Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 2, 2007 УДК 517.9

О КРИТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ В НЕИДЕНТИЧНЫХ НЕСИММЕТРИЧНО СВЯЗАННЫХ СИСТЕМАХ ЧУА

А.П. Кузнецов, А.В. Савин, И.Р. Сатаев

Исследована сложная динамика и особенности перехода к хаосу в двух связанных потоковых системах на примере известных радиотехнических схем Чуа. Показано, что динамика на пороге перехода к хаосу в такой системе более сложна, чем в системах с дискретным временем, в частности, критическое поведение имеет более высокую коразмерность.

Введение

Исследование процессов перехода от регулярного поведения динамических систем к хаотическому является одной из основных задач нелинейной динамики. Для исследования возникающего на пороге перехода к хаосу критического поведения успешно применяется (начиная с работ Фейгенбаума [1, 2]) метод ренормгруппового анализа. Применение этого метода позволило обнаружить большое количество новых типов критического поведения, возникающих как в рамках одного сценария перехода к хаосу (нефейгенбаумовские удвоения периода [3–9], поведение на пороге разрушения квазипериодического движения [10–15]), так и «на стыке» двух сценариев. Так, в системе двух связанных логистических отображений было обнаружено [16] критическое поведение, возникающее «на стыке» сценариев перехода к хаосу через фейгенбаумовские удвоения периода и через разрушение квазипериодических движений, названное критическим поведением типа FQ. В [16–18] при помощи ренормгруппового анализа были определены характерные для данного типа константы скейлинга в пространстве параметров и на аттракторе и другие характеристики.

Метод ренормгруппового анализа позволяет анализировать поведение лишь необратимых систем с дискретным временем. В то же время весьма важным является вопрос о возможности реализации обнаруженных типов критического поведения в более реалистичных системах, описываемых обратимыми отображениями либо дифференциальными системами. Как показывают ранее проведенные исследования (см., например, [19–20]), этот вопрос нетривиален, поскольку модельные необратимые отображения описывают динамику обратимых систем принципиально приближенно.

Настоящая работа посвящена исследованию возможности реализации в автономных потоковых системах критического поведения типа FQ, обнаруженного ранее в системе двух связанных логистических отображений [16]. Ранее нами было показано [21], что это критическое поведение наблюдается и в системе связанных обратимых отображений при условии введения связи особого типа - так называемой диссипативной связи [22]. В то же время в связанных дифференциальных системах по сравнению с обратимыми отображениями могут возникать некоторые особенности, связанные с наличием у подсистем независимо меняющейся фазы, что иногда существенно искажает динамику вблизи перехода к хаосу (см., например, [23]).

1. Критическое поведение типа FQ как феномен коразмерности два

В работах [16–18] была исследована критическая динамика системы двух несимметрично связанных логистических отображений

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 - C y_n^2, \\ y_{n+1} &= 1 - A y_n^2 - B x_n^2, \\ B &= 0.375; \quad C = -0.25. \end{aligned} \tag{1}$$

Было показано, что плоскость управляющих параметров этой системы (рис. 1, *а*) имеет структуру, схематически изображенную на рис. 1, *б*. Линии бифуркаций Неймарка – Сакера и удвоения периода, ограничивающие область устойчивости цикла, пересекаются в так называемой PDT-точке (period-doubling terminal). Последовательность PDT-точек для циклов удваивающихся периодов накапливается к пределу, являющемуся критической точкой типа FQ. Пространство параметров в ее окрестности и критический аттрактор обладают свойствами самоподобия с константами, определенными в [16–18] методом ренормгруппового анализа.

