувствовал сильный припадок и все еще не понял его важности, потому что легши в постель, не раздевшись, просил г. Пти, одного из молодых друзей его медика, не оставлять его и продолжать беседу. Но вскоре раздался крик: “Скорее, скорее уксусу! Я умираю!” – и ученый, слава нашей академии, кончил жизнь».

180 лет назад, в 1828 году Н.Х. Абель и К.Г.Я. Якоби развили теорию эллиптических функций, которые появляются, например, в теории нелинейного осциллятора и в одной из простейших моделей гидродинамического течения – периодической цепочке точечных вихрей.

Одним из красивых способов введения эллиптических функций является подход, основанный на рассмотрении обобщенного синуса – функции, обратной по отношению к интегралу вида

$$x = \int_0^y \frac{dz}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}}, \quad (31)$$

где m и n – какие-либо действительные числа [11].

При этом случаю $m = -1, n = 0$ соответствует круговой синус, случаю $m = 1, n = 0$ – гиперболический, случаю $m = 0, n = -1$ – лемнискатический (лемниската Бернулли имеет форму восьмерки). Если $m = -1 - k^2, n = k^2$ ($0 < k < 1$), то в

качестве функции, обратной интегралу (31), получаем синус Якоби $\text{snt}t$; эта функция появляется в задаче о математическом маятнике. Напомним, что это – решение для модели математического маятника – тяжелой материальной точки массой m , подвешенной на невесомой нерастяжимой нити длиной l и совершающей колебания в вертикальной плоскости (рис. 3).

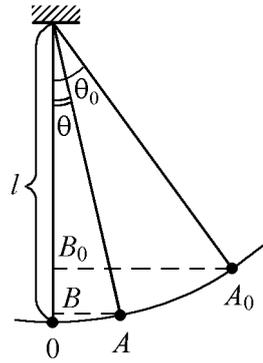


Рис. 3.

Пусть нить была отклонена от положения равновесия на угол θ_0 ; затем маятник отпустили с нулевой начальной скоростью. Скорость маятника в положении, характеризуемом углом θ , есть $v = l(d\theta/dt)$, а его кинетическая энергия $mv^2/2 = (ml^2/2)(d\theta/dt)^2$ должна равняться работе, произведенной силой тяжести (сопротивлением воздуха пренебрегаем). Тогда

$$mg(B_0B) = mgl(\cos \theta - \cos \theta_0) = \frac{ml^2}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2.$$

Откуда

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}.$$

Знак «минус» поставлен потому, что угол θ сначала убывает (когда t растёт).

Интегрируя, находим

$$\begin{aligned} t &= -\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = \\ &= \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{\theta}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\theta}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)}}. \end{aligned} \quad (32)$$

Введя новую переменную $\eta = \sin(\theta/2)/\sin(\theta_0/2)$, вместо (32) получим

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\eta}^1 \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-\sin^2(\theta_0/2)\eta^2)}}.$$

Окончательно имеем

$$t_0 - t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-\sin^2(\theta_0/2)\eta^2)}},$$

где t_0 – момент первого прохождения маятника через положение равновесия, причем

$$t_0 = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-\sin^2(\theta_0/2)\eta^2)}}.$$

Следовательно,

$$\eta = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)} = \operatorname{sn} \left[\sqrt{\frac{g}{l}}(t_0 - t), \sin \frac{\theta_0}{2} \right].$$

Таким образом, величина η , характеризующая отклонение маятника в момент времени t от положения равновесия, выражается через эллиптическую функцию Якоби с модулем $k = \sin(\theta_0/2)$.

55 лет назад, в 1953 году Дж.Д. Уотсон и Ф.Х.К. Крик открыли структуру дезоксирибонуклеиновой кислоты или сокращенно ДНК. Об истории открытия авторы написали сами в книге «Двойная спираль».

Существуют подозрения в их честности. Иногда даже пишут о том, что знаменитая заметка в «Nature» от 25 апреля 1953 года – кража. В интервью главного редактора «Scientific American» Джона Ренни с Джеймсом Уотсоном есть следующий сюжет (цитируется по статье «50 лет двойной спирали», опубликованной в журнале «В мире науки», 2003, № 8, с. 36).

«Scientific American: – Всегда ходило много слухов о том, что Уилкинс передал Вам рентгенограммы ДНК, полученные Франклин, без её разрешения и что именно они сыграли важную роль в расшифровке ДНК⁹. Не кажется ли Вам сегодня, что было бы справедливее, если бы Нобелевский комитет присудил премию ей вместе с Вами и Криком, а не Уилкинсу?

Джеймс Уотсон: – Думаю, что нет.

Уилкинс предоставил нам рентгенограммы А-формы ДНК, а Розалинда – В-формы. Так что в идеале Франклин и Уилкинсу нужно было бы присудить Нобелевскую премию по химии, а Крику и мне – по биологии. Тогда все было бы справедливо. Но вышло иначе.

Мы стали столь прославленными потому, что знаменита сама ДНК. Если бы Розалинда, беседа в начале 1951 года с

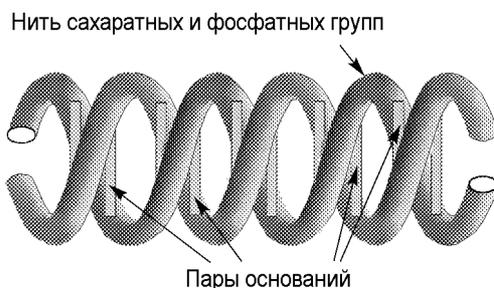


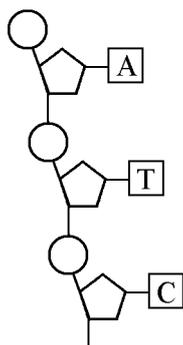
Рис. 4. (Рис. 5.5 из книги [12])

Фрэнсисом (Криком. – *Д.И.Т.*), поделилась с ним своими данными, эту структуру установила бы она. И тогда именно она стала бы знаменитой».

Почему мы связываем это важнейшее событие в истории генетики с нелинейной динамикой? Дело в том, что «классические нелинейные решетки являются моделями для исследования биохимических молекул, например, белков и ДНК». Это цитата из книги Элвина Скотта [12, с. 218]. «Изображенная на рис. 5.5 (здесь рис. 4. – *Д.И.Т.*) структура ДНК являет собой ответ на все мечты прикладных математиков. Эта одномерная нелинейная решетка... играет центральную роль при объяснении загадки Жизни. Поэтому на протяжении последних двух десятилетий проводились интенсивные исследования с целью нахождения солитонов при различных аппроксимациях структуры ДНК.

⁹Морис Уилкинс и Розалинда Франклин (её называют «забытая леди ДНК») работали в Лондонском королевском колледже над изучением ДНК.

Полинуклеотидная цепочка



Двойная полинуклеотидная цепочка

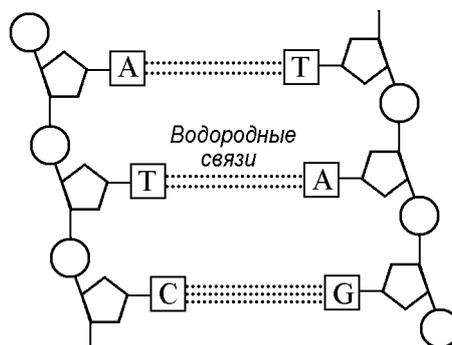


Рис. 5.

Задача сортировки огромной и все возрастающей массы литературы упрощается с использованием книги Якушевича, озаглавленной “Нелинейная физика ДНК”, в которой дан обзор публикаций, посвященных этой тематике (здесь [13]. – Д.И.Т.). Эта книга содержит не только введение в химию ДНК и обсуждение множества её математических моделей, но также и описание экспериментальных измерений, таблицы физических и химических констант и полную библиографию» [12, § 5.3.3].

Заметим, что Якушевич Л.В. – отнюдь не «он», а замечательная женщина – физик из Пушино. Опираясь на её работу [14], кратко опишем первую и наиболее простую нелинейную динамическую модель ДНК – модель синус–Гордона.

Напомним, что молекула ДНК состоит из двух полинуклеотидных цепочек, слабо взаимодействующих между собой. При этом каждый отдельный нуклеотид состоит из трех атомных групп: сахара, основания и фосфатная группа. Сахара и фосфаты образуют регулярную часть полинуклеотидной цепи, а основания – нерегулярную часть, поскольку в ДНК возможны четыре типа оснований: аденин (А), гуанин (G), цитозин (С), тимин (Т). Основания, чередуясь вдоль цепи, образуют последовательность, уникальную для каждого живого организма. Входящие в состав ДНК две полинуклеотидные цепи слабо взаимодействуют между собой, в основном, через водородные связи, образующиеся между основаниями. При этом между основаниями А и Т образуются две водородные связи, а между основаниями G и С – три (рис. 5).

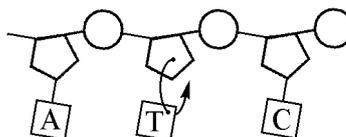


Рис. 6.

Для получения структурной ДНК следует свернуть полинуклеотидную цепочку в спираль, и мы приходим к рисунку, аналогичному рис. 4.

Модель синус–Гордона описывает вращательные колебания оснований вокруг сахаро-фосфатной цепочки (рис. 6).

Как указано в [12], «такие движения вносят существенный вклад в расплетение двойной спирали и поэтому важны для понимания динамической составляющей начального этапа процесса транскрипции».

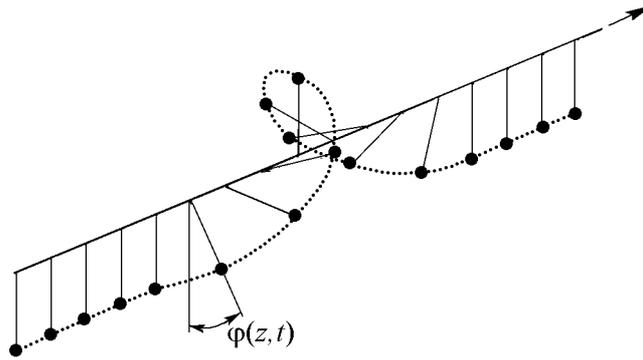


Рис. 7.

Оказалось, что вращательные колебания оснований вокруг сахаро-фосфатной цепочки во многом подобны вращательным колебаниям связанных маятников (рис. 7), подвешенных на горизонтальную нить, которые можно описать уравнением синус-Гордона (СГ-уравнение)

$$I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = K a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - mgl \sin \varphi,$$

где φ – угловое отклонение маятника; I , m и l – момент инерции, масса и длина маятника; K – коэффициент жесткости горизонтальной нити, на которой подвешены маятники; a – расстояние между соседними ближайшими маятниками.

В модели ДНК маятники выступают аналогами оснований, функция φ – угол отклонения от положения равновесия, I – момент инерции оснований. Горизонтальная нить моделирует сахаро-фосфатную цепочку ДНК, а коэффициент K трактуется как жесткость этой цепочки. Поле, наводимое второй цепочкой ДНК, в модели отображается гравитационным полем. Это поле в первом приближении можно представить как сумму водородных взаимодействий между основаниями внутри пар. В силу этого множитель перед $\sin \varphi$ можно заменить константой, пропорциональной жесткости этих взаимодействий. Напомним свойства решений СГ-уравнения на примере нормализованного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sin u \quad (33)$$

при $-\infty < z < +\infty$ и $-\infty < t < +\infty$.

Будем искать решение в виде бегущей волны $u(x, t) = \tilde{u}(z - vt)$, $z - vt = \xi$, v – скорость волны. Тогда, учитывая, что $\partial u / \partial z = \partial \tilde{u} / \partial \xi$ и $\partial u / \partial t = -v \partial \tilde{u} / \partial \xi$, вместо уравнения (33) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(1 - v^2) \frac{d^2 \tilde{u}}{d\xi^2} = \sin \tilde{u}. \quad (34)$$

Умножая уравнение (34) на $du/d\xi$ и интегрируя по переменной ξ , находим

$$\frac{1}{2}(1-v^2) \left(\frac{d\tilde{u}}{d\xi} \right)^2 = A - \cos \tilde{u}, \quad (35)$$

где A – постоянная интегрирования, или

$$\frac{d\tilde{u}}{d\xi} = \pm \sqrt{\frac{2(A - \cos \tilde{u})}{1 - v^2}}. \quad (36)$$

Если положить $A = 1$, то при граничных условиях $\tilde{u} \rightarrow 0(\text{mod}2\pi)$ и $d\tilde{u}/d\xi \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \pm\infty$ решение уединенной волны имеет вид

$$u(z, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[e^{\pm[(z-vt)-z_0] \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}} \right]. \quad (37)$$

По существу, мы пришли к задаче о нелинейном маятнике, а решение (37) есть уравнение сепаратрисы. Решение со знаком «+» принято называть кинком, а со знаком «-» – антикинком. Они представляют собой не настоящий импульс, а монотонное изменение амплитуды при увеличении ξ от $-\infty$ до $+\infty$. Применительно к модели ДНК эти решения интерпретируются как нелинейные конформационные волны, возникающие и распространяющиеся вдоль молекулы ДНК.

