



**ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ
ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА ФОРМИРОВАНИЕ ПОЛОС НЕПРОПУСКАНИЯ
В СПЕКТРЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ ВОЛН
В ОДНОМЕРНОМ ФЕРРИТОВОМ МАГНОННОМ КРИСТАЛЛЕ**

*С.Л. Высоцкий, С.А. Никитов, Н.Н. Новицкий, Е.С. Павлов,
А.И. Стогний, Ю.А. Филимонов*

Экспериментально исследовано распространение поверхностных магнитостатических волн в одномерном магнотонном кристалле, полученном с помощью вытравливания на поверхности пленки железоиттриевого граната толщиной $d \approx 4.1$ мкм канавок шириной 56 мкм, глубиной 0.66 мкм с периодом 98 мкм, в условиях параметрической неустойчивости первого рода (трехмагнонной). Показано, что на участке магнотонного кристалла, отвечающем нелинейному режиму распространения поверхностных магнитостатических волн, полосы не пропускания в спектре этих волн не формируются вследствие нарушения фазового синхронизма падающей и отраженной от периодической решетки волн.

Ключевые слова: Ферритовый магнотонный кристалл, полоса не пропускания, параметрическая неустойчивость.

Исследование параметрических процессов при распространении магнитостатических волн (МСВ) в пленках ферритов представляет интерес как при фундаментальных исследованиях, так и для решения прикладных задач [1,2]. Дело в том, что при легко достигаемых в условиях эксперимента уровнях мощности накачки P [3–6] удается исследовать поведение системы магнонов далеко за порогом их параметрического возбуждения. С практической точки зрения нелинейные процессы могут быть использованы при разработке устройств обработки информации на СВЧ [7,8]. С момента начала исследований обнаружены и подробно описаны эффект насыщения мощности МСВ за порогом неустойчивости $P_{\text{пор}}$ [3] и усложнение спектра сигнала с выходного преобразователя [4], определены пороги неустойчивости [5], показана зависимость дисперсии и затухания поверхностных МСВ (ПМСВ) от уровня накачки [6], рассмотрены другие эффекты, сопровождающие распространение нелинейных МСВ.

В последние годы наблюдается всплеск интереса к исследованию ферритовых магнотонных кристаллов (МК), представляющих собой пленку железоиттриевого граната (ЖИГ) с поверхностной одномерной (1D) или двумерной (2D) периодической

структурой (см. [9–17], обзор публикаций в [11]). При распространении МСВ в МК в результате взаимодействия падающей на периодическую структуру и отраженных от нее волн в дисперсионной зависимости возникают «брегговские резонансы» – полосы непропускания с центральными частотами f_n ($n = 1, 2, \dots$), отвечающими величинам волновых чисел МСВ

$$q = \frac{\pi n}{d}, \quad (1)$$

где d – период поверхностной структуры. Исследование этого эффекта проводилось, в основном, в условиях линейного режима распространения МСВ. Нелинейные МСВ в МК рассмотрены лишь в нескольких работах [12–17], две из которых касаются влияния параметрических процессов на характеристики МСВ. В [13] в эксперименте с ПМСВ в 1D МК при увеличении P с 0.5 мВт до 80 мВт было обнаружено уменьшение величин f_n примерно на 0.1%. Следует отметить, что этот эффект обусловлен не наличием периодической структуры, а связан с тем, что при

$$P > P_{\text{пор}} \quad (2)$$

вблизи входного преобразователя в пленке феррита формируется «неравновесная» область протяженностью L , в которой действительная q' и мнимая q'' части волнового вектора ПМСВ являются функциями координаты y в направлении распространения ПМСВ: $q' = q'(y)$, $q'' = q''(y)$ [6]. При распространении ПМСВ по «неравновесной» области МК изменение дисперсионной зависимости $f = f(q)$ приводит к сдвигу частоты, отвечающей выполнению условия (2). Подчеркнем, что в [13] брегговские резонансы отчетливо наблюдались и при максимальном уровне $P = 80$ мВт. При исследовании распространения ПМСВ в 2D МК в [14] также отмечалось, что трехмагنونные параметрические процессы распада при $P < 10$ мВт не разрушают запрещенную зону в спектре.

В данной работе представлены результаты исследования влияния мощности накачки на формирование полос непропускания в спектре ПМСВ в 1D МК в условиях, когда для ПМСВ разрешены параметрические процессы первого порядка [1,2].

Образец 1D МК представлял собой пленку ЖИГ намагниченностью насыщения 1750 Гс, шириной линии ФМР 0.6 Э, толщиной 4.1 мкм, на поверхности которой была вытравлена периодическая решетка из канавок глубиной 0.66 мкм, шириной 56 мкм с периодом $d = 98$ мкм. МК располагался в макете микрополосковой линии задержки так, чтобы канавки были параллельны преобразователям (шириной 30 мкм, расстояние между ними S могло изменяться от 2.0 до 5.5 мм). Макет помещался в зазор электромагнита таким образом, что внешнее магнитное поле H_0 было направлено вдоль преобразователей; такое направление намагничивания отвечает случаю ПМСВ. С помощью цифрового векторного анализатора ВЧ-цепей Agilent E5071C ENA регистрировались частотные зависимости коэффициентов передачи $S_{21} = 10 \lg[P_{\text{вых}}/P]$ и отражения $S_{11} = 10 \lg[P_{\text{отр}}/P]$ для различных уровней P ($P_{\text{вых}}$ и $P_{\text{отр}}$ – уровни сигналов на выходе макета и отраженного от входного преобразователя, соответственно). Величина P задавалась встроенным в анализатор СВЧ-генератором и могла изменяться в диапазоне: $-30 \dots 0$ дБм (0.001...1 мВт).

На рис. 1 приведены зависимости $S_{21}(f)$ и $S_{11}(f)$, полученные при $H_0 = 320$ Э и $S = 5.5$ мм. Рассмотрим сначала случай линейного режима распространения ПМСВ ($P = -30$ дБм, кривые 1). Из рис. 1, а видно, что зависимость $S_{21}(f)$ содержит вблизи частот $f_1 = 2521$ МГц и $f_2 = 2704$ МГц два участка, на которых коэффициент передачи уменьшается примерно на 30 дБ. Соответствующие этим частотам волновые числа ПМСВ $q_1 = 308$ см⁻¹ и $q_2 = 630$ см⁻¹, определенные с помощью фазочастотной характеристики (рис. 1, в) аналогично [12], хорошо соответствуют (1). В зависимости $S_{11}(f)$ на этих же частотах наблюдается возрастание уровня отраженной мощности (кривая 1 на рис. 1, б) в результате снижения эффективности возбуждения ПМСВ, что подтверждает наличие полос непропускания в спектре аналогично [12]. Таким образом, указанные на рис. 1 частоты f_1 и f_2 отвечают брэгговским резонансам ПМСВ. Влияние на их формирование мощности накачки P рассмотрим на примере частоты f_1 .

Из рис. 1, а видно, что при увеличении P до -25 дБм уровень зависимости $S_{21}(f)$ начинает понижаться (кривая 2), при этом характер частотной зависимости $S_{21}(f)$ практически не изменяется при увеличении P до -10 дБм (см., например, кривую 4, отвечающую $P = -15$ дБм). При увеличении P до -5 дБм (кривая 5) трехмагنونные процессы распада ПМСВ приводят к тому, что коэффициент $S_{21}(f)$

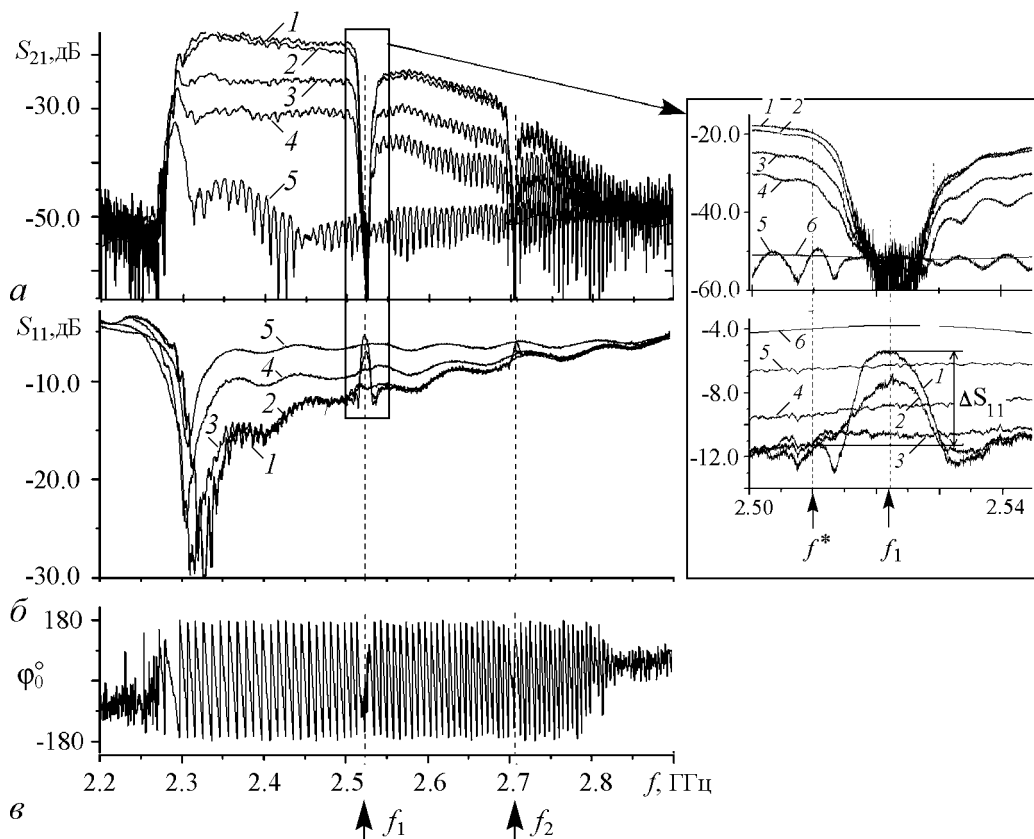


Рис. 1. Частотные зависимости коэффициента передачи S_{21} (а), коэффициента отражения S_{11} (б) и фазы сигнала на выходном микрополосковом преобразователе (в) при уровнях сигнала P , дБм на входном преобразователе: -30 (1), -25 (2), -20 (3), -15 (4), -5 (5)

вблизи частоты f_1 отвечает уровню электромагнитной наводки между преобразователями, аналогично [12]. Таким образом, в интервале величин P от -30 дБм до -10 дБм на выходном преобразователе сигнала ПМСВ в зависимости $S_{21}(f)$ наблюдаются брэгговские резонансы.

Проследим за изменением зависимости $S_{11}(f)$ с ростом величины P с помощью вставки к рис. 1, на которой участок зависимостей $S_{21}(f)$ и $S_{11}(f)$ вблизи частоты f_1 изображен в более крупном масштабе. Видно, что в линейном режиме распространения ПМСВ (кривая 1) разница $\Delta S_{11}(f)$ в уровнях величин $S_{11}(f)$ на частоте $f_1 = 2521$ МГц и, например, на частоте $f^* = 2510$ МГц, не попадающей в полосу непропускания, составляет примерно 6 дБ. При $P = -25$ дБм (кривая 2) $\Delta S_{11}(f)$ уменьшается до 4 дБм, а при $P = -20$ дБм – не превышает 1 дБм (кривая 3). При дальнейшем увеличении P с точностью шумов измерителя $\Delta S_{11}(f) = 0$ (кривые 4, 5). Таким образом, при увеличении в условиях эксперимента величины P свыше -20 дБм в зависимости $S_{11}(f)$ на частоте f_1 особенность не наблюдается, что свидетельствует об отсутствии в спектре полосы непропускания, тогда как в зависимости $S_{21}(f)$ она наблюдается и при $P = -10$ дБм.

Рассмотрим причины этого кажущегося противоречия. Дело в том, что величина коэффициента передачи S_{21} учитывает потери ПМСВ при распространении на расстояние S . При этом на участке длиной L брэгговские резонансы не образуются вследствие постоянно меняющейся величины $q' = q'(y)$. Однако при $y > L$, то есть на участке длиной $(S - L)$, величина q' не изменяется, что при выполнении условия (1) обеспечивает фазовый синхронизм падающих на периодическую структуру и отраженных от нее волн и наблюдение полос непропускания в зависимости $S_{21}(f)$. В свою очередь, уровень отраженной от входного преобразователя мощности $P_{отр}$, используемый для вычисления величины S_{11} , определяется процессами, происходящими в непосредственной близости от входного преобразователя – в ближней зоне возбуждения ПМСВ. Поскольку на частоте первого брэгговского резонанса длина возбуждаемой ПМСВ $\lambda_1 = 2\pi/q_1 \sim 204$ мкм, длина ближней зоны не превосходит величину L , составляющую, как правило, несколько миллиметров [6], следовательно, величина $P_{отр}$ будет определяться процессами, происходящими при выполнении условия (2). Таким образом, отсутствие в зависимости $S_{11}(f)$ участка увеличения S_{11} при $f = f_1$ свидетельствует о том, что на этой частоте при $y < L$ брэгговский резонанс не формируется. Добавим, что на частоте f_2 процессы, сопровождающие увеличение мощности, имели аналогичный характер.

На рис. 2 представлены зависимости коэффициентов передачи и отражения от мощности на частотах брэгговских резонансов f_1 и f_2 в сравнении с аналогичными зависимостями, полученными при $f = f^*$. Видно, что в случае $f = f^*$ величина S_{21} остается постоянной при увеличении P до уровня $P(f^*) = -26$ дБм (кривая 3 на рис. 2, а). Превышение этого уровня приводит к уменьшению величины S_{21} вследствие развития нелинейных процессов. При $P = -4$ дБм величина S_{21} достигает уровня прямой электромагнитной наводки -60 дБм и далее не изменяется. В то же время, величина S_{11} остается постоянной с ростом P до уровня -20 дБм (кривая 3 на рис. 2, б), выше которого она начинает увеличиваться. Рост величины S_{11} обусловлен снижением эффективности возбуждения ПМСВ из-за уменьшения высокочастотной восприимчивости при развитии нелинейных процессов [1].

На частотах брэгговских резонансов величина S_{21} не изменяется во всем интервале изменения P (кривые 1 и 2 на рис. 2, а) и соответствует уровню прямой электромагнитной наводки. Коэффициенты отражения $S_{11}(f_1)$ и $S_{11}(f_2)$, представленные на рис. 2, б кривыми 1 и 2, соответственно, напротив, остаются постоянными только в интервале -30 – -27 дБм $= P_{\text{пор}}(f_{1,2})$, при этом высокий уровень $S_{11}(f_1) \approx S_{11}(f_2) \approx -6$ дБм отвечает наличию полосы непропускания в спектре ПМСВ. Дальнейший рост $P > P_{\text{пор}}(f_{1,2})$ приводит к уменьшению величин S_{11} , отражающему рост эффективности возбуждения ПМСВ, а следовательно, и ухудшение условий формирования полос непропускания. Отметим, что при $P = -20$ дБм $S_{11}(f_1) \approx S_{11}(f^*)$, то есть на частоте брэгговского резонанса ПМСВ возбуждается почти так же эффективно, как в случае выбора частоты вне полосы непропускания. При $P > -20$ дБм характер изменения величин $S_{11}(f_1)$ и $S_{11}(f_2)$ аналогичен случаю $S_{11}(f^*)$, а зависимости $S_{11}(f_1)$ и $S_{11}(f^*)$ практически совпадают при $P > -15$ дБм, свидетельствуя об идентичности условий возбуждения ПМСВ на этих двух частотах и, следовательно, об отсутствии в спектре полосы непропускания.

Заметим, что прямым подтверждением влияния мощности накачки на существование в спектре ПМСВ полос непропускания является эксперимент, выполненный с использованием макета, для которого $S < L$. Однако при сближении входного и выходного преобразователей уменьшение отношения S/d ухудшает условия формирования брэгговских резонансов, а рост уровня прямой электромагнитной наводки затрудняет проведение измерений. Тем не менее это подтверждение можно получить, если изменить схему эксперимента следующим образом. Вход и выход макета соединяются внешним СВЧ-трактом, в результате чего на выходе макета происходит сложение сигнала МСВ, сигнала прямой электромагнитной наводки в макете и сигнала, поступившего по внешнему тракту. В этот тракт включаются аттенюатор и фазовращатель, с помощью которых можно обеспечить сложение в противофазе сигналов наводки и поступившего по внешнему тракту. Таким образом, на выходе макета должен наблюдаться только сигнал МСВ. Такую компенсацию наводки в широкой полосе частот провести, как правило, не удастся, однако ее можно обеспечить на некоторой фиксированной частоте f_k . В этом случае исследуется зависимость $S_{21}(H_0)$, являющаяся аналогом зависимости $S_{21}(f)$ при фиксированной величине H_0 , и ее изменения при увеличении P .

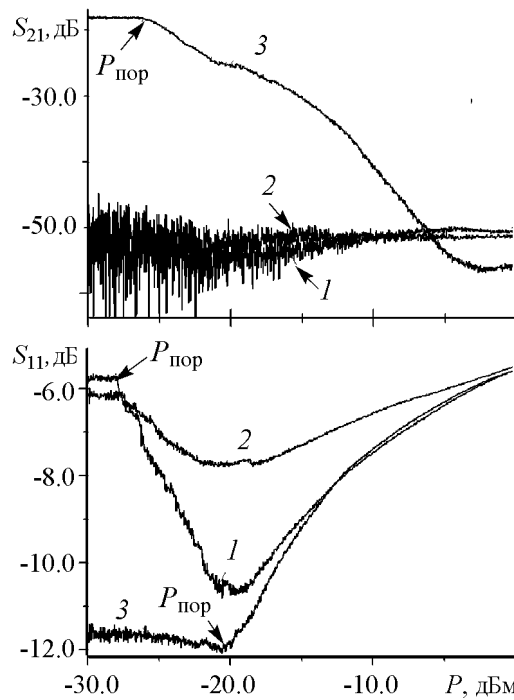


Рис. 2. Зависимости коэффициента передачи S_{21} (а) и коэффициента отражения S_{11} (б) от уровня сигнала P на входном преобразователе на частотах брэгговских резонансов $f_1 = 2521$ МГц (1) и $f_2 = 2704$ МГц (2), и на частоте $f^* = 2510$ МГц вне полосы непропускания (3)

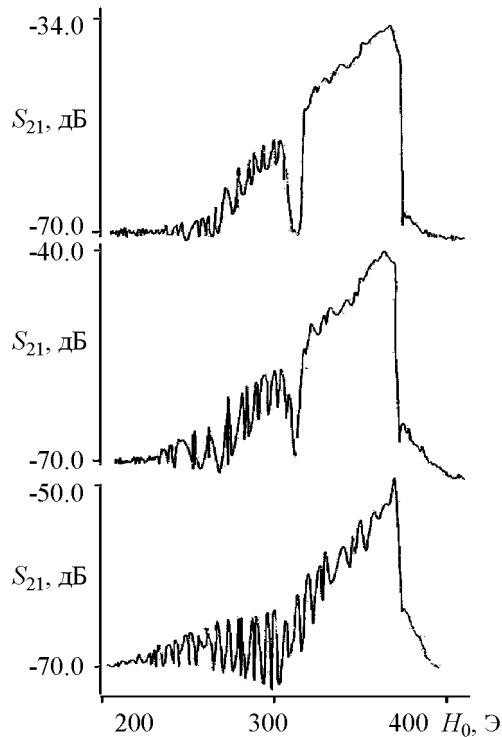


Рис. 3. Зависимость коэффициента передачи S_{21} макета с расстоянием между преобразователями 2 мм на частоте $f_1 = 2521$ МГц от величины внешнего магнитного поля H_0 при уровнях сигнала на входном преобразователе P , дБм: -30 (а), -20 (б), -11 (в)

полос не пропускаются вследствие возникновения зависимости волнового числа ПМСВ от координаты в направлении распространения, что нарушает фазовый синхронизм падающей и отраженной от периодической решетки волн.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 11-07-00233-а, 11-07-12081 офи-м, 12-07-90010-Бел-а), гранта Правительства России для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в Российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования (грант № 11.G34.31.0030), седьмой рамочной программы Европейской комиссии NoWaPhen (проект № 247556).

Библиографический список

1. Гуревич А.Г., Мелков Г.А. Магнитные колебания и волны. М.: Физматлит, 1994. 464. с.
2. Львов В.С. Нелинейные спиновые волны. М.: Наука, 1987. 270 с.
3. Schilz W. Spin-wave propagation in epitaxial YIG films // Philips Res. Rep. 1973. Vol. 28, № 1. P. 50.

На рис. 3 приведены зависимости $S_{21}(H_0)$, полученные на частоте $f_1 = 2521$ МГц при $S = 2$ мм. Отметим, что при $H_0 = 200$ Э (когда ПМСВ не возбуждается) уровень сигнала на выходном преобразователе составляет -70 дБм, тогда как в макете без внешнего СВЧ-тракта он равнялся -35 дБм. Из рис. 3, а видно, что в линейном режиме распространения ($P = -30$ дБм) в зависимости $S_{21}(H_0)$ наблюдается полоса не пропускания при $H_0 = 320$ Э. Эта полоса сохраняется и при $P = -20$ дБм, когда в МК уже развиваются нелинейные процессы (о чем свидетельствует снижение величины S_{21} , сравните масштаб вертикальных осей на рис. 3, а и 3, б, см. также рис. 1, а, кривая 3). Однако при $P = -11$ дБм брэгговский резонанс в зависимости $S_{21}(H_0)$ практически отсутствует (рис. 3, в).

Таким образом, экспериментально показано, что за порогом параметрической неустойчивости первого порядка ПМСВ в 1D ферритовом магнетонном кристалле условия для формирования в дисперсионной зависимости по-

4. Медников А.М. Нелинейные эффекты при распространении поверхностных спиновых волн в пленках ЖИГ // ФТТ. 1981. Т. 23. Вып. 1. С. 242.
5. Чивилева О.А., Гуревич А.Г., Анисимов А.Н. и др. Пороговые поля и намагниченности при параметрическом возбуждении спиновых волн поверхностной магнитостатической волной // ФТТ. 1987. Т. 29. С. 1774.
6. Казаков Г.Т., Кожевников А.В., Филимонов Ю.А. Влияние параметрически возбужденных спиновых волн на дисперсию и затухание поверхностных магнитостатических волн в ферритовых пленках // ЖЭТФ. 1999. Т. 115, вып. 1. С. 318.
7. Grishin S.V., Sharaevskii Yu.P. Nonlinear frequency-selective device on magneto-static waves // Microwaves, Radar and Wireless Communications, 2004. MİKON-2004. 15th International Conference. 2004. Vol. 1. P. 166.
8. Бегинин Е.Н., Гришин С.В. Шараевский Ю.П. Генератор хаотических сверхвысокочастотных импульсов. Патент РФ № 2386204. Опубл. 10.04.2010.
9. Гуляев Ю.В., Никитов С.А. Магнонные кристаллы – спиновые волны в периодических структурах // ДАН. 2001. Т. 380, № 4. С. 469.
10. Высоцкий С.Л., Никитов С.А., Филимонов Ю.А. Магнитостатические спиновые волны в двумерных периодических структурах – магнитофотонных кристаллах // ЖЭТФ. 2005. Т. 128, Вып. 3(9). С. 636.
11. Serga A.A., Chumak A.V. and Hillebrands B. YIG magnonics// J. Phys. D. Appl. Phys. 2010. Vol. 43. P. 264002.
12. Ustinov A.B., Drozdovskii A.V., Kalinikos B.A. Multifunctional nonlinear magnonic devices for microwave signal processing // Appl. Phys. Lett. 2010. Vol. 96. P. 142513.
13. Высоцкий С.Л., Кожевников А.В., Казаков Г.Т., Никитов С.А., Филимонов Ю.А. Параметрическая неустойчивость поверхностных магнитостатических волн в двумерных магнонных кристаллах // Изв. вузов. ПНД. 2007. Т. 15, № 3. С. 58.
14. Chen Niu-Niu, Slavin A.N., Gottam M.G. Gap solitons in periodic structures: Modulated magnetic thin films // Phys. Rev. B. 1993. Vol. 47. P. 8667.
15. Устинов А.Б., Григорьева П.Д., Калинин Б.А. Наблюдение солитонов огибающей спиновых волн в периодических магнитных пленочных структурах // Письма в ЖЭТФ. 2008. Т. 88, № 1–2. С. 34.
16. Дроздовский А.В., Черкасский М.А., Устинов А.Б., Ковшиков Н.Г., Калинин Б.А. Образование солитонов огибающей при распространении спин-волновых пакетов в тонкопленочных магнонных кристаллах// Письма в ЖЭТФ. 2010. Т. 91, № 1. С. 17.
17. Karenowska A.D., Chumak A.V., Serga A.A., Gregg J.F., Hillebrands B. Magnonic crystal based forced dominant wavenumber selection in a spin-wave active ring // Appl. Phys. Lett. 2010. Vol. 96. P. 082505.

СФ ИРЭ им.В.А.Котельникова РАН
 ИРЭ им.В.А.Котельникова РАН
 ГНПО «НПЦ НАН Беларуси
 по материаловедению», Минск

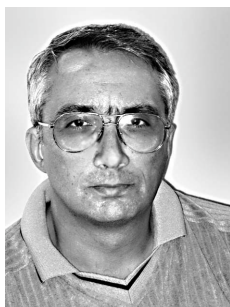
Поступила в редакцию 16.01.2012
 После доработки 2.03.2012

INFLUENCE OF FIRST ORDER PARAMETRIC INSTABILITY ON FORMATION OF FORBIDDEN GAPS IN SPECTRA OF MAGNETOSTATIC SURFACE WAVES IN ONE-DIMENSIONAL FERRITE MAGNONIC CRYSTAL

*S.L. Vysotsky, S.A. Nikitov, N.N. Novitsky, E.S. Pavlov,
A.I. Stognij, Yu.A. Filimonov*

Magnetostatic surface waves propagation in one-dimensional magnonic crystal obtained by etching of array of grooves (56 width, 0.66 deep, period 98) in yttrium-iron garnet film of 4.1 thickness was investigated at first order (three-magnon) parametric instability. It was shown that forbidden gaps don't form at region of magnonic crystal where propagation of magnetostatic surface waves is nonlinear because of destroy of phase synchronism of incident and reflected waves.

Keywords: Ferrite magnonic crystal, stop band, parametric instability.



Высоцкий Сергей Львович – родился в Саратове (1955). Окончил факультет электронной техники и приборостроения Саратовского политехнического института (1977). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1994) в области радиофизики. Ведущий научный сотрудник лаборатории магнитоэлектроники Саратовского филиала ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН. Автор более 40 научных работ.

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
СФ ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: vysotsl@gmail.com



Никитов Сергей Аполлонович – родился в городе Бердичеве Житомирской области (1955). Окончил факультет физической и квантовой электроники Московского физико-технического института (1979). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МФТИ (1982) и доктора физико-математических наук (1991) в области радиофизики и физики магнитных явлений. В 2003 году был избран членом-корреспондентом РАН по Отделению информационных технологий и вычислительных систем РАН (специальность «Информационные системы и элементная база»). Специалист в области твердотельной микро- и нанoeлектроники, а также физики твердого тела. Заместитель директора по науке ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН. Автор более 400 научных работ, член редколлегии журналов «Радиотехника и электроника», «Микро- и наносистемная техника», «Нелинейный мир». Лауреат премий Комсомола Подмосквья и Ленинского Комсомола в области физики.

125009 Москва, ул. Моховая, д. 11., корп. 7
ИРЭ им. В.А.Котельникова РАН
E-mail: nikitov@cplire.ru



Новицкий Николай Николаевич – родился в городе Осиповичи Могилёвской области, Республика Беларусь (1975). Окончил Белорусский государственный университет (1998). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (2003) в Институте физики твёрдого тела и полупроводников в области физики конденсированного состояния. Научный сотрудник ГНПО «Научно-практический центр НАНБ по материаловедению». Опубликовал более 30 научных статей. В 2010 году была присуждена стипендия Президента Республики Беларусь талантливым молодым ученым.

220072 Минск, ул. П. Бровки, 19
ГО «НПЦ НАНБ по материаловедению»
E-mail: novitski@iftp.bas-net.by



Павлов Евгений Сергеевич – родился в городе Саки Крымской области (1986). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (2008). Аспирант ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН. Автор 6 научных работ.

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
СФ ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: Pavlov-Gek@mail.ru



Стогний Александр Иванович – родился в пос. Табошар, Ленинабадская область, Республика Таджикистан (1960). Окончил Донецкий государственный университет (1983). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (1993) в Институте физики твёрдого тела и полупроводников в области физики конденсированного состояния. Ведущий научный сотрудник ГНПО «Научно-практический центр НАНБ по материаловедению». Опубликовал более 100 научных статей. Является автором более 20 патентов.

220072 Минск, ул. П. Бровки, 19
ГО «НПЦ НАНБ по материаловедению»
E-mail: stognij@ifftp.bas-net.by



Филимонов Юрий Александрович – родился в Куйбышеве (1955). Окончил Факультет физической и квантовой электроники Московского физико-технического института (1979). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МФТИ (1982) и доктора физико-математических наук в ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН (2008) в области радиофизики и физики магнитных явлений. Директор Саратовского филиала ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН. Автор более 300 научных работ.

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
СФ ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: fil@soire.renet.ru



ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ РИКЕРА

К.В. Шлюфман, Б.Е. Фишман, Е.Я. Фрисман

Проведено исследование аperiodических решений уравнения Рикера. Выявлены два качественно различных вида аperiodических решений уравнения. Дано определение одному из выделенных видов аperiodических решений – интервально-периодическому решению. Для анализа динамики одномерной системы использованы псевдофазовые пространства с большим лагом. Построены карты интервально-периодических решений и обсуждено распределение интервально-периодического решения в параметрическом пространстве уравнения Рикера.

Ключевые слова: Рекуррентное уравнение Рикера, интервально-периодическое решение, псевдофазовое пространство, кластерный анализ, спектральный анализ.

Введение

Несмотря на давность и, казалось бы, достаточную исследованность динамических режимов одномерных рекуррентных систем вида

$$x_{n+1} = F(a, x_n), \quad (1)$$

в представлении об их возможных динамических режимах, на наш взгляд, сохраняются вопросы, слабо рассмотренные в литературе. Известно, что можно выделить области значений параметра a , при которых это уравнение имеет устойчивые по Ляпунову стационарные и периодические решения [1]. Иные области значений параметра a характеризуются как области аperiodических или хаотических решений.

В настоящей работе предпринята попытка более детального исследования множества аperiodических решений. Оказалось, что рекуррентные уравнения (1) могут иметь принципиально разные по характеру аperiodические динамические режимы. Различия между этими режимами можно однозначно определить по особенностям таких статистических характеристик, как гистограмма и автокорреляционная функция. Так, было показано существование отдельного класса решений, объединяющих свойства периодических и аperiodических решений. Подобного рода решения ранее обнаруживались эпизодически, фиксировались как «шумящий цикл» [1], а свойства

их как отдельного класса решений систематически не исследовались. Данная работа несколько заполняет этот пробел.

Исследование выполнено на примере широко известного уравнения

$$x_{n+1} = x_n a^* \exp(-bx_n), \quad (2)$$

предложенного У.Е. Рикером для описания динамики численности популяций лососевых видов рыб (см., например, [2]). Переменная x_n интерпретируется в этом случае как значение численности рассматриваемой популяции в момент времени $n = 0, 1, \dots$. Параметр a^* – репродуктивный потенциал популяции (скорость роста популяции «в пустоту»), определяется биологическими особенностями вида, параметр b характеризует «емкость» экологической ниши популяции: при $x_n = 1/b$ пополнение популяции (x_{n+1}) максимально. Из биологических соображений ясно, что параметры a^* и b положительны. Естественно, что задание начального значения x_0 конкретизирует решение уравнения (2).

Несмотря на свою относительную простоту, уравнение Рикера широко используется (см., например, [1–5]), поскольку в рамках этой модели находят объяснения резкие колебания численности популяции при сравнительно постоянных внешних условиях. На её основе строятся более сложные модели и решаются, в частности, задачи оптимизации рыбного промысла и рыбопроизводства (см., например [2, 5]). Вместе с тем, остается невыясненным вопрос о характере и «внутренней структуре» аperiodических решений уравнения Рикера. Динамические режимы типа «шумящих циклов» могут детерминированно порождаться самим уравнением и в этом случае интерпретироваться как внутренние свойства популяции, а могут быть связаны с «шумящими» внешними воздействиями. Таким образом, вопрос о характере динамических режимов носит принципиальный характер и важен для понимания реальных биологических популяционных процессов. Проведенное исследование – один из шагов в этом направлении.

1. Характеристика аperiodических режимов

Переходя к новому масштабу (то есть рассматривая относительные значения численности), выполним простую замену переменной. В результате уравнение Рикера становится однопараметрическим:

$$x_{n+1} = x_n a \exp(-x_n), \quad (3)$$

где $a = a^*/b$.

Для исследования устойчивости решения уравнения (3) наиболее часто в качестве индикатора используется показатель Ляпунова λ [1,6]. Значение $\lambda < 0$ соответствует устойчивому решению, а $\lambda > 0$ – неустойчивому. Для дальнейшей классификации режимов одномерных уравнений на множестве неустойчивых решений использование только показателя Ляпунова недостаточно.

Вместе с тем, результаты имитационного моделирования указывают на наличие различных по характеру аperiodических решений уравнения (3). В качестве примера рассмотрим решения при двух значениях параметра a : 15.17 и 17.11. Оба эти решения неустойчивы по Ляпунову, так как характеризуются положительными значениями показателя Ляпунова. При $a = 15.17$ показатель Ляпунова $\lambda = 0.14$, а при $a = 17.11$ – $\lambda = 0.34$.

На рис. 1 представлены последовательности $\{x_n^{(i)}\}_{n=0}^N$ значений трех решений уравнения (3) при $a = 15.17$ с близкими друг другу начальными состояниями: $x_0^{(1)} = 5.37$; $x_0^{(2)} = 5.39$; $x_0^{(3)} = 5.41$, где верхний индекс $i = 1, 2, 3$ в скобках обозначает номер рассматриваемого решения. Из рисунка видно, что решения, начиная с десятого временного момента ($n = 10$), имеют заметно различающиеся значения. При этом с течением времени различия между соответствующими значениями решений ограничены, и для всех трех рассматриваемых последовательностей наблюдается согласованность в тенденциях изменения значений.

На рис. 2 изображены последовательности $\{x_n^{(i)}\}_{n=0}^N$ значений трех решений уравнения (3) при $a = 17.11$ с теми же начальными состояниями: $x_0^{(1)} = 5.37$; $x_0^{(2)} = 5.39$; $x_0^{(3)} = 5.41$.

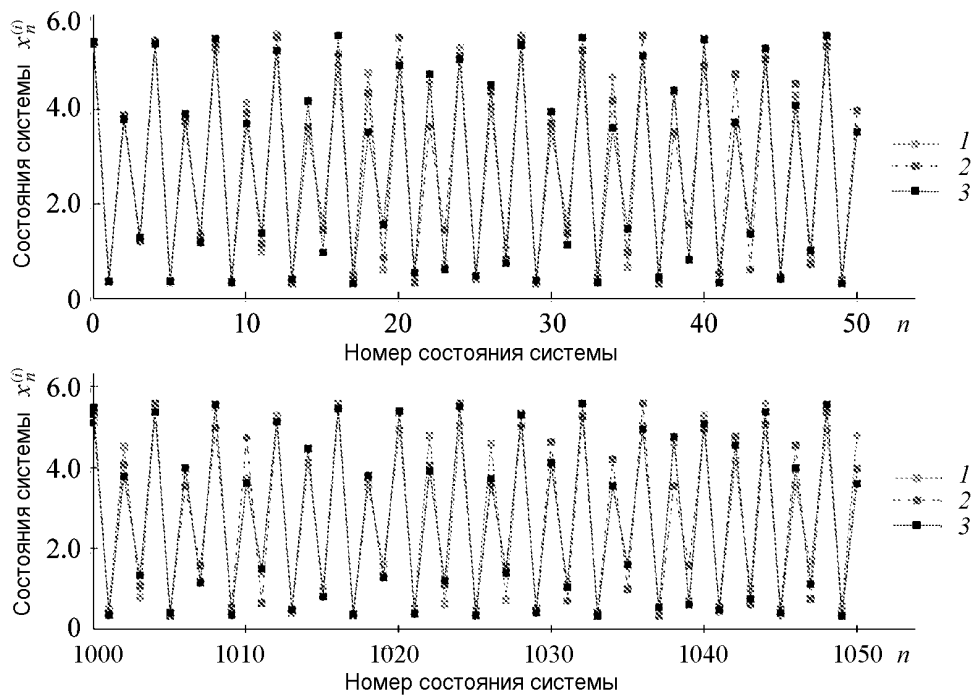


Рис. 1. Последовательности значений трех решений уравнения (3) при $a = 15.17$ и близких начальных состояниях

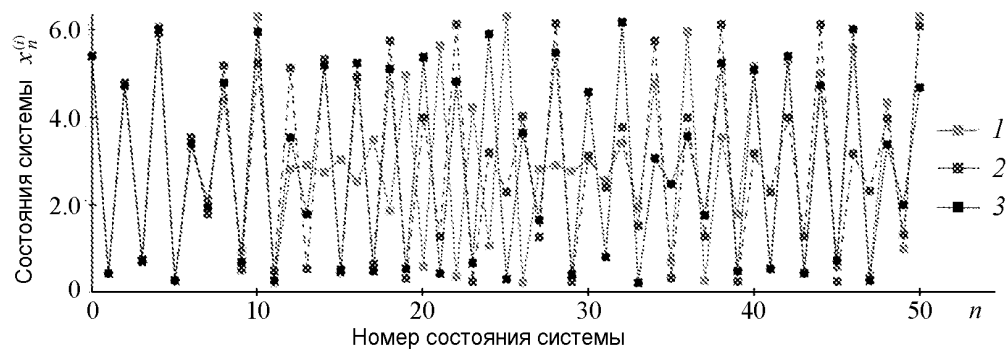


Рис. 2. Последовательности значений трех решений уравнения (3) при $a = 17.11$ и близких начальных состояниях

Из рис. 1 и рис. 2 видно, что в обоих случаях малые отклонения в начальных условиях, в силу неустойчивости по Ляпунову, со временем вызывают расхождения в последующих принимаемых значениях. Такие решения также называют нерегулярными. Однако в рассматриваемых случаях, на наш взгляд, решения качественно различаются. В первом случае (при $a = 15.17$) уравнение (3) имеет решения $\{x_n^{(i)}\}_{n=0}^N$ с согласующимися друг с другом (по порядку) последовательностями значений. Можно также полагать, что в любой момент времени n отклонения соответствующих значений не превышают некоторую «пороговую» величину. Во втором случае (при $a = 17.11$), наоборот, последовательности принимаемых значений плохо согласуются друг с другом (даже по порядку). Могут наблюдаться большие, по сравнению с первым случаем, отклонения между значениями решений. При этом выбор близких начальных условий практически не позволяет согласовать, как в предыдущем случае, последовательности значений.

Отмеченное качественное различие в поведении решений уравнения (3) дало основание предположить, что для классификации аperiodических режимов может быть использовано распределение значений x_n .

При проверке указанного предположения было выполнено имитационное моделирование, в котором в качестве индикатора различий аperiodических решений уравнения Рикера использовалась гистограмма значений x_n . Построение гистограммы по последовательности значений решения уравнения выполняется следующим образом. Область $[a^2 \exp(- (1 + a/e)); a/e]$ допустимых значений решений рекуррентного уравнения (3) (известная как диапазон актуальных для рассмотрения значений x_n , определяющихся как результат преобразования правой части модели Рикера [7]) разбивается на интервалы равной длины h . Выбор длины h может быть произволен. При этом для получения статистически обеспеченных оценок распределения количество используемых значений x_n для построения гистограммы может быть определено формулой Стерджеса [8] $N = \exp [0.301 (a/(eh) - 1)]$, где a – параметр системы (3).

Гистограмма позволяет по значениям x_n решения рекуррентного уравнения сформировать представление об их распределении и, в частности, выделить диапазоны $X_k, k = 1, \dots, d$, возможных значений решений уравнения, а также указать интервалы неприсущих данной системе значений.

Заметим, что в ходе имитационного моделирования построение гистограммы выполнялось по одному конечному фрагменту последовательности значений $\{x_n\}_{n=1000}^N$ решения уравнения (3). При этом начальное состояние x_0 выбиралось произвольно.

В случаях неположительного значения показателя Ляпунова реализуется достаточно быстрый переходный процесс к стационарному или периодическому режиму. Проведенное сравнение результатов, полученных по решению уравнения (3), с результатами, рассчитанными при отбрасывании r первых значений данного решения, показало, что уже начиная с $r = 100$ при любых значениях x_0 переходный процесс не сказывается на статистических характеристиках дальнейшей реализации.

Заметим, что предельные режимы, которые наблюдаются при положительных значениях показателя Ляпунова, вряд ли можно называть стационарными. Вопрос о том, сколько итераций необходимо, чтобы в этих режимах выйти на аттрактор, является предметом отдельного исследования. Вместе с тем, как показали результаты исследований, выполненных в рамках имитационного моделирования, уже после 1000 итераций в прикладных задачах не столь принципиально, исследуются ли свой-

ства аттрактора или свойства заключительной части очень длительного переходного процесса.

Таким образом, отбрасывание из последовательности первой тысячи значений x_n позволяет исключить влияние выбора x_0 на актуальные характеристики гистограмм.

На рис. 3 представлены гистограммы для аperiодических режимов при четырех значениях параметра a . Видно, что полученные гистограммы различаются количеством и расположением диапазонов значений x_n :

а) при $a = 16.13$ на гистограмме выделились шесть ($d = 6$) отделенных друг от друга диапазонов X_k значений решения;

б) при $a = 15.17$ таких диапазонов X_k четыре (фрагмент данного решения был представлен выше, на рис. 1);

в) при $a = 15.26$ наблюдаются только два диапазона X_k , $k = 1, 2$;

г) при $a = 17.11$ гистограмма имеет только один диапазон X_k значений решения уравнения Рикера, причем этот диапазон практически полностью покрывает интервал $[a^2 \exp(-(1 + a/e)); a/e]$. Фрагмент решения этого случая представлен выше, на рис. 2.

Отметим, что для построения гистограммы выполняется деление диапазона возможных состояний системы $[a^2 \exp(-(1 + a/e)); a/e]$ на малые интервалы равной длины h . Выбор длины таких интервалов для проводимого нами анализа распределения значений решения играет существенную роль. Так, интервал, не имеющий ни одного попадания значения x_n , может интерпретироваться как интервал, разделяющий два диапазона принимаемых системой состояний. Из этого замечания понятно, что, с одной стороны, выбор статистически необеспеченной длины интервала h может привести к неверно интерпретируемым результатам, а именно ошибоч-

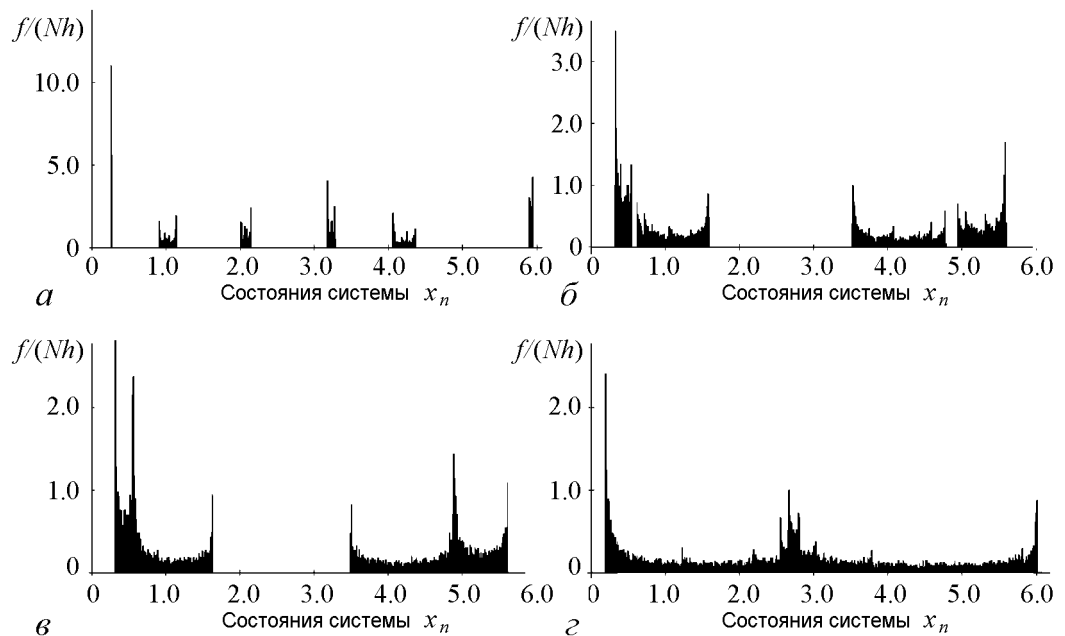


Рис. 3. Гистограмма значений решения уравнения (3) при $a = 16.13$ (а), 15.17 (б), 15.26 (в), 17.11 (г) (использованы интервалы длиной $h = 0.01$). По оси ординат отложена частота f появления состояния системы в интервале разбиения, нормированная на произведение общего числа рассмотренных состояний N и длины интервала h

но увеличить количество диапазонов состояний, принимаемых системой. С другой стороны, использование слишком больших длин интервалов h может не позволить различить расположенные близко друг к другу диапазоны принимаемых состояний системы.

Заметим, что диапазоны принимаемых состояний X_k имеют различные диаметры. Под диаметром диапазона понимается наибольшая по модулю разница между значениями x_n , принадлежащими этому диапазону. Понятие «диаметр диапазона» будет использовано далее.

Из сказанного можно сделать следующие выводы:

- гистограммы позволяют определить интервалы возможных значений x_n решения уравнения (3);
- распределения значений x_n при различных значениях параметра a могут качественно отличаться друг от друга. При одних значениях параметра a значения x_n образуют несколько непересекающихся диапазонов X_k , при других – диапазон значений x_n один;
- интервалы возможных состояний системы не при всех значениях параметра a полностью покрывают интервал $[a^2 \exp(- (1 + a/e)); a/e]$.

Вместе с тем, позволяя выделить диапазоны принимаемых значений X_k , гистограмма не дает представления о характере реализуемой динамики. Для исследования этого характера было решено использовать выборочную автокорреляционную функцию.

В ходе имитационного моделирования выборочная автокорреляционная функция вычислялась по известной формуле

$$K(m) = \frac{N}{N - m + 1} \cdot \frac{\sum_{i=0}^{N-m} (x_i - \bar{x}) \cdot (x_{i+m} - \bar{x})}{\sum_{i=0}^N (x_i - \bar{x})^2},$$

где $\bar{x} = 1/(N + 1) \cdot \sum_{i=0}^N x_i$, $N + 1$ – длина последовательности значений; m – лаг автокорреляционной функции.

Оценивание автокорреляционной функции выполнялось по одному конечному фрагменту последовательности значений $\{x_n\}_{n=1000}^N$ решения уравнения (3). Начальное состояние x_0 выбиралось произвольно.

На рис. 4 представлены автокорреляционные функции решений уравнения (3) при тех же значениях параметра a , при которых построены гистограммы на рис. 3. Максимальное значение лага m , представленное на рисунке, равно 50. При больших значениях лага поведение функции не изменялось.

Из рис. 4 видно, что система, состояния которой практически покрывают весь интервал $[a^2 \exp(- (1 + a/e)); a/e]$, имеет затухающую автокорреляционную функцию (случай z). В тех же случаях, когда были выделены несколько различных диапазонов значений X_k , решение уравнения характеризует незатухающая автокорреляционная функция (случаи $a-e$).

Сопоставляя результаты исследования распределения значений x_n с помощью гистограммы и временной структуры решения уравнения (3) с помощью автокорреляционной функции, можно сделать следующие выводы:

- при положительном показателе Ляпунова уравнение (3) может иметь два качественно разных динамических режима;

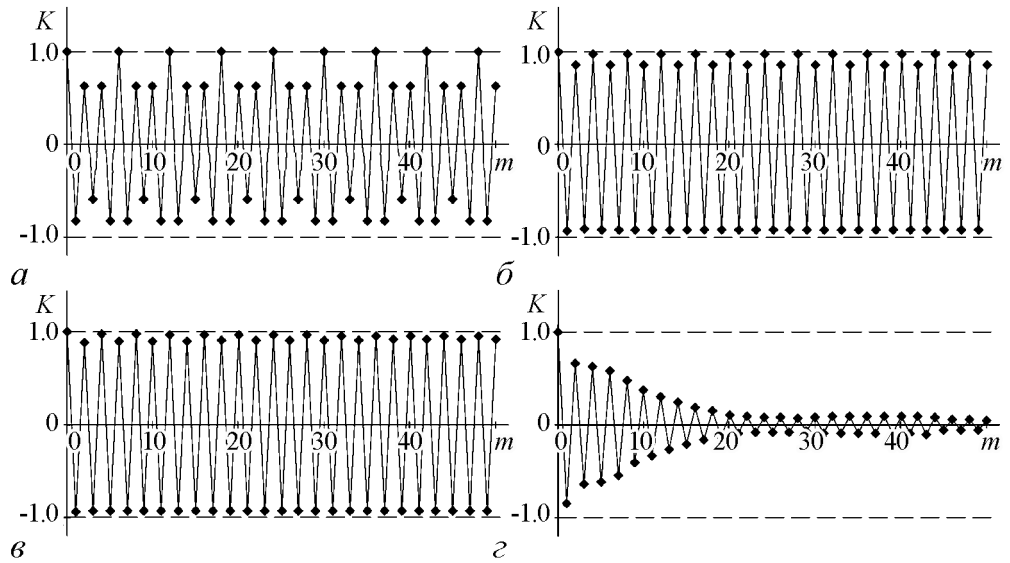


Рис. 4. Автокорреляционная функция решений уравнения (3) при $a = 16.13$ (а), 15.17 (б), 15.26 (в), 17.11 (г)

- первый вид режима характеризуется единым диапазоном значений x_n , охватывающим всю доступную область $[a^2 \exp(- (1 + a/e)); a/e]$, и затухающей автокорреляционной функцией;
- второй вид режима характеризуется несколькими (более чем одним) взаимно непересекающимися диапазонами значений $X_k, k = 1, \dots, d, d > 1$, и незатухающей циклической автокорреляционной функцией.

Апериодические режимы в псевдофазовом пространстве

Для более детального исследования временной структуры решения уравнения (3) нами были использованы портреты в псевдофазовых пространствах. На рис. 5, а представлен портрет, построенный из пар значений (x_n, x_{n+1}) последовательности решения, отстоящих друг от друга на одну итерацию, или как говорят, с лагом 1. На этом портрете пары значений x_n обозначили четыре фрагмента графика правой части уравнения Рикера. Увеличение лага усложняет вид выделяемых парами (x_n, x_{n+m}) фрагментов отображения $\underbrace{F \dots F}_m(x) = F^{(m)}(x)$, где m – количество разделяющих итераций (лаг) значения x_i и x_{i+m} . Так, на рис. 5, б–е представлены портреты в псевдофазовых пространствах с лагами 3, 7, 11, 19 и 31.

Из рис. 5 понятно, что пары значений (x_n, x_{n+m}) на портрете, группируясь, образуют количество областей, не зависящее от лага m псевдофазового пространства. Усложнение формы фрагментов графика $F^{(m)}(x)$ при увеличении лага m приводит к заполнению парами (x_n, x_{n+m}) ограниченных областей, напоминающих прямоугольники. Причем вне этих областей портреты не содержат ни одной пары (x_n, x_{n+m}) .

При построении портретов на рис. 5 значения лагов m подбирались так, чтобы обсуждаемые области находились в одних и тех же положениях. В общем случае, как установлено в ходе имитационного моделирования, расположение имеющихся на портрете областей зависит от их количества d и от лага m .

С увеличением лага m можно наблюдать периодические перемещения областей пар значений (x_n, x_{n+m}) в псевдофазовом пространстве. Причем этот период совпадает с количеством областей d . В случае $m = dp + 1$, где p любое натуральное число, на портрете области пар (x_n, x_{n+m}) своим расположением обозначают график правой части уравнения (3) $F(x)$. На рис. 6, а представлен портрет при $a = 16.13$, лаг псевдофазового пространства $m = 73$, количество областей $d = 6$.

