



АНАЛОГИЯ В ЗАДАЧАХ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЭЛЕКТРОННЫХ И ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОТОКОВ С ПОЛЯМИ РЕЗОНАТОРОВ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Часть 2. Самовозбуждение, усиление и подавление сигнала

А. П. Кузнецов^{1,2}, С. П. Кузнецов^{2,3}

¹Национальный исследовательский Саратовский государственный университет
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83

²Саратовский филиал ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
Россия, 410019 Саратов, Зеленая, 38

³Удмуртский государственный университет
Россия, 426034 Ижевск, Университетская, 1

E-mail: apkuz@rambler.ru, spkuz@yandex.ru

Предметом данного исследования является задача о возбуждении акустических колебаний и волн в процессе взаимодействия потока жидкости с резонаторными и периодическими структурами, применительно к которой продуктивным оказывается применение разработанных в электронике и электродинамике методов и теоретического аппарата для электромагнитных колебаний и волн. Для этого уравнения гидродинамики сжимаемой жидкости приводятся к форме, аналогичной уравнениям Максвелла, и с их помощью выводятся уравнения возбуждения резонаторов и волноводов, что было сделано в предыдущей части статьи. По аналогии с теорией устройств электроники сверхвысоких частот со скрещенными полями, на основе самосогласованной теории исследовано взаимодействие вихревых потоков с периодической структурой в случае сильной собственной неустойчивости. Построена линейная теория акустического усилителя, в котором взаимодействие слабое, а течение на входе в пространство взаимодействия не возмущено. Отмечается возможность полного подавления поверхностной волны в определенных режимах функционирования такой системы. Показано, что возможна эффективная связь потока со встречной волной в структуре, и найдены условия, обеспечивающие самовозбуждение на встречной волне. Аналогия между гидродинамическими задачами и процессами в электронных приборах со скрещенными полями интересна с точки зрения возбуждения акустических колебаний вихревыми потоками и выявления перспектив применения этих феноменов. Особого внимания заслуживает самовозбуждение колебаний, обусловленное взаимодействием течения со встречной волной, подобное эффекту, реализующемуся в лампах обратной волны.

Ключевые слова: Электронный поток, гидродинамический поток, периодические структуры, усиление, условия подавления, самовозбуждение сигнала.

DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-2-5-26

Ссылка на статью: Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. Аналогия в задачах о взаимодействии электронных и гидродинамических потоков с полями резонаторов и периодических структур. Часть 2. Самовозбуждение, усиление и подавление сигнала // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 2. С. 5–26.

Введение

В первой части работы была развита аналогия в задачах о возбуждении электронными или гидродинамическими потоками полей в периодических структурах [1]. Также рассмотрена самосогласованная задача о взаимодействии плоской ленты вихрей со структурой типа «гребенка» и получено дисперсионное уравнение. В настоящей работе обсуждается возможность постановки задач, традиционных для микроволновой электроники [2–7], применительно к усилению, подавлению и самовозбуждению акустических колебаний. Отметим, что на возможность усиления звуковых колебаний за счет резонансного механизма указано в [8]. Как было отмечено в [1], особенность гидродинамических задач состоит в возможности сильной собственной неустойчивости, что определяет некоторую специфику метода синхронных волн, что также станет предметом обсуждения.

1. Взаимодействие потока с периодической структурой при наличии сильной собственной неустойчивости в потоке

Рассмотрим процессы, происходящие при взаимодействии потока с периодической структурой при наличии сильной собственной неустойчивости в потоке. Для определенности будем иметь в виду конкретное устройство – гидродинамическую

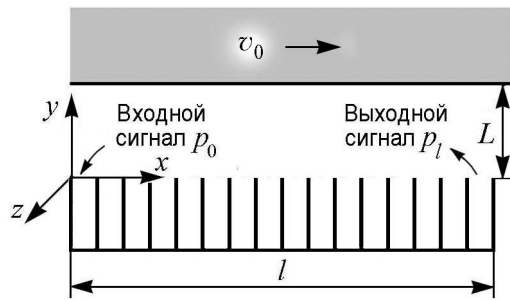


Рис. 1. Акустический усилитель с периодической структурой типа «гребенка»

систему, состоящую из потока жидкости или газа, движущегося над периодической структурой типа гребенки (рис. 1). Пусть слой жидкости толщиной L между потоком и поверхностью гребенки неподвижен. Направим оси системы координат как показано на рис. 1, причем плоскость $y = 0$ совместим с поверхностью гребенки. Следуя [9, 10], нетрудно получить, что распределение давления в области $0 \leq y \leq L$ дается соотношением

$$p_k(y) = \frac{C}{1+r} \left[r e^{k(y-2L)} + e^{-ky} \right], \quad (1)$$

где

$$r = \frac{(\omega - kv_0)^2 - \omega^2}{(\omega - kv_0)^2 + \omega^2} \quad (2)$$

(по терминологии [9, 10]) – коэффициент отражения волны от потока, v_0 – скорость потока, C – некоторая константа. Аналогичное выражение можно записать и для вертикальных смещений \tilde{y} :

$$\tilde{y}_k(y) = \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \frac{dp_k(y)}{dy} = \frac{Ck}{\rho_0 \omega^2 (1+r)} \left[r e^{k(y-2L)} - e^{-ky} \right]. \quad (3)$$

На поверхности гребенки должно выполняться следующее граничное условие:

$$\left[\frac{dp}{dy} + k_0 p \right]_{y=0} = 0. \quad (4)$$

Здесь $k_0 = (\omega/c) \operatorname{tg}[(\omega h)/c]$ – постоянная распространения свободной поверхностной волны. Наложив условие (4) на соотношение (1), получим дисперсионное уравнение

$$\frac{k - k_0}{k + k_0} = r e^{-2kL}. \quad (5)$$

Расписывая последнее соотношение подробнее, находим

$$\left(k - \frac{\omega}{c} \operatorname{tg} \frac{\omega h}{c} \right) [(\omega - kv_0)^2 + \omega^2] = e^{-2kL} \left(k + \frac{\omega}{c} \operatorname{tg} \frac{\omega h}{c} \right) [(\omega - kv_0)^2 - \omega^2]. \quad (6)$$

Это уравнение совпадает с формулой (125) из [1], если положить $v_{10} = v_0$ и $v_{20} = 0$.

Считаем взаимодействие потока и поверхностной волны слабым, что выполняется, например, при условии достаточного удаления потока от гребенки ($kL \gg 1$). Дисперсионное уравнение свободного потока

$$(\omega - kv_0)^2 + \omega^2 = 0 \quad (7)$$

не имеет действительных корней. Следовательно, дисперсионные характеристики потока и поверхностной волны не пересекаются ни при каких действительных ω и k . Отсюда авторы [9, 10] делают вывод, что в анализируемой системе нет синхронного взаимодействия потока и поля и «моноскоростные гидродинамические течения не могут усиливать или ослаблять замедленные монохроматические волны». Таким образом, утверждается, что при наличии слабого взаимодействия двух волн и сильной собственной неустойчивости одной из них эффективное возбуждение второй волны невозможно. Поскольку это утверждение выходит, вообще говоря, за рамки анализа непосредственно уравнения (6), то разумно обратиться к исследованию какого-либо простого модельного уравнения, на примере которого можно было бы понять, происходит взаимодействие волн так, как это утверждается в [9, 10], или нет.

2. Особенности взаимодействия волн при наличии сильной собственной неустойчивости. Исследование модельного уравнения

Рассмотрим следующее дисперсионное уравнение:

$$(\omega - kv_1)(\omega - kv_2 + is) = -\varepsilon^2. \quad (8)$$

Это уравнение описывает связь бегущей волны $\omega = kv_1$ с волной $\omega = kv_2 - is$, обладающей собственной неустойчивостью и распространяющейся в ту же сторону. Связь волн характеризуется параметром ε . Пусть собственная неустойчивость второй волны сильная: $s \gg \varepsilon$. При этом условии дисперсионные характеристики волн не имеют действительной (или близкой к действительной) точки пересечения.

Выполним в уравнении (8) замену переменных

$$\omega = \omega_0 + \tilde{\omega}, \quad k = k_0 + \tilde{k}, \quad (9)$$

где

$$\omega_0 = \frac{isv_1}{v_2 - v_1}, \quad k_0 = \frac{is}{v_2 - v_1}. \quad (10)$$

В переменных $\tilde{\omega}$ и \tilde{k} уравнение (8) выглядит следующим образом:

$$\left(\tilde{\omega} - \tilde{k}v_1\right) \left(\tilde{\omega} - \tilde{k}v_2\right) = -\varepsilon^2, \quad (11)$$

причем для решения уравнения (8) можно записать выражение

$$f(x, t) = e^{\frac{s(x - v_1 t)}{v_2 - v_1}} F(x, t), \quad (12)$$

где $F(x, t)$ – решение, отвечающее дисперсионному уравнению (11). Свойства решения $F(x, t)$ хорошо изучены [11,12].

Пусть сначала $v_2 > v_1$. В этом случае $F(x, t)$ дает волновой пакет, передний фронт которого движется со скоростью v_2 , а задний – со скоростью v_1 (рис. 2). В системе отсчета, сопровождающей пакет со скоростью V , такой что $v_1 < V < v_2$, амплитуда волнового поля нарастает во времени с инкрементом порядка ε .

Чтобы получить решение уравнения (8), функцию $F(x, t)$ в соответствии с (12) нужно умножить на экспоненту $\exp[s(x - v_1 t)/(v_2 - v_1)]$. Ясно, что при этом вновь получится волновой пакет с четко выраженными фронтами, движущимися с теми же скоростями v_2 и v_1 . Указанная экспонента в сопровождающей системе отсчета даст нарастание во времени по закону

$$\exp \frac{s(V - v_1)t}{v_2 - v_1}.$$

Отсюда легко находим, что на заднем фронте импульса инкремент нулевой, на переднем он максимален и равен s , а по длине волнового пакета происходит нарастание поля с инкрементом меньшим s , но порядка s (рис. 3). На эту динамику волнового поля накладывается слабое нарастание с инкрементом порядка ε , но, поскольку $\varepsilon \ll s$, то оно практически не сказывается на эволюции пакета. Аналогичная картина имеет место и при $v_1 > v_2$, только теперь с максимальным инкрементом нарастает задний фронт импульса (рис. 4).

Характер эволюции волнового поля указывает на наличие эффективной связи волн. Наиболее ярко это видно, пожалуй, если первая волна является встречной

$$(\omega + kv_1)(\omega - kv_2 + is) = -\varepsilon^2. \quad (13)$$

В этом случае фронты бегут в разные стороны (рис. 5), а в фиксированной точке $x = \text{const}$ происходит нарастание волнового поля по закону

$$f(x, t) \sim \exp \frac{sv_1 t}{v_2 + v_1}, \quad (14)$$

то есть реализуется абсолютная неустойчивость с инкрементом порядка s . Характерно, что абсолютная неустойчивость возникает, даже если связь волн пассивная, то есть

$$(\omega + kv_1)(\omega - kv_2 + is) = \varepsilon^2, \quad (15)$$

поскольку основной вклад в нарастание поля дает экспонента (14). Роль взаимодействия волн состоит в этом случае только в формировании петли распределенной обратной связи.

Таким образом, при $s \gg \varepsilon$ волны эффективно связываются, хотя их дисперсионные характеристики и не пересекаются в действительной области. Они, однако, пересекаются в комплексной области. Так, величины ω_0 и k_0 , введенные соотношениями (10), подчиняются уравнениям

$$\omega_0 - k_0v_1 = 0, \quad \omega_0 - k_0v_2 + is = 0 \quad (16)$$

и определяют эту комплексную точку пересечения. Нетрудно понять, что положение комплексной точки пересечения дисперсионных характеристик задает закон эволюции волнового поля и в общем случае. Действительно, пусть имеется дисперсионное уравнение

$$D_1(\omega, k) \cdot D_2(\omega, k) = -\varepsilon^2. \quad (17)$$

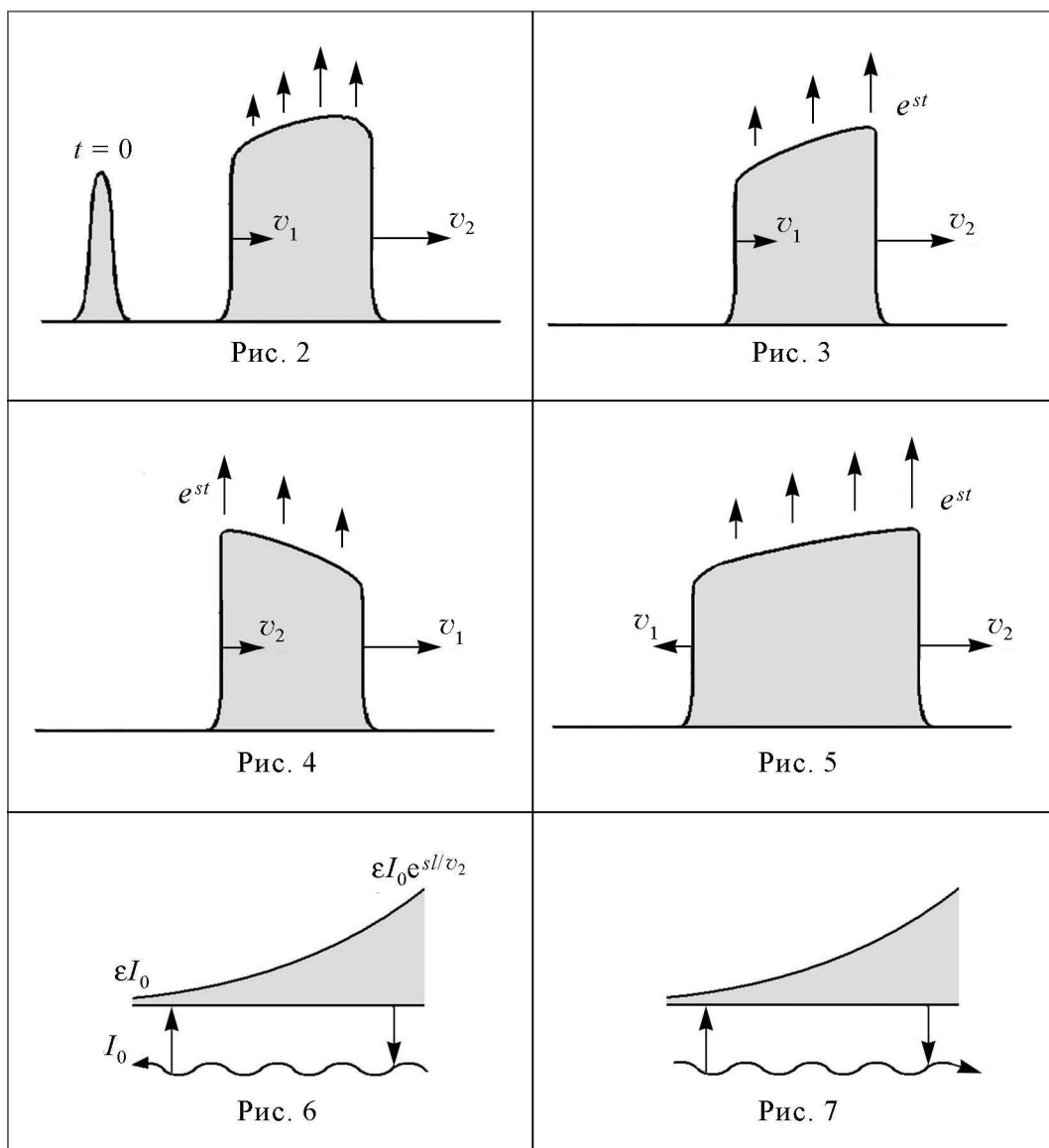
Эволюция волнового поля при $t \rightarrow \infty$ определяется положением точек перевала уравнения (17) [12]. При слабой связи волн параметр ε мал, и точки перевала лежат в комплексной плоскости в ε -окрестностях точек k_0, ω_0 , таких что

$$D_1(\omega_0, k_0) = 0, \quad D_2(\omega_0, k_0) = 0. \quad (18)$$

Следовательно, динамика волнового поля идет на фоне множителя $e^{(-\text{Im } \omega_0 t + \text{Im } k_0 x)}$. Малые отклонения положения точек перевала от точек ω_0, k_0 дадут несущественные отличия от такого закона развития процесса во времени и пространстве.

Каков же механизм развития неустойчивости в этом случае? Перейдем в сопровождающую систему отсчета, движущуюся со скоростью $v_1 < V < v_2$. Пусть с некоторой амплитудой I_0 возбуждена ветвь колебаний, отвечающая волне $\omega = kv_1$. В сопровождающей системе отсчета эта волна побежит назад и за счет слабого взаимодействия инициирует волну с неустойчивостью с амплитудой порядка εI_0 (рис. 6). Неустойчивость во второй волне будет развиваться в пространстве по закону $\varepsilon I_0 e^{sx/v_2}$, амплитуда этой волны достигнет большой величины, и снова возбудится первая волна с амплитудой порядка $\varepsilon^2 I_0 e^{sx/v_2}$. Цепь обратной связи замкнулась, и поля обеих взаимодействующих волн будут нарастать.

Из сказанного ясно, что в такой системе может происходить и эффективное усиление монохроматического сигнала. Механизм этого усиления иллюстрирует рис. 7. Нетрудно построить и соответствующую теорию по принципу теории возмущений (см. ниже, раздел 4).



3. Процессы в системе поток – гребенка бесконечной длины

Вернемся к анализу системы, изображенной на рис. 1, и, соответственно, к анализу дисперсионного уравнения (6). Найдем точку комплексного синхронизма

$$k_0 = \frac{\omega_0}{c} \operatorname{tg} \frac{\omega_0 h}{c}, \quad (\omega_0 - k_0 v_0)^2 + \omega_0^2 = 0. \quad (19)$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{tg} \frac{\omega_0 h}{c} = (1 \pm i) \frac{c}{v_0}, \quad k_0 = \frac{\omega_0}{v_0} (1 \pm i). \quad (20)$$

Воспользуемся тем, что скорость звука в жидкости c много больше скорости течения. Тогда легко находим

$$\omega_0 \approx \frac{\pi c}{2h} - \frac{(1 \mp i)}{2h} v_0, \quad k_0 \approx \frac{\pi c}{2h} (1 \pm i). \quad (21)$$

В системе отсчета, движущейся со скоростью V , наблюдатель увидит эволюцию поля по закону

$$\exp [i (\omega_0 - k_0 v) t] \sim \exp \left[\pm \frac{1}{2h} \left(v_0 - \frac{V \pi c}{v_0} \right) t \right]. \quad (22)$$

Нарастание поля в этой системе отсчета (то есть конвективную неустойчивость в исходной) дает верхний знак в (22), поскольку при $V \sim v_0$ выполняется неравенство $v_0 \ll V \pi c / v_0$. Верхний знак нужно оставить и в соотношениях (20) и (21).

Найдем групповую скорость поверхностной волны в комплексной точке пересечения дисперсионных характеристик

$$v_{\text{гр}} = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} = \frac{v_0}{1 + i + \omega_0 h v_0 (1 + 2i c^2 / v_0^2) / c^2}. \quad (23)$$

Групповая скорость – комплексная величина, причем при $v_0 \ll c$

$$|v_{\text{гр}}| \sim v_0^2 / (\pi c). \quad (24)$$

Таким образом, имеет место сильный групповой рассинхронизм потока и поля поверхностной волны: $|v_{\text{гр}}| \ll v_0$. Фактически, поток «пробегают» по системе, оставляя за собой нарастающее волновое поле. (В электронной лампе бегущей волны групповая скорость обычно порядка скорости пучка, и излученное электронами поле распространяется вместе с ними [13].) Заметим, что в рамках рассматриваемой модели мы не можем говорить о четко выраженных фронтах импульса. Действительно, фронт сформирован возмущениями очень короткой длины волны, для которых $k \rightarrow \infty$, и дисперсионное уравнение свободного потока (7) дает нарастание с бесконечным инкрементом. Это дефект модели, так как на самом деле в области $k \rightarrow \infty$ вступают в действие вязкость и сжимаемость жидкости. Можно утверждать, однако, что основная часть волнового пакета движется со скоростью порядка v_0 и, в соответствии с (22), имеет инкремент порядка

$$\text{Im } \omega \approx \frac{\pi c}{2h}. \quad (25)$$

Величина инкремента существенным образом определяется акустической структурой, что опровергает утверждение [9,10] об отсутствии эффективной связи потока со структурой.

4. Акустический усилитель. Метод парциальных волн

Рассмотрим теперь усиление монохроматического сигнала частоты ω в системе, изображенной на рис. 1. Пусть амплитуда давления на входе в канавку гребенки,

расположенной в точке $x = 0$ равна p_0 . Найдем амплитуду давления p_l в канавке, расположенной на расстоянии $x = l$ от начала координат. Для фиксированной частоты внешнего сигнала ω дисперсионное уравнение (6) имеет дискретный набор корней $k_i = k_i(\omega)$. Каждое решение типа (1) с определенным значением волнового числа $k_i = k_i(\omega)$ будем, как это принято в электронике, называть парциальной волной. Построим суперпозицию всех возможных парциальных волн

$$p(x, y) = \sum_i \frac{C_i}{1 + r_i} \left[r_i e^{k_i(y-2L)} + e^{-k_i y} \right] e^{-ik_i x}. \quad (26)$$

Используя (3), можно получить аналогичное выражение и для вертикальных смещений элементов жидкости

$$\tilde{y}(x, y) = \sum_i \frac{k_i C_i}{\omega^2 \rho_0 (1 + r_i)} \left[r_i e^{k_i(y-2L)} - e^{-k_i y} \right] e^{-k_i x}. \quad (27)$$

Суммирование в (26), (27) производится по всем корням дисперсионного уравнения (6). Если взаимодействие гидродинамического течения с периодической структурой является слабым, то дисперсионное уравнение (6) имеет всего три существенных корня, и суммирование в (26), (27) следует выполнять только по трем индексам.

Подчиним соотношения (26) и (27) граничным условиям на входе в пространство взаимодействия, что позволит определить амплитуды парциальных волн C_i .

Пусть возмущение давления в потоке на входе в пространство взаимодействия $x = 0$ задано и равно $p(0, L)$, а возмущение вертикальной координаты ленты потока – $\tilde{y}(0, L)$. Третье граничное условие определяется тем, что давление на входе в канавку гребенки, расположенной при $x = 0$, равно p_0 : $p(0, 0) = p_0$. Тогда из (26) и (27) получаем

$$\begin{aligned} p(0, L) &= \sum_{i=1}^3 C_i e^{-k_i L}, \\ \tilde{y}(0, L) &= \sum_{i=1}^3 \alpha_i C_i e^{-k_i L}, \\ p(0, 0) &= \sum_{i=1}^3 \beta_i C_i e^{-k_i L}, \end{aligned} \quad (28)$$

где введены обозначения

$$\alpha_i = \frac{r_i - 1}{r_i + 1} \frac{k_i}{\rho_0 \omega^2}, \quad (29)$$

$$\beta_i = \frac{r_i e^{-k_i L} + e^{k_i L}}{1 + r_i}. \quad (30)$$

Введем векторы-столбцы \vec{C} , \vec{p} и матрицу \hat{M} следующими соотношениями:

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} C_1 e^{-k_1 L} \\ C_2 e^{-k_2 L} \\ C_3 e^{-k_3 L} \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} p(0, L) \\ \tilde{y}(0, L) \\ p_0 \end{pmatrix}, \quad \hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Вектор \vec{C} характеризует интенсивность возбуждения соответствующих парциальных волн, вектор \vec{p} – начальные условия на входе в пространство взаимодействия, матрица \hat{M} является функцией частоты внешнего сигнала.

Запишем соотношения (26) в матричной форме

$$\hat{M}\vec{C} = \vec{p}. \quad (32)$$

По правилам линейной алгебры отсюда находим выражение для коэффициентов C_i :

$$C_i = \frac{e^{k_i L}}{\det(M_{ik})} (\vec{p} \vec{m}_i). \quad (33)$$

Здесь $\det(M_{ik})$ – определитель матрицы \hat{M} , $\vec{m}_i = (m_{1i}, m_{2i}, m_{3i})$ – векторы, составленные из алгебраических дополнений m_{ni} этой матрицы.

Используя соотношение (26), запишем выражение для давления на поверхности гребенки (то есть при $y = 0$) в точке $x = l$

$$p_l = \sum_{i=1}^3 C_i \beta_i e^{-k_i L - ik_i l}. \quad (34)$$

Формулы (33) и (34) дают решение поставленной задачи. С помощью этих соотношений по заданному в сечении $x = 0$ начальному состоянию системы (вектор \vec{p}) можно полностью восстановить распределение давления на поверхности гребенки.

Рассмотрим теперь случай, когда на входе в пространство взаимодействия при $x = 0$ гидродинамическое течение не возмущено

$$p(0, L) = 0, \quad \tilde{y}(0, L) = 0. \quad (35)$$

Вычисляя соответствующие алгебраические дополнения матрицы \hat{M} , из (33) в этом случае находим

$$C_i = \frac{\varepsilon_{imn} (\alpha_n - \alpha_m)}{\det(M_{ik})} e^{k_i L} p_0. \quad (36)$$

Здесь индексы (i, m, n) образуют тройку, ε_{imn} – символ Леви-Чивиты.

Найдем выражение для коэффициентов C_i в случае слабого взаимодействия потока и периодической структуры в первом исчезающем порядке по параметрам $e^{-k_i L}$. Для этого необходимо вычислить в указанном приближении элементы матрицы \hat{M} .

Матрица \hat{M} определяется корнями дисперсионного уравнения (6). Если взаимодействие потока и поверхностной волны в структуре слабое, то эти корни близки к корням дисперсионного уравнения свободного потока $(\omega - kv_0)^2 + \omega^2 = 0$ и свободной поверхностной волны $k - k_0(\omega) = 0$:

$$k_{1,2} = \frac{\omega}{v_0} (1 \mp i), \quad k_3 = k_0. \quad (37)$$

Найдем величины α_i – элементы второй строки матрицы \hat{M} . В определение величин α_i (29) входят коэффициенты отражения r_i , для которых из (2) и (37) вытекает, что

$$r_{1,2} \rightarrow \infty, \quad r_3 = r_0(k_0) = \frac{\{1 - (v_0/c) \operatorname{tg}[(\omega h)/c]\}^2 - 1}{\{1 - (v_0/c) \operatorname{tg}[(\omega h)/c]\}^2 + 1}. \quad (38)$$

Используя (38), из (29) получаем

$$\alpha_{1,2} = \frac{k_{1,2}}{\rho_0 \omega^2}, \quad \alpha_3 = \frac{r_0 - 1}{r_0 + 1} \frac{k_0}{\rho_0 \omega^2}. \quad (39)$$

Теперь найдем элементы третьей строки матрицы \hat{M} – величины β_i . Из (30) следует, что

$$\beta_3 = \frac{e^{k_0 L}}{1 + r_0}. \quad (40)$$

(Мы отбросили малый член $r_0 e^{-k_0 L}$.) Величины β_1 и β_2 непосредственно из соотношения (30) вычислить нельзя, поскольку в случае слабого взаимодействия $r_{1,2} \rightarrow \infty$, $e^{k_{1,2} L} \rightarrow \infty$, и формула (30) дает неопределенность типа отношения двух бесконечностей. Преобразуем выражение (30), используя дисперсионное уравнение (5):

$$\beta_i = \frac{2k_i}{k_i - k_0} \frac{r_i}{1 + r_i} e^{-k_i L}. \quad (41)$$

В это соотношение уже можно подставлять $k = k_{1,2}$

$$\beta_{1,2} = \frac{2k_{1,2}}{k_{1,2} - k_0} e^{-k_{1,2} L}. \quad (42)$$

Выпишем матрицу \hat{M} целиком:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{k_1}{\rho_0 \omega^2} & \frac{k_2}{\rho_0 \omega^2} & \frac{(r_0 - 1) k_0}{(r_0 + 1) \rho_0 \omega^2} \\ \frac{2k_1 e^{-k_1 L}}{k_1 - k_0} & \frac{2k_2 e^{-k_2 L}}{k_2 - k_0} & \frac{e^{k_0 L}}{1 + r_0} \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Вычислим определитель этой матрицы, сохраняя лишь наиболее существенные члены,

$$\det(M_{ik}) = \frac{k_2 - k_1}{\rho_0 \omega^2} \frac{e^{k_0 L}}{1 + r_0}. \quad (44)$$

Найдем амплитуды парциальных волн, для чего подставим полученные значения определителя и элементов α_i матрицы \hat{M} в соотношения (36)

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{k_2 (r_0 + 1) - k_0 (r_0 - 1)}{k_1 - k_2} p_0 e^{(k_1 - k_0) L}, \\ C_2 &= \frac{k_1 (r_0 + 1) - k_0 (r_0 - 1)}{k_2 - k_1} p_0 e^{(k_2 - k_0) L}, \\ C_3 &= p_0 (1 + r_0). \end{aligned} \quad (45)$$

Используя соотношение (34), получаем выражение для распределения давления вдоль поверхности гребенки

$$p_l = p_0 \left\{ \frac{2k_1 [k_2 (r_0 + 1) - k_0 (r_0 - 1)]}{(k_1 - k_0) (k_1 - k_2)} e^{-(k_1+k_0)L-ik_1l} + \frac{2k_2 [k_1 (r_0 + 1) - k_0 (r_0 - 1)]}{(k_2 - k_0) (k_2 - k_1)} e^{-(k_2+k_0)L-ik_2l} + e^{-ik_0l} \right\}. \quad (46)$$

Здесь $k_{1,2} = (\omega/v) (1 \mp i)$, $k_0 = (\omega/c) \operatorname{tg}[(\omega h)/c]$, а r_0 дается соотношением (38).

В выражение (46) входят три парциальных волны, амплитуды которых пропорциональны величинам e^{-ik_1l} . Для первой волны $\operatorname{Im} k_1 < 0$, поэтому эта волна затухает в направлении оси x . Для второй волны $\operatorname{Im} k_2 > 0$ – эта волна нарастает вдоль оси x . Третья парциальная волна характеризуется значением $\operatorname{Im} k_0 = 0$, так что ее амплитуда не меняется по величине. На расстояниях $l \gg L$ можно оставить одну нарастающую волну:

$$p_l = p_0 \frac{2k_2 [k_1 (r_0 + 1) - k_0 (r_0 - 1)]}{(k_2 - k_0) (k_2 - k_1)} e^{-(k_2+k_0)L-ik_2l}. \quad (47)$$

Отсюда следует асимптотическая оценка для коэффициента усиления:

$$G = 20 \lg \left| \frac{p_l}{p_0} \right| = 20 \lg \left\{ \left| \frac{2k_2 [k_1 (r_0 + 1) - k_0 (r_0 - 1)]}{(k_2 - k_0) (k_2 - k_1)} \right| e^{-\operatorname{Re} (k_2+k_0)L + \operatorname{Im} k_2l} \right\}. \quad (48)$$

Заметим, что выражения (46)–(48) справедливы для любой импедансной поверхности, а не только для гребенки. От вида поверхности зависит лишь конкретный вид функции $k_0(\omega)$.

Если показатель экспоненты в (48) положителен, что с учетом (37) приводит к условию

$$l > L \left(1 + \frac{v_0}{c} \operatorname{tg} \frac{\omega h}{c} \right), \quad (49)$$

то в рассматриваемой системе возможно усиление. При $l \gg L$ усиление оказывается экспоненциально большим. (В реальной системе практически достижимая величина усиления будет ограничена самовозбуждением системы.)

Таким образом, в системе разрывный гидродинамический поток – акустическая периодическая структура эффективное усиление поверхностной волны возможно даже в том случае, если взаимодействие потока и волны слабое, а гидродинамическое течение на входе в пространство взаимодействия не возбуждено.

5. Акустический усилитель. Метод последовательных приближений

В предыдущем параграфе продемонстрирована возможность усиления в системе разрывный гидродинамический поток – поверхностная волна при их слабой связи формальным образом. Обсудим теперь механизм этого усиления, для чего применим метод последовательных приближений, который нашел широкое распространение в электронике СВЧ для анализа физической стороны процессов взаимодействия электронного потока и электромагнитного поля в периодической структуре [4].

В качестве «нулевого» приближения зададим волну давления в виде свободной поверхностной волны

$$p = p_0 e^{-k_0 y - i k_0 x}. \quad (50)$$

Здесь $k_0(\omega) = (\omega/c) \operatorname{tg}[(\omega h)/c]$ – постоянная распространения свободной поверхностной волны на частоте внешнего сигнала ω . Эта волна сильно затухает в направлении y , однако, ее экспоненциальный «хвост» достигнет потока и слабо возбudit его.

Найдем отклик потока на воздействие поверхностной волны. В силу линейности задачи для этого нужно найти общее решение задачи о движении свободного потока и частное решение задачи о воздействии поверхностной волны на поток. Построим сначала решение о вынужденном воздействии волны на поток. Для этого следует положить в соотношении (1) волновое число k равным постоянной распространения свободной поверхностной волны k_0 :

$$p(x, y) = \frac{C}{1 + r_0} \left[e^{k_0(y-2L)} + e^{-k_0 y} \right] e^{-i k_0 x}. \quad (51)$$

Вычислим давление на поверхности гребенки

$$p(x, 0) = \frac{C}{1 + r_0} \left(1 + r_0 e^{-2k_0 L} \right) e^{-i k_0 x}. \quad (52)$$

По условию, давление на входе в канаву гребенки, расположенной в начале координат, равно p_0 : $p(0, 0) = p_0$. Поскольку взаимодействие потока и волны слабое, то $e^{-2k_0 L} \ll 1$, и из (52) следует, что $C = p_0(1 + r_0)$. Окончательно для «вынужденного» решения имеем

$$p_{\text{вын}}(x, y) = \left[r_0 e^{k_0(y-2L)} + e^{-k_0 y} \right] p_0 e^{-i k_0 x}. \quad (53)$$

Для вертикальных смещений элементов жидкости из (3) и (53) находим, что

$$\tilde{y}_{\text{вын}}(x, y) = \frac{k_0}{\rho_0 \omega^2} \left[r_0 e^{k_0(y-2L)} - e^{-k_0 y} \right] p_0 e^{-i k_0 x}. \quad (54)$$

Найдем общее решение задачи о движении свободного потока. Волны в потоке подчиняются дисперсионному уравнению (7). При действительных ω это уравнение имеет два комплексных корня k_1 и k_2 , отвечающих затухающей и нарастающей в пространстве волнам

$$k_1 = (1 - i) \frac{\omega}{v_0}, \quad k_2 = (1 + i) \frac{\omega}{v_0}. \quad (55)$$

Поля давления и вертикальных смещений являются суперпозициями двух таких волн с не определенными пока коэффициентами C_1 и C_2 :

$$\begin{aligned} p_{\text{св}}(x, y) &= C_1 e^{k_1 y - i k_1 x} + C_2 e^{k_2 y - i k_2 x}, \\ \tilde{y}_{\text{св}}(x, y) &= \frac{k_1 C_1}{\rho_0 \omega^2} e^{k_1 y - i k_1 x} + \frac{k_2 C_2}{\rho_0 \omega^2} e^{k_2 y - i k_2 x}. \end{aligned} \quad (56)$$

Построим теперь суперпозицию «свободного» и «вынужденного» решений

$$\begin{aligned} p(x, y) &= p_{\text{св}}(x, y) + p_{\text{вын}}(x, y), \\ \tilde{y}(x, y) &= \tilde{y}_{\text{св}}(x, y) + \tilde{y}_{\text{вын}}(x, y). \end{aligned} \quad (57)$$

Граничные условия на входе в пространство взаимодействия позволяют отыскать коэффициенты C_1 и C_2 . Действительно, на входе в пространство взаимодействия $x = 0$, $y = L$ лента разрыва не возмущена, следовательно

$$\begin{aligned} p(0, L) &= p_{\text{св}}(0, L) + p_{\text{вын}}(0, L) = 0, \\ \tilde{y}(0, L) &= \tilde{y}_{\text{св}}(0, L) + \tilde{y}_{\text{вын}}(0, L) = 0. \end{aligned} \quad (58)$$

Используя соотношения (53), (54), (56), (58), находим коэффициенты C_1 и C_2

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{(k_2 - k_0)r_0 + k_2 + k_0}{k_1 - k_2} \rho_0 e^{-(k_0+k_1)L}, \\ C_2 &= \frac{(k_1 - k_0)r_0 + k_1 + k_0}{k_2 - k_1} \rho_0 e^{-(k_0+k_2)L}. \end{aligned} \quad (59)$$

Таким образом, «отклик» потока на воздействие поверхностной волны полностью определен:

$$p(x, y) = C_1 e^{k_1 y - i k_1 x} + C_2 e^{k_2 y - i k_2 x} + \left[r_0 e^{(y-2L)k_0} + e^{-k_0 y} \right] p_0 e^{-i k_0 x}, \quad (60)$$

где коэффициенты C_1 и C_2 даются соотношениями (59). Оставляя в (60) лишь нарастающую волну, получим асимптотическое выражение для поля давления

$$p(x, y) \approx C_2 e^{k_2 y - i k_2 x}. \quad (61)$$

Это поле локализовано в окрестности потока, однако, его экспоненциальный «хвост» достигнет гребенки и возбудит волну вида $A e^{-k_2 y - i k_2 x}$, локализованную у поверхности гребенки. Полное поле складывается из «падающей» и «отраженной» волн

$$p = C_2 e^{k_2 y - i k_2 x} + A e^{-k_2 y - i k_2 x}. \quad (62)$$

На поверхности гребенки должно выполняться граничное условие (4). Подчинив ему решение (62), получим

$$A = \frac{k_0 + k_2}{k_2 - k_0} C_2. \quad (63)$$

Мы нашли «отклик» гребенки на воздействие потока. Схема построения первого приближения на этом закончена. Подставляя в (62) выражения (63), (59) и значения $y = 0$, $x = l$, находим давление на поверхности гребенки на входе в канавку, расположенную в точке $x = l$,

$$p_l = \frac{2k_2 [(k_1 - k_0)r_0 + k_1 + k_0]}{(k_2 - k_0)(k_2 - k_1)} \rho_0 e^{-(k_0+k_2)L - i k_2 l}. \quad (64)$$

Это соотношение полностью совпадает с выражением (47), полученным в предыдущем параграфе, что и подтверждает корректность применения метода последовательных приближений.

Проведенное рассмотрение позволяет утверждать, что механизм усиления в анализируемой системе состоит в следующем. Поверхностная волна, локализованная у поверхности гребенки, слабо возбуждает поток. Из-за сильной собственной неустойчивости потока в нем возникает экспоненциально нарастающая в направлении его распространения волна, меняющаяся во времени по закону, отвечающему частоте внешнего сигнала. Такая нарастающая волна, в свою очередь, инициирует поверхностную волну, и на расстоянии $l \geq 2L$ амплитуда этой инициированной волны превысит амплитуду «затравочной» поверхностной волны.

6. Эффект полного подавления поверхностной волны и его особенности

Пусть в системе, изображенной на рис. 1, возбуждена поверхностная волна с частотой ω . Найдем условия полного подавления этой волны. Для реализации полного подавления необходимо, чтобы инициированная за счет взаимодействия с потоком поверхностная волна точно скомпенсировала бы «затравочную» волну, что возможно на расстояниях $l \sim L$ от начала координат. В этом случае в соотношении (46) можно отбросить затухающую парциальную волну

$$p_l = p_0 \left\{ e^{-ik_0 l} + \frac{2k_2 [k_1 (r_0 + 1) - k_0 (r_0 - 1)]}{(k_2 - k_0)(k_2 - k_1)} e^{-(k_2 + k_0)L - ik_2 l} \right\}. \quad (65)$$

Условием полного подавления сигнала является обращение в нуль величины давления p_l

$$\frac{2k_2 [k_1 (r_0 + 1) - k_0 (r_0 - 1)]}{(k_2 - k_0)(k_1 - k_2)} = e^{(k_2 + k_0)L + i(k_2 - k_0)l}. \quad (66)$$

Введем следующие безразмерные переменные:

$$\Omega = \frac{v_0}{c} \operatorname{tg} \frac{\omega h}{c}, \quad \bar{L} = \frac{\omega L}{v_0}, \quad \bar{l} = \frac{\omega l}{v_0}. \quad (67)$$

(Величине Ω можно придать смысл безразмерной частоты сигнала, а величинам \bar{L} и \bar{l} – безразмерной толщины слоя покоящейся жидкости и длины системы.) Перейдем в соотношении (66) к безразмерным переменным (67). Используя определения величин $k_{1,2}$, k_0 и r_0 (37), (38) и (4), после некоторых преобразований получим

$$\bar{L} = \frac{t + (1 - \Omega)z}{2 - \Omega^2}, \quad \bar{l} = \frac{(1 + \Omega)t - z}{2 - \Omega^2}. \quad (68)$$

Здесь

$$z = \frac{1}{2} \ln \left\{ 8 \frac{[(1 - \Omega)^2 + \Omega]^2 + (1 - \Omega)^4}{[(1 - \Omega)^2 + 1]^3} \right\}, \quad (69)$$

$$t = \operatorname{arctg} \left\{ 1 + \frac{2(1 - \Omega)\Omega^2}{2(1 - \Omega)^2 + \Omega^2} \right\} + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

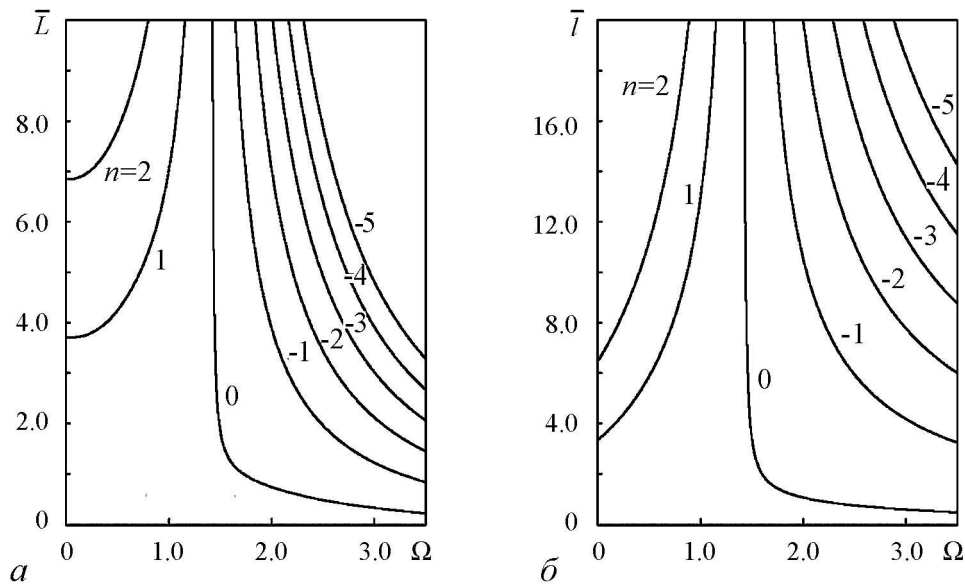


Рис. 8. Условия полного подавления поверхностной волны

На рис. 8 показаны зависимости $\bar{L} = \bar{L}(\Omega)$ и $\bar{l} = \bar{l}(\Omega)$, найденные численно с помощью соотношений (68) и (69). Для фиксированной частоты внешнего сигнала эффект полного подавления реализуется при определенных значениях толщины слоя покоящейся жидкости, причем для данной частоты сигнала таких решений бесконечно много. Полное подавление наблюдается на вполне определенной длине системы, которая зависит от толщины слоя. Заметим, что для длин, превышающих длину полного подавления, амплитуда поверхностной волны уже не будет равна нулю, поскольку эффект полного подавления носит интерференционный характер.

7. Взаимодействие потока со встречной волной как одна из возможных причин самовозбуждения

До настоящего момента излагались результаты исследования взаимодействия потока с поверхностной волной, распространяющейся в ту же сторону, что и поток. При наличии в потоке сильной собственной неустойчивости возможен, однако, принципиально новый эффект – взаимодействие потока со встречной волной.

Получим дисперсионное уравнение, описывающее взаимодействие потока со встречной волной в периодической структуре типа «гребенка». Для такой волны зависимость переменных от координат x и y для решений, затухающих в y -направлении, выглядит следующим образом: $p, \tilde{y} \sim e^{ky-ikx}$, поскольку $\text{Re } k < 0$. Соответственно, для распределения давления в пространстве имеем

$$p(x, y) = \begin{cases} p_1(x, y) = Ce^{ky-ikx}, & y > L, \\ p_2(x, y) = Ae^{ky-ikx} + Be^{-ky-ikx}, & 0 < y < L. \end{cases} \quad (70)$$

Используя (3), можно записать аналогичные соотношения и для вертикальных смещений элементов жидкости

$$\tilde{y}(x, y) = \begin{cases} \tilde{y}_1(x, y) = \frac{kc}{\rho_0(\omega - kv_0)^2} e^{ky - ikx}, & y > L, \\ \tilde{y}_2(x, y) = \frac{k}{\rho_0\omega^2} (Ae^{ky} - Be^{-ky}) e^{-ikx}, & 0 < y < L. \end{cases} \quad (71)$$

На границе потока $y = L$ должны выполняться условия

$$p_1(x, L) = p_2(x, L), \quad \tilde{y}_1(x, L) = \tilde{y}_2(x, L), \quad (72)$$

а на поверхности гребенки – граничное условие (4). Соотношения (70)–(72) и (4) совместны, если справедливо равенство

$$\left(k + \frac{\omega}{c} \operatorname{tg} \frac{\omega h}{c}\right) [(\omega - kv_0)^2 + \omega^2] = e^{2kL} \left(k - \frac{\omega}{c} \operatorname{tg} \frac{\omega h}{c}\right) [(\omega - kv_0)^2 - \omega^2]. \quad (73)$$

Это и есть искомое дисперсионное уравнение. При $kL \rightarrow -\infty$ уравнение распадается на дисперсионное уравнение свободного потока $(\omega - kv_0)^2 + \omega^2 = 0$ и дисперсионное уравнение свободной встречной волны $k + (\omega/c) \operatorname{tg}(\omega h/c) = 0$. Из соотношений (70)–(72), (4) вытекает также следующее выражение для распределения давления в пространстве в области $0 \leq y \leq L$:

$$p(x, y) = \frac{C}{1+r} [re^{(2L-y)k} + e^{ky}] e^{-ikx}, \quad (74)$$

где $r = [(\omega - kv_0)^2 - \omega^2] / [(\omega - kv_0)^2 + \omega^2]$.