В период с 1953 по 1957 год в США под руководством Дж. Бейкуса разработан алгоритмический язык ФОРТРАН (FORTRAN). Название происходит от английских слов For(mula) Tran(slator), то есть транслятор (переводчик) формул программ на машинный язык.

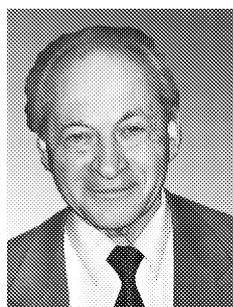
45 лет назад в 1963 году Нобелевская премия в области физиологии и медицины была присуждена Дж.К. Экклсу, А.Ф. Хаксли и А.Л. Ходжкину за изучение механизмов возбуждения и торможения в периферических и центральных частях нервных клеток. Уравнения Ходжкина–Хаксли дали весьма достоверное описание процесса распространения нервного импульса в аксоне кальмара, а также нейронных процессов возбуждения и торможения, управляемых токами ионов натрия и калия. Но в системе уравнений Ходжкина–Хаксли пять переменных, что затрудняет понимание динамики процессов. В связи с этим появился ряд упрощенных моделей. И исходная модель Ходжкина–Хаксли и упрощенные модели достаточно подробно описаны в книге [12, с. 150–173].

Библиографический список

1. *Эйби Дж.А.* Землетрясения. М.: Недра, 1982. 264 с.
2. *Брук Ю.М., Стасенко А.Л.* Как физики делают оценки – метод размерностей и порядки физических величин // О современной физике – учителю. М.: Знание, 1975. С. 54–131.
3. *Голицын Г.С.* Макро- и микромиры и гармония. М.: Бюро Квантум, 2008. 240 с. (Библиотечка «Квант». Вып. 107. Приложение к журналу «Квант» № 3/2008).

4. Храмов Ю.А. Физики. Биографический справочник. Киев: Наукова думка, 1977. С. 345.
5. Араго Ф. Жозеф Фурье // Биографии знаменитых астрономов, физиков и геометров. Т. I. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. С. 457.
6. Жизнь науки. Антология вступлений к классике естествознания / Составитель и автор биографических очерков профессор С.П. Капица. М.: Наука, 1973. С. 150–159.
7. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. II. Термодинамика и молекулярная физика. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1975, глава IV.
8. Баренблат Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике. Ленинград: Гидрометеиздат, 1982. 255 с.
9. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы математической физики. М.: Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1973, глава V.
10. Данилов Ю.А. Прекрасный мир науки. Сборник / Сост. А.Г. Шадтина. Под общей редакцией В.И. Санюка, Д.И. Трубецкова. М.: Прогресс-Традиция, 2008. С. 163.
11. Маркушевич А.И. Замечательные синусы. Введение в теорию эллиптических функций. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1974. 96 с.
12. Скотт Э. Нелинейная наука: рождение и развитие когерентных структур. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 560 с.
13. Yakushevich L.V. Nonlinear Physics of DNA. Weinheim: Wiley-VCH, 2004
14. Якушев Л.В. Введение в нелинейную физику ДНК // В кн. Нелинейные волны'2004 / Отв.ред. А.В. Гапонов-Грехов, В.И. Некоркин. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2005. С. 376–380.

Поступила в редакцию 23.01.2009



Трубецков Дмитрий Иванович – родился в Саратове (1938). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ, профессор, член-корреспондент Российской академии наук, заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования. Научный руководитель Лицея прикладных наук и факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: вакуумная электроника и микроэлектроника сверхвысоких частот, теория колебаний и волн, нелинейная динамика, история науки. Автор более двадцати учебных пособий и монографий, а также более двухсот статей в периодической печати.

E-mail: trubetskov@nonlin.sgu.ru

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83

Георгий Моисеевич Заславский

1935 - 2008



Георгий Моисеевич родился 31 мая 1935 г. в Одессе. В 1957 г. он окончил Одесский университет. После того как в 1957 г. было принято решение о создании Сибирского отделения Академии Наук с центром в Новосибирске, туда отправилось много сотрудников из научных институтов Москвы, Ленинграда и других городов, а также выпускников различных вузов страны. Среди них был и Г.М. Заславский. Он начал работать инженером в одном из НИИ Новосибирска, затем старшим лаборантом Новосибирского электротехнического института. В 1959 г. Г.М. Заславский стал преподавать в еще только создававшемся Новосибирском университете, сначала ассистентом, а в 1963 г. стал доцентом. В только что организованный под руководством А.М. Будкера Институт ядерной физики (ИЯФ) из московского Института атомной энергии (ИАЭ) пришли С.Т. Беляев, В.М. Галицкий, Б.В. Чириков, Р.З. Сагдеев и др. Приоритетными направлениями в ИЯФ стали исследования по созданию ускорителей на основе новых принципов ускорения и физика плазмы. Физика плазмы в то время была еще очень молодой областью и с нее только что была снята завеса секретности. Р.З. Сагдеев возглавил одну из лабораторий ИЯФ, которая сосредоточилась на плазменной тематике. Находящаяся на взлете научной карьеры фигура Р.З. Сагдеева была очень привлекательной для молодых физиков. Среди его первых аспирантов были А.А. Галеев, В.Е. Захаров, А.М. Фридман, С.С. Моисеев, Г.М. Заславский. Все они стали крупными физиками.

Кандидатская диссертация Г.М. Заславского, которую он защитил в 1964 г., была посвящена релятивистской гидродинамике. Создание новых ускорителей и открытых систем магнитного удержания плазмы требовали обстоятельного изучения многомерных нелинейных колебаний консервативной системы в целом, то есть на неограниченном интервале времени и при произвольных начальных условиях. Поставленные задачи явились мощным стимулом для прогресса нелинейной физики, которая в настоящее время бурно развивается. Для ускорителей с жесткой фокусировкой, идея которых тогда широко обсуждалась, А.М. Будкер полагал, что вследствие «забывания» начальной фазы колебания должны диффузионно расти и это

приведет к выходу частиц из режима ускорения и быстрой гибели частиц. Вычислительные эксперименты, проведенные в ЦЕРН, подтвердили предсказание А.М. Будкера. Было показано, что диффузия возникает даже при очень слабой нелинейности. Однако механизм диффузии был совершенно неясен. Здесь проявились какие-то новые явления, для которых требовались новые подходы. Такого рода задачи привели Б.В. Чирикова к изучению явления хаоса. На основе перекрытия нелинейных резонансов им впервые был введен критерий появления хаотических колебаний в нелинейных гамильтоновых системах (критерий Чирикова, 1959) [1].

Б.В. Чириков и Р.З. Сагдеев определили интерес Г.М. Заславского к проблематике хаоса, которая стала предметом всех его последующих исследований. Напомним, что в 1949 г. Э. Ферми предложил механизм происхождения космических лучей (ускорение Ферми) [2]. К задаче об ускорении Ферми обратились Б.В. Чириков и Г.М. Заславский, и в предложенной ими простой модели был детально изучен его механизм [3]. Два главных результата работы [3] заключаются в следующем: 1) было показано, что существует область неустойчивости, движение в которой является хаотическим; 2) был получен эквивалентный критерию Чирикова другой критерий возникновения хаотичности, основанный на расцеплении фазовых корреляций. Оба критерия стали широко использоваться в дальнейшем при решении многочисленных физических задач.

Одним из поворотных пунктов в развитии нелинейной динамики явилась проблема Ферми–Паста–Улама (ФПУ, 1955) [4], затронувшая фундаментальные вопросы физики. ФПУ-проблема в сильнейшей степени определила интерес Г.М. Заславского к нелинейным задачам. Формированию представлений о хаосе способствовала также важная задача плазменной физики о существовании и устойчивости магнитных поверхностей (Г.М. Заславский, Р.З. Сагдеев, Н.Н. Филоненко и др., 1966–1968), включенная в программу исследований ИЯФ. Выяснилось, что под действием возмущения происходит разрушение магнитных поверхностей и возникает хаос [5]. Зарождение хаоса происходит в окрестности сепаратрисы, где образуется стохастический слой – важнейшее понятие теории хаоса. Р.З. Сагдеев предположил универсальность этого явления вблизи сепаратрисы. Вскоре это было подтверждено в работе [6], где была дана первая оценка ширины стохастического слоя и получен положительный показатель Ляпунова, свидетельствующий о локальной неустойчивости. Затем Г.М. Заславский и Н.Н. Филоненко [7] провели подробное изучение стохастического слоя с помощью полученного в [6] сепаратрисного отображения, ставшего универсальным инструментом в математическом аппарате теории хаоса.

Концептуальное значение в понимании феномена хаоса имело установление его неоднородности, когда области хаоса весьма сложным образом переплетены с областями регулярности – системы с разделяющимся фазовым пространством (Г.М. Заславский, Б.В. Чириков) [3, 8]. Полученные результаты нашли применение при решении многочисленных и разнообразных физических задач: о движении заряженных частиц во внешних полях, неустойчивости плазмы, нелинейных волнах, турбулентности в средах с дисперсией и др.

Результаты, полученные при изучении ускорения Ферми и проблемы разрушения магнитных поверхностей, вышли далеко за рамки первоначально поставленных задач. В этих результатах проявились типичные черты возникновения хаоса в гамильтоновых системах. С хаосом связан тип сложных движений динамических систем, принципиально отличных от известных простых движений, таких как периодические и квазипериодические движения. Понятие сложности обычно ассоциировалось со сложным устройством системы, с большим числом степеней свободы.

Существовал глубокий разрыв, с одной стороны, между интегрируемыми системами классической динамики, а с другой – системами статистической механики. Данный разрыв свидетельствовал о наличии фундаментальной нерешенной проблемы классической физики. Открытие хаоса в нелинейных динамических системах способствовало значительному прогрессу в разрешении этих трудностей и углубленному пониманию динамического и статистического описания этих систем. Оказалось, что область проявления статистических законов намного шире, чем это традиционно предполагалось. Хаотическим поведением могут обладать просто устроенные системы, всего с несколькими степенями свободы. Было показано, что динамическое и статистическое описание являются не двумя противоположностями, принципиально отличающимися между собой, а они сосуществуют, дополняют друг друга, характеризуют разные стороны одного и того же объекта. В настоящее время стало ясным, что хаос представляет собой типичное свойство динамических систем. Он весьма распространен и проявляется практически во всех областях современной физики. Можно даже сказать, что системы, демонстрирующие только регулярное поведение, являются редкими. Все это оказало глубокое воздействие на наши представления о физическом мире. Исследования хаоса по-новому осветили целый ряд проблем, имеющих как общефизическое, так и общенаучное значение, и дали новые импульсы к их изучению.

Лежащая в основе механистической картины мира динамическая модель обусловила преобладание динамического описания. Динамический и статистический способы описания породили глубинные вопросы о существовании законов, лежащих в основе физического мира, соотношении динамического и статистического, что является фундаментальным, первичным, а что производным, вторичным? Проблема приобрела другое освещение, и наметились новые подходы к имеющему многовековую историю вопросу о природе случайности, вероятности.

Картина мира, основанная на строгом детерминизме, оказалась неполной. Определены ограничения на возможности предсказуемости, на соотношение детерминизма – индетерминизма. Исследования хаоса привели к новому взгляду на вопросы устойчивости – неустойчивости, локального описания – глобального подхода, хаотичности – упорядоченности.

Открытие хаоса относительно независимо было сделано для двух классов динамических систем: гамильтоновых и диссипативных. Соответственно этому имелись две линии развития. Исследование хаоса имеет длинную историю, которая для диссипативных систем на завершающем этапе в 1960-е – начале 1970-х гг. связана с именами Э. Лоренца, С. Смейла, Д. Рюэля, Ф. Такенса. Часто, говоря об открытии хаоса, только этим и ограничиваются. Но имеется другая линия развития, которая идет через небесную механику и эргодическую теорию и восходит к Л. Больцману, А. Пуанкаре, Дж. Биркгофу, Э. Хопфу, Н.С. Крылову, А.Н. Колмогорову, Я.Г. Синаю. Эта линия в те же 1960-е гг. привела к открытию хаоса в гамильтоновых системах, где работы Б.В. Чирикова, Г.М. Заславского и их сотрудников имели первостепенное значение.

Полученные в 1960-е гг. результаты были изложены в монографии Г.М. Заславского «Статистическая необратимость в нелинейных системах» [9], опубликованной в 1970 г. Вместе с диссертацией Б.В. Чирикова [8], вышедшей годом раньше, эта монография явилась в мировой литературе первым систематическим изложением теории хаоса. Однако труднодоступность работы Б.В. Чирикова затруднила ознакомление с ней широкого круга физиков, а монография Г.М. Заславского в очень значительной степени способствовала распространению идеи хаоса.

В Академгородке, как и в других новых научных центрах, концентрировались талантливая и активная молодежь и опытные, зрелые ученые, чьи возможности в полной мере не использовались в Москве и других сложившихся центрах науки [10]. Ученым институтов Академгородка самим в определенной степени разрешалось разрабатывать перспективные направления в аспекте формирования мировой фундаментальной науки. Возможно, такие послабления объяснялись высоким авторитетом руководства нового Сибирского отделения и собранием блестящих талантов в научных институтах.