Учитывая, что каждая точка в портрете означает пару (x_n, x_{n+m}) , то есть показывает переход за m итераций от значения x_n до значения x_{n+m} , то по портрету можно определить порядок перехода по интервалам, к которым принадлежат эти значения. Так, на рис. 6, а показан периодический переход по интервалам с периодом $d = 6$ в следующем порядке:

$$\begin{aligned}
 & [0.25, 0.26] \rightarrow [0.90, 1.14] \rightarrow [2.00, 2.14] \rightarrow [3.17, 3.27] \rightarrow \\
 & \rightarrow [4.05, 4.36] \rightarrow [5.89, 5.93] \rightarrow [0.25, 0.26] \rightarrow \dots
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

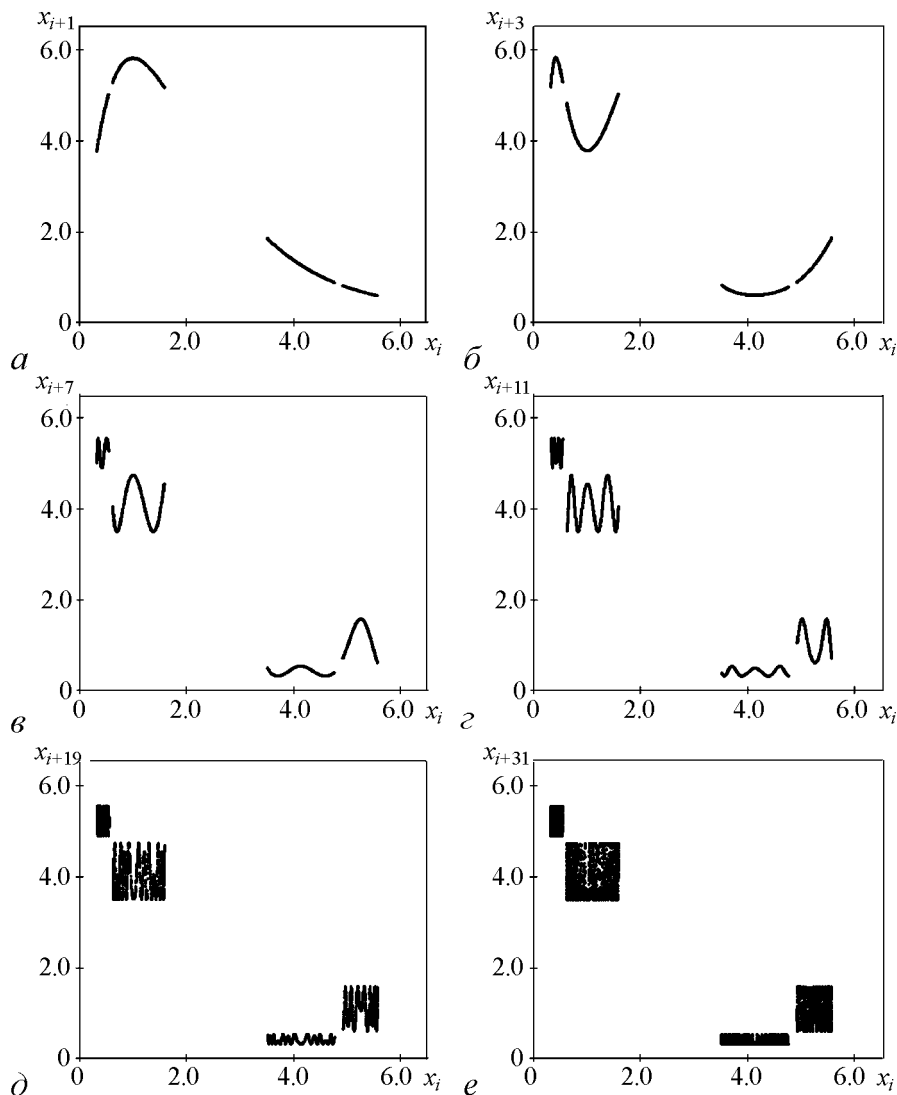


Рис. 5. Портреты уравнения Рикера (3) при $a = 15.17$ в псевдофазовых пространствах с лагом $m = 1$ (а), 3 (б), 7 (в), 11 (г), 19 (д), 31 (е)

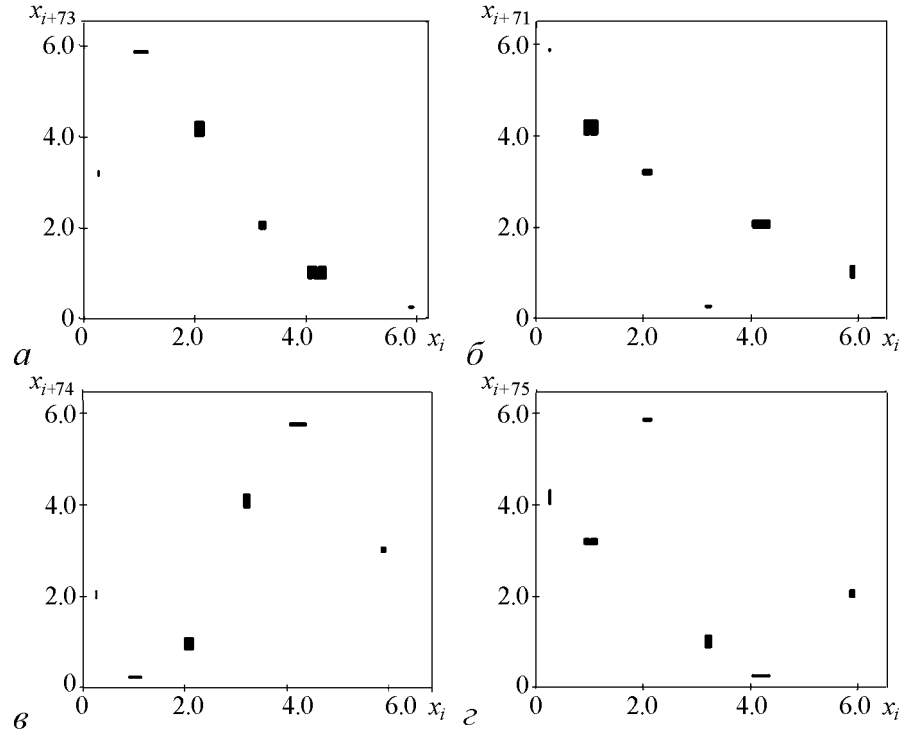


Рис. 6. Портреты уравнения (3) при $a = 16.13$ в псевдофазовом пространстве с лагами $m = 73$ (а), 71 (б), 74 (в), 75 (г)

В ходе имитационного моделирования установлено, что, если количество областей d не является простым числом, то могут наблюдаться следующие случаи перехода по интервалам значений. Если лаг m взаимно прост с количеством областей d ($\text{НОД}(m, d) = 1$), то области своим расположением определяют единственную последовательность, подобную последовательности (4). Например, на рис. 6, б представлен портрет уравнения (3) при $m = 71$. Пары значений (x_n, x_{n+m}) решения уравнения образуют шесть областей, определяющих только одну последовательность перехода.

Если значение лага m не взаимно просто с d , то в портрете наблюдается качественно иное расположение областей пар (x_n, x_{n+m}) . Так, на рис. 6, в при $m = 74$ ($\text{НОД}(m, d) = 2$), на портрете области определяют две обособленные друг от друга последовательности переходов по интервалам:

$$\begin{aligned}
 & [0.25, 0.26] \rightarrow [2.00, 2.14] \rightarrow [0.90, 1.14] \rightarrow [0.25, 0.26] \rightarrow \dots \\
 & \text{и } [3.17, 3.27] \rightarrow [4.05, 4.36] \rightarrow [5.89, 5.93] \rightarrow [3.17, 3.27] \rightarrow \dots
 \end{aligned}$$

При $m = 75$ ($\text{НОД}(m, d) = 3$) на рис. 6, г видны три обособленные последовательности интервалов

$$\begin{aligned}
 & [0.25, 0.26] \rightarrow [4.05, 4.36] \rightarrow [0.25, 0.26] \rightarrow \dots, \\
 & [0.90, 1.14] \rightarrow [3.17, 3.27] \rightarrow [0.90, 1.14] \rightarrow \dots, \\
 & [2.00, 2.14] \rightarrow [5.89, 5.93] \rightarrow [2.00, 2.14] \rightarrow \dots
 \end{aligned}$$

Если значение лага m кратно количеству областей d , то области пар выстраиваются на биссектрисе первого квадранта псевдофазового пространства, указывая

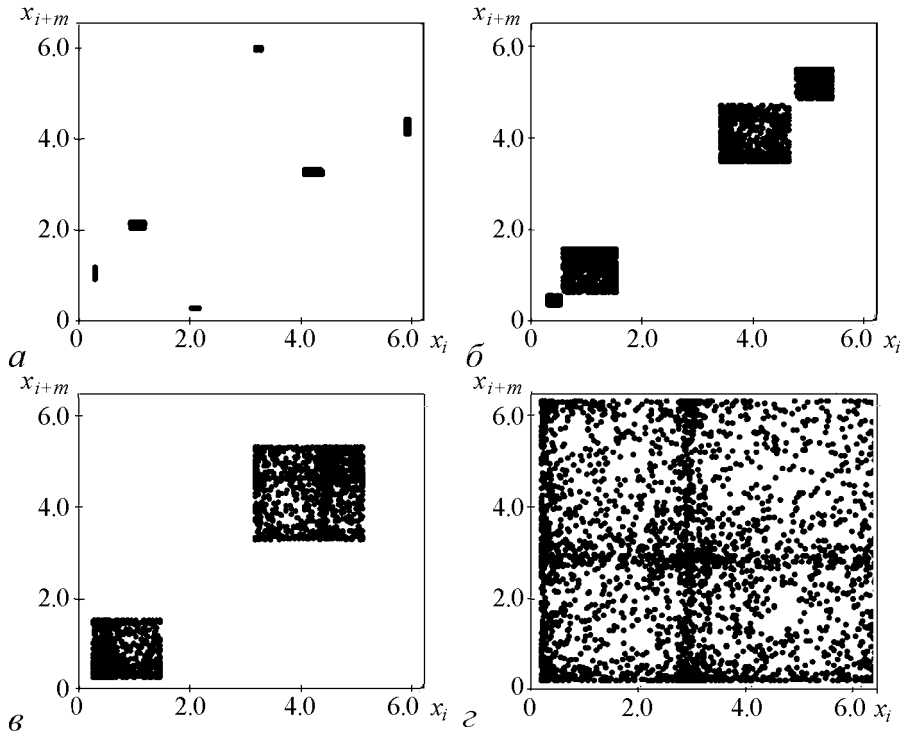


Рис. 7. Фазовые портреты уравнения (3) в псевдофазовом пространстве при $a = 16.13$ (а), 15.17 (б), 15.26 (в), 17.11 (г). Использовано значение лага $m = 100$

на то, что через m итераций значение x_{n+m} возвращается в тот же интервал, которому принадлежит значение x_n .

Появление нескольких обособленных циклов на фазовом портрете легко объясняется следующим образом. Лаг, используемый при построении псевдофазового пространства, аналогичен частоте дискретизации некоторого исследуемого сигнала. Использование не взаимно простой частоты дискретизации с периодом самого сигнала может дать неоднозначное представление о периодичности исследуемого сигнала.

Из сказанного можно сделать следующие выводы о некоторых свойствах фазовых портретов в псевдофазовом пространстве с большим лагом:

- увеличение лага m псевдофазового пространства приводит к формированию на портрете областей прямоугольного вида из пар значений (x_n, x_{n+m}) ;
- в псевдофазовых пространствах с большим значением лага m количество выделенных областей d пар значений (x_n, x_{n+m}) на портрете не зависит от значения лага m ;
- учитывая, что под лагом m понимается количество итераций, разделяющих друг от друга значения решения x_n и x_{n+m} , можно сказать, что значение лага псевдофазового пространства определяет расположение областей пар (x_n, x_{n+m}) .

Рассмотрим использование портретов в псевдофазовом пространстве с большим лагом в анализе решений уравнения (3).

Для рассмотренных ранее случаев решения уравнения (3) при параметре a , равном 16.13 , 15.17 , 15.26 и 17.11 , построены портреты в псевдофазовом пространстве с лагом $m = 100$ (рис. 7). Видно, что пары значений (x_n, x_{n+m}) в псевдофазовом пространстве выделяют в случае a – шесть областей, в случае b – четыре, в

случае ν – две и в случае ε – одну область. Количество областей на фазовых портретах соответствует количеству диапазонов X_k , выделенных с помощью гистограммы (см. рис. 3).

Из рассмотренных четырех случаев выделяется случай, показанный на рис. 7, ε . При $a = 17.11$ пары значений (x_n, x_{n+m}) решения уравнения (3) в фазовом портрете образуют единую область, что соответствует единственному диапазону значений, определенному гистограммой.

2. Кластерный анализ динамики системы

Наличие в пространстве состояний ограниченных диапазонов, в которые может переходить система, а также областей пар состояний системы в псевдофазовом пространстве означает, что для дальнейшего исследования продуктивным может быть использование кластерного анализа. Методами кластерного анализа вся последовательность принятых состояний системы может быть разделена на несколько различных кластеров состояний. Причем в каждый кластер будут входить только те состояния системы, которые, в некотором смысле, близки друг к другу.

Таким образом, при некоторых значениях параметра a система (1) образует кластеры состояний. Можно предположить, что система (1), изменяя своё состояние, переходит из кластера в кластер, сохраняя порядок перехода по кластерам.

Для проверки справедливости данного предположения было выполнено следующее. Задана метрика в пространстве состояний системы (3). Сформулировано понятие кластера состояний системы. Выбран алгоритм построения кластеров. Выбран диапазон значений параметра a и шаг сканирования этого диапазона. Для каждого взятого значения параметра a построены кластеры состояний системы (3). Проверена периодичность перехода системы по выделенным кластерам состояний. Если хотя бы при одном значении параметра a будет установлена периодичность перехода системы из кластера в кластер, то тем самым будет доказана справедливость выдвинутого предположения.

Пусть в дальнейшем под кластером состояний понимается подмножество состояний системы, образовавших какой-то один диапазон состояний в пространстве состояний. Тогда в качестве меры близости друг к другу двух состояний x_i и x_j может использоваться естественная мера $|x_i - x_j|$.

Заметим, что, если состояния системы образуют кластеры, то эти кластеры не должны зависеть от выбора начального состояния системы и в этом смысле кластеры должны быть устойчивыми. То есть на практике при выборе начального состояния, не принадлежащего одному из кластеров состояний, система в последующих итерациях осуществляет переход в состояние, принадлежащее одному из кластеров, а в последующей динамике системы реализуются состояния, принадлежащие выделенным кластерам.

Для построения кластеров состояний используется следующая процедура. Задается пороговая величина ρ , с которой сравнивается расстояние между двумя значениями x_{n_1} и x_{n_2} , выбираемыми из последовательности значений решения уравнения. Причем пары значений x_{n_1} и x_{n_2} выбираются таким образом, чтобы были рассмотрены все возможные сочетания значений фрагмента решения уравнения. Если расстояние между значениями x_{n_1} и x_{n_2} не превышает порогового значения ρ , то считается, что эти значения принадлежат одному и тому же кластеру и объединяются. В случае превышения этого порогового значения ρ , значения x_{n_1} и x_{n_2} не

объединяются в кластер. Следует заметить, что эта ситуация ещё не означает, что x_{n_1} и x_{n_2} принадлежат различным кластерам.

Выделение кластеров выполнялось с использованием нескольких пороговых значений ρ : 0.02, 0.01 и 0.001. Имитационное моделирование показало, что использование достаточной статистики значений x_n при всех выбранных пороговых значениях позволяет получить одни и те же результаты. Эти результаты согласуются с представленными гистограммами и фазовыми портретами. Так, при $a = 16.13$ определились 6 кластеров, при $a = 15.17$ – четыре, при $a = 15.26$ – два и при $a = 17.11$ – только один.

Заметим, что для всех моделированных случаев выбранные пороговые значения ρ не превышали минимального расстояния между диапазонами значений в пространстве значений. Проведенный кластерный анализ значений решения уравнения (3) показал, что все значения разделяются на уже ожидаемое количество кластеров. В случае выбора порогового значения ρ , превышающего наименьшего расстояния между диапазонами значений, в результате кластерного анализа выделяются кластеры, объединяющие сразу несколько диапазонов значений.

Выделенные кластеры значений позволяют исследовать характер решения уравнения (3) следующим образом. Нумеруются кластеры значений. Затем номера кластеров присваиваются значениям решения, образовавшим кластер. Таким образом, у принятых значений получится двойная индексация: $x_{n,k}$. Первый индекс соответствует номеру итерации n , а второй, k – номеру кластера, к которому отнесено значение x_n .

Благодаря двойной индексации появляется возможность проанализировать порядок попадания значения x_n в выделенные кластеры. Если в последовательности значений в порядке изменения номера итерации наблюдается периодичность в индексации по кластерам, то можно говорить о некотором периодическом характере решения уравнения. Понятно, что в данном случае не идет речь о строгой периодической последовательности значений x_n . Решение уравнения, меняя свои значения, сохраняет периодический порядок прохождения кластеров значений.

Таким образом, система переходит из кластера в кластер последовательно в одном и том же строгом порядке. Именно этой периодичностью объясняется незатухающий характер автокорреляционной функции. И только в рассмотренном случае при $a = 17.11$ решение уравнения (3), значения которого образовали один кластер, характеризуется затухающей автокорреляционной функцией.

Из выполненного анализа аperiodических решений уравнения (3) следует следующий вывод. Аperiodические режимы можно разделить на два вида. К первому виду относятся режимы, имеющие более одного диапазона состояний X_k и незатухающую автокорреляционную функцию. Ко второму – имеющие только один диапазон состояний, практически полностью покрывающий интервал $[a^2 \exp(-(1+a/e)); a/e]$ и затухающую автокорреляционную функцию.

3. Интервальная периодическая динамика системы

Известно (см., например, в [9]), что под периодическим режимом понимается поведение системы, для которого существует l чисел $x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+l}$ таких, что

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad x_{n+2} = F(x_{n+1}), \dots, x_n = F(x_{n+l-1}). \quad (5)$$

Если все числа $x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+l}$ различны, то периодический режим называется циклом длины l , а число l – периодом динамического режима системы (1).

Описанные выше аperiodические режимы $x_{n, k}$, в которых происходят последовательные переходы системы из кластера в кластер, могут быть представлены следующим образом:

$$x_{n+1, k+1} = F(x_{n, k}), \quad x_{n+2, k+2} = F(x_{n+1, k+1}), \quad \dots, \quad x_{n+d, k} = F(x_{n+d-1, k+d-1}). \quad (6)$$

Сравнение (5) с (6) указывает на аналогию между периодическими режимами и описанными аperiodическими, в которых имеет место строгая периодическая последовательность обхода интервалов X_k . В силу сказанного, такой вид аperiodических режимов может быть назван интервально-периодическим.

Определим интервально-периодический режим следующим образом. Динамический режим системы (1) будем называть интервально-периодическим, если существуют не менее двух взаимно непересекающихся интервалов значений X_k , $k = \overline{1, l}$, $l \geq 2$, ($X_k \cap X_s = \emptyset$, $k \neq s$) и для любого натурального i можно установить соответствие $x_i \in X_s$, $s = \overline{1, l}$, то для любого натурального j выполняется $x_{i+j} \in X_s$, если $i + j \equiv i \pmod{l}$.

Из определения интервально-периодического режима видно, что для уравнения (1) периодический режим является частным случаем интервально-периодического. Таким образом, периодический режим с периодом l можно определить как интервально-периодический, для которого каждый интервал X_k , $k = \overline{1, l}$, содержит единственное значение.

Применим понятие интервально-периодического режима к анализу решений уравнения (3). С помощью градиентной карты в пространстве значений параметра a представим графически результаты исследования периодических и интервально-периодических решений уравнения Рикера (3).

Для определения характера решения уравнения (3) на интервале параметра a от 14.0 до 30.0 значения параметра a последовательно брались с шагом 0.005. Для каждого значения параметра a вид режима динамической системы определялся численно по одному решению, с произвольным начальным состоянием. Интервальные периодические режимы обнаруживались описанным выше методом кластерного анализа с пороговым значением $\rho = 0.001$.

Для исследования периодических режимов решение уравнения (3) вычислялось в объеме двух тысяч итераций, из которых первая тысяча состояний отбрасывалась, а по оставшейся второй тысяче проводилась проверка на периодичность. При этом в качестве проверочного условия использовались следующие неравенства

$$|x_i - x_{i+kT}| < \delta, \quad k = 1, \dots, \left\lfloor \frac{1000}{T} \right\rfloor, \quad i = 1001, \dots, 2000 - kT, \quad (7)$$

где величина T – натуральное число, а δ – порог отклонения значений решения, отстоящих друг от друга на T итераций. Квадратные скобки обозначают целую часть числа.

Определение значения величины T , удовлетворяющего всем неравенствам (7), выполнялось последовательным перебором целых чисел из интервала от 2 до 150. Возможные значения периодов больше 150 не рассматривались. Для всех проверяемых значений T использовалось одно и то же значение порога δ , равное 10^{-7} . Первое в переборе значение T , удовлетворяющее всем неравенствам (7) одновременно, принималось за период, а решение уравнения – периодическим.

На рис. 8 сопоставлены карты определенных в ходе имитационного моделирования периодических и интервальных периодических режимов системы (3) для значений параметра a от 14.0 до 30.0. Карты на рисунке располагаются в паре: карта периодических режимов находится над картой интервальных периодических режимов.

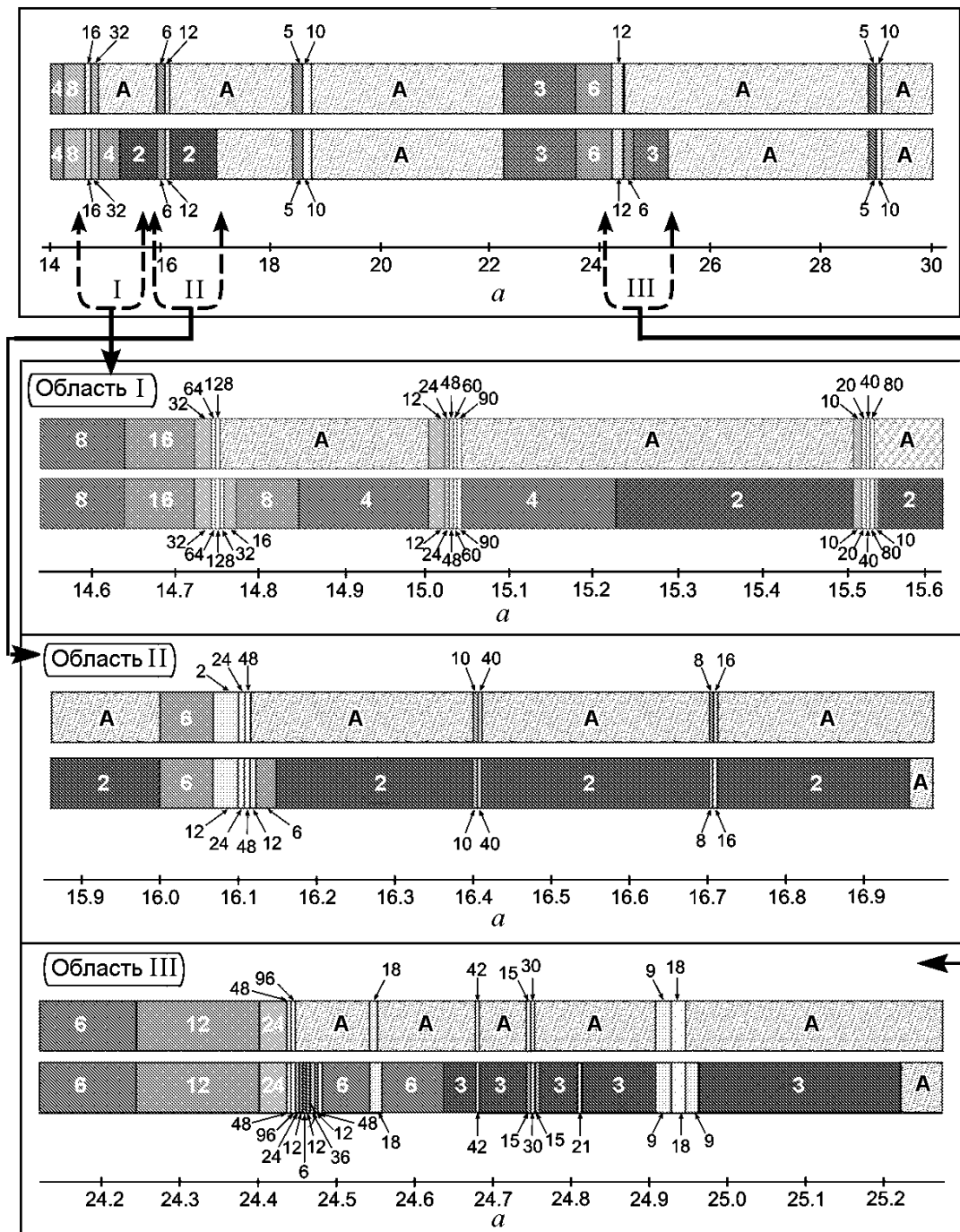


Рис. 8. Карты периодических режимов (расположены сверху) и интервальных периодических режимов (расположены снизу) на диапазоне значений параметра a от 14.0 до 30.0. Числами на картах обозначены периоды, А обозначает аперриодическую динамику

В силу большого количества узких окон периодичности на рассматриваемом интервале значений параметра a рис. 8 не претендует на полноту представляемой информации. В нем изображены наиболее крупные обнаруженные окна периодичности, которые хорошо видны в использованном масштабе. Для большей детализации на рис.8 вынесены увеличенные фрагменты карты динамических режимов на трех областях значений параметра a : область I – [14.54, 15.62], II – [15.87, 16.97] и III – [24.12, 25.28].

Из представленных карт динамических режимов можно сделать следующие выводы.

- Все области периодических режимов, представленные на картах периодических режимов, полностью повторились на картах интервальных периодических режимов.
- Области существования интервальной периодической динамики, не являющейся одновременно и периодической, продолжают каждую серию бифуркаций периодических режимов в сторону увеличения значения параметра модели a . Причем с увеличением значения параметра a происходит уменьшение периода T интервальной динамики.
- Области интервальной периодической динамики большой протяженности (например, с периодом 2 и 4 в областях I и II на рис. 8 и периодом 3 в области III прерываются узкими окнами периодичности. В этих окнах также наблюдаются бифуркации с удвоением периода периодической динамики и последующим уменьшением периода интервальной.

Заключение

Использованные в анализе динамических режимов системы (3) статистические характеристики – гистограмма и автокорреляционная функция – указали на существование двух качественно отличающихся друг от друга аperiodических режимов системы (3).

Установлено, что первый вид аperiodического режима в определенном смысле близок к периодическому. Он характеризуется циклической автокорреляционной функцией, и имеет несколько взаимно не пересекающихся диапазонов состояний системы. Такую аperiodическую динамику можно охарактеризовать как цикл конечной длины с флуктуирующими элементами цикла, причем флуктуации происходят в ограниченных диапазонах значений. Этот режим назван интервальным периодическим.

Второй вид режима не имеет характеристик, общих с периодическим режимом. Он характеризуется затухающей автокорреляционной функцией. При этом последовательность состояний системы (3) покрывает практически весь интервал от 0 до a/e .

Для анализа динамики одномерной системы предложено использовать портреты в псевдофазовых пространствах с большим лагом. Такие портреты позволяют четко различать указанные виды аperiodического режима системы, а также определять период интервальной периодической динамики.

На основе метода кластерного анализа построен алгоритм идентификации интервальной периодической динамики системы. С помощью этого алгоритма исследована система (3) на интервальные периодические режимы в интервале значений параметра a от 14.0 до 30.0. По результатам исследования построена карта интервальных периодических режимов и сопоставлена с картой периодических режимов

системы. Установлено, что интервальная периодическая динамика при увеличении значения параметра a продолжает каждую серию бифуркаций системы (3) с последовательным уменьшением своего собственного периода до полного вырождения в аперIODическую динамику.

Исследования проведены при частичной финансовой поддержке РФФИ № 11-01-98512-р_восток_a.

Библиографический список

1. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001.
2. Рикер У.Е. Методы оценки и интерпретации биологических показателей популяций рыб. М.: Пищевая промышленность, 1979.
3. Ашихмина Е.В., Израильский Ю.Г., Фрисман Е.Я. Динамическое поведение модели Рикера при циклическом изменении одного из параметров // Вестник ДВО РАН. 2004. № 5. С. 19.
4. Громова Н.П. Равновесные и колебательные предельные режимы в моделях двух конкурирующих популяций с дискретным временем // Математические исследования в популяционной экологии. Владивосток: ДВО АН СССР, 1988. С. 107.
5. Скалецкая Е.И., Фрисман Е.Я., Шапиро А.П. Дискретные модели динамики численности популяции и оптимизации промысла. М.: Наука, 1979.
6. Шустер Г. Детерминированный хаос: Введение. М.: Мир, 1988.
7. Якобсон М.В. О свойствах динамических систем, порожденных отображением вида $x \rightarrow Axe^{-bx}$ // Моделирование биологических сообществ. Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1975. С. 141.
8. Скороход А.В. Вероятность. Основные понятия. Структура. Методы // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Современ. пробл. матем. фундам. направл. 1989. Т. 43. С. 5.
9. Шапиро А.П., Луннов С.П. Рекуррентные уравнения в теории популяционной биологии. М.: Наука, 1983.

ИКАРП ДВО РАН, Биробиджан

Поступила в редакцию

12.05.2011

После доработки

22.03.2012

FEATURES OF MODES FOR ONE-DIMENSIONAL MODEL OF RICKER

K.V. Shlufman, B.E. Fishman, E.Ya. Frisman

In this paper we make investigation of aperiodic modes Ricker's model. It's identified two qualitatively different kinds of aperiodic modes for this model. It's defined one of the selected types of aperiodic modes. We have called him interval time-periodic mode. For analyze of dynamics of one-dimensional system we used pseudo phase space with a big lag. The maps of the interval of periodic modes are made. We discuss the distribution of interval periodic modes into parameter space of Ricker's model.

Keywords: Recurrence equation of Ricker, interval-periodic solution, phase space, cluster analysis, spectral analysis.



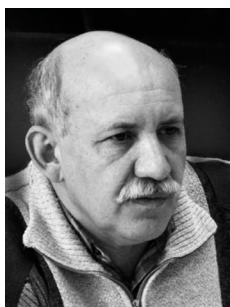
Шлюфман Константин Владимирович – родился в 1976 году, окончил факультет математики и информатики в Биробиджанском государственном педагогическом институте (ныне Дальневосточная государственная социально-гуманитарная академия) (1998). Окончил очную аспирантуру (2009) Института комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН по специальности «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». Работает младшим научным сотрудником в лаборатории математического моделирования динамики региональных систем ИКАРП ДВО РАН. Область научных интересов – нелинейная динамика и хаос, статистические свойства хаоса в динамических системах.

679016 Россия, Еврейская автономная область,
Биробиджан, ул. Шолом-Алейхема, 4
Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН
E-mail: Shlufman@mail.ru



Фишман Борис Ентильевич – родился в Семипалатинске (1942). Окончил Киевский государственный университет (1964). После окончания КГУ работал в Украинском научно-исследовательском гидрометеорологическом институте, где подготовил и успешно защитил диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук. Работал заведующим сектором в Украинском филиале Всесоюзного научно-исследовательского института по изучению спроса населения на товары народного потребления и конъюнктуры торговли, в Центральном конструкторско-технологическом бюро приборостроения с опытным производством. С 1996 года – профессор Дальневосточной государственной социально-гуманитарной академии. Защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора педагогических наук. Автор 3-х монографий. Опубликовал более 180 научных работ по различным приложениям теории систем, теории процессов электризации в облаках и осадках, теории и методике профессионального образования.

679016 Россия, Еврейская автономная область,
Биробиджан, ул. Шолом-Алейхема, 4
Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН
E-mail: bef942@mail.ru



Фрисман Ефим Яковлевич – родился в Сталинабаде, ныне Душанбе, (1948), окончил Новосибирский государственный университет (1971). После окончания НГУ работал в Институте автоматизации и процессов управления ДВО РАН, где с 1988 года заведовал лабораторией математического моделирования экологических систем. С 2002 года – директор Института комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН (Биробиджан). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата биологических наук (1982) в Институте цитологии и генетики СО РАН (Новосибирск) и доктора биологических наук (1989) в Институте биофизики ДВО РАН (Красноярск) в области математической популяционной биологии и теории эволюции. Член-корреспондент РАН. Автор 4-х монографий (две вышли в издательстве «Наука» и две – в ДВО АН СССР). Опубликовал более 120 научных работ по общим вопросам математического моделирования и по конкретным моделям экологических и популяционных систем. Соросовский профессор.

679016 Россия, Еврейская автономная область,
Биробиджан, ул. Шолом-Алейхема, 4
Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН
E-mail: frisman@mail.ru



УПРАВЛЕНИЕ МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬЮ И ВЫНУЖДЕННАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ В СВЯЗАННЫХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С БИФУРКАЦИЯМИ УДВОЕНИЙ ПЕРИОДА

А.В. Шабунин

В работе исследуется управление фазовой мультистабильностью и синхронизация в двух связанных фейгенбаумовских системах. В качестве модели рассматриваются два генератора Чуа с симметричной диффузионной связью. Управление осуществляется периодическим сигналом, действующим одновременно на оба генератора с одинаковыми амплитудами и частотами, но с разными начальными фазами. Рассматривается зависимость динамики системы от амплитуды, частоты и разности фаз между сигналами воздействия. Анализируется влияние фаз управляющих сигналов на ширину языка синхронизации.

Ключевые слова: Фазовая мультистабильность, синхронизация, управление мультистабильностью.

Введение

Мультистабильность – одно из ключевых свойств нелинейных динамических систем [1–4]. Оно означает сосуществование в фазовом пространстве нескольких аттракторов, выбор между которыми осуществляется посредством выбора начальных условий. Одним из видов мультистабильности, встречающимся, как правило, в ансамблях взаимодействующих систем, является фазовая мультистабильность (ФМ), при которой колебания сосуществующих аттракторов одинаковы по форме и отличаются только значениями фазовых сдвигов между временными реализациями подсистем. В ансамблях из нескольких осцилляторов фазовая мультистабильность проявляется, например, в виде режимов бегущих волн [5–8]. В 1989 году было открыто явление *развитой* фазовой мультистабильности (РФМ) во взаимодействующих фейгенбаумовских системах [9], при которой число сосуществующих фазовых мод удваивается после каждой бифуркации удвоения периода и становится бесконечно большим на пороге перехода к хаосу. Впоследствии это явление было изучено на большом числе осцилляторов и отображений [10–17]. В работах [14, 15] были исследованы бифуркационные механизмы, а в работах [13, 17] – спектральные закономерности формирования РФМ в связанных системах с удвоениями периода.

В работе [16] рассмотрены закономерности расположения бассейнов притяжения сосуществующих ФМ-режимов.

При фазовой мультистабильности, как отмечалось выше, различие между сосуществующими колебаниями заключается в значениях разностей фаз между временными реализациями осцилляторов в ансамбле, что выражается в разных фазовых спектрах колебаний. Такие системы, в отличие от одиночных осцилляторов, должны быть чувствительны к значениям фаз сигналов внешнего воздействия. В работе [18] рассматривалась возможность управляемого переключения между мультистабильными состояниями в связанных фейгенбаумановских системах при одновременном воздействии на них периодических сигналов с разными начальными фазами. В ходе исследований, проведенных на системе двух генераторов Чуа, было показано, что, если воздействовать одновременно на оба генератора гармоническими сигналами с определенной разностью фаз (выбор которой обусловлен характером мультистабильности), наблюдается управляемое переключение между аттракторами. Причем, необходимая для управления амплитуда воздействия составляет доли процента от амплитуды собственных колебаний в системе. Настоящая работа является продолжением указанных исследований. В ней проводится детальный анализ обнаруженного эффекта, исследуются его механизмы, а также рассматривается явление синхронизации колебаний при би-фазном воздействии на мультистабильную систему.

Исследования проводятся на примере двух диффузионно связанных генераторов Чуа. Генератор Чуа представляет собой простую радиоэлектронную схему, демонстрирующую переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода [19]. Связанные генераторы Чуа – система с развитой фазовой мультистабильностью, при которой в зависимости от параметров в фазовом пространстве может сосуществовать множество аттракторов [12]. Данная модель демонстрирует все типичные свойства связанных осцилляторов с бифуркациями удвоения периода, поэтому полученные результаты могут быть распространены и на другие связанные фейгенбаумовские системы.

1. Исследуемая система и исходные колебательные режимы

Запишем уравнения двух диффузионно связанных генераторов Чуа при гармоническом воздействии на оба генератора

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \alpha(y_1 - \varphi(x_1)), \\
 \dot{y}_1 &= x_1 - y_1 + z_1 + K(y_2 - y_1), \\
 \dot{z}_1 &= -\beta y_1 + s_1(t), \\
 \dot{x}_2 &= \alpha(y_2 - \varphi(x_2)), \\
 \dot{y}_2 &= x_2 - y_2 + z_2 + K(y_1 - y_2), \\
 \dot{z}_2 &= -\beta y_2 + s_2(t).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\varphi(x) = 0.0625x^3 - 0.166667x$ – сглаженная характеристика нелинейного элемента цепи – диода Чуа [20], α и β – управляющие параметры, K – коэффициент

линейной связи. На оба генератора одновременно воздействуют гармонические сигналы $s_{1,2} = A \cos(2\pi ft + \varphi_{1,2})$ одинаковой амплитуды A и частоты f , но с разными начальными фазами φ_1 и $\varphi_2 = \varphi_1 + \phi$. Данный вид воздействия, как было показано в [18], позволяет целенаправленно переключать систему между сосуществующими мультистабильными состояниями, если частота сигналов близка к частоте субгармоники, фаза которой различна для сосуществующих режимов.

Выберем значения управляющих параметров для автономной системы (1) таким образом ($\alpha = 8.3$, $\beta = 14$, $K = 0.01$), чтобы обеспечить простейший вид ФМ, которым является сосуществование двух предельных циклов периода два, обозначаемые как $2C^0$ (рис. 1, *a*) и $2C^1$ (рис. 1, *б*). Оба сосуществующих режима соответствуют колебаниям одинаковой формы, но отличаются разными временными сдвигами между реализациями в первом и втором осцилляторах. В случае $2C^0$ колебания в обеих подсистемах синфазны, а в случае $2C^1$ – сдвинуты во второй подсистеме относительно первой на полпериода: $x_2(t) = x_1(t - T)$, где T – период однооборотного предельного цикла. Соответственно, режимы $2C^0$ и $2C^1$ имеют одинаковые амплитудные спектры $|X(f)|$, но разные взаимные фазовые спектры $\theta(f)$. Здесь

$$X(f) = |X(f)| \exp [j\theta(f)] = X_1(f)X_2^*(f)$$

– комплексный взаимный спектр; $X_i(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t) \exp(-j2\pi ft) dt$ – фурье-трансформанта переменной x_i . Различие фазовых спектров указанных режимов заключается в разных фазах субгармоник на «половинной» частоте $f = f_0/2$ ($f_0 = 1/T$ – базовая частота колебаний): для колебаний $2C^0$ эта фаза равна нулю, а для $2C^1$ – π . Амплитудные и фазовые спектры указанных предельных циклов приведены на рис. 1. В дальнейшем, субгармонику на частоте $f_0/2$, фаза которой различается для сосуществующих мод, будем называть *определяющей субгармоникой*, так как, изменив ее фазу, мы перейдем с одного аттрактора на другой.

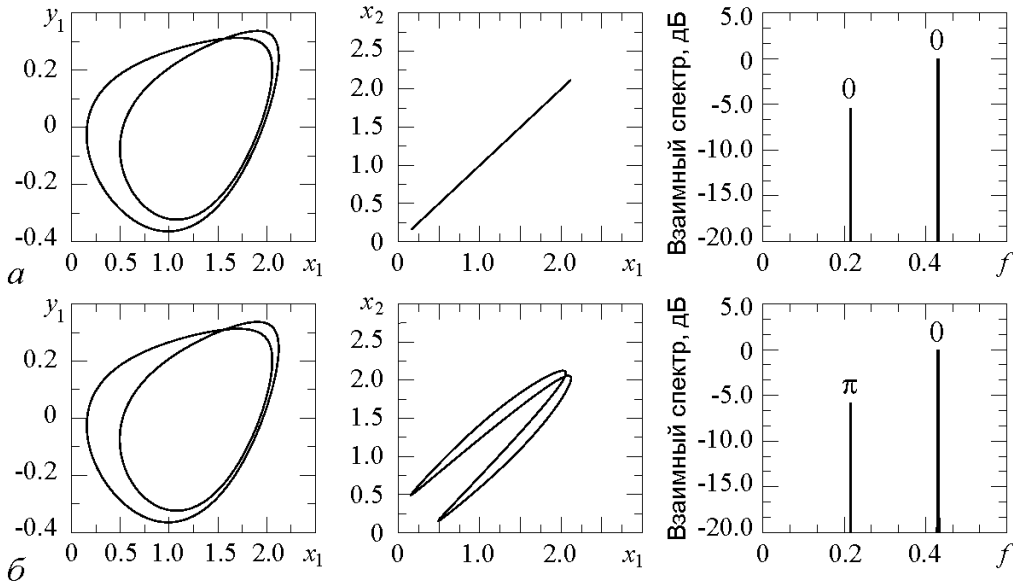


Рис. 1. Проекция фазовых портретов (левый и центральный столбцы) и взаимный спектр мощности (правый столбец) режимов: *a* – $2C^0$ и *б* – $2C^1$ при $A = 0$

При выбранных значениях параметров основная (максимальная) гармоника в спектре находится на частоте $f_0 = 0.43$ и, соответственно, частота определяющей субгармоники равна $f_0/2 = 0.215$. Воздействие на систему двумя сигналами на частоте этой субгармоники должно проявляться по-разному, в зависимости от фазового сдвига между s_1 и s_2 , и от выбранного колебательного режима.

2. Переключение между сосуществующими модами при внешнем воздействии

Будем исследовать влияние резонансного внешнего воздействия на систему в зависимости от фазового сдвига между сигналами. В работе [18] было показано, что данный вид воздействия позволяет осуществлять целенаправленное переключение между сосуществующими аттракторами. Переключением на целевой режим назовем такую смену характера колебаний, при котором отключение внешнего воздействия приводит к переходу траектории на выбранный аттрактор. Рассмотрим этот эффект более подробно и в широком диапазоне частот. Для этого выберем в качестве исходного режима синфазные колебания $2C^0$, а в качестве целевого режима – $2C^1$. Соответственно, для переключения с режима $2C^0$ на режим $2C^1$ выберем разность фаз между управляющими сигналами $\phi = \pi$. Плавно увеличивая амплитуду воздействия, будем следить за эволюцией колебаний в системе. Проведенные исследования показали, что:

- эффект носит пороговый характер – переключение происходит, если амплитуда воздействия превосходит некоторое пороговое значение A_0 ;
- величина порога существенно зависит от частоты – A_0 монотонно возрастает при отстройке частоты от частоты субгармоники $f_0/2$;
- переключение на целевой режим происходит в достаточно широкой, но ограниченной области частот, в окрестности частоты $f_0/2$;
- при выходе за эту область частот эффект переключения также наблюдается, но он носит случайный характер – траектория может перейти на $2C^1$, а может, с ненулевой вероятностью, вернуться на $2C^0$.

На рис. 2 отображена зависимость A_0 от f в виде сплошной линии. Переключение на целевой режим происходит при пересечении этой линии снизу вверх. В диапазоне

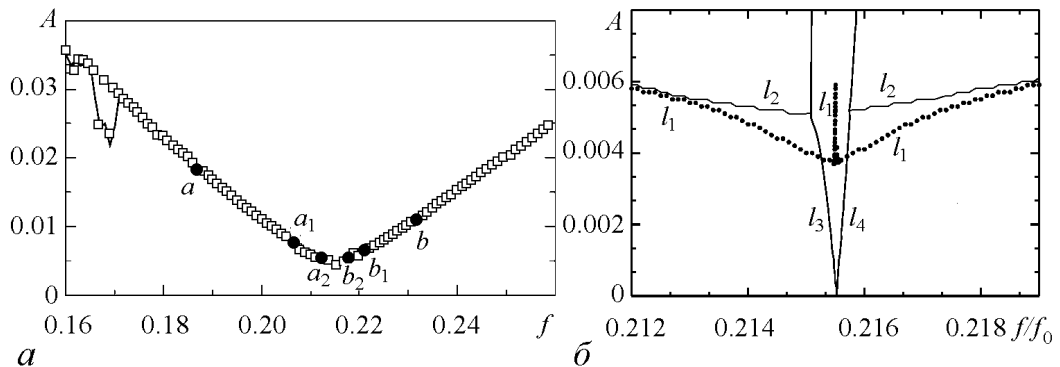


Рис. 2. Зависимость от частоты сигналов порога переключения между сосуществующими режимами $2C^0 \rightarrow 2C^1$ и $2C^1 \rightarrow 2C^0$: a – в широком диапазоне частот и b – в окрестности частоты субгармоники

частот $0.183 \lesssim f \lesssim 0.232$ (между точками a и b) данный переход носит детерминированный характер. Это означает, что после того, как внешнее воздействие снимается, в ста процентах случаев наблюдается аттрактор $2C^1$.

Вне этого диапазона, при пересечении сплошной линии переключения на целевой режим также происходят, но они носят случайный характер – при снятии внешнего воздействия система может как перейти на режим $2C^1$, так и вернуться на исходный режим $2C^0$.

Рассмотрим, что происходит на линии переключений между мультистабильными состояниями. Выберем значение частоты воздействия вблизи $0.5f_0$, например, $f = 0.2$ и будем исследовать процессы в системе при постепенном увеличении амплитуды воздействия A . При $A = 0$ предельный цикл мягко трансформируется в двумерный тор $2C^0 \rightarrow 2T_1^0$. При малом A (рис. 3, a) тор является двухоборотным. Спектр состоит из базовой субгармоники на частоте $0.5f_0$, основной гармоники на частоте f_0 , гармоники на частоте воздействия f_1 , а также из гармоник на комбинационных частотах. Как видим из рисунка, фазы «старых» гармоник сохраняют свои значения равными нулю, в то время как фазы «новых» равны π . Увеличение A ведет к постепенному росту π -гармоник и подавлению синфазной субгармоники. Этот процесс можно проследить как по изменениям в спектре, так и по постепенному «схлопыванию» стробоскопического сечения из двухоборотного в однооборотное (рис. 3, b). Наконец, при $A \simeq 0.011$ процесс завершается полным подавлением собственной субгармоники, что сопровождается переходом с двухоборотного тора $2T_1^0$ на однооборотный $1T_1$ (рис. 3, b). Данный переход при выбранной частоте воздействия является необратимым, поскольку обратное уменьшение параметра A ниже значения A_0 не приводит к возвращению на исходный режим $2T_1^0$. Вместо этого, траектория оказывается на другом квазипериодическом режиме $2T_1^1$, соответствующему двухоборотному тору, который, как видно из рис. 3, z , уже не является тором $2T_1^0$, так как фаза субгармоники на частоте $f_0/2$ равна для него не нулю, а π . Для этого нового режима дальнейшее понижение амплитуды воздействия до нуля ведет к постепенному «вырождению» в предельный цикл $2C^1$. Таким образом, данный квазипериодический режим образован на базе предельного цикла $2C^1$.

Если в качестве исходного режима выбрать предельный цикл $2C^1$, воздействуя на его двумя сигналами с той же разностью фаз $\phi = \pi$, то эволюция системы будет иной. При $A = 0$ двухоборотный предельный цикл преобразуется в уже отмеченный выше двухоборотный тор $2T_1^1$. Рост амплитуды воздействия ведет к подавлению субгармоники на частоте $f_0/2$ и переходу при $A \simeq 0.011$ на однооборотный тор $1T_1$. Однако в этом случае данный переход является обратимым. Уменьшение A возвращает траекторию на режим $2T_1^1$. Последующее увеличение амплитуды воздействия до значений, больших чем $A = 0.011$, не приводит к качественным изменениям в динамике, вплоть до $A \simeq 0.03$, когда происходит разрушение однооборотного тора $1T_1$ и переход к хаосу.

Таким образом, внешнее воздействие вызывает эффект, подобный «подавлению собственной частоты колебаний», при воздействии единственного сигнала на автоколебательную систему. Однако в нашем случае данный эффект не приводит к синхронизации колебаний, а ведет к колебаниям более простой формы, одновременно подавляя бистабильность в системе: вместо двух сосуществующих квазипериодических режимов наблюдается единственный квазипериодический режим.

Если поменять местами режимы $2C^0$ и $2C^1$, то есть выбрать в качестве исходного режим $2C^1$ и заменить разность фаз между сигналами воздействия на $\phi = 0$, то будет наблюдаться сходная последовательность бифуркаций, но уже относительно колебаний $2C^1$. Зависимость амплитуды порога A_0 от частоты воздействия практически полностью повторяет аналогичную зависимость для режимов на базе $2C^0$ (на рис. 2 она отмечена символами \square). Это означает, что переход с двухоборотного тора к однооборотному происходит при одинаковой амплитуде воздействия как при $\phi = 0$, так и при $\phi = \pi$.

Представляется интересным рассмотреть, насколько значение разности фаз ϕ влияет на эффект управления. Чтобы ответить на этот вопрос, выберем в качестве

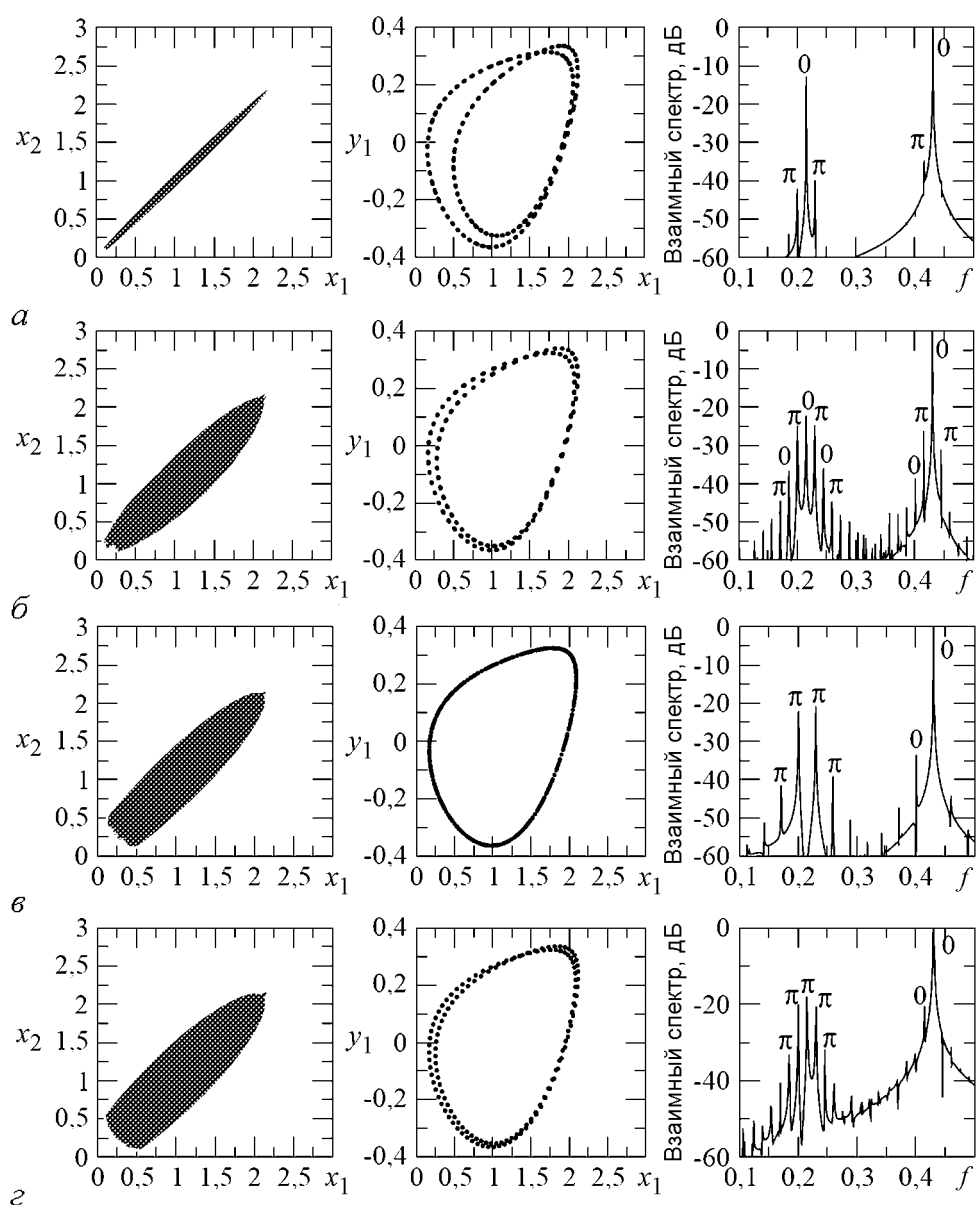


Рис. 3. Эволюция колебательных режимов на базе цикла $2C^0$ при противофазном воздействии для различных значений амплитуды воздействия A : $a - 0.003$, $б - 0.01$, $в - 0.011$, $г - 0.01$. Левый и средний столбцы отображают проекции фазового портрета, правый – взаимный спектр мощности

исходного режима $2C^0$ и рассмотрели, как происходит переключение к режимам семейства $2C^1$ для нескольких значений $\phi = 5\pi/6, 2\pi/3, \pi/2$. Как оказалось, значение разности фаз ϕ не влияет на расположение бифуркационной линии перехода от двухоборотного тора к однооборотному, что повторяет результат, полученный для $\phi = 0$ и $\phi = \pi$. Однако оно влияет на интервал частот, при котором вблизи этой линии наблюдается однозначный переход с одного семейства режимов на другое. В нашем случае, это значение частоты воздействия, при котором при обратном движении по параметру A траектория однозначно переходит на семейство режимов $2C^1$. На рис. 2 точками a_1, b_1 ограничена область, где при отключении внешнего воздействия наблюдается детерминированный переход на режим $2C^1$ при $\phi = 5\pi/6$, а точками a_2, b_2 – при $\phi = 2\pi/3$, соответственно. Видно, что отход от противофазного характера воздействия сужает диапазон частот, где наблюдается переключение. При $\phi \leq \pi/2$ переключение на режим $2C^1$ не происходит вообще.