Рассмотрим усиление встречной поверхностной волны. В таком режиме работы системы входной сигнал подается в точке $x = l$, а выходной снимается на конце $x = 0$ (рис. 9). Для решения задачи используем метод последовательных приближений, причем будем следовать логике этого метода, принятой в теории лампы обратной волны [4, 15].

В качестве «нулевого» приближения зададим свободную встречную волну

$$p = p_0 e^{-k_0 y + ik_0 x}, \quad (75)$$

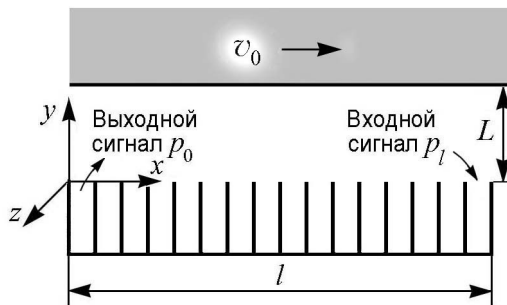


Рис. 9. Акустический усилитель встречной волны

где $k_0 = (\omega/c) \operatorname{tg}(\omega h/c)$, p_0 – искомая амплитуда выходного сигнала. Такая волна возбудит в потоке волну с неустойчивостью, которая, в свою очередь, инициирует поверхностную волну в гребенке. Амплитуду суммарной поверхностной волны в точке $x = l$ необходимо положить равной амплитуде входного сигнала p_l .

Как и в разделе 4, построим суперпозицию «вынужденного» и «свободного» решений. Вынужденное решение найдем, подставив в соотношение (74) значение волнового числа $k = -k_0$, то есть равным постоянной распространения свободной поверхностной волны:

$$p_{\text{вын}}(x, y) = p_0 \left[\bar{r}_0 e^{(y-2L)k_0} + e^{-k_0 y} \right] e^{ik_0 x}, \quad (76)$$

где $\bar{r}_0 = [(\omega + k_0 v_0)^2 - \omega^2] / [(\omega + k_0 v_0)^2 + \omega^2]$.

«Свободное» решение, описывающее волны в потоке, дается соотношениями (56). Подчинив суммарное решение условиям отсутствия модуляции потока на входе в пространство взаимодействия $p(0, L) = 0$, $\tilde{y}(0, L) = 0$, получим

$$p(x, y) = C_1 e^{k_1 y - ik_1 x} + C_2 e^{k_2 y - ik_2 x} + p_0 \left[\bar{r}_0 e^{(y-2L)k_0} + e^{-k_0 y} \right] e^{ik_0 x}, \quad (77)$$

где для коэффициентов C_1 и C_2 справедливы выражения (59). Накладывая граничное условие (4) и отбрасывая затухающую волну, находим выражение для давления на поверхности гребенки в точке $x = l$

$$p_l = p_0 \left[\frac{2k_2 [(k_1 - k_0) \bar{r}_0 + k_1 + k_0]}{(k_2 - k_0)(k_2 - k_1)} e^{-(k_0+k_2)L - ik_2 L} + e^{ik_0 l} \right] \quad (78)$$

и для коэффициента усиления встречной волны

$$G = 20 \lg \left| \frac{p_0}{p_l} \right| = 20 \lg \left| \frac{1}{1 + \frac{2k_2 [(k_1 - k_0) \bar{r}_0 + k_1 + k_0]}{(k_2 - k_0)(k_2 - k_1)} e^{-(k_0+k_2)(L+il)}} \right|. \quad (79)$$

При $l \sim L$ экспоненциальный множитель в (79) имеет величину порядка единицы и, следовательно, в системе возможно эффективное усиление встречной волны.

При определенных значениях длины системы l и частоты ω коэффициент усиления G может обратиться в бесконечность. Это означает, что произойдет самовозбуждение системы. Найдем условия самовозбуждения. Из (79) следует, что $G \rightarrow \infty$ при

$$\frac{2k_2 [(k_1 - k_0) \bar{r}_0 + k_1 + k_0]}{(k_2 - k_0)(k_1 - k_2)} = e^{(k_0+k_2)(L+il)}. \quad (80)$$

Переходя к безразмерным параметрам (67) и выполняя некоторые преобразования, из (80) получаем

$$\bar{L} = \frac{(1 + \Omega)z + t}{(1 + \Omega)^2 + 1}, \quad \bar{l} = \frac{(1 + \Omega)t - z}{(1 + \Omega)^2 + 1}. \quad (81)$$

Здесь

$$z = \frac{1}{2} \ln \left\{ 8 \frac{[(1 + \Omega)^2 + \Omega]^2 + (1 + \Omega)^4}{[(1 + \Omega)^2 + 1]^2 [(1 - \Omega)^2 + 1]} \right\}, \quad (82)$$

$$t = \operatorname{arctg} \left\{ 1 - 2\Omega^2 \frac{\Omega + 3}{2(1 + \Omega)^2 + \Omega^2} \right\} + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

На рис. 10 приведены зависимости стартовых значений безразмерных длины системы \bar{l} и частоты Ω от безразмерной толщины слоя покоящейся жидкости \bar{L} . Как показывают расчеты, с увеличением толщины слоя \bar{L} стартовая длина растет. Это естественно, так как с увеличением \bar{L} падает эффективность взаимодействия потока и поверхностной волны. При этом стартовая частота уменьшается и при $\Omega \rightarrow 0$ соответствующая ветвь колебаний обрывается. Точка $\Omega = 0$ отвечает наименьшему для данного вида колебаний отношению \bar{l}/\bar{L} .

Заметим, что к приведенным здесь численным значениям следует подходить с некоторой осторожностью по следующим причинам. Во-первых, в режиме самовозбуждения система сама «выбирает» частоту генерации, которая, вообще говоря, может оказаться такой, что будут несправедливы использованные предположения (слабость взаимодействия, отсутствие вязкости и др.). Во-вторых, из-за сильной собственной неустойчивости в потоке характерный пространственный масштаб нарастания волнового поля в системе много больше ее длины ($1/k \ll L, l$) и, следовательно, поток на вход пространства взаимодействия поступает уже с модуляцией. Поэтому полностью корректное рассмотрение требует решения задачи о вводе потока в пространство взаимодействия. Характерно, что сходная проблема возникает и в теории приборов типа М [14]. Эти обстоятельства, однако, не скажутся на принципиальной стороне протекающих процессов и могут лишь несколько изменить конкретные численные значения рассчитываемых величин.

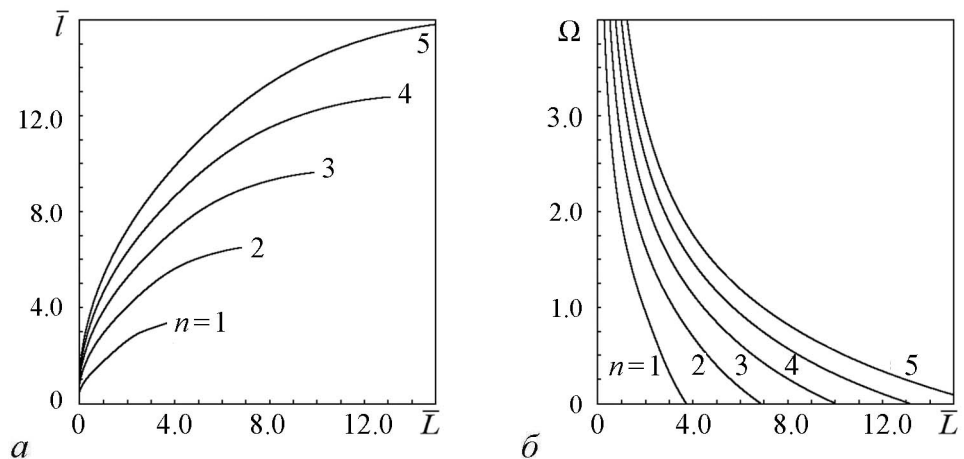


Рис. 10. Условия самовозбуждения на встречной волне

Заключение

При взаимодействии разрывного гидродинамического потока с периодической структурой реализуется эффективное усиление поверхностной волны. В таких системах возможно полное подавление поверхностной волны, наблюдающееся при определенных значениях параметров – толщины слоя покоящейся жидкости и расстояния от точки ввода потока в систему. Одной из причин, приводящих к самовозбуждению, является взаимодействие течения со встречной волной в структуре, которое из-за сильной собственной неустойчивости в потоке оказывается существенным.

Работа С.П. Кузнецова поддержана грантом РФФ № 15-12-20035.

Библиографический список

1. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Трубецков Д.И. Аналогия в задачах о взаимодействии электронных и гидродинамических потоков с полями резонаторов и периодических структур. Часть 1 // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2015. Т. 23, № 5. С. 5–40.
2. Пирс Дж. Лампа с бегущей волной. М.: Сов. Радио, 1952. 230 с.
3. Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М.: Сов. Радио, 1973. 400 с.
4. Шевчик В.Н., Трубецков Д.И. Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М.: Сов. Радио, 1970. 584 с.
5. Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. Т. 1. М.: Физматлит, 2003. 496 с.
6. Гилмор-мл А. Лампы с бегущей волной. М.: Техносфера, 2013. 616 с.
7. Трубецков Д.И., Титов А.В., Фунтов А.А. Об интерференционном усилении в электронно-волновой лампе (линейная теория) // Письма в ЖТФ. 2013. Вып. 21. С. 86–94.
8. Годин О.А., Мохов А.В. Усиление звука при резонансном взаимодействии с потоком жидкости // Акустический журнал. 1991. Т. 37, № 1. С. 58–64.
9. Андронов А.А., Фабрикант А.Л. Затухание Ландау, ветровые волны и свисток // В кн. Нелинейные волны. М.: Наука, 1979. С. 68–104.
10. Андронов А.А., Фабрикант А.Л. К теории аэродинамического самовозбуждения звука: усиление поверхностных волн // Акустический журнал. 1980. Т. 26, № 5. С. 655–662.
11. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Физическая кинетика // Теоретическая физика. М.: Физматлит. 2001. Т.10. 536 с.
13. Кузнецов С.П. О численном моделировании усиления шума в широкополосной ЛБВ // В кн. Лекции по электронике СВЧ и радиофизике. Саратов: СГУ. 1981. Кн. 5. С. 165–176.

14. *Гаврилов М.В., Трубецков Д.И.* Влияние внешнего высокочастотного поля на поведение пучка в пушке Кайно. (Линейная теория с учетом виртуального катода) // В кн. Лекции по электронике СВЧ. Саратов: СГУ. 1974. Кн. 5. С. 184–192.
15. Электроника ламп с обратной волной / Ред. В.Н. Шевчик и Д.И. Трубецков. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1975. 195 с.

Поступила в редакцию 22.03.2016
После доработки 15.04.2016

ANALOGY IN INTERACTIONS OF ELECTRONIC BEAMS AND HYDRODYNAMIC FLOWS WITH FIELDS OF RESONATORS AND PERIODIC STRUCTURES

Part 2. Self-excitation, amplification and dip conditions

A. P. Kuznetsov^{1,2}, S. P. Kuznetsov^{2,3}

¹ National Research Saratov State University
Russia, 410012 Saratov, Astrahanskaya, 83

²Kotel'nikov Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch
Russia, 410019 Saratov, Zelenaya, 38

³Udmurt State University
Russia, 426034 Izhevsk, Universitetskaya, 1
E-mail: apkuz@rambler.ru, spkuz@yandex.ru

The subject of this research concerns the problem of excitation of acoustic oscillations and waves in the flow of fluid interacting with resonators and periodic structures, in relation to which application of methods and theoretical apparatus similar to those developed in the electronics and electrodynamics in the context of the excitation of electromagnetic oscillations and waves is productive. The proposed approach is based on reduction of the hydrodynamic equations of compressible fluid to a form similar to the Maxwell equations with subsequent developing theory of excitation of resonators and waveguides as discussed in the previous part of this article. By analogy with the theory of microwave electronic devices with crossed fields, basing on the self-consistent theory, we study the interaction of vortex currents with a periodic structure in the case of strong own instability. A linear theory of the acoustic amplifier is developed, in which the interaction is weak, and the flow at the input of the interaction space is not perturbed. The possibility of a full suppression of the surface waves in certain modes of functioning of such a system is noted. It has been shown that efficient coupling of the flow with a backward wave is possible in the structure, and conditions for the self-excitation of the counter-directed wave are found. It can be concluded that the analogy between the hydrodynamic problem and the processes in electronic devices with crossed fields is of considerable interest from the point of view of describing the phenomena of excitation of acoustic oscillations and waves by the vortex currents and evaluating the prospects for their practical use. Special attention

should be put for self-excitation of oscillations due to the interaction of the flow with the counter-directed waves, similar to the effect occurring in the backward-wave tubes.

Keywords: Electron beam, hydrodynamic flow, vortices, periodic structures, theory of excitation, dip conditions, signal self-excitation.

DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-2-5-26

Paper reference: Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P. Analogy in interactions of electronic beams and hydrodynamic flows with fields of resonators and periodic structures. Part 2. Self-excitation, amplification and dip conditions // *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2016. Vol. 24, № 2. P. 5–26.

References

1. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Trubetskov D.I.* Analogy in interactions of electronic beams and hydrodynamic flows with fields of resonators and periodic structures. Part 1 // *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2015. Vol. 23, № 5. P. 5–40 (in Russian).
2. *Pierce J.R.* Traveling-Wave Tubes // *Bell System Technical Journal*. 1950. Vol. 29, № 3. P. 390–460.
3. *Weinstein L.A., Solntsev V.A.* Lectures on Microwave Electronics. Moscow: «Sov. Radio», 1973. 400 p. (in Russian).
4. *Shevchik V.N., Trubetskov D.I.* Analytical Methods of Calculation in Microwave Electronics. Moscow: «Sov. Radio», 1970. 584 p. (in Russian).
5. *Trubetskov D.I., Hramov A.E.* Lectures on Microwave Electronics for Physicists. Vol. 1. Moscow: «Fizmatlit», 2003 (in Russian).
6. *Gilmour A.S.* Principles of Traveling Wave Tubes. Artech House, 1994. 625 p.
7. *Trubetskov D.I., Titov A.V., and Funtov A.A.* Interference amplification in an electron-wave tube (Linear theory) // *Technical Physics Letters*. 2013. Vol. 39, № 11. P. 977–981.
8. *Godin O.A., Mokhov A.V.* Amplification of sound in resonance interaction with fluid flow // *Soviet physics. Acoustics*. 1991. Vol. 37, № 1. P. 29–32.
9. *Andronov A.A., Fabrikant A.L.* Landau damping, wind waves and whistle // *Nonlinear Waves*. Moscow: «Nauka», 1979. P. 68–104 (in Russian).
10. *Andronov A.A., Fabrikant A.L.* Theory of the aerodynamic self-excitation of sound Amplification of surface waves // *Soviet Physics. Acoustics*. 1980. Vol. 26. P. 370–374.
11. *Rabinovich M.I., Trubetskov D.I.* Oscillations and Waves in Linear and Nonlinear Systems. Kluwer Academic Publisher, 1989. 578 p.
12. *Lifshitz E.M., Pitaevskii L.P.* Physical Kinetics. Course of Theoretical Physics. Vol. 10. Oxford: Pergamon Press, 1981. 452 p.
13. *Kuznetsov S.P.* Numerical simulation of noise amplification in broadband TWT // *Lectures on UHF Electronics and Radio-physics*. Saratov State University. 1981. Vol. 5. P. 165–176 (in Russian).

14. *Gavrilov M.V., Trubetskov D.I.* Effect of external high-frequency field on the behavior of the beam in the Caino gun: Linear theory accounting the virtual cathode // Lectures on UHF Electronics. Saratov State University, 1974. Vol. 5. P. 184–192 (in Russian).
15. Electronics of Backward-Wave Tubes / Eds V.N. Shevchik, D.I. Trubetskov. Saratov: Saratov University Publ., 1975. 195 p. (in Russian).



Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, заведующий базовой кафедрой динамических систем Саратовского госуниверситета. Имеет звание профессора. Область научных интересов: динамические системы, теория бифуркаций, синхронизация, квазипериодические колебания и их приложения. Лауреат гранта Президента Российской Федерации, Соросовский профессор (2000, 2001). Опубликовал более 100 статей в российских и международных научных журналах. Научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика». Автор оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов СГУ и Лицея прикладных наук. Автор и соавтор 12 монографий, учебников и задачников по нелинейной динамике, теории колебаний и физике. Среди них: «Физика квазипериодических колебаний», «Нелинейность: от колебаний к хаосу», «Нелинейные колебания», «Линейные колебания и волны (сборник задач) и др.

410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38
 Саратовский филиал ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН
 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
 www.sgtnd.narod.ru
 E-mail: apkuz@rambler.ru



Кузнецов Сергей Петрович – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). Сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН (с 1988). Руководит лабораторией теоретической нелинейной динамики. Главный научный сотрудник лаборатории нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения Удмуртского государственного университета. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиофизика. Профессор базовой кафедры динамических систем СГУ. Автор монографии «Динамический хаос и гиперболические аттракторы: От математики к физике», монографии «Hyperbolic Chaos. A Physicist's View», монографии «Strange Nonchaotic Attractors» (совместно с А. Пиковским и У. Фойдель), а также учебно-научных монографий «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 200 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под его руководством защищены одиннадцать кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994–1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
 Саратовский филиал ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН
 426034 Ижевск, ул. Университетская, 1
 Удмуртский государственный университет
 E-mail: spkuz@yandex.ru



ДИАГНОСТИКА И ИЗМЕРЕНИЕ ХАОТИЧЕСКОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ В ПРИСУТСТВИИ ПОМЕХ

А. В. Шабунин

Национальный исследовательский Саратовский государственный университет
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
E-mail: shabuninav@info.sgu.ru

Работа посвящена методам диагностики и количественного анализа хаотической синхронизации в присутствии шума. В ней проводится анализ влияния аддитивного белого гауссового шума на точность измерения синхронизации хаоса и предлагается модификация стандартного алгоритма, существенно уменьшающая чувствительность результата измерения к действию помехи.

Актуальность исследования обусловлена как его фундаментальным значением для выявления общих закономерностей хаотической синхронизации, так и возможностью практических приложений для диагностики взаимосвязи между колебательными процессами в реальных системах разной природы. Особенно важным является приложение в биологических и медицинских исследованиях, при которых уровень шумов зачастую является большим и помехи неустранимы. Возможность измерить степень согласованности в колебаниях разных биологических образцов позволяет выявлять скрытые механизмы, действующие между ними, и тем самым поставить правильный диагноз.

Исследования проводятся методом численного (компьютерного) эксперимента. В качестве модели выбрана система двух однонаправленно связанных логистических отображений. Она является, с одной стороны максимально простой, с другой стороны позволяет исследовать на своем примере динамику взаимодействующих автоколебательных систем с бифуркациями удвоения периода.

Проведенные исследования показали, что стандартный корреляционный метод измерения синхронизации хаоса может быть использован лишь при очень малой величине шума. Предложенный в работе алгоритм, основанный на введении временной задержки между оцениваемыми сигналами, позволяет существенно улучшить точность измерений в условиях сильного шума. Он может быть применим для измерения хаотической синхронизации для широкого класса динамических систем, в тех случаях, когда статистические свойства хаотических аттракторов остаются близкими, как в режиме синхронизации, так и вне его.

Ключевые слова: Хаотические колебания, синхронизация хаоса, измерение синхронизации.

DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-2-27-40

Ссылка на статью: Шабунин А.В. Диагностика и измерение хаотической синхронизации в присутствии помех // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 2. С. 27–40.

Введение

Полная синхронизация хаоса – явление точной подстройки временных реализаций взаимодействующих хаотических осцилляторов: $x_1(t) = x_2(t)$. Оно было впервые обнаружено и описано в [1], а затем исследовано во множестве работ [2–4]. Наряду с полной синхронизацией существуют и другие виды хаотической синхронизации: обобщенной [5], фазовой [6] и частотной [7–9], lag-синхронизации [10]. Для каждой из них существуют свои способы диагностирования. Разработаны также универсальные методы, применимые к разным видам синхронизации [11–18].

Измерение степени синхронизма хаотических колебаний имеет важное фундаментальное значение, поскольку позволяет выявить «внутренние» изменения, происходящие в структуре аттракторов, соответствующие колебаниям взаимодействующих под-систем, которые не всегда возможно увидеть по временным реализациям и фазовым портретам. Кроме того, данные методы имеют и существенное прикладное значение, как в технике, так и в таких науках, как физика, химия, биология, экономика и т.п., поскольку они позволяют диагностировать взаимосвязь между колебательными процессами, и тем самым выявить взаимозависимость между генерирующими их системами. На практике особенно важно иметь возможность проводить такие измерения в тех случаях, когда динамика «замаскирована» шумом. Такая ситуация встречается в технике, но особенно актуальна в биологических и медицинских исследованиях, при которых уровень шумов зачастую является большим и помехи неустраняемы. Возможность измерить степень согласованности в колебаниях разных биологических образцов позволяет выявлять скрытые механизмы, действующие между ними, и тем самым поставить правильный диагноз.

Таким образом, необходим простой и надежный метод для измерения хаотической синхронизаций, умеющий работать в условиях помех. Большинство из описанных выше алгоритмов измерения были протестированы и доказали свою работоспособность в условиях компьютерного эксперимента или специальных аналоговых моделей, когда шум либо исчезающе мал, либо полностью отсутствует, а сами наблюдаемые сигналы идентичны «внутренними» переменными динамических систем. Эти условия, однако, не выполнимы для большинства практических измерений, поэтому работоспособность любого из указанных алгоритмов требует дополнительных исследований их устойчивости к действию шума большой амплитуды, а также к встречающимся на практике искажениям сигналов: частотным, фазовым, нелинейным и т.п.

В настоящей работе проводится анализ устойчивости одного из методов диагностики и количественного измерения синхронизации хаоса – корреляционного – к действию аддитивного белого гауссова шума (АБГШ). С целью повышения устойчивости к шуму предлагается модификация метода, основанная на различии в характере затухания автокорреляционных функций для шума и хаотического сигнала. Тестирование модифицированного алгоритма проводится с помощью численных экспериментов с моделью однонаправленно связанных хаотических отображений.

1. Исследуемая система и режим синхронизации хаоса

В качестве простой системы, демонстрирующей режим синхронизации хаоса в широкой области параметров, выберем модель двух связанных логистических

отображения с однонаправленной связью

$$x(n+1) = f(x(n)), \quad (1)$$

$$y(n+1) = f(y(n) + \gamma(x(n) - y(n))),$$

где x и y – скалярные динамические переменные, задающие состояния первой и второй подсистем; n – дискретное время; $f(x) = \lambda x(1-x)$ – функция, задающая динамику одиночного отображения; $\lambda \geq 0$ – его параметр. Первое и второе уравнения обозначают управляющую (ведущую) и управляемую (ведомую) системы, соответственно. Связь устанавливается посредством включения переменной ведущей системы в переменную ведомой; ее интенсивность задается параметром $\gamma \geq 0$. Данный вид связи называется *внутренней* связью. Он использовался в ряде работ для моделирования систем скрытой передачи информации посредством хаотической несущей [19, 20].

Динамика системы (1) хорошо изучена и описана в литературе (см., например, [21]). При увеличении параметра λ в фазовом пространстве системы наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода периодических орбит, который ведет к формированию хаотических аттракторов. Последние, в зависимости от параметра связи γ , могут соответствовать как режимам синхронизации хаоса, так и несинхронным колебаниям. Очевидно, что при $\gamma = 1$ две системы гарантированно синхронизированы ($x_{n+1} = y_{n+1}$), тогда как при $\gamma = 0$ – ведут себя независимо друг от друга.

В нашем исследовании выберем $\lambda = 3.7$, что соответствует режиму развитого одноленточного хаоса в одиночном отображении, а следовательно и в связанных отображениях (1) при полной синхронизации. Как описано в работе [21], полная синхронизация достигается при достаточно сильной связи ($\gamma \geq 0.3$) между подсистемами. Перекрестный фазовый портрет в этом случае выглядит как прямая линия (рис. 1, а). При $0.15 \leq \gamma < 0.3$ в системе наблюдается режим частичной (перемежающейся) синхронизации, называемый также *пузырением хаотического аттрактора*, при котором, наряду с длительными интервалами почти синхронного поведения наблюдаются короткие «всплески» несинхронной динамики. Фазовый портрет, соответствующей зоне перемежающейся синхронизации построен на рис. 1, б. С уменьшением связи интервалы синхронизации становятся все более короткими и все чаще

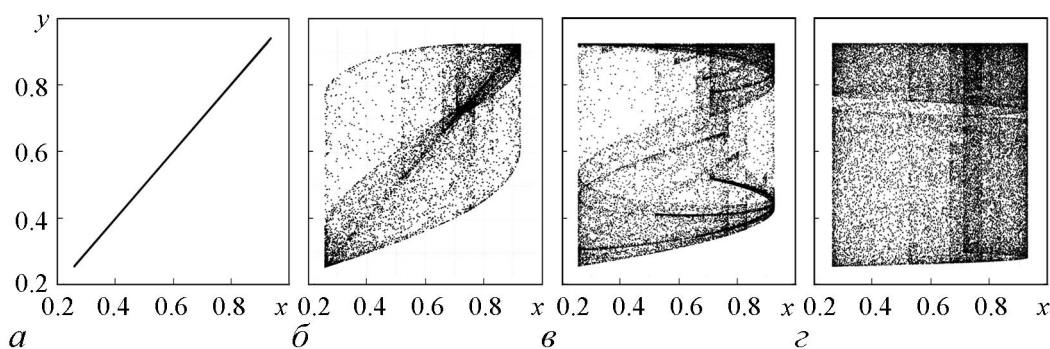


Рис. 1. Перекрестный фазовый портрет системы (1) при различных значениях интенсивности внутренней связи γ : 0.31 (а), 0.28 (б), 0.14 (в), 0.02 (г)

прерываются несинхронными колебаниями, что приводит к уменьшению синхронизации. При малой связи траектория практически не посещает инвариантное подпространство $x = y$, хотя фазовый портрет демонстрирует определенную внутреннюю структуру, что свидетельствует о более сложной взаимосвязи между временными реализациями $x(n)$ и $y(n)$ (рис. 1, в). Наконец, при $\gamma \simeq 0$ режим синхронизации визуально перестает диагностироваться (рис. 1, з).

2. Количественный анализ синхронизации хаоса

Для количественного анализа степени синхронизма между подсистемами x и y можно использовать различные методы: функцию когерентности [18], количество информации [16, 17], «расстояние» между сигналами $\|x - y\|$ и другие. Классическим алгоритмом, позволяющим оценивать степень сходства между временными рядами, является расчет коэффициента взаимной корреляции k между сигналами x и y

$$k(x, y) = \frac{|K_{xy}(0)|}{\sqrt{D_x D_y}}. \quad (2)$$

Здесь $K_{xy}(n)$ – взаимная корреляция между сигналами x и y , D_x и D_y – средние мощности (дисперсии) соответствующих колебаний. Коэффициент корреляции k принимает значения от нуля до единицы. При этом, $k = 1$ соответствует полной синхронизации хаотических колебаний, в то время как $k = 0$ – отсутствию синхронизации.

Рассмотрим возможность использования коэффициента корреляции (2) для количественного оценивания синхронизации между колебаниями первого и второго отображения системы (1). Для этого построим зависимость k от коэффициента связи γ и сопоставим полученную зависимость с наблюдаемыми

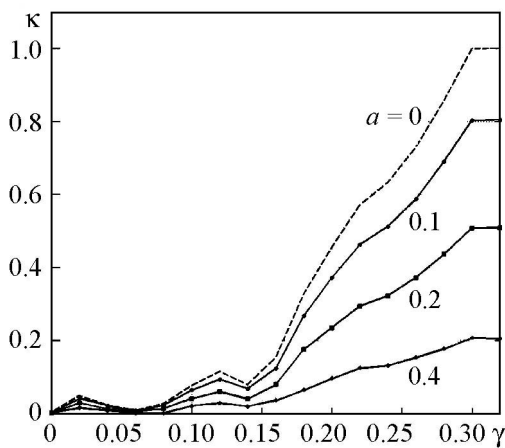


Рис. 2. График зависимости коэффициента взаимной корреляции $k(\gamma)$ от уровня связи двух систем γ при разных значениях интенсивности шума a : 0 (штриховая линия), 0.1 (●), 0.2 (■) и 0.4 (◆)

аттракторами. Результат расчета $k(\gamma)$ приведен на рис. 2 в виде штриховой линии. Из графика видно, что значения k соответствуют явлениям, наблюдаемым при помощи фазовых портретов: коэффициент корреляции равен 1 в области полной синхронизации при $\gamma > 0.3$ (см. рис. 1, а), монотонно и почти линейно затухает до значений $k \simeq 0.06$ в области перемежающейся синхронизации при $0.14 < \gamma < 0.3$ (рис. 1, б), а затем медленно меняется до нуля при $\gamma \rightarrow 0$ (рис. 1, в, з). Таким образом, при отсутствии шума и других искажений наблюдаемых переменных значение коэффициента корреляции достаточно точно диагностирует эффект синхронизации и позволяет его количественно измерить.

3. Влияние шума на точность измерения синхронизации

Рассмотрим вопрос диагностики и количественной оценки степени синхронизации в условиях белого гауссова шума, сопутствующего процессу измерения. При наличии аддитивного шума точные значения переменных x и y неизвестны. Вместо них доступными для наблюдения являются новые переменные

$$\begin{aligned} u(n) &= x(n) + a\xi_x(n), \\ v(n) &= y(n) + a\xi_y(n), \end{aligned} \quad (3)$$

где ξ_x и ξ_y – некоррелированные источники белого гауссового шума с нулевым средним и единичной дисперсией, a – параметр интенсивности шума.

Очевидно, что наличие шума существенно ухудшает возможность визуального диагностирования синхронизации. Например, на рис. 3, *a* показан перекрестный фазовый портрет синхронных колебаний при тех же параметрах, что и аттрактор на рис. 1, *a*, но при добавлении шума с $a = 0.1$. В том случае, когда шум накладывается на собственную динамику системы (1) в режиме перемежающейся синхронизации, визуальное диагностирование синхронизации становится еще более затруднительным (рис. 3, *б*).

Рассмотрим насколько изменится вид зависимости $\kappa(\gamma)$, при добавлении шума. Для этого рассчитаем $\kappa(\gamma)$ по формуле (2), где вместо x и y используются переменные u и v , и отобразим результаты расчета на том же рис. 2, что и для «чистой» системы. Как видно из рисунка, все зависимости качественно подобны графику, построенному для исходной системы, но понижаются с ростом интенсивности шума. Таким образом, рост интенсивности аддитивной помехи ведет к уменьшению измеренной оценки степени синхронизации. Можно сказать, что шум «маскирует» эффект синхронизации.

Проанализируем эффект маскировки синхронизации за счет АБГШ. Так как источники шума не коррелируют ни между собой, ни с сигналами $x(n)$ и $y(n)$, то взаимная корреляция между сигналами не изменится: $K_{uv}(n) = K_{xy}(n)$, в то время

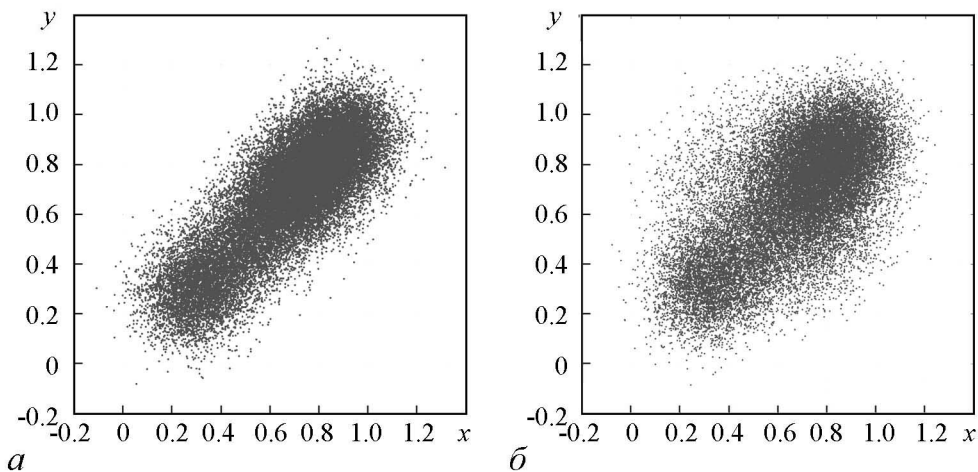


Рис. 3. Фазовый портрет в условиях действия помех с интенсивностью $a = 0.1$: в режиме полной синхронизации при $\gamma = 0.31$ (*a*) и в режиме перемежающейся синхронизации при $\gamma = 0.27$ (*б*)

как мощности сигналов увеличатся на величину мощности шума: $D_{u,v} = D_{x,y} + a^2$. Учитывая, что в рассматриваемом случае синхронизации одинаковых осцилляторов мощности сигналов подсистем почти одинаковы ($D_x \simeq D_y$), получим оценку коэффициента корреляции по зашумленным сигналам

$$\kappa(u, v) \simeq \frac{|K_{xy}(0)|}{D_x + a^2}. \quad (4)$$

Сопоставив (4) с (2), получим

$$\kappa(u, v) \simeq \kappa(x, y) \frac{1}{1 + NSR}, \quad (5)$$

где $NSR = a^2/D_x$ – отношение шума к сигналу (noise to signal ratio, NSR). Эта величина характеризует степень зашумленности сигналов в радиофизике и радиоэлектронике. Из формулы (5) видно, что аддитивный шум приводит к систематической погрешности, уменьшающей измеренную степень синхронизации по сравнению с истинной в $1 + NSR$ раз. Введем абсолютную и относительную погрешности измерений: $\Delta\kappa = \kappa(u, v) - \kappa(x, y)$ и $\eta = |\Delta\kappa|/\kappa$. Из формулы (5) получаем

$$\Delta\kappa = -\kappa \frac{NSR}{1 + NSR}, \quad (6)$$

$$\eta = \frac{NSR}{1 + NSR}. \quad (7)$$

Результаты счета полностью подтверждают предсказываемую выражением (7) оценку. На рис. 4 представлены результаты экспериментальных измерений относительной ошибки η для разных значений параметра связи γ , а также график теоретической зависимости (7). Сопоставление теории и эксперимента показывает, что формула (7) дает хорошую количественную оценку для погрешности измерения в широком

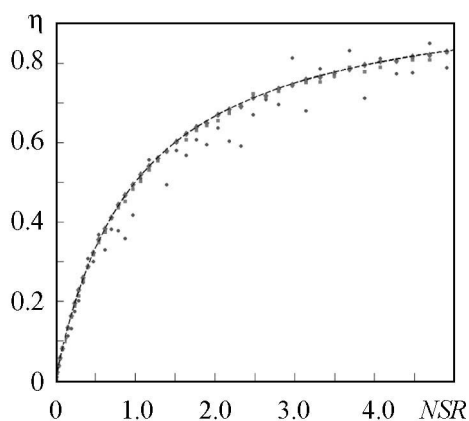


Рис. 4. Относительная погрешность расчета синхронизации между сигналами x и y в зависимости от коэффициента «шум–сигнал» для значений параметра связи γ : 0.1 (●), 0.2 (■), 0.3 (◆); штриховая линия – теоретическая зависимость, рассчитанная по формуле (7)

диапазоне значений интенсивности шума и параметра связи γ . Из нее также следует, что корреляционный метод можно использовать для определения степени синхронизации только при $NSR \ll 1$; при этом относительная погрешность расчета почти равна отношению сигнал шума и линейно растет вместе с его ростом: $\eta \simeq NSR$.

Таким образом, корреляционный метод не может быть использован для расчета уровня синхронизации, если интенсивность шума сопоставима с величиной амплитуды «внутренних» переменных системы. Попытаемся модифицировать данный алгоритм для повышения точности расчета синхронизации по зашумленным временным рядам.

4. Модификация алгоритма для повышения точности расчета синхронизации в условиях АБГШ

Для уменьшения влияния внешнего шума на результат расчета воспользуемся различием между белым шумом и детерминированным хаотическим сигналом. Несмотря на то, что временные реализации $x(n)$ и $y(n)$ при выбранном значении $\lambda = 3.7$ представляют собой случайные сигналы и внешне напоминают шум, их детерминированная природа проявляется в достаточно медленном спадании модуля автокорреляционной функции $|K(\Delta n)| = |\langle \tilde{x}(n)\tilde{x}(n - \Delta n) \rangle|$ со временем. Так как динамическая система на протяжении более или менее длительного интервала времени «помнит» свое начальное состояние, то $|K|$ в течение этого времени остается достаточно большим. Несомненно, что интервал корреляции для разных систем и разных колебательных режимов будет различным, но во всех случаях он будет иметь конечное значение. В то же время «истинно шумовой сигнал» (белый шум), как известно, характеризуется нулевым интервалом корреляции. Данное различие можно использовать для уменьшения влияния шума на величину рассчитанной корреляционным методом степени синхронизации. Действительно, если в формуле (2) использовать временные реализации u и v в моменты времени, выбранные с лагом $n_0 > 0$, соответствующим области сильной корреляции для сигналов и слабой корреляции для шума, «шумовые добавки» в формуле (2) исчезнут.

Изменим алгоритм расчета величины синхронизации, введя в формулу для расчета коэффициентов корреляции (2) временной лаг n_0

$$\kappa_{n_0}(u, v) = \frac{|K_{uv}(n_0)|}{\sqrt{|K_u(n_0)||K_v(n_0)|}}, \quad (8)$$

где κ_{n_0} – оценка величины синхронизации, полученная с использованием временного лага n_0 . Учитывая, что $K_{\xi}(n_0 > 0) = 0$, получим

$$\kappa_{n_0}(u, v) = \left| \frac{K_{xy}(n_0)}{K_x(n_0)} \right|. \quad (9)$$

Здесь предполагается, что корреляционные свойства обоих сигналов близки друг к другу ($K_x \simeq K_y$).

Как мы видим из (9), амплитуда шума a «ушла» из расчетной формулы для синхронизации. Определим, насколько формула (9) близка по своим значениям к исходной формуле (2), используя линейное приближение функций K_{xy} и K_x по n_0

$$|K_{xy}(n_0)| \simeq |K_{xy}(0)|(1 - \alpha n_0), \quad |K_x(n_0)| \simeq K_x(0)(1 - \beta n_0),$$

где $\alpha = \partial |K_x(0)| / \partial n$ и $\beta = \partial |K_{xy}(0)| / \partial n$ – некоторые положительные константы, характеризующие скорость затухания соответствующих корреляционных функций. Поскольку $\kappa(x, y) = |K_{xy}(0)| / K_x(0)$, получим следующую оценку для κ_{n_0} :

$$\kappa_{n_0}(u, v) \simeq \kappa(x, y) \frac{1 - \alpha n_0}{1 - \beta n_0},$$

откуда следует выражение для относительной погрешности η

$$\eta(n_0) \simeq |(\alpha - \beta)n_0|. \quad (10)$$

Для систем с непрерывным временем значение лага можно сделать сколь угодно малым, сведя относительную ошибку к нулю и, соответственно, сведя к минимуму систематическую ошибку, вызванную введением временного лага n_0 . Для систем с дискретным временем это не так, поскольку существует минимальное значение лага n_0 , равное единице. Поэтому, для дискретных отображений формула (9) будет давать значения, близкие к рассчитываемым по формуле (2), только в том случае, когда скорости спада взаимной и собственной корреляционных функций близки друг к другу, что означает сходство собственного и взаимного спектров мощности. Тем не менее, в рассматриваемом случае синхронизации близких по свойствам (или идентичных) подсистем указанное свойство будет, по всей видимости, иметь место, поскольку типы колебаний в обоих осцилляторах одинаковы.

5. Расчет синхронизации при помощи модифицированного метода

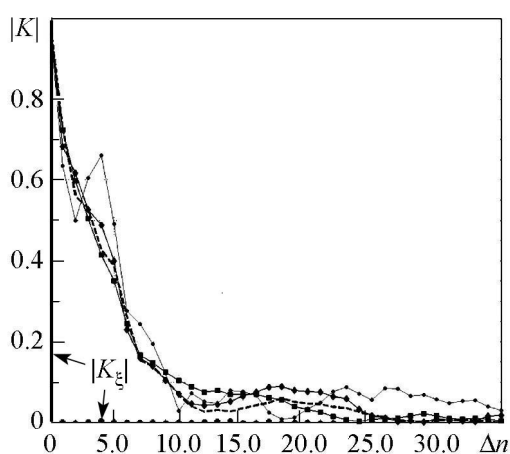


Рис. 5. Графики модуля взаимной корреляции $|K_{xy}|$ между сигналами x и y в зависимости от интервала времени Δn для разных значений параметра связи γ : 0.2 (■), 0.15 (◆) и 0.1 (*); модуль автокорреляционной функции $|K_x|$ сигнала x (штриховая линия); модуль автокорреляционной функции $|K_\xi|$ используемого источника шума (линейчатые импульсы)

Применим описанный выше алгоритм для расчета синхронизации в рассматриваемой нами системе (1) при выбранном значении параметра $\lambda = 3.7$. Прежде всего рассмотрим поведение модуля автокорреляционной функции $|K_x(\Delta n)|$ и взаимной корреляции $|K_{xy}(\Delta n)|$ для разных γ , чтобы оценить насколько быстро они спадают со временем. Результаты расчета приведены на рис. 5, где $|K_x(\Delta n)|$ изображена в виде штриховой линии, а $|K_{xy}(\Delta n)|$ — в виде сплошных кривых, отмеченных разными маркерами для разных значений параметра γ . На том же рисунке изображен график модуля автокорреляционной функции для используемого шумового сигнала ξ_x , построенный в виде вертикальных линий. Из сопоставления графиков следует, что:

- значения модулей автокорреляционных функций сигнала остаются существенно большими нуля при $\Delta n \leq 10$, в то время как автокорреляционная функция шумового сигнала $K_\xi(\Delta n)$ спадает к почти нулевым значениям уже при $\Delta n = 1$;
- скорости уменьшения модулей автокорреляционной функции и взаимных корреляций близки друг к другу при небольших Δn .

Таким образом, сделанные выше предположения о близости скоростей спада корреляционных функций при малых Δn подтверждаются для рассматриваемой системы в численном эксперименте. Соответственно, можно ожидать, что при минимально возможном $n_0 = 1$, модифицированная формула (8) даст близкие к (2) значения. Проверим так ли это. Пересчитаем зависимость уровня синхронизации от параметра γ с использованием формулы (9) вместо формулы (2) и сравним полученный

график с изображенным на рис. 2. Результаты расчетов приведены на рис. 6: график $\kappa_1(\gamma)$ при отсутствии шума в виде сплошной кривой, а исходный график $\kappa(\gamma)$ – в виде штриховой линии. Из их сравнения видно, что обе формулы дают близкие результаты практически во всей области параметра γ , то есть систематическая погрешность, вызванная модификацией алгоритма незначительна.

Рассмотрим теперь, как модифицированный алгоритм работает в условиях шума. Добавим к наблюдаемым сигналам x и y шум и сделаем те же расчеты. Результаты приведены на рис. 6. Сравнив данные зависимости с соответствующими графиками на рис. 2, обнаружим, что модификация алгоритма привела к существенному сближению результатов расчетов зашумленных сигналов с результатами расчетов характеристик незашумленных сигналов. Например, при $a = 0.4$ первоначальный алгоритм давал многократное расхождение рассчитанного значения с истинным, что не позволяло использовать формулу (2) в условиях данного шума, в то время как расчет по формуле (8) дает значения, расходящиеся с истинными в пределах лишь нескольких процентов. Даже при сильном шуме ($a = 0.7$), как следует из рисунка, модифицированный алгоритм (8) можно использовать для оценки степени синхронизации.

Рассчитаем погрешность расчета для модифицированного алгоритма в зависимости от параметра связи и величины шума. Для этого определим среднее значение ошибки расчета $\langle \Delta \kappa \rangle = \langle \kappa_1 - \kappa \rangle$, где κ_1 – рассчитанное по формуле (8) значение синхронизации в условиях АБГШ, а κ – истинное значение, рассчитанное по формуле (2) и при отсутствии шума. Данная величина определяет систематическую ошибку, вносимую модификацией алгоритма. Кроме этого, подсчитаем также среднеквадратичное отклонение погрешности расчета $\sigma = \sqrt{\langle (\kappa_1 - \kappa)^2 \rangle}$, которая характеризует несистематическую погрешность, появляющуюся за счет шума. Результаты обоих расчетов отображены на рис. 7, а и б, соответственно. Как следует из приведенных графиков, систематическая ошибка измерений имеет место, но ее величина незначительна во всем диапазоне параметра связи. Значение среднеквадратичного отклонения σ слабо зависит от параметра связи и, как это и следовало ожидать, растет с ростом интенсивности шума.

Так как погрешность расчета, как это видно из рис. 7, а, слабо зависит от связи, а следовательно, и от степени синхронизации между подсистемами, относительная точность измерения должна существенно различаться для случаев сильной и слабой синхронизации. Для того, чтобы убедиться в этом, рассчитаем относительную погрешность расчета η в зависимости от интенсивности шума и сопоставим ее с погрешностью, подсчитанной ранее по формуле (7). Результаты расчета показаны на рис. 8, а для нескольких значений параметра связи γ .