В кругах исследователей, в первую очередь молодых, складывались самосознание и умонастроения, которые соответствовали общечеловеческим, а не официальным стандартам. Большую популярность приобрели неформальные дискуссии между крупными учеными и студентами на различных семинарах и встречах. Кроме того, одной из самых сильных сторон молодого Новосибирского университета было то, что там работал целый ряд ученых с мировой известностью. Молодые люди, которые только вступали в науку, имели возможность получить новейшую информацию из первых рук, от людей, непосредственно «делавших» науку.

В 1971 г. Г.М. Заславский был приглашен на должность старшего научного сотрудника в Институт физики им. Л.В. Киренского СО АН СССР (г. Красноярск) в теоретический отдел, который возглавлял его друг и сокурсник по Одесскому университету В.А. Игнатченко. Здесь Г.М. Заславскому были предоставлены все условия для развития его тематики и формирования соответствующей группы сотрудников. На основе этой группы, после защиты Г.М. Заславским докторской диссертации, в 1973 г. был открыт сектор теории нелинейных процессов, который он возглавил.

В этот период Г.М. Заславский приступил к изучению квантового хаоса. Отправным пунктом многих исследований квантового хаоса в 1970-е гг. явилась работа А. Эйнштейна 1917 г. [11], в которой были обобщены правила квантования Бора–Зоммерфельда. При исследовании хаоса в квантовом случае обращаются к тем особенностям квантовых систем, которые в классическом пределе проявляют хаотические свойства. Вследствие этого усилился интерес к изучению квантовых систем в квазиклассическом случае и влияния квантовых эффектов на свойства динамического хаоса. В классических системах при возникновении хаотического движения происходит «разрушение» интегралов движения. Эйнштейн указал на неприменимость предложенных им обобщенных правил квантования в случае неинтегрируемых систем.

Вопрос о квазиклассических правилах квантования в случае неустойчивых классических траекторий нашел отражение в двух работах Г.М. Заславского [12, 13]. Первоначально работа [12] была отвергнута редколлегией ЖЭТФ. В то время (статья [12] поступила в редакцию 15 января 1973 г.) затронутые в ней вопросы не казались актуальными, проблемами хаоса занималось не так много физиков. Время, когда нелинейная динамика стала общепризнанной областью, еще не пришло. Лишь после вмешательства И.М. Лифшица, убедившего Е.М. Лифшица, который был членом редколлегии журнала, в высоком уровне этой работы и принципиальной важности поднятых в ней проблем, она была принята в печать.

Исследование квантовых систем в квазиклассической области параметров имеет непосредственное отношение к фундаментальному вопросу – о связи классической и квантовой механики. Важные результаты здесь получил Г.М. Заславский совместно с Г.П. Берманом [14], который сначала делал дипломную работу у Г.М. Заславского (1970), а затем был его аспирантом. Позднее к исследованиям подключились А.М. Иомин и А.Р. Коловский – еще два аспиранта Георгия Моисеевича.

φωτο

фото

В работе [14] был введен важный временной масштаб t_E , названный позднее время Эренфеста. Этот масштаб характеризует время расплывания волнового пакета, он ограничивает тот промежуток времени, в течение которого волновой пакет может быть сопоставлен классической частице. Поэтому на временах $t > t_E$ становится существенным влияние квантовых эффектов. В работе Г.П. Бермана и Г.М. Заславского [15] было введено понятие квантового нелинейного резонанса. Результаты развития идей по квантовому хаосу, в частности, обобщение понятия квантового нелинейного резонанса и взаимодействия между квантовыми нелинейными резонансами изложены в работах [16–19]. Квантовые нелинейные резонансы и их взаимодействие нашли широкие применения в дальнейших интенсивно проводимых исследованиях квантового хаоса [20]. Фундаментальная величина – время Эренфеста – оставалась малоизученной в течение многих лет в силу своей логарифмической малости. С развитием компьютерной и экспериментальной техники было обнаружено численно и экспериментально, что время Эренфеста играет принципиально важную роль в квантовом транспорте в мезоскопических системах и в исследовании устойчивости волновых функций. Позднее, в 1980-е гг., в ИЯФ стал интенсивно изучаться квантовый хаос в ядерных системах (В.В. Соколов, В.Г. Зелевинский и др.).

Статья 1976 г. [21] о хаотическом характере взаимодействия атомов с собственным полем излучения в резонаторе породила поток работ по атомному хаосу в лазерных полях. В этой работе впервые было показано, что при определенных условиях в полуклассическом пределе в фундаментальной модели взаимодействия излучения с веществом возможно возникновение гамильтонова хаоса по стандартному сценарию с образованием стохастического слоя в окрестности сепаратрисы. Сейчас это новое направление в современной квантовой физике с развитой теорией и множеством экспериментов.

Глубокие связи с квантовым хаосом возникли в весьма далекой от квантовой физики области – в акустике океана. Из совместных с С.С. Абдуллаевым, а затем с А.Л. Вировлянским статей конца 1980-х – начала 1990-х гг. [22] родилось направление в подводной акустике, называемое сейчас лучевым и волновым хаосом в подводном звуковом канале в океане [23–25]. В конце сороковых годов прошлого века акустики обнаружили возможность распространения звука в океане на тысячи километров. Эффект обусловлен минимумом скорости звука на определенной глубине, благодаря чему часть звуковой энергии оказывается захваченной подводным волноводом. В лучевом приближении волновое уравнение сводится к гамильтоновым уравнениям для траектории лучей. Внутренние волны в океане приводят к горизонтальной модуляции скорости звука и при определенных условиях порождают хаотическую диффузию лучей и особенности волнового поля. Волновой хаос имеет много общего с квантовым хаосом. Многочисленные натурные эксперименты в океане по дальнему распространению звуковых сигналов подтверждают эти теоретические предсказания [26, 27]. Результаты этого направления более чем двадцатилетней работы Георгия Моисеевича изложены в его последней монографии, которая выходит уже после его смерти [28].

Изучение странных аттракторов возродили в 1970–1980-е гг. надежды на решение давно поставленной фундаментальной проблемы – возникновения турбулентности. В этой связи Г.М. Заславский предложил простейшую модель странного аттрактора [29]. При этом было получено отображение, названное им самим стандартным диссипативным отображением. Однако в литературе это отображение общепринято называть отображением Заславского. В отсутствие диссипации оно переходит в стандартное отображение Чирикова. Отображение Заславского вошло в число клас-

сических моделей диссипативного хаоса. Оно в простейшей форме устанавливает в явном виде связь между двумя типами хаотического движения, дает возможность отчетливо проследить, как при изменении параметров гамильтонов хаос переходит в диссипативный хаос.

Последовательное изложение идей хаоса, математического аппарата и применение развитых методов к многочисленным физическим задачам Г.М. Заславский изложил в своей монографии «Стохастичность динамических систем» [30]. Она была издана в 1984 г. и стала заметным явлением в физической литературе. В ней рассматриваются как гамильтоновы, так и диссипативные системы с упором на гамильтонов хаос. Кроме того, приведены ранние результаты исследований квантового хаоса.

Группа Р.З. Сагдеева в 1970 г. покинула ИЯФ. Он сам вместе с А.А. Галеевым уехал в Москву. Через несколько лет Р.З. Сагдеев стал директором недавно организованного Института космических исследований (ИКИ), куда в 1984 г. пригласил Г.М. Заславского. Здесь Г.М. Заславский создал лабораторию, в которой велись исследования динамического хаоса и нелинейной динамики, а также их приложений в физике лабораторной и космической плазмы и в гидродинамике. В ИКИ он воспитал многих учеников, которые продолжили развитие теории хаоса в процессах взаимодействия электромагнитных волн с заряженными частицами, анализе лучевых траекторий в неоднородных средах и волноводах и др. Необходимо отметить, что результаты Г.М. Заславского и его учеников по возникновению хаоса в динамических системах, перекрытию резонансов, явлениям в окрестности сепаратрисы и др. широко используются в космических исследованиях, например, при анализе механизмов ускорения частиц, исследовании сложной динамики магнитных полей, генерации плазменной турбулентности в земной магнитосфере, при интерпретации результатов наблюдений электромагнитного излучения в околоземном пространстве и т.д. (см., в частности, [31]).

Во многих задачах физики и механики теория Колмогорова–Арнольда–Мозера (КАМ) становится неприменимой вследствие нарушения условий невырожденности. Рассмотрение в ряде физических задач вырожденных систем или систем, близких к вырождению, привело к открытию совершенно новых явлений и к существенному расширению представлений о зарождении хаоса.

Указанное направление развилось из нелинейных задач плазменной физики и главные заслуги принадлежат Г.М. Заславскому с сотрудниками. Одной из таких задач, очень важной для физических приложений, является задача о взаимодействии частицы с волновым пакетом в поперечном магнитном поле [32, 33], в частности, при серфотронном ускорении частиц возможна генерация космических лучей с ультррелятивистскими энергиями. Указанная система имеет полторы степени свободы. То, что хаос в гамильтоновых системах может возникнуть уже в случае полутора степеней свободы, было хорошо известно. В качестве примера можно назвать одномерный нелинейный осциллятор, находящийся под действием зависящей от времени периодической внешней силы (трехмерное фазовое пространство). В задаче о частице в волновом пакете фазовая плоскость покрывается сеткой конечной толщины, внутри которой движение будет хаотическим, а в ее ячейках – регулярным. Происходит образование структуры, получившей название стохастической паутины, или паутины Заславского. Такая стохастическая диффузия аналогична диффузии Арнольда. Совершенно новый момент заключается в том, что образование стохастической паутины происходит при числе степеней свободы $N = 1.5$ (диффузия Арнольда становится возможной при $N > 2$), что очень важно для многих задач физики плаз-

мы, физики ускорителей, астрофизики. Скорость диффузии по паутине Заславского значительно превышает скорость диффузии Арнольда. Здесь мы сталкиваемся с качественно новым проявлением хаоса. Диффузия по паутине Заславского происходит не только в рассмотренной системе, а имеет универсальный характер.

Другое принципиальное отличие паутины Заславского от диффузии Арнольда связано с геометрией паутины. Паутина Заславского обладает той особенностью, что в ряде случаев покрытие ею фазовой плоскости имеет замечательно симметричную форму. Симметрия динамических задач приводит к симметрии пространственных структур. Сепаратрисная сетка может обладать «простыми» симметриями 2-го, 3-го, 4-го и 6-го порядков. Однако при определенных значениях параметров возникает нетривиальная ситуация, когда стохастическая паутина обладает симметрией квазикристаллического типа, например, с запрещенной в кристаллах симметрией 5-го и 7-го порядков. Имеет место неожиданная связь между совершенно разнородными явлениями, когда хаос формирует упорядоченность. В настоящее время само понятие упорядоченности претерпевает глубокие изменения. Не последнее место в этом занимают исследования по нелинейной динамике. Одна и та же система в зависимости от значений параметров может демонстрировать как регулярное, так и хаотическое движение. Паутина Заславского дает необычный пример связи хаоса и порядка. Само появление динамических структур обусловлено существованием особых точек и особых траекторий в фазовом пространстве, что своеобразным путем проявляется посредством случайных блужданий.

В 1991 г. Г.М. Заславский уехал из России в США и стал работать сначала в Калифорнийском университете Санта-Барбары. Затем в 1992 г. он стал профессором физики и математики на физическом факультете Нью-Йоркского университета и в Институте математических наук им. Р. Куранта при этом университете, где и проработал 17 лет. Основные работы Г.М. Заславского в этот период были посвящены исследованиям динамического хаоса и связанным с ним дробной динамикой и аномальной кинетикой, применениям дробного интегро-дифференцирования к описанию физических процессов различной природы. Среди первых результатов по дробной кинетике можно отметить получение обобщенных уравнений Фоккера–Планка в 1994 г. [34] и решений дробных кинетических уравнений в 1997 г. [35]. Тогда же Г.М. Заславский вернулся к интенсивным исследованиям квантового хаоса. Это было связано с существенным прогрессом в исследовании дробного транспорта в динамических системах, что стало возможным с развитием компьютерной техники.

Дробный математический анализ является теорией интегрирования и дифференцирования произвольного порядка. Эта теория имеет длинную историю, начиная с XVII в. Производная порядка $1/2$ была описана В. Лейбницем 30 сентября 1695 г. Дробное дифференцирование и дробное интегрирование восходит к исследованиям большого числа крупных математиков, таких как В. Лейбниц, Ж. Лиувилль, Г. Грюнвальд, А.В. Летников, Б. Риман, Н. Абель, Ф. Рисс, Г. Вейль. Интегралы и производные нецелого порядка и дробные интегро-дифференциальные уравнения находят множество применений в современных исследованиях в теоретической физике, механике и прикладной математике. Динамика частиц при дробном транспорте соответствует процессам типа полетов Леви, что приводит к супердиффузии, как, например, ускоряющие моды в стохастической паутине или хаотическом ротаторе. Оказалось, что подобные явления супердиффузии могут реализоваться также и в квантовом случае, что подтверждено экспериментально [36].