Таким образом, бифазное гармоническое воздействие на систему связанных осцилляторов позволяет осуществлять управляемый переход с одного семейства режимов на другое семейство. Этот переход происходит практически одновременно с подавлением собственной субгармоники на частоте $f_0/2$, что сопровождается обратной бифуркацией удвоения для торов. В результате вместо двух сосуществующих двухоборотных торов $2T_1^0$ и $2T_1^1$ в фазовом пространстве остается единственный однооборотный тор $1T_1$. То есть система переходит от бистабильного к моностабильному состоянию. При обратном движении по параметру A происходит возвращение к мультистабильности, однако, если частота воздействия близка к частоте субгармоники $f_0/2$, система из двух сосуществующих режимов всегда выбирает тот, чья фаза субгармоники оказывается ближе к разности фаз сигналов воздействия ϕ . При удалении частоты воздействия от $f_0/2$ детерминированный характер выбора нарушается. За счет чего в системе наблюдается неравноправие в выборе режимов при переходе от моностабильного состояния к бистабильному?

Более детальный анализ переключения с режима $2C^0$ на $2C^1$ при π -воздействии показывает, что потеря устойчивости тором $2T_1^0$ на самом деле чуть опережает по параметру A бифуркацию обратного удвоения. Это можно заметить, если выбрать значение частоты воздействия в непосредственной близости от частоты субгармоники $f_0/2$. На рис. 2, б построены бифуркационные кривые потери устойчивости для тора $2T_1^0$ (l_1) и линия бифуркации удвоения для тора $1T_1$ (l_2) в окрестности $f_0/2$. Последняя упирается в «язык синхронизации» для колебаний на базе $2C^1$, ограниченный линиями l_3 и l_4 , о котором пойдет речь в следующем разделе. Видно, что вблизи $f_0/2$ (но исключая саму точку $f = f_0/2$) разрушение бистабильности происходит при заметно меньших значениях амплитуды воздействия, чем переход от двухоборотного тора к однооборотному. При уходе от частоты $f_0/2$ обе линии смыкаются и в эксперименте и та и другая бифуркации наблюдаются практически одновременно.

Таким образом, при увеличении A в системе наблюдается следующая последовательность переходов: $2T_1^0 \rightarrow 2T_1^1$ (жесткий) и $2T_1^1 \rightarrow 1T_1$ (мягкий). В окрестности частоты субгармоники расстояние между бифуркационными линиями является существенным, поэтому в этом случае при плавном отключении управляющего воздействия происходит сначала обратный переход к двухоборотному тору $1T_1 \rightarrow 2T_1^1$, а затем – к исходному предельному циклу $2T_1^1 \rightarrow 2C^1$. То есть наблюдается переключение на заданный колебательный режим. Если же выбрать частоту воздействия

вдали от частоты субгармоники, линии обеих бифуркаций оказываются совмещенными. В результате при уменьшении A траектория может с той или иной вероятностью оказаться как на торе $2T_1^1$, так и на $2T_1^0$ и соответственно перейти при снятии воздействия на любой из режимов $2C^0$ или $2C^1$. Переключение в этом случае носит случайный характер.

3. Синхронизация колебаний при бифазном воздействии

Как известно, внешнее периодическое воздействие на автоколебательную систему на частоте, кратной ее собственной частоте (или близкой к ней), ведет к синхронизации. Как синхронизация реализуется при двойном воздействии с разными фазами? Зависит ли синхронизация от фаз сигналов воздействия? Чтобы рассмотреть эти вопросы будем исследовать синхронизацию, происходящие в системе (1) в узкой полосе частот в окрестности частоты $f = 0.5f_0$ в зависимости от разности фаз воздействующих сигналов и выбранной исходной моды.

Выберем в качестве исходного режима колебания $2C^1$. Рассмотрим вначале синхронизацию внешними сигналами с разностью фаз, равной фазе выбранной субгармоники, то есть $\phi = \pi$. При близких к $0.5f_0$ значениях частоты воздействия наблюдается классическое явление синхронизации через захват собственной частоты колебаний. На рис. 4 построена область синхронизации на плоскости параметров «частота – амплитуда воздействия». Границы области являются линиями седлоузловых бифуркаций на торе, обозначенные на рисунке линиями l_1 и l_2 . Область синхронизации выглядит как классический «язык Арнольда», опирающийся на точку $A = 0, f = 0.5f_0$ (рис. 4). Слева и справа к языку синхронизации примыкают уже отмеченные выше линии обратной бифуркации удвоения торов, которые обозначены как l_3 и l_4 . Ниже этих линий синхронизация происходит на двухоборотном торе $2T_1^1$, выше – на однооборотном $1T_1$.

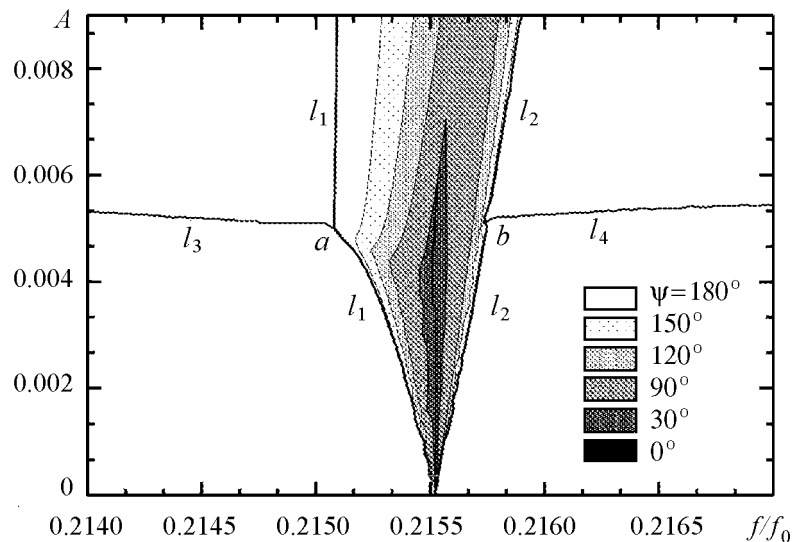


Рис. 4. Вид областей синхронизации при последовательно уменьшающихся значениях разности фаз сигналов воздействия ϕ от π до 0

Рассмотрим теперь, как на синхронизацию влияет разность фаз ϕ между сигналами. Будем постепенно уменьшать значение разности фаз между сигналами воздействия от π до нуля. Исследования показывают, что уменьшение разности фаз ведет к сужению языка синхронизации. На рис. 4 построены области синхронизации для $\phi = 5\pi/6$, $\phi = 2\pi/3$, $\phi = \pi/2$, $\phi = \pi/6$ и $\phi = 0$. Области синхронизации выделены оттенками серого цвета таким образом, что более темный оттенок соответствует меньшему значению ϕ . Видно, что при $\phi \geq \pi/2$ качественный вид языков сохраняется, но уменьшается их ширина. При переходе ϕ через значение $\pi/2$ области синхронизации режима $2C^1$ оказываются ограниченными сверху значениями амплитуды воздействия, при котором наблюдается жесткий переход на семейство режимов $2C^0$. При этом ширина области синхронизации для режима семейства $2C^1$ продолжает уменьшаться при уменьшении разности фаз ϕ . На рис. 4 приведены две области синхронизации для $\phi < \pi/2$: $\phi = \pi/6$ (темно-серый цвет) и $\phi = 0$ (черный цвет). В последнем случае при разности фаз $\phi = 0$ область синхронизации минимальна и, фактически, вырождается в линию.

Структура областей синхронизации, подобная изображенной на рис. 4, имеет место и для колебаний на базе цикла $2C^0$, однако с обратной зависимостью от ϕ . При $\phi = 0$ ширина языка синхронизации максимальна. В силу симметрии системы (1), синхронизация в этом случае не отличается от синхронизации несвязанного осциллятора Чуа под воздействием одного периодического сигнала. При последовательном увеличении ϕ до значения $\pi/2$ области синхронизации постепенно сжимаются. При $\pi/2 \leq \phi \leq \pi$ каждая из областей синхронизации оказывается ограниченной сверху линией перехода на семейство режимов на базе цикла $2C^1$. При $\phi = \pi$, так же как и при $\phi = 0$ для режима $2C^1$, область синхронизации вырождается в линию.

Таким образом, ширина области синхронизации определяется близостью разности фаз между сигналами воздействия к разности фаз между колебаниями подсистем на частоте субгармоники. Если ϕ совпадает с фазой субгармоники на частоте воздействия во взаимном спектре колебаний режима, то ширина области синхронизации максимальна. При отстройке ϕ от этого значения область синхронизации монотонно сужается. Наименьшее значение ширины области синхронизации достигается при противоположных значениях фазы субгармоники и разности фаз сигналов внешней силы.

Заключение

В работе рассмотрено влияние внешнего периодического воздействия, прикладываемого с разными начальными фазами к двум связанным автоколебательным системам в режиме бистабильности. В достаточно широкой области частот вокруг базовой частоты автоколебаний данный вид воздействия позволяет осуществлять переключения между сосуществующими семействами режимов. Механизм этого явления связан с подавлением собственной частоты, что сопровождается бифуркацией обратного удвоения периода и возвращением системы к моностабильному состоянию. При выключении управляющего воздействия траектория оказывается на том аттракторе, для которого разность фаз между управляющими сигналами совпадает (или близка) к разности фаз между колебаниями подсистем.

Проведено исследование синхронизации колебаний в системе в зависимости от разности фаз между сигналами воздействия и выбранного режима. Обнаружено, что ширина области синхронизации максимальна, если эта разность фаз совпадает с фазой гармоники на частоте воздействия во взаимном спектре мощности, построенном по колебаниям подсистем.

Библиографический список

1. *Arecchi F.T., Meucci R., Puccioni G., Tredicce J.* Experimental evidence of subharmonic bifurcations, multistability, and turbulence in a Q-switched gas laser // *Phys. Rev. Lett.* 1982. Vol. 49. P. 1217.
2. *Prengel F., Wacker A., Scholl E.* Simple model for multistability and domain formation in semiconductor superlattices // *Phys. Rev. B.* 1994. Vol. 50. P. 1705.
3. *Sun N.G., Tsironis G.P.* Multistability of conductance in doped semiconductor superlattices // *Phys. Rev. B.* 1995. Vol. 51. P. 11221.
4. *Foss J., Longtin A., Mensour B., Milton J.* Multistability and delayed recurrent loops // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76. P. 708.
5. *Дворников А.А., Уткин Г.М., Чуков А.М.* О взаимной синхронизации цепочки резистивно связанных автогенераторов // *Известия вузов. Радиофизика.* 1984. Т. 27, № 11. С. 1388.
6. *Ermentrout G.B.* The behaviour of rings of coupled oscillators // *J. of Math. Biol.* 1985. Vol. 23, № 1. P. 55.
7. *Ermentrout G.B.* Stable periodic solutions to discrete and continuum arrays of weakly coupled nonlinear oscillators // *SIAM J. of Appl. Math.* 1992. Vol. 52, № 6. P. 1664.
8. *Шабунин А.В., Акопов А.А., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е.* Бегущие волны в дискретной ангармонической автоколебательной среде // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2005. Т. 13, № 4. С. 37.
9. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Гуляев Ю.П., Селезнев Е.П.* Мультистабильные состояния в диссипативно связанных Фейгенбаумовских системах // *Письма в ЖТФ.* 1989. Т. 15, № 3. С. 60.
10. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Ерастова Е.Н., Селезнев Е.П.* Формы колебаний и их эволюция в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах // *ЖТФ.* 1990. Т. 60, № 10. С. 19.
11. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И., Селезнев Е.П.* Мультистабильность в системе радиотехнических генераторов с емкостной связью // *Радиотехника и Электроника.* 1991. Т. 36, № 11. С. 2167.
12. *Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.V., Wu C.W., Chua L.* Dynamics of two coupled Chua's circuits // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* 1995. Vol. 5, № 6. P. 1677.
13. *Астахов В.В., Шабунин А.В., Анищенко В.С.* Спектральные закономерности при формировании мультистабильности в связанных генераторах с удвоением периода // *Радиотехника и Электроника.* 1997. Т. 42, № 8. С. 974.
14. *Astakhov V., Shabunin A., Kapitaniak T., Anishchenko V.* Loss of chaos synchronization through the sequence of bifurcations of saddle periodic orbits // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79. P. 1014.

15. *Astakhov V., Shabunin A., Uhm W., Kim S.* Multistability formation and synchronization loss in coupled Hennon maps: Two sides of the single bifurcational mechanism // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 63. 056212.
16. *Bezruchko B.P., Prokhorov M.D., Seleznev E.P.* Oscillation types, multistability, and basins of attractors in symmetrically coupled period-doubling systems // *Chaos, Solitons and Fractals.* 2003. Vol. 15. P. 695.
17. *Shabunin A., Feudel U., Astakhov V.* Phase multistability and phase synchronization in an array of locally coupled period-doubling oscillators // *Physical Review E.* 2009. Vol. 80. 026211.
18. *Шабунин А.В., Литвиненко А.Н., Астахов В.В.* Управление мультистабильностью с помощью би-фазного резонансного воздействия // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2011. Т. 19, № 1. С. 25.
19. *Komuro M., Tokunaga R., Matsumoto T., Chua L.O., Hotta A.* Global bifurcation analysis of the double-scroll circuit // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 1991. Vol. 1, № 1. P. 139.
20. *Khibnik A.I., Roose D., Chua L.* *Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos.* Singapur: World Scientific, 1993. P. 145.

*Саратовский госуниверситет
им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию 24.01.2012
После доработки 3.03.2012*

CONTROL OF MULTISTABILITY AND FORCED SYNCHRONIZATION IN COUPLED SELF-SUSTAINED OSCILLATORS WITH PERIOD-DOUBLING BIFURCATIONS

A. Shabunin

Control of phase multistability and synchronization are investigated in two coupled Feigenbaum systems on example of Chua's generators, coupled through symmetric diffusive link. The control is fulfilled by external periodic signals, which simultaneously influence the both oscillators with equal amplitudes and frequencies, but with different phases. The behaviour of the system is explored in dependence on amplitude, frequency and phase difference between the signals. Influence of the phase difference on width of the synchronization tongue is considered.

Keywords: Phase multistability, synchronization, control of multistability.



Шабунин Алексей Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1990). Доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ, доктор физико-математических наук (2008). Научные интересы – нелинейная динамика, теория колебаний, синхронизация и управление хаосом. Автор более 40 научных публикаций.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: shabuninav@info.sgu.ru



ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ СЛОЖНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ РАБОТЫ АВТОГЕНЕРАТОРА НА ОСНОВЕ МАГНИТОУПРАВЛЯЕМОГО НЕГАТРОНА

А.А. Семёнов, Д.А. Усанов, А.А. Колокин

Представлены результаты исследования режимов работы автогенераторной системы на основе магнитоуправляемого активного двухполюсника с отрицательным дифференциальным сопротивлением и вольт-амперной характеристикой N-типа. Приведены экспериментальные графики температурных зависимостей колебательных режимов исследуемой динамической системы. Показано, что температурный режим активного полупроводникового прибора может существенным образом оказывать влияние на вид его вольт-амперной характеристики, что необходимо учитывать при анализе работы таких приборов в сложных динамических режимах.

Ключевые слова: Магниточувствительный нелинейный двухполюсник, сложные динамические режимы, нелинейная температурная зависимость, нелинейная вольт-амперная характеристика N-типа.

Приборы с отрицательным дифференциальным сопротивлением (ОДС), так называемые негатроны, находят широкое применение в радиофизических и радиотехнических системах самого широкого назначения не только в качестве основных элементов усилительных, генераторных и ключевых схем, но и как простейшие функциональные элементы, благодаря присущей им внутренней управляемой реактивности [1, 2], причем реактивность, в зависимости от типа ОДС, может иметь как индуктивный, так и емкостной характер.

В связи с этим представляет широкий практический интерес исследование нового класса таких устройств – полупроводниковых негатронов с характеристиками, управляемыми магнитным полем, поскольку приборы такого типа позволяют с помощью одного схемотехнического решения реализовать устройства различного функционального назначения [3–8]. Обладая устойчивым участком ОДС на вольт-амперной характеристике (ВАХ) в широком диапазоне частот, такие приборы демонстрируют разнообразный спектр колебательных режимов: от гармонических и релаксационных до сложнопериодических и квазипериодических [5–8]. Однако анализа их динамического поведения до сих пор проведено не было.

Результаты исследования сложного динамического поведения генератора на магнитоуправляемом двухполюснике с ОДС и ВАХ N-типа приведены нами в работе [7]. Исследование нелинейных динамических режимов работы такого генератора несомненно представляет интерес с точки зрения физической общности полученных результатов, поскольку в известных работах сложное динамическое поведение было обнаружено в режиме, когда рабочая точка находилась в припороговой области ВАХ активного прибора. Отметим, что подобные режимы наблюдались в автогенераторных системах, построенных на активных твердотельных элементах с ВАХ N-типа (диодах Ганна), в диапазоне сверхвысоких частот, где строгое исследование сложных колебательных режимов особенно затруднительно [9–16].

Исследуемый генератор, принципиальная схема которого приведена на рис. 1, представлял собой типичную автогенерирующую схему, характерную для устройств, построенных на двухполюсниках с ВАХ N-типа [17].

Анализ принципиальной схемы генератора показывает, что он представляет собой нелинейную динамическую систему с большим числом степеней свободы. Поскольку численный анализ такой системы представляет трудности, при её описании были введены следующие упрощения, позволяющие, тем не менее, достаточно строго описать исследуемый генератор. Источник питания E считаем идеальным, что позволяет при теоретическом анализе отказаться от учета цепи фильтра $R_1 C_1$. Резистор R (рис. 2), в величину которого внесём номинал сопротивления R_1 и значение сопротивления потерь индуктивности L_1 , определит угол наклона нагрузочной прямой и, в совокупности со значением ЭДС источника питания E , положение рабочей точки на характеристике нелинейного элемента VD . Сопротивление потерь индуктивности L_2 внесём в величину сопротивления R_3 датчика тока в цепи катушки. Для удобства анализа цепей автогенератора переобозначим L_2, C_1, R_3 (см. рис. 1) как L_0, C_0, R_0 (рис. 2), а L_1, C_2 – как L, C , соответственно. При выбранных в эксперименте значениях реактивностей схемы, спектр колебаний генератора располагался в области сравнительно низких частот, что позволяло отказаться от введения в эквивалентную схему элементов, описывающих индуктивность и ёмкость корпуса двухполюсника VD , в связи с их незначительным вкладом в импеданс прибора. Но введение малой величины C_{ss} (ёмкости корпуса активного двухполюсника VD) обеспечило однозначность и корректность уравнений состояния, описывающих исследуемую систему.

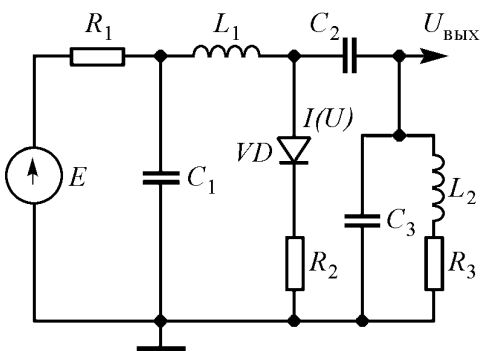


Рис. 1. Принципиальная электрическая схема автогенератора на магнитоуправляемом негатроне

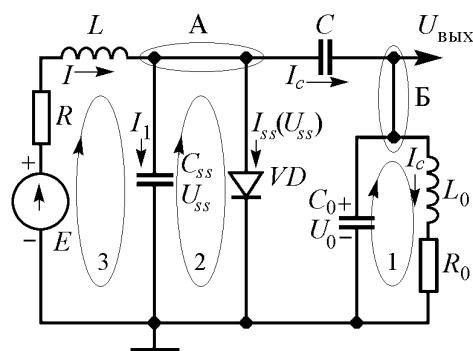


Рис. 2. Эквивалентная схема исследуемого автогенератора

Сделанные упрощение позволили перейти к анализу исследуемой электродинамической системы на основе более простой эквивалентной схемы, приведенной на рис. 2.

Поскольку влияние магнитного поля на магнитоуправляемый двухполосник выражается в изменении вида его вольтамперных характеристик, как это показано на рис. 3, учёт этих зависимостей приводит к значительным сложностям при численном исследовании режимов работы исследуемой автогенераторной системы.

Но, как следует из взаимного расположения вольтамперных характеристик, приведенных на рис. 3, и нагрузочной прямой 6, величина магнитного поля фактически влияет только на положение рабочей точки на ВАХ прибора. Таким образом, изменение положения рабочей точки на семействе вольтамперных характеристик нелинейного элемента при различных значениях внешнего магнитного поля можно представить как сдвиг участка с отрицательной крутизной, с неизменным характером этого участка при операции сдвига. Это позволяет ввести в описание следующее упрощение: нелинейный двухполосник можно представить как источник тока, управляемый напряжением $I(U)$ при фиксированном значении $B = 0$, а результатом изменения величины магнитного поля можно считать сдвиг нагрузочной прямой относительно нелинейной характеристики $I(U)$ вдоль оси U , что равносильно изменению величины E в диапазоне $E_1 \dots E_5$ (рис. 4).

Такое упрощение позволяет описать нелинейную характеристику $I(U)$ активного элемента VD степенным полиномом, представляющим собой функцию только величины U ,

$$I = (A_1 + (A_2 - (A_3 - A_4U)U)U)U + A_0,$$

где A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 – коэффициенты полинома.

Величины этих коэффициентов определялись по экспериментальной ВАХ нелинейного двухполосника, демонстрирующей хорошее качественное соответствие с расчетной (рис. 4).

Математическая модель исследуемого автогенератора представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений для мгновенных значений напря-

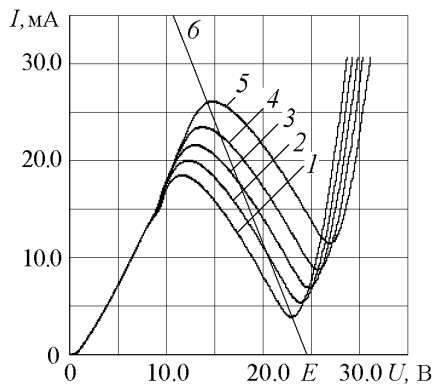


Рис. 3. Рассчитанные ВАХ нелинейного двухполосника при различных значениях внешнего магнитного поля B : 1 – (–180) мТл; 2 – (–90) мТл; 3 – 0; 4 – 90 мТл; 5 – 180 мТл; 6 – нагрузочная прямая

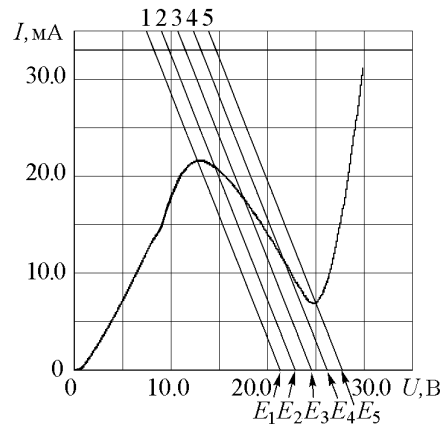


Рис. 4. Рассчитанная ВАХ нелинейного двухполосника при фиксированном значении $B = 0$ и семейство нагрузочных прямых 1–5, имитирующих изменение величины внешнего магнитного поля

жений и токов (переменных состояния), записанную с учётом обозначенных на рис. 2 узлов и контуров. Произведя замену переменных: $x = I/I_m$, $y = I_0/I_m$, $z = U_{ss}/U_m$, $v = U_0/U_m$, введя безразмерное время как характерное время для данной динамической системы $\tau = t / \sqrt{L(C_{ss} + C_0 C_1 / (C_0 + C_1))}$ и используя нормировку ЭДС источника питания в виде $\varepsilon = E/U_m$, можно перейти к нормированной системе нелинейных дифференциальных уравнений, описывающей динамику исследуемой электродинамической системы,

$$\begin{cases} \frac{dy}{d\tau} = \frac{U_m}{I_m L_0 \omega_0} v - \frac{R_0}{L_0 \omega_0} y, \\ \frac{dv}{d\tau} = \frac{I_m}{U_m C_{ss} \omega_0} \frac{C_X}{C_0} (x - i(z)) - \frac{I_m}{U_m C_0 \omega_0} \left(1 - \frac{C_X}{C_0}\right) y, \\ \frac{dz}{d\tau} = \frac{I_m}{U_m C_{ss} \omega_0} \left[\left(1 - \frac{C_X}{C_{ss}}\right) (x - i(z)) - \frac{C_X}{C_0} y \right], \\ \frac{dx}{d\tau} = \frac{U_m}{I_m L \omega_0} (\varepsilon - z) - \frac{R}{L \omega_0} x, \end{cases} \quad (1)$$

$$\omega_0 = 1 / \sqrt{L \left[C_{ss} + \left(\frac{C_0 C_1}{C_0 + C_1} \right) \right]}, \quad \frac{1}{C_X} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C_{ss}} + \frac{1}{C_0}, \quad i(z) = \frac{I_{ss}(U_{ss}/U_m)}{I_m}.$$

Здесь $i(z)$ – ВАХ нелинейного двухполосника в безразмерных переменных. Значения $U_m = 28.44447638$ В, $I_m = 0.018010734$ А были определены численно из графика аппроксимации ВАХ нелинейного двухполосника. Обозначив

$$a = \frac{U_m}{I_m L \omega_0}, \quad b = \frac{R}{L \omega_0}, \quad d = \frac{U_m}{I_m L_0 \omega_0}, \quad g = \frac{R_0}{L_0 \omega_0},$$

$$k = \frac{I_m}{U_m C_{ss} \omega_0} \left(1 - \frac{C_X}{C_{ss}}\right), \quad h = \frac{I_m}{U_m C_{ss} \omega_0} \frac{C_X}{C_0}, \quad p = \frac{I_m}{U_m C_0 \omega_0} \left(1 - \frac{C_X}{C_0}\right),$$

приведем безразмерную систему нелинейных дифференциальных уравнений (1) к следующему виду:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = a(\varepsilon - z) - bx, \\ \frac{dy}{d\tau} = dv - gy, \\ \frac{dz}{d\tau} = k(x - i(z)) - hy, \\ \frac{dv}{d\tau} = h(x - i(z)) - py, \end{cases} \quad (2)$$

где $i(z) = (B_1 + (B_2 - (B_3 - B_4 z)z)z)z + B_0$, а $B_N (N = 0 \dots 4)$ – новые коэффициенты аппроксимирующего полинома нормированной ВАХ нелинейного двухполосника.

Моделирование системы проводилось при следующих значениях параметров элементов: $C_0 = 411$ нФ, $C_{ss} = 2$ пФ, $C = 65$ пФ, $L_0 = 124$ мГн, $L = 3.08$ мГн, $R_0 = 1$ Ом.

ЭДС источника питания E и величина сопротивления R варьировали как параметры, определяющие режим работы исследуемой электродинамической системы. Значения этих параметров выбирались соответственно в пределах 15...35 В и 50...500 Ом.

В силу того, что нелинейный элемент описывается полиномом четвертой степени, аналитическое решение такой системы невозможно, что определило необходимость исследования её численными методами. Для сравнения с экспериментальными результатами расчётные безразмерные величины при отображении на графиках переводились в значения переменных, имеющих соответствующую размерность.

Бифуркационные диаграммы исследуемой динамической системы (рис. 5, 6), построенные при изменении значений E и R , позволили определить значения параметров, при которых происходят бифуркации, и выделить области периодического движения среди сложных динамических режимов.

Для оценки характера сложных динамических режимов исследуемой системы в областях VII, IX, XI, где периодичность явно отсутствует, было проведено исследование сложного поведения нелинейной системы методом сечений Пуанкаре. Он даёт картину поперечного сечения аттрактора, на котором сосредоточено движение в фазовом пространстве, и позволяет дать качественную оценку характера движения: так, если движение хаотично, то в сечении возникает сложная многолистная (так называемая – фрактальная) структура, напоминающая лабиринт [18].

Для исследуемой системы четвертого порядка сечение Пуанкаре представляется совокупностью точек в трехмерном пространстве и может быть получено заданием одной из переменных состояния. При анализе применялся известный вариант метода сечений Пуанкаре, который заключается в регистрации данных в те моменты, когда какая-либо переменная достигает максимального значения [19].

Анализ трёхмерных фазовых объемов четырехмерного фазового пространства системы позволил отдать предпочтение именно этому методу и зафиксировать значения максимумов колебаний тока в индуктивности L для регистрации отсчётов независимых переменных в фазовом объёме U_0, I_0, U_{ss} (в безразмерном виде – y, v, z).

Полученное таким образом сечение Пуанкаре аттрактора исследуемой системы для развитого хаотического режима в области XI изображено на рис. 7, $a-v$ под разными углами наблюдения, что позволило определить плоскость независимых пе-

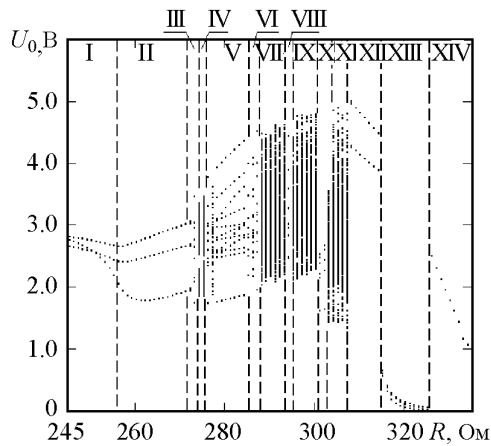


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма исследуемой динамической системы при изменении управляющего параметра R в диапазоне 245...335 Ом; I–XIV – области характерных динамических режимов

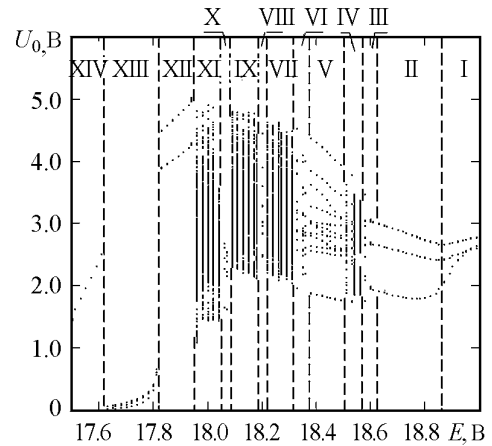


Рис. 6. Бифуркационная диаграмма исследуемой динамической системы при изменении управляющего параметра E в диапазоне 17.5...19 В; I–XIV – области характерных динамических режимов

ременных $(y - v)$ или $(U_0 - I_0)$, в проекции на которую была отображена структура сечения (рис. 7, z).

Общий вид как самого сечения, так и его проекции позволяет классифицировать аттрактор системы как странный ввиду того, что он не состоит ни из конечного множества точек, ни из замкнутой орбиты, а также не имеет вид неупорядоченного скопления точек на плоскости, что свойственно стохастическим движениям.

Анализ бифуркационных диаграмм, фазовых объёмов исследуемой системы, их проекций на плоскости независимых переменных, сечения Пуанкаре аттрактора системы позволяет классифицировать сложные движения в исследуемой нелинейной детерминированной системе как ограниченный или узкополосный хаос – хаотические движения, орбиты которых проходят в фазовом пространстве вблизи от орбит некоторых периодических или регулярных движений [18].

Сделанную оценку сложных динамических режимов подтверждают и измеренные экспериментально спектры мощности, представленные на рис. 8, $a-v$ для областей VII, IX, XI, соответственно.

Проведенный анализ позволил выделить области характерных динамических режимов и осуществить количественную оценку состояния равновесия системы в интересующей нас точке ВАХ. С этой целью были найдены корни полученного в аналитическом виде характеристического уравнения для системы (2) в области развитого хаотического режима XI .

При заданных параметрах и значениях $E = 18$ В и $R = 305$ Ом исследуемая система имеет одну точку равновесия, в которой корни характеристического

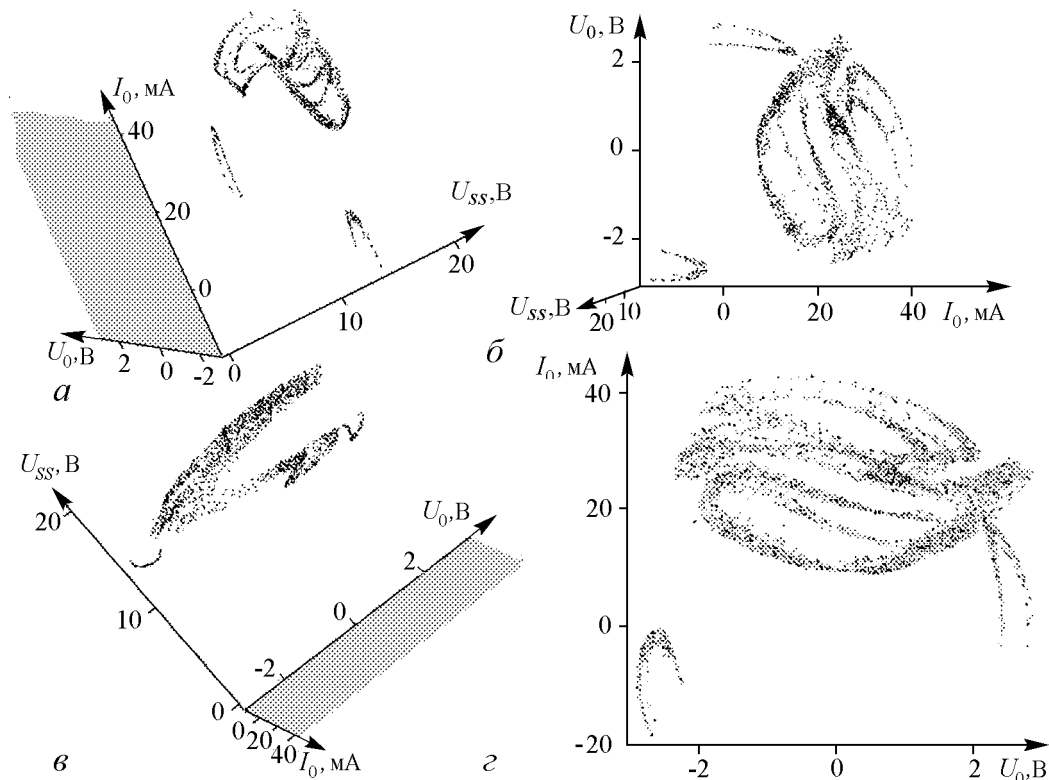


Рис. 7. $a-v$ – сечение Пуанкаре аттрактора исследуемой системы под разными углами наблюдения; z – проекция сечения Пуанкаре на плоскость $(v - y)$

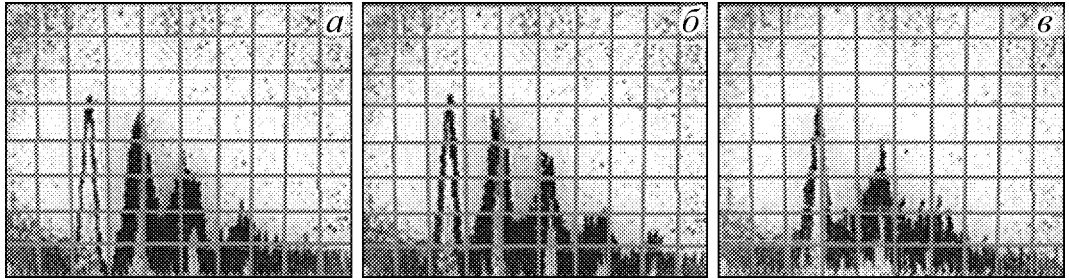


Рис. 8. Спектры мощности, соответствующие характерным колебательным режимам исследуемой системы в областях VII, IX, XI

уравнения, составленного для системы (2), имеют следующие значения:

$$\lambda_{0,1} = -3.6396055 \pm 18.3844857i, \quad \lambda_{2,3} = 0.079578 \pm 5.8814651i,$$

что позволяет определить наличие в данной точке двумерного устойчивого многообразия $\lambda_{0,1} = -3.6396055 \pm 18.3844857i$ (действительные части отрицательны) и двумерного неустойчивого многообразия $\lambda_{2,3} = 0.079578 \pm 5.8814651i$ (действительные части положительны).

Для количественной оценки динамики исследуемой системы в диапазоне изменения управляющего параметра были рассчитаны зависимости спектра ляпуновских характеристических показателей (ЛХП) от R , поскольку спектр ЛХП даёт информацию не только о наличии или отсутствии в системе хаотических колебаний, но и позволяет сделать оценку типа периодического движения, то есть отличить квазипериодическое движение от периодического.

В режиме развитого хаоса (в области XI) ЛХП имели значения $\lambda_1 = 0.1253$, $\lambda_2 = 0.0002$, $\lambda_3 = -0.0006$ и $\lambda_4 = -3.9$, что соответствовало сигнатуре $[+, 0, -, -]$, характеризующей множество точек притяжения исследуемой диссипативной системы в установившемся режиме как странный аттрактор с одним положительным ляпуновским показателем [20]. При этом размерность Ляпунова (Kaplan–Yorke), вычисленная для рассматриваемого аттрактора при заданных параметрах R и E , составляла 3.032.

Таким образом, переход к хаотическим колебаниям в исследуемой системе осуществлялся через последовательность бифуркаций удвоения периода, а области хаотического режима при изменении управляющего параметра чередовались в системе с окнами периодичности.

Известно, что полупроводниковые материалы и приборы на их основе отличаются сильной температурной зависимостью своих параметров, что вынуждает разработчиков принимать специальные меры для компенсации этого эффекта при создании полупроводниковых устройств, или же использовать известные зависимости параметров полупроводников от температуры для измерения последней.

Поскольку исследования зависимости характеристик магнитоуправляемого активного двухполюсника с отрицательным дифференциальным сопротивлением и ВАХ N-типа от температуры ранее не проводилось, исследования в этом направлении представляются актуальными и своевременными как с точки зрения определения характеристик самого прибора, так и с точки зрения установления характера их влияния на колебательные режимы автогенератора на его основе. С этой целью было проведено исследование взаимосвязи температуры прибора и типа колебатель-

ных режимов в ранее определенном диапазоне изменения управляющего параметра, результаты которого приведены ниже.

Необходимость проведения температурных исследований была вызвана также необычным экспериментальным результатом, наблюдаемым при анализе изменения колебательных режимов автогенератора под воздействием управляющего параметра R (см. рис. 5). Необычность результата заключалась в том, что по завершению проведения серии измерений автогенераторная система, находящаяся в режиме, характерном для диапазона XIV, по истечении сравнительно продолжительного времени (свыше 10 мин) начинала самостоятельно демонстрировать всё многообразие режимов, приведенных на бифуркационной диаграмме в областях XIV–I, плавно переходя между ними от одного к другому.

Похожее поведение системы, демонстрирующей сложные хаотические режимы, наблюдалось также авторами работ [21–24], но исчерпывающего объяснения наблюдаемому феномену ими выдвинуто не было.

Плавность процесса самостоятельного перехода исследуемой системы от одного колебательного режима к другому и продолжительность этого процесса во времени позволили предположить влияние на исследуемое явление изменения температурного режима работы активного двухполосника.

Для выявления закономерностей изменения температурного режима активного прибора было проведено исследование зависимости температуры двухполосника от режима работы и текущего времени. С этой целью температура активного элемента измерялась с помощью калиброванной термопары типа К, находящейся в прижимном контакте с корпусом прибора. Качество термического контакта обеспечивалось с помощью специальной термопроводящей пасты. Термопара в качестве датчика температуры обеспечивала минимальное время преобразования значения текущей температуры прибора в измеряемую электрическую величину термоЭДС, значение которой отображалось в градусах Цельсия на дисплее измерительного прибора типа MS8209 на фоне экрана осциллографа. Вместе с показаниями электронного секундомера значение температуры и отображаемый осциллографом вид проекции фазового объёма динамической системы на плоскость независимых переменных фиксировались видеокамерой. На основе кадрового анализа оцифрованной записи были построены приведенные на рис. 9 графики зависимости температуры активного элемента и максимальной амплитуды колебаний от времени.

Измерение температурной зависимости проводилось следующим образом. Питание $E = 18$ В подавалось на устройство при температуре окружающей среды 27 °С, после чего в течение 5 мин осуществлялся прогрев устройства и его вход в рабочий режим. В течение этого времени автогенератор работал в режиме многочастотной генерации, характерном для областей I–II (см. рис. 5). После того, как температурный режим прибора стабилизировался, плавным изменением величины параметра R , система перестраивалась в

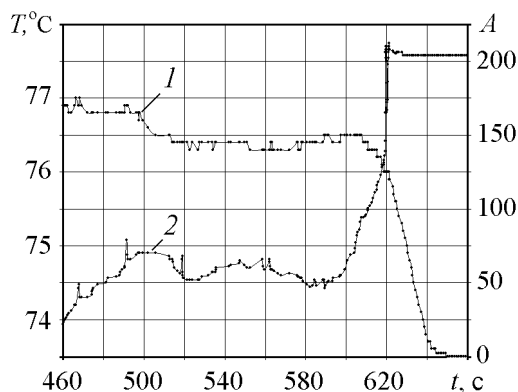


Рис. 9. Зависимости температуры активного элемента (1) и амплитуды колебаний (2) от времени

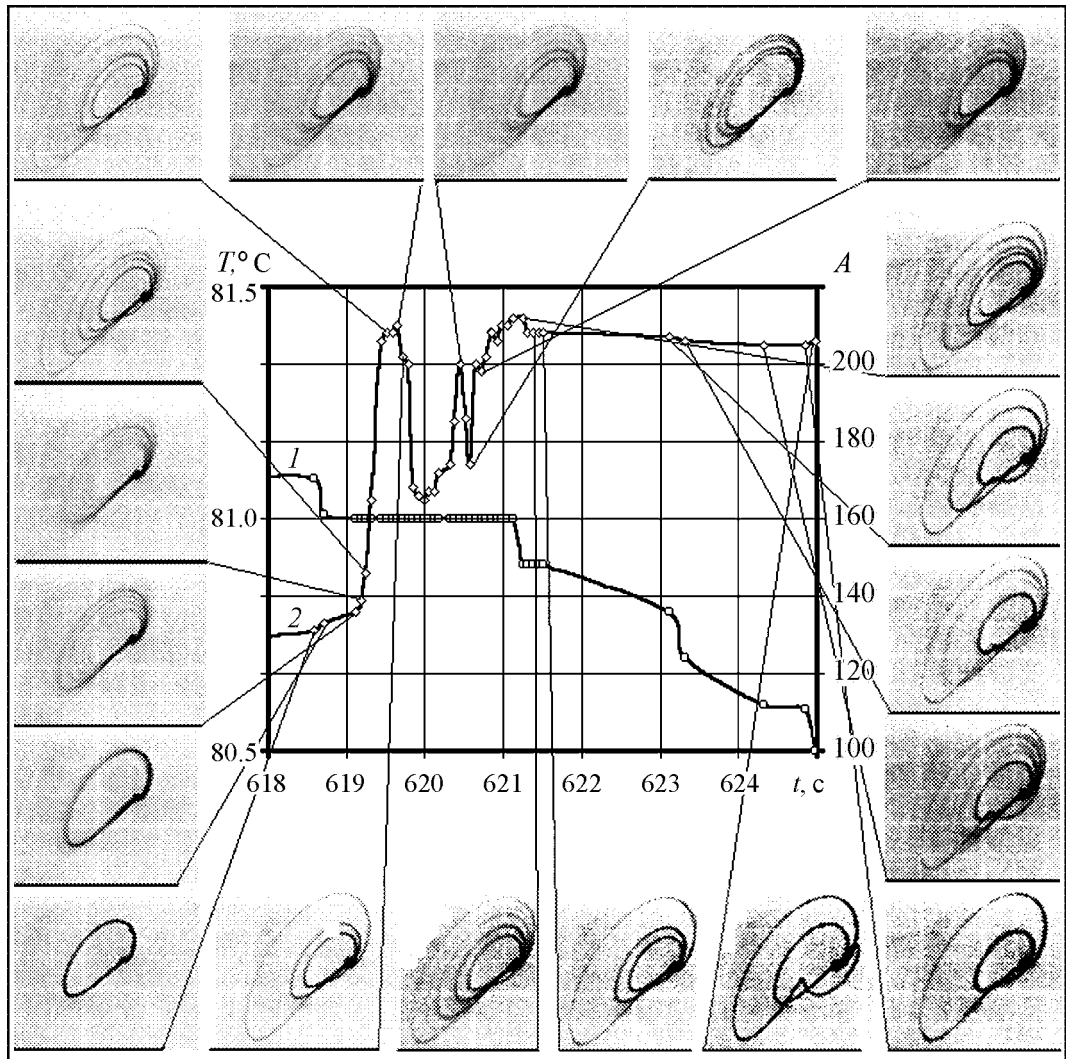


Рис. 10. Зависимости температуры активного элемента (1) и амплитуды колебаний (2) от времени в интервале 618...625 с, а также фазовые портреты колебаний в характерных точках

колебательный режим, характерный для области XII, и значения параметров R и E более не изменялись.

Под воздействием рассеиваемой на приборе мощности двухполосник испытывал саморазогрев, и температура его достигала $77\text{ }^{\circ}\text{C}$, в процессе чего исследуемая динамическая система последовательно достигала колебательного режима, характерного для завершения области XIV. После этого возрастание температуры прекращалось, и наблюдались её незначительные колебания в окрестности значения $76.8\text{ }^{\circ}\text{C}$, сопровождаемые слабыми изменениями амплитуды колебательно режима.

Следует отметить, что амплитуда колебаний A в проводимых исследованиях являлась более информативным параметром о температурном режиме активного элемента, поскольку изменение амплитуды даёт информацию непосредственно об условиях работы полупроводникового кристалла прибора. В то же время контролируемая температура корпуса прибора T является более инерционным параметром, в значительной мере имеющим интегральный характер.

Начиная примерно с 460-й секунды с момента начала измерений, температура прибора начинала демонстрировать тенденцию к снижению. График этой зависимости до момента стабилизации температурных изменений при значении $T = 73.5 \text{ }^\circ\text{C}$ иллюстрирует рис. 9. Ступенчатость кривой температурной зависимости объясняется выбранным крупным масштабом для сравнительно небольшого интервала значений температур ($4 \text{ }^\circ\text{C}$) и дискретным характером цифровой обработки сигнала ЭДС термопары прибором MS8209.

Для более подробного анализа температурного изменения колебательных режимов временная область в диапазоне 615...625 с представлена на рис. 10 в более крупном масштабе с фазовыми портретами колебательных режимов, характерными для отдельных точек графика.

Инерционность температурных изменений удерживает прибор в режиме двухчастотной генерации (области XIII – XIV) продолжительное время, но узкополосный характер колебаний и сравнительно небольшая величина их амплитуды приводят к снижению рассеиваемой двухполосником мощности, вследствие чего он начинает остывать, что и приводит к плавной смене колебательных режимов генератора при неизменных значениях управляющих параметров E и R вплоть до наступления термодинамического равновесия, когда тепловые потери компенсируются рассеиваемой мощностью в достигнутом колебательном режиме.

Характер приведенных на рис. 9, 10 графиков и соответствующих фазовых портретов позволяет сделать вывод о том, что изменение режимов работы автогенераторной системы обусловлено перемещением рабочей точки по ВАХ в зависимости от температуры активного элемента, что при фиксированном значении параметров E и R может быть вызвано, по всей видимости, только изменением вида ВАХ самого прибора.

Для анализа сделанного предположения был проведен расчет вольтамперных характеристик двухполосника при фиксированных значениях температур в диапазоне $27...85 \text{ }^\circ\text{C}$. Результаты расчета приведены на рис. 11.

Как видно из приведенных на рис. 11 графиков 1–5, увеличение температуры нелинейного двухполосника в диапазоне $27...85 \text{ }^\circ\text{C}$ приводит к такому изменению вида его ВАХ, что при фиксированных значениях параметров E и R , определяющих положение рабочей точки на графике, это положение последовательно проходит участки характеристики, типичные для различных характерных динамических режимов работы автогенераторной системы (см. рис. 5). Этот процесс, собственно, и вызывает плавные переходы между ними.

Отметим, что для температур из диапазона $75...85 \text{ }^\circ\text{C}$ рабочая точка находится на участках ВАХ, где дифференциальное сопротивление двухполосника принимает нулевое значение и с ростом температуры приобретает положительный знак. Следовательно, начиная с некоторого значения температуры суще-

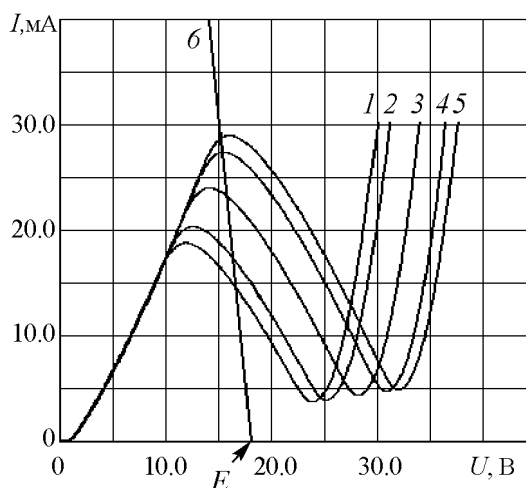


Рис. 11. Рассчитанные ВАХ нелинейного двухполосника при различных значениях температуры T : 1 – $27 \text{ }^\circ\text{C}$; 2 – $35 \text{ }^\circ\text{C}$; 3 – $55 \text{ }^\circ\text{C}$; 4 – $75 \text{ }^\circ\text{C}$; 5 – $85 \text{ }^\circ\text{C}$; 6 – нагрузочная прямая

ствование генерации становится невозможным, что подтверждается экспериментальными результатами. При температуре $77\text{ }^{\circ}\text{C}$ амплитуда колебаний достигает минимального значения, и генерация практически затухает. После этого прибор начинает остывать, но этот процесс в диапазоне 460...600 с, как видно из графика рис. 9, не носит строго монотонного характера.

Небольшое снижение температуры приводит к изменению вида ВАХ, в связи с чем изменяется режим работы устройства по постоянному току. Амплитуда колебаний увеличивается, и прибор снова испытывает нагрев, а с ним – изменение режима работы и колебательного режима. На протяженном временном интервале температура имеет тенденцию к снижению, но сложный характер её изменения делает этот процесс весьма длительным.

Иначе говоря, во всём представленном на рис. 9 диапазоне изменения температуры от времени, связанного с остыванием активного элемента, происходит постоянное изменение положения рабочей точки на графике ВАХ прибора, вызванное температурным изменением вида самой ВАХ, что как следствие приводит к плавной демонстрации автогенератором всего набора колебательных режимов. Как хорошо видно из участков 600...620 с и 640...660 с графика рис. 9, на которых скорость изменения температуры становится сравнительно большой, изменение носит сложный характер, сценарий которого описан выше.

Динамика процесса такова, что время, в течение которого система проходит области многочастотных и хаотических режимов, оказывается недостаточным для разогрева прибора, в связи с чем термодинамическое равновесие, а с ним и прекращение снижения температуры наступает лишь в области многочастотной генерации I–II. Эксперимент показал, что в этом режиме саморазогрева прибора не происходило, вследствие чего его характер был устойчив, и обратного перехода между областями колебательных режимов I–XIV не наблюдалось.

Таким образом, проведенные эксперименты показали, что временная неустойчивость сложных колебательных режимов исследуемой динамической системы связана с разогревом активного элемента, обусловленным спектральным составом и амплитудой генерируемых в этих режимах колебаний. Повышение температуры приводит к изменению вида ВАХ двухполюсника, и как следствие к сдвигу положения рабочей точки на характеристике, что в итоге вызывает смену колебательного режима динамической системы.

В режиме двухчастотной генерации рассеиваемая прибором мощность невелика, что со временем приводит к его остыванию, вызывающему соответствующее изменение вида ВАХ двухполюсника, приводящее к плавному переходу через области сложных колебательных режимов XIV–I к состоянию термодинамического равновесия в режиме многочастотной генерации.