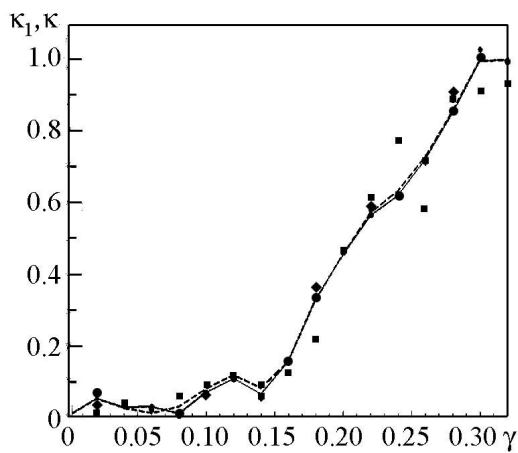


Рис. 6. Уровень синхронизации $\kappa_1(\gamma)$, рассчитанный по модифицированной формуле (8) при следующих значениях a : 0 (сплошная линия), 0.1 (●), 0.4 (*) и 0.7 (■); штриховой линией изображена зависимость $\kappa(\gamma)$, рассчитанная по исходной формуле (2)

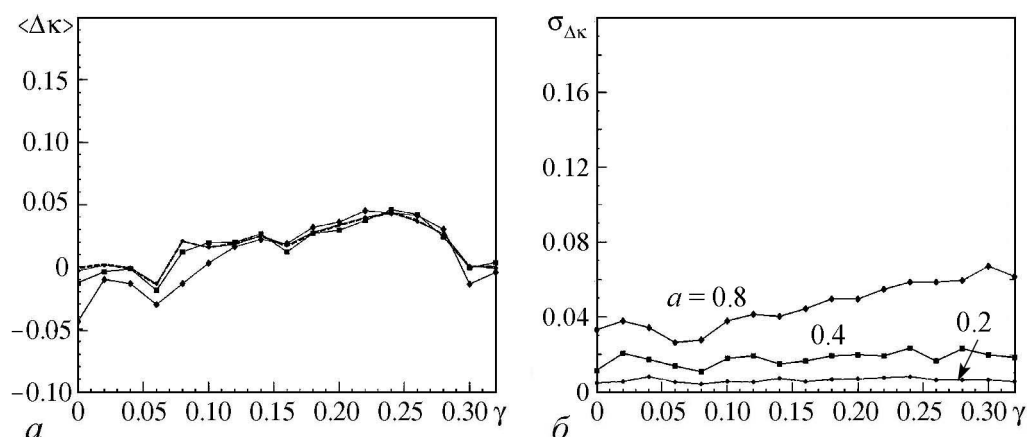


Рис. 7. Зависимость средней погрешности расчета синхронизации $\langle \Delta \kappa \rangle$ (а) и ее среднеквадратичного отклонения $\sigma_{\Delta \kappa}$ (б) от параметра связи при разных амплитудах шума a : 0.2 (●), 0.4 (■) и 0.8 (◆). Штриховой линией на рис.7,а показана систематическая погрешность метода при отсутствии шума

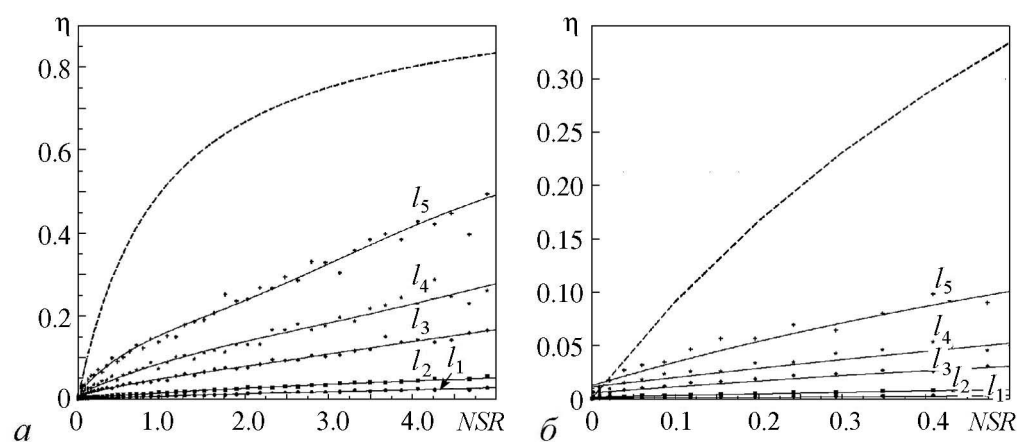


Рис. 8. а – относительная погрешность расчета синхронизации по формуле (8) в зависимости от NSR для различных значений γ : 0.3 (l_1), 0.2 (l_2), 0.15 (l_3), 0.1 (l_4), 0.02 (l_5), теоретическая кривая (7) изображена штриховой линией; б – увеличенный фрагмент рис. 8, а

Как видно из графика, при существенном шуме, сопоставимом с величиной сигнала, относительная ошибка измерений по формуле (8) остается значительно меньше такой ошибки при использовании исходной формулы (2), причем это характерно как для сильной, так и достаточно слабой связи. В то же время при исчезающе слабом шуме ($NSR < 0.02$) модифицированный алгоритм дает большую погрешность расчета, чем исходный. В этом случае применять модификацию алгоритма нет необходимости. Данный вывод подтверждают результаты, приведенные на рис. 8, б (увеличенный фрагмент рис. 8, а, содержащий диапазон малых NSR и выполненный в большем масштабе). Из анализа графиков также можно заключить, что при сильной и средней синхронизации ($\gamma > 0.15$) модифицированный алгоритм позволяет оценить уровень синхронизации с относительной погрешностью в 2–3% вплоть до весьма существенных величин шума ($SNR \sim 5$). Однако в области слабой синхронизации, как и следовало ожидать, точность расчета падает. В этом случае и формула (2), и ее модифицированный вариант (8) дают результаты с относительной ошибкой, сопоставимой с самой измеряемой величиной.

Выводы

Проведенные исследования устойчивости корреляционного метода расчета синхронизации двух хаотических систем показали, что метод дает достоверные результаты лишь при исчезающе малом шуме; рост аддитивного шума ведет к уменьшению рассчитанного уровня синхронизации с относительной погрешностью, описываемой формулой (7). Предложенный в работе алгоритм, основанный на введении временной задержки между оцениваемыми сигналами, позволяет существенно улучшить точность расчета в условиях сильного шума, хотя и дает небольшую систематическую погрешность, ухудшающую точность расчета при отсутствии помех. Указанный алгоритм может быть применим и к другим системам, в которых наблюдается явление синхронизации хаоса, в тех случаях, когда корреляционные свойства сигналов в области синхронизации и вне ее остаются близкими.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 1008).

Библиографический список

1. *Fujisaka H., Yamada T.* Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems // *Progr. Theor. Phys.* 1983. Vol. 69. P. 32.
2. *Пиковский А.С.* О взаимодействии странных аттракторов // ИПФ АН СССР. № 79. Горький, 1983.
3. *Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И.* Стохастическая синхронизация колебаний диссипативных систем // *Известия вузов. Радиофизика.* 1986. Т. 29. С. 1050–1060.
4. *Pecora L.M., Carroll T.L.* Synchronization in chaotic systems // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 64. P. 821–824.
5. *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M.* Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 53. P. 4528.
6. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76. P. 1804.
7. *Анищенко В.С., Постнов Д.Э.* Эффект захвата базовой частоты хаотических автоколебаний. Синхронизация странных аттракторов // *Письма в ЖТФ.* 1988. Т. 14, вып. 6. С. 569–573.
8. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Постнов Д.Э., Сафонова М.А.* Вынужденная и взаимная синхронизация хаоса // *Радиотехника и электроника.* 1991. Т. 36, № 2. С. 338–351.
9. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E., Safonova M.A.* Synchronization of chaos // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 1992. Vol. 2, № 3. P. 633.
10. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78. P. 4193.
11. *Mormann F., Lehnertz K., David P., Elger C.E.* Mean phase coherence as a measure for phase synchronization and its application to the EEG of epilepsy patients // *Physica D.* 2000. Vol. 144. P. 358–369.
12. *Landa P.S., Rosenblum M.* Synchronization and chaotization of oscillations in coupled self-oscillating systems // *Appl. Mech. Reviews.* 1993. Vol. 46, № 7. P. 414–426.

13. *Quiñan Quiroga R., Kraskov A., Kreuz T., Grassberger P.* Performance of different synchronization measures in real data: A case study on electroencephalographic signals // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 65. 041903.
14. *Schiff S.J., So P., Chang T.* Detecting dynamical interdependence and generalized synchrony through mutual prediction in a neural ensemble // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 54. P.6708.
15. *Kramer M.A., Edwards E., Soltani M., Berger M., Knight R., Szeri A.J.* Synchronization measures of bursting data: Application to the electrocorticogram of an auditory event-related experiment // *Phys. Rev. E.* 2004. Vol. 70. P. 011914.
16. *Шабунин А.В., Демидов В.В., Астахов В.В., Анищенко В.С.* Количество информации как мера синхронизации хаоса. // *Письма в ЖТФ.* 2001. Т. 27, № 11. С. 78–85.
17. *Shabunin A., Demidov V., Astakhov V., Anishchenko V.* Information theoretic approach to quantify complete and phase synchronization of chaos. // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 65. P. 056215.
18. *Shabunin A., Astakhov V., Kurths J.* Quantitative analysis of chaotic synchronization by means of coherence // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 72. P. 016218.
19. *Kocarev L., Halle K.S., Eckert K., Chua L., Parlitz U.* Experimental demonstration of secure communication via chaotic synchronization // *Int. J. Bifurcation and chaos.* 1992. Vol. 2. P. 709–713.
20. *Бельский Ю.Л., Дмитриев А.С.* Передача информации с использованием детерминированного хаоса // *Радиотехника и электроника.* 1993. Т. 38. С. 1310–1515.
21. *Шабунин А.В., Астахов В.В., Демидов В.В., Ефимов А.В.* Мультистабильность и синхронизация хаоса в отображениях с «внутренней» связью // *Радиотехника и электроника.* 2008. Т. 53. С. 702–712.

Поступила в редакцию 21.01.2016
После доработки 21.05.2016

DIAGNOSTICS AND MEASUREMENT OF CHAOTIC SYNCHRONIZATION IN THE PRESENCE OF NOISE

A. V. Shabunin

National Research Saratov State University
 Russia, 410012 Saratov, Astrakhanskaya, 83
 E-mail: shabuninav@info.sgu.ru

The research is devoted to a method of diagnostics and quantitative analysis of chaotic synchronization in the presence of noise. We analyze how the additive white normal noise influences the accuracy of the measurement of synchronization of chaos. We also propose a new modification of the standard algorithm, which significantly reduces the sensitivity of the method to the noise.

Importance of the study is caused by its perspectives for fundamental researches of general properties of chaotic synchronization, as well as for practical applications to searching interconnections between oscillations in systems of different nature. This is especially important in biological and medical investigations where the level of noise is

usually very large and the interference can not be removed. Thus, possibility of measuring of the level of interconnection between oscillations in different biological samples allows to detect hidden mechanisms existing between them.

The researches are carried out by the method of numerical simulations. The model under study is a system of two uni-directionally coupled logistic maps, which is one of the most simple model in the nonlinear dynamics. From the other side, it allows to explore all general properties of coupled self-sustained oscillators with period-doubling bifurcations.

The results of the researches have demonstrates that the basic correlative method of measurement of chaotic synchronization is valid only when the noise is absent or very small. The proposed in the work algorithm, which is based on using time lag between the estimated signals, can significantly improve the accuracy of measurements in the presence of noise. It can be applied to measurement of chaotic synchronization for a wide class of dynamical systems, in the cases when the statistical properties of chaotic attractors remain similar for both synchronous and non-synchronous regimes.

Keywords: Chaotic oscillations, synchronization of chaos, measurement of synchronization.

DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-2-27-40

Paper reference: Shabunin A.V. Diagnostics and measurement of chaotic synchronization in the presence of noise // *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2016. Vol. 24, № 2. P. 27-40.

References

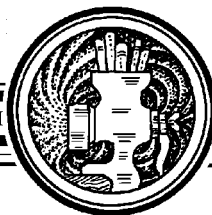
1. *Fujisaka H., Yamada T.* Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems // *Progr. Theor. Phys.* 1983. Vol. 69. P. 32.
2. *Pikovsky A.S.* On the interaction of strange attractors // *Z. Phys. B. Condensed Matter* 1984. Vol. 55. P. 149.
3. *Afraimovich V.S., Verichev N.N., Rabinovich M.I.* Stochastic synchronization of oscillation in dissipative systems // *Radiophysics and Quantum Electronics*. 1986. Vol. 29, Issue 9. P. 795.
4. *Pecora L.M., Carroll T.L.* Synchronization in chaotic systems // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 64. P. 821.
5. *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M.* Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // *Phys. Rev. E*. 1996. Vol. 53. P. 4528.
6. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76. P. 1804.
7. *Anishchenko V.S., Postnov D.E.* // *Technical Physics Letters*. 1988. Vol. 14, № 3. P. 254.
8. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E., Safonova M.A.* // *Radiotekhnika i Elektronika*. 1991. Vol. 36. P. 338 (in Russian).
9. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E., Safonova M.A.* Synchronization of chaos // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 1992. Vol. 2, № 3. P. 633.
10. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators// *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78. P. 4193.

11. *Mormann F., Lehnertz K., David P., Elger C.E.* Mean phase coherence as a measure for phase synchronization and its application to the EEG of epilepsy patients. // *Physica D.* 2000. Vol. 144. P. 358.
12. *Landa P.S., Rosenblum M.G., Carbon S.* // *Soviet Physics. Doklady.* 1992. Vol. 37, № 5. P. 237.
13. *Quiñan Quiroga R., Kraskov A., Kreuz T., Grassberger P.* Performance of different synchronization measures in real data: A case study on electroencephalographic signals. // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 65. P. 041903.
14. *Schiff S.J., So P., Chang T.* Detecting dynamical interdependence and generalized synchrony through mutual prediction in a neural ensemble. // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 54. P. 6708.
15. *Kramer M.A., Edwards E., Soltani M., Berger M., Knight R., Szeri A.J.* Synchronization measures of bursting data: Application to the electrocorticogram of an auditory event-related experiment. // *Phys. Rev. E.* 2004. Vol. 70. P. 011914.
16. *Shabunin A.V., Demidov V.V., Astakhov V.V., Anishchenko V.S.* // *Technical Physics Letters.* 2001. Vol. 27, № 6. P. 476.
17. *Shabunin A., Demidov V., Astakhov V., Anishchenko V.* Information theoretic approach to quantify complete and phase synchronization of chaos // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 65. P. 056215.
18. *Shabunin A., Astakhov V., Kurths J.* Quantitative analysis of chaotic synchronization by means of coherence. // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 72. P. 016218.
19. *Kocarev L., Halle K.S., Eckert K., Chua L., Parlitz U.* Experimental demonstration of secure communication via chaotic synchronization // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 1992. Vol. 2. P. 709.
20. *Belsky Yu.L., Dmitriev A.S.* // *Journal of Communications Technology and Electronics.* 1993. Vol. 38. P. 1310.
21. *Shabunin A.V., Astakhov V.V., Demidov V.V., Efimov A.V.* // *Journal of Communications Technology and Electronics.* 2008. Vol. 53, № 6. P. 666.



Шабунин Алексей Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1990). Доктор физико-математических наук (2008), профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Научные интересы – нелинейная динамика, теория колебаний, синхронизация и управление хаосом. Автор более 75 научных публикаций.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
 E-mail: shabuninav@info.sgu.ru



ДУХПОТОКОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ – ВОЛНОВЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ НА СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТАХ

Часть II

А. В. Титов

Национальный исследовательский
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
E-mail: Titovav88@gmail.com

Данная статья представляет собой вторую часть обзора работ, посвященных явлению двухпотоковой неустойчивости в электронике сверхвысоких частот *. Как известно, на сегодняшний день весьма актуальной является проблема создания приборов, работающих в терагерцовом диапазоне частот. И хотя существует немало устройств, способных генерировать или усиливать сигналы в этом диапазоне, все они, по большей части, относятся к сверхмощным релятивистским приборам. В то же время наблюдается дефицит компактных устройств средней мощности. В последнее время все чаще в работах различных иностранных научных групп для работы в терагерцовом диапазоне предлагаются модели, основанные на взаимодействии двух электронных потоков. Данный обзор является попыткой наиболее полного описания трудов, посвященных такому широкому во всех смыслах явлению, как двухпотоковая неустойчивость применительно к вакуумной электронике сверхвысоких частот. При этом авторы отдают себе отчет в том, что в общем случае это явление выходит далеко за границы рассмотренной здесь области, поскольку данное понятие часто встречается в работах исследователей в области аэро- и гидродинамики, астрофизики, плазменной, твердотельной электроники и пр. Из проведенного анализа следует, что общая тенденция к смещению рабочих частот в терагерцовый диапазон фактически подарила двухпучковым системам вторую жизнь. Исследователи со всего мира, в частности, из Китая, Кореи, Японии, Америки и других стран, изучают вопросы, связанные с генерацией и усилением сигналов на основе двухпотоковых систем. На наш взгляд, приведенные в данном обзоре работы, с одной стороны, в полной мере иллюстрируют заинтересованность зарубежных исследователей в данной теме, а с другой стороны, являются доказательством перспективности дальнейших исследований в этой области.

Ключевые слова: Двухпотоковая неустойчивость, два электронных потока, двухлучевой усилитель, электронно-волновая лампа.

DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-2-41-63

Ссылка на статью: Титов А.В. Двухпотоковая неустойчивость – волновые линейные и нелинейные явления на сверхвысоких частотах. Часть II // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 2. С. 41–63.

*Титов А.В. Двухпотоковая неустойчивость – волновые линейные и нелинейные явления на сверхвысоких частотах. Часть I // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24. № 1. С. 37–74.

Современные работы

В первую очередь следует упомянуть работы научной группы из университета Нью-Мехико. Среди них наиболее полной является диссертационная работа Т. Свимонишвили [1]. В ней подробно описывается то же устройство, что и в других работах группы из Лос-Аламоса [2–4]. Устройство представляет собой систему из двух параллельных сферических зеркал (рис. 1), одно из которых полупрозрачно, образующих своеобразный открытый резонатор. Два электронных пучка с помощью отклоняющих систем вводятся в область между зеркалами, затем взаимодействуют и после выводятся из области взаимодействия. В результате в резонаторе накапливается энергия, которая впоследствии выводится через полупрозрачное зеркало.

Согласно автору [1], подобное устройство может генерировать до 100 Вт на частоте 1 ТГц, при этом иметь линейный размер порядка 1 м. Сама работа, в основном, посвящена двумерному моделированию процесса взаимодействия двух попутных электронных потоков конечного радиуса. К сожалению, в ней нет подробного расчета системы, приведенной в начале, а лишь показана перспективность двухлучевого взаимодействия для генерации излучения в терагерцовом диапазоне частот. Что примечательно, в ссылках фигурирует лишь 26 источников. На сегодняшний момент данная диссертационная работа является, по-видимому, последней работой научной группы из университета Нью-Мехико на эту тему.

В целом, следует отметить, что интерес к двухпотоковой неустойчивости проявляют исследователи всего мира. В частности, в последнее время иранские ученые опубликовали несколько работ, посвященных численному моделированию двухпотоковых систем [5, 6], а также исследованию двухлучевого лазера на свободных электронах (ЛСЭ) с плазменным фоном [7].

Продолжаются исследования двухлучевых ЛСЭ и в Украине. Например, в работе [8] изучается возможность получения фемтосекундных волновых пакетов с помощью ЛСЭ.

Схожие задачи интересуют и американских исследователей. В работе [9] предложен новый способ получения сверхкоротких аттосекундных импульсов рентгеновского диапазона на основе двухпотоковой неустойчивости в релятивистских электронных пучках. Рассматриваются также проблемы получения широкополосных источников терагерцового излучения на основе двухлучевых ЛСЭ [10].

В последнее время серьезные работы по исследованию двухпотоковой неустойчивости проводятся в Японии, Южной Корее и Китае. Об этом говорят появившиеся в последние годы монографии по численному моделированию неустойчивостей в электронных пучках [11, 12], а также ряд совместных работ исследователей из указанных стран, посвященных новым типам двухлучевых приборов.

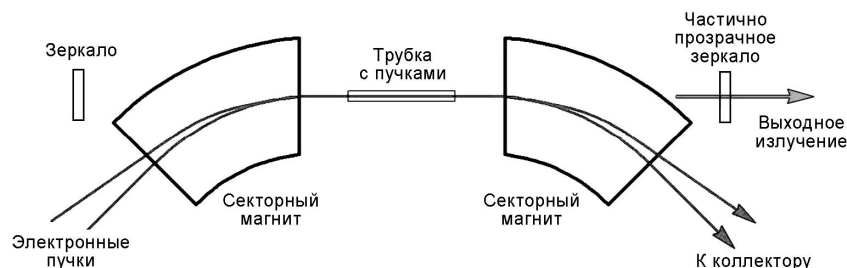


Рис. 1. Схема генератора на двух пучках [1]

Современные двухпотоковые модели приборов О-типа

Пожалуй, наиболее интересной и достаточно полной работой за последнее время стала статья, посвященная исследованию системы, представляющей собой петляющий волновод, пронизываемый двумя электронными пучками. Согласно авторам [13], на сегодняшний день наиболее широко распространенным прибором среди компактных, низковольтных и широкополосных генераторов терагерцового диапазона частот является лампа обратной волны. В последнее время внимание исследователей сосредоточено на анализе различных типов замедляющих систем для ЛОВ и ЛБВ. Структура типа «петляющий волновод» является одной из часто используемых замедляющих систем. В качестве примера авторы [13] указали несколько работ, содержащих результаты экспериментов с ЛБВ терагерцового диапазона с такой замедляющей системой. Миниатюрный петляющий волновод был произведен по технологии LIGA (Lithographie, Galvanoformung, Abformung). Целью авторов [13] являлось улучшение выходных характеристик миниатюрных ЛОВ субмиллиметрового диапазона, в которых в качестве замедляющей системы применён петляющий волновод. Для повышения эффективности взаимодействия электронов с полями было предложено использовать механизм двухпотоковой неустойчивости. В этом случае волновод пронизывался не одним электронным пучком, а двумя. Принципиальная схема приведена на рис. 2.

В первой части работы [13] на основе метода эквивалентных схем было получено дисперсионное соотношение для такой системы. Секция волновода разбивалась на отдельные элементы (рис. 3). Весь волновод представлялся в виде двухпроводной линии, матрица передачи которой – произведение матриц передачи ее секций.

Каждый элемент секции волновода представлен в виде эквивалентного четырехполюсника (рис. 4). Более подробный анализ подобного перехода проведен в работе [14].

На основании метода эквивалентных контуров была получена дисперсионная характеристика волновода. Однако данный метод не учитывал ни наличия электронных потоков, ни того факта, что волновод имеет плавные изгибы. Поэтому авторами [13] был применен другой подход, основанный на совместном использовании метода согласования поля и теоремы Флоке. Рассмотренная модель представлена на рис. 5. Для анализа была взята половина периода волновода. Эта область была поделена на семь отрезков. Отрезки I и VII представляют собой изгибы по 90 градусов, отрезки II, IV и VI – прямоугольные волноводы без электронных пучков. В данной модели область с каналами для электронных пучков представляется в виде запердельного волновода. Более того, предполагается, что каналы заполнены пучками полностью, как это показано в области III и V рисунка. Электронные пучки в них могут быть рассмотрены с точки

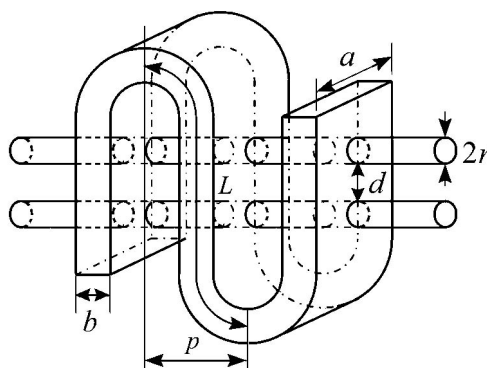


Рис. 2. Схема изогнутого волновода [13]

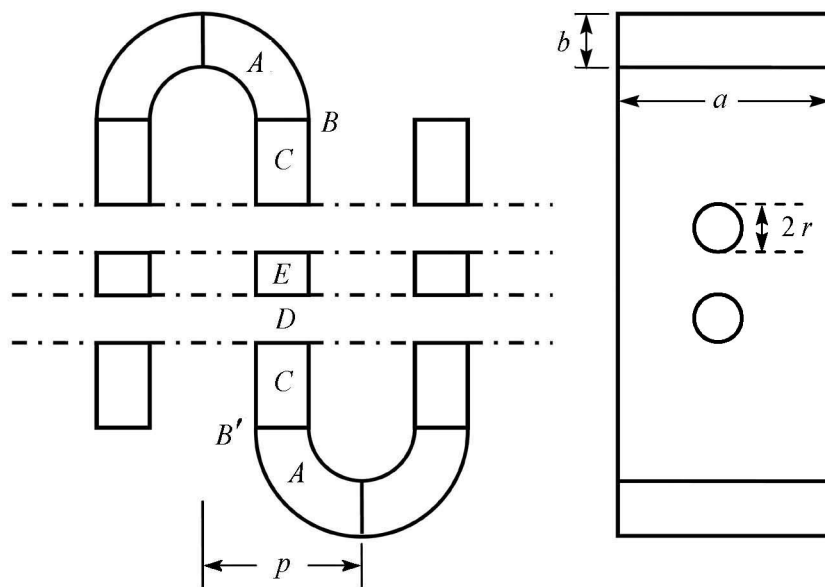


Рис. 3. Схема разбиения секции волновода на элементы [13]

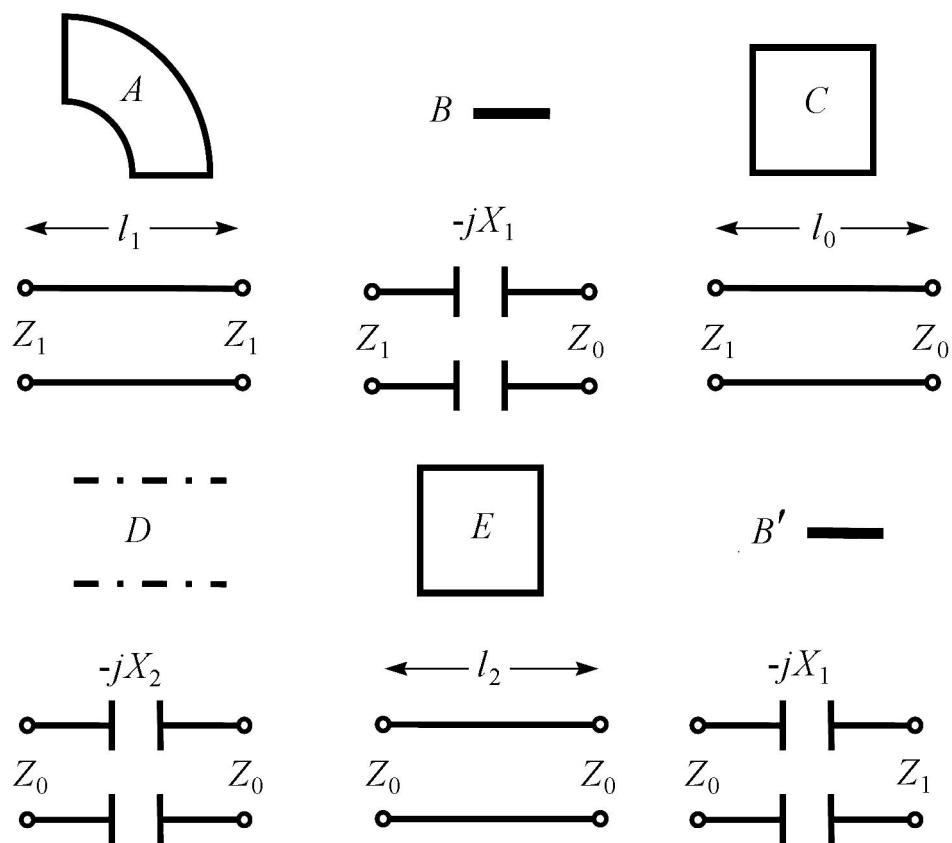


Рис. 4. Соответствие элементов волновода и элементов электрической цепи [13]

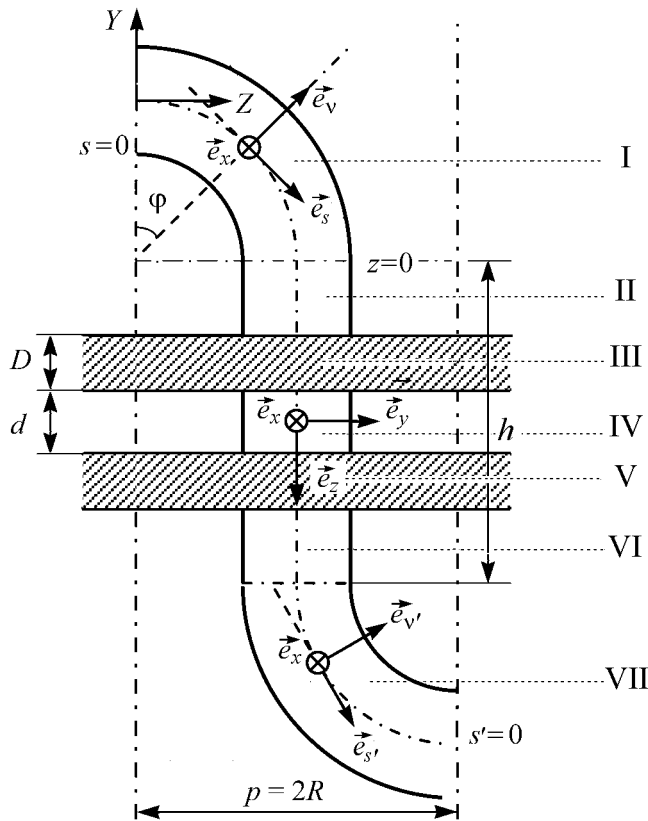


Рис. 5. Схематическое изображение модели, использованной в методе согласования поля [13]

зрения кинетической теории плазмы. Иными словами, вклад пучков может быть выражен через эквивалентную диэлектрическую проницаемость.

Компоненты электрического поля в прямоугольном волноводе удовлетворяют уравнениям Максвелла. В декартовых координатах волновое уравнение для прямоугольного волновода выглядит следующим образом:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \varepsilon_{e,a} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \right] \psi(x, y, z) = 0. \quad (1)$$

Здесь индекс $a = \text{II, III, IV, V, VI}$ соответствует пяти участкам волновода, ψ – некоторая функция, ω – круговая частота, c – скорость света, $\varepsilon_{e,a}$ – диэлектрическая проницаемость, которую можно выразить как

$$\varepsilon_{e,a} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\gamma^2 (\omega - k_y v_0)^2}, \quad (\text{при } a = \text{III, V}), \quad (2)$$

$$\varepsilon_{e,a} = 1, \quad (\text{при } a = \text{II, IV, VI}), \quad (3)$$

где $k_{y,z}$ – волновые числа в x - и y -направлениях, ω_{pe} – плазменная частота, γ – релятивистский фактор.

На участках I и VII компоненты поля также удовлетворяют уравнениям Максвелла, однако волновое уравнение удобнее записать в других координатах следую-

щим образом:

$$\left(u^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2} + u \frac{\partial}{\partial v} + R^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + u^2 \omega^2 \mu \varepsilon \right) \psi(x, v, s) = 0, \quad (4)$$

где $u = v + R$. Подробное решение данного уравнения приведено в работах [15, 16]. На основании данной модели также была получена дисперсионная диаграмма.

Наконец, третьим подходом, который использовали авторы статьи [13], явилось моделирование в CST Microwave Studio (рис. 6). В результате были получены графики зависимостей фазовой скорости волн от частоты в случаях отсутствия пучков, наличия одного или двух пучков (рис. 7), а также графики зависимостей фазовой скорости от частоты при различных диаметрах пучков (рис. 8).

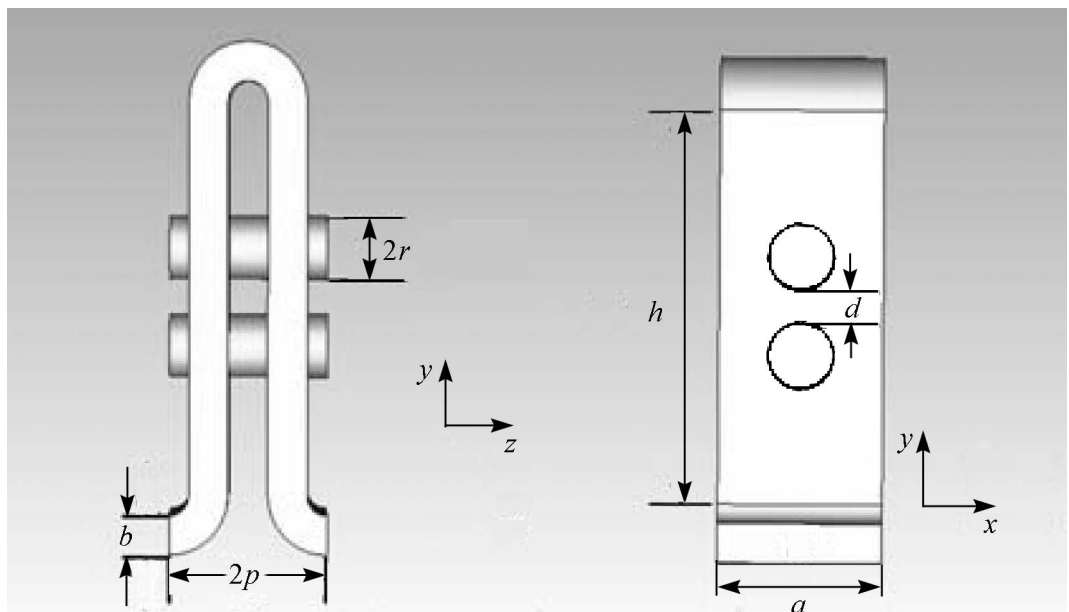


Рис. 6. Продольная и поперечная проекция модели при моделировании в CST Microwave Studio [13]

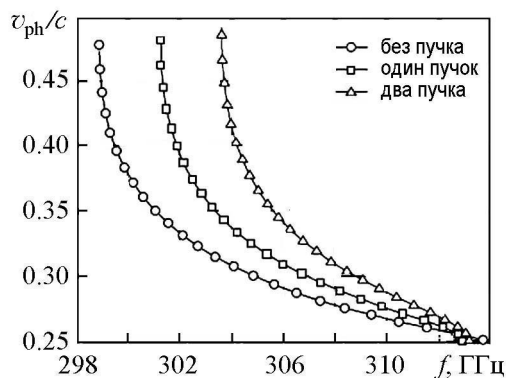


Рис. 7. Зависимость нормированной фазовой скорости от частоты при отсутствии пучков, при одном и двух пучках [13]

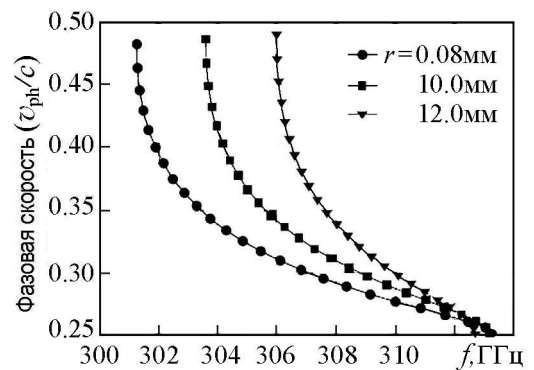


Рис. 8. Зависимость нормированной фазовой скорости от частоты при различных диаметрах каналов для пучка [13]

Авторами отмечено, что при увеличении количества каналов для пучков частота отсечки растет. Также было отмечено, что при уменьшении радиуса отверстий дисперсионная характеристика становится более пологой. Радиус отверстия влияет не только на значение фазовой скорости, но и на частоту отсечки. При увеличении радиуса частота отсечки также растет. Проведенный анализ способствует выбору параметров волновода в дальнейшем, к примеру, с целью получения более пологой дисперсионной характеристики.

Авторами [13] было проведено сравнение использованных методов. Результаты сравнения представлены в виде графиков зависимостей нормированной фазовой скорости от частоты (рис. 9) для трех значений диаметров пучков.

Авторы отмечают, что моделирование в CST учитывало все особенности исследуемой структуры в отсутствие электронных потоков, в то время как в остальных моделях некоторые особенности не учитывались. Это привело к возникновению незначительных расхождений характеристик. Из рисунков видно, что результаты моделирования в CST хорошо согласуются с результатами моделирования методом эквивалентных контуров в случае достаточно малого диаметра отверстий для пучков. Аналогично дела обстоят и с методом согласования поля. В случае малого диаметра отверстий метод согласования поля позволяет получить результат, достаточно близкий по точности к CST. Однако он требует несколько больше машинного времени, чем при тех же условиях менее точный метод эквивалентных контуров. При этом моделирование обоими методами (эквивалентных контуров и согласования поля) требует значительно меньше машинного времени, чем моделирование в CST.

Следует упомянуть еще одну интересную работу членов этой же научной группы, [17], посвященную моделированию системы, схема которой приведена на рис. 10. Предложенная система состоит из цилиндра с нанесенной на внутреннюю поверхность замедляющей системой типа «гребенка». Внутри цилиндра с различными скоростями распространяются два цилиндрических электронных пучка конечной тол-

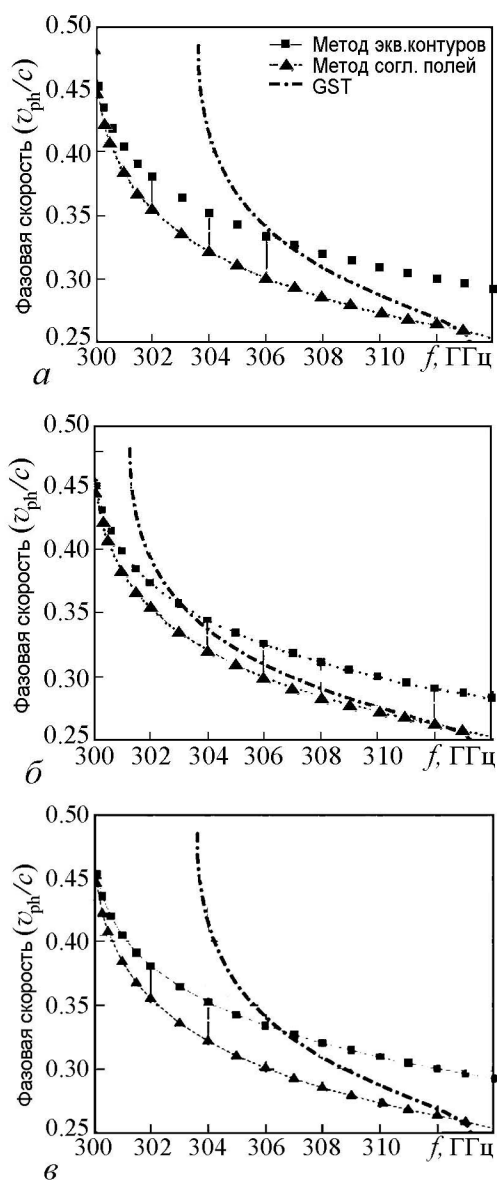


Рис. 9. Графики зависимостей фазовой скорости от частоты, полученные на основе трех методов при различных радиусах пучков, мм: $r = 0.06$ (а), 0.08 (б), 0.1 (в) [13]

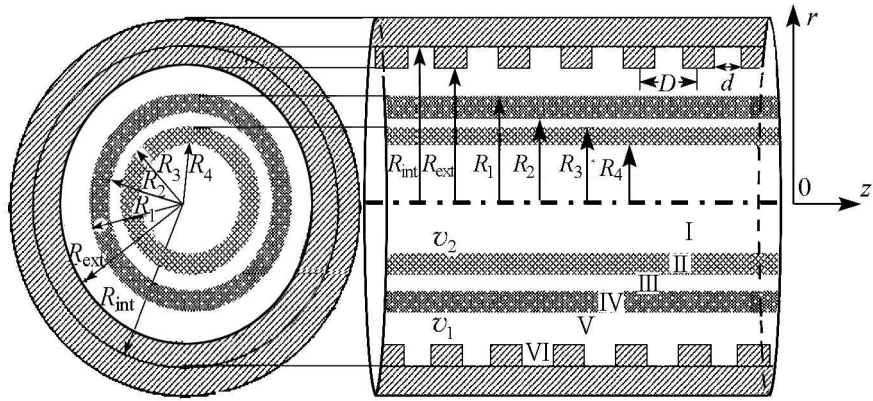


Рис. 10. Две проекции исследуемой системы [17]

щины. В обычном случае данная структура обладает аномальной дисперсией, что позволяет использовать ее в качестве замедляющей системы для ЛОВ. Авторами было сделано предположение о возможности применения двух электронных пучков с целью улучшения выходных характеристик такого генератора за счет явления двухпотоковой неустойчивости. Рассмотрим систему подробнее.

Период гребенки равен D , расстояние между кольцами гребенки d . Концентрические пучки имеют толщину b и находятся на расстоянии $\Delta r = |R_2 - R_3|$, где R_2 – внутренний радиус первого и основного пучка, ток которого составляет 75% от общего тока. Радиус R_3 – внешний радиус второго пучка, играющего роль возмущаемого пучка, ток которого составляет 25% от общего тока. Таким образом, пространство взаимодействия можно поделить на шесть областей:

$$\left. \begin{aligned}
 \text{(I)} : & \quad 0 \leq r < R_4 \\
 \text{(II)} : & \quad R_4 \leq r < R_3 \\
 \text{(III)} : & \quad R_3 \leq r < R_2 \\
 \text{(IV)} : & \quad R_2 \leq r < R_1 \\
 \text{(V)} : & \quad R_1 \leq r < R_{\text{ext}} \\
 \text{(VI)} : & \quad R_{\text{ext}} \leq r \leq R_{\text{int}}
 \end{aligned} \right\} . \quad (5)$$

Итак, предполагается, что пучки в данной системе движутся в бесконечном продольном магнитном поле только в направлении z со скоростями v_1 и v_2 . Пучок, расположенный ближе к гребенке, принимается за первый, а расположенный ближе к центру – за второй пучок. Таким образом, толщина первого пучка $d_1 = |R_1 - R_2|$, а толщина второго пучка $d_2 = |R_3 - R_4|$.

Авторы отмечают, что поведение двух электронных пучков в трубке удовлетворяет уравнениям Максвелла, уравнению Пуассона и уравнению непрерывности. Исходя из источников, ссылки на которые приведены в работе, волновое уравнение для n -й пространственной гармоники продольной компоненты электрического поля имеет вид

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \varepsilon_{L,n} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_n^2 \right) \right] E_{zn}(r) = 0, \quad (6)$$

где индекс L соответствует номеру области, ω – круговая частота, c – скорость света, а $\varepsilon_{L,n}$ – диэлектрическая проницаемость различных участков:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2,n} &= 1 - \frac{\omega_{p2}^2}{\gamma_2^3 (\omega - k_n v_2)^2}, \\ \varepsilon_{4,n} &= 1 - \frac{\omega_{p1}^2}{\gamma_1^3 (\omega - k_n v_1)^2}, \\ \varepsilon_{1,n} &= \varepsilon_{3,n} = \varepsilon_{5,n} = 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $k_n = k_0 + 2\pi n/D$ – продольное волновое число n -й гармоники, $\gamma_i = 1 + (eV_i)/(m_0 c^2)$ ($i = 1, 2$) – релятивистский фактор первого и второго пучка, ω_{pi} – плазменные частоты пучков. Поскольку период гребенки много меньше длины волны в свободном пространстве, поля в области VI удовлетворяют уравнениям Максвелла и могут быть представлены в виде стоячих TEM-волн.