Исследования стохастических квантовых систем составляет область квантового хаоса. Существуют принципиальные различия между классической и квантовой

хаотической динамикой. Это прежде всего связано с тем, что локальная неустойчивость траекторий является необходимым условием хаоса. Однако в квантовом случае теряют смысл многие понятия классической механики, которые существенно используются в классической теории хаоса. Следовательно, требуется пересмотреть целый ряд понятий классической теории хаоса и выяснить трудности, возникающие при попытках перенесения этих понятий в квантовую теорию. Противоречие квазиклассического перехода разрешается на временном масштабе порядка времени Эренфеста [14, 16]. Для гиперболических систем t_E ведет себя как логарифмическая функция от постоянной Планка. Однако типичная динамическая система не является однородной даже в условиях сильного хаоса, в ней имеются островки устойчивости. Благодаря островкам устойчивости типа ускоряющая мода имеет место явление супердиффузии. Это принципиальным образом влияет на время Эренфеста. Оно становится степенной функцией от постоянной Планка и показателем степени является величина, называемая транспортной экспонентой, которая определяет супердиффузию [37, 38].

Ряд исследований Г.М. Заславского посвящен принципиальным вопросам хаотической динамики, среди которых отличие статистических свойств систем с очень большим числом степеней свободы и систем небольшой размерности [39]. Было изучено распределение времени возвращения Пуанкаре для систем небольшой размерности с сильно выраженным хаотическим поведением и показано, что асимптотика имеет степенную зависимость. Вследствие отсутствия термодинамического предела системы небольшой размерности не обладают универсальностью в поведении.

Результаты своих исследований и работ других ученых по взаимосвязи динамического хаоса и дробной кинетики были обобщены в научном обзоре, опубликованном в 2002 г. [40]. Первой книгой, посвященной применению дробного математического анализа к описанию динамического хаоса, является книга Г.М. Заславского [41], опубликованная на английском языке в 2005 г. В 2009 г. будет издан перевод этой книги на русский язык.

Интересы Г.М. Заславского не ограничивались одной наукой, он увлекался музыкой, театром и особенно живописью. Интенсивно общаясь с французскими коллегами, он часто бывал на юге Франции и его завораживали природа и архитектура Прованса и Гаскони. Свои впечатления Георгий Моисеевич постарался запечатлеть в своих рисунках пастелью. В 2007 г. во Франции была устроена выставка его работ, значительная часть пастелей включена в альбом, который только что вышел из печати.

Многие работы Г.М. Заславского были выполнены совместно с другими учеными, среди которых Садрилла Абдуллаев, Валентин Афраимович, Геннадий Берман, Харольд Вейтзнер, Анатолий Вировлянский, Александр Иомин, Николай Ласкин, Ксавьер Леончини, Леонид Кузнецов, Сергей Пранц, Александр Станиславский, Василий Тарасов, Наталья Филоненко, Александр Черников, Майкл Шлезингер, Марк Эдельман и др. Г.М. Заславский был приглашенным профессором во многих университетах мира, приглашенным докладчиком на крупнейших международных конференциях. В заключение отметим, что история исследований динамического хаоса в Советском Союзе и огромная роль Г.М. Заславского в них описана в книге [42].

Многие работы Г.М. Заславского стали классическими и дали жизнь целым направлениям физики, они активно развиваются в различных странах мира. Вклад Георгия Моисеевича в создание теории хаоса невозможно переоценить, его достижения во многом определяют современный облик этой области знания.

Библиографический список

1. *Чириков Б.В.* Резонансные процессы в магнитных ловушках // Атомн. энергия. 1959. Т. 6, вып. 6. С. 630.
2. *Fermi E.* On the origin of cosmic radiation // Phys. Rev. 1949. Vol. 75. P. 1169 / Рус. пер.: Э.Ферми. Научн. тр. Т. 2. М.: Наука, 1972. С. 439.
3. *Заславский Г.М., Чириков Б.В.* О механизме ускорения Ферми в одномерном случае // ДАН СССР. 1964. Т. 159, № 2. С. 306.
4. *Fermi E., Pasta J., Ulam S.* Study of nonlinear problems // Studies of Nonlinear Problems. I. Los Alamos Report. LA, 1940. 1955 / Рус. пер.: Э.Ферми. Научн. тр. Т. 2. М.: Наука, 1972. С. 647.
5. *Rosenbluth M.N., Sagdeev R.Z., Taylor J.B., Zaslavsky G.M.* Destruction of magnetic surfaces by magnetic field irregularities // Nucl. Fusion. 1966. Vol. 6. P. 297.
6. *Filonenko N.N., Sagdeev R.Z., Zaslavsky G.M.* Destruction of magnetic surfaces by magnetic field irregularities. Part II // Nucl. Fusion. 1967. Vol. 7. P. 253.
7. *Заславский Г.М., Филоненко Н.Н.* Стохастическая неустойчивость захваченных частиц и условия применимости квазилинейного приближения // ЖЭТФ. 1968. Т. 54, вып. 5. С. 1590.
8. *Чириков Б.В.* Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности. Препринт 267. Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР, 1969. 314 с.
9. *Заславский Г.М.* Статистическая необратимость в нелинейных системах. М.: Наука, 1970. 144 с.
10. *Бурштейн А.И.* Возвращение «Интеграла» // Научное сообщество физиков СССР. 1950-1960-е годы. Под ред. В.П. Визгина и А.В. Кесениха. Предисловие редакторов. Вып. 1. СПб.: Изд-во РХГА, 2005. С. 569.
11. *Эйнштейн А.* К квантовому условию Зоммерфельда и Эпштейна // А. Эйнштейн. Собр. науч. тр. Т. 3. М.: Наука, 1966. С. 407.
12. *Заславский Г.М., Филоненко Н.Н.* Статистические свойства энергетического спектра «скользящих» электронов с перемешивающимися классическими траекториями // ЖЭТФ. 1973. Т. 65, вып. 2. С. 6436.
13. *Заславский Г.М.* Статистика энергетических уровней при разрушении интегралов движения // ЖЭТФ. 1977. Т. 73. В. 6. С. 2089.
14. *Berman G.P., Zaslavsky G.M.* Condition of stochasticity in quantum nonlinear systems. I, II // Physica A. 1978. Vol. 91. P. 450; 1979. Vol. 97. P. 367.
15. *Berman G.P., Zaslavsky G.M.* Theory of quantum nonlinear resonance // Phys. Lett. 1977. Vol. 61. P. 295.
16. *Zaslavsky G.M.* Stochasticity in quantum systems // Phys. Rep. 1981. Vol. 80. P. 157.
17. *Berman G.P., Iomin A.M., Zaslavsky G.M.* Method of quasiclassical approximation for c-number projection in coherent states basis // Physica 4D. 1981. P. 113.
18. *Берман Г.П., Заславский Г.М., Коловский А.Р.* Взаимодействие между квантовыми нелинейными резонансами // ЖЭТФ. 1981. Т. 81. С. 272.
19. *Berman G.P., Zaslavsky G.M., Kolovsky A.R.* On the spectrum of the system of interacting quantum nonlinear resonances // Phys. Lett. A. 1982. Vol. 87. P. 152.
20. *Reichl L.E.* The transition to chaos in conservative classical systems: quantum manifestations. Springer-Verlag, 1992. 551 p.

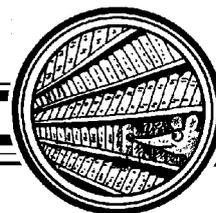
21. *Белобров П.И., Заславский Г.М., Тартаковский Г.Х.* Стохастическое разрушение связанных состояний в системе атомов, взаимодействующих с полем излучения // ЖЭТФ. 1976. Т. 71, вып. 5(11). С. 1799.
22. *Абдуллаев С.С., Заславский Г.М.* Классическая нелинейная динамика и хаос лучей в задачах распространения волн в неоднородных средах // УФН. 1991. Т. 161, № 1. С. 1.
23. *Smith K.B., Brown M.G., Tapper F.D.* Ray chaos in underwater acoustics // J. Acoust. Soc. Am. 1992. Vol. 91. P. 19399.
24. *Zaslavsky G.M., Abdullaev S.S.* Chaotic transmission of waves and «cooling» of signals // Chaos. 1997. Vol. 7. P. 182.
25. *Smirnov I.P., Virovlyansky A.L., Zaslavsky G.M.* Theory and applications of ray chaos to underwater acoustics // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64. P. 036221.
26. *Beron-Vera F.J., Brown M.G., Colosi J.A., Tomsovic S., Virovlyansky A.L., Wolfson M.A., Zaslavsky G.M.* Ray dynamics in a long-range acoustic propagation experiment // J. Acoust. Soc. Am. 2003. Vol. 114, issue 3. P. 1226.
27. *Worcester P.F., Cornuelle B.D., Dzieciuch M.A., Munk W.H., Howe M., Mercer A., Spindel R.C., Colosi J.A., Metzger K., Birdsall T., Baggeroer A.B.* A test of basin-scale acoustic thermometry using a large-aperture vertical array at 3250-km range in the eastern north Pacific Ocean // J. Acoust. Soc. Am. 1999. Vol. 105. P. 3185.
28. *Makarov D., Prants S., Virovlyansky A., Zaslavsky G.* Ray and wave chaos in ocean acoustics. World Scientific, Singapore, 2009 (In press).
29. *Zaslavsky G.M.* The simplest case of a strange attractor // Phys. Lett. 1978. Vol. 69A, № 3. P. 145.
30. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984. 272 с.
31. Плазменная гелиофизика / Под ред. Л.М. Зеленого, И.С. Веселовского. В 2 т. М.: Физматлит, 2008. Т. 1. 670 с.; Т. 2. 559 с.
32. *Заславский Г.М., Захаров М.Ю., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А.* Генерация упорядоченных структур с осью симметрии из гамильтоновой динамики // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 144, вып. 7. С. 349.
33. *Заславский Г.М., Захаров М.Ю., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А.* Стохастическая паутина и диффузия частиц в магнитном поле // ЖЭТФ. 1986. Т. 91, вып. 5. С. 500.
34. *Zaslavsky G.M.* Fractional kinetic equation for Hamiltonian chaos // Physica D 76. 1994. P. 110.
35. *Saichev A.I., Zaslavsky G.M.* Fractional kinetic equations: Solutions and applications // Chaos. 1997. Vol. 7, № 4. P. 753.
36. *Klappauf B.G., Oskay W.H., Steck D.A., Raizen M.G.* Experimental study of quantum dynamics in a regime of classical anomalous diffusion // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 81. P. 4044.
37. *Sundaram B., Zaslavsky G.M.* Anomalous transport and quantum-classical correspondence // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 59. P. 7231.
38. *Iomin A., Zaslavsky G.M.* Hierarchical structures in the phase space and fractional kinetics: II. Immense delocalization in quantized systems // Chaos. 2000. Vol. 10, № 1. P. 147.
39. *Zaslavsky G.M.* Chaotic dynamics and the origin of statistical laws // Physics Today. 1999. Vol. 52. P. 39.

40. *Zaslavsky G.M.* Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport // Phys. Rep. 2002. Vol. 371. P. 461.
41. *Zaslavsky G.M.* Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics. Oxford University Press, Oxford, 2005. 421 p.
42. *Мухин Р.Р.* Очерки по истории динамического хаоса (исследования в СССР в 1950–1980-е годы). М.: ВЕСТ- КОНСАЛТИНГ, 2007. 390 с.

Dr. Berman G.P., Technical Staff Member Theoretical Division, MS-B213 Los Alamos National Laboratory, USA; *Васильев А.А.*, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник Института космических исследований РАН; *Ерохин Н.С.*, д.ф.-м.н., профессор, зав.отделом Института космических исследований РАН; *Зеленый Л.М.*, д.ф.-м.н., академик РАН, директор Института космических исследований РАН; *Игнатченко В.А.*, д.ф.-м.н., профессор, главный научный сотрудник Института физики им. Л.В. Киренского СО РАН; *Iomin A.*, Senior Reseacher (SNS), Department of Physics, Technion, Haifa, Israel; *Коган Е.Я.*, д.ф.-м.н., научный руководитель Самарского Федерального института развития образования; *Коловский А.Р.*, д.ф.-м.н., профессор, ведущий научный сотрудник Института физики им. Л.В. Киренского СО РАН; *Мухин Р.Р.*,* к.ф.-м.н., доцент Старооскольского технологического института Московского института стали и сплавов; *Нейштадт А.И.*, д.ф.-м.н., заведующий лабораторией Института космических исследований РАН; *Пранц С.В.*, д.ф.-м.н., профессор, заведующий отделом Тихоокеанского океанологического института ДВО РАН; *Тарасов В.Е.*, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник Научно-исследовательского института ядерной физики МГУ; *Фридман А.М.*, д.ф.-м.н., академик РАН, заведующий отделом Института астрономии РАН

3.03.2009

*E-mail: mukhiny@mail.ru; 309516 Белгородская обл., г. Старый Оскол, м-н Макаренко, 42.