Отметим, что процесс перехода через области чередующихся хаотических и развитых многочастотных колебаний носит лавинообразный характер. Войдя в этот процесс, генератор проходит все его стадии безостановочно. Зафиксировать работу генератора в одном из наблюдаемых колебательных режимов возможно, только оперативно изменив параметры работы активного элемента по постоянному току.

Похожее поведение автогенератора на магнитоуправляемом динисторе [25–26], по аналогии также может быть объяснено температурной зависимостью колебательных режимов, вызванной температурным изменением вольтамперной характеристики активного элемента.

Сложность анализа рассматриваемого процесса состоит в том, что необходимо учитывать взаимное влияние колебательных режимов и вида ВАХ двухполюсника от температуры. Положение рабочей точки на характеристике прибора определяет колебательный режим автогенератора, а характер колебательного режима определяет рассеиваемую активным элементом мощность и как следствие – температуру самого прибора, а значит и вид его ВАХ.

Следует также отметить, что явная зависимость вида ВАХ магниточувствительного двухполюсника от температуры при использовании прибора в качестве, например, чувствительного датчика магнитного поля требует принятия мер по термостабилизации или стабилизации его режима по постоянному току [64,65], введением следящих обратных связей, поскольку цепи термокомпенсации в конструкцию самого магнитотранзистора встраиваются в процессе его производства.

Исследование сложного поведения динамических систем на полупроводниковых приборах с ОДС, таких как динисторы, тиристоры, диоды Ганна и туннельные диоды, требует учета влияния температурных зависимостей их характеристик на реализуемые в этих системах колебательные режимы.

Авторы выражают благодарность Кузнецову С.П. за конструктивное обсуждение отдельных аспектов работы, ценные замечания и рекомендации.

Библиографический список

1. *Арефьев А.А., Серьезнов А.Н., Степанова Л.Н.* Эквиваленты приборов с отрицательным дифференциальным сопротивлением. М.: Знание, 1987. 64 с.
2. *Степанова Л.Н.* Новые устройства с отрицательным дифференциальным сопротивлением // Зарубежная радиоэлектроника. 1991. № 8. С. 42.
3. *Баскаков Е.Н., Степанова Л.Н.* Устройство с управляемой вольт-амперной характеристикой S-типа // Радиотехника. 1977. Т. 32, № 7. С. 85.
4. *Арефьев А.А., Степанова Л.Н.* Усилитель на эквиваленте *p-n-p-n*-структуры с управляемой вольт-амперной характеристикой S-типа // Измерительная техника. 1977. № 6. С. 64.
5. *Чаплыгин Ю.А., Галушков А.И., Семёнов А.А., Вениг С.Б., Усанов Д.А.* Магнитотиристор с регулируемыми характеристиками в низкоомном состоянии // Изв. вузов. Электроника. 2004. № 3. С. 42.
6. *Чаплыгин Ю.А., Галушков А.И., Семёнов А.А., Усанов Д.А.* Магнитоуправляемый динистор // Изв. вузов. Электроника. 2005. № 6. С. 56.
7. *Чаплыгин Ю.А., Галушков А.И., Семёнов А.А., Усанов Д.А.* Магнитоуправляемый двухполюсник с отрицательным дифференциальным сопротивлением и ВАХ N-типа // Изв. вузов. Электроника, 2007. № 3. С. 23.
8. *Чаплыгин Ю.А., Галушков А.И., Семёнов А.А., Усанов Д.А.* Полупроводниковые приборы с управляемыми магнитным полем характеристиками // V Международная научно-техническая конференция: Электроника и информатика – 2005. Материалы конференции. Часть 1. М.: МИЭТ, 2005. С. 211.
9. *Усанов Д.А., Горбатов С.С., Семёнов А.А.* Влияние напряжения смещения на стохастизацию колебаний в диодах Ганна в многоконтурной колебательной системе // Радиотехника и электроника. 1991. Т. 36, № 12. С. 2406.
10. *Усанов Д.А., Вениг С.Б., Семёнов А.А., Горбатов С.С.* Влияние нелинейного характера импеданса диодов Ганна на работу СВЧ-генераторов на их основе // Изв. вузов. ПНД. 1994. Т. 2, № 5. С. 35.

11. Семёнов А.А. Исследование нелинейных режимов работы полупроводниковых приборов СВЧ // Автореф... дис... канд. физ.-мат. наук / Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1994. 17 с.
12. Усанов Д.А., Горбатов С.С., Скрипаль А.В. Особенности низкочастотной генерации СВЧ-диодов Ганна // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1981. Т. 24, № 10. С. 67.
13. Бочаров Е.П., Коростелев Г.Н., Хрипунов М.В. К модели стохастической автогенерации в генераторах на диодах Ганна // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30, № 1. С. 96.
14. Кальянов Э.В. Стохастизация низкочастотных колебаний генераторов на МЭП-диоде // Радиотехника и электроника. 1984. Т. 29, № 1. С. 83.
15. Веселов Г.И., Егоров Е.Н., Алехин Ю.Н. и др. Микроэлектронные устройства СВЧ. М.: Высш. шк., 1988. 279 с.
16. Хотунцев Ю.Л., Тамарчак Д.Я. Синхронизированные генераторы и автодины на полупроводниковых устройствах. М.: Радио и связь, 1982. 240 с.
17. Давыдова Н.С., Данюшевский Ю.З. Диодные генераторы и усилители СВЧ. М.: Радио и связь, 1986. 184 с.
18. Мун Ф. Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров / Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 312 с.
19. Bryant P., Jeffries C. Experimental Study of Driven Nonlinear Oscillator Exhibiting Hopf Bifurcations, Strong Resonances, Homoclinic Bifurcations and Chaotic Behavior // Lawrence Berkeley Laboratory report, LBL-16949, January. 1984.
20. Кузнецов С.П. Динамический хаос. Сер. Современная теория колебаний и волн. М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2001. 295 с.
21. Усанов Д.А., Вениг С.Б., Скворцов С.И. Режим магнитоуправляемой генерации с добавлением периода и хаосом в схеме с магнитотранзистором // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 5. С. 43.
22. Скворцов С.И. Экспериментальные исследования режимов генерации с добавлением периода и хаоса в схеме с магнитотранзистором // Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2000: Сб. материалов научной школы-конференции. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2000. С. 137-139.
23. Скворцов С.И. Нелинейные динамические режимы работы генераторов на магнитодиодах и магнитотранзисторах: Автореф... дис... канд. физ.-мат. наук. Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2002. С. 13.
24. Скворцов С.И. Нелинейные динамические режимы работы генераторов на магнитодиодах и магнитотранзисторах: Дис... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 2002. С. 63.
25. Степанова Л.Н., Баскаков Е.Н. Температурная стабилизация параметров ВАХ S-типа в транзисторном эквиваленте *p-n-p*-структуры // Радиотехника. 1976. № 9. С. 77.
26. Степанова Л.Н. Компенсация активными элементами температурного дрейфа параметров ВАХ S-типа в эквивалентах *p-n-p*-структуры // Радиотехника. 1979. № 12. С. 65.

Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 7.12.2011

TEMPERATURE DEPENDENCE OF COMPLEX OSCILLATORY OPERATION MODES OF THE MAGNETICALLY CONTROLLED TWO-TERMINAL DEVICE OSCILLATOR

A.A. Semenov, D.A. Usanov, A.A. Kolokin

The results of operation modes research of the auto-generating system based on a magnetically controlled two-terminal active device with negative differential resistance and N-type current-voltage characteristic are represented. Experimental graphics of oscillatory modes temperature dependencies of the researched dynamic system are given. It is shown, that the temperature mode of the active semiconductor device can rendered essential influence on its current-voltage characteristic, what is necessary to take into account while analyzing operation modes of such devices in complex dynamic modes.

Keywords: Magneto-sensitive nonlinear two-terminal device, complex dynamical operation mode, nonlinear temperature dependence, N-type nonlinear current-voltage characteristic.



Семёнов Андрей Андреевич – родился в Саратове (1965). После окончания Саратовского государственного университета (1987) – инженер, аспирант, научный сотрудник отраслевой лаборатории при СГУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1994) по специальности радиофизика, включая квантовую радиофизику, и доктора физико-математических наук (2010) в области твердотельной электроники и радиофизики. С 1995 года по настоящее время доцент кафедры физики твердого тела факультета нано- и биомедицинских технологий СГУ. Область научных интересов – физика полупроводников, твердотельная электроника, микросхемотехника, применение нелинейной динамики в полупроводниковой электронике, радиофизика. Неоднократный участник и лауреат научно-технических выставок.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет
E-mail: SemenovAA@info.sgu.ru



Усанов Дмитрий Александрович – родился в городе Менделеевске (1943), окончил Саратовский государственный университет (1965), куда после нескольких лет службы на предприятии электронной промышленности поступил на работу и где работает заведующим кафедрой физики твердого тела по настоящее время. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1972) в области физики полупроводников и диэлектриков и доктора физико-математических наук (1989) в области радиофизика, включая квантовую радиофизику. Профессор СГУ, заслуженный деятель науки РФ. Область научных интересов – твердотельная СВЧ-электроника, радиоволновые и оптические методы контроля, применение нелинейной динамики в полупроводниковой электронике СВЧ.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет
E-mail: UsanovDA@info.sgu.ru



Колокин Александр Анатольевич – родился в Саратове (1989). Окончил с отличием и серебряной медалью МОУ «СОШ № 8» (2007). В настоящее время студент пятого курса факультета нано- и биомедицинских технологий Саратовского госуниверситета. Неоднократный участник и дипломант студенческих научных конференций, призер Всероссийской конференции по физике в СГТУ в 2007 году. Область научных интересов – микросхемотехника и твердотельная электроника, численное моделирование физических процессов.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет
E-mail: aleksanderk008@yandex.ru



ВЫБОР ВРЕМЕННЫХ МАСШТАБОВ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ЭМПИРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

М.В. Сысоева, Т.В. Диканев, И.В. Сысоев

В работе рассматривается задача оптимального учёта временных масштабов исходного временного ряда при построении эмпирических прогностических моделей, используемых далее для оценки причинности по Грейнджеру. Предлагается для сравнительно коротких временных рядов, характерных, в частности, для медико-биологических приложений, использовать комбинацию из дальности прогноза и лага – различных по величине. Для подбора дальности прогноза и лага построены автоматизированные методики. Предложенный подход апробируется на большом числе различных эталонных систем, по итогам формулируются конкретные рекомендации по выбору дальности прогноза.

Ключевые слова: Реконструкция моделей по временным рядам, оптимальное вложение, анализ связанности, нелинейная причинность по Грейнджеру.

Введение

Анализ связанности систем по их временным рядам является одним из актуальных направлений современной науки. Классическим подходом для этой цели является метод причинности по Грейнджеру [1]. Основная идея этого метода заключается в построении прогностической модели, и если данные из первого временного ряда помогают точнее предсказывать поведение второго, то считается, что первая система влияет на вторую. Обзор различных вариантов метода причинности по Грейнджеру и сходных мер см. в [2, 3].

В настоящее время метод причинности по Грейнджеру используется в различных областях: в эконометрике (например, [4]), в нейрофизиологии (например, [5–7]), климатологии [8]. Одна из главных проблем при этом – удачный выбор структуры модели, в том числе – способа вложения.

В данной работе модели строились в виде нелинейного отображения последования вида

$$x_{n+P} = f_x(x_n, x_{n-l}, \dots, x_{n-(D-1)l}) + \xi_n, \quad (1)$$

где f_x – полином общего вида от D переменных [9], P – дальность прогноза, l – лаг, ξ – остатки модели, по смыслу являющиеся шумом. Коэффициенты модели подбирались методом наименьших квадратов.

При построении модели часто ограничиваются единственным лагом (он же и дальность прогноза), равным единице. Однако такой подход нередко приводит к малоэффективным и громоздким моделям с большой размерностью и огромным числом коэффициентов. В ряде работ, например, в [10] предлагаются алгоритмы выбора оптимальных величин и количества временных лагов. Но недостатком этих подходов является требование большого объёма данных: нужно иметь длинные временные ряды или их ансамбли. В данной работе предлагается компромиссный подход к учёту имеющихся в системе временных масштабов – использовать две различные величины: дальность прогноза и лаг. Таким образом, по сравнению с введением двух различных лагов можно уменьшить вычислительные затраты на подбор и использовать сравнительно короткие временные ряды, что типично, например, для медико-биологических приложений.

Цели работы – показать эффективность предложенного подхода и, основываясь на анализе результатов для набора численных примеров, сформулировать критерии выбора параметров моделирования, связанных с учётом временных масштабов: дальности прогноза P и лага l .

1. Описание метода и эталонных систем

Для анализа причинности по Грейнджеру вначале строится индивидуальная модель (1), учитывающая точки только из одного ряда $\{x_n\}_{n=1}^N$, влияние на который оценивается. Затем – совместная модель, которая учитывает точки из обоих рядов $\{x_n\}_{n=1}^N$ и $\{y_n\}_{n=1}^N$:

$$x_{n+P} = f_{xy}(x_n, x_{n-l}, \dots, x_{n-(D_1-1)l}, y_n, y_{n-l}, \dots, y_{n-(D_2-1)l}) + \eta_n, \quad (2)$$

где f_{xy} – полином общего вида от $(D_1 + D_2)$ переменных, P – дальность прогноза, l – лаг, η – остатки модели. Для обеих моделей рассчитываются среднеквадратичные ошибки аппроксимации ε_x для индивидуальной и ε_{xy} для совместной модели, коэффициенты подгоняются методом наименьших квадратов.

Коэффициент улучшения прогноза, характеризующий причинность по Грейнджеру, выражается через эти ошибки

$$G = \frac{\varepsilon_x^2 - \varepsilon_{xy}^2}{\varepsilon_x^2}. \quad (3)$$

Влияние дальности прогноза и лагов на причинность по Грейнджеру исследуется с помощью тестовых примеров, поскольку в них известны все параметры (размерность, порядок полинома), а направленность и силу связи (коэффициент k) мы можем задать сами.

В качестве тестовых примеров использовались следующие связанные системы.

1. Процессы авторегрессии первого порядка

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \alpha x_n + k y_n + \xi_n, \\ y_{n+1} &= \beta y_n + \eta_n, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\alpha = 0.99$, $\beta = 0.98$.

2. Процессы авторегрессии второго порядка

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \alpha_1 x_n + \alpha_2 x_{n-1} + k y_n + \xi_n, \\ y_{n+1} &= \beta_1 y_n + \beta_2 y_{n-1} + \eta_n,\end{aligned}\tag{5}$$

где $\alpha_1 = \beta_1 = 1.99$, $\alpha_2 = \beta_2 = -0.99$.

3. Системы ФитцХью–Нагумо

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_1(a - x_1)(x_1 - 1) - x_2 + I_a + k y_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= b x_1 - \gamma x_2, \\ \frac{dy_1}{dt} &= y_1(a - y_1)(y_1 - 1) - y_2 + I_a, \\ \frac{dy_2}{dt} &= b y_1 - \gamma y_2,\end{aligned}\tag{6}$$

$a = 0.8$, $b = 0.008$, $\gamma = 0.0033$, $I_a = 0.84$. Уравнения интегрировались методом Эйлера с шагом $h = 0.5$, поскольку в систему вводился динамический шум со среднеквадратичным отклонением $\sigma_n = 0.02\sigma_s$, где σ_s – среднеквадратичное отклонение сигнала. Устойчивость алгоритма тестировалась путём проверки на меньших шагах; далее временной ряд перевыбирался с шагом $\Delta t = 3h$, чтобы получить примерно 10^2 отсчётов на характерном периоде.

4. Системы Рёсслера

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -(x_2 + x_3) + k y_1, & \frac{dx_2}{dt} &= x_1 + a_x x_2, & \frac{dx_3}{dt} &= b_x - x_3(x_1 - c_x), \\ \frac{dy_1}{dt} &= -(y_2 + y_3), & \frac{dy_2}{dt} &= y_1 + a_y y_2, & \frac{dy_3}{dt} &= b_y - y_3(y_1 - c_y),\end{aligned}\tag{7}$$

где $a_x = 0.398$, $b_x = 2$, $c_x = 4$, $a_y = 0.2$, $b_y = 0.2$, $c_y = 5.7$ для хаотического режима и $a_x = 0.3$, $b_x = 0.2$, $c_x = 1.5$, $a_y = 0.25$, $b_y = 0.2$, $c_y = 2$ для периодического. В периодическом режиме система интегрировалась методом Эйлера с шагом $h = 0.0001$ и динамическим шумом ~ 2 , данные перевыбирались с интервалом $\Delta t = 500h$; в хаотическом – методом Рунге–Кутты 4-го порядка с шагом $h = 0.005$ без динамического шума, и данные перевыбирались с шагом $\Delta t = 10h$.

5. Системы Лоренца

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_x(x_2 - x_1) + k y_1, & \frac{dx_2}{dt} &= x_1(b_x - x_3) + x_2, & \frac{dx_3}{dt} &= x_1 x_2 - c_x x_3, \\ \frac{dy_1}{dt} &= a_y(y_2 - y_1), & \frac{dy_2}{dt} &= y_1(b_y - y_3) + y_2, & \frac{dy_3}{dt} &= y_1 y_2 - c_y y_3,\end{aligned}\tag{8}$$

где $a_x = 10$, $b_x = 46$, $c_x = 83$, $a_y = 10.01$, $b_y = 47$, $c_y = 83$ для хаотического режима. Система интегрировалась методом Рунге–Кутты 4-го порядка с шагом $h = 0.001$ без динамического шума, и данные перевыбирались с шагом $\Delta t = 4h$.

Во всех случаях к сгенерированным временным рядам добавлялись реализации измерительного нормального некоррелированного шума со среднеквадратичным отклонением $\sigma_m = 0.01\sigma_s$. От каждой системы записывались короткие временные ряды длиной 2000 отсчётов или приблизительно 20–30 характерных периодов. Такая длина рядов была выбрана, поскольку она типична для разного рода физиологических данных, например, сигналов электроэнцефалограмм, магнитоэнцефалограмм, электрокардиограмм и др.

2. Выбор оптимального лага и дальности прогноза

Причинность по Грейнджеру показывает максимально корректные результаты, если индивидуальная модель подобрана наилучшим образом, поскольку иначе улучшение прогноза может быть обусловлено наличием во втором сигнале информации, присутствующей также и в первом, но недостаточно учтённой. Например, такое может быть, если на самом деле воздействие одностороннее, но направлено в сторону, противоположную предполагаемой, либо обе рассматриваемые системы находятся под некоторым общим внешним воздействием. Поэтому оптимальный лаг l подбирается по критерию минимизации ошибки аппроксимации именно индивидуальной модели ε_x^2 , при этом осуществляется перебор значений в определённом диапазоне, начиная от единицы. Такой подбор осуществляется при каждой дальности прогноза. На графиках зависимости оптимальных лагов от дальности прогноза (рис. 1) как для периодических, так и для хаотических процессов наблюдаются склоны и горизонтальные участки. Склоны на графиках соответствуют ситуациям, когда оптимальным является учёт точки, отстоящей от предсказываемой на определенное расстояние.

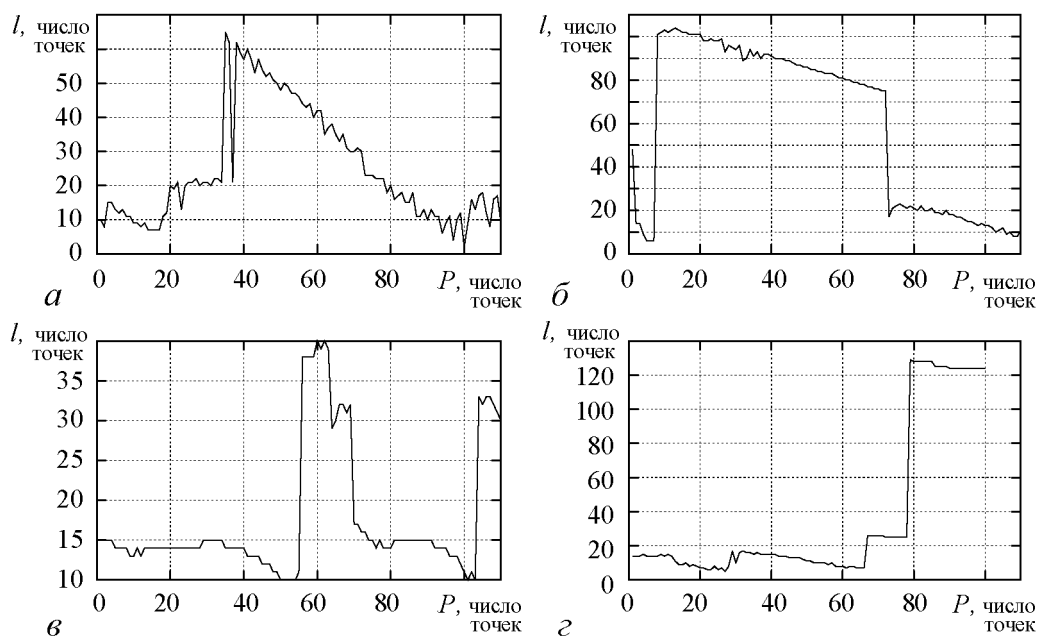


Рис. 1. Зависимость оптимального лага l от дальности прогноза P . Типичные картинки для периодических процессов – системы ФитцХью–Нагумо (а) и Рёсслера (б), для хаотических процессов – Рёсслера (в) и Лоренца (г). Везде порядок полинома $S = 5$

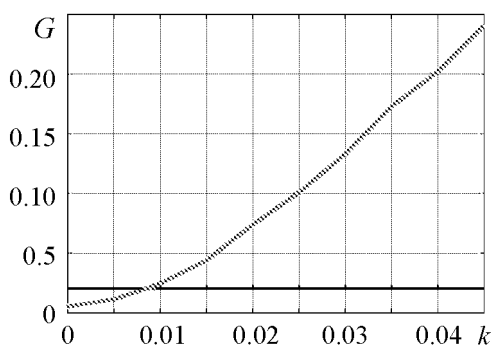


Рис. 2. Зависимость коэффициента улучшения прогноза G от коэффициента связи k при фиксированной дальности прогноза P . Чёрная горизонтальная линия – 95-е по величине значение G для $k = 0$ (проверка значимости); серая линия – среднее значение улучшения прогноза для каждого коэффициента связи

Для малых дальностей прогноза, как правило, лаг берётся такой, чтобы захватить точку, лежащую через интервал Z , соответствующий нулю автокорреляционной функции. Для больших дальностей прогноза оптимальным оказывается лаг, выбираемый так, чтобы захватить точку, лежащую через характерный период $P + l = T$ или через два характерных периода $P + 2l = T$. Горизонтальные участки говорят о том, что в векторе состояния необходимы точки, которые лежат на определенном расстоянии друг от друга (Z или T).

Методика исследования зависимости причинности по Грейнджеру от дальности прогноза заключается в следующем.

1. Генерируются 100 пар рядов без связи ($k = 0$), для каждой пары рассчитывается улучшение прогноза G , 95-е по величине значение выводим на график (чёрная горизонтальная линия на рис. 2). Таким образом осуществляется проверка значимости на уровне 5%.

2. Генерируются ряды с однонаправленной связью. Для каждого значения k делаются 100 пар рядов, для каждой пары рассчитывается G , и вычисляется среднее значение. На график для каждого значения силы связи выводится среднее значение улучшения (серая линия на рис. 2).

3. Если среднее значение G для данной силы связи k лежит выше 95-процентного уровня (то есть на рисунке серая линия лежит выше чёрной), то мы наблюдаем значимое улучшение прогноза. Обозначим пересечение этих двух линий \bar{k} . Чем раньше пересечение, то есть чем меньше \bar{k} , тем выше чувствительность метода.

4. Описанное выше делается для различных значений дальности прогноза. Строятся графики зависимости порога чувствительности от дальности прогноза $\bar{k}(P)$. Закрашенная на рис. 3 серым область показывает, в каком диапазоне значений коэффициента связи обнаруживается значимая связь. Закрашенная белым область – где, согласно методу связь считается незначимой.

5. Подобные графики зависимости порога чувствительности от дальности прогноза $\bar{k}(P)$ строятся для связи в правильную сторону (рис. 3, а, в) и в неправильную сторону (рис. 3 б, г).

Оптимальная дальность прогноза определяется по двум критериям.

- *Чувствительность метода*: значимая связь в правильную сторону обнаруживается при как можно меньшем значении коэффициента связи.
- *Специфичность метода*: значимая связь в неправильную сторону должна быть как можно меньше.

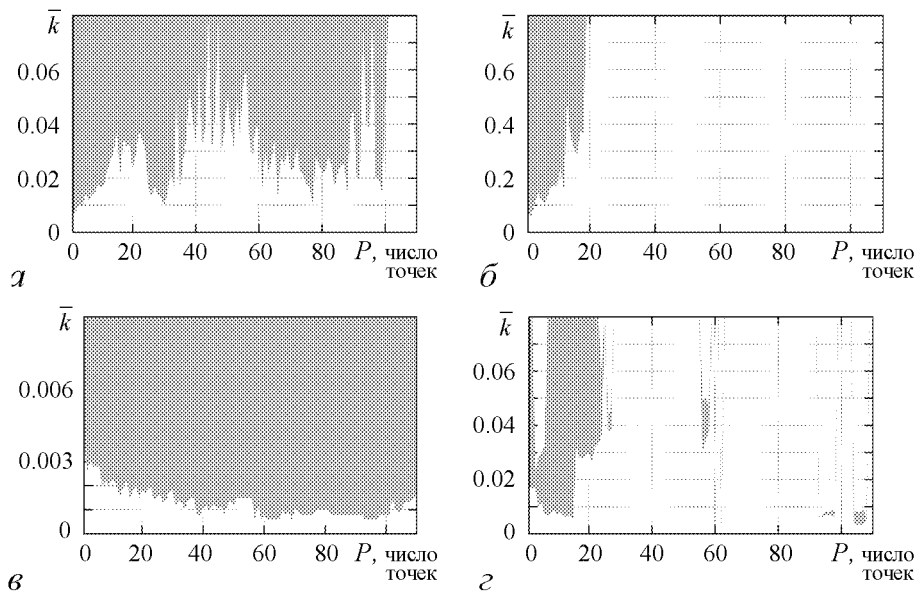


Рис. 3. Зависимость порога чувствительности \bar{k} от дальности прогноза P . В правильную сторону (слева) и в неправильную (справа). Сверху типичная картинка для периодических, снизу для хаотических процессов. Серая область – диапазон значений коэффициента связи, в котором обнаруживается значимая связь. Белая область – диапазон значений коэффициента связи, в котором обнаруживается незначимая связь

Если ориентироваться на чувствительность метода, то получаются следующие результаты.

Для процессов авторегрессии первого порядка с ростом дальности прогноза чувствительность метода падает, то есть предпочтительными являются единичные дальности прогноза. Это согласуется с тем фактом, что такие сигналы не имеют выделенного временного масштаба.

Для периодических режимов (процессов авторегрессии второго порядка, систем ФитцХью–Нагумо, систем Рёсслера в периодическом режиме) практически для всех дальностей прогноза чувствительность метода одинакова, причём чуть лучше чувствительность метода для единичных дальностей прогноза. Только при дальности прогноза, равной или характерному периоду T или его половине, чувствительность падает, поскольку улучшение предсказательной способности индивидуальной модели ухудшает работу метода.

Для хаотических режимов систем Рёсслера и Лоренца чувствительность метода на всех дальностях прогноза примерно одинакова. Чуть лучше метод работает при дальностях прогноза, равных половине характерного периода $T/2$ и характерному периоду T . И чуть хуже – при единичных дальностях прогноза.

Критерий качества модели невозможно построить, анализируя только чувствительность метода. Поэтому анализируется также специфичность метода, то есть ищется связь в неправильную сторону.

Для процессов авторегрессии первого и второго порядка специфичность метода очень хорошая: связь в заведомо неверную сторону не обнаруживается для всех дальностей прогноза в широком диапазоне значений коэффициента связи.

Для систем ФитцХью–Нагумо связь обнаруживается для малых дальностей прогноза; для систем Ресслера – для малых дальностей прогноза и для дальностей прогноза в районе половины характерного периода $P = T/2$.

Для хаотических процессов: для систем Рёсслера связь обнаруживается для малых дальностей прогноза, а также для дальностей прогноза в диапазоне от половины характерного периода $T/2$ до характерного периода T ; для систем Лоренца – в диапазоне от $T/2$ до T .

Подводя итог, можно порекомендовать брать дальность прогноза, равную четверти характерного периода $P = T/4$. Хотя в отдельных примерах это может быть не самым оптимальным выбором, в среднем оказывается, что в таком случае мы получаем хорошую специфичность метода при достаточно хорошей чувствительности. То есть вероятность ложных выводов относительно направления связи, определяемой методом Грейнджера, мала. Из общих теоретических соображений этот вывод может быть подтверждён тем, что четверть характерного периода примерно соответствует нулю автокорреляционной функции – расстоянию между отсчётами, на котором они статистически линейно не связаны, таким образом, последовательно включённые в вектор состояния точки несут максимально возможное количество информации (по крайней мере, для линейных моделей). Вследствие этого индивидуальная модель лучше описывает наблюдаемый сигнал, снижается вероятность получения ложных положительных результатов о наличии связей, что подтверждается результатами численных экспериментов.

Заключение

В работе исследуется эффективность оригинального подхода к выбору структуры эмпирических прогностических моделей, применяемых для анализа причинности по Грейнджеру. Существенная новизна состоит в том, что предлагается использовать при построении модели два различных параметра: дальность прогноза и лаг. Это позволяет учесть несколько временных масштабов, используя недлинный временной ряд. Для построенных таким образом моделей на основе анализа большого набора тестовых примеров сформулированы основные критерии выбора предложенных параметров, опирающиеся на анализ чувствительности и специфичности метода причинности по Грейнджеру.

Показано, что популярное среди исследователей значение дальности прогноза и лага, равное единице, оказывается далеко не оптимальным, поскольку построенные таким образом модели часто имеют очень низкую специфичность – показывают связь в заведомо ложную сторону. Оптимальной оказывается дальность прогноза порядка четверти характерного периода (или минимума автокорреляционной функции), именно при таком значении P достигается наилучшее сочетание специфичности и чувствительности. При этом лаг часто выбирается таким образом, чтобы в модели использовалась точка, отстоящая от предсказываемой на характерный период.

Работа выполнена при поддержке РФФИ: грант № 12-02-00377 и № 11-02-00599.

Библиографический список

1. *Granger C.W.J.* Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods // *Econometrica*. 1969. Vol. 37, № 3. P. 424.
2. *Gourévitch B., Le Bouquin-Jeannés R., Faucon G.* Linear and nonlinear causality between signals: Methods, examples and neurophysiological applications // *Biological Cybernetics*. 2006. Vol. 95. P. 349.
3. *Rosenblum M.G. and Pikovsky A.S.* // *Physical Review E*. 2001. Vol. 64. 045202.
4. *Abhyankar A.* Linear and nonlinear Granger causality: Evidence from the U.K. Stock index futures markets // *The Journal of Futures Markets*. 1998. Vol. 18, № 5. P. 512.
5. *Bernasconi C., König P.* On the directionality of cortical interactions studied by structural analysis of electrophysiological recordings // *Biol. Cybern.* 1999. Vol. 81. P. 199.
6. *Smirnov D.A., Barnikol U.B., Barnikol T.T., Bezruchko B.P., Hauptmann C., Buehrle C., Maarouf M., Sturm V., Freund H.-J., and Tass P.A.* The generation of Parkinsonian tremor as revealed by directional coupling analysis // *Europhysics Letters*. 2008. Vol. 83. 20003.
7. *Сысоев И.В., Караваев А.С., Наконечный П.И.* Роль нелинейности модели в диагностике связей при патологическом треморе методом грейнджеровской причинности // *Изв. вузов. ПНД*. 2010. Т. 18, № 4. С. 81.
8. *Smirnov D.A., Mokhov I.I.* From Granger causality to long-term causality: Application to climatic data // *Physical Review*. 2009. Vol. E80. 016208.
9. *Chaos and its Reconstruction / Eds. G. Gouesbet, G. Meunier-Guttin-Cluzel, O. Merlaud.* Nova Science Publishers, New York, 2003.
10. *Vlachos I., Kugiumtzis D.* Nonuniform state-space reconstruction and coupling detection // *Physical Review E*. 2010. Vol. 82. 016207.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию
После доработки*

*21.11.2011
20.03.2012*

SELECTING TIME SCALES FOR EMPIRICAL MODEL CONSTRUCTION

M.V. Sysoeva, T.V. Dikanev, I.V. Sysoev

The task is considered of taking into account the multiple time scales of original time series, with these time series being used for Granger causality estimation. It is proposed to use the combination of prediction length and lag, different in value, that could be fruitful for comparatively short times series, e. g. of medical-biological nature. The automated methods are constructed to select lag and prediction length values. The proposed approach is tested on a set of examples – ethalon systems. Based on this consideration the concrete proposal for prediction length value is formulated.

Keywords: Model reconstruction from time series, optimal embedding, coupling analysis, nonlinear Granger causality.



Сысоева Марина Вячеславовна – родилась в Саратове (1987). Окончила Лицей № 37 (2005) и факультет нано- и биомедицинских технологий СГУ (2011). Магистр техники и технологии. В настоящее время – аспирант кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии. Научные интересы – анализ биологических сигналов методами математической статистики.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: bobrichkek@mail.ru



Диканев Тарас Викторович – родился в Саратове (1979). Окончил Лицей прикладных наук (1997). Окончил факультет нелинейных процессов СГУ (2002). Кандидат физико-математических наук (2005). До 2011 года – доцент кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии. В настоящее время – инженер компании Huawei Technologies. Научные интересы – реконструкция моделей по временным рядам, анализ временных рядов биологических систем. Автор более 40 публикаций.

Российское представительство компании
Huawei Technologies, Москва
E-mail: tvdikanev@yandex.ru



Сысоев Илья Вячеславович – родился в Саратове (1983). Окончил Лицей прикладных наук (1999) и факультет нелинейных процессов СГУ (2004). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (2007). Работал на кафедре электроники, колебаний и волн (2005–2007). В настоящее время – доцент базовой кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии. Научные интересы – исследование сигналов биологической природы методами нелинейной динамики, исследование эффективности и модернизация подходов к анализу сигналов. Автор более 40 публикаций.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: ivssci@gmail.com



ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕНЕРАТОРА НА ОСНОВЕ ДИОДА С АВТОЭМИССИОННЫМ КАТОДОМ И ФОТОННО-КРИСТАЛЛИЧЕСКИМ РЕЗОНАТОРОМ*

А.И. Бенедик

Представлены результаты теоретического анализа генератора на основе диода с автоэмиссионным катодом, помещенного в фотонно-кристаллический резонатор. Проведен анализ условий самовозбуждения генератора в приближении малого сигнала. Разработана нестационарная численная модель генератора, основанная на нестационарном уравнении возбуждения резонатора и методе «частиц в ячейке» для моделирования динамики электронного потока. Проведено численное моделирование процессов установления колебаний, результаты которого показывают возможность достижения достаточно высоких значений выходной мощности и электронного КПД.

Ключевые слова: Вакуумная микроэлектроника, автоэлектронная эмиссия, фотонно-кристаллический резонатор, метод «частиц в ячейке».

Введение

В последние годы в связи с развитием технологий вакуумной микроэлектроники (см., например, [1,2]) появились перспективы создания усилителей и генераторов – миниатюрных аналогов классических приборов вакуумной электроники: ламп бегущей волны, отражательных клистронов, клистронов бегущей волны, приборов со скрещенными полями и др. в миллиметровом и субмиллиметровом диапазоне [1–6]. В качестве источника электронов в подобных приборах предполагается использовать автоэмиссионные катоды, к достоинствам которых относят компактность и высокую плотность тока. В частности, в работах [7,8] был предложен перспективный генератор на основе диода с автоэмиссионным катодом, помещенного в фотонно-кристаллический резонатор (рис. 1). Фотонный кристалл представляет собой искусственную периодическую структуру из диэлектрических стержней. В кристалле имеется точечный дефект, играющий роль высокочастотного резонатора. В резонаторе возбуждается мода TM_{110} , частота которой находится в полосе непропускания фотонно-кристаллической структуры. Также в кристалле имеется дефект для вывода энергии.

*Статья написана по материалам доклада на Школе-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2011» Саратов, 25–28.10.2011, 15–16.11.2011.

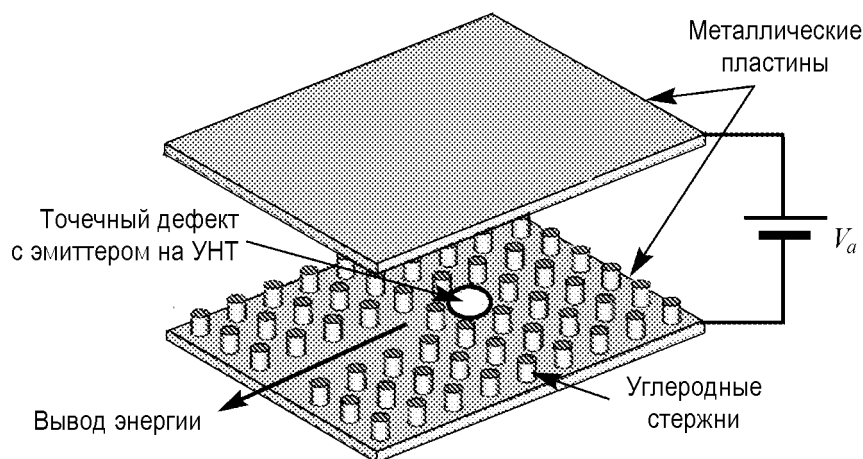


Рис. 1. Схема диода с автоэмиссионным катодом и фотонно-кристаллическим резонатором

Диод состоит из двух металлических пластин – катода и анода, между которыми прикладывается напряжение смещения. На поверхности катода в центре резонатора помещается автоэлектронный эмиттер. Следуя [7, 8], считаем, что эмиттер представляет собой пленку из углеродных нанотрубок (УНТ).

Отметим, что аналогичные по принципу действия приборы предлагались и ранее (см., например, [9–11]). Однако конструкция, использующая фотонно-кристаллический резонатор, представляется весьма удобной по сравнению с обычным металлическим объемным резонатором, поскольку диэлектрические стержни, образующие боковые стенки резонатора, одновременно служат изолятором, и источник анодного напряжения может быть подключен непосредственно к катодной и анодной пластинам [7, 8]. Современные технологии позволяют изготавливать фотонно-кристаллические резонаторы миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов длин волн, обладающие высокой добротностью. В последние годы активно изучается возможность создания колебательных и волноведущих систем на основе фотонных кристаллов для различных СВЧ-приборов: гиротронов, отражательных клистронов, ламп бегущей волны и т.д. [12–16].

В настоящей работе проводится теоретический анализ генератора, предложенного в работах [7, 8]. Проведен анализ условий самовозбуждения генератора в приближении малого сигнала. Разработана численная модель генератора, основанная на нестационарном уравнении возбуждения резонатора и методе «частиц в ячейке» для моделирования динамики электронного потока. Проведено численное моделирование процессов установления колебаний, результаты которого показывают возможность достижения достаточно высоких значений выходной мощности и электронного КПД.

1. Условия самовозбуждения генератора

Линейная теория диода с автоэмиссионным катодом развивалась в ряде работ (см., например, [10, 11]). Следуя этим работам, считаем, что между катодом и анодом приложено постоянное напряжение V_a и высокочастотное напряжение $V_1 \exp(i\omega t)$,

тогда уравнение движения электрона без учета сил пространственного заряда запишется следующим образом:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{e}{md} (V_a + \operatorname{Re}(V_1 e^{i\omega t})). \quad (1)$$

Здесь v , e и m – скорость, заряд и масса электрона, соответственно; d – расстояние между катодом и анодом. В приближении малого сигнала ($\xi = V_1/V_a \ll 1$) после интегрирования уравнения движения стандартными методами можно получить выражение для мощности взаимодействия электронов с высокочастотным полем резонатора

$$P_e = P_0 |\xi|^2 (GF_1(\varphi) + F_2(\varphi)), \quad (2)$$

где $P_0 = I_a V_a$ – постоянная мощность электронного пучка, $G = (V_a/I_a) (dI/dV)|_{V_a}$ – нормированная крутизна вольт-амперной характеристики диода, $\varphi = 2\omega d/v_a$ – угол пролета электронов, $v_a = \sqrt{2eV_a/m}$ – скорость, с которой электроны достигают анода, а функции $F_{1,2}$ определяются выражениями

$$F_1(\varphi) = \frac{(1 + i\varphi)e^{-i\varphi} - 1}{\varphi^2}, \quad (3)$$

$$F_2(\varphi) = \frac{2(1 - e^{-i\varphi}) - i\varphi(1 + e^{-i\varphi})}{\varphi^2}. \quad (4)$$

Функция $F_1(\varphi)$ отвечает вкладу модуляции эмиссии, функция $F_2(\varphi)$ – вкладу инерционной группировки электронов за счет скоростной модуляции (так называемый монотронный эффект). Эти функции хорошо известны в СВЧ-электронике (см., например, [17, 18]). Графики действительных и мнимых частей этих функций приведены на рис. 2. Области, в которых действительные части $F_{1,2}(\varphi)$ отрицательны, соответствуют передаче энергии электронного потока высокочастотному полю резонатора ($\operatorname{Re} P_e < 0$). При достаточно больших значениях нормированной проводимости G эффект модуляции эмиссии доминирует. При этом оптимальным будет угол пролета, при котором функция $F_1(\varphi)$ достигает минимума, $\varphi \approx 4\pi/3$. Если $G \ll 1$, доминирующим становится монотронный эффект и оптимальный угол пролета соответствует минимуму функции $F_2(\varphi)$, $\varphi \approx 2.4\pi$.

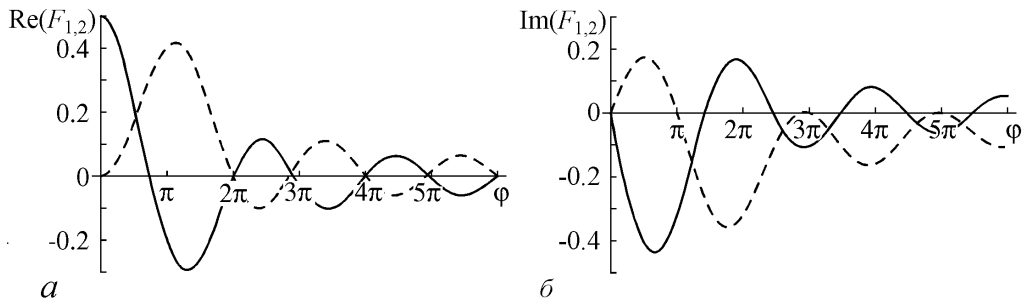


Рис. 2. Действительные (а) и мнимые (б) части функций F_1 (сплошная линия) и F_2 (пунктир) в зависимости от угла пролета $\varphi = 2\omega d/v_0$

Далее подставим выражение (2) в уравнение возбуждения резонатора, которое в энергетической форме имеет вид (см., например, [18, 19])

$$\frac{dW}{dt} + \left[2i(\omega - \omega_0) + \frac{\omega_0}{Q} \right] W = -P_e, \quad (5)$$

где $W = V_a^2 \xi^2 / (2\omega_0 Z_0)$ – энергия электромагнитного поля; ω_0 , Q и Z_0 – собственная частота, добротность и характеристическое сопротивление резонатора, соответственно; ω – частота генерации. В стационарном режиме ($dW/dt = 0$), разделяя действительную и мнимую части, можно получить выражения для стартового тока и частоты генерации

$$I_a = -\frac{V_a}{2QZ_0 \operatorname{Re} [GF_1(\varphi) + F_2(\varphi)]}, \quad (6)$$

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{Z_0 I_a \operatorname{Im} [GF_1(\varphi) + F_2(\varphi)]}{V_a} \right). \quad (7)$$

Заметим, что (7) является трансцендентным уравнением относительно ω , поскольку угол пролета φ , в свою очередь, зависит от частоты. Однако, если считать, что безразмерный параметр возбуждения $\varepsilon \equiv I_a Z_0 / V_a \ll 1$, можно в первом приближении получить следующее выражение для частоты генерации:

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2Q} \frac{\operatorname{Im} [GF_1(\varphi_0) + F_2(\varphi_0)]}{\operatorname{Re} [GF_1(\varphi_0) + F_2(\varphi_0)]} \right), \quad (8)$$

где $\varphi_0 = 2\omega_0 d / v_a \approx \varphi$.

Оценим стартовый ток генератора, параметры которого приведены в таблице. Они примерно соответствуют параметрам устройства, описанного в [8]. Считаем, что вольт-амперная характеристика автоэмиссионного катода подчиняется закону Фаулера–Нордгейма

$$I(V) = a_{\text{FN}} V^2 \exp\left(-\frac{b_{\text{FN}}}{V}\right) \quad (9)$$

при $V > 0$, где a_{FN} , b_{FN} – постоянные, зависящие от формы и материала эмиттера (подробнее см. [1]). Отсюда находим, что $G = 2 + b_{\text{FN}}/V$. Для автоэмиссионного катода из УНТ, описанного в [8], при напряженности поля на поверхности

катода $E_0 = 5$ МВ/м, что соответствует анодному напряжению 10 кВ, находим, что $G = 5$. В этом случае модуляция эмиссии доминирует над скоростной модуляцией. Тогда оптимальное значение статического угла пролета $\varphi_0 \sim 4\pi/3$, при этом $-\operatorname{Re} [F_1(\varphi_0)] \sim \sim 0.25 \dots 0.3$, так что условие самовозбуждения (6) можно переписать в виде

$$\varepsilon Q G \approx -\frac{1}{2 \operatorname{Re} F_1(\varphi_0)} \sim 2. \quad (10)$$

Параметры генератора

Расстояние между катодом и анодом d , мм	2
Поперечные размеры резонатора, мм	20
Ускоряющее напряжение, кВ	10
Частота резонатора, ГГц	10
Волновое сопротивление, Ом	36
Добротность резонатора	1000

Отсюда для параметров, приведенных в таблице, находим, что минимальный стартовый ток $I_{st} \sim 110\text{мА}$.

На рис. 3 представлены границы самовозбуждения на плоскости параметров (φ_0, ε) для первых двух зон генерации. Сплошной и пунктирной линиями показаны теоретические кривые, построенные с учетом и без учета скоростной модуляции электронов, соответственно. Видно, что различие между этими кривыми в первой зоне невелико, так что для оценки стартового тока в первом приближении можно пренебречь функцией $F_2(\varphi)$ в формуле (6). Кружками на этом рисунке показаны результаты численного моделирования, которые полностью согласуются с теоретическими при учете скоростной модуляции.

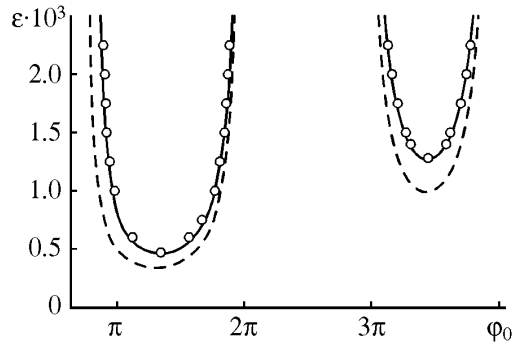


Рис. 3. Зависимость безразмерного параметра возбуждения $\varepsilon = I_a Z_0 / V_a$, при котором происходит самовозбуждение генератора, от угла пролета

2. Методика и результаты численного моделирования

Для моделирования процесса взаимодействия электронного потока с полем объемного резонатора была разработана программа, основанная на использовании нестационарной теории возбуждения резонаторов [19,20] и известного метода «частиц в ячейке» (см., например, [21]), который хорошо зарекомендовал себя в электронике СВЧ и физике плазмы. Аналогичная методика ранее с успехом использовалась при моделировании нестационарных явлений в других приборах СВЧ-электроники с колебательными системами резонансного типа, в частности, в отражательном клистроне [22] и лампе бегущей волны с цепочкой связанных резонаторов [23].

Продольная компонента напряженности высокочастотного поля резонатора представляется в виде $E(x, y, z, t) = \mathcal{E}(t) E_s(x, y, z)$, где $\mathcal{E}(t)$ – безразмерная амплитуда, а функция E_s , задающая распределение поля в пространстве, соответствует моде TM_{110} :

$$E_s = \frac{V_a}{d} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right).$$

Амплитуда $\mathcal{E}(t)$ подчиняется нестационарному уравнению возбуждения резонатора [19,20]

$$\frac{d^2 \mathcal{E}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\mathcal{E}}{dt} + \omega_0^2 \mathcal{E} = -\frac{1}{N_s} \frac{d}{dt} \int_V j_z E_s dV, \quad (11)$$

где $N_s = \varepsilon_0 \int E_s^2 dV$ – норма колебания, j_z – продольная составляющая плотности тока пучка. Удобно ввести новую переменную $A(t)$, такую что $\mathcal{E} = -(1/\omega_0)(dA/dt)$, то есть A фактически есть безразмерная амплитуда векторного потенциала. Движение электронов будем считать одномерным, а поперечные размеры пучка достаточно небольшими, чтобы зависимостью тока от поперечных координат можно было пре-

небречь. Тогда уравнение (11) принимает вид

$$\frac{d^2 A}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dA}{dt} + \omega_0^2 A = \frac{\omega_0}{N_s} \int_0^d I(z, t) E_s dz, \quad (12)$$

где I – ток пучка. Уравнение возбуждения (12), как и уравнения движения электронов, решается при помощи известной схемы с перешагиванием второго порядка точности [21].

Аналогично [10,11] граничные условия для электронов ставились следующим образом: скорости «крупных частиц», вылетающих с катода, полагались нулевыми, а заряды определялись исходя из закона эмиссии (9): $q_i = I(E(z=0; t_i)) \Delta t$, где $E(z=0; t_i)$ – поле на катоде в момент вылета i -й частицы, Δt – интервал времени между вылетом двух соседних частиц.

Расчеты показывают, что условия самовозбуждения автоколебаний в точности совпадают с найденными теоретически с учетом вклада скоростной модуляции (см. рис. 3). Минимальное значение стартового тока в центре первой зоны генерации составляет 129 мА, что несколько выше оценки, сделанной в разд. 1 в пренебрежении скоростной модуляцией. Зафиксируем параметры резонатора такими, чтобы оптимальный угол пролета соответствовал напряжению 10 кВ, и будем постепенно увеличивать анодное напряжение. На рис. 4 представлены графики электронной мощности взаимодействия и электронного КПД в зависимости от анодного напряжения. Мощность определялась по формуле $P = \mathcal{V}^2 / (2QZ_0)$, где \mathcal{V} – амплитуда колебаний высокочастотного напряжения, которая выделялась при помощи преобразования Гильберта [24]. С увеличением напряжения мощность и КПД вначале растут, поскольку увеличивается ток катода (причем как постоянная, так и переменная составляющая, поскольку крутизна вольт-амперной характеристики растет с увеличением V_a).

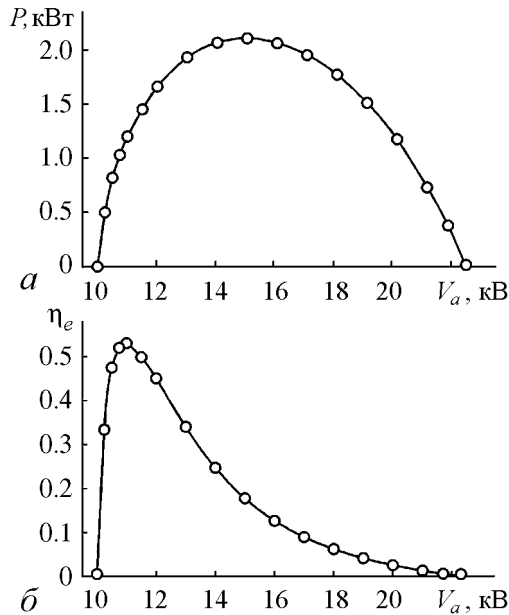


Рис. 4. Зависимость электронной мощности (а) и электронного КПД (б) от анодного напряжения

Однако угол пролета с ростом напряжения уменьшается и смещается от центра зоны генерации. Соответственно, наступает насыщение, затем снижение мощности и КПД. Наконец, когда мы выходим из зоны генерации, мощность и КПД обращаются в нуль. Типичное время установления колебаний составляет несколько микросекунд. Частота колебаний зависит от анодного напряжения (см. формулы (7), (8)), однако ее отличие от собственной частоты не превышает 0.2 %, что объясняется высокой добротностью резонатора.

Отметим, что при выбранных параметрах зона генерации является достаточно широкой по напряжению, а максимальные значения мощности и электронного КПД оказываются весьма высокими: $P \sim 2$ кВт, $\eta_e \sim 53\%$. При

этом ток катода не превышает 1 А. Если считать, что размеры эмитирующей УНТ-пленки составляют 1×1 см, то плотность тока не превышает 1 А/см^2 . Такие значения плотности тока представляются вполне достижимыми для существующих катодов на УНТ [25,26].