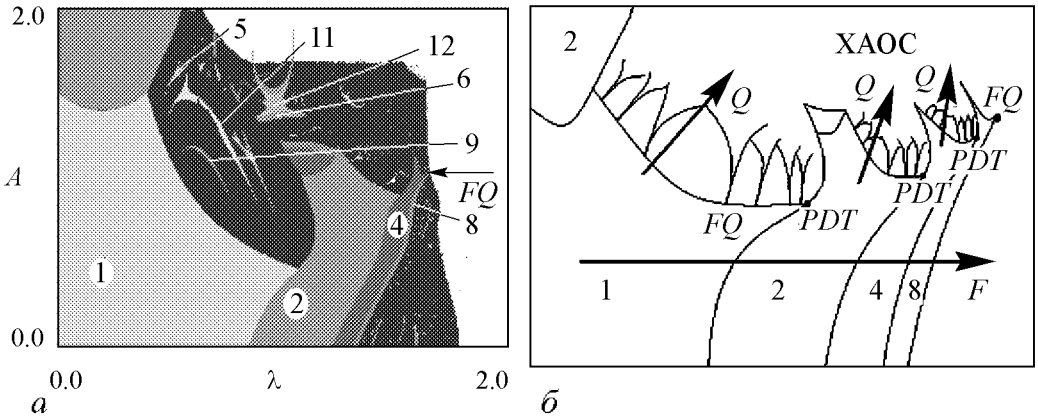


Рис. 1. *а* – карта динамических режимов для системы (1). Различными оттенками серого отмечены области устойчивости циклов различных периодов. Положение критической точки FQ отмечено стрелкой. *б* – схематическое изображение устройства плоскости параметров систем, демонстрирующих критическое поведение FQ как феномен коразмерности два. Показаны маршруты, вдоль которых наблюдается переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума (F) и через разрушение квазипериодических движений (Q)

В настоящей работе исследуется критическое поведение двух связанных систем Чуа. Автономная система Чуа [24] описывает динамику колебательного контура с кусочно-линейным элементом (рис. 2, *а*) и имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - h(x)), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y, \end{aligned} \tag{2}$$

где кусочно-линейная функция $h(x)$ выражается в виде

$$h(x) = \begin{cases} (1+b)x + a - b, & x \geq 1, \\ (1+a)x, & -1 < x < 1, \\ (1+b)x - a + b, & x \leq -1. \end{cases} \tag{3}$$

Значения параметров при численном моделировании традиционно выбираются равными $a = -8/7$, $b = -5/7$.

Динамика этой системы может быть хаотической, что было показано не только в численных экспериментах, но и с помощью строгих рассуждений [25]. Схема Чуа является весьма популярным объектом нелинейной динамики, различные аспекты происходящих в ней явлений были исследованы во многих работах как при помощи численного моделирования [26–33], так и экспериментально (см., например, [33–35]).

На рис. 2, *б* представлено устройство плоскости параметров схемы Чуа, полученное в результате численного решения системы уравнений (2). Хорошо видно, что большую часть пространства параметров с нетривиальной динамикой занимают области, в которых наблюдается только переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума при увеличении параметра α.

Как было показано ранее [17, 18, 21], критическое поведение типа FQ имеет полную коразмерность три, однако может наблюдаться в системах связанных отображений как феномен коразмерности два при введении чисто диссипативной (см. [22])

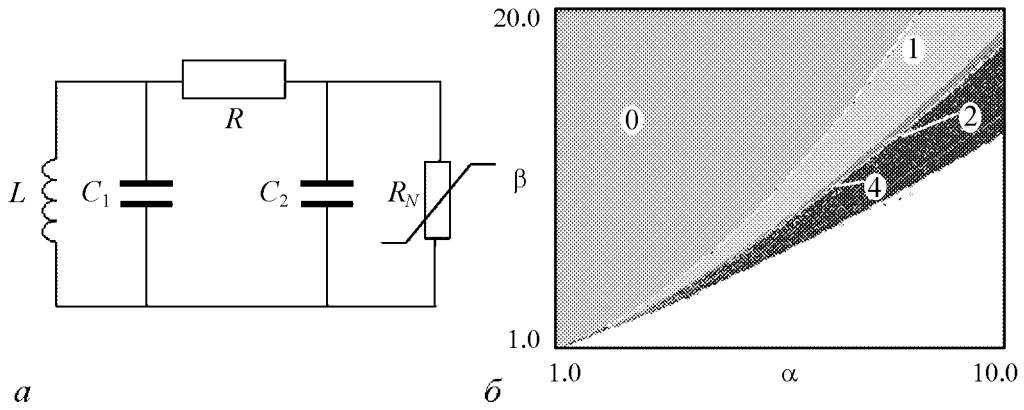


Рис. 2. *а* – принципиальный вид схемы, динамика которой описывается системой Чуа. Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента задается соотношением (3). *б* – карта динамических режимов системы Чуа (2). Символом «0» отмечена область существования устойчивой неподвижной точки