СТОХАСТИЧЕСКИЕ ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ*

Г.М. Заславский

1. Эта и следующая лекции будут посвящены стохастическим процессам в тех случаях, когда нелинейность волн велика. Некоторые динамические свойства нелинейных волн уже рассматривались в предыдущих лекциях М.И. Рабиновича, а некоторые другие их свойства будут введены по мере надобности. Нам понадобится также определенный «язык», с помощью которого удобно исследовать стохастические явления. Введем понятие нелинейного волнового поля, удовлетворяющего периодическим граничным условиям по координате x . Такое поле естественно представить с помощью гамильтониана. Например,

$$H = \frac{1}{2} \sum_q \mu(q) y_q y_{-q} + \sum_{q_1, q_2, q_3, q_4} V_{q_1 q_2 q_3 q_4} y_{q_1} y_{q_2} y_{q_3} y_{q_4} \delta(q_1 + q_2 + q_3 + q_4). \quad (1)$$

Конечно, можно было бы записать уравнения в частных производных, которым удовлетворяет поле

$$y(x, t) = \sum_q y_q(t) e^{iqx}.$$

Нас будет интересовать далее специальный вид решения уравнений поля, который называется периодической стационарной волной:

$$y = y(x - ut); \quad y(x, t) = y\left(x + \frac{2\pi}{k}, t\right).$$

Величина u является скоростью волны, а k – ее волновое число. Такое решение можно разложить в ряд Фурье более удобным способом, положив $q = nk$ и заменив суммирование по q суммированием по n . Специальный вид рассматриваемой волны означает также, что

$$y_q(t) \equiv y_n(t) = C_n e^{in\omega t}; \quad \omega = ku$$

*Прочитано на Республиканской школе по нелинейным колебаниям и волнам в распределенных системах (Горьковская обл., март 1972 г.); препринт № 41, Горький: НИРФИ, 1973.

и величину ω назовем частотой волны. Теперь мы введем безразмерный параметр N , который естественным образом будет характеризовать степень нелинейности волны. Для этого рассмотрим зависимость C_n от n (см. рис. – *Ред.*). Если при $n > N$ спектр C_n волны эффективно обрезается, то величина N определяет характерное число гармоник в волновом пакете, представляющем нелинейную волну. В тех уравнениях, которые приводились в лекциях Рабиновича, обрезание спектра происходит экспоненциально и число N существует. Если $N \sim 1$, то волна близка к синусоидальной, и этот случай назовем слабо нелинейным. Наоборот, случай $N \gg 1$ соответствует сильному ангармонизму. Он будет называться сильно нелинейным и явится предметом исследования в лекциях.

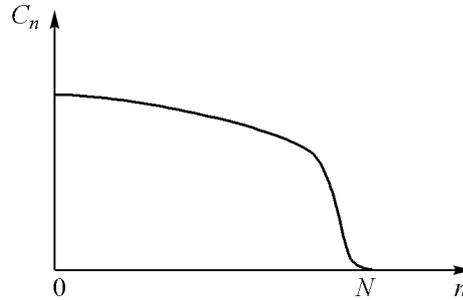


Рис. 1.

2. Нелинейную периодическую волну можно описывать разными переменными, однако, существуют «лучшие» переменные, аналогичные переменным действие-угол для осциллятора. Оказывается, что, если рассмотреть систему уравнений движения волны в гамильтоновой форме:

$$\dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta}; \quad \dot{\vartheta} = \frac{\partial H}{\partial I},$$

то действие I волны следует определить с помощью уравнения

$$\frac{dH}{dI} = \omega(H) = ku(H).$$

Таким образом, переменные (I, ϑ) являются канонически сопряженными и удовлетворяют уравнениям движения:

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{\vartheta} = ku = \omega(I).$$

Первое из этих уравнений выражает просто закон сохранения энергии H нелинейной волны.

Обратимся теперь к задаче, в которой нелинейная периодическая волна находится под действием внешнего возмущения. По-видимому, полезно подчеркнуть, что в линейном случае мы можем говорить о теории возмущений для данного уравнения (или оператора). Однако в рассматриваемом случае нелинейная волна является не общим, а частным решением, и поэтому теория возмущений, о которой будет идти речь ниже, относится к частному решению. Возмущение также удобно ввести с помощью гамильтониана:

$$\mathcal{H} = H + \varepsilon H_1, \quad (\varepsilon \ll 1).$$

Если сохранить определения I , ω с помощью невозмущенной части H гамильтониана \mathcal{H} , то уравнения движения волны примут вид:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vartheta} = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \vartheta}, \\ \dot{\vartheta} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I}. \end{aligned} \quad (2)$$

Написанные уравнения движения аналогичны уравнениям движения нелинейного осциллятора при наличии возмущения. Эта аналогия между нелинейной волной и частицей достигнута благодаря введению удобных переменных. Однако структура той части уравнений, которая связана с возмущением, будет несколько отличаться для нелинейной волны от случая обычного осциллятора. Пусть, например, на волну действует сила $\varepsilon \Phi(x, t)$. Тогда

$$\begin{aligned} H_1 &= \sum_n y_n(t) \Phi_{-n}(t) = \sum_n C_n e^{in\vartheta} \Phi_{-n}, \\ \Phi(x, t) &= \sum_n \Phi_n e^{inkx} \end{aligned}$$

и в правую часть уравнения (2) входят Фурье-амплитуды решения, зависимость которых от I известна.

3. Рассматриваемый ниже случай можно называть изолированным резонансом. Пусть внешнее возмущение имеет только одну гармонику, то есть

$$\Phi(x, t) = \Phi_{ml} \cos(mkx - lvt).$$

В выражении для H_1 останется один член и уравнения (2) примут вид:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= 2\varepsilon m C_m \Phi_{ml} \cos \theta, \\ \dot{\theta} &= m\omega(I) - lv + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Резонанс между возмущением и волной происходит, если

$$m\omega(I_{ml}) = lv, \quad (3)$$

где I_{ml} – некоторое значение действия волны. Поведение волны в окрестности резонанса проще всего описать с помощью приближенного интеграла движения:

$$\frac{1}{2} m \frac{d\omega(I)}{dI} (I - I_{ml})^2 - \varepsilon m C_m \Phi_{ml} \cos \theta = \text{const.}$$

Действительно, дифференцируя это выражение по t и используя уравнения движения, убеждаемся в том, что правая часть есть константа с точностью до членов порядка ε^2 . Мы получили уравнения колебания типа маятника. Из него следует, что изменение действия $\delta I = (I - I_{ml})$ промодулировано во времени и в пространстве. Глубина этой модуляции, которую будем называть шириной резонанса, имеет порядок:

$$\delta I \sim \left[\varepsilon C_m \Phi_{ml} / \frac{d\omega}{dI} \right]^{1/2}$$

и пропорциональна $\sqrt{\varepsilon}$. Одним из проявлений модуляции является периодическое изменение формы волнового пакета. Одновременно с формой модуляцию испытывает и скорость волны. В дальнейшем нам понадобится величина

$$\delta\omega = \frac{d\omega}{dI} \delta I \sim \left[\varepsilon C_m \Phi_{ml} \frac{d\omega}{dI} \right]^{1/2},$$

определяющая ширину резонанса по частоте, то есть максимальное изменение частоты волны вследствие резонанса.

Хотя приведенные рассуждения являются приближенными и носят полукачественный характер, тем не менее их можно оправдать более строгими методами, использующими отыскание решения в виде ряда по степеням параметра ε .

4. Очевидно, что случай одного изолированного резонанса является слишком частным для того, чтобы делать какой-либо общий вывод о поведении нелинейной волны под действием малых возмущений. В общем случае внешняя сила $\Phi(x, t)$ содержит много гармоник по x и t . Это обстоятельство, как мы сейчас увидим, может принципиально изменить весь характер эволюции волны. Построим схему возможных резонансов между какими-либо гармониками внешней силы и нелинейной волны. Эта система зависит, в частности, от параметра действия волны, определяющего частоту ω . В формуле (3) будем придавать величинам m, l последовательность значений $1, 2, \dots$ и подбирать соответствующие значения I , при которых выполняется условие резонанса. Например:

$$\begin{aligned} \omega(I_{11}) &= \nu; & \omega(I_{12}) &= 2\nu; & \dots \\ 2\omega(I_{21}) &= \nu; & 2\omega(I_{22}) &= 2\nu; & \dots \\ & \dots & & & \dots \end{aligned}$$

Таким образом, можно получить матрицу I_{ml} резонансных значений действия волны. Эта матрица недиагональная, а все ее диагональные элементы равны друг другу. Если все значения матрицы резонансов I_{ml} расположить, например, в порядке возрастания величины ее элементов, то можно ввести понятия расстояния по действию между двумя соседними резонансами. В общем случае вид этих выражений несколько громоздок. Приведем пример в более простом случае, когда внешнее возмущение имеет зависимость от времени, определяемую только одной гармоникой с частотой $l\nu$, а зависимость от x содержит много гармоник. В этом случае система резонансных значений I_{ml} имеет фиксированное l и различные значения m и определяется из уравнения (3). Расстояние между резонансами по действию равно

$$\Delta I_{ml} = I_{ml} - I_{m+1,l}.$$

Аналогично можно ввести понятие расстояния между соседними резонансами по частоте:

$$\Delta\omega(I_{ml}) = \omega(I_{ml}) - \omega(I_{m+1,l}).$$

Если воспользоваться формулой (3), то это даст

$$\Delta\omega(I_{ml}) = l\nu \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) = \frac{l\nu}{m(m+1)}.$$

При больших значениях m полученное выражение можно упростить, воспользовавшись снова формулой (3):

$$\Delta\omega(I_{ml}) \approx \frac{\omega^2(I_{ml})}{l\nu}.$$

Если расстояние между резонансами мало, то можно также написать и приближенную формулу для ΔI :

$$\Delta I_{ml} \approx \left(\frac{d\omega(I_{ml})}{dI_{ml}} \right)^{-1} \Delta\omega(I_{ml}).$$

Теперь мы введем параметр

$$K = \left(\frac{\delta\omega}{\Delta\omega} \right)^2,$$

определяющий отношение ширины резонанса к расстоянию до ближайшего резонанса. Если $K \ll 1$, то на движение нелинейной волны в окрестностях какого-либо резонанса мало сказывается влияние соседних резонансов. В этом случае приближенная теория, изложенная в п. 3, оказывается справедливой, по крайней мере, в течение достаточно длительного времени. Картина полностью меняется, если параметр $K \gg 1$. Прежде всего, следует заметить, что теория возмущений в приведенной форме оказывается неприменимой, так как нелинейная волна находится одновременно под воздействием нескольких резонансов. Уже отмечалось, что уравнения движения нелинейной волны под действием возмущения, записанные в канонически сопряженных переменных (I, ϑ) очень близки по своей форме к уравнениям движения возмущенного нелинейного осциллятора. Используя это обстоятельство, обратимся к уже известным результатам [6] для осциллятора при $K \gg 1$. Аналитические и численные исследования, на изложении которых мы здесь останавливаться не будем, показывают, что в случае перекрытия резонансов ($K \gg 1$) возникает так называемая стохастическая неустойчивость. Она проявляется в том, что фаза волны ϑ изменяется со временем случайным образом (напомним, что в случае $K \ll 1$ фаза меняется со временем периодически). Границу перехода от динамического режима движения волны к стохастическому можно найти из условия $K \sim 1$. Ранее говорилось, что отдельный резонанс приводит к квазипериодической модуляции (так называемым фазовым колебаниям) амплитуды, ширины и скорости нелинейной волны. В режим стохастической неустойчивости эти колебания будут носить случайный характер: одинаковые значения амплитуды волны, например, будут возникать в случайные моменты времени. В целом движение нелинейной волны будет аналогично броуновскому движению частицы. Отсюда следует, что действие внешней силы при $K \gg 1$ приведет к стохастическому ускорению волны, которое мы опишем несколько позже.

Поскольку механизм стохастической неустойчивости существенно определяется наличием области перекрытых резонансов, то стохастический режим движения может происходить лишь в области таких значений действия I для которых $K \gtrsim 1$. Границы этой области и определяют, фактически, область броуновского движения волны.

Описанный механизм неустойчивости, возможно, реализуется при разгоне волн на поверхности моря ветром. Различные случаи возникновения стохастической неустойчивости нелинейных волн можно найти в [1, 2].

Уже отмечалось, что теорию возмущений при $K \gg 1$ следует определенным образом модифицировать. Это связано со следующим обстоятельством. Изменение действия I по-прежнему остается достаточно малым, однако изменение фазы ϑ становится очень большим, что и приводит к ее случайности. Таким образом, теория возмущений становится плохим инструментом для описания зависимости $\vartheta(t)$. Однако эта трудность устраняется переходом к совершенно другой форме описания эволюции волны со временем. Такой формой является кинетическое уравнение, получающееся в результате усреднения по случайно меняющейся фазе и о котором речь будет идти позднее.