Заключение

Представленные результаты численного моделирования показывают, что генератор на основе диода с автоэмиссионным катодом, помещенного в фотонно-кристаллический резонатор, является достаточно перспективным прибором. Он позволяет рассчитывать на получение достаточно высоких значений мощности и КПД в сантиметровом диапазоне при умеренных плотностях токов порядка 1 А/см^2 , достижимых для существующих в настоящее время автоэмиссионных катодов [25,26]. Однако большинство полученных в настоящее время результатов относятся к катодам малого размера, где полный ток эмиссии также невелик (порядка единиц или десятков мА). С другой стороны, известно, что катоды на углеродных нанотрубках при работе в импульсном режиме и при высоких напряжениях порядка сотен киловольт способны в принципе обеспечивать большие токи порядка 1 кА [27].

Тем не менее следует отметить, что к представленным в работе количественным характеристикам генератора следует относиться с определенной осторожностью, так как используемая численная модель получена при ряде упрощающих предположений. Не учитывалась неоднородность электрического поля вблизи эмитирующей поверхности, влияние сил пространственного заряда, поперечное движение электронов. Все эти факторы будут снижать эффективность взаимодействия [10,11]. Их учет будет являться предметом дальнейшей работы. Также открытым остается вопрос о возможности продвижения в область более высоких частот, поскольку по мере уменьшения размеров резонатора и анодного напряжения повышаются требования к характеристикам катода.

Автор выражает благодарность профессору кафедры нелинейной физики, д.ф.-м.н. Рыскину Н.М. за поддержку и полезное обсуждение работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 11-02-01280а.

Библиографический список

1. Трубецков Д.И., Рожнев А.Г., Соколов Д.В. Лекции по сверхвысокочастотной вакуумной микроэлектронике. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996.
2. Ives R.L. Microfabrication of high-frequency vacuum electron devices // IEEE Trans. Plasma Sci. 2004. Vol. 32, № 3. P. 1277.
3. Rozhnev A.G., Ryskin N.M., Sokolov D.V., Trubetskov D.I., Han S.-T., Kim J.-I., Park G.-S. Novel concepts of vacuum microelectronic microwave devices with field emitter cathode arrays // Phys. Plasmas. 2002. Vol. 9, № 9. P. 4020.
4. Han S.-T., Jeon S.-G., Shin Y.-M., Jang K.-H., So J.-K., Kim J.-H., Chang S.-S., Park G.-S. Experimental investigations on miniaturized high-frequency vacuum electron devices // IEEE Trans. Plasma Sci. 2005. Vol.33, № 2. P. 679.

5. *Srivastava V.* THz vacuum microelectronic devices // *J. Phys.: Conf. Series.* 2007. Vol. 114, № 1. 012015.
6. *Ryskin N.M., Han S.-T., Jang K.-H., Park G.-S.* Theory of the microelectronic traveling wave klystron amplifier with field-emission cathode array // *Phys. Plasmas* 2007. Vol. 14, № 9, 093106.
7. *Han S.-T.* A high-frequency monotron employing two-dimensional, dielectric photonic-crystal, diode resonator // 35th Int. Conf. Infrared Millim. Terahertz Waves (IRMMW-THz). Rome, Italy, 2010.
8. *Han S.-T.* Numerical study on radio-frequency field emission from carbon nanotube film in a photonic crystal diode resonator // *J. Korean Phys. Soc.* 2011. Vol. 59, № 1. P. 141.
9. *Yokoo K., Ishihara T.* Field emission monotron for THz emission // *Int. J. Infrared Millim. Waves.* 1997. Vol. 18, № 6. P. 1151.
10. *Солнцев В.А., Галдецкий А.В., Клеев А.И.* Приборы вакуумной СВЧ микроэлектроники со средним углом пролета // Лекции по СВЧ электронике и радиофизике. 10-я зимняя школа-семинар. Кн. 1, Ч. I. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996. С. 76.
11. *Солнцев В.А.* Нелинейные явления в вакуумных микроэлектронных структурах // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1998. Т. 6, № 1. С. 54.
12. *Sirigiri J.R., Kreischer K.E., Machuzak J., Mastovsky I., Shapiro M.A., Temkin R.J.* Photonic-band-gap resonator gyrotron // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 86, № 24. P. 5628.
13. *Jeon S.-G., Shin Y.-M., Jang K.-H., Han S.-T., So J.-K., Joo Y.-D., Park G.-S.* High order mode formation of externally coupled hybrid photonic-band-gap cavity // *Appl. Phys. Lett.* 2007. Vol. 90, № 2. 021112.
14. *Jang K.-H., Jeon S.-G., Kim J.-I., Won J.-H., So J.-K., Bak S.-H., Srivastava A., Jung S.-S., Park G.-S.* High order mode oscillation in a terahertz photonic-band-gap multibeam reflex klystron // *Appl. Phys. Lett.* 2008. Vol. 93, № 21. 211104.
15. *Liu X., Lei H., Yu T., Feng J., Liao F.* Characteristics of terahertz slow-wave system with two-dimensional photonic band-gap structure // *Optics Communications.* 2008. Vol. 281, № 1. P. 102.
16. *Gong Y., Yin H., Wei Y., Yue L., Deng M., Lu Zh., Xu X., Wang W., Liu P., Liao F.* Study of traveling wave tube with folded-waveguide circuit shielded by photonic crystals // *IEEE Trans. Electron Devices.* 2010. Vol. 57, № 5. P. 1137.
17. *Шевчик В.Н.* Основы электроники сверхвысоких частот. М.: Сов. радио, 1959.
18. *Гайдук В.И., Палатов К.И., Петров Д.М.* Физические основы электроники сверхвысоких частот. М.: Сов. радио, 1971.
19. *Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М.: Сов. радио, 1973.
20. *Шевчик В.Н., Трубецков Д.И.* Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М.: Сов. радио, 1970.
21. *Бэдсел Ч., Ленгдон А.* Физика плазмы и численное моделирование / Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1989.

22. *Титов В.Н., Волков Д.В., Яковлев А.В., Рыскин Н.М.* Отражательный клистрон как пример автоколебательной системы с запаздыванием // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 6. С. 138.
23. *Ryskin N.M., Titov V.N., Yakovlev A.V.* Nonstationary nonlinear discrete model of a coupled-cavity traveling-wave-tube amplifier // IEEE Trans. Electron Devices. 2009. Vol. 56, № 5. P. 928.
24. *Вайнштейн Л.А., Вакман Д.Е.* Разделение частот в теории колебаний и волн. М.: Наука, 1983.
25. *Milne W.I., Teo K.B.K., Minoux E., et al.* Aligned carbon nanotubes/fibers for applications in vacuum microwave amplifiers // J. Vac. Sci. Technol. B. 2006. Vol. 24, № 1. P. 345.
26. *Calderon-Colon X., Geng H., Gao D., An L., Cao G., Zhou O.* A carbon nanotube field emission cathode with high current density and long-term stability // Nanotechnology. 2009. Vol. 20, 325707.
27. *Shiffler D., Zhou O., Bower C., LaCour M., Golby K.* A high-current, large-area, carbon nanotube cathode // IEEE Trans. Plasma Sci. 2004. Vol. 32, № 5. P. 2152.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 22.02.2012

NUMERICAL SIMULATION OF THE FIELD EMISSION DIODE OSCILLATOR WITH PHOTONIC CRYSTAL RESONATOR

A.V. Benedik

Results of the theoretical analysis of the diode oscillator with a field-emission cathode placed in a photonic crystal resonator are considered. The analysis of conditions of self-excitation in the small signal approximation is carried out. The nonstationary numerical model of the oscillator based on the nonstationary equation of excitation of the resonator and the particle-in-cell method is developed. Numerical simulation of the processes of oscillation build-up is performed. The simulation shows rather high output power and efficiency for reasonable values of cathode current density.

Keywords: Vacuum microelectronics, field emission, photonic crystal resonator, particle-in-cell simulation.



Бенедик Андрей Иванович – родился в городе Мукачево Западной Украины (1990). Окончил Лицей прикладных наук Саратова (2008). Студент 4-го курса факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Область научных интересов – численное моделирование нелинейных явлений в приборах вакуумной СВЧ-электроники.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: andrej-benedik@yandex.ru



**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ
ДИНАМИКИ МНОГОРЕЗОНАТОРНОГО КЛИСТРОННОГО
ГЕНЕРАТОРА С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ
МЕТОДОМ «ЧАСТИЦ В ЯЧЕЙКЕ»***

В.В. Емельянов

Разработана 1.5-мерная программа численного моделирования нелинейных нестационарных процессов в приборах клистронного типа, основанная на нестационарной дискретной теории возбуждения резонаторов Л.А. Вайнштейна и методе «частиц в ячейке» для моделирования динамики электронного пучка. Представлены результаты численного моделирования основных режимов колебаний четырехрезонаторного клистронного генератора с внешней запаздывающей обратной связью. Полученные результаты подтверждают качественную картину поведения генератора, изученную ранее для упрощенных теоретических моделей в виде дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, а также позволяют определить значения выходных параметров (мощность, КПД, ширина спектра и т.д.), важных с практической точки зрения.

Ключевые слова: Многорезонаторный пролетный клистрон, запаздывающая обратная связь, метод «частиц в ячейке», самовозбуждение, автомодуляция, хаос, бифуркация удвоения периода.

Введение

Многорезонаторные пролетные клистроны широко используются как высоко-мощные усилители и генераторы в ускорителях элементарных частиц, системах связи, радиолокации и т.д. [1–4]. В последние годы клистронные генераторы с внешней запаздывающей обратной связью (ЗОС) привлекли внимание как перспективные источники детерминированных хаотических сигналов, которые могут найти применение в новых типах коммуникационных и радиолокационных систем. Сложная динамика подобных генераторов исследовалась как теоретически, так и экспериментально (см., например, [5–9]). Основным инструментом теоретических исследований является компьютерное моделирование, которое в работах [5–9] проводилось для упрощенных математических моделей на основе дифференциальных уравнений

*Статья написана по материалам доклада на Школе-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2011» Саратов, 25–28.10.2011, 15–16.11.2011.

с запаздыванием. Такие модели хорошо описывают качественную картину поведения генераторов, однако для достоверного количественного определения важных с практической точки зрения характеристик прибора, таких как выходная мощность, КПД, время переходного процесса и др., следует использовать более строгие математические модели, основанные на традиционных для СВЧ-электроники методах «крупных частиц» [1–3] (см., в частности, обсуждение этого вопроса на примере отражательного клистрона в [10]). В настоящей работе моделирование нелинейной динамики многорезонаторного клистрона-генератора с ЗОС проводится на основе нестационарной теории возбуждения резонаторов Л.А. Вайнштейна [3] и метода «частиц в ячейке» [11,12], который хорошо себя зарекомендовал при решении многих задач электроники, гидродинамики и физики плазмы.

1. Математическая модель многорезонаторного клистрона-генератора

Принципиальная схема исследуемого генератора приведена на рис. 1. Генератор состоит из многорезонаторного пролетного клистрона, выходной резонатор которого соединен с входным посредством широкополосной бездисперсионной линии обратной связи, в которую включены направленный ответвитель, регулируемые аттенуатор и фазовращатель для плавного изменения глубины обратной связи ρ и набега фазы φ проходящего сигнала, соответственно.

Для численного моделирования была разработана программа, осуществляющая решение самосогласованной задачи о взаимодействии электронного пучка с электромагнитными полями резонаторов. Совместно решаются уравнения движения частиц и уравнения возбуждения резонаторов. Используемый численный алгоритм аналогичен описанному в работах [10,13], где исследовались отражательный клистрон и лампа бегущей волны с цепочкой связанных резонаторов, соответственно. Для моделирования динамики электронного пучка применяется метод «частиц в ячейке» [11,12]. Решение уравнений движения осуществляется по схеме с перешагиванием второго порядка точности, описанной в [11]. Движение электронов полагается одномерным, то есть считается, что электронный пучок полностью сфокусирован внешним продольным магнитным полем, однако при вычислении поля сил пространственного заряда учитывается ограниченность электронного пучка в поперечном направлении. Подобные численные модели принято называть 1.5-мерными.

Поля резонаторов рассчитывались на основе нестационарной теории возбуждения резонаторов током медленно меняющейся амплитуды [3]; при этом поля представлялись в виде квазимонохроматических колебаний с комплексными амплитудами $C_j(t)$, медленно меняющимися по сравнению с собственными частотами ω_j : $E_j = \text{Re}[C_j(t) E_s(x - d_j) \exp(i\omega_j t)]$, где j – номер резонатора, функция E_s описывает распределение поля в зазоре резонатора, d_j – координата центра зазора.

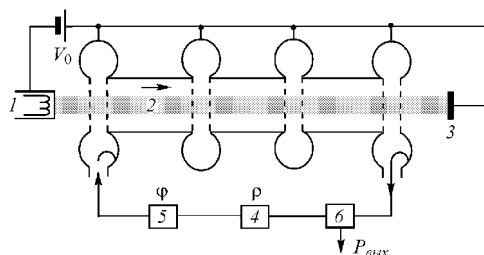


Рис. 1. Принципиальная схема клистронного генератора. 1 – катод, 2 – электронный пучок, 3 – коллектор, 4 – аттенуатор, 5 – фазовращатель, 6 – направленный ответвитель, V_0 – ускоряющее напряжение

Рассматривались различные варианты распределения поля в зазорах, однако результаты численного моделирования зависят, в основном, от значения коэффициента эффективности скоростной модуляции

$$M = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} [E_s(x) \exp(i\beta_e x)] dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |E_s(x)| dx},$$

где $\beta_e = \omega_j/v_0$, v_0 – скорость электронов, а влияние формы поля незначительно. Для определенности ниже приводятся результаты моделирования для случая прямоугольного распределения полей в резонаторах.

Уравнения возбуждения резонаторов численно интегрируются методом «предиктор-корректор» второго порядка точности. При этом начальные условия для комплексных амплитуд полей $C_j(t)$ задаются в виде малых случайных возмущений, что моделирует самовозбуждение генератора от шумовых флуктуаций.

2. Результаты численного моделирования

Для численного моделирования были выбраны параметры, близкие к параметрам генератора, исследовавшегося экспериментально [5–8], однако для сокращения времени расчетов и упрощения настройки промежуточных резонаторов моделирование проводилось для случая четырех-, а не пятирезонаторного клистрона. Значения параметров приведены в таблице.

Параметры четырехрезонаторного клистрона-генератора

Ускоряющее напряжение, В	1500
Расстояние между центрами резонаторов, мм	20
Радиус пучка, мм	2
Собственная частота входного и выходного резонаторов, МГц	2795
Холодная добротность резонаторов	460
Нагруженная добротность входного резонатора	250
Нагруженная добротность выходного резонатора	125
Характеристическое сопротивление резонаторов	300
Коэффициент ослабления выходной мощности в цепи ЗОС, дБ	30
Время распространения сигнала по линии ЗОС, нс	10

Сначала рассмотрим случай идентичной настройки собственных частот промежуточных резонаторов $f_{2,3} = 2795$ МГц. На рис. 2, а приведена граница самовозбуждения генератора (кривая 1) и порог возникновения автомодуляции (кривая 2) на плоскости параметров «набег фазы в линии ЗОС φ – ток электронного пучка I ». В области между кривыми 1 и 2 устанавливается режим стационарной одночастотной генерации. Выше кривой 2 стационарный режим теряет устойчивость и устанавливается режим автомодуляции. Границы имеют периодический характер по фазе φ , то есть на плоскости параметров имеется система дискретно расположенных зон генерации, расширяющихся с ростом тока электронного пучка. Такая картина носит общий характер для автогенераторов с запаздыванием (см., например, [6–10, 13–16]).

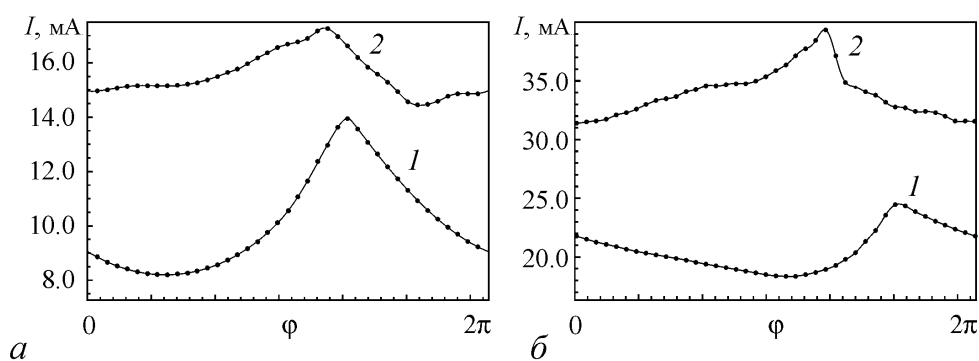


Рис. 2. Границы самовозбуждения генератора (1) и кривые порога возникновения автомодуляции (2) на плоскости параметров (φ, I) при идентичной (а) и неидентичной (б) настройке промежуточных резонаторов

Вблизи границ зон генерации наблюдается бистабильность, то есть сосуществование двух режимов генерации с разными частотами. При плавном изменении фазы φ происходят жесткие переходы с одной собственной моды на другую, сопровождающиеся гистерезисом. Это хорошо видно на рис. 3, где представлена зависимость частоты генерации от фазы в линии ЗОС. Область гистерезиса заключена на рисунке между штриховыми вертикальными линиями. Это также общее свойство автоколебательных систем с запаздыванием [6–9, 14–16].

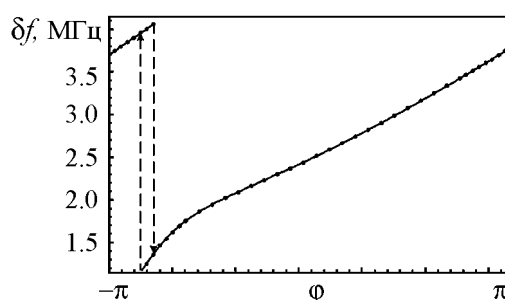


Рис. 3. Зависимость отстройки частоты генерации $\delta f = f - f_1$ от набега фазы φ в линии ЗОС. Штриховыми линиями показаны жесткие переходы с одной моды на другую

Рассмотрим последовательность смены режимов генерации по мере увеличения тока электронного пучка. Остановимся на случае $\varphi \approx 1.413$, что соответствует центру зоны генерации, где стартовый ток минимален (см. рис. 2, а). На рис. 4, а представлена зависимость среднего значения выходной мощности генератора от тока пучка. Под выходной мощностью здесь и далее принимается мощность, отдаваемая в нагрузку, которая определяется по формуле

$$P_{\text{вых}} = \left(1 - \frac{Q_L}{Q_0}\right) P_{\text{ea}},$$

где Q_0, Q_L – холодная и нагруженная добротность, соответственно; P_{ea} – активная мощность взаимодействия пучка с полем выходного резонатора.

Римскими цифрами на рис. 4 отмечены разные режимы генерации прибора. В области I устанавливается режим стационарной одночастотной генерации. При росте тока он сменяется режимом периодической автомодуляции (область II). Автомодуляция возникает мягко в соответствии с амплитудным механизмом, что согласуется с результатами работ [5–9]. Данный механизм обусловлен тем, что амплитудная характеристика клистрона (зависимость выходной мощности от входной) в области больших входных сигналов имеет достаточно крутой падающий участок.

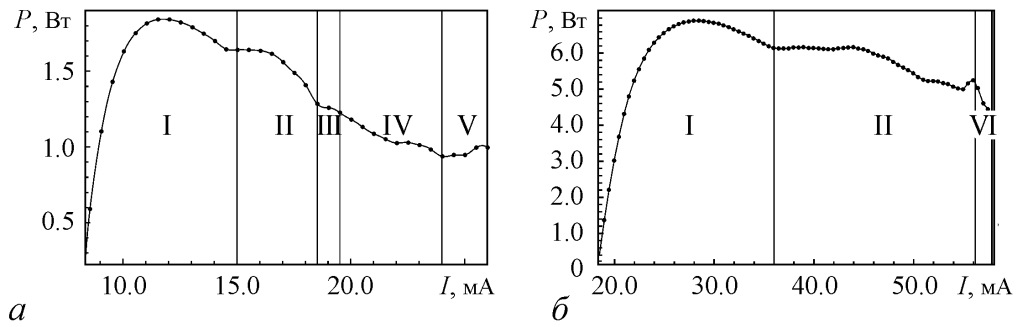


Рис. 4. Зависимости среднего значения выходной мощности генератора от тока пучка при идентичной (а) и неидентичной (б) настройке промежуточных резонаторов. Вертикальные сплошные линии разграничивают области, отвечающие различным режимам генерации прибора

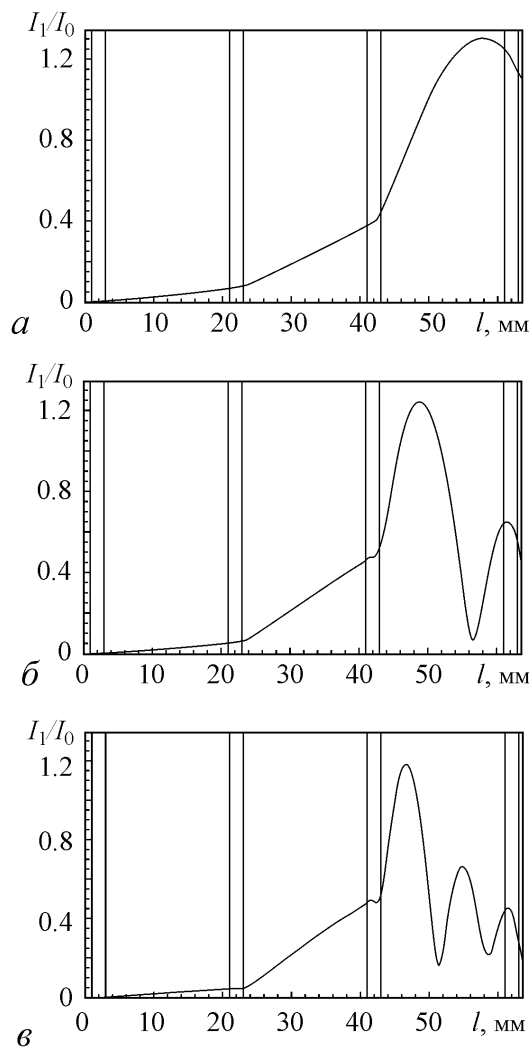


Рис. 5. Пространственные распределения первой гармоники сгруппированного тока вдоль длины прибора в режимах стационарной одночастотной генерации при токе пучка I (мА): 14 (а), 18.8 (б), 25.5 (в)

Физической причиной, приводящей к появлению падающего участка, является кинематическая перегруппировка электронов, которая, как известно, является одним из основных нелинейных эффектов в приборах О-типа [1–4].

По аналогии с работами [5–9] следовало бы ожидать, что дальнейшее увеличение тока приведет к последовательности бифуркаций удвоения периода и переходу к хаосу. Однако вместо этого при $I \approx 18.5$ мА вновь восстанавливается стационарный режим, но уже с другим распределением первой гармоники сгруппированного тока. На рис. 5 представлены распределения первой гармоники тока вдоль длины прибора (вертикальными сплошными линиями обозначены положения резонаторов). Если в области I перегруппировка пучка возникает лишь перед выходным резонатором (рис. 5, а), то в области III сгустки успевают практически полностью разгруппироваться, после чего начинается образование вторичных сгустков (рис. 5, б). При дальнейшем увеличении тока можно наблюдать режимы, в которых появляются три (рис. 5, в; область V на рис. 4, а) и большее количество максимумов первой гармоники. Возникновение стационарных состояний с двумя, тремя максимумами и более происходит жестко. Такое поведение хорошо согла-

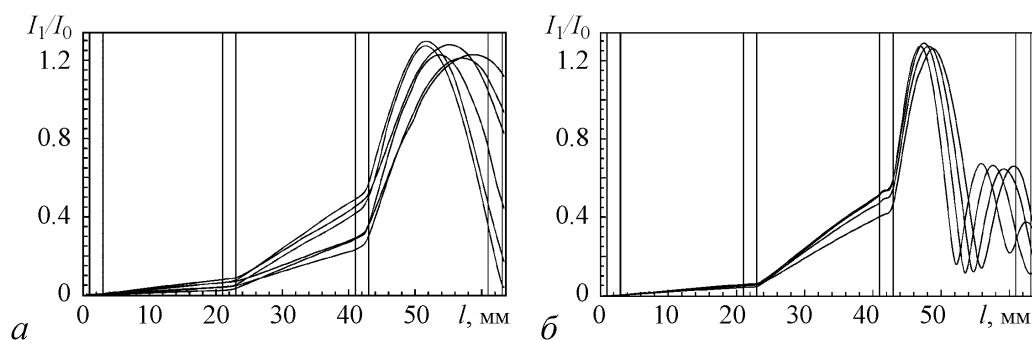


Рис. 6. Пространственные распределения первой гармоники сгруппированного тока вдоль длины прибора в различные моменты времени в режимах автомодуляции при I (мА): 15.5 (*a*), 25 (*б*)

суется с предсказанным в работах [6,10,14,19] для упрощенных моделей типа дифференциальных уравнений с запаздыванием. Отметим, что, поскольку глубина обратной связи мала, эффекты насыщения и перегруппировки проявляются, в основном, лишь в последнем каскаде, то есть приближение линейности промежуточных каскадов, использованное в [6], выполняется.

В режимах автомодуляции (области II и IV на рис. 4, *a*) наблюдаются периодические осцилляции выходной мощности, причем распределения первой гармоники тока вдоль системы носят различный характер: в области II в пространстве дрейфа присутствует лишь один максимум (рис. 6, *a*), в области IV начинается образование вторичных сгустков и наблюдается два, а в отдельные моменты времени даже три максимума (рис. 6, *б*). Соответственно, по-разному выглядят зависимости выходной мощности от времени (рис. 7). В первом случае практически сразу устанавливается глубокая модуляция выходного сигнала. Во втором наблюдается более длительный переходный процесс, начинающийся с резкого всплеска выходной мощности. Затем устанавливаются автомодуляционные колебания, форма которых усложняется, а средняя мощность заметно уменьшается по сравнению с первым случаем. Очевидно, что это обусловлено различной пространственной структурой распределений первой гармоники тока. В ходе переходного процесса вначале устанавливается распределение с одним максимумом и амплитуда сигнала резко возрастает. Однако затем на вход усилителя поступает сигнал большой мощности, возникает перегруппировка и устанавливается режим с двумя максимумами первой гармоники. Мощность в таком режиме резко падает. Здесь можно усмотреть аналогию с релятивистской лампой обратной волны, где начальный этап переходного процесса также характеризуется резким всплеском амплитуды поля, обусловленным конкуренцией различных собственных мод (см., например, [17,18]). Вообще следует отметить, что для распределенных волновых систем электронной природы типичным сценарием поведения по мере увеличения тока пучка являются многократные переходы меж-

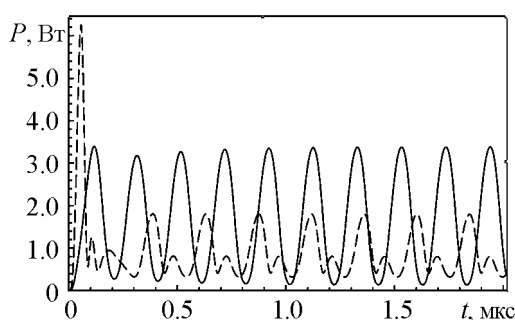


Рис. 7. Зависимости выходной мощности генерации от времени при $I = 15.5$ мА (сплошная линия), 25 мА (штриховая линия)

ду различными режимами (одночастотными, многочастотными, хаотическими), обусловленные процессами конкуренции пространственно-временных структур, то есть электронных сгустков [17–20]. Наиболее наглядно об этих процессах можно судить, анализируя пространственно-временные распределения гармоник тока.

Таким образом, типичный для клистронных генераторов каскад бифуркаций удвоения периода при идентичных собственных частотах резонаторов не наблю-

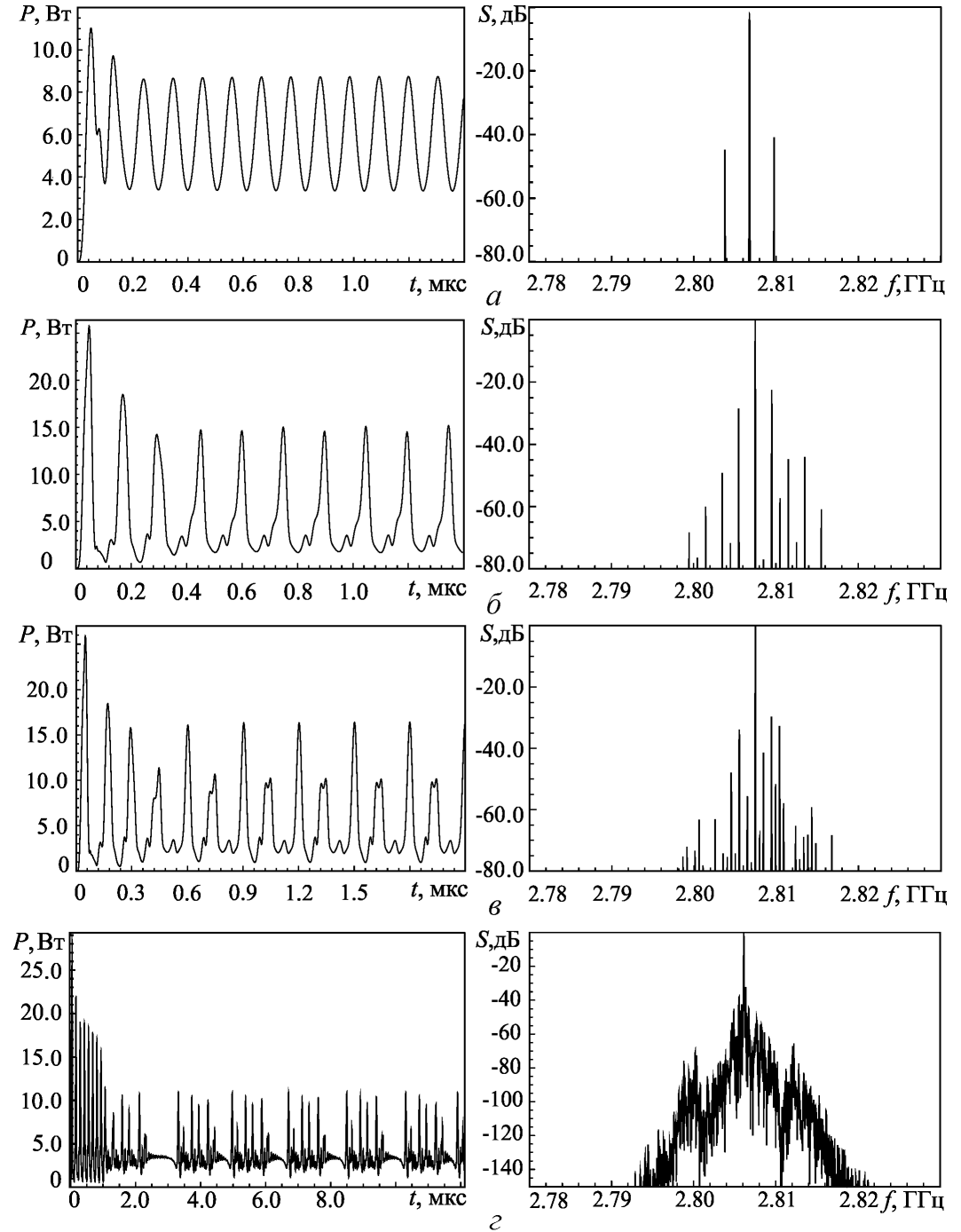


Рис. 8. Зависимости выходной мощности генератора от времени (слева) и спектры выходных сигналов (справа) при I (mA): 36.5 (а), 51.0 (б), 52.0 (в), 57.2 (г)

дается. Его появлению препятствует очень сильная перегруппировка, приводящая к появлению высших стационарных состояний с двумя, тремя и т.д. максимумами первой гармоники. Выходная мощность в этих режимах резко падает. Значительного увеличения мощности удастся добиться, вводя расстройку собственных частот промежуточных резонаторов, если при этом расстраивать второй резонатор в сторону меньших, а третий – в сторону больших частот. Далее рассмотрим случай расстройки $f_2 = 2785$ МГц, $f_3 = 2805$ МГц, что примерно соответствует параметрам генератора, который использовался в эксперименте [5–7]. На рис. 2, б приведены границы самовозбуждения и автомодуляции для этого случая. Картина примерно аналогична представленной на рис. 2, а для случая синхронной настройки, однако бифуркационные значения тока оказываются приблизительно в два раза выше, что, очевидно, объясняется уменьшением коэффициента усиления при введении расстройки. Однако, вместе с тем, насыщение сдвигается в область больших токов и, соответственно, выходная мощность существенно увеличивается. Это хорошо видно на рис. 4, б, где представлена зависимость мощности от тока электронного пучка. Максимальная выходная мощность составляет примерно 6.8 Вт, что в 3.5 раза больше, чем в случае синхронной настройки. С увеличением тока пучка возникает автомодуляция, а затем – каскад бифуркаций удвоения периода автомодуляции (область II на рис. 4, б). На рис. 8, а–в представлены зависимости выходной мощности генератора от времени и спектры выходных сигналов в автомодуляционных режимах, иллюстрирующие бифуркации удвоения периода. Как видно из рис. 4, б, средняя мощность постепенно уменьшается, однако гораздо медленнее, чем на рис. 4, а. Это можно объяснить тем, что расстройка частот препятствует перегруппировке электронов и, следовательно, образованию высших «горбов» первой гармоники тока.

Наконец, при $I \approx 57.2$ мА происходит переход к хаосу. Хаотические режимы наблюдаются в достаточно узкой области токов (область VI на рис. 4, б), а при дальнейшем увеличении тока электронного пучка начинается образование вторичных электронных сгустков и происходит переход к стационарному режиму с двумя максимумами первой гармоники, который аналогичен режиму, представленному на рис. 5, б. При этом происходит резкое падение мощности генерации. На рис. 8, г показан пример зависимости выходной мощности от времени и спектр выходного сигнала в хаотическом режиме. Наибольшая ширина спектра, наблюдавшаяся при численном моделировании, составляет примерно 30 МГц, однако спектр является достаточно неоднородным с ярко выраженной компонентой на основной частоте. Все эти особенности достаточно хорошо согласуются с результатами эксперимента [6, 7].

Заключение

В настоящей работе представлены результаты численного моделирования нелинейной динамики генератора на основе четырехрезонаторного пролетного клистрона с ЗОС. Используется программа, основанная на методе «частиц в ячейке» и нестационарной теории возбуждения резонаторов для случая узкополосных сигналов. Исследованы основные свойства колебательных режимов, наблюдаемых по мере увеличения тока электронного пучка. В целом результаты моделирования находятся в

хорошем соответствии с результатами, полученными ранее для приближенных математических моделей клистронных генераторов в виде систем дифференциальных уравнений с запаздыванием [5,6,8,9]. Однако разработанная программа позволяет построить значительно более реалистичную картину поведения генератора и рассчитать многие важные с практической точки зрения характеристики прибора, такие как выходная мощность, КПД, время переходного процесса и т.д. В частности, моделирование показало, что при синхронной настройке собственных частот промежуточных резонаторов уже при достаточно малых токах наступает сильная перегруппировка электронного пучка. В результате переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода автомодуляции не развивается, а происходит переход к стационарным режимам, в которых распределение гармоник тока вдоль системы имеет два максимума и более. Мощность генерации в таких режимах резко падает.

Введение расстройки частот промежуточных резонаторов сдерживает механизм перегруппировки и позволяет отодвинуть насыщение в область больших токов. В результате зависимость выходной мощности от тока пучка носит более плавный характер, а максимальная мощность значительно возрастает по сравнению со случаем синхронной настройки. По мере увеличения тока пучка наблюдается последовательность бифуркаций удвоения периода и переход к хаосу.

Отметим, что помимо изучения особенностей нелинейной динамики разработанная программа может быть использована для решения прикладных задач оптимизации характеристик клистронных усилителей и генераторов. С ее помощью можно проводить моделирование и анализ таких процессов, как подавление паразитных колебаний, работа прибора в импульсном режиме, усиление сигналов со сложным спектральным составом. В частности, в последнее время значительный интерес привлекает задача об усилении и искажениях сложного телекоммуникационного сигнала [21].

Автор выражает глубокую благодарность и признательность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Н.М. Рыскину за полезные советы и продуктивное обсуждение полученных результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-02-00541а).

Библиографический список

1. Гайдук В.И., Палатов К.И., Петров Д.М. Физические основы электроники сверхвысоких частот. М.: Сов. радио, 1971.
2. Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Лекции по СВЧ электронике для физиков. Т. 1. М.: Физматлит, 2003.
3. Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М.: Сов. радио, 1973.
4. Шевчик В.Н. Основы электроники сверхвысоких частот. М.: Сов. радио, 1959.
5. Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Рыскин Н.М., Шигаев А.М. Теоретическое и экспериментальное исследование хаотических колебаний клистронного автогенератора с запаздыванием // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46, № 5. С. 604.

6. *Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Кижсаева К.К., Клокотов Д.В., Рыскин Н.М., Шигаев А.М.* Сложная динамика многорезонаторных клистронных автогенераторов с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т. 10, № 5. С. 37.
7. *Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Клокотов Д.В., Рыскин Н.М.* Экспериментальное исследование сложной динамики в многорезонаторном клистронном автогенераторе с запаздывающей обратной связью // ЖТФ. 2003. Т. 73, № 7. С. 105.
8. *Shigaev A.M., Dmitriev B.S., Zharkov Y.D., N.M. Ryskin.* Chaotic dynamics of delayed feedback klystron oscillator and its control by external signal // IEEE Trans. Electron Devices. 2005. Vol. 52, № 5. P. 790.
9. *Рыскин Н.М., Шигаев А.М.* Сложная динамика двухрезонаторного клистрона-генератора с запаздывающей обратной связью // ЖТФ. 2006. Т. 76, № 1. С. 72.
10. *Титов В.Н., Волков Д.В., Яковлев А.В., Рыскин Н.М.* Отражательный клистрон как пример автоколебательной системы с запаздыванием // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 6. С. 138.
11. *Бэдсел Ч., Ленгдон А.* Физика плазмы и численное моделирование / Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1989.
12. *Хокни Р., Иствуд Дж.* Численное моделирование методом частиц / Пер. с англ. М.: Мир, 1987.
13. *Ryskin N.M., Titov V.N., Yakovlev A.V.* Nonstationary nonlinear discrete model of a coupled-cavity traveling-wave-tube amplifier // IEEE Trans. Electron Devices. 2009. Vol. 56, № 5. P. 928.
14. *Рыскин Н.М., Шигаев А.М.* Сложная динамика простой модели распределенной автоколебательной системы с запаздыванием // ЖТФ. 2002. Т. 72, № 7. С. 1.
15. *Рыскин Н.М.* Исследование нелинейной динамики ЛБВ-генератора с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. Радиофизика. 2004. Т. 47, № 2. С. 129.
16. *Ryskin N.M., Titov V.N., Han S.T., So J.K., Jang K.H., Kang Y.B., Park G.S.* Nonstationary behavior in a delayed feedback traveling wave tube folded waveguide oscillator // Phys. Plasmas. 2004. Vol. 11, № 3. P. 1194.
17. *Трубецков Д.И., Четвериков А.П.* Автоколебания в распределенной системе электронный поток – обратная (встречная) электромагнитная волна // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 5. С. 9.
18. *Рыскин Н.М., Титов В.Н.* Исследование автомодуляционных режимов колебаний в релятивистской лампе обратной волны // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 6. С. 566.
19. *Дмитриева Т.В., Рыскин Н.М., Титов В.Н., Шигаев А.М.* Сложная динамика простых моделей распределенных электронно-волновых систем // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7, № 6. С. 66.
20. *Рыскин Н.М., Титов В.Н.* О сценарии перехода к хаосу в однопараметрической модели лампы обратной волны // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, № 1. С. 75.
21. *Calame J.P., Levush B.* Impact of nonlinear memory effects on digital communications in a klystron // IEEE Trans. Electron Devices. 2009. Vol. 56, № 5. P. 855.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 25.01.2012

**NUMERICAL SIMULATION OF NONLINEAR DYNAMICS
IN MULTIPLE CAVITY KLYSTRON OSCILLATOR WITH DELAYED
FEEDBACK BY THE «PARTICLE-IN-CELL» METHOD**

V.V. Emelyanov

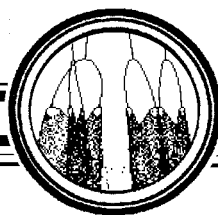
The 1.5 D code program of numerical simulation of nonlinear nonstationary processes in the klystron-type devices based on the nonstationary L.A. Vainshtein's theory of cavity excitation and the «particle-in-cell» method for modeling of the electron beam dynamics is developed. The results of numerical simulation of the basic oscillation modes of the four-cavity klystron oscillator with the external delayed feedback are presented. The results are qualitatively the same as were obtained previously for the simplified theoretical models of the oscillator in the form of time-delayed differential equations. These results allow also to determine the values of output parameters (power, efficiency, spectrum bandwidth, etc.) which are practically important.

Keywords: Multiple cavity drift klystron, delayed feedback, «particle-in-cell» method, self-excitation, self-modulation, chaos, period-doubling bifurcations.



Емельянов Валерий Валерьевич – родился в городе Пугачеве Саратовской области (1987). Окончил с отличием факультет нелинейных процессов СГУ (2009). Аспирант кафедры нелинейной физики СГУ. Научные интересы – численное моделирование нестационарных нелинейных процессов в приборах СВЧ-электроники, исследование нестационарных процессов в распределенных системах с запаздывающей обратной связью. Автор ряда публикаций по данной тематике.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
E-mail: emvaleriy@gmail.com



ОПТИМАЛЬНОЕ ВНЕШНЕЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ МАЛОЙ МОЩНОСТИ ДЛЯ АКТИВАЦИИ ОДНОМЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

С.А. Григорьева, Г.В. Осипов

Работа посвящена исследованию оптимальной формы внешнего воздействия малой мощности необходимой для активации одномерной динамической системы. Поиск данного воздействия осуществляется с помощью метода множителей Лагранжа. Оптимальное воздействие малой мощности и оптимальный закон изменения состояния динамической системы определяются аналитически для линейной динамической системы и численно для нелинейной динамической системы. Изучается возможность уменьшения мощности воздействия за счет увеличения его продолжительности. Исследуется эффективность оптимального воздействия, выраженная в экономии количества энергии, затраченной на него, по сравнению с прямоугольным воздействием.

Ключевые слова: Оптимальная форма внешнего воздействия, активация динамической системы, метод множителей Лагранжа, мощность воздействия.

Введение

В организме человека электрический ток является адекватным раздражителем для всех возбудимых тканей. Адекватность электрического тока проявляется в том, что он при минимальных энергетических затратах вызывает возбуждение ткани в естественных условиях существования организма [1]. На сегодняшний день в клинической практике широко используются методы регистрации биоэлектрических потенциалов, отражающих различные стороны работы сердца (электрокардиография [2]), головного мозга (электроэнцефалография [3]), моторной активности желудка (электрогастрография [4]) и мышц (электромиография [5]). Одним из важнейших элементов реанимации при сердечных аритмиях (фибрилляциях) является дефибрилляция сердца, которая активирует возбудимые сердечные клетки, устраняя разрозненные, хаотичные сокращения отдельных мышечных волокон с помощью одиночного электрического импульса достаточной силы и продолжительности [6].

Для возникновения активации (потенциала действия) в возбудимой клетке раздражителю необходимо деполяризовать ее до уровня критической деполяризации

мембраны, то есть до ее порогового потенциала. Таким образом, в момент изменения потенциала мембраны от потенциала покоя до порогового потенциала происходит активация потенциалуправляемых Na^+ -каналов и возникает электрический ток, ведущий к дальнейшей интенсивной деполяризации мембраны в виде потенциала действия.

Процессы на клеточном уровне описываются обычно обобщениями классической модели Ходжкина–Хаксли [7], для которой потенциал $V(t)$ отвечает соотношению

$$\dot{V} + f(V, I_i, I) = 0, \quad (1)$$

где $f(V, I_i, I)$ – нелинейная функция от потенциала $V(t)$, ионных токов $I_i(V, t)$ и внешнего воздействия $I(t)$. Достижение биологической релевантности моделей приводит к не всегда оправданной трудоемкости в исследовании. Как показано в [8], для активации возбудимой клетки достаточно использовать линейное дифференциальное уравнение первого порядка, описывающее изменение трансмембранного потенциала клетки

$$RC\dot{V} + V - IR - V_0 = 0. \quad (2)$$

Переменные и параметры уравнения (2) имеют следующий смысл: $V(t)$ – электрический потенциал клетки; R и C – резистивная и емкостная компоненты мембраны, соответственно; $I(t)$ – подаваемый внешний ток; V_0 – потенциал покоя (начальное условие).

В данной работе производится поиск и исследование оптимальной формы внешнего воздействия на качественно подобную линейную динамическую систему

$$\dot{x} = -\alpha x + u(t), \quad (3)$$

в которой опущен биологический смысл переменных уравнения (2). Уравнение (3) получается из (2) при следующих заменах: $V(t) = x(t)$, $1/(RC) = \alpha$, $I(t)/C = u(t)$ и $V_0 = x(0) = 0$. Система (3) при $u(t) = 0$ и $\alpha > 0$ имеет устойчивое состояние равновесие $\bar{x} = 0$.

Под критерием оптимальности в работе понимается наименьшее количество энергии [9]

$$\xi = \int_0^T u^2(t) dt \rightarrow \min, \quad (4)$$

необходимое на совершение воздействия, возбуждающего динамическую систему. Это условие является весьма важным, поскольку чем меньше воздействие по мощности, тем меньше разрушение наносит оно как одной клетке, так и органу в целом.

Задачи на отыскание минимальной энергии оптимального управления уже решались в теории оптимального управления линейными системами. Наиболее наглядными примерами являются управление полетом реактивного аппарата, которое осуществляется выбором реактивного ускорения с минимальным расходом рабочего тела [10], и поворот вала двигателя постоянного тока с управлением по току возбуждения [11]. В ряде случаев целью управления является стабилизация заданного программного движения, то есть удержание истинной траектории движения в некоторой окрестности желаемой траектории. Тогда подынтегральная часть целевого

функционала (4) должна характеризовать отклонение реальной траектории от программной. Довольно часто для этой цели используют квадратичные функционалы, частным случаем которых и является функционал (4).

Таким образом, первая часть данной работы, в которой описывается управление линейной системой, в некоторой степени является приложением к уже известным результатам. Заметим, что, в основном, решение задач оптимального управления опирается на принцип максимума Л.С. Понтрягина [12]. Данный способ имеет существенные недостатки, а именно: разрывную правую часть динамической системы, увеличение размерности системы, наличие различных типов ограничений, в том числе на управление и фазовые координаты. Целью данной работы является определение непрерывной фазовой траектории под воздействием непрерывного оптимального управления на линейную и нелинейную динамические системы. Поставленная задача в статье разрешена методом множителей Лагранжа с применением элементов теории динамических систем.

Из наиболее близких работ по поиску оптимального сигнала управления для биологических пороговых систем можно назвать работу [13]. Предложенный в ней метод определения сигнала, приводящего к активации возбудимой динамической системы при энергии сигнала, близкой к минимальной, основывается на записи и обработке реализаций внешнего шума, предшествующих активации, и дает квазиоптимальный сигнал. В настоящей статье рассматривается детерминированная система, конечное состояние которой однозначно определяется оказанным на нее управляющим воздействием. Применение метода множителей Лагранжа [10, 12] позволяет найти единственный оптимальный сигнал, активирующий возбудимую динамическую систему, с наименьшей затраченной на это энергией.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача оптимального управления динамической системой по переводу изображающей точки из устойчивого состояния равновесия \bar{x} ($\alpha > 0$) в заданную точку $x(T) = \Delta$ ($\Delta > 0$) за определенное время T с наименьшим затраченным на это количеством энергии ξ_{\min}

$$\begin{aligned} J_0(u) = \xi_{\min} &= \int_0^T u^2(t) dt \rightarrow \min, \\ \dot{x} &= -\alpha x + u(t), \\ J_1(u) &= x(0) = 0, \\ J_2(u) &= x(T) - \Delta = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Под активацией одномерной динамической системы (5) внешним воздействием $u(t)$ здесь понимается достижение переменной $x(t)$ некоторого финального положения $x(T) = \Delta$.

2. Метод множителей Лагранжа

Удобным и эффективным методом получения необходимых условий оптимальности в конечномерных задачах оптимизации и в вариационном исчислении является

метод множителей Лагранжа. Используя понятие множителей Лагранжа, приведем необходимые условия оптимальности для задачи (5).

Пусть решение задачи (5) существует и имеет вид $(T, u(t), x(t))$. Здесь $u(t)$ – оптимальное управление, $x(t)$ – оптимальный закон движения, T – фиксированное время воздействия.

Функция $F = (u^2(t), 0, 0)$, состоящая из подинтегральных выражений функционалов $J_i, i = \overline{0, 2}$, и функция $\varphi = (0, x(0), x(T) - \Delta)$, состоящая из терминальных выражений функционалов $J_i, i = \overline{0, 2}$, являются непрерывными в некоторой окрестности $(x(t), u(t), t), t \in [0, T]$.

Согласно теореме, описывающей метод множителей Лагранжа [10, 12], существуют такие не равные одновременно нулю множители Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ и функция $\psi(t) \in R^1$, причем ψ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$, и при этом справедливы:

- уравнение (3);
- уравнение Эйлера (сопряженная задача)

$$\dot{\psi} = -H_x(t, x, u, \psi) = \alpha\psi, \quad (6)$$

где $H = \psi(-\alpha x + u) + \lambda_0 u^2$ – функция Гамильтона;

- условия трансверсальности

$$\psi(0) = -\varphi_{x(0)}(0, x(0), T, x(T))\lambda = -\lambda_1, \quad (7)$$

$$\psi(T) = \varphi_{x(T)}(0, x(0), T, x(T))\lambda = \lambda_2,$$

где $\varphi_{x(0)} = (0, 1, 0)$, $\varphi_{x(T)} = (0, 0, 1)$;

- условие стационарности ($H_u = 0$)

$$\psi + 2\lambda_0 u = 0; \quad (8)$$

- условие неположительности

$$\lambda_0 \leq 0. \quad (9)$$

Способ определения оптимального управления, основанный на приведенных выше необходимых условиях оптимальности, состоит в выполнении следующих шагов.

1. Из условия стационарности (8) находим управление $u(t)$ в виде функции $\psi(t)$ и множителей Лагранжа λ .

2. Разрешаем уравнение Эйлера (6) с использованием условий трансверсальности (7) и получаем $\psi(t)$.

3. Подставляем найденное $\psi(t)$ в $u(t)$, а затем в (3), и из него с граничными условиями из (5) выражаем оптимальный закон движения $x(t)$.

4. Определяем оптимальное количество энергии ξ_{\min} по формуле (4).

Ниже получим аналитические выражения для оптимального управления и закона движения.

3. Аналитические результаты

В результате применения метода множителей Лагранжа оптимальная форма внешнего воздействия $u(t)$ имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} \frac{2\alpha\Delta e^{\alpha(t-T)}}{1 - e^{-2\alpha T}}, & t \in [0, T], \\ 0, & t \notin [0, T], \end{cases} \quad (10)$$

в которую явно входит собственное число α системы (3), определяющее характер ее поведения. Воздействие (10) позволяет вывести динамическую систему (3) из устойчивого состояния равновесия $x(0) = 0$ на заданное расстояние Δ по оптимальному закону

$$x(t) = \frac{\Delta e^{-\alpha T}}{1 - e^{-2\alpha T}} [e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}]. \quad (11)$$

Количество затраченной энергии ξ_{\min} на совершенное воздействие (10) определяется выражением

$$\xi_{\min} = \frac{2\alpha\Delta^2}{1 - e^{-2\alpha T}}, \quad (12)$$

полученным подстановкой (10) в ξ_{\min} из (5).