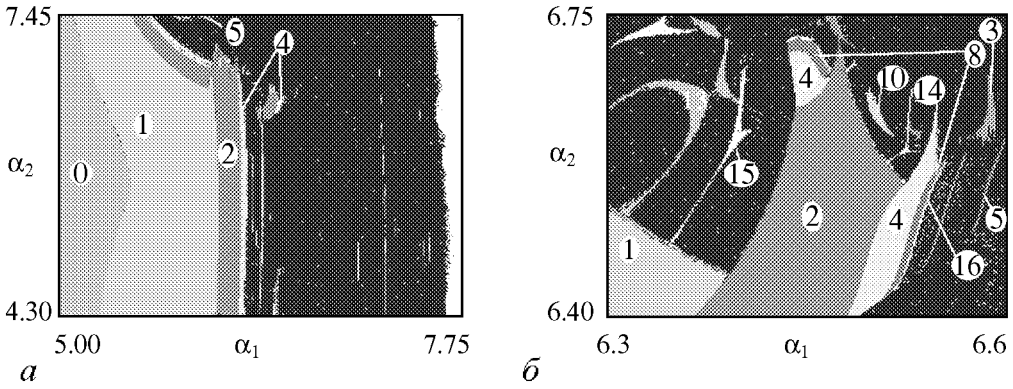


Рис. 3. *а* – карта динамических режимов системы (4); (*б*) – ее увеличенный фрагмент в области, близкой к критической точке. Значения параметров подсистем $\beta_1 = \beta_2 = 10$, констант связи $c_1 = 0.1$, $c_2 = -0.05$

связи между подсистемами. Для случая связанных потоковых систем диссипативная связь обеспечивается введением в каждое уравнение члена, пропорционального разности соответствующих переменных подсистем.

Для схем Чуа при введении такой связи получим систему *:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \alpha_1(y_1 - h(x_1)) + c_1(x_2 - x_1),\\
\dot{y}_1 &= x_1 - y_1 + z_1 + c_1(y_2 - y_1),\\
\dot{z}_1 &= -\beta_1 y_1 + c_1(z_2 - z_1),\\
\dot{x}_2 &= \alpha_2(y_2 - h(x_2)) + c_2(x_1 - x_2),\\
\dot{y}_2 &= x_2 - y_2 + z_2 + c_1(y_1 - y_2),\\
\dot{z}_2 &= -\beta_2 y_2 + c_2(z_1 - z_2),
\end{aligned} \tag{4}$$

параметры связи в которой зафиксируем $c_1 = 0.1$, $c_2 = -0.05$.

Система (4) имеет четыре существенных параметра, при изменении каждого из которых может происходить переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума. Для поиска, по аналогии с системой (1), критического поведения FQ как феномена коразмерности два необходимо зафиксировать два из этих параметров.

На рис. 3 приведено устройство плоскости параметров (α_1, α_2) этой системы при значениях двух других параметров $\beta_1 = \beta_2 = 10$. Как видно из приведенного на рис. 3 увеличенного фрагмента, структура областей устойчивости циклов невысоких периодов является типичной для систем с критическим поведением типа FQ. Однако для окончательного выяснения, наблюдается ли в данной системе тип критичности FQ, необходимо исследовать поведение в областях устойчивости циклов более высоких периодов и найти координаты критической точки.

Для этого можно, например, определить координаты PDT-точек для циклов различных периодов, используя условие равенства -1 двух мультипликаторов соответствующего цикла в этих точках. Для исследуемой системы удалось найти PDT-точки лишь для циклов периода не более 16 (табл. 1), причем области устойчивости

*Отметим, что способ физической реализации такой связи может быть аналогичен предложенному в [36].

циклов более высокого периода имеют весьма сложную форму, линии бифуркаций удвоения сильно изрезаны, а в некоторых случаях прерываются (рис. 4). Такое поведение системы позволяет сделать вывод об отсутствии критического поведения типа FQ.