5. До сих пор речь шла о взаимодействии между нелинейной волной и внешней силой. Более сложным является случай, в котором роль внешней силы играют другие нелинейные волны. Как было видно ранее, при условиях достаточно слабого возмущения нелинейную волну можно рассматривать как некоторую квазичастицу. Это означает достаточно высокую устойчивость волнового пакета как целого относительно расплывания под действием возмущения. Сейчас мы убедимся, что подобную же концепцию можно провести в теории взаимодействия нелинейных волн. Для этого вспомним, что в уравнения движения нелинейной волны входит свертка между модами волны и модами внешней силы, выражающая закон сохранения по волновому числу. Если вместо внешней силы подставить другие нелинейные волны, взаимодействующие с данной, то закон сохранения отберет соответствующие члены, которые удовлетворяют резонансным условиям по q . Теперь нетрудно написать условие, необходимое для того, чтобы взаимодействие нелинейных волн было слабым:

$$\varepsilon = M/N \ll 1,$$

где N – характерное число мод в спектре волновых пакетов, M – число мод, участвующих одновременно в резонансных взаимодействиях с другими пакетами. Особенность введенного параметра малости в том, что он, вообще говоря, может не зависеть от амплитуды волн. Более того, неравенство $\varepsilon \ll 1$ может осуществляться лишь при $N \gg 1$, то есть для сильно нелинейных волн.

6. Чтобы сделанное утверждение стало более очевидным, обратимся к конкретному примеру и рассмотрим простейшую форму взаимодействия трех нелинейных волн. Рассматриваемую систему проще всего задать с помощью гамильтониана:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^3 H_i + H_I,$$

$$H_I = \frac{1}{4} V \sum_{i \neq j \neq l} \sum_{\vec{q}_i, \vec{q}_j, \vec{q}_l} [y(\vec{q}_i) y(\vec{q}_j) y(\vec{q}_l) \times \delta(\vec{q}_i + \vec{q}_j + \vec{q}_l) + \text{к.с.}],$$

где H_i – энергия i -й нелинейной волны; H_I – член, учитывающий взаимодействие волн; индексы (i, j, l) принимают всевозможные тройки значений чисел $(1, 2, 3)$.

Заметим, что, как и в п. 1,

$$y(q_i) = y_{n_i}(t) = C n_i e^{i n_i \vartheta_i}; \quad \vec{q}_i = n_i \vec{k}_i.$$

Канонически сопряженные уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{I}_i &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vartheta_i} = -\frac{\partial H_I}{\partial \vartheta_i}, \\ \dot{\vartheta}_i &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_i} = \dot{\omega}_i(I_i) + \frac{\partial H_I}{\partial I_i}. \end{aligned}$$

Первое из написанных уравнений дает:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= -i \frac{V}{2} \sum_{n_1, n_2, n_3} n_1 y_{n_1}^* y_{n_2} y_{n_3} \delta(n_1 \vec{k}_1 - n_2 \vec{k}_2 - n_3 \vec{k}_3) + \text{к.с.} \\ \dot{I}_2 &= -i \frac{V}{2} \sum_{n_1, n_2, n_3} n_2 y_{n_1}^* y_{n_2} y_{n_3} \delta(n_1 \vec{k}_1 - n_2 \vec{k}_2 - n_3 \vec{k}_3) + \text{к.с.} \\ \dot{I}_3 &= -i \frac{V}{2} \sum_{n_1, n_2, n_3} n_3 y_{n_1}^* y_{n_2} y_{n_3} \delta(n_1 \vec{k}_1 - n_2 \vec{k}_2 - n_3 \vec{k}_3) + \text{к.с.} \end{aligned}$$

Входящие здесь δ -функции выражают условие резонанса по волновому числу:

$$n_1 \vec{k}_1 - n_2 \vec{k}_2 - n_3 \vec{k}_3 = 0,$$

причем числа $n_i \lesssim N_i$. Условие резонанса по частоте, очевидно, имеет вид:

$$n_1 k_1 u_1 - n_2 k_2 u_2 - n_3 k_3 u_3 = 0.$$

Те члены в уравнениях движения, для которых резонансные условия выполняются, дают основной вклад в изменение нелинейных волн, и в первом порядке теории возмущений можно ими ограничиться. Пусть теперь резонансные условия могут быть выполнены только в единственном случае с числами (n_1, n_2, n_3) . Тогда система записанных уравнений упрощается:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= n_1 \Gamma \sin \theta, \\ \dot{I}_2 &= -n_2 \Gamma \sin \theta, \\ \dot{I}_3 &= -n_3 \Gamma \sin \theta, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \Gamma &= V |C_{n_1} C_{n_2} C_{n_3}|, \\ \theta &= n_1 \vartheta_1 - n_2 \vartheta_2 - n_3 \vartheta_3. \end{aligned}$$

Система уравнений (4) является обобщением хорошо известной в нелинейной оптике и в теории плазмы системы связи трех волн. В последнем случае Армстронг и Бломберг нашли точное решение. Аналогичное решение можно найти и в случае (4). Действительно, из (4) сразу следуют интегралы движения:

$$\begin{aligned} n_2 I_1 + n_1 I_2 &= \text{const}, \\ n_3 I_1 + n_1 I_3 &= \text{const}, \\ n_2 I_3 - n_3 I_2 &= \text{const}, \end{aligned}$$

из которых независимыми являются только два. С помощью этих интегралов движения ответ может быть выражен в квадратурах. Ограничимся анализом движения волн в окрестности резонанса. Пусть резонансные условия по частоте выполняются при значениях действий I_{10} , I_{20} , I_{30} . Умножая уравнения системы (4) соответственно на ω_1 , ω_2 , ω_3 и интегрируя по t , получаем:

$$\sum_{s=1}^3 \int_{I_{s0}}^{I_s} \omega_s dI_s + \Gamma_0 \cos \theta = \text{const},$$

где $\Gamma_0 \equiv \Gamma(I_{10}, I_{20}, I_{30})$. Воспользуемся теперь тем, что мы находимся в окрестности резонанса и разложим $\omega(I)$ в ряд. Простое интегрирование приводит нас к интегралу, характеризующему фазовые колебания в системе трех нелинейных волн:

$$\frac{1}{2} \sum_{s=1}^3 \frac{d\omega_s}{dI_s} (I_s - I_{s0})^2 + \Gamma_0 \cos \theta = \text{const}.$$

Отсюда определяется амплитуда модуляции (ширина резонанса) по действию

$$\delta I = \left[2\Gamma_0 \frac{d\omega}{dI} \right]^{1/2}$$

и по частоте

$$\delta \omega = \frac{d\omega}{dI} \delta I = \left[2\Gamma_0 \frac{d\omega}{dI} \right]^{1/2}.$$

Произведем теперь оценку полученных выражений. Если, например, нелинейные волны имеют форму эллиптического синуса или косинуса, то для них $C_n \sim A/N$ для $n \lesssim N$. Отличие члена с взаимодействием H_I от аналогичного члена в гамильтониане, входящего в H_i (то есть «собственного» для какой-либо волны), заключается в том, что в H_I при единственном резонансе на два суммирования по n_i меньше, чем в H_i . В соответствии с этим H_I содержит порядок малости $1/N^2$, а $\delta I/I \propto 1/N$.

По существу, описанный нами процесс представляет собой неустойчивость распадного типа. Нам удалось, однако, пойти дальше и получить насыщение неустойчивости вследствие нелинейности.

7. Теперь можно сделать следующий шаг и перейти к рассмотрению большого числа слабо взаимодействующих нелинейных волн. Выделим всевозможные тройки волн, между которыми возможно резонансное взаимодействие, причем одна из волн пусть будет фиксированной. Введем понятие расстояния между резонансами:

$$\Delta \omega = \frac{\Delta k}{k} \omega,$$

где Δk характерное расстояние между волновыми числами «соседних» волн. Иными словами, в последовательности частот $\omega_1, \omega_2 \dots$ различных волн интервал между соседними частотами имеет порядок $\Delta \omega$. Тогда условие перекрытия резонансов

$$(\delta \omega / \Delta \omega)^2 \gg 1$$

приводит к тому, что фазы волн ϑ_i будут случайным образом меняться со временем [4]. Это означает, что на фоне нелинейных волн нулевого приближения возникает случайная рябь, связанная с резонансным взаимодействием волн. Процесс обмена энергией между нелинейными волнами в этом случае естественно описывать с помощью кинетического уравнения, которое будет приведено позднее.

8. В различных случаях мы уже столкнулись с необходимостью описания эволюции нелинейных волн методом кинетического уравнения. Оставшееся время лекции будет посвящено этому вопросу. Удобно начать с рассмотрения движения нелинейных волн под действием внешних случайных сил. Такими случайными силами могут быть ветровое возмущение для волн на поверхности жидкости, турбулентная среда, в которой распространяется нелинейная волна, и др.

При выводе кинетического уравнения для нелинейной волны фундаментальную роль играют канонически сопряженные переменные (I, ϑ) , введенные в п. 2. Если ввести функцию распределения $f(I, \vartheta, t)$, то она удовлетворяет следующему уравнению Луивилля:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\vartheta} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} + \dot{I} \frac{\partial f}{\partial I} = 0, \quad (5)$$

где выражения для $\dot{\vartheta}$ и \dot{I} должны определяться из уравнений движения:

$$\dot{I} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vartheta}; \quad \dot{\vartheta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I}.$$

Представим гамильтониан в виде:

$$\mathcal{H} = H_0 + \varepsilon H_1,$$

где невозмущенная часть H_0 описывает нелинейную волну $y = y(x - ut)$, а

$$H_1 = \sum_n y_n(t) \Phi_{-n}(t),$$

как и в п.2. На этот раз, однако, мы будем считать силу $\Phi(x, t)$ случайной, и будем предполагать, что $\Phi(x, t)$ есть гауссовский случайный процесс. Это означает, что

$$\begin{aligned} \langle \Phi(x, t) \rangle &= 0, \\ \langle \Phi(x, t) \Phi(x + \xi, t + \tau) \rangle &= R(\xi, \tau) \end{aligned}$$

и все нечетные моменты от Φ равны нулю, а четные соответствующим образом выражаются через парные корреляции R . Корреляционная функция R вводит в задачу некоторое время убывания корреляции τ_c , которое будем считать для простоты меньшим всех характерных времен задачи. При $\tau_c \rightarrow 0$ величина $R(\xi, \tau) \rightarrow R_0(\xi) \delta(\tau)$, то есть к белому шуму (по времени). Удобно для дальнейшего ввести спектральную плотность:

$$S(\kappa, \nu) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\tau R(\xi, \tau) e^{i(\kappa x - \nu \tau)}.$$

Обычная процедура вывода кинетического уравнения для $f(I, \vartheta, t)$ заключается в использовании теории возмущений по параметру ε и усреднении по заданному случайному процессу $\Phi(x, t)$. Особенность введения канонических переменных (I, ϑ) заключается в том, что в этих переменных уравнение имеет стандартный вид:

$$\frac{\partial f(I, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial I} D(I) \frac{\partial f(I, t)}{\partial I}, \quad (6)$$

где

$$f(I, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta f(I, \vartheta, t),$$

а коэффициент диффузии D равен:

$$D = \frac{\langle (\Delta I)^2 \rangle}{t}$$

и ΔI – изменение действия волны к моменту времени t . Перейдем теперь к вычислению D . Запишем:

$$\Delta I = \int_{-\infty}^t dt_1 \frac{dI}{dt_1} = -\varepsilon \int_{-\infty}^t dt_1 \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx_1 y'(x_1 - ut_1) \Phi(x_1, t_1).$$

С помощью этого выражения можно вычислить величину:

$$\begin{aligned} \langle (\Delta I)^2 \rangle &= \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \lim_{\substack{L_1 \rightarrow \infty \\ L_2 \rightarrow \infty}} \frac{1}{2L_1} \int_{-L_1}^{L_1} dx_1 \int_{-L_2}^{L_2} dx_2 \times \\ &\times y'(x_1 - ut_1) y'(x_2 - ut_2) R(x_1 - x_2, t_1 - t_2). \end{aligned}$$

В правой части здесь стоит невозмущенное значение $y(x - ut)$, описывающее нелинейную волну. Теперь следует учесть, что R при $t > \tau_c$ быстро убывает. Это позволяет провести интегрирование по t при $t \gg \tau_c$:

$$D = 8\pi\varepsilon^2 \sum_n n^2 |C_n|^2 S(kn, kvu).$$

Кинетическое уравнение (6) определяет броуновское движение нелинейной волны с коэффициентом диффузии D . Поскольку внешняя сила в среднем увеличивает энергию волны, то через некоторое время амплитуда или скорость волны могут достигнуть критических значений, при которых происходит опрокидывание волны.