Заметим, что с увеличением длительности T внешнего воздействия (10) уменьшается количество подаваемой энергии ξ_{\min} (обратное также справедливо, рис. 1, а). Причем при $T \rightarrow +\infty$ мощность стимула будет равна предельной величине $\xi_{+\infty} = 2\alpha\Delta^2$ (рис. 1, б). Это означает, что как бы долго ни было приложено воздействие, затраты на его осуществление всегда будут отличны от нуля. Справедливость данного факта следует из взаимно-обратной задачи на быстроедействие

$$\begin{aligned} J_0(u) &= T \rightarrow \min, \\ \dot{x} &= -\alpha x + u(t), \\ J_1(u) &= x(0) = 0, \\ J_2(u) &= x(T) - \Delta = 0, \\ J_3(u) &= \xi - \int_0^T u^2(t) dt = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

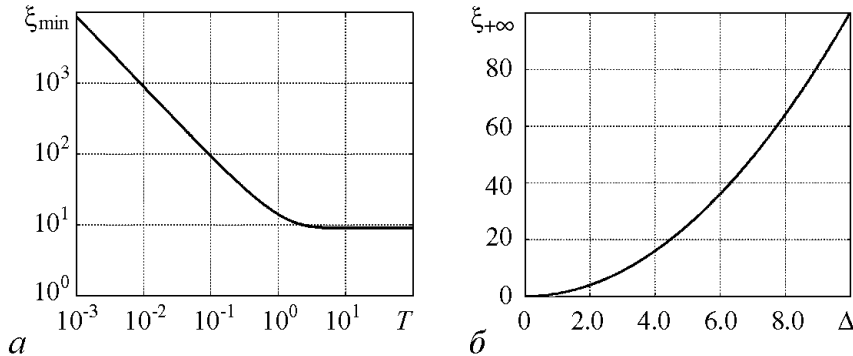


Рис. 1. Изменение мощности внешнего воздействия (10) при увеличении его продолжительности T в случае $\Delta = 3$ и $\alpha = 0.5$ (а); зависимость предельной величины количества подаваемой энергии $\xi_{+\infty}$ от заданного расстояния Δ (б)

В этой задаче требуется в наикратчайшее время перевести динамическую систему (3) из устойчивого состояния равновесия $x(0) = 0$ ($\alpha > 0$) в состояние $x(T) = \Delta > 0$ посредством определенного количества энергии ξ . Таким образом, в данной задаче величина $\xi_{+\infty}$ ограничивает количество подаваемой энергии ξ , являющееся параметром, то есть под воздействием с заданной мощностью $\xi < \xi_{+\infty}$ перевод динамической системы (3) из начального состояния на заданное расстояние Δ невозможен.

Таким образом, в исходной задаче (5) найденное оптимальное управление $u(t)$ (10) малой мощности ξ_{\min} (12) и соответствующая ему временная реализация фазовой переменной $x(t)$ (11) являются единственными при достижении изображающей точкой состояния $x(T) = \Delta$ за время T .

Подтверждением тому является фазовый портрет динамической системы, полученной из (3) и (6)

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha x + \psi, \\ \dot{\psi} = \alpha \psi \end{cases} \quad (14)$$

в предположении, что $u(t) \equiv \psi(t)$ при $\lambda_0 = -1/2$. В фазовом пространстве динамической системы (14) существует лишь одна фазовая траектория $\psi(x)$, стартующая с прямой $x = 0$ и заканчивающаяся на $x = \Delta$ через заданное время T . Располагается кривая $\psi(x)$ в первом квадранте фазового пространства (x, ψ) , выше выходящей сепаратрисы седла $(0; 0)$, поэтому начальное значение $\psi(0)$ всегда больше нуля и стремится к нулю при $T \rightarrow +\infty$.

4. Эффективность оптимальной формы воздействия малой мощности

Для демонстрации эффективности найденного оптимального управления (10) рассмотрим также внешнее воздействие прямоугольной формы, которое наиболее часто используется на практике

$$u_{\text{rec}}(t) = \begin{cases} \Delta_1, & t \in [0, T], \\ 0, & t \notin [0, T]. \end{cases} \quad (15)$$

Оно также выводит систему (3) из состояния равновесия $x(0) = 0$ на расстояние Δ за время T . Таким образом, требуется решить краевую задачу поиска интегральной кривой для системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha x + \Delta_1, \\ x(0) &= 0, \\ x(T) &= \Delta. \end{aligned} \quad (16)$$

Решением задачи (16) является кривая

$$x_{\text{rec}}(t) = \Delta_1(1 - e^{-\alpha t})/\alpha, \quad (17)$$

полученная под управлением (15),

$$\Delta_1 = \frac{\alpha \Delta}{1 - e^{-\alpha T}}. \quad (18)$$

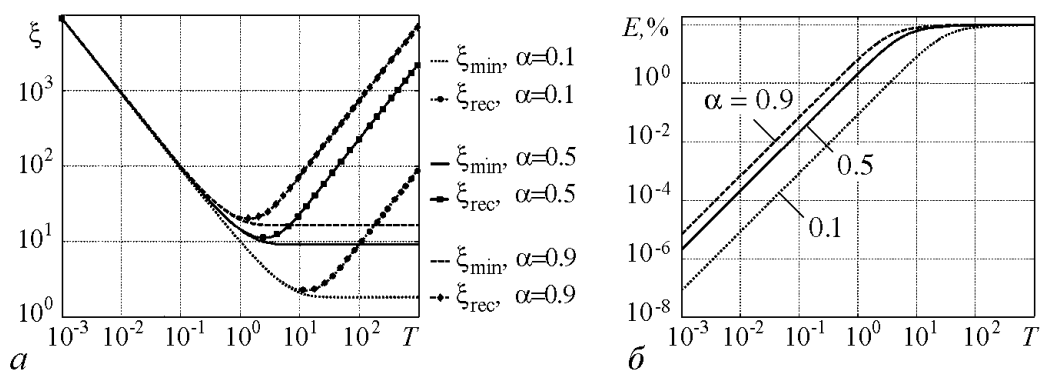


Рис. 2. Зависимости мощностей ξ_{\min} и ξ_{rec} соответствующих воздействий (10) и (15) от времени (а) и экономии энергии от времени при различных значениях параметра α (б)

При этом количество энергии, затраченное на данное воздействие, определяется выражением

$$\xi_{\text{rec}} = \frac{\alpha^2 \Delta^2 T}{(1 - e^{-\alpha T})^2}. \quad (19)$$

Сравним эффективность двух рассмотренных видов воздействий. Пусть продолжительностью воздействия для рассматриваемых управлений будет одинаковая величина T . Тогда количество энергии ξ_{\min} , затраченное на воздействие (10), всегда будет меньше, чем у импульса прямоугольной формы ξ_{rec} (рис. 2, а). Причем при $\alpha \rightarrow 0$ количество подаваемой энергии в целом уменьшается. Разницу в процентном соотношении между значениями ξ_{\min} и ξ_{rec} назовем экономией энергии при совершении воздействия (10), которую можно выразить следующим образом:

$$E = 100 \left(\frac{\xi_{\text{rec}} - \xi_{\min}}{\xi_{\text{rec}}} \right) \% \Leftrightarrow E = 100 - \frac{200(1 - e^{-\alpha T})}{\alpha T(1 + e^{-\alpha T})}. \quad (20)$$

Это выражение получено из предположения, что $\xi_{\text{rec}} = 100\%$ и показывает, на сколько процентов меньше может быть степень повреждения клетки оптимальным воздействием $u(t)$ (10) по сравнению с прямоугольным воздействием $u_{\text{rec}}(t)$ (15). Это следует из того, что уменьшение энергии на подачу воздействия приводит к уменьшению количества тепла, выделенного при этом. В свою очередь, чем меньше воздействие на живую клетку, тем меньше степень ее повреждения. К примеру, за время $T = 5$ энергозатраты на вывод системы (3) (рис. 3) из устойчивого состояния равновесия x_0 на расстояние $\Delta = 3$ под воздействиями (10) и (15) составят, соответственно, $\xi_{\min} = 9.0611$ и $\xi_{\text{rec}} = 13.3520$. Тогда, по формуле (20) экономия энергии подаваемого воздействия (10) составляет 32.13%.

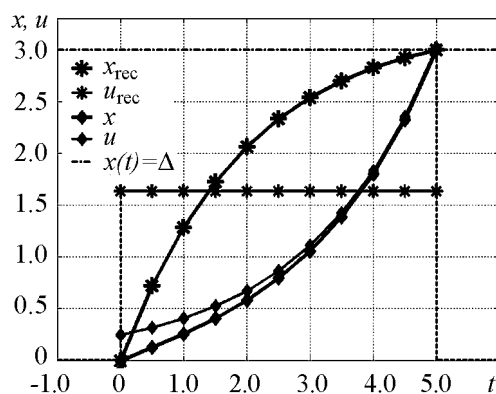


Рис. 3. Активация системы (3) при $\alpha = 0.5$. Пороговое значение $x(T) = \Delta = 3$. Представлены эволюции переменных x и x_{rec} под внешними воздействиями $u(t)$ (10) и $u_{\text{rec}}(t)$ (15) продолжительностью $T = 5$

Для активации трансмембранного потенциала (2) желудочкового кардиомиоцита (его форма близка к цилиндрической и имеет следующие размеры: длина клетки 100 мкм, диаметр 20 мкм [14, 15]) при $\alpha = 1/(RC) = 1/(4 \cdot 10^5 [\text{Ом}] \times 63 \cdot 10^{-9} [\text{мФ}]) = 5/126 [\text{мс}^{-1}]$ и длительности воздействий (10) и (15) $T = 0.1$ мс энергозатраты составят $\xi_{\min} = 2.836 \cdot 10^{-10} \text{ мс} \cdot \text{мА}^2$, $\xi_{\text{rec}} = 5.8439 \cdot 10^{-10} \text{ мс} \cdot \text{мА}^2$, что даст экономию $E = 51.47\%$. Учитывая малые размеры клетки, полученные результаты являются весьма существенными.

Из рис. 2, б видно, что величина E положительна, а значит, степень повреждения при воздействии (10) всегда ниже, чем при воздействии прямоугольной формы (15). Скорость стремления величины E к 100% при $T \rightarrow +\infty$ увеличивается при $\alpha \rightarrow 1$.

Выше было показано, что с уменьшением длительности воздействия T увеличивается его мощность ξ_{\min} . Согласно этому можно найти такой временной интервал для воздействия (10), в котором финальное состояние $x(T) = \Delta$ системы (3) достигается с меньшей мощностью и продолжительностью, чем под прямоугольным воздействием (15). Тогда получается система неравенств

$$\begin{cases} \xi_{\min} < \xi_{\text{rec}}, \\ T < T_{\text{rec}}, \end{cases} \quad (21)$$

решением которой является интервал

$$-\frac{1}{2\alpha} \ln \left(1 - \frac{2(1 - e^{-\alpha T_{\text{rec}}})^2}{\alpha T_{\text{rec}}} \right) < T < T_{\text{rec}}. \quad (22)$$

Для рассмотренного выше примера (см. рис. 3) параметрами в системе (21) являются: $\xi_{\text{rec}} = 13.3520$, $T_{\text{rec}} = 5$. Тогда временной интервал (22) составляет $1.121 < T < 5$, и соответствующая ему экономия энергии воздействия (10) изменяется от 0 до 32.13%. Уменьшение длительности воздействия в два раза ($T = 2.5$) дает ощутимую экономию энергии (26.56%).

Задача поиска затраченной энергии (16) имеет единственное решение, то есть заданному времени T_{rec} соответствует единственное значение ξ_{rec} (см. рис. 2, а). Однако обратная задача к задаче (16)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha x + u(t), \\ x(0) &= 0, \\ x(T) &= \Delta, \\ \int_0^T u^2(t) dt &= \xi_{\text{rec}}, \end{aligned} \quad (23)$$

в которой определяется продолжительность T воздействия $u(t) \equiv \Delta_1$ заданной мощности ξ_{rec} , переводящего систему (3) из состояния равновесия $x(0) = 0$ на расстояние Δ , теряет единственность решения. Это следует из того, что выражение (19) в задаче (23) является трансцендентным уравнением относительно T при известном ξ_{rec} . Зависимость ξ_{rec} от T является квадратичной (см. рис. 2, а), поэтому одной и той же

мощности прямоугольного воздействия соответствуют два значения его продолжительности (рис. 4). Однако существует определенное значение мощности, которому соответствует единственное значение продолжительности воздействия (при $T \neq 0$), находящееся в стационарной точке выражения (19) и определяемое из уравнения

$$e^{\alpha T} = 1 + 2\alpha T. \quad (24)$$

Неоднозначность в задаче (23) легко устраняется путем выбора наименьшего значения T среди имеющихся, если рассматривать сравнение с задачей быстрогодействия (13).

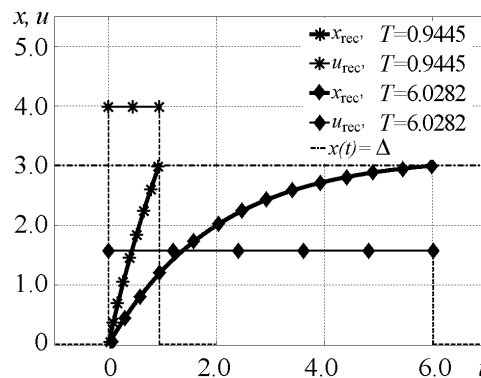


Рис. 4. Активация системы (3) при $\alpha = 0.5$. Пороговое значение $x(T) = \Delta = 3$. Эволюция переменной x под внешним прямоугольным воздействием $u_{\text{rec}}(t)$ мощностью $\xi_{\text{rec}} = 15$ и продолжительностями: $T = 0.9445$ и $T = 6.0282$

5. Активация нелинейной динамической системы первого порядка

Рассмотрим задачу управления нелинейной динамической системой первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(\beta x - \alpha) + u, \\ x(0) &= 0, \\ x(T) &= \Delta, \end{aligned} \quad (25)$$

где $\Delta > \alpha/\beta$ – заданный параметр.

Данная система без возмущения ($u(t) = 0$) имеет два состояния равновесия: устойчивое ($x = 0$) и неустойчивое ($x = \alpha/\beta$). Задача активации сводится к переводу системы из начального состояния – устойчивого состояния равновесия $x(0) = 0$ на расстояние $x(T) = \Delta > \alpha/\beta$ посредством воздействия $u(t)$ за заданное время T .

5.1. Оптимальная форма воздействия. Для поиска воздействия оптимальной формы на систему (25) снова воспользуемся критерием оптимальности (4) и методом множителей Лагранжа, который сводится к краевой задаче для нелинейной динамической системы второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\beta x - \alpha) + u(t), \\ \dot{\psi} = \psi(\alpha - 2\beta x) \end{cases} \quad (26)$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} x(0) = 0, \\ \psi(0) = -\lambda_1 \end{cases} \quad (27)$$

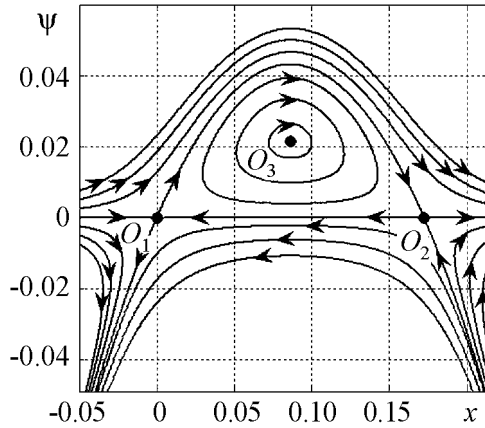


Рис. 5. Фазовый портрет динамической системы (31) при $\alpha = 0.5$, $\beta = 2.9$, $\Delta = 3$

и предполагая, что $\lambda_0 = -1/2$, получим тождественное совпадение оптимального управления $u(t)$ и решения сопряженной задачи $\psi(t)$

$$u(t) \equiv \begin{cases} \psi(t), & t \in [0, T], \\ 0, & t \notin [0, T]. \end{cases} \quad (30)$$

Таким образом, систему (26) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\beta x - \alpha) + \psi, \\ \dot{\psi} = \psi(\alpha - 2\beta x). \end{cases} \quad (31)$$

Нелинейная краевая задача (27), (28), (31) неразрешима аналитически, поэтому ее решение определяется численно. При численном анализе воспользуемся следующим качественным исследованием нелинейной динамической системы (31).

Фазовый портрет (31) (рис. 5) является симметричным относительно прямой $x = \alpha/(2\beta)$. Система имеет три состояния равновесия: два седла $O_1(0; 0)$, $O_2(\alpha/\beta; 0)$ и центр $O_3(\alpha/(2\beta); \alpha^2/(4\beta))$. Задача активации состоит в переводе системы (31) из состояния равновесия $(0; 0)$ на расстояние Δ по абсциссе, то есть правее состояния равновесия $(\alpha/\beta; 0)$, за заданное время T . Это возможно осуществить только по траекториям, лежащим в первом квадранте фазового пространства системы (31) выше сепаратрисы, идущей из седла $(0; 0)$ в седло $(\alpha/\beta; 0)$. Поэтому $\psi(0) > 0$. Найденная функция $\psi(t)$ будет оптимальным управлением $u(t)$ в динамической системе (25) при достижении финального состояния с наименьшим количеством подаваемой энергии ξ_{\min} (4).

Таким образом, для численной реализации оптимального внешнего воздействия (30) на нелинейную динамическую систему (25) имеем задачу (31) с граничными условиями (27) и (28), где $\psi(0)$ больше нуля, и стремится к нулю при $T \rightarrow \infty$.

Результатом численной реализации поставленной задачи является оптимальное внешнее воздействие u и соответствующая ему оптимальная эволюция переменной x . Форма данного воздействия близка к колоколообразной, а мощность убывает с увеличением его продолжительности. Заметим, что данная форма воздействия качественно останется неизменной для систем с квадратичной нелинейностью. Результаты и сравнение эффективности различных форм воздействий приведены далее.

и финальными условиями

$$\begin{cases} x(T) = \Delta, \\ \psi(T) = \lambda_2. \end{cases} \quad (28)$$

Функция Гамильтона в данном случае имеет вид $H(t, x, u, \psi) = \psi(\beta x^2 - \alpha x + u) + \lambda_0 u^2$. Учитывая условие ее стационарности (8), имеем

$$u = -\frac{\psi}{2\lambda_0}, \quad (29)$$

5.2. Прямоугольная форма воздействия. Рассмотрим задачу активации нелинейной системы (25) с помощью прямоугольного воздействия

$$u = u_{\text{rec}} = \begin{cases} \Delta_1, & t \in [0, T], \\ 0, & t \notin [0, T], \end{cases} \quad (32)$$

определенным из трансцендентного уравнения

$$\frac{2\beta\Delta - \alpha}{\sqrt{4\beta u_{\text{rec}} - \alpha^2}} = \text{tg} \left(\left[\sqrt{4\beta u_{\text{rec}} - \alpha^2} T - \text{arctg}(\alpha/\sqrt{4\beta u_{\text{rec}} - \alpha^2}) \right] / 2 \right). \quad (33)$$

Решением задачи (25) является следующее выражение для эволюции переменной x_{rec}

$$x_{\text{rec}}(t) = \frac{1}{2\beta} \left[\alpha + \sqrt{4\beta u_{\text{rec}} - \alpha^2} \times \right. \\ \left. \times \text{tg} \left(\left[\sqrt{4\beta u_{\text{rec}} - \alpha^2} t - 2 \text{arctg}(\alpha/\sqrt{4\beta u_{\text{rec}} - \alpha^2}) \right] / 2 \right) \right], \quad (34)$$

где $4\beta u_{\text{rec}} - \alpha^2 > 0$.

Численной реализацией данной задачи является ступенчатое управление u_{rec} с соответствующей эволюцией переменной x_{rec} . Причем мощность воздействия увеличивается с увеличением его продолжительности.

5.3. Сравнение форм воздействий. Для сравнения эффективности двух форм воздействия возьмем рассмотренные ранее значения параметров $T = 5$, $\Delta = 3$, $\alpha = 0.5$ и $\beta = 0.9$. При данных значениях видно (рис. 6), что переменная x при любых t располагается выше переменной x_{rec} , а внешнее воздействие $u(t)$ охватывает меньшую площадь, чем воздействие u_{rec} . Это означает, что количество энергии, затраченной на оптимальное воздействие, значительно меньше, чем на воздействие прямоугольной формы. В нелинейной системе (25) количество затраченной энергии на воздействие $u(t)$ (30) равно $\xi_{\text{min}} = 0.2275$, а на воздействие $u_{\text{rec}}(t)$ (32) составляет $\xi_{\text{rec}} = 0.2949$, при этом экономия количества энергии (20) составляет $E = 22.84\%$. Величины E для линейного случая и для нелинейного случая при фиксированных значениях параметров различаются.

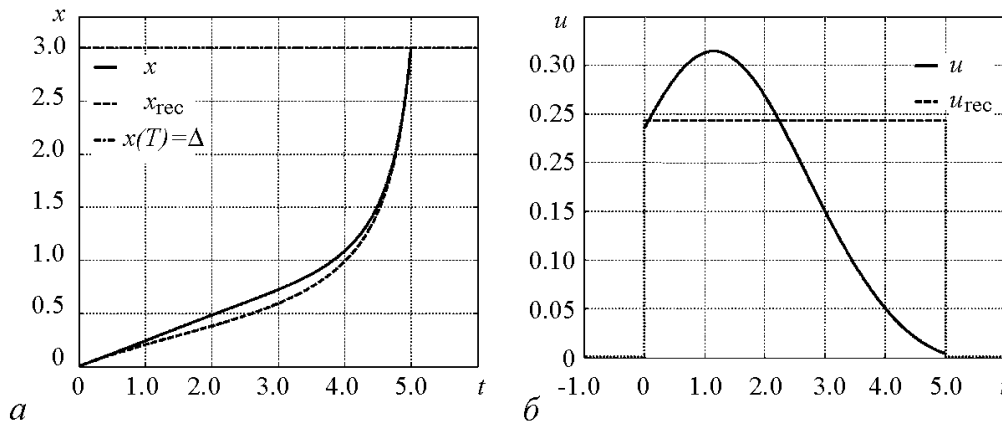


Рис. 6. Вывод системы (25) из устойчивого состояния равновесия $x(0) = 0$ на расстояние $\Delta = 3$ за время $T = 5$ при $\alpha = 0.5$ под внешними воздействиями: $u(t)$ (30) и $u_{\text{rec}}(t)$ (32). *a* – Достижение порогового значения $x(T) = \Delta = 3$ эволюцией переменных x и x_{rec} ; *b* – внешние воздействия u и u_{rec}

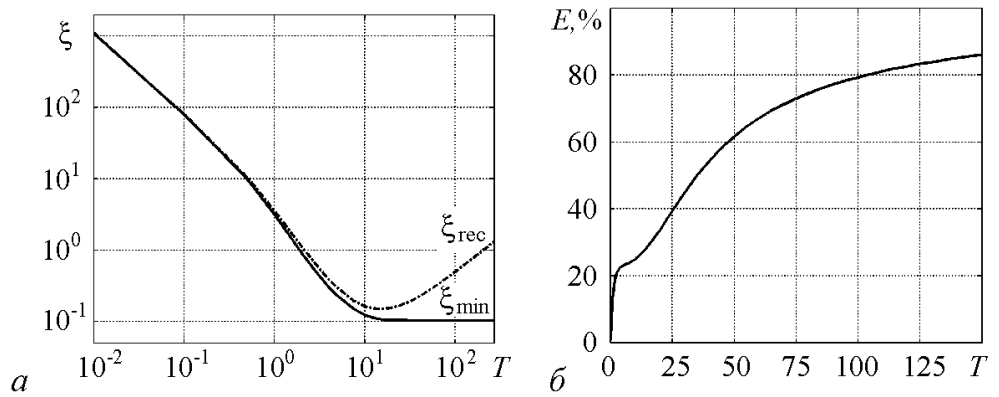


Рис. 7. Зависимости количества затраченной энергии на воздействия $u(t)$ (30) и $u_{rec}(t)$ (32) от их продолжительности (а) и экономии энергии оптимального воздействия (30) от времени (б)

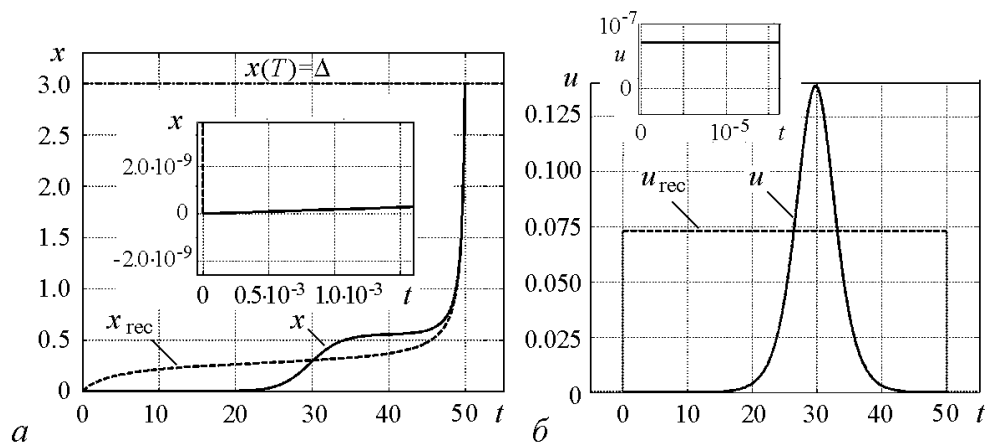


Рис. 8. Вывод системы (25) из устойчивого состояния равновесия $x(0) = 0$ на расстояние $\Delta = 3$ за время $T = 50$ при $\alpha = 0.5$ под внешними воздействиями: $u(t)$ (30) и $u_{rec}(t)$ (32). Достижение порогового значения $x(T) = \Delta = 3$ эволюцией переменных x и x_{rec} (а); внешние воздействия u и u_{rec} (б)

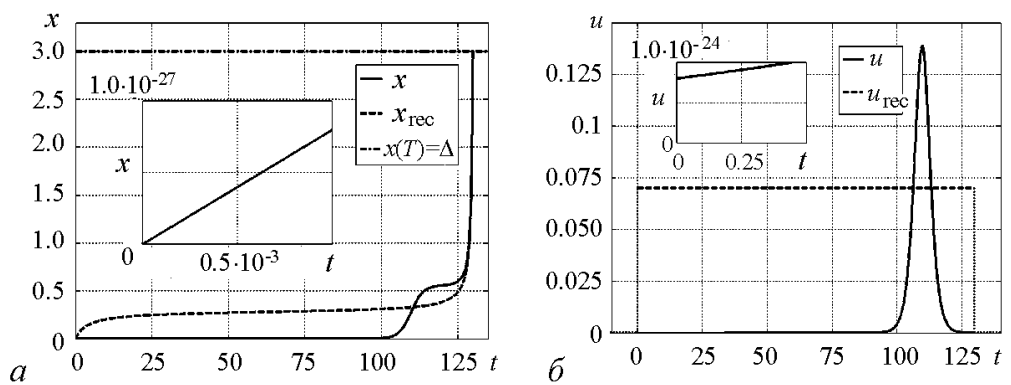


Рис. 9. Вывод системы (25) из устойчивого состояния равновесия $x(0) = 0$ на расстояние $\Delta = 3$ за время $T = 130$ при $\alpha = 0.5$ под внешними воздействиями: $u(t)$ (30) и $u_{rec}(t)$ (32). Достижение порогового значения $x(T) = \Delta = 3$ эволюцией переменных x и x_{rec} (а); внешние воздействия u и u_{rec} (б)

Увеличение продолжительности воздействия (30), так же как и в линейном случае, приводит к увеличению экономии количества энергии E (рис. 7). Так, при воздействии на систему (25) внешним стимулом (30) оптимальной формы в течение $T = 50$ значение экономии количества энергии от подачи прямоугольного стимула той же продолжительности составит $E = 61.56\%$ (рис. 7, б, рис. 8). С увеличением продолжительности воздействия до $T = 130$ происходит увеличение экономии количества энергии $E = 83.87\%$ (см. рис. 7, б, рис. 9). Заметим, что увеличение времени воздействия не изменяет качественного вида оптимальной формы сигнала. Кривая, соответствующая данному воздействию, имеет параболическую форму, максимум которой достигается в момент прохождения траектории $\psi(x)$ динамической системы (31) через абсциссу $x = \alpha/(2\beta)$ состояния равновесия типа центр O_3 . Так как стимул оптимальной формы имеет малую мощность (рис. 8, б и 9, б), то большая часть времени его воздействия (при достаточно большом значении T) затрачивается на вывод системы (31) из малой окрестности состояния равновесия типа седло O_1 , поскольку $\psi(0) \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$. Из-за достаточно долгого выхода из окрестности состояния равновесия, соответствующего длительному близкому к нулю начальному воздействию, удается снизить мощность оптимального воздействия. Эта мощность уменьшается с увеличением продолжительности воздействия.

Во время нахождения изображаемой точки в окрестности состояния равновесия типа седло оптимальное воздействие (30) изменяется по экспоненциальному закону, что соответствует оптимальному управлению (10) в линейном случае. При этом значения амплитуды и аргумента экспоненты для обоих случаев совпадают с точностью до $2.5 \cdot 10^{-8}$, а за показатель экспоненты отвечает одно и то же собственное число α .

Заключение

В работе представлены оптимальные формы внешних воздействий малой мощности для линейной и нелинейной динамических систем первого порядка. Установлено, что в малой окрестности состояния равновесия, в котором находится система в начальный момент времени, оптимальные воздействия изменяются по экспоненциальному закону с совпадающими с точностью до $2.5 \cdot 10^{-8}$ амплитудой и аргументом экспоненты. За показатель экспоненты отвечает собственное число α , определяющее характер поведения динамической системы. Это означает, что оптимальный вывод системы из устойчивого состояния равновесия происходит по тому же закону, что и при стремлении к нему, но в обратном времени, в случае отсутствия воздействия.

Было показано, что при длительном импульсе мощность, необходимая для возбуждения, может быть небольшой. По мере сокращения длительности импульса необходимо увеличивать мощность, чтобы он сохранял свою эффективность в качестве раздражителя и приводил к возникновению потенциала действия.

Показано, что воздействие оптимальной формы имеет существенно меньшую мощность по сравнению с воздействием прямоугольной формы. Уменьшение мощности сигнала приводит к уменьшению количества тепла, выделяемого при этом. Этот факт весьма важен, поскольку чем больше тепловое воздействие на живую клетку, тем больше степень ее повреждения. Таким образом, можно резюмировать,

что оптимальное воздействие наносит меньшую степень повреждения клетке, чем прямоугольное. Это, в свою очередь, предотвращает возможное нарушение электрической проводимости в сердечной мышце и появление повторных фибрилляций.

Благодарим Баландина Д.В. и Половинкина А.В. за полезные советы и обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Федеральных целевых программ: «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013гг. (контракты № 14.740.11.0919) и «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России» на 2007–2013 гг. (контракты № 11.519.11.2015, 11.519.11.2022); при поддержке РФФИ (гранты 10-02-00940, 11-02-92003, 11-07-97013).

Библиографический список

1. Торшин В.И., Власова В.М., Агаджанян Н.А. Основы физиологии человека. М.: РУДН, 2001. С. 408.
2. Исаков И.И., Кушаковский М.С., Журавлева Н.Б. Клиническая электрокардиография. Л.: Медицина, Ленинградское отделение, 1984. С. 145.
3. Гусельников В.И. Электрофизиология головного мозга. М.: Высшая школа, 1976. С. 423.
4. Смирнова Г.О., Силуянов С.В. Периферическая электрогастроэнтерография в клинической практике. Пособие для врачей / Под ред. профессора В.А. Ступина. М.: 2009. С. 20.
5. Юсевич Ю.С. Очерки по клинической электромиографии. М.: Медицина, 1972. С. 128.
6. Гурвич Н.Л. Основные принципы дефибрилляции сердца. М.: Медицина, 1975. С. 231.
7. Hodgkin A.L., Huxley A.F. A quantitative description of membrane currents and its application to conduction and excitation in nerve // J. Physiol. 1952. Vol. 117. P. 500.
8. Камкин А.Г. Фундаментальная и клиническая физиология / Под ред. А.А. Каменского. М.: АКАДЕМИА, 2004. С. 1072.
9. Красовский Н.Н. Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968. С. 476.
10. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003. С. 615.
11. Атанс М., Фалб П.Л. Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968. С. 764.
12. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. С. 430.
13. Половинкин А.В., Крюков А.К. Восстановление квазиоптимального сигнала активации возбудимых систем по предшествующим реализациям шума // Известия вузов. Радиофизика. 2010. Т. LIII, № 1. С. 60.

14. *Афанасьева Ю.И., Юрина Н.А.* Гистология, цитология и эмбриология. М.: Медицина, 2002. С. 744.
15. *Грачева С.В., Иванова Г.Г., Сыркина А.Л.* Новые методы электрокардиографии. М.: Техносфера, 2007. С. 552.

*Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского*

*Поступила в редакцию 9.12.2011
После доработки 19.01.2012*

OPTIMUM EXTERNAL IMPULSE OF LOW POWER FOR ACTIVATION OF ONE-DIMENSIONAL DYNAMIC SYSTEM

S.A. Grigoryeva, G.V. Osipov

In this paper we study the optimum form of external influence with low power necessary for activation of one-dimensional dynamical system. The Lagrange multipliers method is used. Optimum influence with low power and optimum law of change of a dynamical system state are determined analytically for linear dynamical system and numerically for nonlinear dynamical system. The opportunity of influence power reduction vs its duration is investigated. The efficiency of optimum influence expressed in economy of energy quantity, spent on it, in comparison to rectangular influence is studied.

Keywords: Optimum form of external influence, activation of dynamical system, Lagrange multipliers method, power of influence.



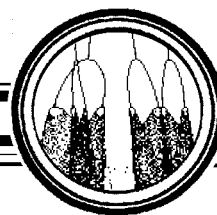
Григорьева Светлана Анатольевна – родилась в Нижнем Новгороде (1985), окончила Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (2008). В 2008–2011 годах училась в аспирантуре на кафедре теории управления и динамики машин факультета ВМК Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. Область научных интересов: оптимальное управление, нелинейная динамика, математическое моделирование. Соавтор 1 учебно-методической и 5 научных работ. Участница российских и международных научных проектов.

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: sv.grigoryeva@gmail.com



Осипов Григорий Владимирович – родился в Горьком (1960), окончил Горьковский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (1982). В 1986–1988 годах учился в аспирантуре Научного совета по комплексной проблеме «Кибернетика» (НСК) АН СССР. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в НСК (1988) по математическому моделированию и доктора физико-математических наук в ННГУ (2004) по радиофизике. С 1988 года работает в ННГУ, с 2007 года – заведующий кафедрой теории управления и динамики машин. Соавтор монографий «Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации» и «Synchronization in oscillatory networks». Опубликовал 128 научных статей (в том числе 2 обзора) по теории колебаний и волн и математическому моделированию. Руководитель российских и международных научных проектов.

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: osipov@vmk.unn.ru



ВЛИЯНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ НА ЭВОЛЮЦИЮ ТРЕХМЕРНОГО ТОРА В НЕАВТОНОМНОЙ СИСТЕМЕ

Е.С. Попова

На примере неавтономной системы с квазипериодическим воздействием исследуется переход к хаосу через разрушение трехмерного тора. Проводится анализ влияния аддитивного шума и флуктуаций частоты воздействия на устойчивость трехмерного тора. Показано, что при воздействии аддитивного шума и флуктуаций частоты воздействия ляпуновский показатель остается отрицательным. Последнее позволяет сделать вывод, что в отличие от автономных систем в данной модели трехмерный тор является структурно-устойчивым.

Ключевые слова: Трехмерный тор, квазипериодическое воздействие, влияние шума, показатель Ляпунова, странный нехаотический аттрактор.

В работе на примере квадратичного отображения с квазипериодическим воздействием исследуется влияние флуктуаций на эволюцию трехмерного тора. Интерес к данной проблеме вызван тем, что в автономных системах, как было показано Д. Рюэлем и Ф. Такенсом [1,2], квазипериодические движения с тремя и более несоизмеримыми частотами в спектре колебаний являются структурно-неустойчивыми и разрушаются при воздействии шумов или вариации управляющих параметров. Однако, как было показано в [3–9], случайные возмущения не всегда разрушают трехчастотные квазипериодические движения, более того, в [10] экспериментально были обнаружены движения с четырьмя и даже пятью несоизмеримыми частотами.

Интерес к изучению эволюции трехмерного тора в неавтономных системах обусловлен тем, что некоторые тонкие детали квазипериодической динамики трудно выявить в автономных системах, но их можно успешно анализировать в нелинейных системах с внешним квазипериодическим воздействием. В автономных системах характерные частоты определяются внутренней динамикой, и управлять ими независимо от других параметров трудно, если вообще возможно. Эффекты синхронизации не позволяют проследить эволюцию тора при изменении управляющего параметра, так как, начиная с некоторого критического значения, области существования квазипериодических движений занимают в пространстве параметров множество нулевой меры. В неавтономных системах частоты, представленные в спектре внешнего

воздействия, можно рассматривать как управляющие параметры и задавать их произвольно независимо от значений других параметров.

Целью данной работы является численное исследование влияния аддитивного шума и флуктуаций частот внешнего воздействия на эволюцию трехмерного тора в неавтономной нелинейной модели с дискретным временем.

В качестве объекта исследований использовалось отображение с квазипериодическим воздействием вида

$$\begin{cases} x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + \varepsilon \sin(2\pi y_n) + \gamma \sin(2\pi z_n) + \zeta_n, \\ y_{n+1} = y_n + \omega_1 \bmod 1 + \xi_n, \\ z_{n+1} = z_n + \omega_2 \bmod 1 + \xi_n, \end{cases} \quad (1)$$

где λ – управляющий параметр; ε, γ – амплитуды гармонических составляющих воздействия, ω_1, ω_2 – их частоты; ζ_n, ξ_n, ξ_n – шумы. При этом случайные процессы ζ_n и ξ_n моделируют флуктуации частот гармонических составляющих воздействия. Значения частот выбирались как решения уравнений второй и третьей степени $\omega_1 = (\sqrt{5} - 1)/2$, $\omega_2 = 1.324718\dots$ [11]. Вычисления проводились в среде Delphi, шумы формировались стандартной процедурой Random, генерирующей нормальный случайный процесс.

На рис. 1 представлены карты областей колебаний с различными значениями ляпуновских показателей системы (1) в отсутствие шумов при фиксированном

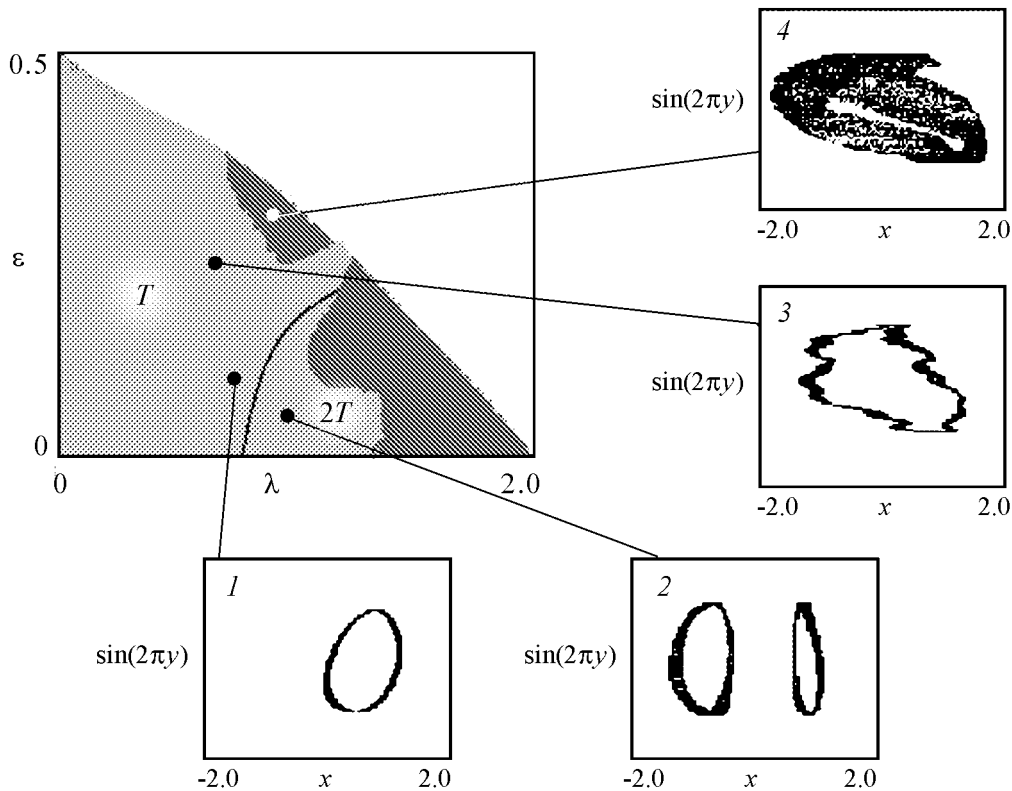


Рис. 1. Плоскость параметров (λ, ε) при фиксированном значении амплитуды воздействия $\gamma = 0.025$ и фазовые портреты в характерных точках: 1 – тор, 2 – удвоенный тор, 3 – странный нехаотический аттрактор, 4 – хаос

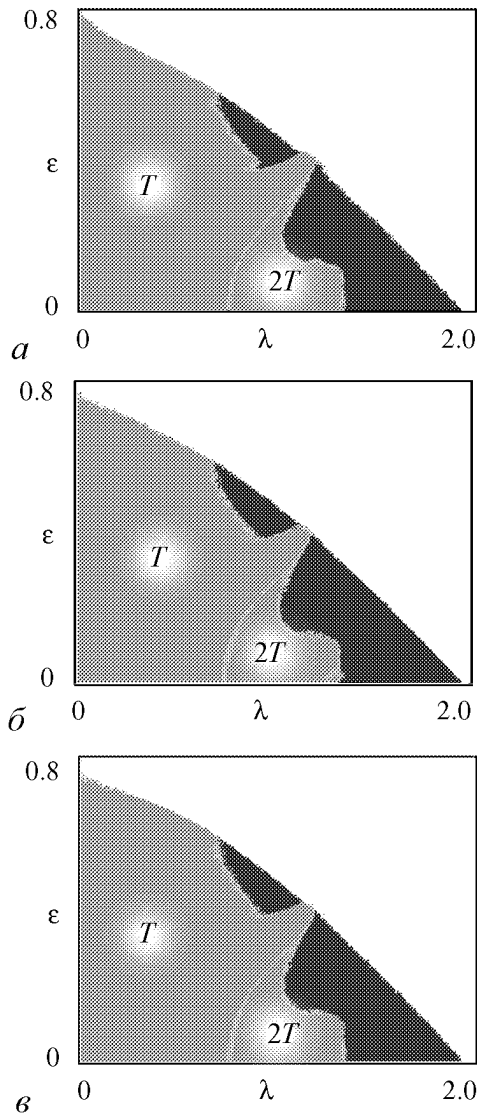


Рис. 2. Карты ляпуновских показателей системы (1) при наличии шумов

устойчивый по Ляпунову режим, обладающий фрактальными свойствами, то есть странный нехаотический аттрактор. Для хаотического аттрактора (фрагмент 4) с положительным значением ляпуновского показателя было получено значение $d_c=2.21$.

Рассмотрим влияние флуктуаций на эволюцию трехмерного тора в системе (1). На рис. 2 представлена карта ляпуновских показателей системы (1) при наличии шумов. Рис. 2, а соответствует присутствию лишь аддитивного шума ζ_n . Дисперсия шума выбиралась такой, что вероятность попадания изображающей точки в область начальных условий, откуда траектория убегает на бесконечность, очень мала. Такой выбор дисперсии позволил генерировать временные реализации динамической переменной длиной не менее чем 40000 отсчетов при наличии шума. Области существования различных режимов на рис. 2, б получены лишь при флуктуации частоты воздействия ζ_n , а на рис. 2, в – при наличии всех случайных процессов ζ_n, ζ_n, ξ_n . Система обозначений аналогична рис. 1, светло-серым цветом отмечены области движений, у которых значения ляпуновского показателя близки к нулю.

значении параметра $\gamma = 0.025$. Серым цветом обозначена область колебаний с отрицательным ляпуновским показателем, темная область соответствует движениям с положительным ляпуновским показателем, белым цветом обозначена область параметров, из которой система «убегает» на бесконечность. Для оценки ляпуновского показателя использовались ряды длиной 40000 отсчетов. В выделенных фрагментах представлены фазовые портреты аттракторов.

Переход к хаосу в данной системе происходит через рождение странного нехаотического аттрактора. Выделенные фрагменты на рис. 1 иллюстрируют аттракторы в сечении Пуанкаре. Фрагмент 1 соответствует гладкому тору, фрагмент 2 – удвоенному тору, 3 – странному нехаотическому аттрактору [12–14], 4 – хаотическому аттрактору. Переход к странному нехаотическому аттрактору определялся на основе совместной оценки корреляционной размерности d_c и ляпуновского показателя. Для гладкого тора (фрагмент 1) было получено значение $d_c = 1.98$, что близко к значению 2.00. Для аттрактора, представленного на фрагменте 3 было получено значение $d_c = 2.11$. Учитывая, что ляпуновский показатель для данного режима меньше нуля, можно считать, что в динамике системы (1) имеет место

Одной из причин разрушения трехчастотных квазипериодических движений под действием шумов в автономных системах является наличие в фазовом пространстве множества неустойчивых орбит. Шумы выбрасывают фазовую траекторию в окрестность неустойчивой орбиты, вследствие чего квазипериодические движения становятся неустойчивыми и разрушаются. Введение аддитивного шума не разрушает трехчастотные квазипериодические движения, области существования режимов с отрицательными значениями ляпуновского показателя на плоскости управляющих параметров сохраняются. Похожая ситуация реализуется в области параметров, где сосуществуют удвоенный тор T2 и неустойчивый тор T1. Как и ранее, в процессе движения случайные флуктуации ζ_n выбрасывают фазовую траекторию в окрестность фазового пространства, где в отсутствие шумов существует неустойчивый тор, что в свою очередь должно приводить к разрушению удвоенного тора T2. Однако, как показывают численные исследования, резкого увеличения ляпуновского показателя с изменением управляющих параметров не наблюдается. Имеет место лишь некоторое сглаживание границ областей существования регулярных и незначительное расширение области существования хаотических режимов.

На рис. 2, б представлена карта ляпуновских показателей, построенная при возмущении частоты воздействия ω_1 . Случайные отклонения частоты воздействия приводят к тому, что мгновенные значения ω_1 могут быть как иррациональными, так и рациональными.

В случае рациональных значений $\omega_1 = m/n$ (где m и n – целые числа) имеет место мультистабильность, в фазовом пространстве системы сосуществует множество различных устойчивых и неустойчивых циклов. При этом плоскость управляющих параметров имеет сложную многолистную структуру. Чем выше значения m и n , тем сложнее устроено фазовое пространство и пространство параметров системы. Рис. 3 иллюстрирует плоскость параметров (λ, ε) (1) при $\gamma = 0$, $\omega_1 = 3/5$ и отсутствии шумов. Светлые области соответствуют периодическим режимам, серые – хаотическим, тонкими сплошными обозначены линии бифуркаций удвоения периода (мультипликатор циклов на них обращается в -1), жирными – седло-узловые бифуркации (мультипликатор циклов на них обращается в $+1$). На плоскости управляющих параметров имеются сборки, обозначенные буквами A, B, C. Внутриборок сосуществуют два устойчивых и один неустойчивый цикл. Увеличение m и n делает структуру плоскости управляющих параметров более сложной.

В результате флуктуаций частоты воздействия фазовая траектория может попасть в окрестность как устойчивого цикла, так и неустойчивого. И в том и в другом случае такое блуждание фазовой траектории несомненно должно влиять на устойчивость тора. Однако, как и в предыдущем случае, введение флуктуаций частоты воздействия ζ_n качественно не изменяет структуру плоскости параметров, и резкого изменения значений ляпуновского показателя не происходит.

Введение всех случайных процессов ζ_n , ξ_n , η_n также качественно не изменяет структуру карты режимов (см. рис. 2, в). Области существования движений с отрицательным ляпуновским показателем на плоскости параметров сохраняются.

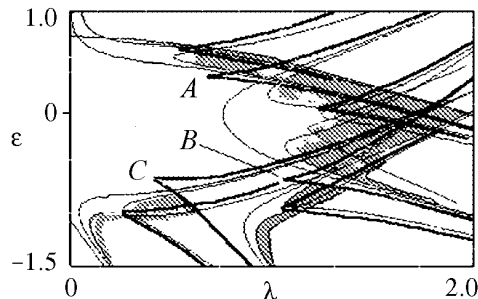


Рис. 3. Плоскость параметров (λ, ε) системы (1) при $\gamma = 0$ и $\omega_1 = 3/5$

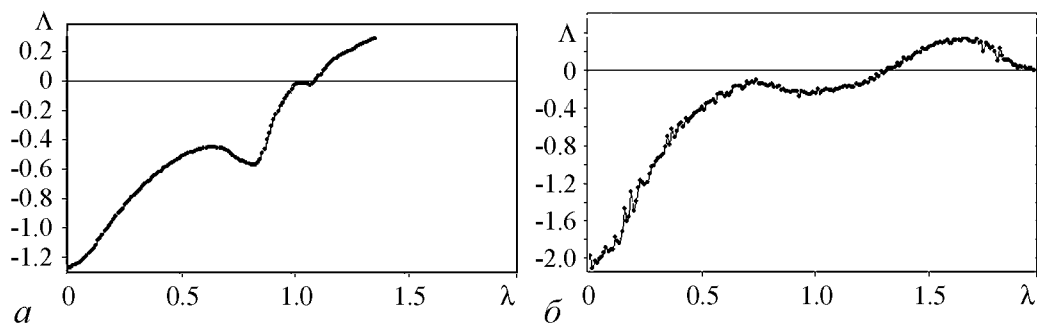


Рис. 4. Зависимость ляпуновского показателя Λ от значения управляющего параметра λ при фиксированных значениях амплитуд воздействия и дисперсии шума: $a - \varepsilon = 0.3, \gamma = 0.025$ и $p = 0.01$; $b - \varepsilon = 0.1, \gamma = 0.025$ и $p = 0.1$

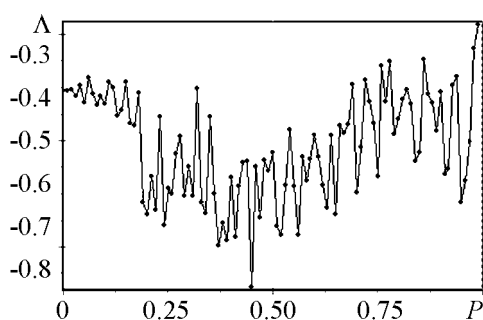


Рис. 5. Зависимость ляпуновского показателя Λ от дисперсии шума при фиксированном значении управляющего параметра $\lambda = 0.5$, амплитуд воздействия $\varepsilon = 0.1$ и $\gamma = 0.025$

На рис. 4 для различных значений дисперсии шума ζ_n представлена зависимость ляпуновского показателя Λ от управляющего параметра системы (1). Существует диапазон значений параметра λ , при котором $\Lambda < 0$. Локальный максимум, наблюдающийся с ростом λ , соответствует бифуркации удвоения трехмерного тора.

На рис. 5 представлена зависимость ляпуновского показателя от дисперсии шума. Из рисунка также видно, что в широкой области значений дисперсии шума показатель Ляпунова остается отрицательным.

Выводы

Таким образом, на примере квадратичного отображения с квазипериодическим воздействием численно исследован переход к хаосу через разрушение трехмерного тора. Воздействие аддитивного шума, флуктуации частоты воздействия, а также совместное их влияние не разрушают трехчастотные квазипериодические движения в неавтономной системе, что в свою очередь позволяет сделать предположение, что в отличие от автономных систем в данной неавтономной модели трехмерный тор является структурно устойчивым. Можно предположить, что аналогичным поведением будет обладать система (1) при добавлении во внешнее воздействие дополнительных гармонических составляющих с иррациональным значением частот.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант № 09-02-00426.

Библиографический список

1. Рюэль Д., Такенс Ф. Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. С. 117.
2. Newhouse S., Ruelle D., Takens F. // Commun. Math. Phys. 1978. Vol. 64. P. 35.
3. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Основы теории сложных систем. М.;Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007. 620 с.

4. *Grebogi C., Ott E., Yorke J.A.* // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 51. P. 339.
5. *Grebogi C., Ott E., Yorke J.A.* // Physica D. 1985. Vol. 15. P. 354.
6. *Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J.A.* // Physica D. 1984. Vol. 13. P. 261.
7. *Tavakol R.K., Tworkowski A.S.* // Phys. Lett. A. 1984. Vol. 100. P. 65.
8. *Tavakol R.K., Tworkowski A.S.* // Phys. Lett. A. 1984. Vol. 100. P. 273.
9. *Хованов И.А., Хованова Н.А., Анищенко В.С., Мак-Клинтон П.В.Е.* Чувствительность к начальным условиям и ляпуновский показатель квазипериодической системы // Журнал технической физики. 2000. Т. 70, вып. 5. С. 112.
10. *Walden R.W., Kolodner P., Rössler A., Surko C.M.* // Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 53. P. 242.
11. *Kim S.-H. and Ostlund S.* // Phys. Rev. A. 1986. Vol. 34, № 4. P. 3426.
12. *Безручко Б.П., Кузнецов С.П., Селезнев Е.П., Пиковский А.С., Фойдель У.* О динамике нелинейных систем под внешним квазипериодическим воздействием вблизи точки окончания линии бифуркации удвоения тора // Изв. вузов. ПНД. 1997. Т. 5, № 6. С. 3.
13. *Bezruchko B.P., Kuznetsov S.P., Seleznev E.P.* Experimental observation of dynamics near the torus-doubling terminal critical point // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62, № 6. P. 7828.
14. *Khovanov I.A., Khovanova N.A., McClintock P.V.E., Anishchenko V.S.* The effect of noise on strange nonchaotic attractors // Phys. Letters A. 2000. Vol. 268. P. 315.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию
После доработки*

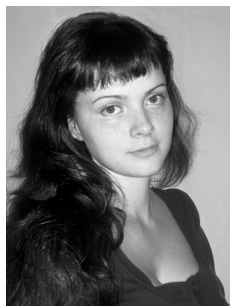
*6.10.2012
30.01.2012*

INFLUENCE OF FLUCTUATIONS ON EVOLUTION OF THREE-DIMENSIONAL TORUS IN NONAUTONOMOUS SYSTEM

E.S. Popova

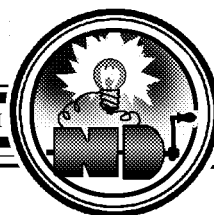
The transition to chaos through the destruction of three-dimensional torus is studied in a nonautonomous system with quasi-periodic impact as example. Analysis is carried out of the influence both of additive noise and frequency fluctuations impact on the stability of three-dimensional torus. It is shown that under the influence of additive noise and frequency fluctuations impact Lyapunov exponent remains negative. This allows to conclude that in this model three-dimensional torus is structurally stable in contrast to the autonomous system.