В ходе сложных преобразований, вынесенных в работе [17] в отдельное Приложение и включающих описание полей в каждой области, авторы получили дисперсионное уравнение системы. Осуществлен также переход к дисперсионным уравнениям для однолучевой системы и для «холодной системы» без пучков. Первым проанализировано дисперсионное уравнение для «холодной системы». Построены дисперсионные уравнения для различных значений радиусов гребенки при среднем ускоряющем напряжении 40 кВ. Для анализа авторами была выбрана одна из низших мод рис. 11, соответствующая частоте 33.4 ГГц. На рис. 12 показаны дисперсионные характеристики для выбранной низшей моды при различных радиусах гребенки. Видно, что по мере уменьшения радиуса значения рабочей частоты и частоты отсечки увеличиваются. Для случая наименьшего радиуса было проведено сравнение теоретической дисперсионной характеристики с характеристикой, полученной

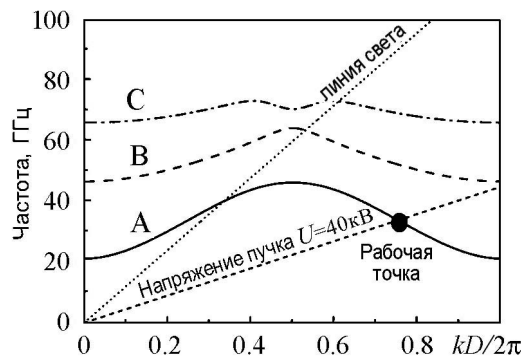


Рис. 11. Три низшие моды, полученные из дисперсионного уравнения (7) в работе [17]

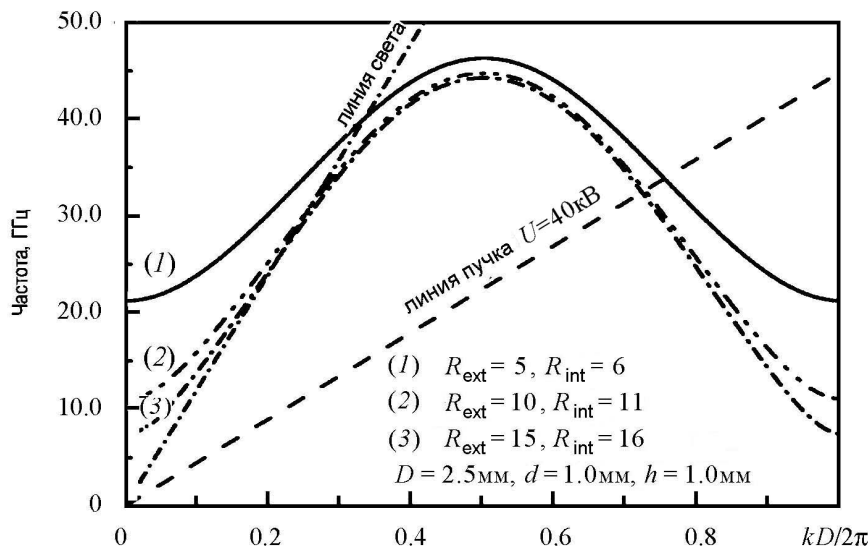


Рис. 12. Дисперсионные кривые при различных радиусах гребенки (мм) [17]

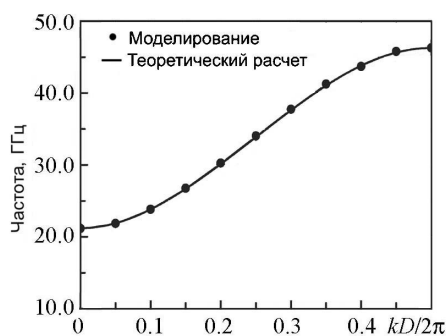


Рис. 13. Сравнение результатов моделирования и теоретического расчета [17]

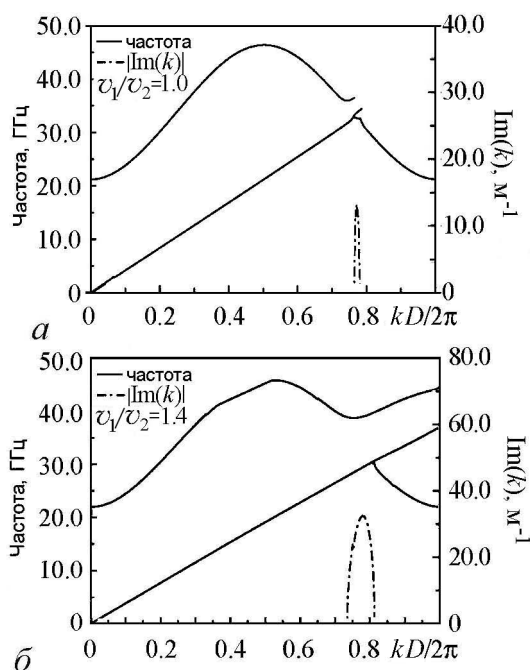


Рис. 14. Дисперсионные характеристики для случаев одного пучка (а) и двух пучков (б) [17]

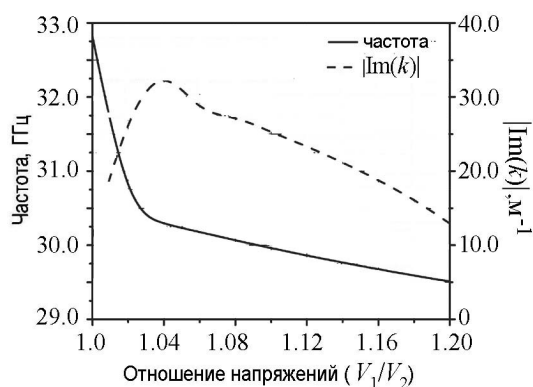


Рис. 15. График зависимости рабочей частоты и величины усиления от отношения напряжений [17]

с помощью моделирования методом «частица в ячейке». Теоретическая модель показала хорошее совпадение с результатами моделирования (рис. 13).

Далее авторы провели анализ уже «горячей» системы, который состоял из двух частей. В первой части анализа предполагалось, что имеет место только один электронный пучок. Это соответствует ситуации, когда у пучков отсутствует разность скоростей, а между пучками отсутствует зазор. При этом общий ток составлял 72 А, а ускоряющее напряжение было равно 40 кВ. Соответствующая дисперсионная характеристика приведена на рис. 14, а. Во второй части анализа предполагалось наличие уже двух пучков. Ток первого пучка составлял 54 А, а второго – 18 А, что в сумме давало то же значение, что и в первом случае. Полученная дисперсионная характеристика приведена на рис. 14, (б).

Анализ характеристик позволил авторам говорить о значительном преимуществе, возникающем при использовании двух пучков. Наиболее оптимальному усилению, как было показано, соответствует отношение напряжений $V_1/V_2 = 1.04$. Это вытекало из зависимости, приведенной на рис. 15. Было показано, что в случае применения двух пучков увеличивается значение усиления на единицу длины. Как отмечают авторы, это происходит за счет явления двухпучковой неустойчивости, возникающей при взаимодействии двух электронных потоков.

Помимо описанного выше анализа авторы статьи [17] провели моделирование изучаемой системы методом «частица в ячейке». Геометрия модели приведена на рис. 16. В данной цилиндрической системе по краям слева и справа расположены слои поглотителя. Цилиндрическая гребенка представлена в виде замедляющей структуры

с периодом $D = 2.5$ мм и с количеством периодов $N = 30$. Предполагалось, что поверхность гребенки представляет собой идеальный проводник, а ее канавки строго параллельны и имеют ширину и глубину, равные 1 мм. Два близких concentрических пучка формировались двумя катодами, расположенными на левой границе области. Общий ток составлял 72 А, три четверти которого составлял ток первого, внешнего пучка, а оставшаяся четверть – ток второго, внутреннего пучка. Расстояние от замедляющей структуры до первого пучка $h_0 = 0.1$ мм. Ускоряющее напряжение первого пучка было постоянным, 40 кВ. Ускоряющее напряжение второго пучка зависело от значения параметра $V_r = V_1/V_2$, которое изменялось в диапазоне от 1.0 до 1.12. Система находилась в продольном магнитном поле с индукцией 2 Тл.

Результаты моделирования представлены на рисунках. На рис. 17 дана зависимость выходной мощности от соотношения ускоряющих напряжений пучков. Видно, что максимальному значению выходной мощности соответствует $V_r = 1.05$. На рис. 18 представлена зависимость выходной мощности от параметра $I_r = I_1/I$, имеющего смысл доли, которую составляет ток первого пучка от полного тока I (случай $I_r = 1$ соответствует системе с одним пучком). Видно, что максимальная мощность достигается при $I_r = 0.75$. Из графиков следует, что выходная мощность может быть значительно увеличена путем выбора оптимальных значений V_r и I_r . На рис. 19 приведена зависимость выходной мощности от расстояния между пучками. Очевидно, что эффект двухпотоковой неустойчивости экспоненциально убывает при увеличении расстояния между пучками.

Результаты, полученные в работе [17], говорят о том, что применение

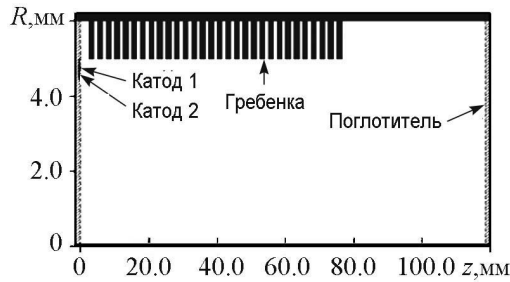


Рис. 16. Геометрия моделируемой системы [17]

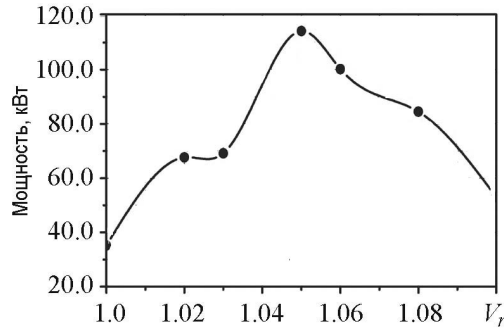


Рис. 17. График зависимости выходной мощности от параметра $I_r = I_1/I$ [17]

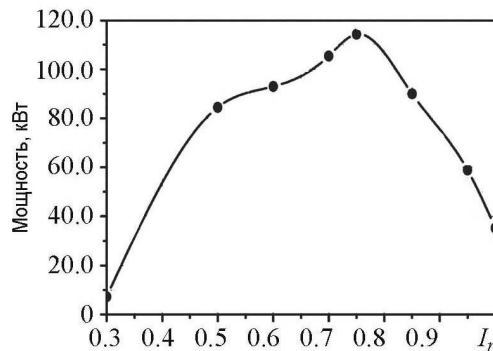


Рис. 18. График зависимости выходной мощности от параметра $V_r = V_1/V_2$ [17]

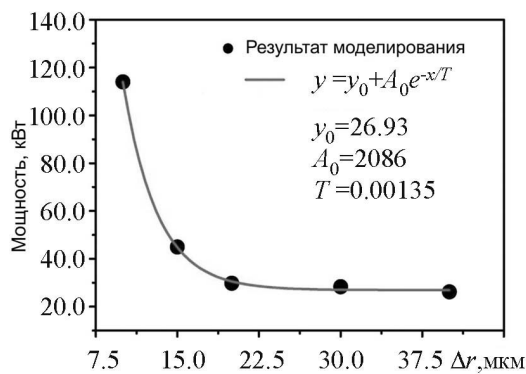


Рис. 19. Зависимость выходной мощности от расстояния между пучками Δr . Точками показаны результаты моделирования, кривая соответствует убывающей экспоненте вида $y(x) = 26.93 + 2086 \cdot \exp(-x/0.00135)$ [17]

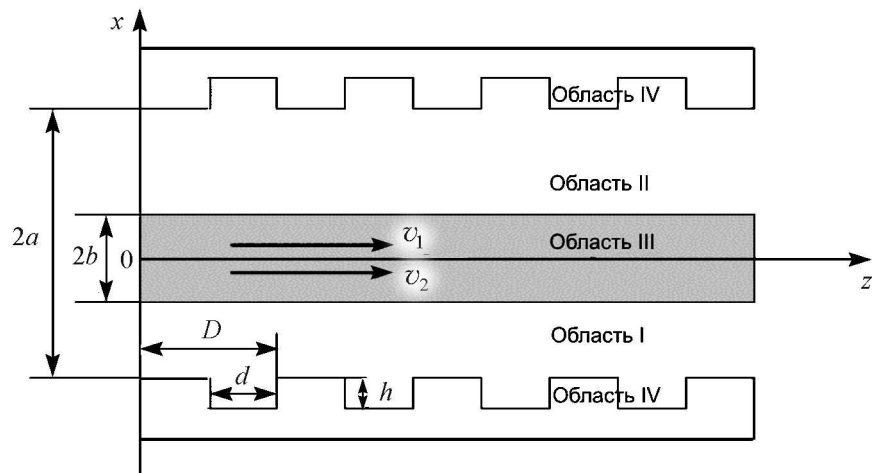


Рис. 20. Принципиальная схема исследуемой модели [18]

двух электронных пучков может значительно повысить выходные характеристики приборов за счет явления двухпучковой неустойчивости.

Следует отметить, что работе [17] предшествовало несколько более ранних статей этой же научной группы. При этом [17] является достаточно полной агрегацией идей, представленных в предыдущих работах этого коллектива. Тем не менее, следует хотя бы кратко перечислить их.

Первая работа, [18], была посвящена линейному анализу системы, представленной на рис. 20. Два хорошо перемешанных релятивистских электронных пучка движутся в пространстве между двумя поверхностями, на которые нанесена замедляющая структура типа «гребенка». В ходе работы получены дисперсионные уравнения и характеристики. Исходя из них, авторы предсказывали работу подобной системы на частотах до 375 ТГц.

Как видно из рисунка, система является прообразом цилиндрической системы с кольцевой гребенкой, рассмотренной авторами позднее. Результат линейного анализа приведённой системы показал перспективность использования двух электронных потоков.

Вскоре данной научной группой было проведено моделирование системы, в которой два ленточных электронных пучка движутся вдоль замедляющей системы типа «гребенка» [19]. Моделирование проводилось с помощью пакета MAGIC. Геометрия модели приведена на рис. 21. Пучки эмитировались с поверхностей двух катодов и ускорялись средним напряжением 40 кВ при суммарной плотности тока 1000 А/м. Пространство взаимодействия со всех сторон было окружено слоем поглотителя.

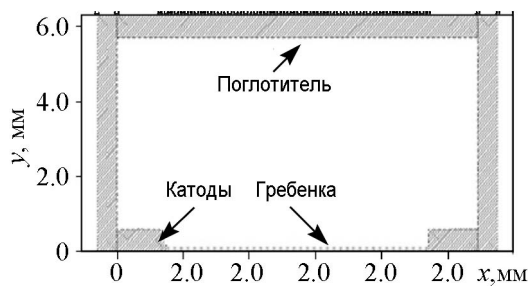


Рис. 21. Геометрия моделируемой системы [19]

Значительная часть исследования была посвящена нахождению оптимальных соотношений между токами пучков и ускоряющими напряжениями. Также было проведено сравнение с однолучевой моделью. Большая часть результатов использована при анализе уже

упоминавшейся цилиндрической системы. Интересным результатом моделирования стал тот факт, что применение двух пучков помимо снижения пусковых токов также может привести и к увеличению общей мощности излучения.

Похожую модель члены этой же научной группы рассмотрели в работе [20]. Исследования проводились как аналитически, так и с помощью моделирования. Остановимся на ней подробнее. Схема представлена на рис. 22.

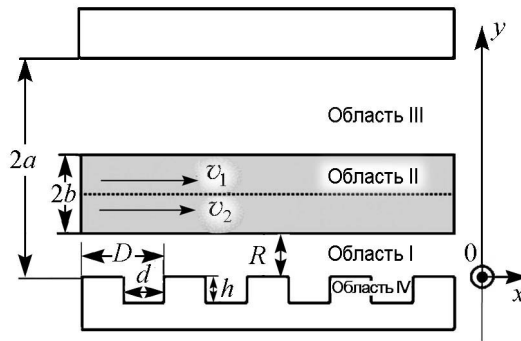


Рис. 22. Схема рассматриваемой модели [20]

Два электронных пучка с общей толщиной $2b$ движутся вдоль прямоугольной гребенки в направлении x со скоростями v_1 и v_2 . Период гребенки обозначен через D , h – глубина канавок, d – ширина канавок, R – расстояние до пучков, $2a$ – расстояние между металлическими поверхностями. Для удобства пространство взаимодействия поделено на четыре области: $0 < y < R$ – область I; $R \leq y \leq R + 2b$ – область II; $R + 2b < y \leq 2a$ – область III; а пространство внутри канавок, то есть $-h \leq y \leq 0$ – область IV.

При выводе дисперсионного соотношения предполагалось, что система находится в бесконечно большом продольном магнитном поле, что исключает поперечное движение. Также предполагалось отсутствие статических полей, создаваемых пучками. Для описания системы применялись уравнения Максвелла и гидродинамические уравнения для холодных релятивистских пучков. В случае, когда ширина канавок d много меньше длины волны в свободном пространстве, поля внутри канавок могут быть представлены в виде стоячих ТЕМ-волн. С другой стороны, в областях I, II и III поля могут быть описаны с точки зрения пространственных гармоник с волновыми числами $k_n = k_0 + 2\pi n/D$, где n – номер гармоники. Используя граничные условия при $y = 0$, $y = R$, $y = R + 2b$ и $y = 2a$, можно получить дисперсионное уравнение вида

$$\frac{D}{d} \operatorname{ctg} \left(\frac{\omega h}{c} \right) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{c \kappa_n} H_n \left(\frac{\sin(k_n d/2)}{k_n d/2} \right)^2 = 0. \quad (8)$$

Здесь

$$H_n = \frac{\left\{ \varepsilon_{3,n}^{1/2} + \operatorname{tg}(\kappa_n R) \cdot G_n \right\}}{\left\{ \varepsilon_{3,n}^{1/2} \cdot \operatorname{tg}(\kappa_n R) - G_n \right\}}; \quad (9)$$

$$G_n = \frac{\left\{ \varepsilon_{3,n}^{1/2} \cdot \operatorname{tg}[\kappa_n (R + 2b - 2a)] - \operatorname{tg}(2\beta_n b) \right\}}{\left\{ 1 + \varepsilon_{3,n}^{1/2} \cdot \operatorname{tg}[\kappa_n (R + 2b - 2a)] \right\}}; \quad (10)$$

$\kappa_n = \left[(\omega/c)^2 - k_n^2 \right]^{1/2}$ – поперечное волновое число для n -й пространственной

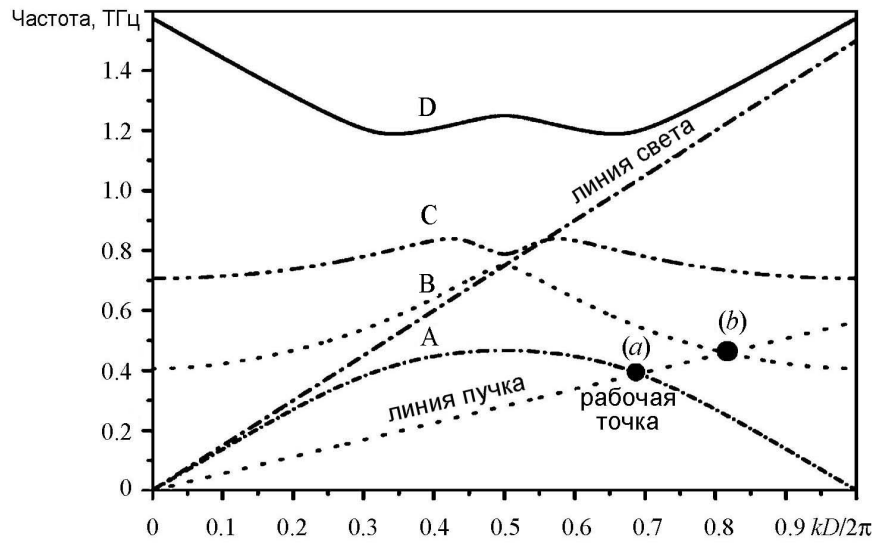


Рис. 23. Дисперсионная характеристика системы [20]

гармоники в вакууме; $\beta_n = \sqrt{\varepsilon_{3,n}} \kappa_n$ – поперечное волновое число для n -й пространственной гармоники в области электронных пучков; $\varepsilon_{3,n} = 1 - \sum_{i=1}^2 \left(\omega_{pi}^2 / \gamma_i^3 (\omega - k_n v_i)^2 \right)$ – диэлектрическая проницаемость в области пучка; $\gamma_i = 1 + eV_i / m_0 c^2$ – релятивистский фактор i -го пучка; ω – круговая частота; c – скорость света; V_i – ускоряющее напряжение i -го пучка; $v_i = c [(\gamma_i^2 - 1) / \gamma_i^2]^{1/2}$ – скорость i -го пучка; $\omega_{pi} = (e^2 n_{i0} / m_0 \varepsilon_0)^{1/2}$ – плазменная частота i -го пучка; n_{i0} – концентрация электронов в i -м пучке; e – заряд электрона; m_0 – масса покоя электрона.

В случае отсутствия пучков дисперсионное уравнение будет иметь вид

$$\frac{D}{d} \operatorname{ctg} \left(\frac{\omega h}{c} \right) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{c \kappa_n} \left[\frac{\sin(k_n d / 2)}{k_n d / 2} \right]^2 \operatorname{ctg}(\kappa_n 2a) = 0. \quad (11)$$

Авторы [20] отмечают, что подробный вывод этих уравнений приведен в [21] и [22]. Далее авторами проведен численный анализ дисперсионного уравнения (11). На рис. 23 приведены дисперсионные характеристики для четырех низших мод, названных А, В, С, и D. Также на рисунок нанесена прямая, соответствующая пучку с ускоряющим напряжением 40 кВ. Из рисунка видно, что пучок может одновременно взаимодействовать с модами А и В на частотах, соответственно, 389.2 и 460.1 ГГц. При этом в обеих рабочих точках (а) и (b) фазовая скорость положительна, а групповая скорость отрицательна. Таким образом, волновод с гребенкой может быть использован в качестве замедляющей системы лампы обратной волны.

На рис. 24. приведена дисперсионная характеристика для случая, когда ускоряющие напряжения пучков одинаковы и равны 40 кВ. При этом пучки сливаются в один с суммарной плотностью тока 1000 А/м. Пунктиром обозначена мнимая часть решения, соответствующая нарастанию. Как видно из рисунка, максимальное нарастание наблюдается при синхронизме электронного пучка и медленной волны, что

для мод А и В составляет 387.2 и 457.6 ГГц, соответственно. При взаимодействии с модой А нарастание выше.

На рис. 25 приведена дисперсионная характеристика для случая с двумя пучками, скорости которых различаются. Параметры гребенки остались теми же. Напряжение первого пучка $V_1 = 40$ кВ, плотность тока $I_1 = 900$ А/м; напряжение второго пучка определяется из значения $V_r = 1.02$, где $V_r = V_2/V_1$, плотность тока второго пучка $I_2 = 100$ А/м.

Из сравнения рис. 24 и 25 видно, что форма дисперсионной характеристики заметно меняется благодаря наличию двухпотоковой неустойчивости. Также можно отметить, что за счет двухпотоковой неустойчивости увеличивается коэффициент нарастания возмущений во времени. Авторы провели анализ зависимости коэффициента нарастания от соотношения ускоряющих напряжений для случая взаимодействия пучков с модой А. Результаты приведены на рис. 26.

Примечательно, что соотношение напряжений имеет оптимальное значение $V_r = 1.02$, и при нем коэффициент нарастания более чем в два раза выше коэффициента нарастания при $V_r = 1$.

Далее авторами было проведено моделирование исследуемой системы методом «частица в ячейке». Геометрия модели приведена на рис. 27. Отличие от предыдущей модели заключается в наличии верхней идеально проводящей стенки.

Идеально проводящая, прямоугольная, строго параллельная гребенка расположена в нижней части системы. Расстояние от гребенки до верхней пластины составляет 0.3 мм. Над гребенкой движутся два близких ленточных электронных потока, создаваемые двумя катодами, расположенными на левой гра-

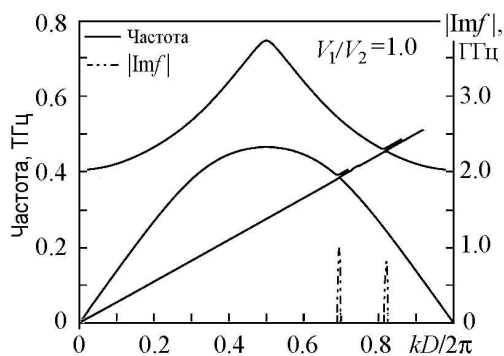


Рис. 24. Дисперсионная характеристика системы в случае совпадения скоростей пучков [20]

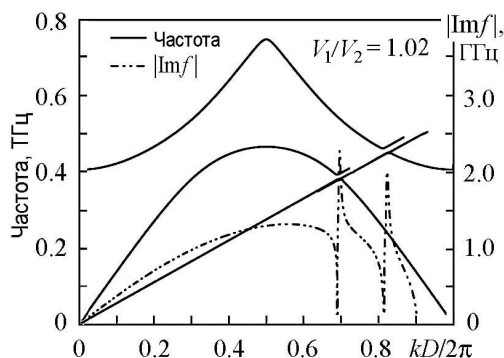


Рис. 25. Дисперсионная характеристика системы в случае $V_r = 1.02$ [20]

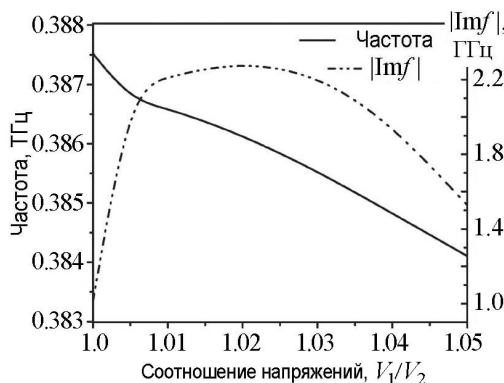


Рис. 26. Зависимость частоты генерации и коэффициента нарастания от соотношения ускоряющих напряжений пучков [20]

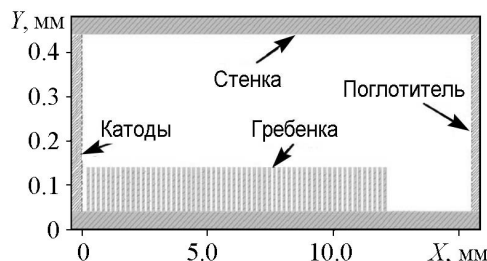


Рис. 27. Схема модели взаимодействия двух электронных пучков с гребенкой [20]

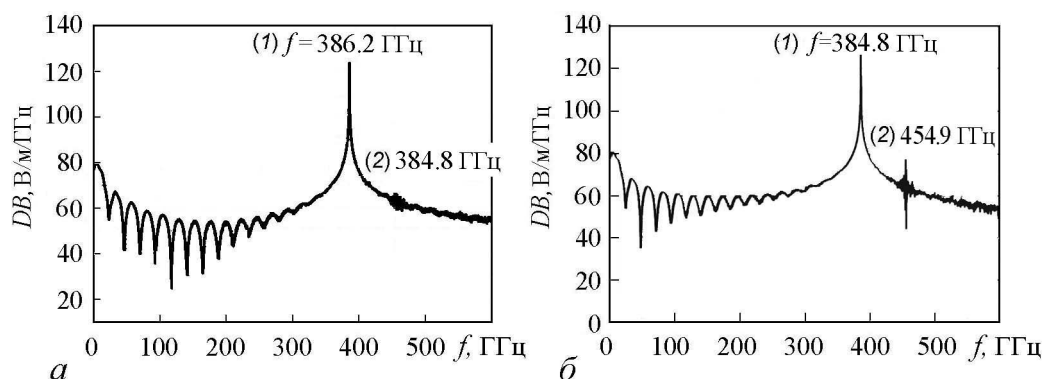


Рис. 28. Спектры генерируемых сигналов в системе с одним пучком (а) и в системе с двумя пучками (б) [20]

ни. Общая толщина двух пучков 60 мкм. Первый пучок, называемый основным, имеющий толщину 45 мкм и переносящий 90% общего тока, расположен вблизи поверхности гребенки на расстоянии 40 мкм. Второй пучок, переносящий остальные 10% общего тока, находится над основным пучком на расстоянии 3 мкм. Вся моделируемая область поделена на прямоугольные ячейки ($\delta x = 10$ мкм, $\delta y = 10$ мкм). Ускоряющее напряжение основного пучка 40 кВ, параметр V_r изменялся в пределах от 1.0 до 1.05. В системе предполагалось наличие постоянного продольного магнитного поля с индукцией 4 Тл.

На рис. 28 приведены спектры генерируемых сигналов, полученные в результате моделирования. Слева приведен спектр сигнала в системе с одним электронным пучком, справа приведен спектр сигнала в системе с двумя электронными пучками. Видно, что в первом случае происходит генерация на частотах 386.2 и 456.0 ГГц, а во втором случае генерация происходит на частотах 384.8 и 454.9 ГГц. Эти частоты соответствуют рабочим точкам на дисперсионных характеристиках, приведенных ранее, на рис. 23.

Авторы отмечают, что за счет эффектов пространственного заряда полученные значения частот оказались ниже значений, предсказанных теорией.

Интересной задачей оказалось нахождение наиболее оптимальных соотношений токов пучков, ускоряющих напряжений, а также соотношений толщин пучков.

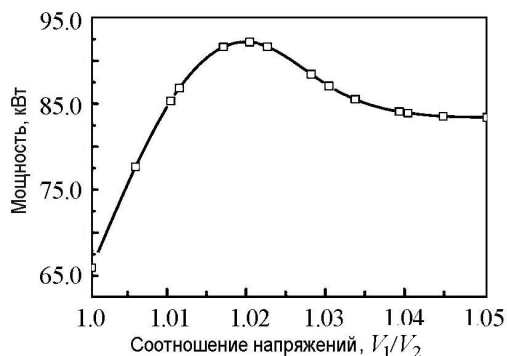


Рис. 29. Зависимость выходной мощности от соотношения ускоряющих напряжений [20] пучка, b – толщина двух пучков.

Ниже приведены соответствующие диаграммы зависимости мощности излучения от указанных параметров.

Из графика на рис. 29 следует, что оптимальное значение параметра $V_r = V_1/V_2$ равно 1.02, что совпадает с данными теоретического расчета. При этом значении были построены графики зависимостей мощности излучения от соотношения I_1/I и соотношения b_1/b , приведенные на рис. 30 и рис. 31, соответственно. Здесь I_1 – ток первого пучка, I – полный ток, b_1 – толщина первого

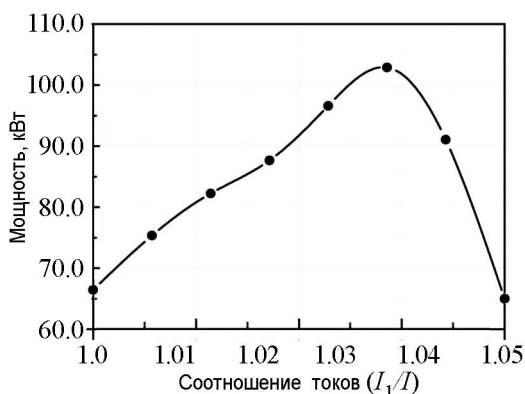


Рис. 30. Зависимости выходной мощности от отношения токов пучков [20]

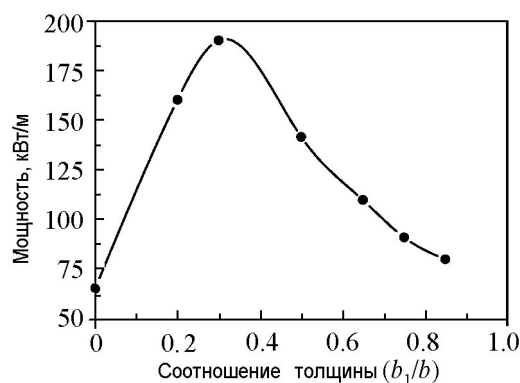


Рис. 31. Зависимости выходной мощности от отношения толщины пучков [20]

В описанных выше работах содержатся материалы, позволяющие говорить о перспективности применения двух электронных потоков для генерации излучения в терагерцовом диапазоне частот. Во всех четырех работах рассматриваются перспективные двухлучевые системы, позволяющие на их базе создать коротковолновые ЛОВ. На момент выхода каждой из этих работ, их авторами планировалось создание экспериментальных макетов систем.

Двухпотоковые модели с дискретным взаимодействием

Последним стоит цикл работ, посвященный модели, сочетающей в себе особенности приборов с дискретным взаимодействием и приборов с дифракционным излучением. В одной из них, [23], авторы рассматривают систему, в которой два электронных потока сначала по отдельности группируются, а затем взаимодействуют сквозь перфорированный экран, что приводит к значительному увеличению излучаемой мощности. Рассмотрим подробнее структуру.

Как видно из рис. 32, система состоит из двух секций – секции модуляции и секции излучения. В первой секции пучки не взаимодействуют друг с другом, находясь каждый в своем канале. При этом каждый пучок движется вблизи двухсторонней замедляющей гребенки. Значительная часть указанной работы посвящена анализу процессов в модулирующей системе. Мы не будем останавливаться на этом подробно, поскольку схожие задачи уже упоминались ранее в этом обзоре, причем в двухлучевом случае. Отметим лишь основные моменты. Под действием возникающего излучения Смита–Парселла происходит группировка электронных пучков в каналах. Далее пучки влетают в пространство, в котором происходит их взаимодействие друг с другом сквозь перфорированный экран, а также происходит процесс излучения. Согласно авторам, из-за наличия отверстий связи возникает синхронизация пучков. За счет этого происходит увеличение мощности излучения более чем в два раза по сравнению с вариантом, когда используется только один пучок с тем же полным током. Данные выводы авторами были сделаны на основании результатов компьютерного моделирования. В дальнейшем авторы предполагают создание многолучевых приборов подобного типа.

Еще одна работа этой научной группы посвящена специфической сэндвич-структуре [24]. На рис. 33 приведена схема рассматриваемой ими модели.

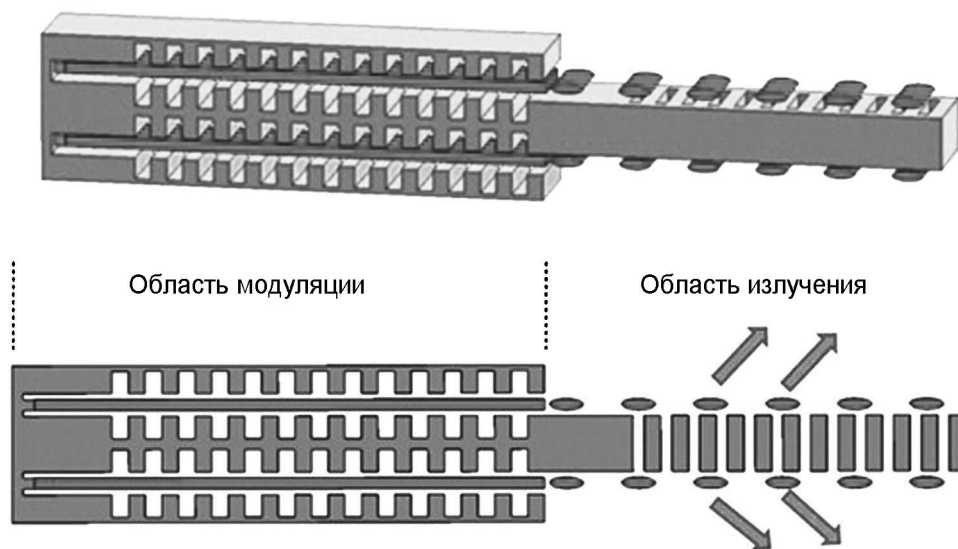


Рис. 32. Общий вид исследуемой системы с дискретным взаимодействием [23]

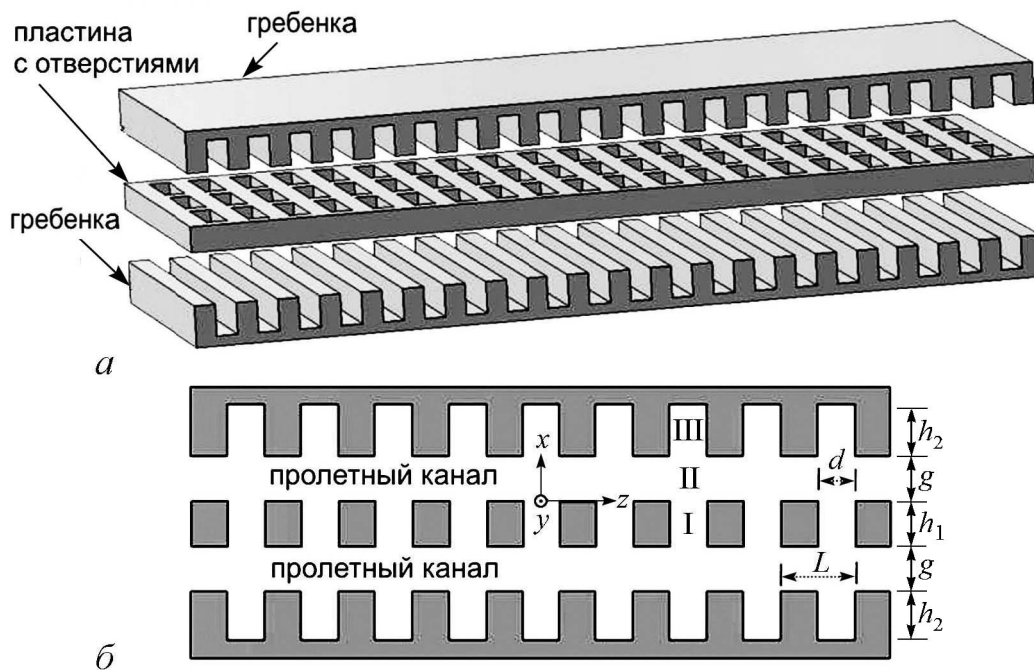


Рис. 33. *a* – трехмерная структура, *б* – двумерное изображение структуры [24]

Данная структура представляет собой три слоя – две замедляющие системы типа гребенка, между которыми находится пластина с отверстиями. Согласно терминологии, используемой авторами, по поверхности перфорированной пластины могут распространяться медленные электромагнитные волны, именуемые поверхностными плазмонами, способные взаимодействовать с электронными пучками. При достаточно малых размерах отверстий это может приводить к генерации электромагнитного излучения терагерцового диапазона частот. Этот же подход был использован в работе, описанной выше. Однако, поскольку данная структура является открытой, для ее

возбуждения требуются достаточно большие стартовые плотности токов (на частоте 0.3 ТГц требуется около 50 А/см^2). Также не приходится говорить о высоком КПД, поскольку группировка электронов оказывается весьма слабой. Для решения этих проблем авторами предложено использовать двухрядную гребенку, поскольку данная замедляющая система обладает высокой эффективностью в терагерцовом диапазоне. Таким образом, новая конструкция с двумя пучками должна позволить увеличить выходную мощность, тем самым снизить пусковые токи, а также увеличить КПД.

Авторами было показано, что поверхностные волны гребенок могут взаимодействовать с поверхностными плазмонами, а электронные пучки могут взаимодействовать друг с другом сквозь отверстия в пластине. Благодаря таким связям значительно повышаются глубина модуляции пучков, а также мощность излучения. Таким образом, значение пускового тока снижается почти до 10 А/см^2 , а КПД достигает 4%.

Заключение

Данный обзор является попыткой наиболее полного описания трудов, посвященных такому широкому во всех смыслах явлению, как двухпотоковая неустойчивость, применительно к вакуумной электронике сверхвысоких частот. При этом авторы отдают себе отчет в том, что в общем случае это явление выходит далеко за границы рассмотренной здесь области, поскольку данное понятие часто встречается в работах исследователей в области аэро- и гидродинамики, астрофизики, плазменной, твердотельной электроники и пр.

В первой части данного обзора были собраны работы, которые, по мнению авторов, внесли основной вклад в развитие идей двухпотоковой неустойчивости в электронике. Анализ этих работ позволяет говорить о чрезвычайной теоретической и практической значимости представленных в них результатов. Можно отметить, что усилиями исследователей были созданы теоретические модели, а в некоторых случаях даже рабочие макеты, двухлучевых модификаций почти всех известных генераторов и усилителей, применяемых в СВЧ-диапазоне. Однако серийных образцов выпустить не удалось, и к концу XX века интерес исследователей к двухпучковым системам значительно снизился, а само явление двухпотоковой неустойчивости оказалось практически забытым, что, на наш взгляд кажется крайне несправедливым. Этого же мнения, по всей видимости, придерживаются и исследователи, чьи работы приведены во второй части обзора. В ней проведен анализ последних наиболее актуальных работ, посвященных явлению двухпотоковой неустойчивости в электронике СВЧ, а также системам и приборам, в которых применяются два взаимодействующих электронных потока. Из этого анализа следует, что общая тенденция к смещению рабочих частот в терагерцовый диапазон фактически подарила двухпучковым системам вторую жизнь. В последнее время количество работ, посвященных этой теме, резко возросло. Исследователи со всего мира, в частности, из Китая, Кореи, Японии, Америки и других стран, изучают вопросы, связанные с генерацией и усилением сигналов на основе двухпотоковых систем. На наш взгляд, приведенные в данном обзоре работы, с одной стороны, в полной мере иллюстрируют заинтересованность зарубежных исследователей в данной теме, а с другой стороны, являются доказательством перспективности дальнейших исследований в этой области.

Библиографический список

1. *Svimonishvili T.* Modeling of a compact terahertz source based on the two-stream instability. Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy Engineering, The University of New Mexico, Albuquerque, New Mexico, 2012.
2. *Bishofberger K., Carlsten B., Faehl R.* Generation of millimeter and sub-millimeter radiation in a compact oscillator utilizing the two-stream instability // IVEC 2008, april 22-24, 2008. P. 164.
3. *Bishofberger K., Carlsten B., Faehl R.* // Proceedings of LINAC08, Victoria, BC, Canada, 1D-FELs, 504-505.
4. *Svimonishvili T., Bishofberger K., Faehl R.J., Carlsten B.E.* // Abstracts IEEE International Conference on Plasma Science. 2010. P. 1.
5. *Mohammadi S., Jazayeri M.* Parallel PIC simulation for two stream instability // Iranian Journal of Physics Research. 2010. Vol. 10, № 3.
6. *Ghorbanalilu M., Abdollahzadeh E., Rahbari E.* Particle-in-cell simulation of two stream instability in the non-extensive statistics // Laser and Particle Beams. 2014. Vol. 32. P. 399–407.
7. *Nadrifard S., Maraghechi B., Mohsenpour T.* Wave mode instabilities in a two-stream free-electron laser with a background plasma // Plasma Phys. Control. Fusion. 2013. Vol. 55.
8. *Kulish V.V., Lysenko O.V., Savchenko V.I., Majornikov I.G.* The two-stream free-electron laser as a source of electromagnetic femtosecond wave packages // Laser Physics. 2005. Vol. 15, № 12. P. 1629–1633.
9. *Marinelli A., Hemsing E., Rozenzweig J.B.* Using the relativistic two-stream instability for the generation of soft-X-ray attosecond radiation pulses // Phys. Rev. Lett. Feb. 2013. 110.
10. *Wang G., Litvinenko V.N., Jing Y.* Broad-band amplifier based on two-stream instability // Proceedings of FEL 2013. New York, NY, USA.
11. *Umeda T.* Study on Nonlinear Processes of Electron Beam Instabilities via Computer Simulations. Ph.D. Thesis, Kyoto University, 2004.
12. *Umeda T., Omura Y., Miyake T., Matsumoto H.* Nonlinear evolution of the electron two-stream instability: Two-dimensional particle simulation // Proceedings of ISSS-7, March, 2005. P. 26–31.
13. *Li K., Liu W., Wang Y., Cao M.* Dispersion characteristics of two-beam folded waveguide for terahertz radiation // IEEE Transactions on Electron Devices. Dec. 2013. Vol. 60, 12.
14. *Booske J.H., Converse M.C., Kory C.L., Chevalier C.T., Gallagher D.A., Kreisler K.E., Heinen V.O., Bhattacharjee S.* Accurate parametric modeling of folded waveguide circuits for millimeter-wave traveling wave tubes // IEEE Transaction on Electron Devices. May 2005. Vol. 52, № 5. P. 685.
15. *San-Blas A.A., Gimeno B.* A rigorous and efficient full-wave analysis of uniform bends in rectangular waveguide under arbitrary incidence // IEEE Trans. Microw. Theory Tech. Feb. 2003. Vol. 51, № 2. P. 397–405.
16. *Weisshaar A.* A rigorous and efficient method of moments solution for curved waveguide bends // IEEE Trans. Microw. Theory Tech. Dec. 1992. Vol. 40, № 12. P. 2200–2206,

17. *Liu W., Liu P., Yong W., Yang Z.* Enhancements of Cherenkov radiation by two electron beams // *IEEE Trans. on Plasma Science*. Dec. 1992. Vol. 40, 3.
18. *Liu W., Liang Zh., Yang Z., Li D., Imasaki K.* Two-stream Smith–Purcell free-electron laser using a dual-grating: Linear analysis // *Proceedings of FEL 2006*, Bessy, Germany.
19. *Liu W., Yang Z., Liang Zh., Li D., Imasaki K., Shi Z., Lan F., Park G.* Enhancement of terahertz Smith–Purcell radiation by two electron beams // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research*. 2007. A 580.
20. *Liu W., Yang Z., Liang Zh., Li D., Imasaki K., Shi Z., Lan F., Park G., Liu Sh.* Enhancements of terahertz radiation from a grating waveguide by two-stream instability. // *IEEE Transactions on Plasma Science*. 2008. Vol. 36. Issue 3. P. 748–756.
21. *Freund H.P., Douglas D., and O’Shea P.G.* Multiple-beam free-electron lasers // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A: Accel. Spectrom. Detect. Assoc. Equip.* Jul. 2003. Vol. 507, № 1. P. 373–377.
22. *Garate E., Cherry R., Fisher A., and Phillips P.* High gain metal grating free-electron laser // *J. Appl. Phys.* Dec. 1988. Vol. 64, № 12. P. 6618–6625.
23. *Zhang Y. and Dong L.* Enhanced coherent terahertz Smith–Purcell superradiation excited by two electron-beams // *Optics Express*. 24 September 2012. Vol. 20, № 20.
24. *Zhang Y., Zhou Y., Dong L.* THz radiation from two electron-beams interaction within a bi-grating and a subwavelength holes array composite sandwich structure // *Optics Express*. 23 September 2013. Vol. 21, № 19.

Поступила в редакцию 19.02.2016
После доработки 15.04.2016

TWO-STREAM INSTABILITY – LINEAR AND NONLINEAR MICROWAVE PHENOMENA

Part II

A. V. Titov

National Research Saratov State University
Russia, 410012 Saratov, Astrahanskaya, 83
E-mail: Titovav88@gmail.com

This article is the second part of the review of works devoted to the phenomenon of two-stream instability in microwave electronics. As it is known, a problem of creating devices operating in the terahertz frequency range is a rather actual today. Although there are many devices that can generate or amplify signals in this range, most of them refer to extremely powerful relativistic devices. At the same time there is a lack of compact medium power devices. In recent years, models based on the interaction of two electron beams appear in the papers of foreign research groups even more often. This review is an effort more fully describe the articles dealing with such wide in every sense of the phenomenon of two-stream instability in relation to the vacuum microwave electronics. The authors realize that, in general, this phenomenon extends far beyond the boundary of a domain considered here, since this concept is often found in the papers in the field of aerodynamics and hydrodynamics, astrophysics, plasma, solid-state electronics, etc. It

follows that the general tendency to shift operating frequencies in the terahertz range gave a second life to two-stream system. Researchers from around the world, especially from China, Korea, Japan, America and other countries, are studying problems related to the generation and amplification of signals based on the two-stream system. In our view, on the one hand, contained in this review articles illustrate fully the interest of foreign researchers in this subject, and on the other hand, are proof of the prospects for further research in this area.