9. Мы выбрали такую форму вывода и записи кинетического уравнения, которая допускает обобщение и для двух других случаев, о которых уже упоминалось в лекциях. В п. 4 рассматривалась стохастическая неустойчивость нелинейной волны под действием регулярной внешней силы $\Phi(x, t)$. Однако, вследствие стохастической неустойчивости фаза волны ϑ становилась случайной функцией времени. Кинетическое уравнение, описывающее эволюцию волны в этом случае, по-прежнему имеет вид (6). Вычисление надо производить по формуле

$$D = \frac{1}{t} \langle \langle (\Delta I)^2 \rangle \rangle,$$

где двойные угловые скобки означают усреднение по случайным фазам ϑ . Это сохраняет ту же структуру коэффициента диффузии D , а отличие содержится только в выражении для спектральной плотности $S(\kappa, \nu)$.

Наконец, если среда содержит случайные неоднородности, малые по величине, то гамильтониан задачи следует разбить на две части: регулярную, соответствующую однородному случаю, и возмущение, связанное со случайными неоднородностями. Для последних следует определить спектральную плотность корреляции S и это решает принципиальную задачу.

10. В заключение лекций остановимся кратко на кинетическом уравнении для ансамбля нелинейных волн. Исходным пунктом и здесь будет уравнение Луивилля:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_s \dot{\vartheta}_s \frac{\partial f}{\partial \vartheta_s} + \sum_s \dot{I}_s \frac{\partial f}{\partial I_s} = 0,$$

где $f(t; \vartheta)_1, \vartheta)_2, \dots; I_1, I_2, \dots$ – функция распределения, зависящая от большого числа пар канонически сопряженных переменных (I_s, ϑ_s) . Если фазы волн $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots$ являются случайными, то кинетическое уравнение получается из уравнения Луивилля путем использования теории возмущений по слабому взаимодействию волн и усреднению по случайным фазам. Этот вывод является очень громоздким. Его можно найти в работе [4], а здесь мы приведем лишь конечный результат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= 6\pi \sum_{m_1, m_2, m_3} \sum_{n_{m_1}, n_{m_2}, n_{m_3}} |V_{m_1 m_2 m_3}|^2 \hat{D}_{m_1 m_2 m_3} \times \\ &\times |c(n_{m_1})c(n_{m_2})c(n_{m_3})|^2 \delta(n_{m_1} \omega_{m_1} + n_{m_2} \omega_{m_2} - n_{m_3} \omega_{m_3}) \times \\ &\times \delta(n_{m_1} \vec{k}_{m_1} + n_{m_2} \vec{k}_{m_2} - n_{m_3} \vec{k}_{m_3}) \hat{D}_{m_1 m_2 m_3} F, \\ \hat{D}_{m_1 m_2 m_3} &\equiv n_{m_1} \frac{\partial}{\partial I_{m_1}} + n_{m_2} \frac{\partial}{\partial I_{m_2}} - n_{m_3} \frac{\partial}{\partial I_{m_3}}, \\ F(I_1, I_2, \dots, I_s, t) &\equiv \left(\frac{1}{2\pi}\right)^s \int_0^{2\pi} d\vartheta_1 \dots d\vartheta_s f(I_1, \dots, I_s; \vartheta_1, \dots, \vartheta_s; t), \end{aligned}$$

где $V_{m_1 m_2 m_3}$ – матричный элемент взаимодействия волн. Это уравнение имеет равновесное решение, определяющее термодинамическое равновесие в ансамбле нелинейных волн:

$$F = F\left(\sum_t (H_i - \vec{k}_i W I_i)\right),$$

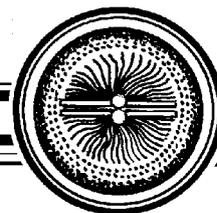
где \vec{W} – произвольная константа, имеющая смысл макроскопической скорости.

11. В заключение лекций мне бы хотелось отметить, что почти все вопросы, которые были затронуты, представляют собой лишь первые шаги в попытках понять физические процессы, приводящие к возникновению стохастических волновых процессов в условиях большой нелинейности. Нет сомнений, что через этот круг вопросов лежит путь к пониманию природы сильной турбулентности и процессов, происходящих в турбулентной среде.

Лекции были построены таким образом, чтобы обратить внимание не некоторые идеи и методы, которые в настоящее время привлекаются к исследованию стохастических явлений в сильно нелинейных полях. По этой причине мы исключили подробное изложение каких-либо конкретных методов и слабонелинейные случаи, поскольку в последних круг представлений о физических процессах более или менее установился. Приводимая ниже литература поможет уточнить ряд деталей, связанных с содержанием лекций.

Библиографический список

1. Заславский Г.М., Филоненко Н.Н. // ЖЭТФ. 1969. Т. 56, 1064 – к п. 2-4, 9.
2. Филоненко Н.Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13, 925 – к п. 3, 4.
3. Заславский Г.М., Филоненко Н.Н. // ЖЭТФ. 1970. Т. 57, 1453 – к п. 5-7,12.
4. Берман Г.П., Заславский Г.М. // ЖЭТФ. 1970. Т. 58, 1453 – к п. 5-7,10.
5. Филоненко Н.Н. // ДАН СССР. 1969. Т. 189, 1208 – к п. 8.
6. Чириков Б.В. Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности. Препринт ИЯФ № 267. Новосибирск, 1969;
Заславский Г.М., Чириков Б.В. // УФН. 1971. Т. 105, № 3.



ОЧЕРКИ ПО ИСТОРИИ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА
Исследования в СССР в 1950–1980-е годы

Р.Р. Мухин

© Р.Р. Мухин, 2007
© Издательство «Вест-Консалтинг», 2007
Москва: «Вест-Консалтинг», 2007. 354 с.
ISBN 978 5-903321-17-9

Содержание

Предисловие

Введение

Глава I. Предыстория динамического хаоса: физические корни и истоки исследований систем со сложным поведением (1880–1940-е годы)

- 1.1.** Точка отсчета – качественные методы. А. Пуанкаре и А.М. Ляпунов (1881–1918 гг.).
1.1.1. Качественная теория дифференциальных уравнений. 1.1.2. Вопросы устойчивости. 1.1.3. Фигуры равновесия вращающихся жидкостей. Бифуркации. 1.1.4. Ж. Адамар и геодезические потоки на поверхностях отрицательной кривизны (1898 г.)
1.2. Дж. Биркгоф. Теория динамических систем. Теория нелинейных колебаний. Школа А.А. Андронова. 1.2.1. Дж. Биркгоф и теория динамических систем. 1.2.2. Начальный период исследований динамических систем в СССР. 1.2.3. Теория нелинейных колебаний. Школа А.А. Андронова
1.3. Начальный период эргодической теории. Работы Н.С. Крылова. 1.3.1. Истоки эргодической теории. Первые эргодические теоремы. 1.3.2. Работы Н.С. Крылова по обоснованию статистической механики
1.4. Развитие теории турбулентности. 1.4.1. Статистическая теория турбулентности. Теория А.Н. Колмогорова. 1.4.2. Зарождение турбулентности. Линейная теория гидродинамической неустойчивости В. Гейзенберга.

Глава II. Теория динамических систем (1950–1980-е годы)

- 2.1.** Теория Колмогорова–Арнольда–Мозера (теория КАМ). 2.1.1. Предварительные замечания. 2.1.2. Состояние «основной проблемы» динамики до работ Колмогорова (1954 г.). 2.1.3. Формулировка Колмогоровым основных положений теории КАМ (1954 г.). 2.1.4. Проблема доказательства: Ю. Мозер и В.И. Арнольд. Первые применения теории КАМ. 2.1.5. Программа А.Н. Колмогорова

- 2.2. Эргодическая теория. Гиперболические системы. 2.2.1. К-системы и метрическая энтропия. Развитие энтропийного направления эргодической теории. 2.2.2. Гиперболические системы. Работы С. Смейла и Д.В. Аносова (1960-е гг.)
- 2.3. Теория бифуркаций. Гомоклинические структуры. 2.3.1. Теория бифуркаций. 2.3.2. Гомоклинические структуры. Работы С. Смейла, Ю.И. Неймарка, Л.П. Шильникова, В.К. Мельникова, В.И. Арнольда (1960–1970-е гг.)
- 2.4. Алгоритмическая сложность

Глава III. Хаос в гамильтоновых системах (конец 1950-х–1980-е гг.)

- 3.1. Новые задачи теории нелинейных колебаний. Стохастическая неустойчивость. 3.1.1. Начало исследований. Критерий Чирикова. 3.1.2. Проблема Ферми–Паста–Улама. Задача об ускорении Ферми. 3.1.3. Интерпретация ФПУ-проблемы Б.В. Чириковым и Ф.М. Израилевым. 3.1.4. Вычислительный эксперимент
- 3.2. Проблема зарождения хаоса. Стохастический слой. Стандартное отображение.
- 3.3. Слабый хаос и стохастическая паутина. 3.3.1. Диффузия Арнольда. 3.3.2. Паутина Заславского
- 3.4. Биллиардные задачи. Квазислучайная динамика. 3.4.1. Гиперболические биллиарды. Работы Я.Г. Синая. 3.4.2. Квазислучайная динамика в финальных движениях в задаче трех тел (В.М. Алексеев, 1960-е гг.)

Глава IV. Диссипативный хаос (1960–1970-е гг.)

- 4.1. Лазерный аттрактор (1963 г.)
- 4.2. Состояние вопроса о возможности хаоса в маломерных диссипативных системах к началу 1970-х годов.
- 4.3. Аттрактор Лоренца и другие аттракторы. 4.3.1. Аттрактор Лоренца. Работа В.С. Афраймовича, В.В. Быкова и Л.П. Шильникова. 4.3.2. Квазиаттракторы. Отображение Заславского
- 4.4. Теория турбулентности, новые подходы, новые надежды (1960–1970-е гг.) 4.4.1. Плазменная турбулентность. 4.4.2. Гидродинамическая турбулентность. Сценарии перехода к хаосу
- 4.5. Особенности открытия динамического хаоса

Глава V. Многообразие аспектов феномена хаоса

- 5.1. Хаос и неинтегрируемость. 5.1.1. Интегрируемые системы. Переход к неинтегрируемости. 5.1.2. Неинтегрируемость в гамильтоновых системах. 5.1.3. Качественное интегрирование в диссипативных системах
- 5.2. Методологические аспекты динамического хаоса
- 5.3. Динамический хаос: взаимодействие физического и математического аспектов
- 5.4. Динамический хаос и случайность
- 5.5. Хаос и самоорганизация. 5.5.1. Нелинейное уравнение диффузии. 5.5.2. Структуры и хаос в планетных кольцах и галактиках

Заключение

Приложение I. Хронология событий хаоса

Приложение II. Научные центры, в которых получены основные результаты, связанные с хаотической динамикой

Литература

Предисловие

История развития теории и обнаружения явления, называемого сейчас хаосом, можно отнести к драматическим страницам истории развития науки. Явление хаоса, или просто

хаос, было обнаружено как решение уравнений динамики, известных более 300 лет. Хотя отдельные работы, сыгравшие фундаментальную роль в понимании хаоса, появились в начале 20 века, теория хаоса начала формироваться в 50-е годы. Она сопровождалась многочисленными открытиями в теории в приложениях: в плазме, оптике, гидродинамике, распространении волн в атмосфере и океане, баллистике и др. Сейчас трудно найти область, где бы явление хаоса не играло ту или иную значительную роль. Развитие компьютерной техники было решающим в понимании хаоса, с одной стороны, и стимулировало новые идеи в теории коммуникаций, с другой стороны.

Оглядываясь назад, трудно себе представить каким образом, такое большое число работ и книг по теории нелинейных явлений и хаоса было написано всего лишь за несколько десятков лет. Вклад ученых России особенно выделяется в этой области. Нет сомнений, что охватить огромный материал истории развития хаоса, когда такое большое количество открытий, идей и экспериментальных результатов появляется в короткое время, является задачей невероятной сложности. Тем не менее, автор этой книги, Равиль Мухин, не только решился взяться за эту работу, но и сумел представить читателем обширную картину исследований в теории хаоса с ее трудностями, кризисами, успехами, и торжеством открытий.

Эта книга – первая в своем роде. В таком деле неизбежны недостатки, присутствует, как и в любой истории, личное и порой неоднозначное восприятие автора, но безусловны и неоспоримы достоинства. Я думаю, что читатели разделят со мной благодарность автору, выполнившему столь сложную работу на столь высоком уровне.