Keywords: Three-dimensional torus, quasi-periodic force, effect of noise, Lyapunov exponent, strange nonchaotic attractor.



Попова Елена Сергеевна – родилась в Саратове (1986), окончила факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2008). Аспирант факультета нано- и биомедицинских технологий по специальности «радиофизика». Участница трех конференций «Нелинейные дни для молодых в Саратове», VIII Международной школы «Хаотические автоколебания и образование структур – 2007», III конференции молодых ученых «Нанозлектроника, нанофотоника и нелинейная физика – 2008», Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем – 2008», Международной школы-семинара «StatInfo-2009».

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: LenchkaFNP@yandex.ru



ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ НЕЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ ПРИРОДНОЙ ВОДЫ

Г.Е. Рязанова, Н.В. Рязанцев

В процессе гидрохимического анализа природной воды методом прямой контактной кондуктометрии впервые обнаружено явление незатухающих колебаний удельной электропроводности. Предложена методика определения удельной электропроводности в нестандартных условиях. Обсуждены возможные причины возникновения колебательного процесса.

Ключевые слова: Гидрохимический анализ, удельная электропроводность, кондуктометрия, незатухающие колебания, биологическая мембрана, система хищник–жертва.

...И жизнь – повсюду, жизнь в материи самой.
В глубинах вещества от края и до края
Торжественно течет в борьбе с великой тьмой,
Страдает и горит, нигде не умолкая.

А.Л. Чижевский

Для гидрохимического анализа природных вод важно измерение различных параметров, в том числе удельной электропроводности (УЭП) воды.

Впервые наблюдаемый эффект зафиксирован нами в ходе работы по определению пригодности для искусственного рыборазведения одного из прудов, находящихся на территории учебного научно–производственного комплекса «Агроцентр» Саратовского государственного аграрного университета им. Н.И. Вавилова. При проведении эксперимента по определению УЭП воды пруда «Агроцентра» методом прямой контактной кондуктометрии измерения осуществлялась с помощью кондуктометра-концентраметра «Анион–7020» (Новосибирск), измерительный элемент которого представлен ячейкой Кольрауша с разностью потенциалов между электродами в 1 В (для данного прибора), частотой импульсов 500 Гц и скважностью 2. После аномально жаркого лета 2010 года мы зафиксировали новое необычное явление. Показания УЭП прудовой воды не были постоянными. Они периодически изменялись

через интервал времени 1...2 с и представляли собой незатухающие колебания с практически постоянными минимальными значениями УЭП около 1000 мкСм/см и хаотически изменяющимися максимальными значениями порядка 2500...6000 мкСм/см. Для фиксации непрерывно изменяющихся показаний прибора нами была применена видеосъемка его экрана.

Видеозаписи колебаний УЭП и построенные по ним графики зависимости УЭП от времени показали, что характер колебаний УЭП одной и той же пробы прудовой воды, измеренной с интервалом 2 месяца (ноябрь 2010, январь 2011), различен. Возросла амплитуда колебаний и их детерминированность (рис. 1).

Наш эксперимент показал, что колебания УЭП характерны только для воды пруда «Агроцентра». Значения УЭП водопроводной воды, вод четырех родников разных районов Саратовской области («Белый ключ», «Шелковичный», «Алексеевский», «Лысогорский»), а также воды из бассейна Волгоградского водохранилища в окрестностях села Усовка Воскресенского района Саратовской области и Алексеевских прудов Ленинского района Саратова, оказались стабильными.

Обнаруженный эффект является препятствием в практике определения электропроводности природных вод, так как не дает возможность измерить УЭП и определить соответствующую ей величину общей минерализации.

Необходимо было решить проблему определения УЭП при наличии колебательного процесса. Мы предположили, что наблюдаемый эффект не связан с величиной общей минерализации, а является отражением метаболических процессов микрофлоры воды пруда. Для проверки биогенного происхождения колебаний электропроводности нами проведен ряд экспериментов. Прежде всего мы предприняли попытку устранить колебания УЭП с помощью инактивации водных организмов. Для этого мы прокипятили анализируемую воду в течение пяти минут. После кипячения воду охладили и повторили измерение УЭП. Прибор показывал постоянное значение УЭП без каких-либо колебаний показаний кондуктометра. Изучая свойства наблюдаемой системы, мы установили, что колебания УЭП наблюдаются только в определенном интервале температур примерно +12...+23 °С и прекращаются при более низких и более высоких температурах.

Кроме того, мы предположили, что на колебания УЭП влияет численность микроорганизмов воды пруда и концентрация в ней их метаболитов. Для проверки этого предположения мы произвели разбавление прудовой воды дистиллированной. Установлено, что разбавление на 10% не оказывает никакого влияния на колебательный процесс. Измерение УЭП прудовой воды при разбавлении на 20, 30, 40 и 50% продемонстрировало полное отсутствие колебания показаний кондуктометра.

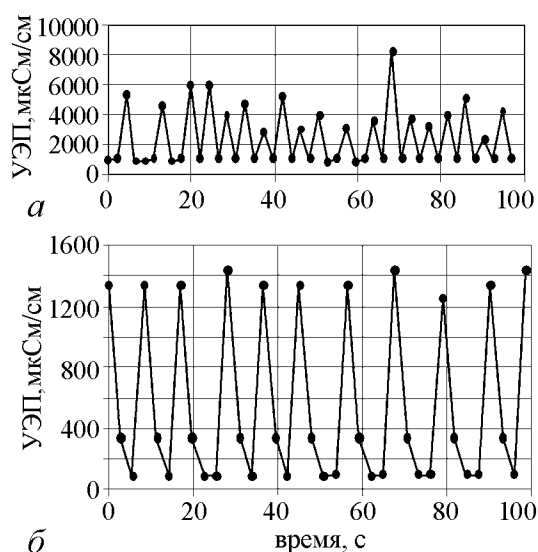


Рис. 1. Динамика зависимости удельной электропроводности прудовой воды от времени: а – измерения от 15.11.2010; б – от 15.01.2011

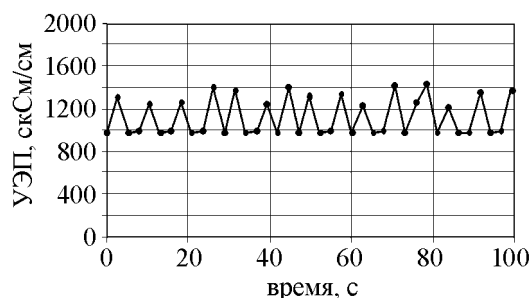


Рис. 2. График колебаний удельной электропроводности искусственной водной среды

Проверку выдвинутого предположения происхождения флуктуаций электропроводности мы продолжили с помощью микробиологического анализа пробы. Проведенное определение общего микробного числа (ОМЧ) воды пруда «Агроцентра» показало значительное содержание микроорганизмов, составляющее 10816 клеток в 1 мл прудовой воды. Преобладающей морфологической формой являются грамположительные спорообразующие клетки (60%). В то же время ОМЧ водопроводной воды составило 5 микробных клеток в 1 мл пробы с доминирующей морфологической формой неспорообразующих палочек (90%).

Обнаружение значительного количества бактерий в воде пруда «Агроцентра» является показателем загрязнения водоема органическими веществами. Об этом свидетельствует также увеличение перманганатной окисляемости прудовой воды в 2010 году, почти в два раза по сравнению с 2009 годом на фоне уменьшения содержания фосфатов в два раза и незначительно изменившихся концентраций остальных ионов.

Для более глубокого обоснования выдвинутого предположения, объясняющего наблюдаемое явление колебаний УЭП, нами поставлен опыт по созданию искусственного микробиологического гидроценоза. Искусственная среда представляла собой упрощенную модель естественного водоема. В аэробных условиях колбы находилась проба верхнего горизонта почвы, содержащего значительное количество микроорганизмов и питательных веществ, залитая водопроводной водой в объемном соотношении 1:8. В ходе мониторинга УЭП полученной системы зафиксировано возникновение колебаний, аналогичных колебаниям УЭП воды пруда «Агроцентра» (рис. 2), только через 6 месяцев с начала эксперимента.

На основании полученных результатов разработано несколько вариантов решения проблемы определения электропроводности природных вод в условиях наличия колебательных процессов

- Охлаждение до температуры ниже пороговой. Для этого нужно установить область температур, в которой наблюдаются колебания, и работать вне этой области.
- Инактивация водной микрофлоры с помощью кипячения. Применение методики требует учета изменения в ионном составе воды, связанные с переходом в нерастворимые соединения солей карбонатной жесткости и нарушением строения коллоидных частиц.
- Разбавления пробы дистиллированной водой. Методика предполагает введение поправочного коэффициента, пропорционального степени разбавления.

Обсуждение результатов

Результаты проведенного эксперимента выявили нестандартное поведение системы раствора природного электролита при определении его электропроводности. Осмысление наблюдений поставило перед нами ряд сложных вопросов на стыке химии, физики, биофизики, микробиологии, синергетики.

Анализ литературных источников по возникшей проблеме выявил отсутствие описания наблюдений, аналогичных зафиксированным нами.

Обширный исторический обзор изучения физико-химических периодических явлений в процессах жизнедеятельности организмов различных уровней сложности сделали Ф.М. Шемякин и П.Ф. Михалев [1]. Они проанализировали также результаты наблюдений периодических процессов, возникающих при подведении электрического тока на катоде или аноде в искусственных системах с определенными концентрациями известных реагентов.

Ю.Б. Шауб с сотрудниками исследовал влияние различных факторов (глубина, наличие течения и др.) на флуктуации электропроводности морских вод. Однако колебательный процесс при определении электропроводности не был зафиксирован [2].

В работе последователей А.Л. Чижевского установлена корреляция между солнечной активностью, выраженной в числах Вольфа, и электропроводностью дистиллированной воды, что важно для живых организмов, в которых вода является одной из основных составляющих. Биохимия клеток, в первую очередь, определяется электрохимическими реакциями в водных растворах [3,4]. Получены данные о наличии определенной ритмики в общем хаотическом характере флуктуаций электропроводности в зависимости от времени года [5,6].

В.В. Калинин и А.В. Казак [7,8] разработали методику измерения электропроводности поверхностных природных вод. Методика предполагает унификацию характеристик измерительных приборов для возможности сопоставления результатов различных авторов. Разработанная схема измерительного устройства для определения электропроводности природных вод допускает его серийное производство. Однако проблема, связанная с наличием колебательного режима при определении электропроводности, перед авторами не возникала.

Изложенные выше данные позволяют сделать вывод, что мы обнаружили колебательный процесс изменения электропроводности природной воды, связанный с явлением самоорганизации [9–13], проявившей себя в виде незатухающих колебаний.

Явление детерминированного хаоса для открытой системы прудовой воды возможно при определенных условиях. К таким условиям в диссипативной системе природной воды, далекой от термодинамического равновесия, относятся следующие факторы: температура; определенное число обитающих в воде микроорганизмов; достаточная концентрация органических веществ, являющихся питательной средой для микроорганизмов; присутствие веществ белковой природы, являющихся продуктами метаболизма водной биоты; наличие полиэлектролитов и высокомолекулярных соединений, подверженных воздействию электромагнитных полей (электрофорез и адсорбция).

Мы предположили, что колебательный режим электропроводности природной воды может быть связан с проявлением жизнедеятельности микроорганизмов в условиях стресса, возникшего под действием электрического тока кондуктометра.

Современные представления о биофизике живой клетки и биофизике мембран представлены в работах М.В. Волькенштейна, Ю.А. Владимирова, В.Ф. Антонова, А.Г. Пасынского, Ю.А. Чизмадзева, С.Э. Шноля, в трудах института биологической физики АН СССР и РАН [14–22].

В 1950-е годы представление о существовании клеточных мембран описывали Л.М. Чайлахян и его единомышленники [23]. В настоящее время представления о функциях мембран стали глубоко аргументированными, но многие тонкие детали их функционирования еще требуют выяснения [24].

М.В. Волькенштейн [25] отмечает, что биологическая система не только может, но и должна быть колебательной. Это – результат длительной эволюции. За время эволюции устойчивые системы уравновесились, стали частью природы, а неустойчивые системы распались. Могли сохраниться только открытые системы, далекие от равновесия, внутренние движения которых имеют колебательную природу. В таких системах вероятно возникновение динамического порядка, новых типов организации в пространстве и времени. Особый интерес представляют возбудимые мембраны.

Обнаруженные нами колебания электропроводности могут быть проявлением взаимодействия системы со средой. Внешнее воздействие оказывается фактором внутренней самоорганизации системы.

Нами предпринята попытка объяснения наблюдаемого колебательного процесса УЭП с точки зрения современных представлений теории электропорации – теории создания пор в бислоидной мембране под действием электрического тока. Электропорация основана на способности мембраны концентрировать электрическое поле. Клеточная мембрана является очень сложной системой, выполняющей барьерную функцию с помощью бимолекулярного слоя фосфолипидов, находящегося в жидкокристаллическом состоянии, который является диэлектриком.

Фосфолипидный бислой пронизан белками, выполняющими роль селективных $Na^+ - K^+$, H^+ , Ca^{2+} каналов (насосов) для ионов и метаболитов. Еще в середине XX века установлено, что клеточные мембраны способны время от времени менять свою проницаемость для ионов натрия и калия, а в ряде случаев мембрана некоторых клеток может выступать в роле периодически действующего физико-химического генератора. Управляющие этим явлением вещества изучены недостаточно, однако предполагается, что наблюдаемые колебания связаны с колебаниями концентрации этих веществ. Ионный ток является непрерывной функцией мембранного потенциала. За счет активного транспорта через биологические мембраны создаются градиенты концентраций и электрических потенциалов, давления, которые удерживают организм в неравновесном состоянии, оптимальном для жизненных процессов [14].

Под влиянием значимых внешних воздействий (например, электрический ток) возникает стрессовое состояние клетки, при котором могут возникать дефекты типа сквозных пор [17–20]. Специфическое воздействие электричества на мембрану микроорганизмов навязывает живой системе определенное функционирование. В нем проявляется борьба за жизнь микроорганизмов, которые в стрессовых условиях начинают вести себя по закону «все или ничего». Возникает изменение ионной симметрии, противоестественный механизм выхода из клетки ионов K^+ и входа ионов Na^+ , что приводит к изменению внутриклеточной концентрации ионов Na^+ и K^+ [16]. Происходит перезарядка мембранного потенциала, возникновение потенциала действия, увеличение электропроводности [15]. В этих условиях на мембране клетки возникают сквозные поры, которые под действием сил поверхностного натяжения и метаболических процессов могут затягиваться и мембрана остается целой. Результатом этого является восстановление на мембране исходного потенциала покоя, характерного для нее в отсутствие стресса.

Однако, если величина внешнего напряжения превысит величину потенциала пробоя, возникает явление самопробоя и биологическая гибель клетки [21, 22].

Возможно, наблюдаемые нами колебания электропроводности являются аддитивным отражением предпробойных процессов. Зафиксированные колебания являются незатухающими. Это свидетельствует о том, что электрическое воздействие (пробой мембраны) не приводит к возникновению незалечивающихся пор.

Наблюдаемое явление, вероятно, можно трактовать как модель «хищник–жертва». В качестве хищника выступает электрический ток, воздействие которого на мембраны микроорганизмов приводит к изменению характера метаболизма, а в качестве жертвы – живые микробные клетки, которые включают потенциал действия, чтобы восстановить исходное состояние в борьбе за жизнь [26].

Проблема изучения обнаруженного при измерении электропроводности природной воды колебательного процесса находится на стыке нескольких наук. Установление механизма этого процесса требует проведения дополнительных совместных исследований химиков, физиков, биологов, микробиологов, математиков.

Заключение

В работе впервые представлены экспериментальные результаты обнаружения незатухающих колебаний электропроводности природной воды, являющихся препятствием при определении ее общей минерализации и засоленности. Высказаны предположения, что наблюдаемый эффект является отражением метаболических процессов водной микрофлоры пруда, которое обсуждено в аспекте теории электропорации. Предложена методика определения электропроводности природной воды в нестандартных условиях, основанная на устранении причины возникновения колебательного процесса.

Библиографический список

1. *Шемякин Ф.М., Михалев П.Ф.* Физико-химические периодические процессы. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1938.
2. *Шауб Ю.Б.* Кондуктометрия. Владивосток: Изд-во Дальнаука, 1996.
3. *Чижевский А.Л.* Земное эхо солнечных бурь. М.: Мысль, 1976.
4. *Агеев И.М., Шишкин Г.Г.* Корреляция солнечной активности с электропроводностью воды // Биофизика. 2001. Т. 41, № 5. С. 829.
5. *Ермилов В.И., Лучков М.Н.* Годовые и более короткие циклы колебаний электропроводности водных сред. Иваново: Деп. в ВИНТИ 20.07.2004, № 1270. В. 2004.
6. *Ермилов В.И., Лучков М.Н.* Взаимосвязь флуктуаций изолированных водных растворов хлорида натрия. Иваново: Деп. в ВИНТИ 13.04.2004, № 604 В. 2004.
7. *Калинин В.В., Казак А.В.* Методика измерения электропроводности поверхностных природных вод. Основы теории // Вестник Моск. ун-та. Серия 4. Геология. 2008, № 2. С. 58.
8. *Калинин В.В., Казак А.В.* Методика измерения электропроводности поверх-

- ностных природных вод. Результаты эксперимента // Вестник Моск. ун-та. Серия 4. Геология. 2008, № 3. С. 48.
9. *Пригожин И., Стенгерс И.* Порядок из хаоса. М.: Едиториал УРСС, 2003.
 10. *Трубецков Д.И., Мчедлова Е.С., Красичков Л.В.* Введение в теорию самоорганизации открытых систем. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2002.
 11. *Князева Е.Н., Курдюмов С.П.* Синергетика как новое мировоззрение: Диалог с И. Пригожиным // Вопросы философии. 1992. № 12. С. 3.
 12. *Рузавин Г.И.* Проблемы простого и сложного в эволюции наук // Вопросы философии. 2008. № 3. С. 102.
 13. *Капица С.П., Курдюмов С.П.* Синергетика и прогнозы будущего. М.: Едиториал УРСС, 2003.
 14. *Антонов В.Ф.* Биофизика. М.: ВЛАДОС, 2003.
 15. *Пасынский А.Г.* Биофизическая химия. М.: Высшая школа, 1968.
 16. *Шноль С.Э.* Физико-химические факторы биологической эволюции. М.: Наука, 1979.
 17. *Абидор И.Г., Аракелян В.Б., Пастушенко В.Ф., Тарасевич М.Р., Черномордик Л.В.* Электрический пробой липидной бислоидной мембраны // Док. АН СССР. 1978. Т. 240. С. 733.
 18. *Антонов В.Ф.* Мембранный транспорт // Соросовский образовательный журнал. 1997. № 6. С. 14.
 19. *Биофизика мембран. Ионные каналы и их модели / Под ред. акад. П.Г. Костюк.* М.: Изд-во АН СССР, 1982. Т. 2.
 20. *Антонов В.Ф.* Липидные поры: Стабильность и проницаемость мембран // Соросовский образовательный журнал. 1998, № 10. С. 10.
 21. *Чизмаджев Ю.А., Аракелян В.Б., Пастушенко В.Ф.* Биофизика мембран. М.: Наука. 1981.
 22. *Владимиров Ю.А.* Биомембраны и незапрограммированная смерть клетки // Соросовский образовательный журнал. 2000. № 9. С. 2.
 23. *Либерман Е.А., Чайлахян Л.М.* О природе потенциала действия // Биофизика. 1959. Т. 4, вып. 5. С. 622.
 24. *Бржестовский П.Д.* Архитектура рецептор-управляемых ионных каналов биологических мембран // Биофизика. 2011. Т. 56, вып. 1. С. 62.
 25. *Волькенштейн М.В.* Биофизика. М.: Наука, 2003.
 26. *Трубецков Д.И.* Феномен математической модели Лотки-Вольтерры и сходных с ней // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19, № 2. С. 69.

*Саратовский государственный
аграрный университет им. Н.И. Вавилова*

Поступила в редакцию 20.09.2011

EXPERIMENTAL DETERMINATION OF CONTINUOUS VIBRATIONS IN ELECTROCONDUCTIVITY OF NATURAL WATERS

G.E. Ryazanova, N.V. Ryazantsev

In the process of hydrochemical analysis of natural waters by the direct contact conductometry method the phenomenon of continuous vibrations in specific electroconductivity was discovered for the first time. The possible reasons of the appearance of the vibration process are discussed.

Keywords: Hydrochemical analysis, specific electroconductivity, conductometry, continuous vibrations, biological membrane, predator–prey model.

Рязанова Галина Евгеньевна – окончила химический факультет СГУ (1958). Кандидат химических наук (1968), доцент (1971). В настоящее время доцент кафедры химии, агрохимии и почвоведения СГАУ им. Н.И. Вавилова. Почетный профессор СГАУ (2001), почетный работник высшего профессионального образования РФ (2009). Область научных интересов – полярнографическое изучение органических реактивов, динамика физико-химических и агроэкологических свойств природных объектов, философские вопросы химии, технология преподавания химии. Автор более 150 публикаций, в том числе монографии «Пространство и время химического движения» (1984, в соавторстве); 30 учебных пособий, в том числе 4 учебных пособий с грифом УМО РФ по агрономическому и агроэкологическому образованию (2003, 2006, 2007, 2009); двух компьютерных обучающих и контролирующих программ (2006, 2007) для вузов сельскохозяйственного профиля. Лауреат Всероссийской выставки-презентации изданий РАЕН «Золотой фонд отечественной науки» (М., 2011).



410012 Саратов, Театральная пл., 1
Саратовский аграрный университет им. Н.И. Вавилова
E-mail: ryazanovage@sgau.ru

Рязанцев Никита Валерьевич – родился в 1991 году. Окончил среднюю школу Саратова (2009). В настоящее время студент 3 курса агрономического факультета Саратовского государственного аграрного университета им. Н.И. Вавилова. Победитель областного конкурса Министерства образования Саратовской области «Студенческая наука 2010» в номинации «Естественные науки и медицина».



410012 Саратов, Театральная пл., 1
Саратовский аграрный университет им. Н.И. Вавилова
E-mail: ryaznikval@mail.ru



О МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИКИ СВЯЗАННЫХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ПОМОЩЬЮ ПРОСТЕЙШИХ ФАЗОВЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

А.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев, Ю.В. Седова, Л.В. Тюрюкина

Рассматривается задача описания динамики связанных автоколебательных осцилляторов с помощью дискретных отображений на торе. Обсуждается методология построения таких отображений как простейших формальных моделей, так и физически мотивированных систем. Обсуждаются отличия случаев диссипативной и реактивной связи осцилляторов. С помощью метода карт ляпуновских показателей выявляются области двух- и трехчастотной квазипериодичности и хаоса. Исследуется и сопоставляется устройство резонансной паутины Арнольда для разных моделей.

Ключевые слова: Синхронизация, квазипериодические колебания, отображение для фазы.

Введение

Круг вопросов, ассоциирующихся с динамикой связанных автоколебательных осцилляторов, является фундаментальным в теории колебаний и нелинейной динамике [1–10]. Описание различных систем такого рода используется в радиофизике, микроволновой электронике, биофизике, химии [1–18]. Случай двух осцилляторов стал уже классическим и обсуждается во многих учебниках и монографиях. Однако, задача о поведении уже трех осцилляторов оказывается существенно более сложной и прояснена в гораздо меньшей степени. Одним из подходов к исследованию проблемы синхронизации многочастотных колебаний может служить построение и анализ отображений, которые гораздо проще для исследования, чем соответствующие дифференциальные уравнения. Для этого необходимо сопоставить фазовому потоку некоторое отображение, которое расширяет и дополняет свойства «порождающего» потока с позиций явления синхронизации и сопутствующих эффектов. В этом плане характерным является соотношение двух базовых моделей теории колебаний, описывающих динамику фазы в случае двух осцилляторов: уравнения Адлера для потока и синус-отображения окружности в случае дискретного времени [1, 2, 19, 20]. Моделирование трех связанных осцилляторов с помощью отображений явилось одной из основных мотиваций серии работ [21–23], в которых предложена простейшая и достаточно общая (по мнению авторов) модель. Несмотря на ее простоту, такая модель

демонстрирует очень сложное и разнообразное поведение¹. Однако проблема имеет некоторые важные моменты, которые пока не достаточно освещены и обсуждаются в настоящей работе. Мы покажем, что в случае трех осцилляторов не удастся построить столь универсальную модель, как синус-отображение окружности в случае двух осцилляторов. Поэтому важным является физическая мотивация построения отображений, то есть учет тех или иных физических факторов и четкая физическая интерпретация использованных параметров. При этом мы дадим краткий обзор некоторых важных для физических задач результатов работ [21–23], а также представим некоторые новые иллюстрации для предложенной там модели. Однако главным является построение моделей в виде отображений для фаз на торе двух типов: для диссипативной и реактивной связи осцилляторов, а также их сопоставление с моделью Кима–Остлунда [21–23]. При этом мы будем использовать полученные сравнительно недавно результаты для фазовых потоков на торе [24–26], обобщающие уравнения Адлера и подходы к его анализу в случае трех осцилляторов.

1. Отображение окружности

Для дальнейшего нам понадобится краткое изложение мотивации введения в рассмотрение отображения окружности, как дискретного фазового осциллятора, что позволит пояснить подход, который применяется к большему числу осцилляторов. Кроме того, в этом разделе кратко коснемся особенностей синхронизации осцилляторов с диссипативной и реактивной связью, что также важно для дальнейшего обсуждения.

Как известно, если связь между автоколебательными системами мала, то для описания динамики достаточно изучить поведение их относительных фаз [1–10]. Наиболее простым инструментом для анализа фазовой динамики может служить дискретное отображение, которое возникает, например, при построении сечения Пуанкаре. В простейшем случае двух осцилляторов такое отображение для относительной фазы будет одномерным

$$\varphi_{n+1} = f(\varphi_n). \quad (1)$$

Для невозмущенной системы

$$\varphi_{n+1} = \Omega + \varphi_n, \quad (2)$$

так что фаза при каждой итерации получает постоянную добавку Ω . С точки зрения физики, уравнение (2) соответствует свободным колебаниям, а параметр Ω определяет разность собственных частот осцилляторов.

Свойство 2π -периодичности фазы позволяет считать, что после каждой итерации она остается в пределах интервала $(0, 2\pi)$.

Этот факт учитывают в отображении (2), записывая его как

$$\varphi_{n+1} = \Omega + \varphi_n, \quad \text{mod } 2\pi. \quad (3)$$

Знак $\text{mod } 2\pi$ означает, что отбрасывается часть, кратная 2π . В дальнейшем будем полагать такую процедуру выполненной, а знак $\text{mod } 2\pi$ для сокращения опускать.

¹Достаточно сказать, что работа [23] занимает 89 страниц журнального текста.

Влияние дополнительных факторов (например, взаимодействие осцилляторов) может возмущать динамику отображения поворота (1), так что в общем случае следует записать

$$\varphi_{n+1} = \Omega + \varphi_n + f(\varphi_n), \quad (4)$$

где $f(\varphi)$ – 2π -периодическая функция. При итерациях отображения (4) можно считать, что изображающая точка движется по окружности, и поэтому отображение (4) является отображением окружности на себя.

Свойства отображения окружности зависят от конкретного вида функции $f(\varphi)$. Наиболее простой и популярной моделью является синус-отображение окружности [1,19,20]. К этой модели можно прийти разными способами. Например, используем свойство периодичности фазы и разложим функцию $f(\varphi)$ в ряд Фурье

$$f(\varphi) = \sum a_m \sin m\varphi + \sum b_m \cos m\varphi. \quad (5)$$

Оставим теперь только первые, наиболее существенные члены ряда

$$f(\varphi) = b_0 + a_1 \sin \varphi + b_1 \cos \varphi + \dots \quad (6)$$

Сумму $a \sin \varphi + b \cos \varphi$ можно представить в виде единственного гармонического члена с новой амплитудой и фазой: $a \sin \varphi + b \cos \varphi = c \sin(\varphi + \alpha)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ и $\alpha = \arctg(b/a)$.

Таким образом, исходное отображение можно переписать в виде

$$\varphi_{n+1} = \Omega + b_0 + \varphi_n + c \sin(\varphi_n + \alpha). \quad (7)$$

Сделав замены $\varphi \rightarrow \varphi + \alpha$, $\Omega \rightarrow \Omega + b_0$, получаем одномерное синус-отображение окружности

$$\varphi_{n+1} = \Omega + \varphi_n + c \sin \varphi_n. \quad (8)$$

Представленный вывод не содержит физическую мотивацию построения отображения, соответственно его параметры, в определенном смысле, являются формальными. Поэтому используем другой подход, который позволяет прояснить связь параметров отображения с параметрами физической системы в контексте задач синхронизации.

Базовой моделью теории колебаний, описывающей явление взаимной синхронизации, является система двух связанных автоколебательных осцилляторов ван дер Поля [1–4]

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda - x^2) \dot{x} + (1 - \Delta/2)x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) + \varepsilon(x - y) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2) \dot{y} + (1 + \Delta/2)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) + \varepsilon(y - x) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь λ – параметр отрицательного трения, отвечающий за возможность автоколебаний в отдельном осцилляторе, Δ – параметр частотной расстройки осцилляторов, μ – величина *диссипативной* связи, ε – величина *реактивной* связи.

В физическом плане система (9) описывает два связанных радиофизических автогенератора [1,2]. С этой точки зрения, важной является возможность двух типов связи. В первом случае автогенераторы связаны через резистор (сопротивление), а во втором – через реактивный элемент (емкость) [2].

Явление синхронизации состоит в том, что фазы осцилляторов подстраиваются друг под друга. Если параметр возбуждения, частотная расстройка и величина связи малы, то уравнения (9) допускают анализ в рамках квазигармонического приближения. Если, кроме того, предельные циклы автономных систем за счет связи практически не возмущаются, то достаточно следить только за относительной фазой осцилляторов φ . В случае диссипативной связи соответствующее уравнение хорошо известно и носит название уравнения Адлера [1,2,10]

$$\dot{\varphi} = -\Delta/2 - \mu \sin \varphi. \quad (10)$$

Уравнение Адлера описывает основные эффекты в системе, а именно, захват фазы колебаний внешним сигналом при $\mu > |\Delta|$ и режим биений при $\mu < |\Delta|$. Таким образом, на плоскости (Δ, μ) захвату фазы отвечает область внутри языка синхронизации (языка Арнольда), а квазипериодическим режимам – область вне его [1–10].

В расчетах дифференциальные уравнения заменяются конечными разностями, например, с помощью схемы Эйлера

$$\dot{\varphi} \rightarrow (\varphi_{n+1} - \varphi_n) / h, \quad (11)$$

где h – шаг дискретизации. На эту процедуру можно посмотреть и несколько иначе – как на один из способов построения *новых дискретных моделей*. Этот прием широко используется в работах одних из создателей теории стохастических колебаний Г.М. Заславского, Б.В. Чирикова, а также других авторов [27–30] при построении таких канонических моделей, как, например, стандартное отображение и др.

Применив такую процедуру к уравнению Адлера, получим

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - \Delta h + h\mu \sin \varphi_n. \quad (12)$$

Параметр дискретизации в соотношении (12) можно убрать перенормировкой

$$\Delta \rightarrow \Delta/h, \quad \mu \rightarrow \mu/h. \quad (13)$$

В результате приходим к одномерному отображению для фазы в форме синус-отображения окружности

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - \Delta + \mu \sin \varphi_n. \quad (14)$$

Таким образом, это отображение можно рассматривать как *дискретный фазовый осциллятор*, моделирующий синхронизацию двух диссипативно связанных автоколебательных систем.

Отображение окружности «наследует» основное свойство системы-прототипа – наличие основного языка синхронизации, которому теперь отвечает неподвижная точка отображения (14). При этом его граница, как и для уравнения Адлера, задается условием $\mu = \pm\Delta$. Однако, происходит и расширение круга описываемых феноменов, которые обнаруживают дополнительные особенности явления синхронизации.

Обратимся к карте динамических режимов синус-отображения окружности (8) (рис. 1). Карта получена следующим образом [20]: в каждой точке плоскости параметров (Δ, μ) численно определяется период цикла отображения (8), и эта точка окрашивается в определенный цвет в соответствии с полученным периодом. Эта

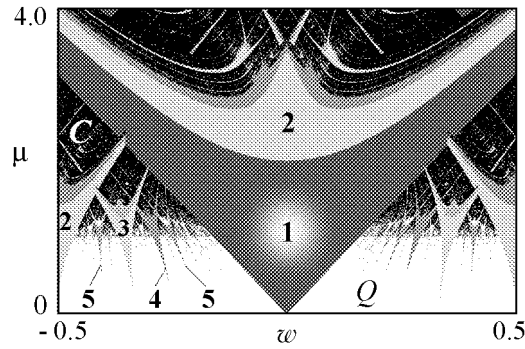


Рис. 1. Карта динамических режимов синус-отображения окружности. Цифрами указаны периоды циклов, Q – квазипериодические режимы, C – хаос

Наблюдаются удвоения периода, так называемые структуры *crossroad area* [20], и переход к хаосу. Также возникают языки синхронизации высшего порядка, которые фиксируются как режимы периода 2, 3, 4 и т.д., для которых частота колебаний и частота сигнала оказываются в некотором кратном отношении.

Несколько сложнее обстоит дело в случае реактивной связи. Этот тип связи – явление существенно более тонкое [1,2,5,31–33]. Влияние реактивной связи становится существенным (в отличие от диссипативной), только если возникает разница в размере орбит осцилляторов. Поэтому в фазовом приближении синхронизация оказывается эффектом второго порядка по величине связи (см. [31–33] и Приложение). В результате можно прийти к следующему фазовому уравнению:

$$2\dot{\varphi} = -\Delta - \varepsilon^2 \sin 2\varphi. \quad (15)$$

Границы языка синхронизации в случае реактивной связи даются соотношениями $\varepsilon = \pm\sqrt{\Delta}$, так что язык имеет очень острое основание в виде корневой особенности. При этом возникает также новый эффект – *фазовая бистабильность*, когда устойчивый режим синхронизации возможен как в фазе $\varphi \approx 0$, так и в противофазе $\varphi \approx \pi$ [4,32–33]. Отметим, что задача о синхронизации многих осцилляторов в случае реактивной связи достаточно интересна не только в радиофизической интерпретации: например, она возникает при изучении структурообразования в ионных ловушках [34].

2. Отображения на торе

Если динамика фаз описывается it двумерным отображением, то в общем случае его можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= \Omega_1 + \varphi_n + f(\varphi_n, \psi_n), \\ \psi_{n+1} &= \Omega_2 + \psi_n + g(\varphi_n, \psi_n), \end{aligned} \quad (16)$$

где функции являются 2π -периодическими по обоим аргументам: $f(\varphi + 2\pi n, \psi + 2\pi m) = f(\varphi, \psi)$ и $g(\varphi + 2\pi n, \psi + 2\pi m) = g(\varphi, \psi)$.

процедура повторяется для всей плоскости параметров. Периоды основных режимов подписаны на карте. Кроме того, белым цветом показаны квазипериодические режимы Q , а черным – хаоса C . Для визуализации этих режимов дополнительно рассчитывался ляпуновский показатель системы, при этом хаосу отвечает положительный показатель, а квазипериодическим режимам – нулевой.

На карте можно видеть усложненные картины в основной области синхронизации: внутри языка периода 1

Благодаря свойствам периодичности, динамика двумерного отображения фаз происходит в области $0 < \varphi < 2\pi$, $0 < \psi < 2\pi$. Отображение (16) называют *отображением на торе*. В физическом плане эта задача отвечает взаимодействию трех осцилляторов, так что φ и ψ – относительные фазы осцилляторов.

В отсутствие возмущений система (16) распадается на два несвязанных отображения поворота

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \Omega_1 + \varphi_n, \\ \psi_{n+1} &= \Omega_2 + \psi_n.\end{aligned}\tag{17}$$

При этом первая фаза вращается с угловой скоростью Ω_1 , а вторая – с угловой скоростью Ω_2 . Параметры Ω_1 и Ω_2 определяются разностью собственных частот первого-второго и второго-третьего осцилляторов. Функции $f(\varphi, \psi)$ и $g(\varphi, \psi)$ определяют возмущения отображений поворота.

Для двумерных отображений на торе не удастся построить простую и достаточно универсальную единую модель, как в случае одной фазовой переменной. Действительно, разложение функций в двумерный ряд Фурье с учетом только первых членов приводит к отображению

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \Omega_1 + \varphi_n + a_1 \sin \varphi_n + b_1 \sin \psi_n + c_1 \sin \varphi_n + d_1 \cos \psi_n, \\ \psi_{n+1} &= \Omega_2 + \psi_n + a_2 \sin \psi_n + b_2 \sin \varphi_n + c_2 \sin \varphi_n + d_2 \cos \varphi_n.\end{aligned}\tag{18}$$

С помощью процедуры сдвига для переменных и частотных параметров, аналогичной описанной выше, можно прийти к системе

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \Omega_1 + \varphi_n + a_1 \sin \varphi_n + \mu_1 \sin(\psi_n - \alpha), \\ \psi_{n+1} &= \Omega_2 + \psi_n + a_2 \sin \psi_n + \mu_2 \sin(\varphi_n - \beta).\end{aligned}\tag{19}$$

Полученная модель содержит восемь существенных параметров. Столь большое их число обусловлено, в частности, тем, что подсистемы могут быть неидентичными по своим параметрам, и кроме того, несимметрично связанными. Такой проблемы нет в случае единственной фазовой переменной.

Если индивидуальные подсистемы идентичны (за исключением собственных частот $\Omega_{1,2}$), а связь симметрична, то приходим к модели

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \Omega_1 + \varphi_n + a \sin \varphi_n + \mu \sin(\psi_n - \alpha), \\ \psi_{n+1} &= \Omega_2 + \psi_n + a \sin \psi_n + \mu \sin(\varphi_n - \alpha).\end{aligned}\tag{20}$$

Впрочем, и модель (20) оказывается все же не столь универсальной, как синус-отображение окружности. Причина состоит в том, что в случае двух взаимодействующих подсистем связь может быть организована также через разность фаз переменных, что приводит к такой форме отображения на торе:

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \Omega_1 + \varphi_n + a \sin \varphi_n + \mu \sin(\varphi_n - \psi_n), \\ \psi_{n+1} &= \Omega_2 + \psi_n + a \sin \psi_n + \mu \sin(\psi_n - \varphi_n).\end{aligned}\tag{21}$$

Подобная ситуация возникает, например, при оптической связи в системе взаимодействующих лазеров [35]. Определенное значение может иметь и *геометрия связи*.

Действительно, три осциллятора можно соединить в цепочку, а можно – в кольцо, что будет приводить к разным моделям [29,36]. Наконец, при описании *реактивного* взаимодействия осцилляторов будут существенными функции удвоенного угла, то есть члены типа $\sin 2\varphi_n$.

Таким образом, в случае динамики на торе не удастся построить столь простую и столь универсальную модель, как в случае динамики на окружности. Поэтому можно идти двумя путями. Во-первых, можно выбирать те или иные комбинации коэффициентов в модели (20) или (21), руководствуясь чисто формальными соображениями простоты. Во-вторых, можно обращаться к дополнительной физической мотивации в постановке задачи. Мы рассмотрим оба этих подхода и сравним их.

3. Отображение Кима–Остлунда

В работах [21–23] была предложена и исследована модель – *отображение Кима–Остлунда (Kim–Ostlund)*, которое представляет собой два связанных простейшим образом отображения поворота

$$\begin{aligned}\psi_{n+1} &= \Omega_1 + \psi_n - \mu \sin \varphi_n, \\ \varphi_{n+1} &= \Omega_2 + \varphi_n - \mu \sin \psi_n.\end{aligned}\tag{22}$$

Его особенность состоит в том, что возмущение данной переменной содержит только члены, относящиеся к другой. Далее удобно будет использовать нормированные частотные параметры, так что $\Omega_{1,2} = 2\pi w_{1,2}$. Величины $w_{1,2}$ имеют смысл чисел вращения для фазовых переменных при выключенной связи.

Представим здесь в обзорном плане наиболее физически значимые результаты [21–23] и дополним их некоторыми иллюстрациями. Карта динамических режимов отображения (22) на плоскости чисел вращения (w_1, w_2) для уровня связи $\mu = 0.7$ приведена на рис. 2, *а*. На рис. 2, *б* представлена в тех же масштабах карта ляпуновских показателей.

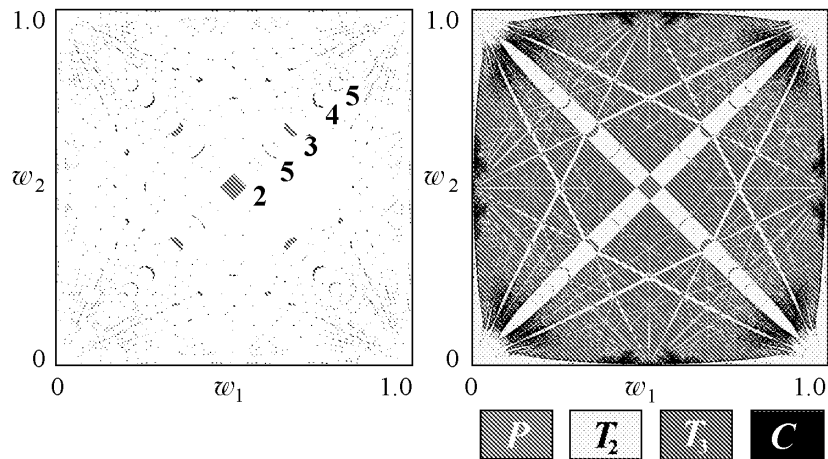


Рис. 2. *а* – карта динамических режимов; *б* – карта ляпуновских показателей отображения Кима–Остлунда; $\mu = 0.7$. Цифрами указаны периоды некоторых резонансов. Для ляпуновской карты под рисунком дана тоновая палитра

При построении карты ляпуновских показателей рассчитывался *спектр* показателей Ляпунова Λ_1, Λ_2 отображения (22), а затем плоскость параметров окрашивалась так, чтобы визуализировались следующие режимы:

- P – периодический режим, $\Lambda_1 < 0, \Lambda_2 < 0$,
- T_2 – двухчастотный квазипериодический режим, $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 < 0$,
- T_3 – трехчастотный квазипериодический режим, $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = 0$,
- C – хаос, $\Lambda_1 > 0$.

При малой связи доминируют режимы трехчастотной квазипериодичности, поскольку вращения каждой переменной «почти» независимы. С ростом связи, при ее «умеренном» значении, чему отвечает рис. 2, возникают достаточно выраженные области как двухчастотных, так и периодических режимов, а также небольшие области хаоса.

Возникновение двухчастотных T_2 и периодических P режимов связано с определенными резонансами в системе. При этом при выполнении *одного* резонансного условия может возникнуть двухчастотная квазипериодичность, а при выполнении *двух* резонансных условий – периодический режим. Обсудим этот вопрос подробнее.

Двумерная фазовая система имеет характерные частоты, определяемые числами вращения w_1 и w_2 . Они могут находиться в резонансе соотношении

$$nw_1 + mw_2 = p, \quad (23)$$

где n, m и p – целые числа. Если собственные частоты w_1 и w_2 фиксированы, то соотношение (23) представляет собой *Диофантово уравнение*, которое надо разрешить в целых числах относительно n, m и p . Эти величины и определяют тип резонанса. При этом чем меньше величины n, m и p , тем более сильным является резонанс.

На соотношение (23) можно посмотреть и несколько иначе. Фиксируем набор резонансных чисел (n, m, p) . Тогда уравнение (23) на плоскости чисел вращения задает прямую линию. Вдоль этой линии выполняется резонансное условие, а значит, возникают резонансные колебания. Поскольку это условие одно, то вдоль линии (23) будут возникать полосы двухчастотных резонансных режимов, которым на карте ляпуновских показателей будут отвечать области с одним нулевым показателем. Чем сильнее резонанс, тем более широкими будут эти полосы.

Для примера на рис. 3, *а* показано несколько линий, заданных уравнением (23) с небольшими значениями (n, m, p) , в частности,

$$\begin{aligned} w_1 - w_2 = 0, \quad w_1 + w_2 = 1, \quad 2w_1 - w_2 = 0, \quad w_1 - 2w_2 = 0, \quad (24) \\ w_1 + 2w_2 = 1, \quad w_1 - 2w_2 = -1, \quad \dots \end{aligned}$$

В результате возникает структура *резонансной паутины Арнольда* (*Arnold web* [37]), рис. 3, *а*². Эта картина хорошо согласуется с устройством ляпуновской карты на рис. 2, *б*.

²Строго говоря, термин «паутина Арнольда» используется в теории консервативного хаоса для описания соответствующих резонансных структур в фазовом пространстве, например, для пары переменных «действие» двух связанных систем [39,40]. В то же время, процедура построения такой структуры аналогична обсуждаемой на рис. 3. Поэтому авторы [37] относят этот термин и к соответствующему устройству плоскости параметров диссипативных систем.

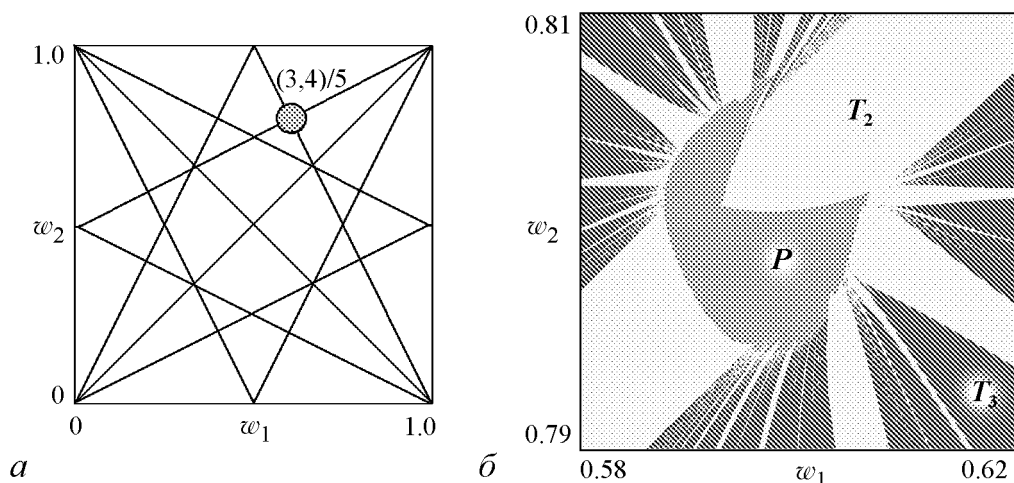


Рис. 3. *a* – схематическая иллюстрация построения резонансной паутины Арнольда, кружочком показана область локализации резонанса $(3,4)/5$; *б* – ляпуновская карта отображения Кима–Остлунда в окрестности резонанса $(3,4)/5$

В свою очередь, на пересечении линий (23) лежат резонансы, которым на плоскости (w_1, w_2) отвечают уже области *периодических режимов*. Периодические режимы характеризуются теми или иными комбинациями двух чисел вращения w_1 и w_2 взаимодействующих подсистем. При этом каждый периодический резонанс удобно характеризовать фактором $(p, q)/n$, где после сокращения дроби величина $w_1 = p/n$ представляет собой первое число вращения, $w_2 = q/n$ – второе, а n – общий знаменатель. На карте динамических режимов такой резонанс фиксируется как область периода n . Характеристику резонанса $(p, q)/n$ можно назвать комбинационным числом вращения.

В случае отображения Кима–Остлунда в соответствии с картой на рис. 2, *a* самый сильный резонанс отвечает области периода 2 и характеризуется комбинационным числом вращения $(1,1)/2$. Этот резонанс лежит на пересечении резонансных линий $w_1 - w_2 = 0$ и $w_1 + w_2 = 1$. На ляпуновской карте (рис. 2, *б*) в окрестности этих линий возникают две самые широкие полосы двухчастотных режимов. Внутри этих полос, в свою очередь, наблюдается семейство наиболее выраженных периодических резонансов с совпадающими числами вращения $w_1 = w_2$, отмеченных на карте цифрами 2, 3, 4, ... в соответствии с их периодами. Это, своего рода, «главная последовательность» резонансов отображения Кима–Остлунда.

Пример более слабого периодического резонанса другого типа в структуре резонансной паутины показан кружочком на рис. 3. Ему отвечает комбинационное число вращения $(3,4)/5$. Резонанс лежит на пересечении линий

$$w_1 - 2w_2 = -1, \quad 2w_1 + w_2 = 2. \quad (25)$$

Следует отметить, что периодические режимы занимают некоторые конечные области на плоскости чисел вращения. Поэтому через каждую такую область проходят не только две линии $nw_1 + mw_2 = p$, порождающие данный резонанс, но и другие линии двухчастотных резонансов. В результате вокруг периодических областей возникают характерные «звезды» из лучей двухчастотных режимов. Пример такой структуры представлен на рис. 3, *б*.

Области периодических режимов на рис. 2 могут быть устроены по-разному. *Простейший* резонанс выглядит так, как показано на рис. 4 на примере резонанса $(3,3)/4$. На этом рисунке можно видеть две линии седло-узловых бифуркаций SN в форме двух вложенных друг в друга овалов. Эти линии соединяются линиями бифуркации Неймарка–Сакера NS , которые, в свою очередь, заканчиваются на линиях седло-узловых бифуркаций в точках резонанса $1:1$ R_1 . При этом на плоскости параметров возникают следующие области, отмеченные на рис. 4:

(1,1) – когда имеется одна устойчивая и одна неустойчивая неподвижные точки³;

(0,2) – когда устойчивых точек нет, и имеются две неустойчивые точки;

(0,0) – неподвижных точек нет вообще.

Таким образом, область полной синхронизации представляет собой половину «бублика», образованного линиями седло-узловых бифуркаций. Верхняя граница этой области дается линиями бифуркации Неймарка–Сакера, на которых одна неподвижная точка теряет устойчивость и порождает устойчивую инвариантную кривую. На карте динамических режимов такие простейшие резонансы отображаются в виде небольших «полумесяцев». Следует отметить, что на рис. 4 даны только линии локальных бифуркаций. Полная картина включает и множество различных нелокальных бифуркаций [22,23].

Портреты резонансов на рис. 2,3,4, на первый взгляд, кажутся достаточно разнообразными. Однако, как обосновывается в [21–23], в случае небольшой связи картина линий седло-узловых бифуркаций представляет собой проекции торов на плоскость параметров. Этот факт хорошо виден для простейшего резонанса (см. рис. 4). В свою очередь, с ростом связи на линиях седло-узловых бифуркаций могут появляться четыре точки сборки, что отвечает проекции немного развернутого в пространстве тора. Такие иллюстрации можно найти не только в работах [21–23], но и в работе [38]. Полная картина бифуркаций, однако, включает большое количество нелокальных бифуркаций и бифуркаций коразмерности два и очень сложна [23].

С ростом связи описанная картина нарушается. На бифуркационных линиях возникают дополнительные пары сборок, а также возникают бифуркации удвоения периода. Рис. 5 иллюстрирует картину для случая большой связи $\mu = 1.18$. Области трехчастотных режимов исчезают и вытесняются хаосом. Более того, почти полностью разрушаются области двухчастотных торов, за исключением режимов, лежащих вблизи значения $w_2 = 1$. Области периодических режимов, наоборот, увеличиваются в размере. При этом внутри многих точных резонансов возникают области удвоенных периодов. Особенно хорошо это видно для резонансов периода 5. На

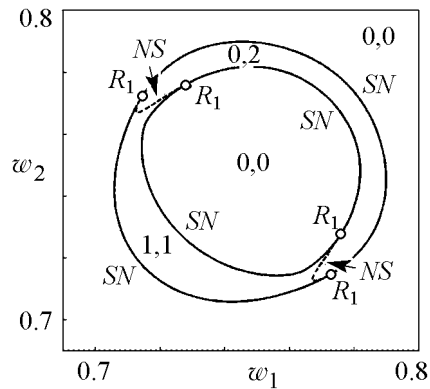


Рис. 4. Бифуркационный портрет «простейшего» резонанса $(3,3)/4$ для отображения Кима–Остлунда; $\mu = 0.9$

³В соответствии с порядком резонанса неподвижные точки определены через четыре итерации отображения.