Keywords: Two-stream instability, two electron streams, double-stream amplifier, electron-wave tube.

DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-2-41-63

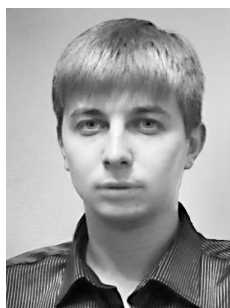
Paper reference: Titov A.V. Two-stream instability – linear and nonlinear microwave phenomena. Part II // *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2016. Vol. 24, № 2. P. 41–63.

References

1. *Svimonishvili T.* Modeling of a compact terahertz source based on the two-stream instability. Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy Engineering, The University of New Mexico, Albuquerque, New Mexico, 2012.
2. *Bishofberger K., Carlsten B., Faehl R.* Generation of millimeter and sub-millimeter radiation in a compact oscillator utilizing the two-stream instability // *IVEC 2008*, april 22–24, 2008. P. 164.
3. *Bishofberger K., Carlsten B., Faehl R.* // *Proceedings of LINAC08*, Victoria, BC, Canada, 1D-FELs, P. 504–505.
4. *Svimonishvili T., Bishofberger K., Faehl R.J., Carlsten B.E.* // *Abstracts IEEE International Conference on Plasma Science*. 2010. P. 1.
5. *Mohammadi S., Jazayeri M.* Parallel PIC simulation for two stream instability // *Iranian Journal of Physics Research*. 2010. Vol. 10, № 3.
6. *Ghorbanalilu M., Abdollahzadeh E., Rahbari E.* Particle-in-cell simulation of two stream instability in the non-extensive statistics // *Laser and Particle Beams*. 2014. Vol. 32, P. 399–407.
7. *Nadrifard S., Maraghechi B., Mohsenpour T.* Wave mode instabilities in a two-stream free-electron laser with a background plasma // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2013. Vol. 55.
8. *Kulish V.V., Lysenko O.V., Savchenko V.I., Majornikov I.G.* The two-stream free-electron laser as a source of electromagnetic femtosecond wave packages // *Laser Physics*. 2005. Vol.15, №12. P. 1629–1633.
9. *Wang G., Litvinenko V.N., Jing Y.* Broad-band amplifier based on two-stream instability // *Proceedings of FEL 2013*. New York, NY, USA.
10. *Marinelli A., Hemsing E., Rozenzweig J.B.* Using the relativistic two-stream instability for the generation of soft-X-ray attosecond radiation pulses // *Phys. Rev. Lett.* Feb. 2013. 110.
11. *Umeda T.* Study on Nonlinear Processes of Electron Beam Instabilities via Computer Simulations. Ph.D. Thesis, Kyoto University, 2004.
12. *Umeda T., Omura Y., Miyake T., Matsumoto H.* Nonlinear evolution of the electron two-stream instability: Two-dimensional particle simulation // *Proceedings of*

ISSS-7, March, 2005. P. 26–31.

13. *Li K., Liu W., Wang Y., Cao M.* Dispersion characteristics of two-beam folded waveguide for terahertz radiation // IEEE Transactions on Electron Devices. Dec. 2013. Vol. 60, 12.
14. *Booske J.H., Converse M.C., Kory C.L., Chevalier C.T., Gallagher D.A., Kreisler K.E., Heinen V.O., Bhattacharjee S.* Accurate parametric modeling of folded waveguide circuits for millimeter-wave traveling wave tubes // IEEE Transaction on Electron Devices. May 2005. Vol. 52, № 5. P. 685.
15. *San-Blas A.A., Gimeno B.* A rigorous and efficient full-wave analysis of uniform bends in rectangular waveguide under arbitrary incidence // IEEE Trans. Microw. Theory Tech. Feb. 2003. Vol. 51, № 2. P. 397–405.
16. *Weisshaar A.* A rigorous and efficient method of moments solution for curved waveguide bends // IEEE Trans. Microw. Theory Tech. Dec. 1992. Vol. 40, № 12. P. 2200–2206.
17. *Liu W., Liu P., Yong W., Yang Z.* Enhancements of Cherenkov radiation by two electron beams // IEEE Trans. on Plasma Science. Dec. 1992. Vol. 40, 3.
18. *Liu W., Liang Zh., Yang Z., Li D., Imasaki K.* Two-stream Smith–Purcell free-electron laser using a dual-grating: Linear analysis // Proceedings of FEL 2006, Bessy, Germany.
19. *Liu W., Yang Z., Liang Zh., Li D., Imasaki K., Shi Z., Lan F., Park G.* Enhancement of terahertz Smith–Purcell radiation by two electron beams // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. 2007. A 580.
20. *Liu W., Yang Z., Liang Zh., Li D., Imasaki K., Shi Z., Lan F., Park G., Liu Sh.* Enhancements of terahertz radiation from a grating waveguide by two-stream instability // IEEE Transactions on Plasma Science. 2008. Vol. 36. Issue 3. P. 748–756.
21. *Freund H.P., Douglas D., and O'Shea P.G.* Multiple-beam free-electron lasers // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A: Accel. Spectrom. Detect. Assoc. Equip. Jul. 2003. Vol. 507, № 1. P. 373–377.
22. *Garate E., Cherry R., Fisher A., and Phillips P.* High gain metal grating free-electron laser // J. Appl. Phys. Dec. 1988. Vol. 64, № 12. P. 6618–6625.
23. *Zhang Y. and Dong L.* Enhanced coherent terahertz Smith–Purcell superradiation excited by two electron-beams // Optics Express. 24 September 2012. Vol. 20, № 20.
24. *Zhang Y., Zhou Y., Dong L.* THz radiation from two electron-beams interaction within a bi-grating and a subwavelength holes array composite sandwich structure // Optics Express. 23 September 2013. Vol. 21, № 19.



Титов Алексей Владимирович – родился в Саратове (1988). Окончил Саратовский государственный университет (2010). После окончания поступил в аспирантуру на специальность «радиофизика». Ассистент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Круг интересов – электроника СВЧ, теория колебаний, радиофизика, нелинейная динамика, физика плазмы, вакуумная микроэлектроника. Опубликовал 5 научных статей в журналах, включенных в перечень ВАК, из них 3 по теме двухпотоковой неустойчивости.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: Titovav88@gmail.com



ОБ УЧЕТЕ ПОПЕРЕЧНЫХ ДВИЖЕНИЙ ЭЛЕКТРОНОВ В РЕЗИСТИВНОМ УСИЛИТЕЛЕ

А. А. Фунтов

Национальный исследовательский
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83

E-mail: aafuntov@mail.ru

Резистивный усилитель – вакуумный СВЧ прибор, не получивший распространения, но снова привлечший внимание. Основные особенности – отсутствие необходимости в замедляющей системе и почти полное отсутствие обратной связи между выходом и входом. Усиление происходит благодаря сдвигу фаз между электронным потоком и переменными составляющими поля, возникающего благодаря присутствию поглощающих стенок.

В классическом варианте данного прибора высокие значения коэффициента усиления имеют место при замене покрытия из обычного диэлектрика метаматериалом с $\varepsilon < 0$.

Рассмотрена линейная теория резистивного устройства с бесконечно широким электронным потоком и соосным пучку магнитным полем. Произведен учет поперечных движений электронов. Рассмотрены случаи, когда поток движется сквозь среду с $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon < 0$.

Данная работа оригинальна тем, что для резистивного усилителя впервые произведен аналитический учет поперечных движений электронов, модуляции пучка и снятие сигнала с помощью отрезков линий передачи.

Показано, что влияние поперечного движения электронов и попутного потоку магнитного поля приводит к дисперсионному уравнению шестого порядка и появлению циклотронных волн. Рассмотрено приближение, снизившее порядок дисперсионного уравнения до четвертого и показавшее хорошее соответствие с общим случаем. В этом приближении при расчете коэффициентов усиления найдена вторая нарастающая, циклотронная, волна, которая на относительно больших длинах становится сравнимой с нарастающей волной пространственного заряда, что приводит к увеличению усиления.

В случае $\varepsilon < 0$ мнимые компоненты корней дисперсионного уравнения получаются больше и терпят разрыв. Расчет показывает большее усиление, чем при $\varepsilon > 0$ и при меньшей длине резистивной секции.

Ключевые слова: Резистивный усилитель, поперечные движения, линейная теория, метаматериал.

DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-2-64-76

Ссылка на статью: Фунтов А.А. Об учете поперечных движений электронов в резистивном усилителе // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 2. С. 64–76.

Введение

В последнее время под влиянием интереса к субмиллиметровому диапазону электромагнитных волн исследователи вновь обратили внимание на резистивный усилитель [1]. К достоинствам этого прибора можно отнести отсутствие необходимости в замедляющей системе, высокие значения коэффициента усиления, слабо зависящие от потенциала пучка, и практически полное отсутствие обратной связи между выходом и входом. Последнее обусловлено тем, что нет передачи энергии в направлении противоположном движению пучка. Усиление происходит благодаря сдвигу фаз между электронным потоком и переменными составляющими поля, возникающего благодаря присутствию поглощающих стенок. Но из-за большого значения фактора шума (около 20 дБ для первых образцов [2]) и технологических трудностей прибор не получил практического применения.

В связи с развитием технологий появляется возможность вновь использовать данный прибор. Более того, вместо обычного поглощающего покрытия, диэлектрика, можно применить метаматериал. В работе [1] выполнен теоретический анализ и компьютерное моделирование указанного случая. Однако вызывает вопросы способ подсчета коэффициента усиления, поскольку для этого использовались переменные компоненты скорости в двух точках, где они испытывают экспоненциальный рост.

В данной работе представлены результаты теоретического анализа резистивного усилителя с поглощающей средой не только из диэлектрика, как в [2–4], но и для среды из метаматериала, а также исследовано влияние поперечного движения электронов и магнитного поля модели резистивного усилителя.

1. Описание модели и дисперсионное уравнение

Рассмотрим следующую модель. Ионно-скомпенсированный бесконечно широкий по осям x и y электронный поток движется с постоянной скоростью v_0 вдоль оси z в соосном магнитном поле в среде с некой эффективной диэлектрической проницаемостью ε . В этом случае уравнения движения, непрерывности и Пуассона примут вид

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{e}{m} \text{grad } \varphi + \frac{e}{m} [\bar{v}\bar{B}], \quad (1)$$

$$\text{div}(\rho\bar{v}) = -\frac{\partial\rho}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (3)$$

где \bar{v} – скорость потока; φ – потенциал поля пространственного заряда; e/m – удельный заряд электрона; \bar{B} – магнитная индукция; ρ – объемная плотность заряда потока; $\varepsilon = \varepsilon_0(1 - \sigma)$; ε_0 – диэлектрическая постоянная; σ – безразмерное комплексное число, смысл которого будет пояснен ниже.

Ограничимся случаем слабого сигнала, полагая, что все переменные величины имеют вид $f = f_0 + \tilde{f}$, где $f_0 \gg \tilde{f}$, и \tilde{f} изменяются по закону $e^{j(\omega t - \bar{k}\bar{r})}$ (\bar{k} – волновой вектор, \bar{r} – радиус вектор).

В системе координат (x, y, z) направим ось z вдоль магнитного поля \vec{B} , тогда ось y перпендикулярна \vec{k} и вектор \vec{k} имеет компоненты k_z и $k_\perp = k_x$. Очевидно, что

$$[\vec{v}\vec{B}] = \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} = \bar{i}v_y B - \bar{j}v_x B.$$

Компоненты уравнения (1) запишутся в виде

$$j(\omega - v_0 k_z)v_z = j\frac{e}{m}k_z\varphi, \quad (4)$$

$$j(\omega - v_0 k_z)v_x = j\frac{e}{m}k_\perp\varphi + \omega_c v_y,$$

$$j(\omega - v_0 k_z)v_y = -\omega_c v_x,$$

где $\omega_c = (e/m)B$ – циклотронная частота. Из двух последних уравнений находим

$$v_x = \frac{\frac{e}{m}k_\perp(\omega - v_0 k_z)}{(\omega - v_0 k_z)^2 - \omega_c^2}\varphi, \quad (5)$$

$$v_y = \frac{j\frac{e}{m}k_\perp\omega_c}{(\omega - v_0 k_z)^2 - \omega_c^2}\varphi. \quad (6)$$

Представим (2) в виде

$$\operatorname{div}(\rho\vec{v}) = \operatorname{div}(\rho_0 v_\perp + \rho_0 v_z + \tilde{\rho}v_0) = -j\omega\tilde{\rho}, \quad (7)$$

где ρ_0 – постоянная составляющая плотности. Подставив выражения (4) и (5) в (7), получим

$$\tilde{\rho} = \rho_0 \frac{e}{m}\varphi \left(\frac{k_\perp^2}{(\omega - v_0 k_z)^2 - \omega_c^2} + \frac{k_z^2}{(\omega - v_0 k_z)^2} \right). \quad (8)$$

Уравнение (3) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -(k_\perp^2 + k_z^2)\varphi = -\frac{\tilde{\rho}}{\varepsilon}. \quad (9)$$

Подставив (8) в (9), находим дисперсионное уравнение

$$(k_\perp^2 + k_z^2)(1 - \sigma) = \omega_p^2 \left(\frac{k_\perp^2}{(\omega - v_0 k_z)^2 - \omega_c^2} + \frac{k_z^2}{(\omega - v_0 k_z)^2} \right),$$

где $\omega_p^2 = (e\rho_0)/(m\varepsilon_0)$ – квадрат плазменной частоты. Введя переменные $\xi = (v_0 k_\perp)/\omega_p$, $b = \omega_c/\omega_p$, $\Omega = \omega/\omega_p$, $\eta = (v_0 k_z)/\omega_p$, перепишем дисперсионное уравнение в безразмерном виде

$$(\eta^2 + \xi^2)(1 - \sigma) = \frac{\eta^2}{(\Omega - \eta)^2} + \frac{\xi^2}{(\Omega - \eta)^2 - b^2}. \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что в случае отсутствия поперечного движения ($\xi = 0$, или отсутствие магнитного поля) дисперсионное уравнение (10) примет вид

$$(\Omega - \eta)^2 = \frac{1}{1 - \sigma}. \quad (11)$$

Выбор σ задает эффективную диэлектрическую проницаемость, то есть характеризует свойства среды. Если положить $\sigma = 1 - \varepsilon_r + jY/(\omega\varepsilon_0)$ (где $\varepsilon_r = \text{Re } \varepsilon/\varepsilon_0$, Y – проводимость), то получим дисперсионное уравнение классического резистивного усилителя (см., например, [2, ф. (13)], где $Y = \sigma$ в обозначениях этой работы).

В работе [1] исследуется дисперсионное уравнение для среды из метаматериала с $\varepsilon/\varepsilon_0 = 1 - \omega_{pM}^2/[\omega(\omega + j\nu)]$ (здесь $\varepsilon < 0$, ν – частота столкновений в модели Друде, ω_{pM} – плазменная частота метаматериала). Плазменная частота определяется геометрией и параметрами структуры метаматериала. Для того, чтобы среда велась себя как метаматериал с $\varepsilon < 0$, должно выполняться условие $\omega^2 < \omega_p^2$.

В данной работе считаем, что: при $\text{Re } \sigma < 1$ среда является обычным диэлектриком с $\varepsilon > 0$; при $\text{Re } \sigma > 1$ имеем метаматериал с $\varepsilon < 0$. Мнимая часть σ отвечает за потери в среде и может соответствовать проводимости. Следовательно, при $\text{Im } \sigma > 0$ в среде есть потери, а при $\text{Im } \sigma < 0$ – отрицательное затухание.

2. Одномерная модель

Исследуем дисперсионное уравнение (11). Покажем, что для среды с $\varepsilon > 0$ и $\xi = 0$ (случай классического резистивного усилителя) результаты настоящей работы совпадают с общеизвестными, а для среды с $\varepsilon < 0$ (метаматериал) выявим отличия от классического случая.

На рис. 1 приведены зависимости действительных и мнимых частей корней (11) от $\text{Im } \sigma$ для среды $\varepsilon > 0$ и для среды с $\varepsilon < 0$. Разрыв на рис. 1, б при $\text{Im } \sigma = 0$ объясняется тем, что в метаматериале $(1 - \text{Re } \sigma) < 0$, то есть величина $\sqrt{1 - \sigma}$ становится чисто мнимой.

Для подтверждения правильности нашего подхода представим полученные зависимости в несколько иной форме.

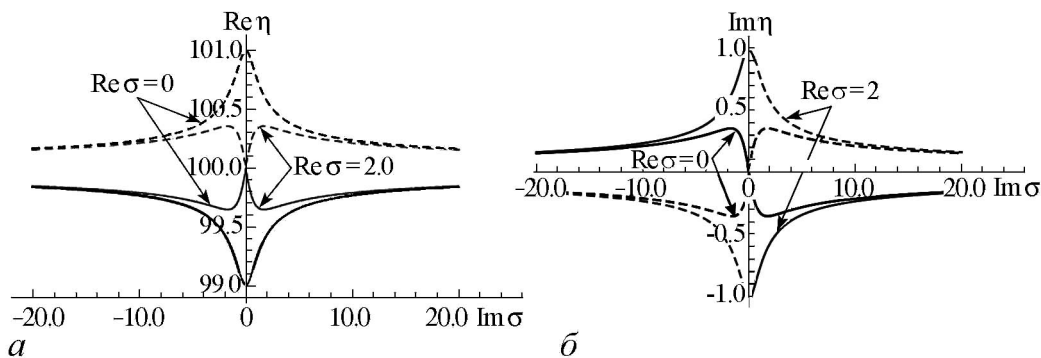


Рис. 1. Зависимости действительных и мнимых частей корней дисперсионного уравнения (11) от $\text{Im } \sigma$: a – для среды $\varepsilon > 0$ (случай классического резистивного усилителя); b – для среды с $\varepsilon < 0$ (метаматериал). $\Omega = 100$

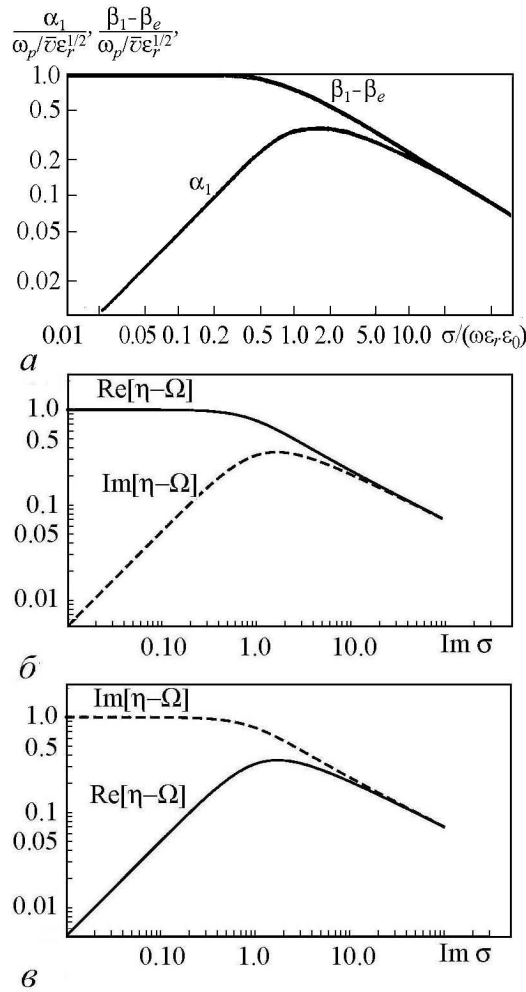


Рис. 2. Зависимости компонент корней дисперсионного уравнения от мнимой части диэлектрической проницаемости: *a* – рис. 8.3 из [2], *б* – корни (11) для среды с $\varepsilon > 0$ (случай классического резистивного усилителя); *в* – для среды с $\varepsilon < 0$ (метаматериал). $\Omega = 100$

3. Модель с учетом поперечного движения электронов

Рассмотрим более общий случай, учитывающий конечное магнитное поле и поперечные движения электронов для моделей с обычным диэлектриком и метаматериалом. Если $\omega - v_0 k_z \ll \omega_c$, то (10) перейдет в уравнение четвертого порядка

$$(\eta^2 + \xi^2)(1 - \sigma) = \frac{\eta^2}{(\Omega - \eta)^2} - \frac{\xi^2}{b^2}, \quad (12)$$

которое решается аналитически. Зависимости корней (12) приведены на рис. 3. Из рисунка видно, что появились циклотронные волны. Корни с экстремумами на рис. 3, *б* и *з*, соответствующие волнам пространственного заряда, совпадают с ана-

На рис. 2, *a* приведены зависимости $\alpha_1/(\sqrt{\varepsilon_r}\omega_p/v_0)$ и $(\beta_1 - \beta_e)/(\sqrt{\varepsilon_r}\omega_p/v_0)$ от $\sigma'/(\omega\varepsilon_r\varepsilon_0)$ (см. [2, рис. 8.3]), где α_1 – амплитудная постоянная (мнимая компонента), β_1 – фазовая постоянная (действительная компонента одного из корней дисперсионного уравнения), $\beta_e = \omega/v_0$ – электронная постоянная распространения (чисто действительная величина), σ – имеет смысл проводимости в работе [2]. В обозначениях настоящей статьи данные отношения примут вид: $\text{Im}[\eta_1 - \Omega]/\sqrt{\varepsilon_r}$ и $\text{Re}[\eta_1 - \Omega]/\sqrt{\varepsilon_r}$ от $\text{Im}\sigma$ (здесь σ – определяет эффективную диэлектрическую проницаемость).

Кривые на рис. 2, *a* совпадают с кривыми рис. 2, *б*, так как $\text{Re}\sigma = 0 \Rightarrow \varepsilon_r = 1$. В случае метаматериала (рис. 2, *в*) $\text{Re}\sigma = 2 \Rightarrow \varepsilon_r = -1$, а значит мнимые и действительные части корней поменялись местами.

Из представленных выше примеров видно, что модули мнимых частей корней дисперсионного уравнения в случае метаматериала больше, чем для сред с $\varepsilon > 0$. Из последнего следует, что для среды с $\varepsilon < 0$ усиление должно быть больше, чем для обычного диэлектрика. Таким образом, специфика метаматериала (по сравнению с классическим резистивным усилителем) проявится в смене $\text{Re}[\eta_n]$ и $\text{Im}[\eta_n]$ местами и разрыве $\text{Im}[\eta_n]$ при $\text{Im}\sigma = 0$ (см. рис. 1, *б*).

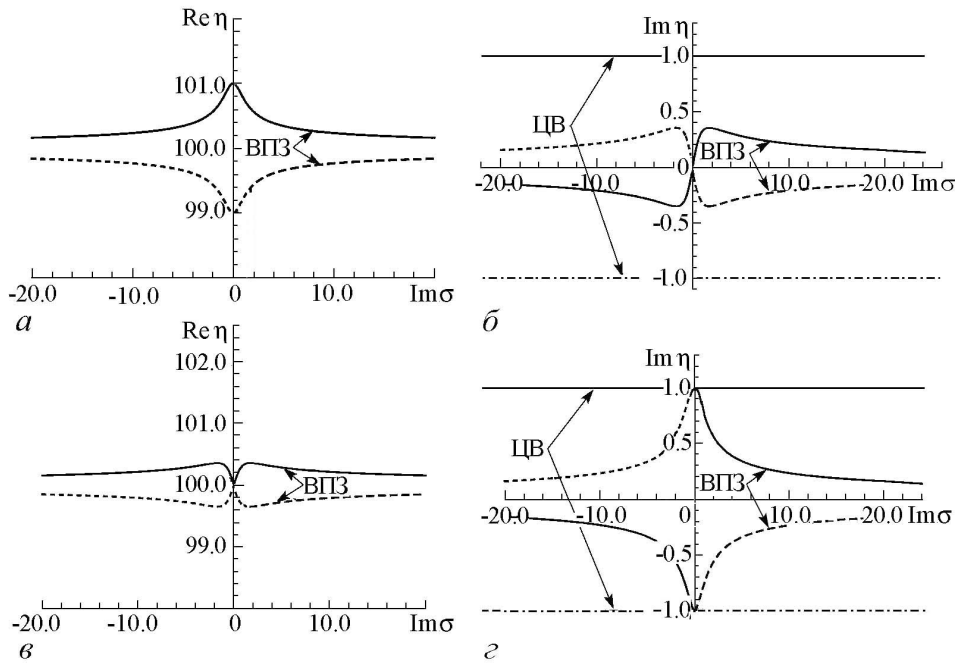


Рис. 3. Зависимости действительных и мнимых частей корней дисперсионного уравнения (12) от $\text{Im } \sigma$: $a, б$ – для среды с $\varepsilon > 0$; $в, г$ – для среды с $\varepsilon < 0$. $\xi = 1, b = 10, \Omega = 100$

логичными на рис. 1, б. Любопытно отметить, что у циклотронных волн имеется разрыв $\text{Im } \eta$, что также обусловлено чисто мнимым значением $\sqrt{1 - \sigma}$ при $\text{Im } \sigma = 0$.

Следует отметить, что введение в рассмотрение поперечного движения позволило учесть влияние соосного потока магнитного поля, проявившееся в возникновении циклотронной волны. Это привело к новым режимам, где вклад циклотронной волны превышает вклад волн пространственного заряда.

4. Усиление в случае обычного диэлектрика

Для расчета коэффициента усиления рассмотрим следующую модель среды (рис. 4). Электронный поток модулируется по току во входной секции, проходит через резистивную секцию и наводит поле в выходной секции.

В качестве модулирующего и съемного устройств используем отрезки линии передачи. Воспользуемся на входе приближением заданного поля, считая поток одномерным, тогда на входе в резистивную секцию ток примет вид

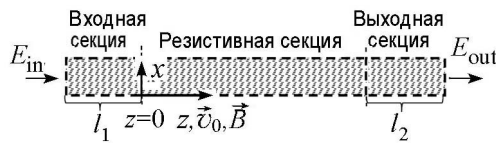


Рис. 4. Рассматриваемая модель среды

$$\begin{aligned}
 I_z(0) &= \frac{j\beta_e I_0}{2V_0} \int_{l_1}^0 E_{in} \frac{\sin(\beta_p [l_1 - z])}{\beta_p} e^{-j\beta_e [l_1 - z]} dz = \\
 &= j\beta_e I_0 E_{in} \frac{\beta_p - e^{-j\beta_e l_1} (\beta_p \cos \beta_p l_1 + j\beta_e \sin \beta_p l_1)}{2V_0 \beta_p (\beta_p^2 - \beta_e^2)}.
 \end{aligned}$$

Найдем безразмерную плотность тока в плоскости $z = 0$

$$\frac{i_z(0)}{i_0} = \frac{I_z(0)}{I_0} = j\Omega \frac{E_{in}}{V_0\beta_p} \frac{1 - e^{-j\Omega l_1} (\cos l_1 + j\Omega \sin l_1)}{2(1 - \Omega^2)},$$

где $\beta_p = \omega_p/v_0$, $x = \beta_p x$, I_z и I_0 – переменный и постоянный токи пучка, $i_0 = v_0\rho_0$ – постоянная плотность тока, V_0 – ускоряющее напряжение, l_1 – безразмерная длина входного отрезка линии передачи.

Четырехволновое приближение. В четырехволновом приближении возмущение потенциала можно представить в виде

$$\varphi = \sum_{n=1}^4 \varphi_n e^{-j(k_{zn}z + k_{\perp}x)}.$$

Используем следующие условия в плоскости $z = 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^4 \varphi_n &= 0, \\ \sum_{n=1}^4 \varphi_n \frac{e}{m} \left(\frac{k_{zn}^2}{(\omega - v_0 k_{zn})^2} - \frac{k_{\perp}^2}{\omega_c^2} \right) &= \frac{\rho(0)}{\rho_0}, \\ \sum_{n=1}^4 \frac{e}{m} \frac{k_{\perp} (\omega - v_0 k_{zn})}{-\omega_c^2} \varphi_n &= v_x(0) = 0, \\ \sum_{n=1}^4 \frac{j \frac{e}{m} k_{\perp} \omega_c}{(\omega - v_0 k_{zn})^2 - \omega_c^2} \varphi_n &= v_y(0) = 0, \end{aligned}$$

откуда можно найти φ_n методом Крамера.

Будем считать, что модуляция по скорости отсутствует, то есть $v_z(0) = 0 \Rightarrow \Rightarrow i_z(0) = v_0\rho(0)$. Тогда

$$\frac{v_0\rho(0)}{i_0} = \frac{\rho(0)}{\rho_0} = j\Omega \frac{E_{in}}{V_0\beta_p} \frac{1 - e^{-j\Omega l_1} (\cos l_1 + j\Omega \sin l_1)}{2(1 - \Omega^2)}. \quad (13)$$

Плотность тока с учетом (12) можно записать в виде

$$\frac{i_z(z)}{i_0} = \frac{1}{2} (1 - \sigma) \sum_{n=1}^4 (\xi_n^2 + \eta_n^2) \frac{\varphi_n}{V_0} e^{-j\eta_n z} = \frac{E_{in}}{2V_0\beta_p} \sum_{n=1}^4 i_n(0) e^{-j\eta_n z},$$

где $i_n(0) = (1 - \sigma) (\xi_n^2 + \eta_n^2) a_n$ – безразмерная амплитуда парциальной волны плотности тока, $a_n = \frac{\varphi_n}{V_0} / \frac{E_{in}}{V_0\beta_p}$. Отношение $E_{in}/(V_0\beta_p)$ нетрудно выделить из φ_n при заданных начальных условиях. Выражения для a_n не приводим из-за громоздкости формул.

Поле в выходной секции представим в приближении заданного поля

$$E_{out} = -\frac{K\beta_e^2}{2} \int_z^{z+l_2} I_z(z) e^{-j\beta_e(l_2-\tau)} d\tau = \frac{j}{2} K\beta_e I_0 \frac{i_z(z)}{i_0} (1 - e^{-j\beta_e l_2}).$$

Используя выражение для плотности тока, находим

$$E_{out} = jC^3 E_{in} \Omega (1 - e^{-j\Omega l_2}) \sum_{n=1}^4 i_n(0) e^{-j\eta_n z},$$

где $C^3 = (KI_0)/(4V_0)$, K – сопротивление связи линии передачи, l_2 – длина выходной секции линии передачи.

Будем искать коэффициент усиления в виде

$$G = 20 \lg \left| \frac{E_{out}}{E_{in}} \right| = 20 \lg \left| jC^3 \Omega (1 - e^{-j\Omega l_2}) \sum_{n=1}^4 i_n(0) e^{-j\eta_n z} \right|. \quad (14)$$

Одномерная модель. Приведем зависимости коэффициента усиления для классического резистивного прибора, используя корни (11) с граничными условиями

$$\sum_{n=1}^2 \varphi_n = 0,$$

$$\sum_{n=1}^2 \frac{k_{zn}^2}{(\omega - v_0 k_{zn})^2} \varphi_n \frac{e}{m} = \frac{\rho(0)}{\rho_0},$$

считая коэффициент усиления по формуле

$$G = 20 \times \lg \left| jC^3 \Omega (1 - e^{-j\Omega l_2}) \sum_{n=1}^2 i_n(0) e^{-j\eta_n z} \right|.$$

На рис. 5 изображены зависимости коэффициента усиления от безразмерной длины резистивной секции, $\text{Im} \sigma$ и безразмерной частоты сигнала. Здесь и далее $l_1 = l_2 = 0.1$.

Из рис. 5, б видно, что правая половина графика соответствует экспериментальной зависимости коэффициента усиления от проводимости в первой статье по резистивным усилителям [4], так как $\text{Im} \sigma$ определяет мнимую часть диэлектрической проницаемости, а следовательно, и проводимость. Однако зависимость от частоты сигнала (рис. 5, в) отличается от представленной в этой же работе из-за того, что мы не делали предположений о

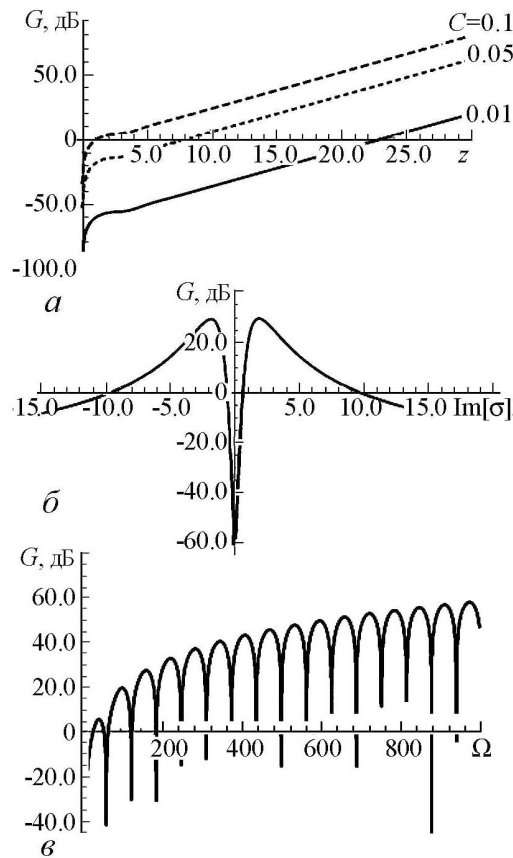


Рис. 5. Зависимости коэффициента усиления (классический случай) от параметров модели: а – при $\Omega = 100$, $\sigma = j$; б – при $\Omega = 100$, $z = 30$, $C = 0.01$; в – при $\sigma = j$, $z = 30$, $C = 0.01$

структуре σ . Если рассматривать $G(\Omega)$ как в [4], необходимо произвести замену $\sigma \rightarrow j(\text{Im } \sigma)/\Omega$, а также взять другое отношение длины отрезка линии передачи к длине резистивной секции и другой параметр Пирса C . Более того, в [4] нет данных для оценки ω_p . Не исключена вероятность, что в эксперименте удалось снять только один максимум вместо нескольких (см. рис. 5, в), что не противоречит зависимости инкремента усиления (мнимой части нарастающего корня дисперсионного уравнения) от частоты (см. [2, рис. 17]).

Случай учета поперечного движения электронов. Как было показано в разделе 3, введение в модель поперечного движения привело к появлению циклотронных волн. Рассмотрим их влияние на динамику системы. Усиление вычисляем по формуле (14).

Из рис. 6, а, б видно, что начиная с $z \approx 16$ вместо одной нарастающей волны пространственного заряда (как в классическом резистивном усилителе) появляются две нарастающие волны: волна пространственного заряда и циклотронная волна, интерференция которых позволяет достигнуть большего усиления. На рис. 6, в изображена типичная ситуация для классического резистивного усилителя, которая справедлива и для четырехволнового приближения при $z < 5$ (см. рис. 6, б), когда происходит интерференция только нарастающей и затухающей волн пространственного заряда. На рис. 6, з показан случай, когда нарастающая циклотронная волна стала сравнимой с нарастающей волной пространственного заряда.

Зависимость $G(\text{Im } \sigma)$ на рис. 7, а отличается от представленной для классического резистивного усилителя (см. рис. 5, б). Наличие циклотронной волны привело к тому, что у кривой лишь один максимум при $\sigma = 0$, при этом волны пространственного заряда становятся волнами постоянной амплитуды (рис. 7, з). Заметим, что усиление возможно только благодаря наличию циклотронных волн, одна из которых становится нарастающей из-за разрыва $\text{Im } n_1$ при $\text{Im } \sigma = 0$.

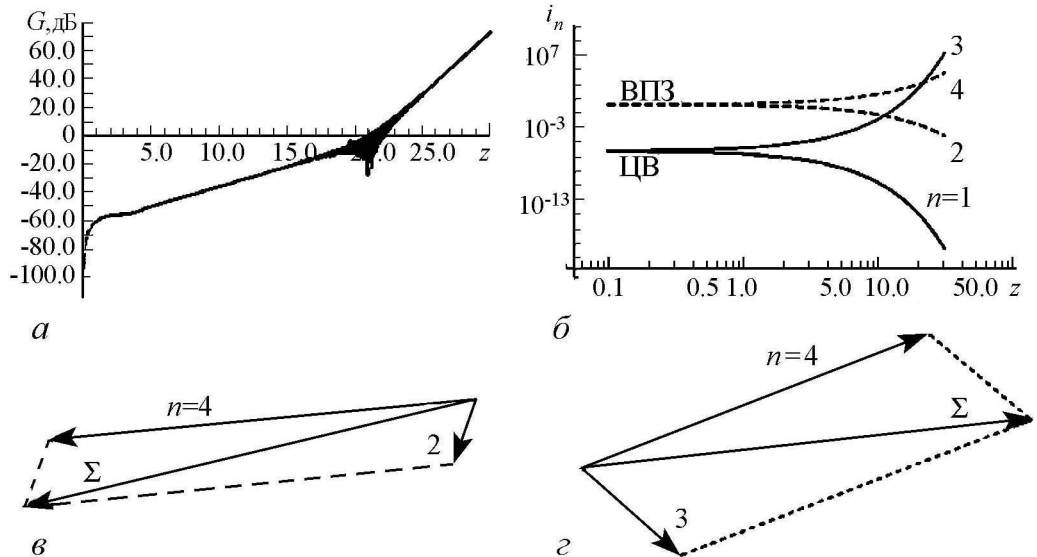


Рис. 6. Зависимости характеристик модели от длины резистивной секции при $\Omega = 100$, $\sigma = j$, $\xi = 1$, $b = 10$: а – коэффициент усиления, б – модули парциальных компонент плотности тока. Векторные диаграммы, демонстрирующие сложение парциальных волн в различных плоскостях z : в – 2.77, з – 19.57. Здесь Σ – вектор суммарной плотности тока

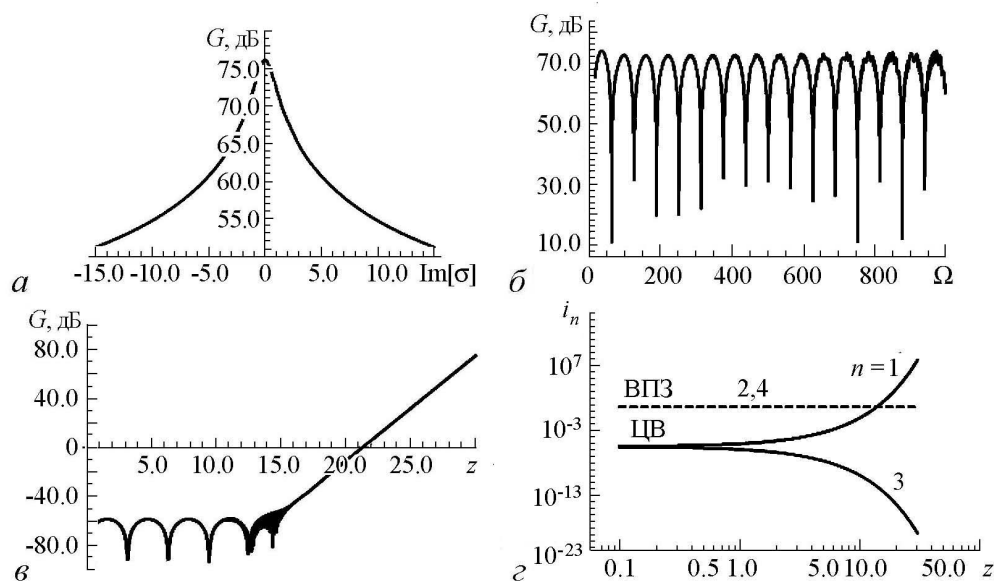


Рис. 7. *a, б* – зависимости коэффициента усиления от параметров системы при $\text{Re } \sigma = 0, z = 30, \xi = 1, b = 10$; зависимости коэффициента усиления (*в*) и модулей парциальных компонент плотности тока (*г*) от длины пространства взаимодействия при $\Omega = 100, \sigma = 0, \xi = 1, b = 10$

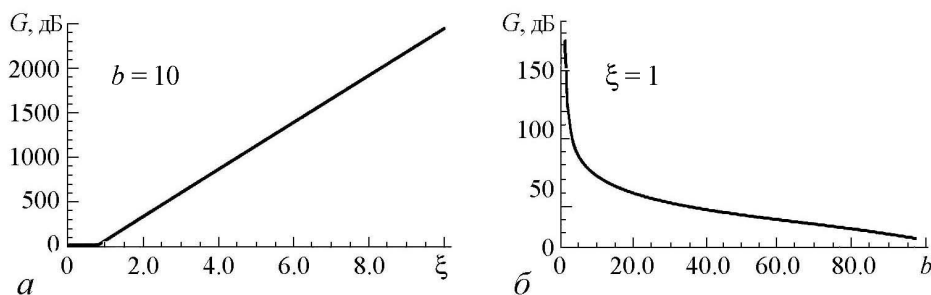


Рис. 8. Зависимости коэффициента усиления при $\Omega = 100, \sigma = j, z = 30$

Из рис. 8 видно, что с увеличением ξ (то есть поперечного волнового числа) возрастает вклад нарастающей циклотронной волны, а с увеличением b (отношения циклотронной к плазменной частоте, или увеличения магнитного поля) он уменьшается.

Учет поперечного движения и магнитного поля добавил вторую нарастающую волну, что значительно увеличило коэффициент усиления.

5. Усиление в случае метаматериала

Одномерная модель. Рассмотрим случай среды из метаматериала с $\epsilon < 0$ в резистивной секции без поперечных движений.

Из рис. 9, *a* и *б* видно, что зависимости коэффициента усиления от длины резистивной секции и частоты качественно не изменились (ср. рис. 5, *a* и *в*), но, как и предполагалось в разделе 3, коэффициент усиления больше, чем для среды с $\epsilon > 0$. На рис. 9, *в* из-за разрыва $\text{Im } \eta$ (см. рис. 1, *б*) у зависимости $G(\text{Im } \sigma)$ только один максимум при $\text{Im } \sigma = 0$. Рис. 9, *г* показывает зависимость усиления от действительной части диэлектрической проницаемости ($\text{Re } \epsilon = 1 - \text{Re } \sigma$) как для метаматериала, так и для обычного диэлектрика.

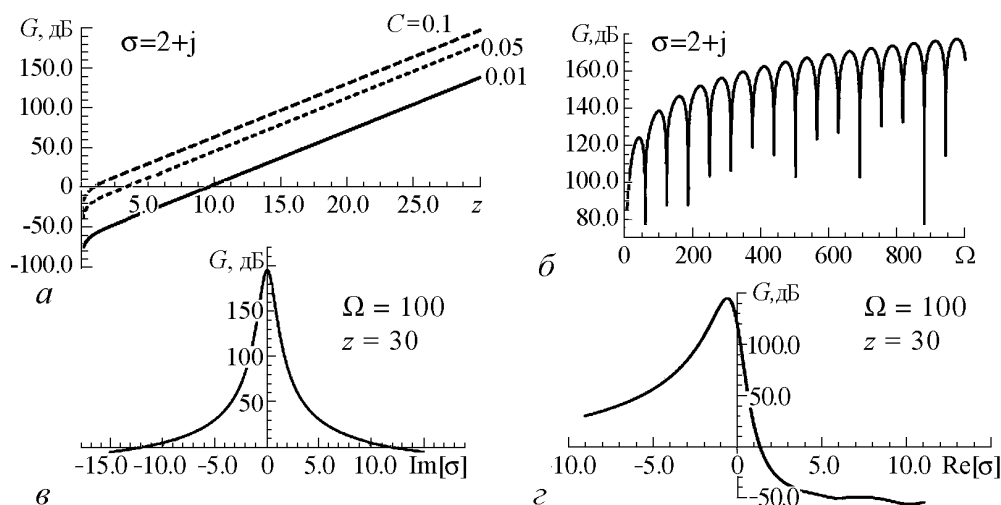


Рис. 9. Зависимости коэффициента усиления в метаматериале: *a* – при $\Omega = 100$, *б* – при $z = 30$; *в* – при $\text{Re } \sigma = 2$; *г* – при $\text{Im } \sigma = 1$

Случай учета поперечного движения электронов. На рис. 10, *a* и *б*, как и в случае обычного диэлектрика (см. рис. 6, *a*, *б*), имеют место две нарастающие волны (циклотронная волна и волна пространственного заряда), но коэффициент усиления больше. Зависимость коэффициента усиления для метаматериала от проводимости (рис. 10, *в*) стала более крутой (ср. рис. 7, *a*). Зависимость коэффициента усиления от действительной части (рис. 10, *г*) стала положе, чем на рис. 9, *г*. Зависимости $G(\Omega)$, $G(\xi)$ и $G(b)$ не изменились, по сравнению с рис. 7, *б* и рис. 8, поэтому не приводятся.

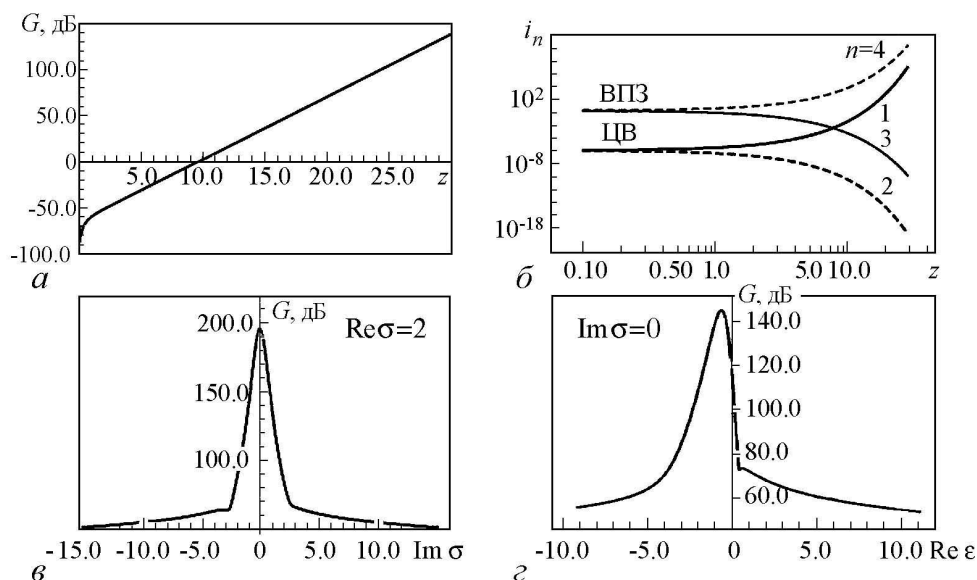


Рис. 10. Зависимости характеристик модели от длины резистивной секции при $\Omega = 100$, $\sigma = 2 + j$, $\xi = 1$, $b = 10$: *a* – коэффициент усиления; *б* – модули парциальных компонент плотности тока; *в* и *г* – зависимости коэффициента усиления при $z = 30$

Заключение

Рассмотрен общий метод учета эффективной диэлектрической проницаемости в линейной теории резистивного усилителя. Учет поперечного движения электронов, вызванного наличием магнитного поля, соосного потока, приводит к дисперсионному уравнению шестого порядка.