*Георгий М. Заславский
Нью-Йоркский Университет*

Осознание фундаментальности проблемы динамического хаоса научным сообществом физиков пришло в начале – середине 1980-х гг., через 20 лет после открытия самого явления. Так, в знаменитом списке «особо важных и интересных проблем физики и астрофизики» В.Л. Гинзбурга она появляется только в 4-ом издании соответствующей статьи (1985); в трех же предыдущих изданиях (1971, 1974 и 1980) эта проблема отсутствует. В настоящее время она, будучи сформулированной несколько более широко («Нелинейная физика. Турбулентность. Хаос. Странные аттракторы»), отнесена к разделу «Макрофизика» и находится в упомянутом списке под одиннадцатым номером. Комментируя это обстоятельство, В.Л. Гинзбург замечает: «...Ситуация радикально изменилась. В физической литературе почти всех рангов публикуются (и в немалом количестве) статьи, посвященные солитонам, динамическому хаосу, странным аттракторам и т.д.» [1. С. 63]. Действительно, как раз в начале и середине 1980-х гг. возникает своего рода «хаотический бум», появляется целая серия ныне широко известных монографий и сборников по динамическому хаосу (книги Г. Хакена, А. Лихтенберга и М. Либермана, Г. Шустера, М.И. Рабиновича и Д.И. Трубецкова, Г.М. Заславского и др.). Научно-популярный бестселлер Дж. Глейка «Хаос: создание новой науки» увидел свет чуть позже, в 1987 г. В эти годы вдруг становится ясно, что динамический хаос чрезвычайно распространен в физике и вообще в естественных науках. Вот области, в которых он играет важную роль: лазеры, нелинейная оптика, ускорители заряженных частиц, задача трех тел в небесной механике, некоторые химические реакции, динамика популяций и т.д. Можно сказать, что динамический хаос стал неким ядром, сердцем обширной науки, получившей название нелинейной динамики, и тесно связанной с ней синергетики (или теории самоорганизации).

В монографии Р.Р. Мухина рассказывается о сложных путях развития целого комплекса идей и теорий, математических конструкций и концепций, которые, в конце концов, привели к открытию явления динамического хаоса в 1960-е гг. Само это открытие было по структуре весьма сложным и относительно независимо было сделано для двух классов динамических систем: консервативных (или гамильтоновых) и диссипативных. Книга написана в жанре историко-научного исследования, находящегося на стыке историй физики, механики,

математики. Основные события при этом происходили в теории нелинейных колебаний и теории динамических систем. Страницы книги пестрят формулами, и это означает, что она не является научно-популярной. Несмотря на это, она написана ясно, увлекательно, включает философско-методологические экскурсы.

Повествуя о сложных путях формирования концепции динамического хаоса, основное внимание автор уделяет весьма весомому, но менее известному вкладу отечественных ученых. Решающий прорыв, приведший к открытию явления, свершился в золотые для советской науки 1950–1960-е годы, о которых немало говорится в книге [1]¹. Автору удалось связаться с некоторыми из первооткрывателей и взять у них интервью или получить от них ценные свидетельства, что значительно оживило и украсило его работу.

Мне представляется очень интересными и во многом новыми методологические размышления автора (в связи с динамическим хаосом) о взаимосвязи математического и физического аспектов, о соотношении понятий порядка и хаоса, необходимости и случайности, устойчивости и неустойчивости, о своего рода «нелинейной революции» в естествознании.

Но наибольшее впечатление на меня произвело то, что глубокие концептуальные сдвиги в науке могут происходить без изменения теоретического фундамента, основных уравнений, на уровне лишь следствий этих исходных уравнений, что убедительно демонстрирует автор на примере явления динамического хаоса.

Историку точного естествознания и математики всегда приятно видеть в числе главных героев исторического процесса, ведущему к замечательному открытию, такие славные имена как А. Пуанкаре и А.М. Ляпунов, Дж. Биркгоф и А.А. Андронов, А.Н. Колмогоров и др. В Приложении автор, как это и подобает профессиональному историку науки, дал хронологию основных событий, привел список наиболее важных научных центров изучения динамического хаоса.

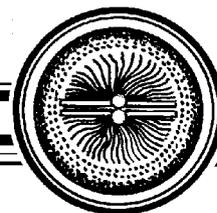
Естественно, Р.Р. Мухин не исчерпал «хаотическую тематику» и кое-что оставил на будущее. Так, в книге только в малой степени затронута экспериментальная сторона явления. Думаю, что затраченные читателем усилия на освоение, скажем, КАМ-теории, теорий турбулентности и других насыщенных математикой разделов книги, в конечном счете, будут вознаграждены: перед ним приоткроются двери в прекрасную «новую науку». Думаю, что и специалисты по нелинейной динамике и ее приложениям найдут в книге Р.Р. Мухина немало нового и интересного.

Литература

1. Гинзбург В.Л. О физике и астрофизике. 2-е изд., переработанное и дополненное. М.: Наука, 1992.
2. Научное сообщество физиков СССР. 1950–1960-е годы: документы, воспоминания, исследования. Вып. 1 / Сост. и ред. В.П. Визгин и А.В. Кессених. СПб.: РХГА, 2005.
3. Научное сообщество физиков СССР. 1950–1960-е и др. годы: документы воспоминания, исследования / Сост. и ред. В.П. Визгин и А.В. Кессених. СПб.: РХГА, 2007 (в печати).

В.П. Визгин

¹Физике этого периода посвящены два выпуска книги [2, 3]. В первом из них помещена большая статья Р.Р. Мухина по истории нелинейной динамики и, в частности, динамического хаоса.



В настоящее время бурно развивается новое междисциплинарное направление – математическая история.

В ее основе лежат математическое моделирование исторических процессов, новые информационные технологии и теория самоорганизации (синергетика). Это направление дает новые возможности для количественного анализа социально-экономических систем, исторической реконструкции, стратегического прогноза, описания альтернативных исторических траекторий. Лейтмотив двух предлагаемых читателю книг – междисциплинарность, стремление искать и развивать новое на пересечении сферы предметного знания, математического моделирования и философской рефлексии.

В основу книг положены доклады участников одной из первых в мире конференций по математической истории, которая в октябре 2007 года проводилась в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Доклады посвящены концептуальным основам математической истории и наиболее важным достижениям этого подхода. Вероятно, именно эти работы будут определять направления развития математической истории в ближайшие годы. В двух выпусках собраны доклады, посвященные основам математической истории, ее информационным ресурсам, анализу исторических данных, математическому моделированию исторических процессов

Ясный стиль большинства работ, важность обсуждаемых проблем, множество иллюстраций сделают книгу интересной и доступной многим студентам, аспирантам и исследователям, интересующимся историей.

ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИСТОРИИ

Основания, информационные ресурсы, анализ данных

Ответственные редакторы Г.Г. Малинецкий, А.В. Коротаев

© Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2008
М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 256 с.
ISBN 978-5-397-00262-2

Оглавление

Введение. В.В. Алексеев, Л.И. Бородкин, В.Г. Буданов, Л.Е. Гринин, А.В. Коротаев, Г.Г. Малинецкий, С.Ю. Малков, А.В. Подлазов, П.В. Турчин. Математическое моделирование исторических процессов

I Основания и фундаментальные проблемы

В.С. Стёпин. Научные революции и междисциплинарные взаимодействия в социальных и исторических науках

Г.Г. Малинецкий, Т.С. Ахромеева. Математическая история. Прошлое для будущего

В.Е. Лепский. Постановка проблемы конвергенции базовых парадигм исторического анализа и прогнозирования

II Информационные ресурсы математической истории

- А.П. Деревянко, Ю.П. Холушкин, В.Т. Воронин, В.С. Костин, Ю.А. Загорюлько.* Археология и компьютерные технологии
- С.А. Боринская.* Популяционно-генетические исследования в реконструкции расселения человека и domestikации животных и растений
- А.А. Столяров.* База данных раннесредневековых североиндийских жалованных грамот
- Ю.Я. Вин.* Концепция информационной близости исторического источника: анализ численных результатов
- А.С. Малкова, В.И. Январев.* Информационная система для анализа социокультурных данных, заложенных в фольклорных текстах

III Проблемы анализа данных

- П.В. Турчин.* Эмпирические закономерности в исторической динамике: вековые циклы
- Э.С. Кульпин-Губайдуллин.* Семипоклоленные циклы русской истории
- С.А. Нефёдов.* О причинах русской революции
- Б.Н. Миронов.* О чем говорит рост человека: возможности, состояние и перспективы исторической антропометрии для понимания динамики исторического процесса
- Д.В. Серебряков, И.В. Кузнецов, О.Б. Урядов, М.А. Ананьев.* Прогноз увеличения числа убийств
- И.Л. Кирилук, С.Ю. Малков.* Особенности мирового экономического развития: математический анализ статистических данных
- А.В. Подлазов.* Алкоголизация и смертность в России и странах Европы. Количественный анализ
- Д.А. Халтурина.* Какая алкогольная политика нужна России: международный опыт и российские реалии (количественный анализ)
- А.В. Кортаев, Д.А. Халтурина.* О динамике второго демографического перехода

Сведения об авторах

ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИСТОРИИ

Математическое моделирование исторических процессов

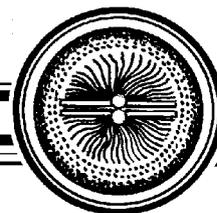
Ответственные редакторы Г.Г. Малинецкий, А.В. Кортаев

© Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2008
М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2008. 208 с.
ISBN 978-5-397-00262-2

Оглавление

- Г.Г. Малинецкий, А.В. Кортаев.* Предисловие. Прикладная математика и математическое моделирование исторических процессов
- В.В. Алексеев, Л.И. Бородкин, В.Г. Буданов, Л.Е. Гринин, А.В. Кортаев, Г.Г. Малинецкий, С.Ю. Малков, А.В. Подлазов, П.В. Турчин.* Введение. Математическая история: ключевые проблемы и новые подходы
- С.Ю. Малков.* Роль государства в России в свете макроэкономического моделирования
- Л.Г. Бадалян, В.Ф. Криворотов.* Динамическая модель исторических экономик
- Л.Е. Гринин, А.В. Кортаев, С.Ю. Малков.* Математические модели социально-демографических циклов и выхода из «мальтузианской ловушки»: некоторые возможные направления дальнейшего развития
- С.А. Махов.* Модель взаимодействия региональных игроков
- С.А. Перов, А.С. Малков.* Моделирование военных действий в аграрных обществах
- А.А. Романчук.* Модель Голдстоуна–Нефедова–Турчина и ее объяснительные возможности
- Н.Н. Крадин.* Кочевники в мировой истории: перспективы моделирования исторических процессов
- А.В. Марков, А.В. Кортаев.* Гиперболический рост в живой природе и обществе: динамика разнообразия фанерозойских морских животных и долгосрочная динамика развития Мир–Системы

Сведения об авторах



СОЦИАЛЬНАЯ САМООРГАНИЗАЦИЯ И ИСТОРИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС

Возможности математического моделирования

С.Ю. Малков

© Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2008
М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 240 с.
ISBN 978-5-397-00223-3

В настоящей книге проведен анализ логико-математических методов моделирования социальной самоорганизации, рассмотрены возможности их использования для исследования исторических процессов, предложен алгоритм анализа устойчивости социальных систем. Изложенные базовые модели использованы для анализа закономерностей макро-исторической эволюции от первобытного до современного общества.

Рассмотрены механизмы влияния природной среды на социальную самоорганизацию, формирование национальных особенностей, стереотипов социального поведения. Предложены модели, описывающие влияние природно-климатических факторов на исторические процессы.

Оглавление

Введение

1. Методология математического моделирования социальной самоорганизации

1.1. Общие методы моделирования сложных динамических систем. 1.2. Закономерности социальной самоорганизации. 1.3. Устойчивость социальных систем

2. Фазы исторического процесса и социальная самоорганизация

2.1. Общество охотников-собирателей. 2.2. Аграрное общество. 2.3. Развитое индустриальное общество. 2.4. Моделирование переходных исторических эпох. 2.4.1. Переход от общества охотников-собирателей к аграрному обществу. 2.4.2. Переход от аграрного к индустриальному обществу. 2.4.3. Современная историческая ситуация

3. Влияние природно-климатических факторов на исторические процессы и социальную самоорганизацию

3.1. Природные факторы и пассионарность. 3.2. Влияние природно-климатических факторов на формирование региональных особенностей у народов Европы. 3.3. Природно-климатические условия и экономические уклады. 3.4. Динамика общественной жизни и солнечная активность

4. Дилемма «Запад – Восток»: закономерности различий

5. Дилемма «Запад – Восток» и путь России

Приложение 1. Динамика политических систем: моделирование устойчивости и дестабилизации

Приложение 2. Производственные факторы формирования X- и Y-экономик

Приложение 3. Моделирование закономерностей политической эволюции Мир-Системы

Приложение 4. Справочные демографические и экономические данные

Литература

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина*
Оформление художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, О.Н. Строгановой
в пакете $L^A T_E X$

Подписка на 2009 год осуществляется
по каталогу Агентства Роспечать
«Газеты. Журналы», индекс 73498,
и по договору между Подписчиком
(юридическим или физическим лицом)
и Издателем (Саратовским государственным университетом)

Стоимость подписки на 2009 год 600 руб. (6 номеров)
Заявки на заключение договора принимаются
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64
E-mail: and@nonlin.sgu.ru

Распространение журнала осуществляется
редакцией журнала по адресной системе

Сдано в набор 1.03.09. Подписано к печати 14.04.09
Формат 70x108/16. Бумага «Снегурочка». Печать трафаретная
Усл. печ. л. 14,7(10,5). Уч.-изд. л. 14,0. Тираж 200. Заказ 411

Отпечатано на ризографе GR 3750 редакции журнала

© Редакция журнала
«Известия вузов. ПНД», 2009
© Оформление художника
Д.В. Соколова, 2009