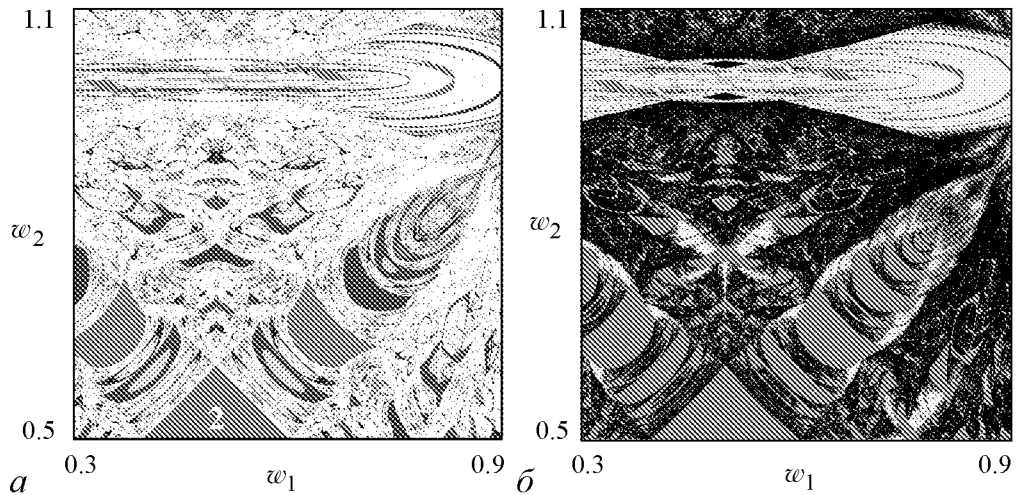


Рис. 5. *a* – карта динамических режимов и *б* – карта ляпуновских показателей отображения Кима–Остлунда; $\mu = 1.18$. Оттенки серого цвета на рис. 5, *б* соответствуют таковым на рис. 2, *б*

карте ляпуновских показателей (см. рис. 5) можно видеть, что области хаоса возникают также внутри резонансов, и что на «главной последовательности», фактически, возникает ситуация перекрытия резонансов.

4. Отображение на торе: три диссипативно связанных фазовых осциллятора

Как уже отмечалось, для динамики на торе нет столь универсальной модели, как в случае динамики на окружности. Поэтому целесообразно развить подход, основанный на конструировании моделей в виде дискретных осцилляторов, отталкивающийся от физической постановки задачи. Это, во-первых, позволит конкретизировать вид отображений и, в какой-то мере, классифицировать их, а во-вторых, – придать четкий физический смысл используемым параметрам.

Обратимся поэтому к простейшей физической задаче, в которой возникает ситуация трехчастотного взаимодействия, – цепочке из трех диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля. Исходные уравнения в этом случае имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + \omega_1^2 x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\
 \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + \omega_2^2 y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) + \mu(\dot{y} - \dot{z}) &= 0, \\
 \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + \omega_3^2 z + \mu(\dot{z} - \dot{y}) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

Здесь λ – параметр возбуждения автономных осцилляторов, ω_i – собственная частота i -го осциллятора, μ – коэффициент диссипативной связи. Нормировку уравнений всегда можно выбрать так, чтобы частота первого осциллятора равнялась единице. Кроме того, введем удобные для дальнейшего обозначения, так что

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2^2 = 1 + \Delta_{21}, \quad \omega_3^2 = 1 + \Delta_{31}.
 \tag{27}$$

Здесь параметры Δ_{21} и Δ_{31} характеризуют отстройку собственных частот второго и

третьего осцилляторов от частоты первого. По своему смыслу эти параметры могут быть как положительными, так и отрицательными.

Действуя стандартным образом в рамках метода медленно меняющихся амплитуд, можно получить следующие уравнения для относительных фаз осцилляторов⁴:

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= -\frac{\Delta_{21}}{2} - \mu \sin \theta + \frac{\mu}{2} \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= -\frac{\Delta_{32}}{2} - \mu \sin \varphi + \frac{\mu}{2} \sin \theta,\end{aligned}\tag{28}$$

где θ – разность фаз первого и второго, φ – разность фаз второго и третьего осцилляторов; параметр $\Delta_{32} = \Delta_{31} - \Delta_{21}$ характеризует частотную расстройку третьего осциллятора относительно второго. Как всегда при использовании метода медленно меняющихся амплитуд, параметр λ считается малым, а все параметры в (28) нормированы на его величину.

Выполняя дискретизацию системы (28) и используя перенормировку (13), получаем дискретную фазовую модель трех диссипативно связанных осцилляторов

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= 2\pi w_1 + \theta_n - \mu \sin \theta_n + \frac{\mu}{2} \sin \varphi_n, \\ \varphi_{n+1} &= 2\pi w_2 + \varphi_n - \mu \sin \varphi_n + \frac{\mu}{2} \sin \theta_n.\end{aligned}\tag{29}$$

Здесь параметр w_1 имеет смысл числа вращения, характеризующего собственную частоту второго осциллятора (частота первого фиксирована), а w_2 – относительную частоту второго и третьего осцилляторов.

Карты динамических режимов и ляпуновских показателей отображения (29) на плоскости чисел вращения (w_1, w_2) показаны на рис. 6, а, б для значения параметра связи $\mu = 0.6$. На рис. 6, в (фрагменты «1»–«6») представлены примеры фазовых портретов, иллюстрирующие некоторые возможные колебательные режимы. Портреты построены для точек, отмеченных соответствующими цифрами на ляпуновской карте.

В области P отображение имеет устойчивую неподвижную точку (период 1 на рис. 6, а). В этом случае значения относительных фаз осцилляторов θ_n и φ_n не меняются во времени, и наблюдается *полная синхронизация* всех трех осцилляторов. На физическом языке это означает, что произошел взаимный захват осцилляторов с соотношением частот 1:1:1.

Фазовый портрет «1» на рис. 6, в соответствует выходу из области полной синхронизации через ее нижнюю границу. В этом случае возникает устойчивая инвариантная кривая, которой отвечает решение со слабо осциллирующей фазой θ . Это означает, что происходит *частичный захват* первого и второго осцилляторов: их относительная фаза непостоянна, но ее колебания носят характер осцилляций с небольшой амплитудой. Отметим, что фаза θ на фрагменте «1» колеблется около значения $\theta = 0$, так что наблюдается *синфазная синхронизация* осцилляторов.

Фазовый портрет «2» соответствует выходу через левую границу полной синхронизации. В результате возникает устойчивая инвариантная кривая, отвечающая частичному захвату второго и третьего осцилляторов, когда небольшие колебания совершает уже фаза φ . Здесь тоже наблюдается синфазная синхронизация.

⁴В случае диссипативной связи осцилляторов этот вывод можно найти в [2,26,31,32].

При удалении от области полной синхронизации инвариантная кривая меняется незначительно (фазовый портрет «3»), а затем на ней могут возникать полные резонансы «главной» последовательности более высокого порядка, например, периода 3 (см. фрагмент «4»). Физически это отвечает полному захвату осцилляторов, но с кратным соотношением частот.

Если теперь уменьшить второе число вращения, то устойчивая инвариантная кривая сталкивается с неустойчивой инвариантной кривой и исчезает в результате соответствующей *квазипериодической седло-узловой бифуркации*. В результате рождается трехчастотный режим «5». В этом случае тор на рис. 4 является эргоди-

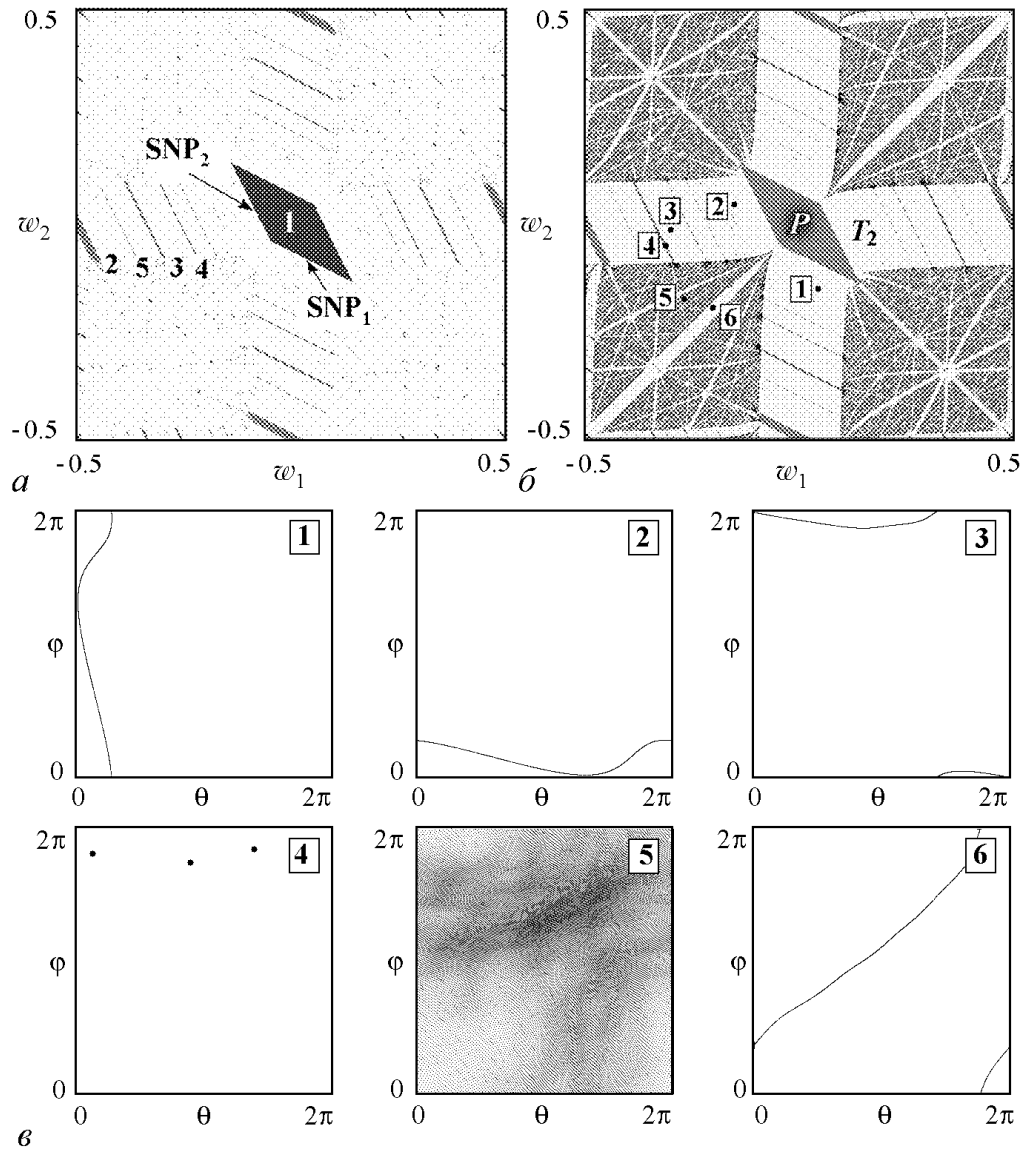


Рис. 6. a – карта динамических режимов, b – карта ляпуновских показателей и c – фазовые портреты для трех диссипативно связанных дискретных фазовых осцилляторов на плоскости чисел вращения; $\mu = 0.6$; SNP – saddle node point, вырожденные седло-узловые бифуркации неподвижных точек. Оттенки серого цвета на рис. 6, b соответствуют таковым на рис. 2, b

ческим – траектории всюду плотно покрывают его поверхность. Наконец, внутри области трехчастотных режимов возникают различные резонансные двухчастотные режимы, один из простейших примеров дан на фрагменте «б».

Интересно сопоставить полученную картину режимов с динамикой отображения Кима–Остлунда (22). При этом обнаруживаем определенные аналогии и в то же время некоторые отличия. Например, на рис. 6 также можно видеть характерную резонансную паутину Арнольда. Однако для трех диссипативно связанных осцилляторов определяющую роль в организации плоскости параметров играет режим неподвижной точки (периода один), отсутствующий в системе (22). Если перевести последнее утверждение на «физический язык», то это означает, что полная взаимная синхронизация, когда относительные фазы осцилляторов постоянны, в отображении Кима–Остлунда невозможна.

Второе существенное отличие – появление двух очень широких полос двухчастотных режимов, на пересечении которых и лежит область периода один. Эти полосы возникают около нулевых значений чисел вращения

$$w_1 = 0, \quad w_2 = 0. \quad (30)$$

В соответствии с их определением, первое резонансное условие (30) означает равенство собственных частот первого и второго осцилляторов $\omega_1 = \omega_2$, а второе – равенство собственных частот второго и третьего осцилляторов $\omega_2 = \omega_3$.

Таким образом, две эти полосы отвечают колебательным режимам частичного попарного захвата осцилляторов: первый-второй и второй-третий, что согласуется с представленными выше портретами на рис. 6, в. В эти полосы встроена система полных резонансов высшего порядка. Периоды наиболее сильных резонансов такого типа указаны на рис. 6, а. Отметим, что они не выглядят «традиционными» серпами, а имеют вид узких вытянутых полос.

Сама область периода 1 имеет своеобразное бифуркационное устройство, не совпадающее с резонансами типов, представленных на рис. 3, б и рис. 4. На картах рис. 6, а, б эта область представлена параллелограммом. В силу простоты отображения (29), ее границы легко найти аналитически. Действительно, для неподвижных точек (θ_0, φ_0) из (29) можно получить выражения для синусов относительных фаз

$$2w_1 + w_2 = 3\mu/4\pi \sin \theta_0, \quad (31)$$

$$w_1 + 2w_2 = 3\mu/4\pi \sin \varphi_0.$$

Условие обращения хотя бы одного из синусов в единицу отвечает седло-узловой бифуркации. Таким образом, параллелограмм на рис. 6, а, б образован линиями

$$2w_1 + w_2 = \pm 3\mu/4\pi, \quad (32)$$

$$w_1 + 2w_2 = \pm 3\mu/4\pi.$$

Нетрудно показать, что внутри него отображение (29) имеет четыре неподвижные точки: устойчивый узел, неустойчивый узел и два седла. При выполнении условий (32) неподвижные точки одновременно попарно сливаются и исчезают. Таким образом, область полной синхронизации ограничена линиями, своего рода, вырожденных седло-узловых бифуркаций. Отметим, что аналогичная картина имеет место и для

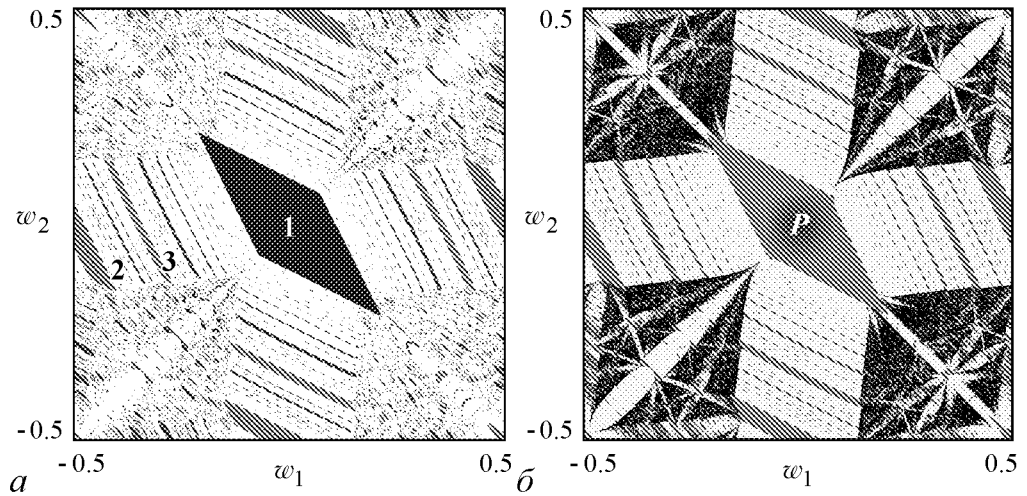


Рис. 7. *a* – карта динамических режимов и *b* – карта ляпуновских показателей для трех диссипативно связанных дискретных фазовых осцилляторов на плоскости чисел вращения; параметр связи $\mu = 0.9$. Оттенки серого цвета на рис. 7, *b* соответствуют таковым на рис. 2, *b*

поток на торе и описана в [24–26]⁵, только вместо неподвижных точек выступают состояния равновесия соответствующего потока.

Как вытекает из (32), размер резонансной области для основного резонанса пропорционален параметру связи μ . Это хорошо видно из рис. 7, отвечающего увеличенному значению $\mu = 0.9$. Рост параметра связи приводит к увеличению зоны основного резонанса. Соответственно увеличиваются полосы частичного захвата осцилляторов и размеры встроенных в них областей полных резонансов высшего порядка. Как видно из рис. 7, *b*, трехчастотные режимы разрушаются, и их вытесняет хаос. В то же время вдоль диагоналей «фазового квадрата» выявляются, хотя и небольшие по размерам, резонансы характерной «серповидной» формы. А вот вблизи значений $w_1 = 0$ и $w_2 = 0$ форма резонансов периода 2, 3 и т.д. близка к параллелограммам.

При исследовании взаимодействующих осцилляторов традиционный интерес представляет также устройство плоскости параметров «собственная частота – величина связи». Для двух осцилляторов именно на такой плоскости наблюдается язык Арнольда.

В случае трех осцилляторов, с физической точки зрения, удобно зафиксировать две собственные частоты, например, первого и третьего осцилляторов и менять частоту центрального. Это требует некоторого изменения используемого набора параметров. Напомним, что числа вращения w_1 и w_2 характеризуют расстройки частот первого-второго и второго-третьего осцилляторов. Поскольку частота первого осциллятора фиксирована, то параметр w_1 , фактически, задает частоту второго. Введем далее $w_3 = w_1 + w_2$, тогда w_3 и будет определять собственную частоту третьего осциллятора.

⁵Обратим внимание на тот факт, что для фазовых потоковых уравнений область полной синхронизации имеет вид параллелограмма, указано еще П.С. Ландой [2].

Отображение (29) в таких параметрах примет вид

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= 2\pi w_1 + \theta_n - \mu \sin \theta_n + \mu/2 \sin \varphi_n, \\ \varphi_{n+1} &= 2\pi(w_3 - w_1) + \varphi_n - \mu \sin \varphi_n + \mu/2 \sin \theta_n.\end{aligned}\quad (33)$$

На рис. 8 представлены карты режимов на плоскости (w_1, μ) при фиксированных значениях параметра w_3 , задающего собственную частоту третьего осциллятора. При этом рис. 8, а относится к случаю, когда собственные частоты первого и третьего осцилляторов близки ($w_3 = -0.01$), а рис. 8, б – когда они уже заметно отличаются ($w_3 = -0.1$). Эти карты полезно сравнить с картой отображения окружности (см. рис. 1), моделирующего два связанных осциллятора.

В центре рисунка располагается область полной синхронизации всех трех осцилляторов – область периода 1. Границы этой области даются соотношениями (32), которые теперь нужно разрешить относительно параметра связи, используя выражение для частоты третьего осциллятора $w_3 = w_2 + w_1$,

$$\begin{aligned}\mu &= \pm 4\pi/3(w_1 + w_3), \\ \mu &= \pm 4\pi/3(-w_1 + 2w_3).\end{aligned}\quad (34)$$

В отличие от случая двух осцилляторов, на рис. 8 имеет место *порог полной синхронизации*, который легко находим из (34):

$$\mu = 2\pi |w|, \quad w_1 = w/2. \quad (35)$$

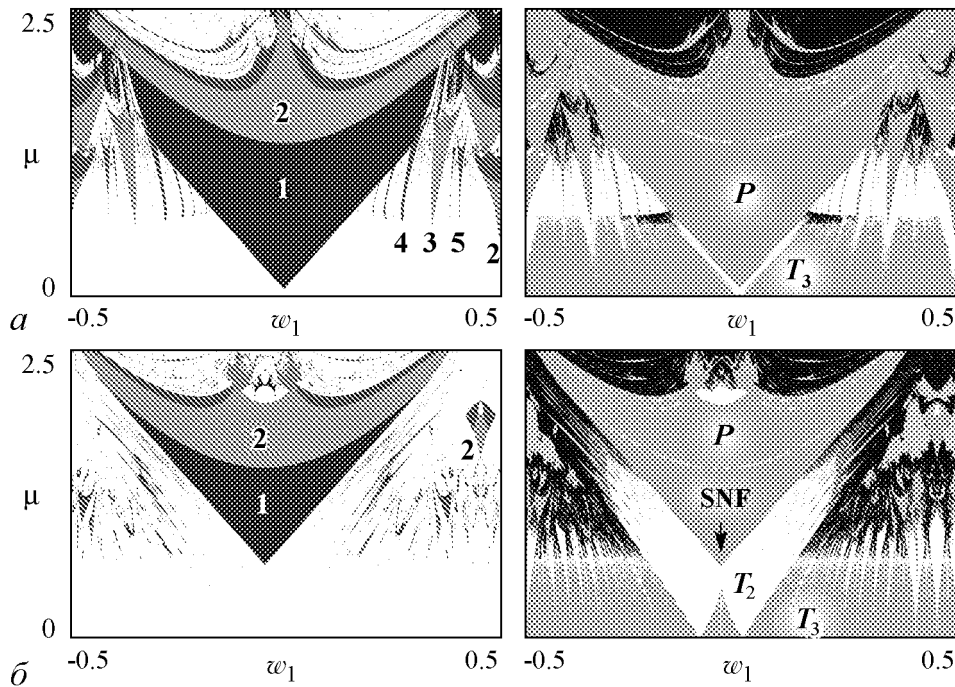


Рис. 8. Карты динамических режимов (левая колонка) и ляпуновских показателей (правая колонка) трех диссипативно связанных дискретных фазовых осцилляторов на плоскости «частота центрального осциллятора – величина связи» с частотными параметрами w третьего осциллятора: а – (-0.01) ; б – (-0.1) . SNF – точка *saddle node fan* (седло-узловой веер)

С точки зрения теории бифуркаций, формулы (35) определяют координаты точки коразмерности два, в которую на фазовой плоскости стягиваются одновременно все четыре неподвижные точки отображения. В [23] аналогичные точки получили название *saddle node fan* – *седло-узловой веер*, в соответствии с характерной картиной расходящихся от них подобно вееру областей двухчастотных режимов на плоскости параметров. Такие точки можно видеть также и на плоскости чисел вращения (см. рис. 6, б) на диагонали $w_2 = w_1$.

При малой частоте третьего осциллятора w_3 на рис. 8, а можно обнаружить модифицированную по сравнению с рис. 1 картину. Нижняя часть карты теперь представлена режимами трехчастотной квазипериодичности. Они лежат, в основном, в области $\mu \leq 0/6$. Языки полной синхронизации разных периодов «отрываются» от оси абсцисс. Теперь все типы режимов полной синхронизации имеют порог по величине связи. Вблизи их оснований формируются области двухчастотных режимов, которые «вторгаются» в область трехчастотной квазипериодичности в виде некоторых локальных областей. При больших значениях связи картина режимов полной синхронизации, тем не менее, аналогична случаю синус-отображения окружности.

Увеличим теперь расстройку частот третьего и первого осцилляторов (рис. 8, б). При этом граница трехчастотных режимов по величине связи почти не меняется. Отметим, что внутри нее формируется выраженная система языков двухчастотных режимов. Особо заметными являются две области, граничащие с языком периода 1 и отвечающие ситуации попарного захвата первого-второго и второго-третьего осцилляторов. При этом внутри таких областей возникает новая система узких языков полных резонансов, перекрытие которых при $\mu \approx 1.5$ приводит к хаосу.

Увеличение расстройки третьего и первого осцилляторов приводит к тому, что структура областей полной синхронизации высокого порядка, характерная для отображения окружности, разрушается. На рис. 8, б кроме языка периода один можно видеть только еще одну такую область на базе периода 2. Существенно модифицируется и внутреннее устройство основного языка полной синхронизации по сравнению со случаем синус-отображения окружности. Обращает на себя внимание факт возникновения *вторичной бифуркации Неймарка–Сакера* и связанной с ней новой области квазипериодичности на базе цикла периода 2 внутри основного языка.

5. Дискретные модели осцилляторов: сопоставление

Мы рассмотрели две системы: формальную модель Кима–Остлунда и дискретное отображение, моделирующее три осциллятора с диссипативной связью, приводящее к отображению на торе. Они дают понимание многих существенных моментов задачи трехчастотной синхронизации, таких как полная и частичная синхронизация, возможность трех- и двухчастотных квазипериодических режимов. Наличие трех частот позволяет ввести в рассмотрение еще одну важную иллюстрацию: плоскость чисел вращения, на которой возникает новый феномен – резонансная паутина Арнольда. При этом для системы с диссипативной связью резонанс 1:1:1 является самым сильным и значительно влияет на общую картину, в частности, порождает «главную последовательность» резонансов.

Если говорить об отображении Кима–Остлунда (37) в контексте описания связанных осцилляторов, то его недостаток – отсутствие основного резонанса 1:1:1, ассоциирующегося с устойчивой неподвижной точкой отображения. Действительно,

неподвижные точки отображения (22) удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \mu \sin \varphi_0, \\ \Omega_2 &= \mu \sin \psi_0.\end{aligned}\tag{36}$$

На первый взгляд, задача представляется аналогичной модели (29), поскольку имеются четыре неподвижных точки, которые испытывают седло-узловые бифуркации при пересечении сторон квадрата, образованного линиями $\Omega_1 = \pm\mu$, $\Omega_2 = \pm\mu$. Но особенность отображения Кима–Остлунда в том, что все его неподвижные точки неустойчивы. Действительно, матрица Якоби отображения (22) имеет вид

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & -\mu \cos \varphi_0 \\ -\mu \cos \psi_0 & 1 \end{pmatrix}.\tag{37}$$

Таким образом, ее след $S = 2$. В соответствии с бифуркационным анализом двумерных отображений [20] такие точки *всегда неустойчивы*. В результате самый сильный резонанс и «главная последовательность» связаны с колебаниями другого типа – периода 2.

Интересно прояснить физическую сторону этого момента задачи. Для этого развитый подход можно применить, чтобы «восстановить» исходную систему, которая может порождать отображение Кима–Остлунда (22). Потокотип, очевидно, выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= \Omega_1 - \varepsilon \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \Omega_2 - \varepsilon \sin \psi.\end{aligned}\tag{38}$$

Нетрудно показать, что ей отвечает следующая форма связанных осцилляторов ван дер Поля:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y - \mu(\dot{y} - \dot{x}) - \mu(\dot{y} - \dot{z}) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \mu(\dot{z} - \dot{y}) &= 0.\end{aligned}\tag{39}$$

В этом можно убедиться, применив к набору уравнений (39) метод медленно меняющихся амплитуд. Отличие от системы трех осцилляторов (26) состоит в изменении знака связи во втором уравнении. Таким образом, для второго осциллятора связь не диссипативная, а *активная*. Это предполагает наличие в цепи связи некоторого активного элемента (например, операционного усилителя). Таким образом, наличие активной компоненты в связи и разрушает основной резонанс. Еще одна особенность – асимметрия связи, поскольку для первого осциллятора член связи имеет диссипативную форму.

В то же время следует отметить, что отображение Кима–Остлунда (22) описывает важные детали картины: возможность резонансной паутины Арнольда, систему нелокальных бифуркаций и точки коразмерности два, которые демонстрируют очень сложную и емкую картину [21–23].

Заметим также, что возможна и другая геометрия связи: три осциллятора могут быть соединены в кольцо. Особенность такой задачи – возможность фазовой мультистабильности для основного резонанса, отвечающей колебаниям осцилляторов с разными фазовыми сдвигами [2,29,36].

6. Отображение на торе: три реактивно связанных осциллятора

Рассмотрим теперь другой тип связи осцилляторов, которому отвечают уравнения

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \varepsilon(x - y) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_{21})y + \varepsilon(y - x) + \varepsilon(y - z) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_{31})z + \varepsilon(z - y) &= 0.\end{aligned}\quad (40)$$

Здесь ε – параметр *реактивной* связи. Отличие от системы (26) состоит в том, что связь осуществляется не через скорости изменения переменных, а непосредственно через их значения. С физической точки зрения связь в случае (26) дает добавку к параметру диссипации, а в случае (40) – к собственной частоте колебаний. При радиофизической реализации генератора ван дер Поля диссипативная связь осуществляется через резистор (сопротивление), а реактивная – через конденсатор (емкость).

Как мы отмечали, реактивная связь – явление физически более тонкое, чем диссипативная и для описания синхронизации даже двух осцилляторов необходимо учитывать эффекты второго порядка по величине связи. Фазовые уравнения для случая реактивной связи трех осцилляторов с учетом этой особенности получены в Приложении и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}2\dot{\theta} &= -\varepsilon - \Delta_{21} + \varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2 (\sin \varphi \cos \theta - 1/2 \sin \theta \cos \varphi + 1/2 \sin 2\varphi - \sin 2\theta), \\ 2\dot{\varphi} &= \varepsilon - \Delta_{32} - \varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2 (\sin \theta \cos \varphi - 1/2 \sin \varphi \cos \theta + 1/2 \sin 2\theta - \sin 2\varphi).\end{aligned}\quad (41)$$

Здесь θ и φ – фазы второго осциллятора относительно первого и третьего относительно второго, соответственно, $\Delta_{32} = \Delta_{31} - \Delta_{21}$.

Уравнения для случая двух осцилляторов можно получить аналогично [39] или просто отбросив в (41) члены, содержащие вторую фазу,

$$2\dot{\theta} = -\Delta - \varepsilon^2 \sin 2\theta. \quad (42)$$

Это тоже уравнение Адлера, но в другой форме, которая и определяет особенности реактивной связи (см. обсуждение в п. 1).

Перейдем теперь к дискретной модели аналогично тому, как это было сделано для случая диссипативной связи

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= 2\pi w_1 - \varepsilon/2 + \theta_n + \varepsilon/2 \cos \varphi_n + \\ &+ \varepsilon^2/2 (\sin \varphi_n \cos \theta_n - 1/2 \sin \theta_n \cos \varphi_n + 1/2 \sin 2\varphi_n - \sin 2\theta_n), \\ \varphi_{n+1} &= 2\pi w_2 + \varepsilon/2 + \varphi_n - \varepsilon/2 \cos \theta_n + \\ &+ \varepsilon^2/2 (\sin \theta_n \cos \varphi_n - 1/2 \sin \varphi_n \cos \theta_n + 1/2 \sin 2\theta_n - \sin 2\varphi_n).\end{aligned}\quad (43)$$

Карты динамических режимов и ляпуновских показателей этого отображения на плоскости чисел вращения (w_1, w_2) показаны на рис.9 для уровня связи $\varepsilon = 0.6$. На этих картах можно видеть резонансную паутину Арнольда, но для нее характерна некоторая асимметрия. Она связана с воздействием реактивной связи на частоту (члены в виде добавок $\pm \varepsilon/2$ к числам вращения.)

Если отбросить члены второго порядка, то отображение (43) превращается, фактически, в отображение Кима–Остлунда. Таким образом, это отображение более

близко к случаю реактивной связи. При этом, однако, исчезает и основной эффект – синхронизация всех трех осцилляторов с соотношением частот 1:1:1. Более точное отображение учитывает этот эффект и приводит к картине, подобной приведенной на рис. 9, включая возможность полной синхронизации всех трех осцилляторов.

Как уже отмечалось, два реактивно связанных осциллятора могут захватиться как в фазе, так и в противофазе. Для трех осцилляторов число возможных конфигураций точного захвата увеличивается, и все они могут реализоваться в модели (43). Этот факт иллюстрируют фазовые портреты на рис. 10, б. Они построены в точках, отмеченных соответствующими цифрами на увеличенном фрагменте карты, представленном на рис. 10, а. Для удобства интерпретации все четыре портрета даны на одном рис. 10, б.

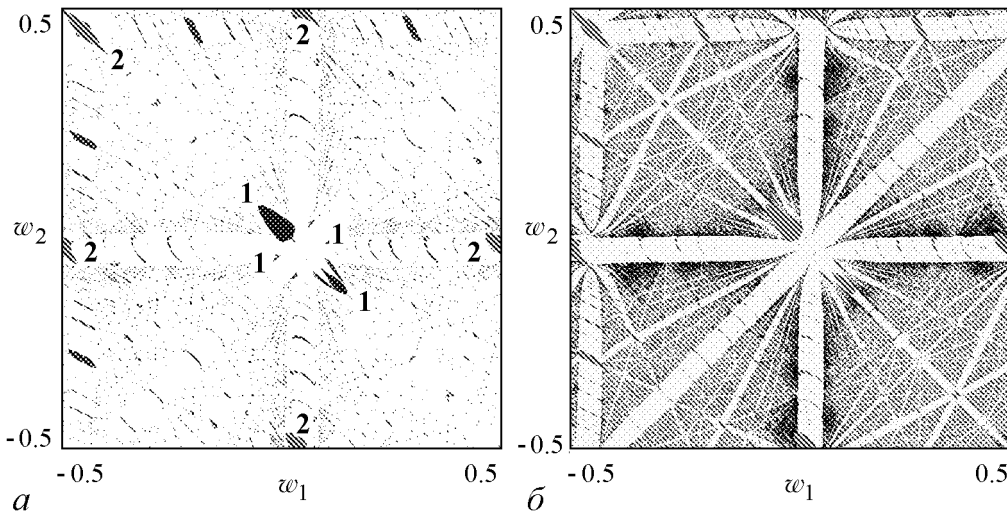


Рис. 9. *a* – карта динамических режимов и *б* – карта ляпуновских показателей на плоскости чисел вращения трех реактивно связанных осцилляторов. Цифры на карте (*a*) означают периоды циклов, параметр связи $\varepsilon = 0.6$. Оттенки серого цвета на рис. 9, б соответствуют таковым на рис. 2, б

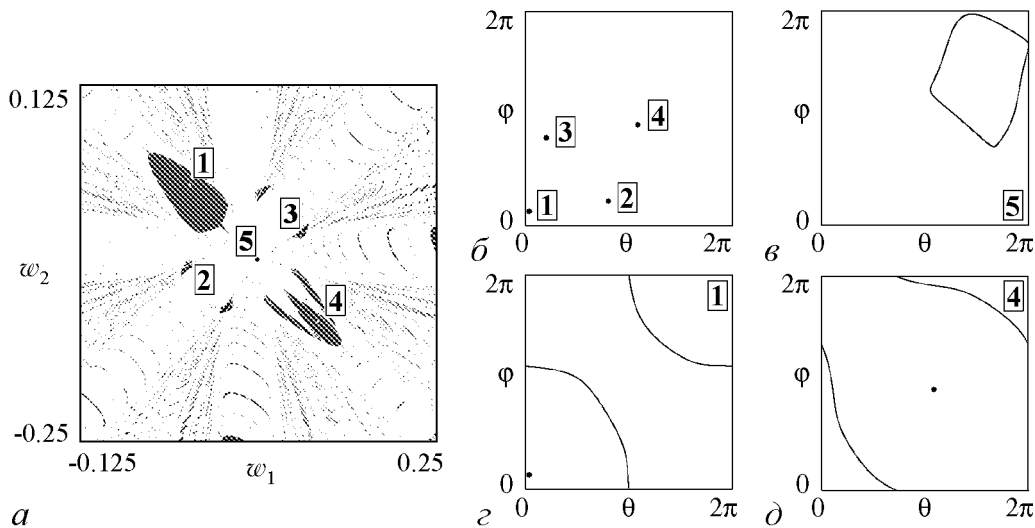


Рис. 10. *a* – Увеличенный фрагмент карты динамических режимов трех реактивно связанных осцилляторов и фазовые портреты: *б* – четыре типа захвата осцилляторов в режиме полной синхронизации, *в* – инвариантная кривая, *г-д* – сосуществование неподвижных точек и инвариантной кривой

Как видно из рис. 10, б, для точки 1 выполняется: ($\theta \approx 0$, $\varphi \approx 0$). Напомним, что θ – это относительная фаза первого и второго осциллятора, а φ – второго и третьего. Таким образом, в данном случае все три осциллятора захватываются синфазным образом, и их фазы примерно равны друг другу. В свою очередь, для точки 2 справедливо: ($\theta \approx \pi$, $\varphi \approx 0$). Это означает, что в фазе колеблются второй и третий осцилляторы, а первый движется относительно них в противофазе. В точке 3: ($\theta \approx 0$, $\varphi \approx \pi$), так что первый и второй осцилляторы захватились в фазе, а третий колеблется относительно них в противофазе. И, наконец, в точке 4: ($\theta \approx \pi$, $\varphi \approx \pi$).

Такой тип колебаний соответствует тому, что крайние осцилляторы колеблются в фазе, а центральный – в противофазе.

В случае реактивной связи существенной оказывается мультистабильность, когда режимы полной синхронизации могут сосуществовать с квазипериодическими. Так, на рис. 10, з, д показаны сосуществующие неподвижные точки и инвариантные кривые в точках 1 и 4. В то же время в точках 2, 3 и 5 мультистабильность не наблюдается.

Интересный режим реализуется в точке 5. В этом случае инвариантная кривая представляет собой замкнутую линию в виде овала. Это означает, что обе относительные фазы осциллируют около некоторых равновесных значений. Соответственно основные наблюдаемые частоты совпадают, но захват не точный: фазы не равны строго константам. Это будет приводить к некоторой модуляции на фоне колебаний с основной частотой. Отметим, что инвариантные кривые типа, изображенного на рис. 10, з, д и рис. 10, в, отличаются топологически – последняя может быть стянута в точку, а две первые нет. Соответственно кривые первого типа называются *вращательные (rotational)*, а второго – *стягиваемые (contractible)* [23].

Заключение

Модели в виде отображений для фаз (отображения на торе) являются удобным инструментом исследования динамики связанных автоколебательных осцилляторов. В случае уже двух фазовых переменных, однако, не удается построить достаточно простую и одновременно универсальную модель. Поэтому важным является построение моделей с учетом их физической мотивации (тип связи, геометрия связи и т.д.), которая позволяет дать наглядную интерпретацию использованных параметров. Исследование таких отображений выявляет основные элементы картины трехчастотных взаимодействий: области полной и частичной синхронизации, устройство точных резонансов, наличие резонансной паутины Арнольда на плоскости чисел вращения, мультистабильность в форме сосуществования квазипериодических режимов и режимов точного захвата и т.д. При этом осцилляторы с диссипативной и реактивной связью демонстрируют ряд существенных отличий (в устройстве области полной синхронизации, возможность как синфазной, так и противофазной синхронизации разных пар осцилляторов в цепочке и т.д.) Некоторые физически значимые элементы этой картины не описываются простейшей формальной моделью Кима–Остлунда.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 11-02-91334-ННИО.

Фазовые уравнения трех реактивно связанных осцилляторов

Рассмотрим случай реактивно связанных осцилляторов. Исходные уравнения в этом случае имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \varepsilon(x - y) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_{21})y + \varepsilon(y - x) + \varepsilon(y - z) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_{31})z + \varepsilon(z - y) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

Если параметр возбуждения λ мал, а также малы частотные расстройки и величина связи, то для анализа уравнений (П.1) можно применить метод медленно меняющихся амплитуд [1,2,10]. С этой целью представим динамические переменные в виде

$$x = ae^{it} + ae^{-it}, \quad y = be^{it} + be^{-it}, \quad z = ce^{it} + ce^{-it}. \quad (\text{П.2})$$

Здесь $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ – комплексные амплитуды осцилляторов, которые являются медленно меняющимися на фоне колебаний с единичной частотой.

Наложим традиционные для этого метода дополнительные условия:

$$\dot{a}e^{it} + \dot{a}e^{-it} = 0, \quad \dot{b}e^{it} + \dot{b}e^{-it} = 0, \quad \dot{c}e^{it} + \dot{c}e^{-it} = 0. \quad (\text{П.3})$$

Тогда имеем следующие выражения для скоростей осцилляторов:

$$\dot{x} = i(ae^{it} - ae^{-it}), \quad \dot{y} = i(be^{it} - be^{-it}), \quad \dot{z} = i(ce^{it} - ce^{-it}). \quad (\text{П.4})$$

Подставим соотношения (П.2)–(П.4) в уравнения (П.1) и отбросим члены, являющиеся быстро осциллирующими на фоне колебаний по закону e^{it} . Тогда приходим к укороченным уравнениям

$$\begin{aligned} 2\dot{a} &= \lambda a - |a|^2 a - \mu(a - b), \\ 2\dot{b} &= \lambda b - |b|^2 b + i\Delta_{21}b - \mu(b - a) - \mu(b - c), \\ 2\dot{c} &= \lambda c - |c|^2 c + i\Delta_{31}c - \mu(c - b). \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

Теперь параметр λ может быть убран перенормировкой переменных и параметров. Переходя к действительным амплитудам и фазам, получаем

$$\begin{aligned} 2\dot{R} &= R - R^3 - \varepsilon r \sin \theta, & 2\dot{\psi}_1 &= \varepsilon - \frac{r}{R} \cos \theta, \\ 2\dot{r} &= r - r^3 + \varepsilon R \sin \theta - \varepsilon v \sin \varphi, & 2\dot{\psi}_2 &= 2\varepsilon + \Delta_{21} - \varepsilon \frac{R}{r} \cos \theta - \varepsilon \frac{v}{r} \cos \varphi, \\ 2\dot{v} &= v - v^3 + \varepsilon r \sin \varphi, & 2\dot{\psi}_3 &= \varepsilon + \Delta_{31} - \frac{r}{v} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

Вычитая фазовые уравнения друг из друга, получаем уравнение для относительных фаз:

$$\begin{aligned} 2\dot{\theta} &= -\varepsilon - \Delta_{21} + \varepsilon \left(\frac{R}{r} - \frac{r}{R} \right) \cos \theta + \varepsilon \frac{v}{r} \cos \varphi, \\ 2\dot{\varphi} &= \varepsilon + \Delta_{21} - \Delta_{31} + \varepsilon \left(\frac{r}{v} - \frac{v}{r} \right) \cos \varphi - \varepsilon \frac{R}{r} \cos \theta, \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Отличие этих уравнений от случая диссипативной связи состоит в том, что эффективность действия связи, благодаря множителям типа $(R/r - r/R)$, пропорциональна разностям орбит осцилляторов. Поэтому эффект синхронизации в случае реактивной связи возникает только во втором порядке по возмущениям.

Чтобы провести рассмотрение с необходимой точностью, положим $R = 1 + \tilde{R}$, $r = 1 + \tilde{r}$ и $v = 1 + \tilde{v}$, где знаком «тильда» отмечены возмущения стационарных орбит. Из амплитудных уравнений тогда получаем для возмущений

$$\begin{aligned} 2\tilde{R} &= -\varepsilon \sin \theta, \\ 2\tilde{r} &= \varepsilon \sin \theta - \varepsilon \sin \varphi, \\ 2\tilde{v} &= \varepsilon \sin \varphi. \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

Соответственно из фазовых уравнений получаем

$$\begin{aligned} 2\dot{\theta} &= -\varepsilon - \Delta_1 + 2\varepsilon(\tilde{R} - \tilde{r}) \cos \theta + \varepsilon(1 + \tilde{v} - \tilde{r}) \cos \varphi, \\ 2\dot{\varphi} &= \varepsilon + \Delta_1 - \Delta_2 + 2\varepsilon(\tilde{r} - \tilde{v}) \cos \varphi - \varepsilon(1 + \tilde{R} - \tilde{r}) \cos \theta. \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

Подставляя в (П.9) выражения для возмущений (П.8), получаем:

$$\begin{aligned} 2\dot{\theta} &= -\varepsilon - \Delta_{21} + \varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2 (\sin \varphi \cos \theta - 1/2 \sin \theta \cos \varphi + 1/2 \sin 2\varphi - \sin 2\theta), \\ 2\dot{\varphi} &= \varepsilon - \Delta_{32} - \varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2 (\sin \theta \cos \varphi - 1/2 \sin \varphi \cos \theta + 1/2 \sin 2\theta - \sin 2\varphi), \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

где $\Delta_{32} = \Delta_{31} - \Delta_{21}$. Это и есть искомые уравнения.

Отметим, что если отбросить в первом уравнении члены, содержащие фазу φ , то есть «отключить» третий осциллятор, то получаем уравнение двух реактивно связанных осцилляторов (15)

$$\dot{\theta} = -\Delta_{21} - \varepsilon^2 \sin 2\theta. \quad (\text{П.11})$$

Библиографический список

1. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
2. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 359 с.
3. Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981. 352 с.
4. Balanov A.G., Janson N.B., Postnov D.E., Sosnovtseva O. Synchronization: From simple to complex. Springer, 2009. 437 p.
5. Гукенхеймер Дж., Холмс П. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва–Ижевск: РХД, 2002. 508 с.
6. Kuramoto Y. Chemical oscillations, waves, and turbulence. (Springer Ser. Synergetics, vol.19.) Berlin: Springer, 1984. 156 p.
7. Гласс Л., Мэки М. От часов к хаосу: Ритмы жизни. М.: Мир, 1991. 248 с. [Glass L., MacKey M.C. From clocks to chaos: The rhythms of life. Princeton, NY: Princeton Univ. Press, 1988. 248 p.]
8. Winfree A. The geometry of biological time. 2nd ed. New York: Springer, 2001. 777 p.

9. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Стрелкова Г.И.* Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008. 136 с.
10. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2-е изд., 2005. 292 с.
11. *Репин Б.Г., Дубинов А.Е.* Исследование режимов фазировки трех виркаторов в рамках модели связанных осцилляторов ван дер Поля // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 76, Вып. 4. С. 99.
12. *Kawahara T.* Coupled Van der Pol oscillators – A model of excitatory and inhibitory neural interactions // *Biological Cybernetics*. 1980. Vol. 39, № 1. P. 37.
13. *Crowley M.F., Epstein I.R.* Experimental and theoretical studies of a coupled chemical oscillator: phase death, multistability and in-phase and out-of-phase entrainment // *J. Phys. Chem.* 1989. Vol. 93, № 6. P. 2496.
14. *Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Neiman A.B., Vadivasova T.E., Schimansky-Geier L.* Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Tutorial and Modern Development. Springer, Berlin, Heidelberg, 2007. 460 p.
15. *Anishchenko V.S.* Dynamical Chaos – Models and Experiments. Appearance Routes and Structure of Chaos in Simple Dynamical Systems // *World Scientific Series on Nonlinear Science. Series A*. 1995. Vol. 8. 384 p.
16. *Дмитриев А.С., Кислов В.Я.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989. 280 с.
17. *Madan R.* Chua's circuit: A paradigm for chaos. World Scientific, 1993. 1042 p.
18. *Volkov E.I., Romanov V.A.* Bifurcations in the system of two identical diffusively coupled Brusselators // *Physica Scripta*. 1995. Vol. 51, № 1. P. 19.
19. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 253 с.
20. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 356 с.
21. *Kim S., MacKay R.S., Guckenheimer J.* Resonance regions for families of torus maps // *Nonlinearity*. 1989. Vol. 2, № 3. P. 391.
22. *Baesens C., Guckenheimer J., Kim S.* Simple resonance regions of torus diffeomorphisms // *Patterns and dynamics in reactive media*, Springer. 1991. P. 1.
23. *Baesens C., Guckenheimer J., Kim S., MacKay R.S.* Three coupled oscillators: mode locking, global bifurcations and toroidal chaos // *Physica D*. 1991. Vol. 49. P. 387.
24. *Anishchenko V., Astakhov S., Vadivasova T.* Phase dynamics of two coupled oscillators under external periodic force // *Europhys. Lett*. 2009. Vol. 86. 30003.
25. *Анищенко В.С., Астахов С.В., Вадивасова Т.Е., Феоктистов А.В.* Численное и экспериментальное исследование внешней синхронизации двухчастотных колебаний // *Нелинейная динамика*. 2009. Т. 5, № 2. С. 237.
26. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* Синхронизация и многочастотные колебания в цепочке фазовых осцилляторов // *Нелинейная динамика*. 2010, Т. 6, № 4. С.693.
27. *Заславский Г.М.* Физика хаоса в гамильтоновых системах. Москва–Ижевск: РХД, 2004. 288 с.
28. *Морозов А.Д.* Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 424 с.
29. *Vasylenko A., Maistrenko Yu., Hasler M.* Modeling phase synchronization in systems of two and three coupled oscillators // *Nonlinear Oscillations*. 2004. Vol. 7, № 3. P. 301.

30. *Maistrenko V., Vasylenko A., Maistrenko Y., Mosekilde E.* Phase chaos and multi-stability in the discrete Kuramoto model // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2010. Vol. 20, № 6. P. 1811.
31. *Rand R.H., Holmes P.J.* Bifurcation of periodic motions in two weakly coupled van der Pol oscillators // *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 1980. Vol. 15. P. 387.
32. *Ivanchenko M.V., Osipov G.V., Shalfeev V.D., Kurths J.* Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators // *Physica D*. 2004. Vol. 189, № 1–2. p.8.
33. *Кузнецов А.П., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В.* Связанные осцилляторы ван дер Поля и ван дер Поля–Дуффинга: Фазовая динамика и компьютерное моделирование // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2008. Т. 16, № 4. С. 101.
34. *Lee E., Cross. M.C.* Pattern formation with trapped ions // *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 106. 143001.
35. *Khibnik A.I., Braimanc Y., Kennedy T.A.B., Wiesenfeld K.* Phase model analysis of two lasers with injected field // *Physica D*, 1998. Vol. 111, № 1–4. P. 295.
36. *Maistrenko Y., Popovych O., Burylko O.* Mechanism of Desynchronization in the Finite-Dimensional Kuramoto Model // *Phys. Rev. Lett.*, 2004. Vol. 93, 084102.
37. *Broer H., Simo C., Vitolo R.* The Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: The Arnold's resonance web // Reprint from the Belgian Mathematical Society, 2008, p. 769–787.
38. *Галкин О.Г.* Фазовый захват для отображений тора типа Матье // *Функциональный анализ и его приложения*, 1993. Т. 27, Вып. 1. С. 1.
39. *Froeschle C., Lega E., Guzzo M.* Analysis of the chaotic behavior of orbits diusing along the Arnold web // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2006. Vol. 95, № 1–4. P. 141.
40. *Guzzo M., Lega E., Froeschle C.* First numerical evidence of global Arnold diffusion in quasi-integrable systems // *arXiv:nlin/0407059*.

Саратовский госуниверситет

СФ ИПЭ им. В.А. Котельникова РАН

Поступила в редакцию

После доработки

31.01.2012

5.03.2012

ON MODELLING THE DYNAMICS OF COUPLED SELF-OSCILLATORS USING THE SIMPLEST PHASE MAPS

A.P. Kuznetsov, I.R. Sataev, Yu.V. Sedova, L.V. Turukina

The problem of describing the dynamics of coupled self-oscillators using discrete time systems on the torus is considered. We discuss the methodology for constructing such maps as a simple formal models, as well as physically motivated systems. We discuss the differences between the cases of the dissipative and inertial coupling. Using the method of Lyapunov exponents charts we identify the areas of two- and three-frequency quasiperiodicity and chaos. Arrangement of the Arnold resonance web is investigated and compared for different model systems.

Keywords: Synchronization, quasi-periodical oscillations, phase maps.

Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Лауреат гранта Президента Российской Федерации для молодых российских ученых – докторов наук. Лауреат персонального гранта Фонда содействия отечественной науки. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика». Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и Лицея прикладных наук СГУ, 10 учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002).



410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: arkuz@rambler.ru

Сатаев Игорь Рустамович – родился в 1959 году. Окончил Московский физико-технический институт в 1982 году. Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов – критические явления в нелинейной динамике, моделирование динамики на пороге хаоса, применение численных методов для решения ренормгрупповых уравнений. Автор более 30 научных публикаций.



410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: sataevir@rambler.ru

Седова Юлия Викторовна – родилась в 1979 году. Окончила Саратовский государственный университет (2001). Кандидат физико-математических наук (СГУ, 2004), старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Научные интересы – влияние шума на динамические системы, дискретные отображения, связанные системы, динамический хаос. Автор 10 статей в отечественной и зарубежной печати.



410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: sedovayv@rambler.ru

Тюрюкина Людмила Владимировна – родилась в 1977 году. Окончила факультет нелинейных процессов в Саратовском государственном университете (2000). Кандидат физико-математических наук (2003, СГУ), имеет звание доцента по специальности радиофизика (2009). Старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, доцент базовой кафедры динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов – новые аспекты явления синхронизации в системах различной физической природы (радиофизические системы, модели турбулентности, модели биофизических систем и др.); контроль (управление) неустойчивыми режимами; динамический хаос; физические системы с гиперболическими аттракторами. Автор более 80 публикаций, в том числе 30 статей в российских и зарубежных журналах и 3 учебно-методических пособий.



410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: lvtur@rambler.ru