Рассмотрено четырехволновое приближение. При расчете коэффициентов усиления, в отличие от классического резистивного усилителя с одной нарастающей волной пространственного заряда, обнаружена еще одна – нарастающая циклотронная волна. На сравнительно больших длинах она становится сравнимой с нарастающей волной пространственного заряда, что приводит к увеличению усиления.

Рассмотрены среды распространения волн с положительной и отрицательной диэлектрической проницаемостью. В последнем случае мнимые компоненты корней дисперсионного уравнения получались больше и терпели разрыв при отсутствии проводимости. В этой среде расчет показал большее усиление, чем в среде с положительной диэлектрической проницаемостью и при сравнительно меньшей длине резистивной секции.

Библиографический список

1. *Rowe T., Behdad N., Booske J.* Metamaterial-enhanced resistive wall amplifiers: Theory and particle-in-cell simulation // *IEEE Transactions on Plasma Science*, 2015. Vol. 43, № 7. P. 2123–2131.
2. *Лопухин В.М., Веденов А.А.* Усилитель на поглощении // *УФН*. 1954. Т. LIII, вып. 1. С. 69–86.
3. *Клеен В., Пешль К.* Введение в электронику сверхвысоких частот. Ч. 2. Лампы с длительным взаимодействием. М.: Советское радио, 1963. 271 с.
4. *Birdsall C.K., Brewer G.R., Haeff A.V.* The resistive-wall amplifier // *Proceedings of the IRE*. 1953. Vol. 41. P. 865–875.

Поступила в редакцию 10.05.2016

ABOUT CONSIDERATION OF ELECTRON TRANSVERSE MOTIONS IN RESISTIVE WALL AMPLIFIER

A. A. Funtov

National Research Saratov State University
Russia, 410012 Saratov, Astrakhanskaya, 83
E-mail: aafuntov@mail.ru

Resistive wall amplifier is a vacuum microwave device, which has not been spread, but attracts attention again. Main features – no need to slow-wave structure and almost complete lack of feedback between output and input. The amplification occurs due to the phase shift between the electron beam and field variables that arise due to the presence of absorbing walls.

The classic version of this device has high values of gain, however, if you replace the usual coating of a dielectric for metamaterial, gain increases substantially.

The linear theory of resistive device with an infinitely wide electron beam and a magnetic field, that coaxially to the beam, are considered. The transverse motion of the electrons are considered. The cases, when the beam moves through the environment with $\varepsilon > 0$ and $\varepsilon < 0$ are considered.

This paper is original, because the first analytical account of the transverse motion of the electrons for a resistive amplifier, beam modulation and the removal of the signal using segments of transmission lines are produced.

It is shown that the influence of transverse motion of electrons and co-current magnetic field leads to the dispersion equation of the sixth order and the emergence of cyclotron waves. It is considered an approximation that reduces the order of the dispersion equation to the fourth and shows a good agreement with the general case. The gain calculations demonstrated growing second wave (cyclotron wave). That becomes comparable with the growing wave of space charge. On large lengths it leads to higher gain.

In the case of $\varepsilon < 0$ the imaginary component of the dispersion equation roots increases and suffers gap. The calculation shows higher gain on the smaller length of the resistive section than in the case of $\varepsilon > 0$.

Keywords: Resistive wall amplifier, transverse motions, linear theory, metamaterial.

DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-2-64-76

Paper reference: Funtov A.A. About consideration of electron transverse motions in resistive wall amplifier // *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2016. Vol. 24, № 2. P. 64-76.

References

1. Rowe T., Behdad N., Booske J. // *IEEE Transactions on Plasma Science*. 2015. Vol. 43, № 7. P. 2123–2131.
2. Lopuhin V.M., Vedenov A.A. // *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*. 1954. T. LIII, vyp. 1. S. 69–86 (in Russian).
3. Kleen W., Pöschl K. *Einführung in die mikrowellenelektronik*. Vol. 2. Stuttgart, Hirzel, 1958.
4. Birdsall C.K., Brewer G.R., Haeff A.V. // *Proceedings of the IRE*. 1953. Vol. 41. P. 865–875.

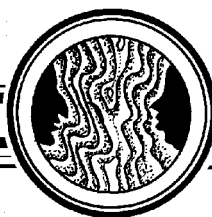


Фунтов Александр Андреевич – родился в Балаково Саратовской области (1992). Окончил Саратовский государственный университет (2014). В настоящее время – аспирант кафедры электроники колебаний и волн. Автор нескольких научных публикаций. Область научных интересов – вакуумная СВЧ-электроника.

410012 Саратов, Астраханская ул., 83

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

E-mail: aafuntov@mail.ru



ИЗ ИСТОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Е. М. Богатов, Р. Р. Мухин

Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова, филиал
Национального исследовательского технологического университета «МИСИС»
Россия, 309516 Белгородская обл., Старый Оскол, мкр-н Макаренко, 42
E-mail: embogatov@inbox.ru, mukhiny@mail.ru

Работа посвящена истории развития теории нелинейных интегральных уравнений, охватывая период до начала 1930-х годов. Анализируя особенности начального периода, авторы акцентируют внимание на том, что интегральные уравнения (в частности, нелинейные) представляют самостоятельный объект исследований со своими задачами, требующий своей системы определений и своего языка. В качестве отправной точки здесь были взяты работы А.М. Ляпунова и А. Пуанкаре по фигурам равновесия вращающихся жидкостей, в которых впервые появились нелинейные интегральные уравнения и зародились качественные методы их решения, а также возникло одно из ключевых понятий нелинейной динамики – понятие бифуркации. В этой связи внимание также уделяется результатам, полученным их последователями – Э. Шмидтом, Т. Лалеску и Г. Брату. Отмечается, что к концу 1920-х годов старая идейная основа, доминировавшая в математике XVIII–XIX веков, – «уравнение–решение» себя исчерпала; для дальнейшего развития требовались новые идеи и новые подходы. Авторы относят этот период к следующему этапу научной эволюции, когда для описания поведения нелинейных систем стали привлекаться топологические и функционально-аналитические методы и начала строиться последовательная дедуктивная теория, основанная на строгих определениях и общих конструкциях. В данном контексте анализируется вклад в развитие теории нелинейных интегральных уравнений европейских математиков – Л. Лихтенштейна и А. Гаммерштейна. Большое внимание, в свою очередь, уделяется работам отечественных математиков – П.С. Урысона и А.И. Некрасова с учётом прикладного характера их исследований. Оценивается влияние развития теории нелинейных интегральных уравнений на создание и становление функционального анализа.

Ключевые слова: История функционального анализа, нелинейные интегральные уравнения, уравнение Урысона, уравнение Гаммерштейна, А.М. Ляпунов, А. Пуанкаре, Д. Гильберт, Э. Шмидт, уравнение Брату, уравнение Лалеску, Л. Лихтенштейн, А.И. Некрасов, фигуры равновесия вращающейся жидкости, качественные методы, бифуркации.

DOI:10/18500/0869-6632-2016-24-2-77-114

Ссылка на статью: Богатов Е.М., Мухин Р.Р. Из истории нелинейных интегральных уравнений // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 2. С. 77-114

Интегральные уравнения занимают весьма значительное место в математике и её приложениях. При построении теории интегральных уравнений был сформирован целый ряд идей, понятий и методов, вошедших в фундамент функционального

анализа. В свою очередь, методы функционального анализа оказали мощное воздействие на развитие теории интегральных уравнений, в особенности нелинейных.

В данной работе рассматривается история нелинейных интегральных уравнений на первом этапе их развития, к которому с определённой долей условности относится период с конца XIX века до начала 30-х годов XX века. Сколько-нибудь систематическое рассмотрение этого вопроса в литературе, по нашим сведениям, отсутствует.

1. Предварительные замечания

Функциональный анализ является одним из тех оснований, которые придали математике её современный облик. Интегральные уравнения в построении здания функционального анализа заняли выдающееся место. И обратно – воздействие методов функционального анализа на развитие теории интегральных уравнений столь значительно, что последнее нередко относят к одной из глав современного функционального анализа.

Хотя в зарождении и становлении функционального анализа на переднем плане находились линейные интегральные уравнения, свою роль сыграли и нелинейные уравнения. История развития теории последних представляет самостоятельный интерес, особенно в последние десятилетия, когда в разных областях науки нелинейные явления и сопутствующий им математический аппарат стали привлекать пристальное внимание. Изучаемая область оказалась столь обширной, что в настоящей работе оказалось возможным рассмотреть только первый этап развития теории нелинейных интегральных уравнений. С некоторой долей условности к этому этапу отнесём период с конца XIX века до начала 30-х годов XX века. Основанием для такой хронологии является наличие ясно прослеживаемых черт – от отдельных уравнений, стимулированных прикладными задачами, до осознания того, что нелинейные интегральные уравнения представляют самостоятельную область со своими особенностями и методами исследования. Для последующих этапов характерно признание «автономности» в этой области, входящей составной частью в общность более высокого таксономического уровня – нелинейных операторных уравнений – и широкое использование функционально-аналитических, топологических и других методов из разных областей современной математики.

Традиция связывает появление интегральных уравнений с формулами обращения Ж. Фурье и работой Н. Абеля о таутохроне. Однако реальная история более ранняя, она начинается в XVIII веке и восходит к Л. Эйлеру и П.С. Лапласу. Эйлеру принадлежит идея представления решения дифференциальных уравнений в виде определённых интегралов (1741, 1763). Эти более ранние результаты были систематизированы Эйлером во втором томе его «Интегрального исчисления». Глава X этого труда носит название «О построении дифференциальных уравнений с помощью квадратур кривых». В частности, Эйлером было найдено четыре разных решения уравнения

$$x^2(a + bx^n)d^2z + x(c + lx^n)dx dz + (f + gx^n)z dx^2 = 0$$

в виде определённого интеграла. Частным случаем этого уравнения является гипер-

геометрическое уравнение

$$x(1-x)\frac{d^2z}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]\frac{dz}{dx} - \alpha\beta z = 0.$$

Заметим, что Эйлер не переходил в комплексную плоскость. Используя идеи Эйлера, Лаплас создал свой знаменитый метод решения дифференциальных уравнений с частными производными, носящий его имя [1, гл. X], [2, с. 181–182; 193–195], [3, с. 96–112].

Работа Н. Абеля о таутохроме была поначалу опубликована в 1823 году в «Magazin for Naturvidenskaberne» в Христиании (Осло), а затем вошла в его собрание сочинений. Эту работу Абеля не относят к числу его главных достижений, но в ней была (видимо, впервые) рассмотрена задача, непосредственно приведшая к интегральному уравнению, в отличие от использования последнего, как вспомогательного средства для решения дифференциальных уравнений. Абель изучал движение материальной точки в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. При этом он получил и решил интегральное уравнение

$$f(x) = \int_0^x \frac{\varphi(u)du}{\sqrt{x-u}},$$

где $f(x)$ – известная функция, $\varphi(x)$ – искомая функция. Абель рассматривал также и более общие уравнения

$$f(x) = \int_a^x \frac{\varphi(u)du}{(x-u)^\alpha},$$

где $a > 0$, $0 < \alpha < 1$ – заданные постоянные [4]. В этой же работе Абель анонсирует решение более общего уравнения

$$\psi_\alpha = \int_a^b \varphi(x, \alpha) f_x dx, \quad (1)$$

где через ψ и f обозначены известные функции, а через φ – искомая функция. Решение уравнения (1) было опубликовано в 1826 году в журнале Крелле «Journal für die reine und angewandte Mathematik» и затем вошло в собрание сочинений Абеля [5]. Работы Абеля не оказали значительное воздействие на развитие теории интегральных уравнений в последующие десятилетия. Подлинное их признание произошло уже в XX веке.

До самого конца XIX века отдельные частные, нередко несвязанные между собой задачи из различных разделов математики, таких как теория рядов и теория чисел приводили к интегральным уравнениям. Ещё не были созданы общие подходы и для каждой задачи приходилось разрабатывать свои приёмы. В связи с интегральными уравнениями мы встречаем имена многих выдающихся математиков: С.Д. Пуассон, О.Л. Коши, Ж. Лиувилль, Б. Риман, Т.И. Стилтес, Э. Бельтрами, Н.Я. Сонин, В.А. Стеклов, К. Нейман, Ш.Э. Пикар, А. Пуанкаре, Г.А. Шварц и др. [6–9]. Первым, кто осознал необходимость создания общей теории интегральных уравнений,

был, по-видимому, профессор Высшей технической школы в Берлине Пауль Дюбуа–Реймон. Ему же и принадлежит сам термин «интегральные уравнения», предложенный в 1888 году в его работе [10], посвящённой теории потенциала. Задачи математической физики, в частности, теория потенциала, также явились одним из истоков теории интегральных уравнений. А. Пуанкаре в своей известной работе по теории потенциала сделал очень важный шаг, введя в интегральное уравнение параметр λ

$$u(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)u(y)dy = f(x).$$

Этот шаг Пуанкаре явился логическим продолжением его бифуркационной тематики и оказался весьма существенным при исследовании нелинейных уравнений, когда несколько десятилетий спустя нелинейная тематика, в частности, бифуркационные задачи стали привлекать пристальное внимание.

Прорыв в теории *линейных* интегральных уравнений произошёл в конце XIX – начале XX века в связи с классическими работами В. Вольтерры [11–14], Э.И. Фредгольма [15], Д. Гильберта [16], Э. Шмидта [17]– [19]. Эта глава истории математики хорошо описана в литературе (см., например, [6] – [9], [20], [21]) и в дальнейшем мы будем обращаться к ней в той степени, в которой она касается нелинейных интегральных уравнений и функционального анализа.

Работы по теории интегральных уравнений можно поделить на две группы. К одной из них отнесём те работы, в которых рассматривается какая-либо конкретная проблема, обычно из механики или физики, и ищется её решение. Ничего принципиально нового в этом подходе нет – подобного рода задачи вставали перед анализом с самого начала его зарождения. Вторая группа работ (она могла частично пересекаться с первой) ставила принципиально иные вопросы: рассматривать задачи в их предельной общности, наметить подходы не к одной конкретной задаче, а к целому классу задач. При этом формировались новые концептуальные понятия и методы.

Обратим внимание на время, *когда* произошли указанные выше события и зададимся вопросом: чем это было обусловлено? В математике XVIII–начале XIX века и в конце XIX века имели место концептуальные отличия в трактовке основных понятий и принципов математического анализа. В указанный период произошёл крутой поворот от формальных методов для решения задач – к последовательной дедуктивной теории, основанной на строгих определениях и понятиях. В начале XIX века вследствие запросов естествознания (в первую очередь, теории теплоты и гидродинамики) были поставлены новые проблемы, для решения которых прежний аппарат анализа был уже недостаточен. Разработка соответствующего нового математического аппарата потребовала коренной перестройки традиционных систем анализа и переработки его методологии, что явилось одной из характерных черт всей математики XIX века. Зародилось новое направление, наиболее яркими представителями которого были Б. Больцано, О.Л. Коши, Б. Риман, К. Вейерштрасс. Была поставлена задача глубокого анализа основных положений математики, достижения большей ясности и определённости [22]. Утверждалась идеология, направленная на выявление условий и границ истинности каждого утверждения. Особое значение получили теоремы существования и единственности решений уравнений и чёткое различие необходимых и достаточных условий. Анализ основных понятий сопровождался построением «па-

радоксальных» с первого взгляда примеров, что относили к «музею математических ужасов» [23, с. 146]. К таким «экспонатам» можно отнести построенные Больцано и Вейерштрассом примеры непрерывных и нигде не дифференцируемых функций. Одной из форм выражения новой идейной атмосферы была постановка вопроса о *неразрешимости* той или иной задачи. В это время Н. Абелем была доказана неразрешимость общего алгебраического уравнения пятой степени, П. Вантцелем – невозможность с помощью циркуля и линейки решения, восходящих ещё к античности, задач об удвоении куба и трисекции угла. Сюда же примыкает работа Ж. Лиувилля, в которой была доказана невозможность в общем случае интегрирования в квадратурах уравнения Риккати [24, с. 4].

Грандиозная перестройка анализа в XIX веке явилась той основой, которая позволила гармонически сочетать исследования отдельных конкретных проблем с разработкой общих абстрактных понятий и методов. В русле новых тенденций сформировались различные формы предельного перехода, сходимости, концепции интегрируемости и т.п. Всё это явилось тем фундаментом, на котором была построена теория интегральных уравнений и функционального анализа; при этом создавалась возможность для сочетания исследований отдельных проблем с разработкой общих абстрактных понятий и методов (Д. Гильберт, Ф. Рисс, С. Банах). Поворотным пунктом здесь явились работы Д. Гильберта. Л.А. Люстерник отмечал, что имеются разные стороны математического дарования [25, с. 153]. Есть интуиция, позволяющая видеть и угадывать новые факты и ставить новые задачи. Есть умение находить связи между, казалось бы, далёкими фактами и разными областями математики. Есть математическая фантазия, есть сравнительно редко встречающееся философско-математическое творчество, приводящее к новым точкам зрения на основные математические факты и открывающее новые перспективы. Все эти формы математической одарённости были присущи Гильберту. Они ярко проявились в его исследованиях интегральных уравнений. Результаты Гильберта по интегральным уравнениям были опубликованы в шести статьях в 1904–1910 годах в журнале «*Göttingen Nachrichten*», и затем в 1912 году сведены в единое целое в известной книге [16]. О значении этих работ Гильберта для развития функционального анализа имеется обширная литература (см., например, [26], [8], [20]– [21], [27]– [30]). Его результаты вышли далеко за рамки первоначальной задачи, они относятся к крупнейшим достижениям математики XX века. Эти результаты послужили основой теории гильбертовых и банаховых пространств, теории линейных операторов и предмета нашего рассмотрения – теории нелинейных интегральных уравнений. Поэтому невозможно не коснуться хотя бы некоторых его важнейших достижений.

Но сначала несколько слов, в какой атмосфере создавалось творение Гильберта. В начале прошлого века Гёттинген, наряду с Парижем, являлся математической столицей мира. Кроме Гильберта, в Гёттингене тогда работали Ф. Клейн, Г. Минковский, Э. Цермело; учились Г. Вейль и Р. Курант. Ещё одним студентом, оставившим Берлин ради Гёттингена, был Э. Шмидт, о котором ещё будет идти речь. Минковский так писал о Гёттингене: «Даже простое пребывание в таком воздухе вызывает всё возрастающее желание делать великие вещи» (цит. по [31, с. 80]). Путь, выбранный Гильбертом в его исследованиях интегральных уравнений явился логическим продолжением его приверженности аксиоматическому методу, стремлением проводить в анализе, как указывается в [31, с. 114] линию объединять, упорядочивать и прояс-

нять. Ф. Клейн в своей книге [32] обсуждает вопрос о том, что имеются две линии в развитии математики, A и B , которые то сменяются, то выступают одновременно и независимо, то взаимно переплетаются. В основе линии A лежит тенденция к дроблению, каждая часть отграничена от другой, в каждой стремятся избежать заимствований из соседних областей. Идеалом здесь является выкристаллизованное, логически замкнутое в себе построение каждой отдельной области. Другое направление, B , главное значение придаёт органической связи между отдельными областями, соответственно отдаются предпочтения тем методам, которые дают понимание многих областей с одной и той же точки зрения. Идеал такого синтеза заключается в том, чтобы объять всю математическую науку, как единое целое. Если предшественники Гильберта Вольтерра и Фредгольм в своих исследованиях интегральных уравнений видели аналогию задач алгебры и анализа, то у Гильберта органический синтез этих областей математики проведён совершенно строго и последовательно.

Гильберт рассмотрел интегральное уравнение, к которому сводится решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа на отрезке $[a, b]$,

$$u(x) + \int_a^b K(x, y)u(y)dy = f(x), \quad (2)$$

где u – неизвестная функция. Он показал, что решение уравнения (2) эквивалентно решению бесконечной системы линейных уравнений

$$x_p + \sum_{q=1}^{\infty} K_{pq}x_q = b_p, \quad (p = 1, 2, \dots). \quad (3)$$

Гильберт поставил задачу отыскать условия, когда квадратичную форму бесконечно многих переменных можно представить с помощью ортогонального преобразования в каноническом виде суммы квадратов

$$K = k_1x_1^2 + k_2x_2^2 + \dots + k_nx_n^2 + \dots \quad (4)$$

Эта задача привела Гильберта к понятию *вполне непрерывной функции* и он показал, что условие полной непрерывности является достаточным для представимости квадратичной формы в каноническом виде (4). Понятие вполне непрерывной функции изложено в части 4 «Теория квадратичных форм бесконечно многих переменных» его труда [16]. Гильберт называет функцию (форму) $F(x_1, x_2, \dots)$ бесконечно многих переменных вполне непрерывной при данном наборе значений переменных x_1, x_2, \dots , если [33, с. 234]

$$\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0, \dots} F(x_1 + \varepsilon_1, x_2 + \varepsilon_2, \dots) = F(x_1, x_2, \dots).$$

Обобщение понятия вполне непрерывной функции привело к понятию *вполне непрерывного оператора*, играющего фундаментальную роль в функциональном анализе, в частности, в теории нелинейных интегральных уравнений.

Вернёмся к системе (3). «Коэффициенты Фурье» функции u по отношению к данной ортонормированной системе (ω_k) даются выражениями

$$x_p = \int_a^b u(t)\omega_p(t)dt.$$

При этом Гильберт ограничивается таким типом решений системы (3), когда

$$\sum_n x_n^2 < +\infty. \quad (5)$$

Таким образом, в основе всей теории находится пространство последовательностей (x_n) действительных чисел, удовлетворяющих условию (5). Это пространство, названное позднее пространством Гильберта, возникает в результате «предельного перехода» от евклидова пространства конечной размерности. Реализация описанных идей оказалась весьма сложной и трудоёмкой. Гильберту пришлось ввести два разных понятия сходимости (соответствие тому, что впоследствии получило название сильной и слабой топологии) [34, с. 129–130]. Основным классом рассматриваемых функций, вместо непрерывных, теперь выступили функции с интегрируемым квадратом, что явилось одним из поворотных пунктов всего дальнейшего развития математики [29, с. 222–223]. Было уже давно известно, что для всякой функции $f(x)$, интегрируемой с квадратом в смысле Римана, её коэффициенты Фурье удовлетворяют неравенству (5). Но теперь вопрос был поставлен иначе: задана последовательность констант (x_n) со сходящейся суммой квадратов; существует ли такая интегрируемая с квадратом функция $f(x)$, чтобы её коэффициенты Фурье по заданной ортонормированной системе были равны членам этой последовательности? Иначе говоря, можно ли говорить об изоморфизме пространства последовательностей со сходящейся суммой квадратов l^2 и пространства функций с интегрируемым квадратом L^2 ? Положительный ответ на этот вопрос был получен с использованием интегрирования по Лебегу независимо Ф. Риссом [35]–[36] и Э. Фишером [37]. Это ключевой момент теории и вопрос первостепенной важности для исследования интегральных уравнений. Связь между интегральными уравнениями и линейными формами устанавливается с помощью полной ортогональной системы функций, отсюда фундаментальное значение установления изоморфности между пространствами l^2 и L^2 .

Фридьеш Рисс – венгерский математик, учился в Цюрихском политехническом институте, университетах Будапешта и Гёттингена. Он внёс фундаментальный вклад в функциональный анализ и топологию. Рисс, используя идею Гильберта о вполне непрерывных функциях, осуществил дальнейшее развитие и обобщение теории. При этом он отошёл от квадратичных форм и провёл рассмотрение на языке преобразований, взяв за основу понятие компактной последовательности, введённое М. Фреше. Сначала Рисс исходил из определений слабой и сильной сходимости, а именно: *линейное вполне непрерывное преобразование в пространстве l^p , действуя на слабо сходящуюся последовательность, преобразует её в сильно сходящуюся последовательность* [38, с. 96]. Впоследствии он отказался от идеи использования слабой и сильной сходимости и в своей фундаментальной работе 1918 года [39] положил в основу понятие *компактности*. Рисс определяет линейное преобразование, как вполне непрерывное, если *оно переводит любую ограниченную последовательность в компактную*. Затем он устанавливает целый ряд свойств вполне непрерывных преобразований и акцентирует внимание на решении функционального уравнения $B[\varphi] = 0$, где $B = E - A$, E – тождественное, B – вполне непрерывное преобразование рассматриваемого множества (непрерывных) функций. Результаты Рисса можно без труда сформулировать на современном языке, заменяя термин «преобразование» на «оператор». Тот факт, что Рисс ограничивается рассмотрением непрерывных функций,

совершенно несущественен. Он указывает на то, что «... построенный здесь метод может быть применён более общим образом... Рассматриваемое здесь пространство, которое кажется на первый взгляд более простым, служит как бы пробным камнем для применимости этого метода в общем виде» [39, с. 175]. Полученные результаты Рисс применил к интегральным уравнениям. Он, в частности, показал, что интегральный оператор Фредгольма

$$K[f] = \int_a^b K(x, y)f(y)dy$$

является вполне непрерывным оператором. Как отмечает Бурбаки, метод Фредгольма обязан своим успехом понятию «вполне непрерывности», которое сформулировал для билинейных форм и подверг глубокому изучению Гильберт.

Рисс построил в значительной степени полную теорию линейных операторных уравнений с вполне непрерывными операторами. Его результаты можно распространить на любое линейное нормированное множество. Очень важная сторона данной работы Рисса заключается в том, что он рассматривает общий случай – *операторные уравнения*, частным случаем которых являются интегральные уравнения. Но именно работы Гильберта по интегральным уравнениям сделали совершенно прозрачной необходимость указанного обобщения – от теории интегральных уравнений к теории операторов.

Теория интегральных уравнений Гильберта получила дальнейшее развитие в трудах Э. Шмидта, который рассмотрел их в значительно более общей и абстрактной форме [17]. Эрхард Шмидт учился в Берлинском университете у Г. Шварца, но его настолько привлек Гёттинген, что он покинул Берлин и стал учеником Гильберта. Подход Шмидта к интегральным уравнениям основывался на понятии полной ортонормированной системы функций, восходящей к работам П.Л. Чебышева, П. Грама, В.А. Стеклова, А. Гурвица. Сам термин «полная ортонормированная система функций» принадлежит Шмидту [8]. Работа Шмидта [17] имела концептуальное значение в теории интегральных уравнений и после её появления Гильберт уже сам исходит из указанного понятия. Раздел 5 труда Шмидта называется «Новое обобщение теории линейных интегральных уравнений», и Гильберт отмечает: «В качестве связующего звена между теорией функций *бесконечно многих* переменных и уравнений с *бесконечно многими* переменными (изложенной в разделе 4), с одной стороны, и теорией интегральных уравнений, представляющих соотношения между функциями одной переменной s , с другой стороны, может служить *бесконечная система непрерывных функций*

$$\Phi_1(s), \Phi_2(s), \dots$$

переменной s на интервале от $s = a$ до $s = b$, обладающих следующими свойствами:

I. Так называемым *свойством ортогональности*

$$\begin{cases} \int_a^b \Phi_p(s) \cdot \Phi_q(s) ds = 0; & (p \neq q) \\ \int_a^b (\Phi_p(s))^2 ds = 1. \end{cases}$$

II. *Свойством полноты*, состоящим в том, что для любой пары непрерывных функций $u(s), v(s)$ переменной s справедливо

$$\int_a^b u(s)v(s)ds = \int_a^b u(s)\Phi_1(s)ds \cdot \int_a^b v(s)\Phi_1(s)ds + \int_a^b u(s)\Phi_2(s)ds \cdot \int_a^b v(s)\Phi_2(s)ds + \dots$$

Такая система функций $\Phi_1(s), \Phi_2(s), \dots$ называется *полной ортогональной системой функций* на интервале от $s = a$ до $s = b$. Если $u(s)$ – произвольная непрерывная на интервале от $s = a$ до $s = b$ функция от s , то интегралы

$$\int_a^b u(s)\Phi_1(s)ds, \int_a^b u(s)\Phi_2(s)ds \dots$$

естественно назвать *коэффициентами Фурье* функции $u(s)$ по полной ортогональной системе функций $\Phi_1(s), \Phi_2(s), \dots$ [33, с. 262–263]. В приведённой выдержке, с одной стороны, отчётливо проступают главные черты нового подхода к теории интегральных уравнений, а с другой – осуществляется значительный шаг к замечательному обобщению – бесконечномерным функциональным пространствам.

Гильберт до конца своей деятельности являлся поборником аксиоматического метода, который заключается в логическом выводе всех фактов какой-либо области из небольшого количества заранее установленных аксиом. Такая программа играет не только цементирующую роль в данной области (в геометрии). Рассмотрим, например, исходящие ещё из аналитической геометрии средства для обоснования её конструкций – поле действительных чисел. И Гильберт при аксиоматизации геометрии ясно высказался о том, что любое противоречие в евклидовой геометрии должно обязательно проявиться как противоречие в аксиомах арифметики, на которых основаны наши действия с действительными числами [30, с. 640]. Идеи синтеза различных разделов исходят из понимания Гильбертом математики как науки, из его «философии», если можно так выразиться. Представляется, что Гильберт был убеждён в единстве математики, наличии глубоких внутренних связей между её различными разделами.

Гильберт совершенно отчётливо высказал такие идеи в своей работе «Сущность и цели анализа бесконечно многих независимых переменных» [40], которую он предполагал представить в качестве доклада на IV международном конгрессе математиков в Риме в 1908 году. По каким-то причинам выступление Гильберта не состоялось, и эта работа была опубликована в итальянском математическом журнале в 1909 году. В какой-то степени допустимы объединительные начала, синтез различных разделов. Здесь, по словам Вейля, единственным критерием является плодотворность, и «если отдельный исследователь должным образом систематизирует этот критерий, применяя процедуру, разработанную им с большей или меньшей изобретательностью и чутьём, и использует все аналогии, почерпнутые им из опыта, то получится не что иное, как *аксиоматика*» [41, с. 25].

Вернёмся к работе Гильберта [40]. Он исходит из алгебры и анализа, указывая на то, что в алгебре в качестве неизвестных рассматривают конечное число величин и соотношений между ними, а в анализе – функций, также удовлетворяющих определённым соотношениям. В таком варианте алгебра и анализ являются частными случаями более общей постановки, где рассматриваются бесконечно много неизвестных, удовлетворяющих бесконечно многим соотношениям. И далее Гильберт говорит: «Описанная проблема нахождения бесконечно многих неизвестных из бесконечного числа уравнений из-за своей общности может представляться неблагоприятной и неприступной. При занятии ею нам угрожает опасность потеряться в слишком трудных или многословных и туманных рассуждениях безо всякой пользы для более глубоких

проблем. Но если подобные соображения не сбывают нас с пути, то мы уподобимся Зигфриду, перед которым огненный вал расступается сам собою, и тогда нас ждёт чудесная награда – методически единое построение алгебры и анализа» [40, с. 35–36]. Сформулированную программу Гильберт блестяще реализует в построении общей теории линейных интегральных уравнений. Он исходит из перенесения понятий для случая конечного числа на бесконечное число переменных, определяет линейную функцию бесконечно многих переменных с учётом сходимости, вводит целый ряд новых понятий, разрабатывает теорию билинейных и квадратичных форм. В итоге получилась новая область математики, «находящаяся в некотором смысле между алгеброй и анализом, опирающаяся своими методами на алгебру, но напротив, принадлежащая анализу по трансцендентной природе своих результатов» [40, с. 38], то, что впоследствии получило название «функциональный анализ» [42, с. 529]. Главная цель, которую ставит Гильберт при создании теории функций бесконечно многих переменных – нахождение общей точки зрения и единых методов решения уравнений относительно функций. Любое разумное обобщение упрощает рассмотрение, поскольку сокращаются исходные допущения. И Гильберт обращается к одному из наиболее простых и в то же время общих типов таких задач – к линейному интегральному уравнению. Результаты Гильберта по своей значительности далеко выходят за рамки построенной им общей теории линейных интегральных уравнений. Утверждение Вейля о том, что работы Гильберта строго делятся на различные периоды, в каждый из которых он был всецело поглощён проблемами из одной конкретной области [30, с. 612], не следует воспринимать слишком буквально. Гильберт говорит о возможности изучения с новых позиций дифференциальных уравнений, проблем вариационного исчисления, аналитических функций бесконечно многих переменных. Многие вопросы оказываются связанными, и на всё можно взглянуть с новой точки зрения.

Гильберт (и, по-видимому, Пуанкаре) как никто другой из математиков того времени осознавали силу и мощь объединения, казалось бы малосвязанных, разделов математики. Гильберт писал, что плодотворность новой математической теории заключается в её способности давать ответы на такие вопросы, которые при создании теории перед ней не ставились, и заканчивает евангельскими словами: «По плодам их узнаете их» [43, с. 180].

2. А.М. Ляпунов, А. Пуанкаре

Согласно внутренней логике развития, рассмотрению нелинейных задач, как более сложных, должно предшествовать исследование линейных случаев. Но реальность гораздо многообразнее и не всегда логика развития и хронология согласуются друг с другом. По поводу трудов Гильберта по теории линейных интегральных уравнений Г. Вейль писал: «На территории анализа была открыта золотая жила, которая сравнительно легко поддавалась разработке и которая не скоро должна была истощиться... Самые настойчивые приступили к атаке на нелинейные интегральные уравнения» [30, с. 648–649]. Вейль, конечно, имел в виду в первую очередь Э. Шмидта, который в своих трудах [17]– [18], опубликованных в 1907 году, затронул и нелинейные интегральные уравнения. Вейль здесь не совсем прав. Нелинейные интегральные уравнения стали привлекать внимание в то же время, когда создавалась теория

линейных интегральных уравнений – на рубеже веков, и интерес к ним был вызван прикладными задачами.

Насущной задачей в течение столетий для мореплавания, теснейшим образом связанной со всей экономической жизнью, было определение долготы местонахождения судна. Широко используемым методом для этого являлось сравнение местонахождения Луны среди звёзд с вычисленным наперёд его положением [44, с. 64]. На движение Луны, помимо воздействия Земли, возмущающее действие оказывают Солнце и планеты. Кроме того, следует учитывать отличие формы поверхности притягивающихся тел от сферической. Таким образом, важное значение приобретает определение формы поверхности Земли и Луны. Эта задача имеет и самостоятельное значение, являясь актуальной и для других приложений (в геодезии и др.)

В связи со сказанным, ещё И. Ньютоном была поставлена следующая проблема: может ли жидкая однородная масса, не зависящая ни от каких внешних сил, двигаться как твёрдое тело так, чтобы взаимные расстояния всех её частиц оставались неизменными? Если такое движение существует, то какова будет форма жидкости?

Ответ на вопрос о характере движения прост: центр масс жидкости движется равномерно и прямолинейно, а вся масса вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси, проходящей через центр масс и имеющей постоянное направление, причём эта ось будет одной из главных осей инерции массы жидкости. Что касается задачи определения возможных форм массы жидкости, то она, несмотря на усилия крупнейших математиков, до настоящего времени полностью не решена. Видимо, проблема относится к числу тех, для которых не существует общего решения. О сложности задач, связанных с фигурами равновесия вращающихся жидкостей, даёт представление перечисление учёных, занимавшихся этими вопросами: И. Ньютон, К. Маклорен, А. Клеро, Т. Симпсон, П.С. Лаплас, Ж.Л. Лагранж, Ж. Даламбер, А.М. Лежандр, С.Д. Пуассон, Ж. Лиувилль, К.Г. Якоби, П. Дирихле, Б. Риман, В. Томпсон (Кельвин), П. Тэт, П.Л. Чебышев, С.В. Ковалевская, Дж. К. Максвелл, П. Аппель, А. Пуанкаре, А.М. Ляпунов, Дж. Дарвин, Дж. Джинс, К. Шварцшильд и др. [45, с. 49–50].

Из всей длинной и сложной истории проблемы фигур равновесия вращающихся жидкостей нас будет интересовать лишь небольшая её часть, касающаяся нелинейных интегральных уравнений и связанная с именами А. Пуанкаре и А.М. Ляпунова. Для формы вращающейся массы жидкости основную роль играют два значения скорости ω_1 и ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$). Ещё в 1742 году К. Маклорен установил существование фигур равновесия, представляющих собой эллипсоиды вращения (эллипсоиды Маклорена), в этом случае $\omega < \omega_2$. Совершенно новое и неожиданное решение задачи дал в 1834 году К.Г. Якоби, показав, что имеются фигуры равновесия, являющиеся трёхосными эллипсоидами (эллипсоиды Якоби) и вращающиеся вокруг малой оси $\omega < \omega_1$. При $\omega > \omega_2$ происходит разрушение эллипсоидальных фигур равновесия. В. Томпсон и П. Тэт указали в третьем издании своей известной книги «*Treatise on natural philosophy*» (1883), что при последовательном увеличении момента вращения получается ряд устойчивых фигур, которые начинаются от сферы, проходят через эллипсоиды Маклорена вплоть до особого эллипсоида, от которого начинается последовательность трёхосных эллипсоидов Якоби. Они, в свою очередь, всё удлиняясь, должны в конце концов разделиться на две отдельные массы. Однако ничего не было известно о фигуре, промежуточной между эллипсоидами Якоби и фигурой

разрыва, на что указывали Томпсон и Тэт. П.Л. Чебышев пытался разрешить вопрос о том, что произойдёт с эллипсоидами Маклорена, когда он достигнет максимальной, критической скорости вращения. Образуется ли разрыв или произойдёт переход к другим фигурам равновесия? Здесь оказался исходный пункт исследований Ляпунова по фигурам равновесия вращающихся жидкостей.

Вот что по этому поводу говорит сам Ляпунов во вступительной лекции курса «О форме небесных тел», читавшегося им осенью 1918 года в Новороссийском (Одесском) университете незадолго до смерти. «В 1882 г., желая подыскать подходящую тему для магистерской диссертации, я не раз беседовал с Чебышевым по поводу различных математических вопросов, причём Чебышев всегда высказывал мнение, что заниматься лёгкими, хотя бы и новыми вопросами, которые можно разрешить общеизвестными методами не стоит, и что всякий молодой учёный, если он уже приобрёл некоторый навык в решении математических вопросов, должен попробовать свои силы на каком-либо серьёзном вопросе, представляющем известные математические трудности. При этом он предложил мне следующий вопрос:

“Известно, что при некоторой величине угловой скорости эллипсоидальные формы перестают служить формами равновесия вращающейся жидкости. Не переходят ли они при этом в какие-либо новые формы равновесия, которые при малом увеличении угловой скорости мало отличались бы от эллипсоидов?” При этом он прибавил: “Вот если бы вы разрешили этот вопрос, на вашу работу сразу бы обратили внимание...”. Я сильно заинтересовался вопросом, тем более, что Чебышев не дал никаких указаний для его решения, и я тотчас принялся за работу. Однако при тех ничтожных математических ресурсах, которыми я обладал тогда, лишь два года спустя после окончания курса, я встретил непреодолимые затруднения» [46, с. 113].

Ляпунов довольно быстро решил задачу в первом приближении и пришёл к следующим заключениям. С ростом момента импульса при некотором критическом значении J_1 эллипсоиды Маклорена теряли устойчивость и переходили в эллипсоиды Якоби. С дальнейшим ростом J при $J = J_2$ эллипсоиды Якоби становились неустойчивыми и переходили в какие-то новые фигуры равновесия, представляющие алгебраические поверхности третьего порядка. Эти фигуры впоследствии были названы грушевидными. Полученные результаты вошли в магистерскую диссертацию Ляпунова и были опубликованы в 1884 году [47]. О новых фигурах равновесия, о которых можно было судить по первому приближению и существование которых осталось недоказанным, Ляпунов лишь упомянул в своей диссертации. Главная трудность, с которой он столкнулся, состояла в получении следующих приближений. Эту трудность тогда ему преодолеть не удалось.

Работа Ляпунова [47] вместе с последующими его работами была написана по-русски, но стала известна во Франции благодаря рефератам во французских журналах. Она быстро привлекла внимание крупнейших учёных. Реферат работы [47] повлёк за собой переписку между Ляпуновым и Пуанкаре [48], [49]. Работа [47] была опубликована в 1904 году на французском языке [50]. Начиная с 1903 года, в течение более чем десятилетия Ляпунов в цикле статей дал решение ряда сложнейших вопросов о фигурах равновесия вращающейся жидкости [51]– [56]. По словам самого Ляпунова, основные трудности были преодолены в работе [56]. О значении трудов Ляпунова по теории устойчивости и фигурам равновесия можно судить по тому факту, что ещё в 1904 года его стали выдвигать в члены-корреспонденты Академии наук, входящей в состав Института Франции. Однако в 1904 году избрание Ляпу-

нова не состоялось. На следующих выборах его соперником был Гильберт, который и был избран. Ляпунов был избран в 1916 году, его заслуги получили официальное признание [57].

Для определения формы поверхности жидкости Ляпуновым было получено нелинейное интегральное уравнение, лежащее в основе всей теории. Поместив начало координат в центр масс, Ляпунов представляет координаты поверхности фигур равновесия в виде

$$\begin{aligned}x &= a(1 + \zeta) \cos \theta, \\y &= a(1 + \zeta) \sin \theta \cos \varphi, \\z &= a(1 + \zeta) \sin \theta \sin \varphi, \\x^2 + y^2 + z^2 &= a^2(1 + \zeta)^2,\end{aligned}$$

где $\zeta(\theta, \varphi)$ – искомая функция, характеризующая отклонение поверхности фигуры равновесия от исходного эллипсоида E_0 , соответствующего $\zeta = 0$. Величина ζ находится из решения фундаментального нелинейного уравнения

$$R\zeta - \int_S \frac{\zeta' d\sigma'}{D} = W(\zeta, \rho), \quad (6)$$

где R – заданная функция плотности ρ и параметров a, ζ эллипсоида E_0 ; D – расстояние между точками $\zeta(\theta, \varphi)$ и $\zeta'(\theta', \varphi')$ на эллипсоиде E_0 ; S – поверхность единичной сферы; $d\sigma'$ – элемент её площади. $W = \sum_n W_n(\zeta)$ – интегростепенной ряд, члены которого W_n состоят из n слагаемых, каждое из них содержит n -ю итерацию нелинейного оператора \mathcal{A} вида

$$\mathcal{A}\zeta = \int_a^b K(s, t)\zeta^\alpha(t)dt.$$

Решение уравнения (6) представляет исключительные трудности. Оно было найдено в виде ряда по функциям Ламэ, представляющим полную ортогональную систему (предельный случай сферических функций), что дало возможность свести задачу к системе рекуррентных линейных интегральных уравнений. Сходимость полученных рядов доказывалась построением соответствующих мажорант. Отметим, что Ляпунов получил свои результаты ещё до того, как теория *линейных интегральных уравнений* обрела более или менее сложившуюся форму.

А. Пуанкаре, такой же универсальный гений, как и Д. Гильберт, конечно, не мог пройти мимо проблемы, в течение двух столетий занимавший умы многих его великих предшественников. Непосредственным поводом обращения А. Пуанкаре к проблеме фигур равновесия явилась работа С. Ковалевской о кольцах Сатурна, представленная в 1874 году в Гёттингенский университет и опубликованная в 1885 году [58]. В этой работе Ковалевская строго доказала, что кольцо есть фигура равновесия. Пуанкаре обратился к задаче о кольце, а затем к уже упоминавшейся выше общей задаче Томпсона и Тэта [59, с.13]. Предварительные результаты Пуанкаре были опубликованы в двух статьях [60], [61]. В том же 1885 году появился большой

мемуар Пуанкаре [62] в журнале «Acta Mathematica», по словам Аппеля, «совершенно исключительная работа, шедевр аналитической механики» [59, с.13]. Результаты, полученные в этом мемуаре, являются одной из вершин всего творчества Пуанкаре. Но прежде несколько слов о нелинейных системах вообще.

Делавшийся поначалу упор на линейные системы является общим положением, поскольку вследствие их простоты они значительно легче поддаются анализу. Нелинейные задачи в основном были вызваны потребностями приложений, таких как гидродинамика и небесная механика. Однако в математике XVIII–XIX веков не существовало адекватных математических инструментов для последовательного и систематического анализа таких задач. И кроме того, в целом не имелось достаточно мощных стимулов для привлечения значительного внимания к нелинейным задачам. Нелинейность ещё не заняла своего места среди «первых принципов». Среди большинства физиков доминировала идеология линейного подхода для понимания основных закономерностей окружающего мира. Для нелинейности в большинстве случаев отводилась роль довеска, уточняющего детали. И в самом деле, линейный подход достиг огромных успехов, его вершиной можно считать теорию линейных колебаний. Доведённый до совершенства линейный математический аппарат стал неотъемлемым элементом инструментария физики. Его наглядные, наполненные физическим содержанием образы позволяли предвидеть результат, почти не проводя вычислений. В самом термине «нелинейность» отражено главенствующее место линейных представлений, когда нелинейности отводится вторичная роль. Доминировавшая идеология подпитывала взгляды о возможности перенесения привычных методов линейной теории на новую область. Действие нелинейных эффектов предполагалось учитывать либо с помощью поправок, либо за счёт медленного изменения параметров линейной задачи. На этом пути были созданы расчётные методы, такие как теория возмущений и теория адиабатических инвариантов, играющих столь значительную роль в небесной механике и квантовой физике. При всей важности этих методов они мало применимы для анализа сильно нелинейных систем. Работы Пуанкаре и Ляпунова явились поворотным пунктом не только в указанном отношении, но также повлияли на математическое мировоззрение. В недрах прикладных задач зарождались идеи, которые воплотились в подходы и методы, имеющие концептуальное значение. На рубеже XIX и XX веков происходил глубокий и плодотворный синтез анализа, алгебраических и геометрических методов. В русле этих идей родились качественные методы исследования. Речь идёт о первых шагах качественной теории.

Сущность качественных методов заключается в изучении свойств решений (в общем случае) операторных уравнений без нахождения самих решений (точных или приближённых). Для случая дифференциальных уравнений (с которых начинались качественные методы) без интегрирования, исходя из их правой части требовалось определить вид и расположение кривых, удовлетворяющих этим уравнениям, во всей области их существования [57]. В качественных методах упор делается не на решение, как таковое, а на качественные характеристики системы, её поведение и эволюцию, дополненные количественными исследованиями. Главное внимание уделяется не свойствам отдельных кривых, отдельных функций, а свойствам, присущим всему рассматриваемому классу функций, которые представляются уже в качестве единого объекта. Следующее обобщение имеет принципиальное значение – происходит пе-

реход от конечного числа элементов к бесконечному, от дискретного к непрерывному, формируются понятия функциональных пространств (С. Пинкерле, Дж. Пеано, М. Фреше, Ж. Адамар, Д. Гильберт, Ф. Рисс, Х. Хан, С. Банах, Н. Винер). Такой подход позволяет строить в данном пространстве различные математические структуры – топологические, групповые и т.п. В функциональных пространствах широко используются геометрические представления и геометрический язык, поскольку в эти пространства можно ввести соотношения, обобщающие соответствующие связи и отношения, характерные для обычного пространства. Качественные методы и функциональные пространства имеют одну и ту же идейную основу.

В нелинейных системах не работает принцип суперпозиции, комбинация двух решений не приводит к новому решению. Нелинейную систему не удаётся представить в виде суммы независимых частей, её необходимо рассматривать во всей её целостности и сложности. Отсюда ясно, что для нелинейных систем адекватным является глобальное рассмотрение. Эволюция нелинейных систем может осуществляться разными путями, на смену однозначности приходит возможность множественности путей развития, многообразие в поведении описываемых объектов.

Представления о качественных методах издавна вызревали в недрах математики. В постановке задачи и разработке методов качественного изучения решений дифференциальных уравнений у Пуанкаре не было предшественников. Такое положение вещей можно объяснить господством аналитических методов; решения задач носили локальный характер. Пуанкаре поставил вопрос о переходе от локального рассмотрения решений к глобальному их описанию на всей комплексной плоскости, для чего подходит удобный и наглядный язык геометрии. С геометрической точки зрения удобно изучать общие свойства решений уравнений, особые точки, поведение всего семейства решений.

Сложность и деликатность нелинейных задач проиллюстрируем следующим примером, к тому же имеющим отношение к предмету нашего исследования. Английским астрономом Дж. Дарвиным (сыном Чарльза Дарвина) была развита стройная космогоническая теория об эволюции и распаде грушевидных фигур равновесия вращающейся жидкой массы, существование которых следовало из работ Пуанкаре [60], [62] и Ляпунова [47]. Отсюда можно было объяснить существование двойных звёзд и планетных систем. Устойчивость грушевидных фигур составляла краеугольный камень теории Дарвина. В указанных работах Ляпунова [47] и Пуанкаре [60] получены результаты «в первом приближении». В своих работах [63], опубликованных в 1901–1902 годы, Пуанкаре дал общие формулы второго приближения. Для получения конкретных результатов требовались сложные расчёты. Эти расчёты были проведены Дарвиным, который пришёл к выводу об *устойчивости* грушевидных фигур равновесия. Ляпунов пришёл к противоположному заключению о *неустойчивости* всех грушевидных фигур данной последовательности. Предварительные результаты он опубликовал в мемуаре «Об одной задаче Чебышева» [51]. Разгорелась полемика, которая продолжалась несколько лет. Работа была весьма сложной и требовала большого объёма вычислений. Ляпунов публиковал свои результаты частями в серии мемуаров (1906–1914) [47], [52]– [55] и дал совершенно строгое решение задачи. Ляпунов писал, что получил точную алгебраическую функцию, на которой и основывалось его заключение. Дарвин же использовал бесконечный ряд, содержащий бесконечное число эллиптических интегралов, и ограничился конечным числом

слагаемых, не сделав полной оценки отброшенных членов [51, с. 31–32]. Полемика утихла лишь после того, как Дж. Джинс повторил вычисления Дарвина с учётом третьего приближения и показал, что в этом случае грушевидные фигуры равновесия неустойчивы, что соответствует результатам Ляпунова [64].

В упомянутой выше фундаментальной работе [61] Пуанкаре ввёл понятие *бифуркации* – ключевое понятие теории нелинейных уравнений, которое сейчас приобрело общенаучное значение. Семейство эллипсоидов Маклорена и Якоби зависят от одного параметра, угловой скорости, и при её изменении образуют линейные ряды фигур равновесия. С каждой фигурой равновесия Пуанкаре связал бесконечную последовательность коэффициентов, названных им коэффициентами устойчивости, и условие устойчивости, заключающееся в положительности этих коэффициентов. При обращении одного из коэффициентов в нуль возникает фигура бифуркации. В точке бифуркации при малом изменении параметра происходит качественная перестройка системы. Пуанкаре установил, что значение угловой скорости ω_2 является максимальным. При достижении ω_2 существует эллипсоид равновесия, общий семействам эллипсоидов Маклорена и Якоби. При $\omega < \omega_2$ имеются два ряда фигур равновесия, таким образом ω_2 является бифуркационным значением параметра.

3. Э. Шмидт

Одним из первых к исследованию нелинейных интегральных уравнений приступил Эрхард Шмидт. В последней части своей фундаментальной работы [17]– [18], [65], явившейся дальнейшим развитием исследований Гильберта по интегральным уравнениям, Шмидт переходит к рассмотрению нелинейных уравнений. Отметим, что нередко, обращаясь к этой работе Шмидта, математики и историки математики незаслуженно обходят вниманием её третью часть. Так, к примеру, Дж. Стюарт в своём переводе на английский язык трёх основополагающих трудов Фредгольма, Гильберта и Шмидта по интегральным уравнениям, сопровождаённая их комментариями, ограничивается лишь первой частью работы Шмидта [66].

Во введении к своей работе Шмидт упоминает проблему фигур равновесия вращающейся жидкости и приводит пример бифуркации. Неизвестно, был ли Шмидт знаком с работами Ляпунова, который весьма обстоятельно исследовал бифуркации в таких задачах, но так или иначе он на них не ссылается. Шмидт рассмотрел в более общем виде те же уравнения, что и Ляпунов. Такого типа интегральные уравнения получили впоследствии название *уравнений Ляпунова–Шмидта* [67]

$$u(x) - \int_{\Omega} K(x, s)u(s)ds = f(x) + \int_{\Omega} K_1(x, s)v(s)ds + \sum_{m+n \geq 2} U_{mn} \begin{pmatrix} x \\ u, v \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где $x \in \Omega$,

$$U_{mn} \begin{pmatrix} x \\ u, v \end{pmatrix} = \sum_{\nu=1}^{n_i} \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} K^{(\nu)}(x, s_1, \dots, s_i) u^{\alpha_0}(x) u^{\alpha_1}(s_1) \dots u^{\alpha_i}(s_i) \times \\ \times v^{\beta_0}(x) v^{\beta_1}(s_1) \dots v^{\beta_i}(s_i) ds_1 \dots ds_i. \quad (8)$$

Здесь $\alpha_j, \beta_j, j = 0, \dots, i$ – неотрицательные целые числа, удовлетворяющие соотношениям $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_i = m, \beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_i = n; \Omega$ – ограниченное

замкнутое множество конечномерного евклидова пространства; $f, v, K, K_1, K^{(v)}$ – заданные непрерывные функции, u – искомая функция.

Слагаемые, входящие в правую часть (8), называются *интегро-степенными членами*. Их сумма $U_{mn} \binom{x}{u,v}$ может быть конечной, в этом случае имеем дело с *интегростепенной формой*, или бесконечной, тогда имеет место *интегро-степенной ряд*. Предполагается, что интегро-степенной ряд сходится абсолютно и равномерно.

Шмидт ставит задачу о существовании и поиске малых решений обширного класса нелинейных интегральных уравнений (7) при малых значениях функции $v(x)$. Он провёл систематическое и довольно полное исследование поставленной задачи.

Шмидт, в частности, показал, что решение (7) представимо в виде интегростепенного ряда, который в самом простом случае, когда кратность единицы как собственного значения оператора, сопряжённого к оператору $A = \int_{\Omega} K(x, s)u(s)ds^1$, равна одному, имеет вид

$$u(s) = \sum_{m+n \geq 1} \xi^m V_n^{(m)} \binom{s}{v}.$$

При этом возможные значения ξ определяются из нелинейной системы *уравнений разветвления*

$$\xi = \sum_{m=2}^{\infty} L_m \xi^m + \sum_{m=0}^{\infty} \xi^m \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} \psi(t) V_n^{(m)} \binom{t}{v} dt, \quad (9)$$

где $L_m = \int_{\Omega} \psi(t) V_0^{(m)} \binom{t}{v} dt$ – постоянные [65, с. 390–391]. Система вида (9) стала называться впоследствии *уравнением разветвления Ляпунова–Шмидта*.

Явления ветвлений решений в данном случае являются бифуркациями, которые, как было выше уже упомянуто, были детально изучены Ляпуновым в его исследованиях по фигурам равновесия вращающихся жидкостей [52]– [55]. Подчеркнём, что Шмидт существенным образом использовал факты теории линейных интегральных уравнений, созданную Фредгольмом и Гильбертом, в то время, как Ляпунов доказывал существование решений уравнения вида (7) практически «с нуля». Но его аналитическое, совершенно строгое изложение очень сложно и трудно для восприятия, поэтому результаты Шмидта не теряют своей ценности. И в области малых значений входящих в уравнение искомой и известной функций нелинейные интегральные уравнения могут иметь более одного решения. Бифуркации являются яркой иллюстрацией того свойства нелинейных систем, что их эволюция может осуществляться многообразными путями; для их поведения характерна неоднозначность.

4. Э. Пикар, Т. Лалеску, Г. Брату

Ещё одним истоком нелинейных интегральных уравнений являлись нелинейные *дифференциальные* уравнения. Одним из тех математиков, кто при решении дифференциальных уравнений обратился к интегральным уравнениям, был Эмиль

¹В формулировке Шмидта это звучало так: существует только одна собственная функция $\psi(t)$ из семейства ортогональных решений уравнения, двойственного к уравнению $u(x) - \int_{\Omega} K(x, s)u(s)ds = 0$ [65, с. 389]

Пикар, ученик Ш. Эрмита, широко известный своими работами по теории функций и теории дифференциальных уравнений. При этом метод доказательства теорем существования, разработанный им в 1880-х годах для дифференциальных уравнений и получивший известность как метод последовательных приближений, оказался (как это стало ясно впоследствии) пригодным и для интегральных уравнений [68]– [69].

Например, если рассматривать уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), x(0)),$$

то для его решения при определённых предположениях достаточно найти предел рекуррентной последовательности

$$x_n(t) = \int_0^t f(\tau, x_n(\tau)) d\tau. \quad (10)$$

Соотношение (10) естественным образом наводит на мысль о непосредственном решении нелинейного уравнения Вольтерры

$$x(t) = \int_0^t f(\tau, x(\tau)) d\tau \quad (11)$$

методом последовательных приближений.

Нелинейное уравнение Фредгольма

$$\varphi(x) + \int_a^b K(x, s) F(s, \varphi(s)) ds = 0, \quad (12)$$

в свою очередь, можно получить интегрированием дифференциального уравнения Пикара 2-го порядка [70, с. 100]

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x, y) = 0.$$

В более общем виде уравнения (11) и (12) были исследованы учениками Э. Пикара – румынскими математиками Георгом Брату и Траяном Лалеску. Оба они начинали свое обучение в Яском университете (Румыния), а затем продолжили образование в Парижском университете: Лалеску – с 1905 по 1908 год, Брату – с 1908 по 1911 год. Результатом их исследований явились диссертации по теории нелинейных интегральных уравнений, защищенные в Сорбонне.

Лалеску рассматривал нелинейное интегральное уравнение Вольтерры

$$\varphi(x) + \int_0^x \Phi[x, s, \varphi(s)] ds = F(x). \quad (13)$$

Основное внимание он уделял частному случаю (13), имеющему вид²

$$\varphi(x) + \int_0^x [f_0(x, s) + f_1(x, s)\varphi(s) + \dots + f_n(x, s)\varphi^n(s)] ds = F(x) \quad (14)$$

с дифференцируемыми по x функциями $f_i(x, s)$.

Для доказательства существования (13) Лалеску применяет метод последовательных приближений Пикара в предположении о непрерывности функции $\Phi(x, s, t)$ по совокупности переменных и выполнении условия типа Лифшица для $F(x)$.

Лалеску установил наличие ветвления в решении нелинейного уравнения (13). При отсутствии функции $\varphi(x)$ в уравнении (14), применяя к обеим его частям операцию дифференцирования

$$f_0(x, x) + f_1(x, x)\varphi(x) + \dots + f_n(x, x)\varphi^n(x) + \int_0^x \left[\frac{\partial f_0}{\partial x} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x} \varphi^n(s) \right] ds = F'(x), \quad (15)$$

можно использовать метод последовательных приближений Пикара. Рекуррентное определение $\varphi_p(x)$ на основе (15) приводит к алгебраическому уравнению степени n , что и даёт ветвление решений [72, с.168].

Основным объектом исследования Брату были нелинейные уравнения Фредгольма вида

$$\Phi(x, \varphi(x)) + \lambda \int_a^b F(x, y, \varphi(y)) dy = 0 \quad (16)$$

и

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) F(y, \varphi(y)) dy + f(x), \quad (17)$$

где $F(x, y, z)$ – аналитическая по z функция.

Свои исследования в данной области Брату начал публиковать в 1910 году [73], а подытожил в 1914 году в работе «Нелинейные интегральные уравнения» [74]. В ней Брату рассмотрел различные методы поиска малых решений уравнений (16)–(17) с нелинейностями типа Лалеску

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) (b_0 + b_1\varphi + \dots + b_n\varphi^n + \dots) dy, \quad (18)$$

где $b_i = b_i(y)$ – конечные интегрируемые функции, а также с трансцендентными нелинейностями вида³

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) e^{\varphi(y)} dy. \quad (19)$$

²Это уравнение впоследствии стало носить его имя (см., например, [71, с. 414]).

³Уравнение вида (19) стали впоследствии называть уравнением Брату (см., например, [71, с. 415]).

Основной метод решения уравнений (16)–(19), заключался в разложении искомой функции в ряд по степеням параметра λ и доказательстве его сходимости путём линеаризации исходного уравнения в окрестности точки $\lambda = \lambda_0$, соответствующей $\varphi = \varphi_0(x)$ с использованием формулы Тейлора. При этом, если линеаризованное уравнение

$$\Phi'_\varphi(x, \varphi_0)\psi(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x, y)F'(y, \varphi_0)\psi(y)dy = 0$$

имеет определитель Фредгольма $D(\lambda)$, равный нулю в точке $\lambda = \lambda_0$, то решение уравнения (16) (и всех его частных случаев) по утверждению Брату, имеет, по крайней мере, две ветви, выходящие из этой точки. Если же $D(\lambda) \neq 0$, то решение $\varphi(x, \lambda)$ уравнения (16) единственно и голоморфно по λ в окрестности точки $\lambda = \lambda_0$, соответствующей $\varphi = \varphi_0(x)$ [74, с. 121–122].

5. П.С. Урысон, А.И. Некрасов

Примечательным событием в исследовании нелинейных систем явилась работа Павла Самуиловича Урысона [75] – первая в нашей стране работа по теории нелинейных уравнений в бесконечномерном пространстве. Но сначала несколько слов о математическом сообществе Москвы того времени. По словам П.С. Александрова [76, с. 140]: «Мало найдётся в истории математической науки периодов столь горячего энтузиазма, как начало двадцатых годов в Московском университете, когда в столь краткий срок, буквально в несколько лет возникла целая большая научная школа, в значительной степени определившая дальнейшее развитие математики в нашей стране и сразу выдвинувшая целый ряд новых выдающихся учёных. ... П.С. Урысон сразу же попал в самый центр этого содружества молодых математиков – в первую очередь, конечно, вследствие необычайно яркого своего математического таланта и своей увлечённости наукой, но также и вследствие своего кипучего темперамента и обаятельных свойств своего характера».

Доклад Урысона в ММО «Об одном типе нелинейных интегральных уравнений» состоялся 20 февраля 1919 года [25, с. 154; 77, с. 97–98]. Эта работа была начата Урысоном в 1918 году, когда он был ещё 20-летним студентом, и опубликована лишь в 1923 году. Тогда она осталась малоизвестной и не была оценена по достоинству даже у себя на родине. Так, в сборнике «Наука в СССР за пятнадцать лет. Математика» в главе «Анализ» в параграфе об интегральных уравнениях указанная работа Урысона не упоминается [78, с. 110–114]. Урысон, как и Брату, исходил из уравнения Пикара и рассматривал уравнение⁴

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s, y(s))ds + f(x), \quad (20)$$

где $y(x)$ – искомая функция. В основу его изучения Урысон положил метод последовательных приближений. Он показал, что при $f(x) \geq 0$ и некоторых простых усло-

⁴В СССР уравнение (20) принято называть уравнением Урысона, хотя справедливее было бы называть его уравнением Брату–Урысона.

виях, налагаемых на $K(x,s,y)$, существует интервал значений величины λ , $\alpha < \lambda < \beta$, когда при каждом λ из этого интервала уравнение (20) имеет единственное положительное решение $y(x, \lambda)$, монотонно возрастающее с ростом λ . При этом

$$\lim_{\lambda \rightarrow \alpha} y(x, \lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \beta} y(x, \lambda) = \infty.$$

Полученные результаты полностью описывают множество положительных решений уравнения (20).

Впоследствии А.Н. Тихонов дал свою физическую интерпретацию уравнению Урысона (20) [79, с. 76–77]. Он указал на задачу о поперечном смещении оси вала u , вращающегося с угловой скоростью ω , которое удовлетворяет уравнению

$$u'' + \lambda \rho f(u) = 0, \quad (21)$$

где $f(u)$ – сила инерции вала, ρ – его плотность; $\lambda = \omega^2/T$, T – напряжение вала. Задача (21) также сводится к уравнению (20).

Работа Урысона по интегральным уравнениям представляет не только исторический интерес. Она опередила своё время и привлекла внимание через несколько десятилетий. В ней оказалась заложена теория положительных операторов. Эта работа относится к ещё не родившемуся, а только формирующемуся функциональному анализу (причём нелинейному). Исследования Урысона были продолжены в двух школах функционального анализа Советского Союза – одесской школе М.Г. Крейна и воронежской школе М.А. Красносельского [80, с. 7]. Будучи математиком очень широкого кругозора, Урысон проявлял значительный интерес и к нелинейным системам. По словам А.Н. Колмогорова: «П.С. Урысон неслучайно был зачинателем того подхода за расширение тематики, которому суждено было превратить московскую математическую школу «узкого профиля» в универсальную математическую (школу)» [81, с. 167]. П.С. Алескандров вспоминал, что что как-то «Павел Самуилович жадно накинулся на новую литературу и усиленно изучал знаменитую работу Биркхофа о динамических системах. Он много занимался этими вопросами следующую зиму и поставил перед собой новые и трудные задачи» [76, с. 148]. Не вызывает сомнений, что П.С. Урысон многое мог сделать в изучении нелинейных систем.

Значительный шаг в построении теории нелинейных интегральных уравнений был сделан А.И. Некрасовым в его исследованиях по теории волн установившегося вида на поверхности тяжёлой жидкости. Александр Иванович Некрасов окончил Московский университет в 1906 году, ученик Н.Е. Жуковского. Работал в Московском университете, ЦАГИ и в Институте механики АН СССР. Значения его работ по нелинейной теории волн можно оценить из следующего факта. В 1920 году постановлением Совнаркома за подписью В.И. Ленина в ознаменование сорокалетия научной деятельности Н.Е. Жуковского была учреждена премия его имени за «Наилучшие работы по математике и механике». Первым лауреатом этой премии (1922) за работы по теории волн стал А.И. Некрасов (следующим лауреатом был С.А. Чаплыгин).

Результаты Некрасова были сначала опубликованы в 1921 году в «Известиях Иваново–Вознесенского политехнического института» [82], а затем вошли в его монографию [83]. Некрасов в своих исследованиях по теории волн вывел нелинейное интегральное уравнение, описывающее поведение волны. Он дал метод решения

широкого класса нелинейных интегральных уравнений, зависящих от параметра λ в окрестности точки разветвления $\lambda = \lambda_0$ [84]. Этот метод получил впоследствии название «метод Некрасова». Изложение модификации своего метода было отослано Некрасовым на международный съезд по теоретической механике в Делфте (Голландия) в 1924 году. Сам Некрасов на съезд не поехал и доклад был прочитан Т. Леви-Чевитой. Краткое содержание доклада было опубликовано в трудах съезда [85, с. 119].

Задача изучения волнового движения тяжёлой жидкости сводится к определению функции $\Phi(\theta)$, представляющей собой угол наклона касательной к профилю волны установившегося вида в какой-нибудь его точке; θ – аргумент изображения этой точки на окружности единичного радиуса. Для функции $\Phi(\theta)$ Некрасов выводит нелинейное интегральное уравнение⁵ [82], [86, с.22]:

$$\Phi(\theta) = \mu \int_0^{2\pi} \frac{\sin \Phi(\tau)}{1 + \mu \int_0^{\tau} \sin \Phi(\omega) d\omega} K(\tau, \theta) d\tau, \quad (22)$$

где

$$K(\tau, \theta) = \frac{1}{3\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta \sin n\tau}{n}.$$

Полагая $\mu = 3 + \lambda$, он ищет решение (22) в виде степенного ряда

$$\Phi(\theta, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \Phi_k(\theta). \quad (23)$$

Подстановка данного ряда в уравнение (22) приводит к рекуррентной системе для определения Φ_k . Для доказательства сходимости ряда (23) строятся мажоранты.

На основании исследования решений (22) Некрасов показывает, что установившихся волн не может быть, если параметр μ изменяется в замкнутом промежутке от нуля до первого собственного значения соответствующего линейного интегрального уравнения. При этом предполагается, что функция Φ зависит от θ и μ и удовлетворяет некоторым условиям. Математический смысл этого результата состоит в том, что первое собственное значение линейного интегрального оператора является бифуркационным значением параметра нелинейного интегрального оператора [87, с. 156].

Теория нелинейных интегральных уравнений, разработанная Некрасовым для решения указанной задачи гидродинамики, была опубликована отдельной главой в 1922 году [84]. В ней он привёл общую теорию некоторого специального вида интегральных уравнений⁶

$$f(x) = \mu \int_a^b K(x, y) [f(y) + \varepsilon R(\mu, y, f(y))] dy \quad (24)$$

⁵Отметим, что уравнение (22) является частным случаем уравнения Брату–Урысона (20).

⁶Эти уравнения принято называть уравнениями типа Гаммерштейна, хотя работа Гаммерштейна, посвященная аналогичным вопросам, была опубликована лишь в 1930 году (см. ниже).

в предположении, что $K(x, y)$ – симметричное положительно определённое ядро, у которого первое собственное значение μ_1 является простым, а $R(\mu, y, u)$ – аналитическая функция μ и u [88, с. 14].

Метод Некрасова решения уравнения (24) состоит в построении искомого решения в виде ряда по степеням малого параметра и доказательстве сходимости полученного ряда методом мажорант. Этот приём для решения подобных нелинейных задач применялся ещё Ляпуновым и Шмидтом, однако их способ состоял в редукции задачи к решению некоторого преобразованного нелинейного функционального уравнения и уравнения разветвлений. Некрасов пошёл по другому пути: он ищет решение исходного нелинейного интегрального уравнения непосредственно. Он также показал, что предложенный им метод может быть распространён и на нелинейные интегральные уравнения с ядром Шмидта [87, с. 157].

Любопытен следующий факт. 1 ноября 1918 года, то есть в самом начале работы Урысон записал в своём дневнике: «Сегодня продолжаю импровизировать: работа продолжается очень хорошо. Если оправдается одна моя мысль – о сродстве моих уравнений с задачей равновесия вращающегося жидкого тела, то будет совсем шикарно». И далее уже в 1919 году: «24 сентября. Доказал существование одного решения волнового уравнения. Невероятно устал, но был на седьмом небе.

25 сентября. Продолжаю заниматься волновыми уравнениями, но на этот раз без успеха.» [77, с. 72–74].

Сентябрьские записи особых вопросов не вызывают. На каком-то этапе работы Урысон свернул на то же направление, по которому двигался Некрасов, но успеха не достиг. Урысон пишет 25 сентября 1920 года: «О моём “уравнении волны” Некрасов, оказывается докладывал на Всероссийском съезде физиков» [77, с. 76].

Запись 1 ноября требует пояснений. В начале XX века связь математиков Петербурга и Москвы по каким-то причинам оборвалась. Московские математики не были знакомы с работами Ляпунова [89, с. 231]. Напомним, что Ляпунов – виднейший представитель Петербургской математической школы, в его работе 1884 года [47] содержится исторически первое нелинейное интегральное уравнение. Работы Ляпунова в нашей стране получили известность среди широкого круга математиков после издания части его трудов в 1925–1927 годах, приуроченной к 200-летию Академии Наук [90]– [91]. Урысона тогда уже не было в живых. Видимо, ему не удалось продвинуться в этом направлении, в работе Урысона [79] о фигурах равновесия вращающихся жидких масс ничего не говорится.

6. Л. Лихтенштейн, А. Гаммерштейн

Ещё один шаг в развитии теории нелинейных интегральных уравнений связан с именем польского математика Леона Лихтенштейна. Он получил инженерное образование в Берлине, защитил диссертацию по электротехнической специальности, но через некоторое время он обратился к математике, где добился значительно больших успехов. В 1931 году Лихтенштейн по приглашению Львовского университета прочёл курс лекций по интегральным уравнениям, где изложил работы предшественников и свои собственные результаты. В переработанном и дополненном виде этот курс был издан в Берлине [92]. Заслуга Лихтенштейна заключается в том, что он обратил внимание математиков на труды Ляпунова и Шмидта, дал их дальнейшее развитие,

привёл оригинальные доказательства сходимости рядов при разложении искомого решения уравнения по системам ортогональных функций. Для доказательства существования решения (7) Лихтенштейн построил последовательные приближения $z_1(s), z_2(s), \dots$

$$\begin{cases} z_1(s) = U_{01}\left(\frac{s}{v}\right), \\ z_2(s) = U_{01}\left(\frac{s}{v}\right) + \sum_{m+n \geq 2} U_{mn}\left(\frac{s}{z_1, v}\right), \\ \dots\dots \\ z_k(s) = U_{01}\left(\frac{s}{v}\right) + \sum_{m+n \geq 2} U_{mn}\left(\frac{s}{z_{k-1}, v}\right), \\ \dots\dots \end{cases} \quad (25)$$

сходящиеся к искомому решению $z(x)$ при условии малости $|v(s)|$.

Кроме того, Лихтенштейн также рассмотрел системы интегральных уравнений, которые решались тем же методом, что и уравнения (7). К примеру, для случая двух уравнений с двумя переменными $u(x)$ и $w(x)$ Лихтенштейн сводил такие системы к виду

$$\begin{aligned} u(x) &= U(x) - \sum_{m+n+p \geq 2} U_{mnp}\left(\frac{x}{uw; v}\right), \\ w(x) &= W(x) - \sum_{m+n+p \geq 2} W_{mnp}\left(\frac{x}{uw; v}\right), \end{aligned}$$

где $v(x)$ есть заданная непрерывная функция, U_{mnp} и W_{mnp} – интегростепенные члены порядка n относительно $w(x)$, порядка m относительно $u(x)$ и порядка p относительно $v(x)$ [93, с.110].

Нельзя обойти вниманием работу Гаммерштейна по нелинейным интегральным уравнениям [94]. Адольф Гаммерштейн – немецкий математик, ученик Эдмунда Ландау. Как и многие его коллеги, Гаммерштейн, начал обучение в одном университете, в Гейдельберге, а продолжил в Гёттингене. Первоначально область его научных интересов лежала в теории чисел (по ней он защитил диссертацию в 1919 году). В дальнейшем она сместилась в сторону нелинейных интегральных уравнений и уравнений в частных производных.

Гаммерштейн опубликовал свою работу в 1930 году, где он подробно рассмотрел интегральное уравнение, также представляющее собой частный случай уравнения Брату–Урысона

$$u(x) = \int_a^b K(x, y) f(y, u(y)) dy \quad (26)$$

в предположении о том, что линейный интегральный оператор A с ядром $K(x, y) = K(y, x)$ имеет только положительные собственные значения и для уравнения $u(x) = Au(x)$ справедлива альтернатива Фредгольма [94, с. 120].

Метод Гаммерштейна опирается на теорему Гильберта–Шмидта и заключается в приведении интегрального уравнения (26) к системе алгебраических или трансцендентных уравнений с помощью системы ортонормированных собственных функций

$\{\psi_m\}$ оператора A . Другими словами, решение (26) представляется в виде

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \psi_m(x),$$

причём для определения постоянных c_m требуется построить решение бесконечной системы уравнений с бесконечным числом неизвестных вида

$$c_m = \frac{1}{\lambda_m} \int_a^b f \left[x, \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(x) \right] \psi_m(x) dx. (m = 1, 2, \dots). \quad (27)$$

Гаммерштейн показал, что система (27) имеет, по крайней мере, одно решение, если функция $f(z, s)$ непрерывна и удовлетворяет определённым ограничениям на рост [95], [93, с. 64–67]. Кроме того, он сформулировал и доказал ряд условий на функцию $f(y, u)$, при которых уравнение (26) имеет единственное решение. Одним из таких условий, к примеру, является ограниченность величины $|\partial f(x, u)/\partial u|$ [94, гл. II].

На простейшем примере уравнения Гаммерштейна можно увидеть ряд новых явлений, специфических для нелинейных уравнений и не имеющих места в линейных задачах.

Следуя [96, Гл. IX, §37], рассмотрим интегральное уравнение

$$u(x) = \lambda \int_0^1 x^2 y u^2(y) dy. \quad (28)$$

Положим

$$c = \int_0^1 y u^2(y) dy. \quad (29)$$

Тогда

$$u(x) = \lambda c x^2.$$

Подставляя это выражение для $u(x)$ в (29), будем иметь

$$c = \frac{c^2 \lambda^2}{6}. \quad (30)$$

Уравнение (30) имеет два решения $c_1 = 0$, $c_2 = 6/\lambda^2$. Следовательно, исходное интегральное уравнение также имеет два решения *при любом* $\lambda \neq 0$

$$u_1(x) \equiv 0, u_2(x) = \frac{6}{\lambda} x^2.$$

Заметим, что линейное однородное интегральное уравнение

$$u(x) = \mu \int_0^1 x^2 y u(y) dy$$

с тем же ядром $K(x, y) = x^2y$ имеет ненулевое решение *лишь при одном значении* μ , а именно, при $\mu = 4$, являющимся собственным значением линейного оператора с ядром $K(x, y)$. Поэтому, если по аналогии с линейным случаем считать собственным значением оператора Гаммерштейна $H(u) = \int_0^1 x^2yu^2(y)dy$ число λ , при котором уравнение (28) имеет, по крайней мере, одно ненулевое решение, то здесь получаются *бесконечные интервалы собственных значений* $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$.

Заключение

Теория интегральных уравнений занимает выдающееся место в создании основных понятий и методов функционального анализа. Но её роль в *становлении* функционального анализа ещё более значительна. Первые десятилетия XX века явились периодом его бурного развития, но не следует считать, что идеи функционального анализа были сразу и безоговорочно восприняты. Сказывался неизбежный консерватизм научного сообщества. Рассмотрение целого класса функций вместо отдельных функций, переход в бесконечномерные функциональные пространства мог восприниматься лишь как формулировка на другом языке известных иллюстраций классического анализа. Было совершенно не очевидно, что здесь не просто другой язык, а переход в новое качество, повлекшее за собой фундаментальные изменения в подходе ко многим проблемам математики и её приложений. Теория интегральных уравнений во многом способствовала осознанию факта рождения нового раздела математики, того, что функциональный анализ позволяет получить существенно новые результаты.

Величественное здание функционального анализа стало в определённом смысле получать свою завершённую форму в 1920-е годы. Начало было положено диссертацией С. Банаха [97], представленную им во Львовский университет в июне 1920 и опубликованную в журнале «Fundamenta Mathematica». Обратим внимание на название его работы *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*. Хотя здесь Банах всё внимание уделяет линейным нормированным пространствам и достигает высшей степени формализации, вводя их с помощью хорошо структурированной системы аксиом, слова «интегральные уравнения» в названии работы не случайны. Для Банаха интегральные уравнения также явились одним из главных мотивов его замечательных исследований.

Фундаментальное значение для функционального анализа имеет теорема о продолжении линейного функционала, определённого на некотором подпространстве, на всё пространство с сохранением нормы (теорема Хана–Банаха). Здесь следует отметить, что австрийский математик Ханс Хан, внёсший огромный вклад в создание функционального анализа, в своей работе 1927 года, где доказана указанная теорема, также исходит из интегральных уравнений [98].

А. Монна в своей книге по истории функционального анализа отмечает две линии развития этой области. Одна ведёт от И. Фредгольма, Д. Гильберта, Ф. Рисса, Э. Хелли, Х. Хана к С. Банаху и Львовской школе. Другая линия исходит от Э. Лаггера и Х. Грассмана и далее идёт к итальянской школе – Д. Пеано, С. Пинкерле и В. Вольтерра [21, с. 133]. Заметим, что для обеих линий развития основополагаю-

щее значение имели интегральные уравнения. Происходила эволюция конкретных проблем из различных областей классической математики – линейной алгебры, интегральных уравнений.

Теория интегральных уравнений явилась одним из тех источников, которые дали необходимый материал, позволявший строить обобщающие конструкции на всё более высоком уровне абстракции. Происходил переход от отдельных математических объектов – чисел, векторов, уравнений – к структурным образованиям – группам, полям, кольцам, векторным пространствам. Это является характерной особенностью современной математики. Что же дальше? В явном виде нелинейные уравнения удаётся решить лишь в исключительных случаях. Поэтому важнейшее значение имеют теоремы существования решений и качественные методы для выявления характера решений. Как было указано выше, качественные методы получили относительно полное развитие для локальных задач малых решений и малых изменений параметров. Значительно большую общность и больший интерес представляют нелокальные задачи, когда требуется выявление всего множества значений параметров, когда существуют различные классы решений; зависимости решений от значений параметров и т.п. Это уже следующий этап развития теории нелинейных уравнений и его история требует отдельного изучения.

Авторы выражают благодарность участникам Воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна–2016 профессорам: М.Л. Гольдману (Москва, РУДН), Э.М. Мухамадиеву (Вологда, ВоГУ) и Ю.П. Вирченко (Белгород, БелГУ) за внимание к работе и полезные обсуждения.

Библиографический список

1. *Эйлер Л.* Интегральное исчисление. Т. 2. Перевод и предисловие И.Б. Погребысского. М., ГИТТЛ, 1957.
2. *Вилейтнер Г.* История математики от Декарта до середины XIX столетия. Пер. с нем. под ред. А.П. Юшкевича. М.: Физматлит, 1960.
3. *Симонов Н.И.* Прикладные методы анализа у Эйлера. М.: Гостехиздат, 1957.
4. *Abel N.H.* Solution de quelques problèmes à l'aide intégrales définies. In: Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel 1. (Nouv. Ed.; Ed. L. Sylow-S. Lie) Grondahl & Son, Christiania, 1881. P. 11–27.
5. *Abel N.H.* Résolution d'un problème de mécanique. In: Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel 1. (Nouv. Ed.; Ed. L. Sylow-S. Lie) Grondahl & Son, Christiania, 1881. P. 97–101.
6. *Bôcher M.* An Introduction to the Study of Integral Equations. Cambridge, The University Press, 1909.
7. *Bateman H.* Report on the history and present state of the theory of integral equations // British Assoc. for the Advancement of Sci. 1910. Vol. 80. P. 345–424.
8. *Дорофеева А.В.* Создание классической теории интегральных уравнений с симметрическим ядром. В сб. История и методология естественных наук. Математ. и механика. Вып. XVI. М.: МГУ, 1974. С. 63–78.
9. *Александрова И.Л.* Из истории теории интегральных уравнений. Дисс... кандидата физико-математических наук: 07.00.10. М., ИИЕТ РАН, 1992.

10. *Du Bois-Reymond P.* Bemerkungen über $\Delta z = 0$ // J. de Crelle. 1888. Vol. 103. P. 204–229.
11. *Volterra V.* Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti // Ann. Mat. Pura Appl. 1897. Vol. 25. P. 139–178.
12. *Volterra V.* Sulla inversione degli integrali definiti // R.C. Accad. Lincei. 1896. Vol. 5. P. 177–185.
13. *Volterra V.* Sopra un problema di elettrostatica // Nuovo Cimento. 1884. Vol. XVI. P. 49–57.
14. *Volterra V.* Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles. Paris, 1913.
15. *Fredholm E.I.* Sur une classe d'équations fonctionnelles // Acta Math. 1903. Vol. 27. P. 365–390.
16. *Hilbert D.* Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig: Verlag und Druck von B.G. Teubner, 1912.
17. *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I Teil: Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener // Math. Ann. 1907. Vol. 63. P. 433–476.
18. *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. II Teil: Auflösung der allgemeinen linearen Integralgleichung // Math. Ann. 1907. Vol. 64. P. 161–174.
19. *Schmidt E.* Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten // Rend. Circ. Mat. Palermo. Ser. 1. 1908. Vol. 25. P. 53–77.
20. *Dieudonne J.* History of functional analysis. Amsterdam: North-Holland publishing company, 1981.
21. *Monna A.F.* Functional Analysis in Historical Perspective. New York: Halstead Press, Wiley, 1973.
22. *Молодший В.Н.* О. Коши и революция в математическом анализе первой четверти XIX века // ИМИ. 1978. Вып. 23. С. 32–55.
23. *Люстерник Л.А.* Молодость Московской математической школы // УМН. 1967. Т. 22. Вып. 1, № 133. С. 137–161.
24. *Мухин Р.Р.* Хаос и неинтегрируемость в гамильтоновых системах // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Vol. 14, № 1. С. 3–24.
25. *Люстерник Л.А.* Молодость Московской математической школы // УМН. 1967. Т. 22. Вып. 4, № 136. С. 147–185.
26. *Bernkopf M.* The development of function spaces with particular reference to their origins in integral equation theory // Arch. Hist. Ex. Sci. 1966. Vol. 3. P. 1–96.
27. *Birkhoff G. & Kreyszig E.* The establishment of functional analysis // Historia Math. 1984. Vol. 11. P. 258–321.
28. *Lindström J.* On the origin and early history of functional analysis. UUDM project Report 2008:1, Uppsala University, 2008.
29. *Bourbaki N.* Elements d'histoire des mathématiques. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York. 2007.

30. *Weyl H.* David Hilbert and his mathematical work // Bull. Amer. Math. Soc. 1944. Vol. 50, № 9. P. 612–654.
31. *Руд К.* Гильберт. М.: Наука, 1977.
32. *Klein F.* Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil I. Arithmetik. Algebra. Analysis. Vierte Auflage. Springer, Berlin, 1913.
33. *Гильберт Д.* Общая теория интегральных уравнений. Д. Гильберт. Избранные труды: в 2 т. Под ред. А. Н. Паршина. Т. 2: Анализ. Физика. Проблемы Гильберта. М.: Факториал, 1998. С. 68–366.
34. *Медведев Ф.А.* Очерки истории теории функций действительного переменного. 2-е изд. М.: УРСС, 2006.
35. *Riesz F.* Über orthogonal Functionensysteme // Oeuvres complètes. 1960. Vol. 1. Budapest. P. 385–395.
36. *Riesz F.* Sur les système orthogonaux de fonctions // C.R. Acad. Sci. 1907. Vol. 144. P. 615–619.
37. *Fisher E.* Sur la convergence en moyenne // C.R. Acad. Sci. 1907. Vol. 144. P. 1022–1024.
38. *Riesz F.* Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Paris, Gauthier-Villar, 1913.
39. *Riesz F.* Über lineare Funktionalgleichungen // Acta Math. 1918. Vol. 41. P. 71–98.
40. *Гильберт Д.* Сущность и цели анализа бесконечно многих переменных / Д. Гильберт. Избранные труды: в 2-х т. Под ред. А. Н. Паршина. Т. 2: Анализ. Физика. Проблемы Гильберта. М.: Факториал, 1998. С. 35–49.
41. *Вейль Г.* Топология и абстрактная алгебра как два способа понимания математики. Математический способ мышления. М.: Наука, 1989. С. 24–41.
42. *Тихомиров В.М.* Замечания к работе «Сущность и цели анализа бесконечно многих переменных» / Д. Гильберт. Избранные труды: в 2-х т. Под ред. А.Н. Паршина. Т. 2: Анализ. Физика. Проблемы Гильберта. М.: Факториал, 1998. С. 35–49.
43. *Hilbert D.* Über das Unendliche // Math. Ann. 1926. Vol. 95. P. 161–190.
44. *Воронцов-Вельяминов Б.А.* Лаплас. 2-е изд., испр. и перераб. М.: Наука, 1985.
45. *Мухин Р.Р.* Очерки по истории динамического хаоса (исследования в СССР в 1950–1980-е годы). 2-е издание. М.: УРСС, 2012.
46. *Ляпунов А.М.* О форме небесных тел. Избранные труды. Под ред. В.И. Смирнова. Л.: Изд-во Академии наук СССР, 1948. С. 303–322.
47. *Ляпунов А.М.* Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости. СПб., Издание Академии наук, 1884.
48. *Юшкевич А.П.* А.М. Ляпунов и Академия наук Института Франции (по неопубликованным архивным документам) // ИМИ. 1965. Vol. XVI. P. 375–388.
49. *Смирнов В.И., Юшкевич А.П.* Переписка А.М. Ляпунова с А. Пуанкаре и П. Дюэмом. Т. XXIX. 1985. С. 265–284.
50. *Liapounoff A.M.* Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation // Ann. Faculté Sci. Univ. Toulouse, 2 ser. 1904. Vol. 6. P. 5–116.

51. *Ляпунов А.М.* Об одной задаче Чебышёва // Записки Академии наук по физ.-мат. отд. 8 сер. 1905. Т. 17, № 3. С. 1–32.
52. *Liapunoff A.M.* Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide, homogène, douée d'un mouvement de rotation. I partie. Etude générale du problème. St.-Psb. Imprim. de l'Acad. des Sc., 1906.
53. *Liapunoff A.M.* Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide, homogène, douée d'un mouvement de rotation. II partie. Figures d'équilibre dérivées des ellipsoïdes de Maclaurin. St.-Psb. Imprim. de l'Acad. des Sc., 1909.
54. *Liapunoff A.M.* Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide, homogène, douée d'un mouvement de rotation. III partie. Figures d'équilibre dérivées des ellipsoïdes de Jacobi. St.-Psb. Imprim. de l'Acad. des Sc., 1912.
55. *Liapunoff A.M.* Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide, homogène, douée d'un mouvement de rotation. IV partie. Nouvelles formules pour la recherches des figures d'équilibre. St.-Psb. Imprim. de l'Acad. des Sc., 1914.
56. *Liapunoff A.M.* Recherches dans la théorie de la figures des corps célestes // Memoires de l'Academie Imperiale des Sciences de St. Petersburg. 8-me Serie. 1903. Vol. 14, № 7. P. 1–37.
57. *Пуанкаре А.* О кривых определяемых дифференциальными уравнениями. Пер. с франц. С примечаниями А.А. Андропова и с дополнениями Е. Леонтович, А. Майер, В. Степанова, И. Петровского и Ю. Рожанской. М., ГИТТЛ, 1947.
58. *Kovalevskaya S.* Zusätze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchungen ueber die Gestalt der Saturnringe // Astronom. Nachr. 1885. Vol. 111. P. 37–48.
59. *Аппель П.* Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. Пер. с фр. под ред. и с доп. Н.И. Идельсона. М.-Л.: ОНТИ, 1936.
60. *Poincaré H.* Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation // C.R. Acad. Sci. 1885. Vol. 100. P. 346–348.
61. *Poincaré H.* Note sur la stabilité de l'anneau de Saturne // Bull. astronom. 1885. Vol. 2. P. 507–508.
62. *Poincaré H.* Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation // Acta Math. 1885. Vol. 7, № 1. P. 259–380.
63. *Poincaré H.* Sur la stabilité de l'équilibre des figures piriformes affectées par une masse // Proc. Roy. Soc. 1901. Vol. 69. P. 148–149; Philos. Trans. A. 1902. Vol. 198. P. 333–373; 1902. Vol. 200. P. 67.
64. *Jeans J.H.* The motion of tidally distorted masses // Memories of the Roy. Astr. Soc. 1917. Vol. LXII.
65. *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. III Teil. Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichung und die Verzweigung ihrer Lösungen // Math. Ann. 1908. Vol. 65. P. 370–399.
66. *Fredholm Hilbert Schmidt.* Three Fundamental Papers on. Integral Equations. Translated with commentary by. G.W. Stewart, 2011. Available at www.umiacs.umd.edu/stewart/FHS.pdf (accessed 19.10.15).

67. *Хведелидзе Б.В.* Уравнение Ляпунова–Шмидта. Матем. энциклопедия. Т. 3. М.: Советская энциклопедия, 1982. С. 473–474.
68. *Picard E.* Sur une équation fonctionnelle // C.R. Acad. Sci. 1904. Vol. 139. P. 245–248.
69. *Picard E.* Sur une équation fonctionnelle se présentant dans la théorie de certaines équation aux dérivées partielles // C.R. Acad. Sci. 1907. Vol. 5. P. 1009–1012.
70. *Picard E.* Traité d'Analyse. Т. III. Gauthier-Villars. Paris, 1905.
71. *Davis H.T.* Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations. Dover, New York, 1962.
72. *Lalescu' T.* Sur l'équation de Volterra // J. de Math., ser. 6. 1908. Vol. 4. P. 125–202.
73. *Bratu G.* Sur certaines équations intégrales non linéaires // C.R. Acad. Sci. Paris. 1910. Vol. 150. P. 896–899.
74. *Bratu G.* Sur les équations intégrales non linéaires // Bulletin de la S. M. F. 1914. Vol. 42. P. 113–142.
75. *Урысон П.С.* Об одном типе нелинейных интегральных уравнений // Матем. сб. 1923. Т. 31. Вып. 2. С. 236–255.
76. *Александров П.С.* О моём друге. Нейман Л.С. Радость открытия. М.: Детская литература, 1972. С. 135–149.
77. *Нейман Л.С.* Радость открытия (математик Павел Урысон). М.: Детская литература, 1972.
78. Математика: Наука в СССР за пятнадцать лет (1917–1932). М.-Л.: ГТТИ, 1932.
79. *Урысон П.С.* Труды по топологии и другим областям математики. Прим. и ступит. статья П.С. Александрова. Т. 1–2. М.-Л.: ГИТТЛ, 1951.
80. *Архангельский А.В., Тихомиров В.М.* Павел Самуилович Урысон (1898–1924) // УМН. 1998. Т. 53. Вып. 5, № 323. С. 5–26.
81. *Колмогоров А.Н.* Научный руководитель. Нейман Л.С. Радость открытия. М.: Детская литература, 1972. С. 160–164.
82. *Некрасов А.И.* О волнах установившегося вида // Изв. Иваново-Вознесен. политехн. ин-та. 1921. Т. 3. С. 52–65.
83. *Некрасов А.И.* Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости. М.: Изд-во АН СССР, 1951.
84. *Некрасов А.И.* О волнах установившегося вида, гл.2. О нелинейных интегральных уравнениях // Изв. Иваново-Вознесен. политехн. ин-та. 1922. Vol. 6. P. 155–171.
85. *Лапко А.Ф., Люстерник Л.А.* Из истории советской математики // УМН. 1967. Т. 22. Вып. 6, № 138. С. 13–140.
86. *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Методы Ляпунова и Шмидта в теории нелинейных уравнений и их дальнейшее развитие // УМН. 1962. Т. 17. Вып. 2, № 104. С. 13–75.
87. *Секерж-Зенькович Я.И.* Александр Иванович Некрасов (к семидесятипятилетию со дня рождения) // УМН. 1960. Т. 15. Вып. 1, № 91. С. 153–162.
88. *Вайнберг М.М., Айзенгендлер П.Г.* Методы исследования в теории разветвления решений. Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анализ. ВИНТИ. М., 1966, С. 7–69.

89. Люстерник Л.А. Молодость Московской математической школы // УМН. 1967. Т. 22. Вып. 2, № 134. С. 199–239.
90. Liapunoff A.M. Sur certaines séries de figures d'équilibre d'un liquide hétérogène en rotation. Partie 1-re. Leningrad, 1925.
91. Liapunoff A.M. Sur certaines séries de figures d'équilibre d'un liquide hétérogène en rotation. Partie 2-me. Leningrad, 1927.
92. Lichtenstein L. Vorlesungen Über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen nebst Anwendungen. Berlin: Julius Springer, 1931.
93. Смирнов Н.С. Введение в теорию нелинейных интегральных уравнений. Л.-М.: ОНТИ, 1936.
94. Hammerstein A. Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen // Acta Math. 1930. Vol. 54. P. 117–176.
95. Golomb M. Review of the article «Hammerstein, A. Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen». Jahrbuch Database.
URL: <http://www.zentralblatt-math.org/jahrbuch/?id=66165&type=pdf>
(accessed: 19.10.15)
96. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. М.: Наука, 1975.
97. Banach S. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales // Fund. Math. 1923. Vol. 3. P. 133–181.
98. Hahn H. Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen // J. Reine Angew. Math. 1927. Vol. 157. P. 214–229.

Поступила в редакцию 5.03.2016

ABOUT THE HISTORY OF NONLINEAR INTEGRAL EQUATIONS

E. M. Bogatov, R. R. Mukhin

Sary Oskol Technological Institute named after A.A.Ugarov,
the Branch of National Research Technological University «MISIS»
Russia, 309516 Saryi Oskol, mk. Makarenko, 42
E-mail: embogatov@inbox.ru, mukhiny@mail.ru

The work is dedicated to the history of the theory of nonlinear integral equations, covering a period before the start of the 1930s. By analyzing the specifics of the initial period, authors emphasize that the integral equations (in particular, nonlinear equations) is independent object of research with their own problems, requiring its own system of concepts and own language. As a starting point here A.M. Lyapunov's and A.Poincare's works about the figures of equilibrium of rotating fluids were taken (in these works non-linear integral equations first appeared and qualitative methods originated). As a continuation, corresponding results of some their followers (E. Schmidt, T. Lalesku and G. Bratu) are discussed.

It is noted that by the end of 1920s–beginning of 1930s the old ideological framework – «equation–solution», dominated in mathematics in XVIII–XIX centuries, is exhausted itself. For the further progress new ideas and new approaches were needed. The authors

attributed this period to the next stage of development, when it became involved topological and functional-analytic methods and began to build a consistent deductive theory, based on strict definitions and common structures. In this context, the contribution to the development of the theory of nonlinear integral equations of the European mathematicians – L. Lichtenstein and A. Hammerstein and domestic mathematicians – P.S. Urysohn and A.I. Nekrasov is analyzed.

The influence of the theory of nonlinear integral equations on the creation and establishment of functional analysis is also estimated.

Keywords: History of functional analysis, nonlinear integral equations, Urysohn equation, Hammerstein equation, A.M. Lyapunov, H. Poincare, D. Hilbert, E. Schmidt, Bratu equation, Lalescu equation, L. Lichtenstein, A.I. Nekrasov, bifurcations, equilibrium figures of rotating liquids, qualitative methods.

DOI:10/18500/0869-6632-2016-24-2-77-114

Paper reference: Bogatov E.M., Mukhin R.R. About the history of nonlinear integral equations // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2016. Vol. 24, № 2. P. 77-114.

References

1. *Euler L.* Integral Calculus. Vol. 2. Moscow: GITTL, 1957 (in Russian).
2. *Vileytner G.* History of mathematics from Descartes to the middle of the XIX century. Moscow: Fizmatlit, 1960 (in Russian).
3. *Simonov N.I.* Euler's applied methods of analysis. Moscow: GITTL, 1957 (in Russian).
4. *Abel N.H.* Solution de quelques problèmes à l'aide intégrales définies. In: Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel 1. (Nouv. Ed.; Ed. L. Sylow-S. Lie) Grondahl & Son, Christiania, 1881. P. 11–27.
5. *Abel N.H.* Résolution d'un problème de mécanique. In: Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel 1. (Nouv. Ed.; Ed. L. Sylow-S. Lie) Grondahl & Son, Christiania, 1881. P. 97–101.
6. *Bôcher M.* An Introduction to the Study of Integral Equations. Cambridge: The University Press, 1909.
7. *Bateman H.* Report on the history and present state of the theory of integral equations // British Assoc. for the Advancement of Sci. 1910. Vol. 80. P. 345–424.
8. *Dorofeeva A.V.* Creation of the classical theory of the integral equations with symmetric kernel // Hist. and Methodol. of the Nat. Sci. 1974. Vol. 16. P. 63–77 (in Russian).
9. *Aleksandrova I.L.* About the history of the theory of integral equations. PhD Thesis. Moscow: IHST RAS, 1992 (in Russian).
10. *Du Bois-Reymond P.* Bemerkungen über $\Delta z = 0$ // J. de Crelle. 1888. Vol. 103. P. 204–229.
11. *Volterra V.* Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti // Ann. Mat. Pura Appl. 1897. Vol. 25. P. 139–178.
12. *Volterra V.* Sulla inversione degli integrali definiti // R.C. Accad. Lincei. 1896. Vol. 5. P. 177–185.

13. *Volterra V.* Sopra un problema di elettrostatica // Nuovo Cimento. 1884. Vol. XVI. P. 49–57.
14. *Volterra V.* Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles. Paris, 1913.
15. *Fredholm E.I.* Sur une classe d'équations fonctionnelles // Acta Math. 1903. Vol. 27. P. 365–390.
16. *Hilbert D.* Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig: Verlag und Druck von B.G. Teubner, 1912.
17. *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I Teil: Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener // Math. Ann. 1907. Vol. 63. P. 433–476.
18. *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. II Teil: Auflösung der allgemeinen linearen Integralgleichung // Math. Ann. 1907. Vol. 64. P. 161–174.
19. *Schmidt E.* Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten // Rend. Circ. Mat. Palermo. Ser. 1. 1908. Vol. 25. P. 53–77.
20. *Dieudonne J.* History of functional analysis. Amsterdam: North-Holland publishing company, 1981.
21. *Monna A.F.* Functional Analysis in Historical Perspective. New York: Halstead Press, Wiley, 1973.
22. *Molodshyi V.N.* O. Cauchy and the revolution in the mathematical analysis of the first quarter of the XIX century // Hist. and Mathemat. Studies. 1978. Vol. 23. P. 32–55 (in Russian).
23. *Lyusternik L.A.* The early years of the Moscow Mathematics School // Uspekhi Mat. Nauk. 1967. Vol. 22, № 1(133). P. 137–161.
24. *Mukhin R.R.* Chaos and nonintegrability in Hamiltonian systems // Izv. VUZ Appl. Nonlin. Dynam. 2006. Vol. 14, № 1. P. 3–24 (in Russian).
25. *Lyusternik L.A.* The early years of the Moscow Mathematics School // Uspekhi Mat. Nauk. 1967. Vol. 22, № 4(136). P. 147–185.
26. *Bernkopf M.* The development of function spaces with particular reference to their origins in integral equation theory // Arch. Hist. Ex. Sci. 1966. Vol. 3. P. 1–96.
27. *Birkhoff G. & Kreyszig E.* The establishment of functional analysis // Historia Math. 1984. Vol. 11. P. 258–321.
28. *Lindström J.* On the origin and early history of functional analysis. UUDM project Report 2008:1, Uppsala University, 2008.
29. *Bourbaki N.* Elements d'histoire des mathématiques. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2007.
30. *Weyl H.* David Hilbert and his mathematical work // Bull. Amer. Math. Soc. 1944. Vol. 50, № 9. P. 612–654.
31. *Reid C.* Hilbert. Moscow: Nauka, 1977 (in Russian).
32. *Klein F.* Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil I. Arithmetik. Algebra. Analysis. Vierte Auflage. Springer, Berlin, 1913.

33. *Hilbert D.* Basis of general theory of integral equations. Selected sci. works. Vol. II. Moscow: Factorial, 1998. P. 68–366 (in Russian).
34. *Medvedev F.A.* Essays of the theory of a real variable functions history. Moscow: URSS, 2006 (in Russian).
35. *Riesz F.* Über orthogonal Functionensysteme // Oeuvres complètes. 1960. Vol. 1. Budapest. P. 385–395.
36. *Riesz F.* Sur les système orthogonaux de fonctions // C.R. Acad. Sci. 1907. Vol. 144. P. 615–619.
37. *Fisher E.* Sur la convergence en moyenne // C.R. Acad. Sci. 1907. Vol. 144. P. 1022–1024.
38. *Riesz F.* Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Paris, Gauthier-Villar, 1913.
39. *Riesz F.* Über lineare Funktionalgleichungen // Acta Math. 1918. Vol. 41. P. 71–98.
40. *Hilbert D.* The essence and purpose of the analysis of infinitely many independent variables. David Hilbert. Selected works, Vol. II. Moscow: Factorial, 1998. P. 35–49 (in Russian).
41. *Weyl H.* Topology and abstract algebra as two manners of understanding in mathematics. Hermann Weyl. Mathematical mindset. Moscow: Nauka, 1989. P. 24–41 (in Russian).
42. *Tikhomirov V.M.* The remarks to the work «The essence and purpose of the analysis of infinitely many independent variables». David Hilbert. Selected works. Vol. II. Moscow: Factorial, 1998. P. 35–49.
43. *Hilbert D.* Über das Unendliche // Math. Ann. 1926. Vol. 95. P. 161–190.
44. *Vorontsov-Vel'yaminov B.A.* Laplace. Moscow: Nauka, 1985 (in Russian).
45. *Mukhin R.R.* Essays on the history of dynamic chaos. Moscow: URSS, 2012 (in Russian).
46. *Lyapunov A.M.* About the form of the celestial bodies. A.M. Lyapunov. Selected works. Ed. V.I. Smirnov. Moscow-Leningrad: USSR, Acad. of Sci. Publishing, 1948. 303–322 (in Russian).
47. *Lyapunov A.M.* On the stability of ellipsoidal forms of equilibrium of a rotating liquid. St.-Psb.: Acad. of Sci. Publishing, 1884 (in Russian).
48. *Yushkevich A.P.* A.M. Lyapunov and Academy of Science of France Institute // Hist. and Methodol. of the Nat. Sci. 1965. Vol. XVI. P. 375–388 (in Russian).
49. *Smirnov V.I., Yushkevich A.P.* Correspondence between A.M. Lyapunov, H. Poincare and P. Dyugem // Hist. and Methodol. of the Nat. Sci. 1985. Vol. XXIX. P. 265–284 (in Russian).
50. *Liapounoff A.M.* Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation // Ann. Faculté Sci. Univ. Toulouse, 2 ser. 1904. Vol. 6. P. 5–116.
51. *Lyapunov A.M.* About one problem of Tchebyshev // Notes Acad. Sci. Phys. and Math. Dep. 8 ser. 1905. Vol. 17, № 3. P. 1–32 (in Russian).
52. *Liapounoff A.M.* Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide, homogène, douée d'un mouvement de rotation. I partie. Etude générale

- du problème. St.-Psb. Imprim. de l'Acad. des Sc., 1906.
53. *Liapunoff A.M.* Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide, homogène, douée d'un mouvement de rotation. II partie. Figures d'équilibre dérivées des ellipsoïdes de Maclaurin. St.-Psb. Imprim. de l'Acad. des Sc., 1909.
 54. *Liapunoff A.M.* Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide, homogène, douée d'un mouvement de rotation. III partie. Figures d'équilibre dérivées des ellipsoïdes de Jacobi. St.-Psb. Imprim. de l'Acad. des Sc., 1912.
 55. *Liapunoff A.M.* Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide, homogène, douée d'un mouvement de rotation. IV partie. Nouvelles formules pour la recherches des figures d'équilibre. St.-Psb. Imprim. de l'Acad. des Sc., 1914.
 56. *Liapunoff A.M.* Recherches dans la théorie de la figures des corps célestes // Memoires de l'Academie Imperiale des Sciences de St. Petersburg. 8-me Serie. 1903. Vol. 14, № 7. P. 1–37.
 57. *Poincar'e H.* About the curves defined by the differential equations. Moscow-Leningrad: OGIZ, 1947 (in Russian).
 58. *Kovalevskaya S.* Zusätze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchungen ueber die Gestalt der Saturnringe // Astronom. Nachr. 1885. Vol. 111. P. 37–48.
 59. *Appel P.* Equilibrium figures of rotating homogeneous fluid. Moscow-Leningrad: ONTI, 1936 (in Russian).
 60. *Poincaré H.* Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation // C.R. Acad. Sci. 1885. Vol. 100. P. 346–348.
 61. *Poincaré H.* Note sur la stabilité de l'anneau de Saturne // Bull. Astronom. 1885. Vol. 2. P. 507–508.
 62. *Poincaré H.* Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation // Acta Math. 1885. Vol. 7, № 1. P. 259–380.
 63. *Poincaré H.* Sur la stabilité de l'équilibre des figures piriformes affectées par une masse // Proc. Roy. Soc. 1901. Vol. 69. P. 148–149; Philos. Trans. A. 1902. Vol. 198. P. 333–373; 1902. Vol. 200. P. 67.
 64. *Jeans J.H.* The motion of tidally distorted masses // Memories of the Roy. Astr. Soc. 1917. Vol. LXII.
 65. *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. III Teil. Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichung und die Verzweigung ihrer Lösungen // Math. Ann. 1908. Vol. 65. P. 370–399.
 66. *Fredholm Hilbert Schmidt.* Three Fundamental Papers on. Integral Equations. Translated with commentary by. G.W. Stewart, 2011. Available at www.umiacs.umd.edu/stewart/FHS.pdf (accessed 19.10.15).
 67. *Khvedelidze B.V.* Lyapunov-Schmidt equation. Math. Encyclopedia. Vol. 3. Moscow: Soviet Encyclopedia, 1982. P. 473-474 (in Russian).
 68. *Picard E.* Sur une équation fonctionnelle // C.R. Acad. Sci. 1904. Vol. 139. P. 245–248.
 69. *Picard E.* Sur une équation fonctionnelle se présentant dans la théorie de certaines équation aux dérivées partielles // C.R. Acad. Sci. 1907. Vol. 144. P. 1409–1411.

70. *Picard E.* Traité d'Analyse. T. III. Gauthier-Villars. Paris, 1905.
71. *Davis H.T.* Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations. Dover, New York, 1962.
72. *Lalescu' T.* Sur l'équation de Volterra // J. de Math., ser. 6. 1908. Vol. 4. P. 125–202.
73. *Bratu G.* Sur certaines équations intégrales non linéaires // C.R. Acad. Sci. Paris. 1910. Vol. 150. P. 896–899.
74. *Bratu G.* Sur les équations intégrales non linéaires // Bulletin de la S. M. F. 1914. Vol. 42. P. 113–142.
75. *Urysohn P.* Sur une classe d'équations intégrales non linéaires // Mat. Sb. 1923. Vol. 31, № 2. P. 236–255.
76. *Aleksandrov P.S.* About my friend. L. Neiman. The joy of discovery. Moscow: Detgiz, 1972. P. 135–149 (in Russian).
77. *Neiman L.* The joy of discovery. Moscow: Detgiz, 1972 (in Russian).
78. Mathematics: The Science of the USSR in fifteen years (1917–1932). Moscow-Leningrad: GTTI, 1932 (in Russian).
79. *Urysohn P.S.* Works on topology and other areas of mathematics. Moscow-Leningrad: GITTL, 1951 (in Russian).
80. *Arkhangel'skii A.V. and Tikhomirov V.M.* Pavel Samuilovich Urysohn (1898–1924) // Uspekhi Mat. Nauk. 1998. Vol. 53, № 5(323). P. 5–26 (in Russian).
81. *Kolmogorov A.N.* Scientific advisor. L. Neiman. The joy of discovery. Moscow: Detgiz, 1972. P. 160–164 (in Russian).
82. *Nekrasov A.I.* Waves of steady type // Izv. Ivanovo-Vozn. Politechn. Inst. 1921. Vol. 3. P. 52–65 (in Russian).
83. *Nekrasov A.I.* The exact theory of the steady type waves on the heavy liquid surface. Moscow: USSR Acad. of Sci., 1953 (in Russian).
84. *Nekrasov A.I.* Waves of steady type. Chap. 2. About the nonlinear integral equations // Izv. Ivano-Vozn. Politechn. Inst. 1922. Vol. 6. P. 155–171 (in Russian).
85. *Lapko A.F., Lyusternik L.A.* From the history of Soviet mathematics // Uspekhi Mat. Nauk. 1967. Vol. 22, № 6 (138). P. 13–140.
86. *Vainberg M.M., Trenogin V.A.* The methods of Lyapunov and Schmidt in the theory of non-linear equations and their further development // Uspekhi Mat. Nauk. 1962. Vol. 17, № 2(104). P. 13–75 (in Russian).
87. *Sekerzh-Zen'kovich Ya.I.* Aleksandr Ivanovich Nekrasov (on the 75th anniversary of his birth) // Uspekhi Mat. Nauk. 1960. Vol. 15, № 1 (91). P. 153–162 (in Russian).
88. *Vainberg M.M., Aizengendler P.G.* Methods of investigation in the theory of branching of solutions // Itogi Nauki. Ser. Matematika. Mat. Anal. 1965. Moscow: VINITI, 1966. P. 7–69 (in Russian).
89. *Lyusternik L.A.* The early years of the Moscow mathematical school // Uspekhi Mat. Nauk. 1967. Vol. 22, № 2 (134). P. 199–239 (in Russian).
90. *Liapunoff A.M.* Sur certaines séries de figures d'équilibre d'un liquide hétérogène en rotation. Partie 1-re. Leningrad, 1925.
91. *Liapunoff A.M.* Sur certaines séries de figures d'équilibre d'un liquide hétérogène en rotation. Partie 2-me. Leningrad, 1927.
92. *Lichtenstein L.* Vorlesungen Über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen nebst Anwendungen. Berlin: Julius Springer,

1931.

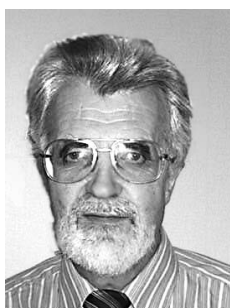
93. *Smirnov N.S.* Introduction to the theory of nonlinear integral equations. Moscow-Leningrad: Glav. Red. Otschet. Lit., 1936 (in Russian).
94. *Hammerstein A.* Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen // Acta Math. 1930. Vol. 54. P. 117–176.
95. *Golomb M.* Review of the article «Hammerstein, A. Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen». Jahrbuch Database.
URL: <http://www.zentralblatt-math.org/jahrbuch/?id=66165&type=pdf>
(accessed: 19.10.15)
96. *Krasnov M.L.* Integral equations. Introduction to the theory. Moscow: Nauka, 1975 (in Russian).
97. *Banach S.* Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales // Fund. Math. 1923. Vol. 3. P. 133–181.
98. *Hahn H.* Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen // J. Reine Angew. Math. 1927. Vol. 157. P. 214–229.

Богатов Егор Михайлович – родился в Волгограде (1974). Окончил Воронежский государственный университет (1997). После окончания ВГУ работал преподавателем в Воронежской государственной архитектурно-строительной академии и в ВГУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (ВГУ, 2000) по специальности «Дифференциальные уравнения». После защиты диссертации работает на кафедре высшей математики Старооскольского технологического института им. А.А. Угарова (филиал) Национального исследовательского технологического университета «МИСИС» в должности доцента. Автор учебника «Организация эксперимента» (в соавторстве с В.П. Соловьёвым). Руководитель научного проекта РФФИ по теме «Математическое моделирование процессов теплопереноса в нелинейных периодических двухфазных средах вида газ–металл» (2006–2008). Опубликовал более 30 научных статей по дифференциальным уравнениям и их приложениям. Имеет сертификат инструктора Wolfram Research Mathematica по обучению пакетам компьютерной математики в странах Восточной Европы. Область научных интересов: математическое моделирование физических процессов в неоднородных средах, история функционального анализа.

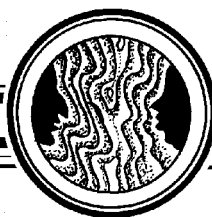


309516 Старый Оскол, мкр-н Макаренко, 42
Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова (филиал)
Национального исследовательского технологического университета «МИСИС»
E-mail: embogatov@inbox.ru

Мухин Равиль Рафкатович – родился в Челябинской области (1947), окончил Московский инженерно-физический институт (1976). Защитил кандидатскую диссертацию по химической физике (1991, Институт органического синтеза и углекислоты АН Казахстана) и докторскую диссертацию по истории динамического хаоса (2011, ИИЕТ РАН). Автор монографии «Очерки по истории динамического хаоса» (2007, 2012). Область научных интересов: история физико-математических наук. В настоящее время профессор Старооскольского технологического института (НИТУ МИСиС).



309516 Белгородская обл., Старый Оскол, мкр-н Макаренко, 42
Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова, филиал
Национального исследовательского технологического университета
«Московский институт стали и сплавов»
E-mail: mukhiny@mail.ru



УДК 94(47).84.8+621.385+929 Андрушкевич

ПАМЯТИ В. С. АНДРУШКЕВИЧА

(12.08.1929 – 11.04.2016)

11 апреля 2016 года скончался Владимир Степанович Андрушкевич – профессор, доктор физико-математических наук, проработавший в Саратовском университете на кафедре электроники, колебаний и волн 46 лет.

В.С. Андрушкевич родился 12 августа 1929 года в Саратове. В 1940 году вся семья переехала на родину отца в западную Белоруссию, где их застала война. Так случилось, что отец в это время был в командировке, а мать с двумя детьми – сыном Владимиром и младшей дочерью – оказались в оккупации. Для Володи началась пора издевательств, унижений, побоев как со стороны немцев, так и тех местных, кто ненавидел русских. Смерти смотрел в глаза подросток Володя, когда пьяные фашисты, веселясь и хохоча, имитировали расстрел их семьи. А второй раз смерть витала над ним, когда его, тяжело заболевшего тифом, посчитали мертвым и поместили в морг. Только счастливый случай помог избежать реального непоправимого конца. Ему пришлось испытать голод, холод, лишения. Чтобы выжить, приходилось выполнять изнурительную тяжелую работу, просить милостыню. Однажды, по просьбе французских военнопленных, рискуя своей жизнью, тринадцатилетний Володя смог достать карту местности, которую французы использовали для побега из плена.

Все пережитое осталось в памяти Владимира Степановича, и свои воспоминания он поведал в пронзительном повествовании «Дети, опаленные войной» (Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2013. № 2).

После окончания войны Владимир Степанович за один год выполнил программу обучения за 5–7 классы образовательной школы и затем, окончив школу, поступил на физический факультет СГУ. С тех пор его жизнь была неразрывно связана с нашим университетом. После окончания физического факультета СГУ в 1954 году он был принят на должность ассистента кафедры электроники и впоследствии работал на этой кафедре до 2000 года, занимая должности доцента, а затем профессора.

За все время работы В.С. Андрушкевич проявил себя высококвалифицированным преподавателем и талантливым ученым. Он читал лекции студентам, проводил семинарские и лабораторные занятия, руководил выполнением курсовых и дипломных работ. Вся преподавательская деятельность Владимира Степановича характеризовалась высоким профессиональным уровнем. Его лекции отличались глубиной



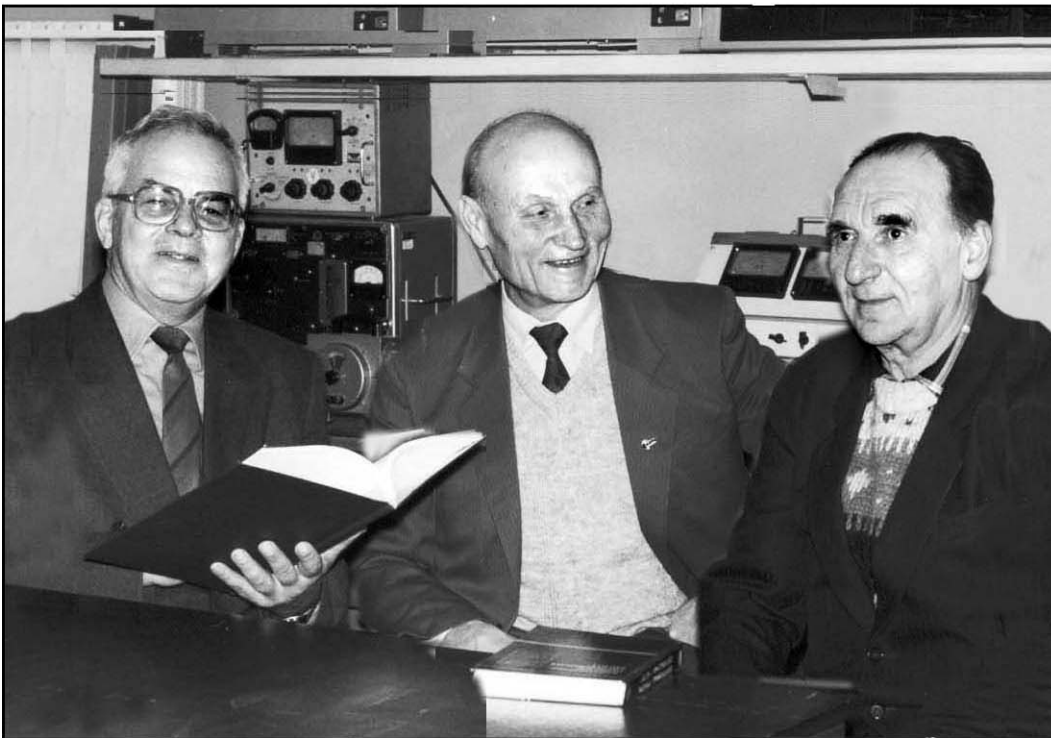
В.С. Андрушкевич, 1980-е годы



Научный семинар кафедры электроники, начало 1980-х годов
А.В. Зборовский, Н.И. Сеницын, С.П. Кузнецов, Л.В. Булгакова,
Ю.Д. Жарков, Г.Л. Соболев, В.С. Андрушкевич, Д.Д. Милотин



Научная группа В.С.Андрушкевича, 1980-е годы. 1-й ряд: В.А.Давыдов, ?,
2-й ряд: ?, В.С.Андрушкевич, В.К.Федоров, Ю.Г. Гамаюнов, Вырский



Профессора кафедры электроники, колебаний и волн:
Ю.Д. Жарков, М.А. Григорьев, В.С. Андрушкевич, 1995 год

содержания и ясностью изложения, что привлекало к нему студентов. Много внимания уделял он методической работе, являясь автором учебных и методических пособий по изучаемым на факультете дисциплинам.

Педагогическая деятельность успешно сочеталась с научной работой. В.С. Андрушкевич являлся признанным авторитетом в стране в области электроники миллиметровых волн, научным руководителем госбюджетных и хоздоговорных НИР, выполнявшихся по постановлению правительства. Были созданы высокоэффективные лампы обратной волны – клинотроны – в коротковолновой части миллиметрового диапазона, разработан ряд модификаций ЛБВ-усилителей. Впервые в нашей стране был создан мощный пакетированный клистрон с распределенным взаимодействием миллиметрового диапазона с параметрами, не уступающими мировым. Промышленное внедрение получил разработанный способ детерминированной комплектации замедляющих систем на цепочках связанных резонаторов. Высокую оценку научной общественности получили фундаментальные исследования по формированию и транспортировке интенсивных цилиндрических пучков, используемых в источниках излучения миллиметрового диапазона.

Вот выдержка из Акта внедрения, данного предприятием «Исток» (Фрязино Московской обл.):

«На основе сформулированных Андрушкевичем В.С. оригинальной и физически наглядной модели и уравнений расчета поперечных смещений цилиндрических электронных пучков в пролетном канале и в области пушки при нарушении аксиальной симметрии магнитного поля, а также на основе полученных им аналитических решений впервые вскрыта физическая природа аномального нарушения токопрохождения пучков в пролетных каналах, связанная с возникновением пространственного резонанса между поперечным магнитным полем и одной из найденных им собственных статических “волн” поперечного смещения пучка. Эти закономерности и сформулированные им предложения по устранению пространственного резонанса путем целенаправленной деформации угла ориентации остаточного поперечного поля составляют физическую и инженерную основу нового направления в конструировании МФС (магнитных фокусирующих систем. – *Ред.*) при неизбежном нарушении аксиальной симметрии магнитного поля».

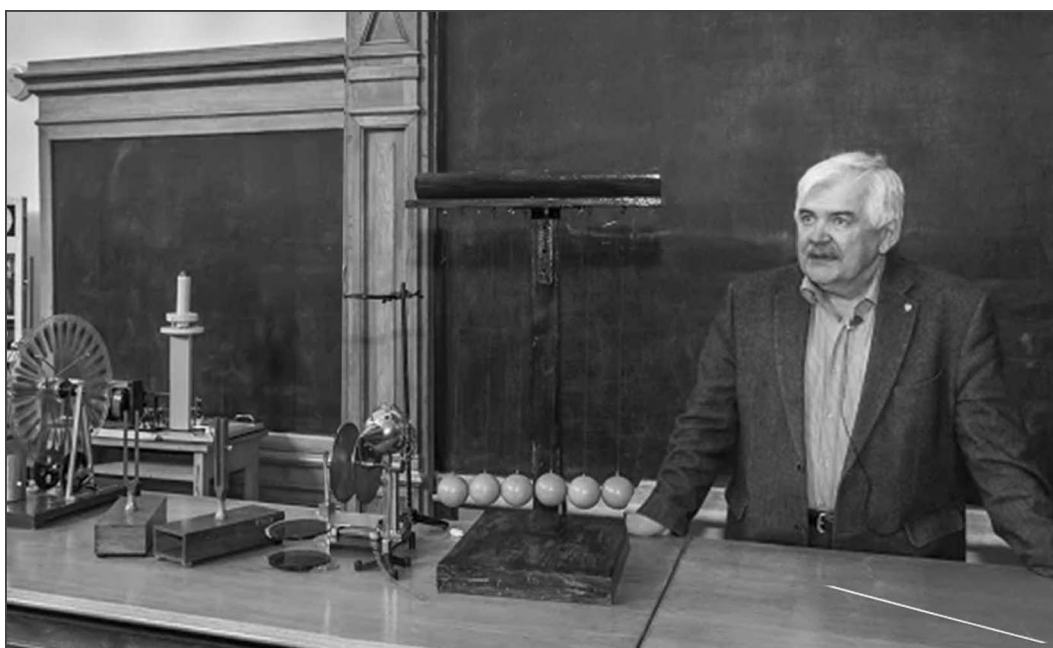
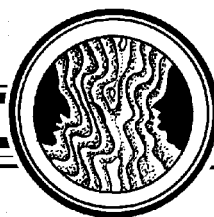
Результаты научных исследований были обобщены В.С. Андрушкевичем в диссертациях на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1964) и ученой степени доктора физико-математических наук (1987).

Большое внимание В.С. Андрушкевич уделял также молодым сотрудникам научной группы – своим ученикам, многие из которых защитили кандидатские диссертации.

Владимира Степановича Андрушкевича всегда отличала доброжелательность и внимательное отношение к окружающим. Мы с большой горечью осознаем, что потеряли талантливого ученого и очень доброго и мудрого человека.

29.06.2016

Сотрудники кафедры электроники, колебаний
и волн факультета нелинейных процессов
Саратовского государственного университета



ПОДВИЖНИК В ОБЛАСТИ ФИЗИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ:

Памяти Николая Михайловича Кожевникова

Сентябрь 2012 года. В МГТУ им. Баумана проходит традиционная конференция «Современный физический практикум». Устные и стендовые доклады участников посвящены описаниям используемых в вузах страны лабораторных работ в общефизических практикумах. В кулуарах же звучат тревожные нотки о снижении интереса молодежи к изучению физики и сокращении учебных часов. И вот на заключительном пленарном заседании слово берет профессор Санкт-Петербургского политехнического университета Николай Михайлович Кожевников. Он извиняется за отступление своего выступления от темы конференции, но вынужден поднять вопрос «о схоластических тенденциях в преподавании физики». Привожу тезисы его выступления, которые успел записать, как сейчас говорят, в режиме «он-лайн».

- Мы читаем физику, которую студенты не воспринимают. Произошел разрыв между натурфилософией, источником познания в которой был ОПЫТ, и теорией – описанием явлений, втиснутых в формальные рамки математического аппарата. К примеру, “работа – это криволинейный интеграл ... от точки 1 до точки 2”.
- История физики в древние и ранние средние века тесно связана с религией и методологически также основывалась на догматах.
- В XIV веке некий официальный оппонент писал: “В диссертации нет ничего нового, и поэтому она может быть допущена к защите...”
- Далее три века классической физики. Физика – живая, и труды по ней читаются как художественная литература. Например, работа Карно “О движении силы огня”.
- XIX век и начало XX – модернизм в культуре и науке. Сплошная теоретизация и разрыв с наглядностью явлений и опытов в процессе обучения превратили физику в схоластическую дисциплину.
- В программе никакой исторической канвы, скуден эксперимент, его содержание не наводит слушателей на связь с окружающей действительностью. Господствует дедуктивная логика. Механику мы начинаем читать с теории относительности, термодинамику – с распределения Гиббса, электродинамику – с уравнений Максвелла.
- В манерах преподавания:
 - отсутствие ссылок на явления в жизни, быту, сложной технике;
 - полнейшая теоретизация излагаемого материала.

Изложенное объясняет угасание интереса к физике у обучающихся.

Мне, перешедшему на научно-педагогическую работу после 30 лет деятельности в прикладной науке, давшей ощутимые результаты в промышленности, обозначенные проблемы были весьма заметны. К сожалению, я был единственным, кто по завершении доклада в краткой реплике с места поблагодарил Николая Михайловича за точную характеристику состояния современного физического образования. Это было за три часа до закрытия конференции. А далее последовали три года плодотворной переписки с ним по электронной почте, содержание которой подвигло меня на написание хрестоматийных материалов по физике с целью показать, что даже в классической физике и на стыке с другими естественными науками имеется непочатый край работ, связанных с новыми технологиями, применением новых материалов и новых методов исследований, остро необходимых для экономического роста.

Мне удалось познакомиться с деятельностью Николая Михайловича в научно-педагогической сфере и связанной с ней областях. Научная биография его похожа на биографии многих ученых. Красный диплом на факультете радиоэлектроники ЛПИ, аспирантура, кандидатская, а потом и докторская диссертации. Работа в том же университете, который дал ему отличное образование, на кафедрах «Квантовая электроника» и «Экспериментальная физика», и активная работа везде, где он считал возможным применить свои знания и опыт.

Н.М. Кожевников проводил научные исследования в области квантовой электроники, волоконно-оптической техники и оптической метрологии, в том числе по разработке динамических голографических интерферометров для адаптивной обработки сигналов ультразвуковых акустооптических устройств и др. Под его руководством выполнены приоритетные работы по использованию биологических фоточувствительных материалов в когерентной оптике. Им заложены основы теории динамической голографии фазомодулированных световых пучков, которая позволяет реализовать уникальные возможности реверсивных фоточувствительных материалов по повышению помехозащищенности и чувствительности оптических измерений.

Н.М. Кожевников подготовил и читал студентам курс лекций по общей физике. В 1995 году разработал программу курса «Концепции современного естествознания», по которой читаются лекции и проводятся семинарские занятия на факультетах гуманитарного профиля в СПбГПУ, СПбГУЭФ и других вузах. Под его руководством модернизирован демонстрационный кабинет кафедры, являющийся одним из лучших в стране по техническому и методическому уровню лекционных физических экспериментов.

Н.М. Кожевников – автор более 100 научных трудов, в том числе учебных пособий «Концепции современного естествознания», «Физика. Интернет-тестирование базовых знаний» (в соавторстве) и «Концепции современного естествознания. Интернет-тестирование базовых знаний» (в соавторстве), выпущенных издательством «Лань» в 2009–2010 годах.

Николай Михайлович являлся ученым секретарем президиума Научно-методического совета по физике Минобразования РФ, членом президиума Научно-методического совета по концепциям современного естествознания Минобразования РФ и членом Российского оптического общества.

После нашего, увы короткого, знакомства я посылал Николаю Михайловичу наброски своих статей и докладов, включая описания поставленных мной в практике новых лабораторных работ. Для того чтобы читатели смогли полнее представить себе образ этого человека, позволю привести два письма из нашей переписки.

19 декабря 2014

Здравствуйте, Николай Борисович! Спасибо за Ваше интересное письмо! То, что сейчас ситуация со школьниками и студентами изменилась в лучшую сторону, – очевидный факт. Я имею в виду появление внутреннего интереса к физике и другим естественнонаучным дисциплинам. Многие хотят не просто учиться, а что-то делать своими руками. У нас от таких отбоя нет! Но приходится отказывать им, так как нет сертифицированных условий для работы. А для меня главное – техника безопасности! Поэтому я говорю студентам: «Любую консультацию готов дать, но работать только дома». И вот таким образом за последние несколько лет у нас в кабинете появился десяток демонстрационных опытов. С большим удовольствием прочитал Вашу статью с видеовставками. Могу только пожелать Вам и дальше продолжать работу в этом направлении. И не только что-то делать, но и PR-ить то, что получилось. Без этого сейчас нельзя. Из новостей нашего образовательного фронта сообщаю, что в связи со сменой руководства Политеха активизировалась работа по сокращению общей физики в программах всех направлений. Сейчас практически на всех факультетах (у нас это институты в составе университета) планируется 7 зачетных единиц на физику. Реально это означает два семестра с распределением часов 2+1+1 в неделю (лекции, упр, лаб). Вот Вам и «Физика без формул!» Вот Вам и поддержка заинтересованных школьников и студентов.

А как у Вас с трудоемкостью по физике?

23 июня 2015

Здравствуйте, Николай Борисович! Отвечаю с задержкой и коротко, так как нахожусь (уже почти год) в стадии лечения. Продолжаю работать, но в очень льготном режиме (на кафедре понимают мои проблемы). Тем не менее по мере возможностей участвую в научно-методической жизни моего университета и страны. Так, недавно делал пленарный доклад на известной Вам конференции ФССО-15 (проводил РГПУ им. А.И. Герцена). Посылаю Вам статью, подготовленную по материалам доклада, который, кстати, был встречен с большим интересом. Статья предназначается для журнала «Физическое образование в вузах» (№ 3–2015).

У меня сейчас idea-fix: повернуть общую (учебную) физику в «феноменологическом» направлении. Уже просто не могу воспринимать курсы физики, которые фактически являются курсами математики. Недавно вышла вторая моя книга по демонстрационному эксперименту, заканчиваю пособие «Классическая физика», имеющая выраженный феноменологический уклон.

Так что Вы видите, что я с большим вниманием отношусь к Вашим работам, где принят тот же подход. Могу только пожелать, чтобы Вы систематизировали то, что нарабатывали, в виде какого-то солидного издания. Успехов Вам, удачи и здоровья!

Ваш Н.М. Кожевников

И вот... Печальное известие из Питера: Николай Михайлович безвременно ушел из жизни. Последние два года, несмотря на тяжелую болезнь, он боролся. Участвовал в заседаниях и конференциях, заостряя внимание на насущных проблемах образования и просвещения. Его последние публикации свидетельствуют о том, что он был не только крупным ученым. Уровень его мышления, государственный взгляд на проблемы образования достойны того, чтобы эти публикации стали достоянием широких преподавательских и учительских кругов и стали программой реальных действий по выполнению нашего гражданского и профессионального долга. Поэтому призываю всех неравнодушных к будущему наших детей и внуков ознакомиться с важными статьями Н.М. Кожевникова. Эти статьи касаются общих вопросов физического образования, а их уровень свидетельствует о высокой степени гражданской и профессиональной ответственности автора за положение дел в его профессиональной сфере. Итак, листаем страницы журнала **«Физическое образование в вузах»**.

• **«Эволюция курса общей физики от Хвольсона да наших дней» (2013, т. 19, № 3)**. Автор спрашивает самого себя: «...Почему так получилось, что физика перестает быть авторитетным носителем знаний об окружающем мире? Почему наши коллеги из УМО вузов, утверждавшие федеральные государственные стандарты (ФГОС-3), так спокойно секвентировали физику?... Как вернуть физике достойное место в системе современного образования?»

Не желая навязывать читателю свои акценты в указанной статье, отмечу, что и мой опыт обучения на производстве подчиненных инженеров, а после и студентов, говорит об авторитете преподавателя, если ему удастся передать в ходе практической или экспериментальной работы свои знания в виде практических навыков. Поэтому прочтите статью и сделайте свои выводы.

• **«Подходы к решению проблем в сфере образования и науки в Германии» (2012, т. 18, № 2)**. В этом обзоре Николай Михайлович особо подчеркивает, что «...основная мировая тенденция последних лет заключается в создании больших интерактивных музеев занимательной науки и специальных физических лабораторий, куда на регулярной основе приезжают школьники и студенты со всего мира, чтобы прикоснуться к живой физике».

• **«Ответственность субъектов российского образования за уровень преподавания физики в высшей школе» (2015, т. 21, № 3)**. Прочитав статью, каждый из участников образовательного процесса почувствует и часть своей вины за состояние дел. Свое же понимание этой статьи выражу так: это мысли не просто известного профессора, такую статью следовало бы написать президенту РАН или высокому

государственному деятелю, всерьез озабоченным сутью проблемы, а не суммами расходов на образование. Кстати, не только на высшее. Всем известно, к чему привела бюрократизация школьного образования, которую нетрудно объяснить попыткой формализовать способы оценки педагогического труда, например, количеством написанных учениками (читай – их родителями) рефератов. Общаясь со многими талантливыми учителями, понимаю их буквально бедственное положение профессионалов, зажатых между их педагогическим опытом и начальственными требованиями соблюдения ФГОСов. Обратная связь между педагогами и чиновниками от образования реально отсутствует. Кстати, на той конференции 2012 года я задал вопрос председательствующему на пленарном заседании: присутствуют ли на конференции представители Минобрнауки. Ответ был ошеломительным: «Мы их приглашали, но они к нам не ездят, да и на съезды учителей тоже».

Цитирую аннотацию к последней статье: «...на государственном уровне... проблема упирается в невостребованность выпускаемых специалистов со стороны большой науки и промышленности. Деятельность Министерства образования и науки сосредоточена на разработке новых стандартов и образовательных программ в отрыве от реальных проблем, стоящих перед педагогическим сообществом. Профессиональная деятельность педагогов высшей школы по многим параметрам не соответствует изменившимся реалиям времени и требует немедленной модернизации с учетом мирового опыта. Важную роль в повышении качества преподавания физики должны сыграть общекультурные компетенции и психо-эмоциональный уровень самих студентов...» И эпитафия-афоризм, поставленный Николаем Михайловичем к данной статье: «Делай, что должно, и будь, что будет».

Что же остается нам? Давайте вдумчиво отнесемся к наследию Н.М. Кожевникова и постараемся каждый на своем месте сделать что-то полезное для исправления ситуации.

27.04.2016

Н.Б. Ковылов
доцент кафедры нелинейной физики
факультета нелинейных процессов СГУ