Попытаемся объяснить причины такого отличия в критической динамике связанных обратимых отображений и автономных потоковых систем. Как известно [16], соответствующее критическому поведению типа FQ ренормгрупповое уравнение имеет три существенных собственных числа, поэтому полная коразмерность данного типа критичности равна трем. В то же время в классе диссипативно связанных отображений из-за скрытой симметрии возмущения, соответствующие третьему собственному числу, не могут реализоваться, что позволяет наблюдать в таких системах данный тип критичности как феномен коразмерности два. Однако рассматриваемая нами система (4) является шестимерной потоковой системой и, следовательно, описывается пятимерным отображением (отображением Пуанкаре), которое, очевидно, не может быть представлено как два связанных отображения. Поэтому в данной системе возможно наблюдение критического поведения типа FQ только как феномена коразмерности три.

Таблица 1

n	α_1	α_2
1	6.402245076303	6.446835393385
2	6.524719502831	6.554896290533
4	6.547563005614	6.576744457563
8	6.553345849308	6.577406650518
16	6.555467861255	6.580839400627

С физической точки зрения, данный факт можно объяснить следующим образом. Каждая из подсистем представляет собой автоколебательную систему с собственным «масштабом времени», поэтому фазы колебаний в подсистемах различаются, и получаемые в сечении Пуанкаре точки соответствуют разным фазам колебаний в подсистемах. Это приводит к нарушению симметрии и разрушению тонкой структуры пространства параметров и критического поведения. Отметим, что аналогичный эффект наблюдался при попытке реализовать потоковую систему, демонстрирующую феномены комплексной аналитической динамики [23].

Однако критическое поведение типа FQ все же может реализоваться в этой системе, но как феномен полной коразмерности три.

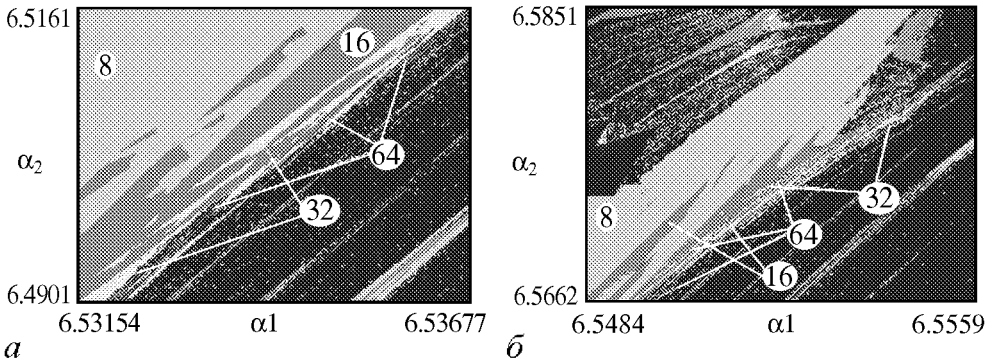


Рис. 4. Устройство плоскости параметров системы (4) в области циклов периода выше 8

2. Критическое поведение FQ коразмерности три

Оставим фиксированным только один из четырех параметров системы ($\beta_2 = 10$) и будем подстраивать остальные три для того, чтобы найти критическую точку типа FQ. Для поиска критической точки целесообразно воспользоваться тем фактом, что существующие в ней неустойчивые циклы различных периодов имеют мультипликаторы, быстро сходящиеся к универсальным значениям, характерным для данного типа критичности, с увеличением периода цикла. Поэтому последовательность точек, в которых мультипликаторы цикла равны универсальным, должна хорошо сходиться к критической точке с увеличением периода цикла.

Некоторую техническую сложность представляет тот факт, что критическому поведению типа FQ соответствуют два универсальных мультипликатора, а нам необходимо осуществлять трехпараметрический поиск критической точки. Обойти ее можно следующим образом.

Мультипликаторы цикла, как известно, удовлетворяют характеристическому уравнению, коэффициенты которого являются инвариантами соответствующей матрицы Якоби

$$\mu^5 - Sp\mu^4 + I_2\mu^3 - I_3\mu^2 + I_4\mu - \mathrm{Det} = 0. \tag{5}$$

Таблица 2

n	μ_3	μ_4	μ_5
1	0.590703	-0.007575	-0.003823
2	0.385829	$-9.57 \cdot 10^{-5}$	$-1.65 \cdot 10^{-5}$
4	0.139533	$1.02 \cdot 10^{-8}$	$7.44 \cdot 10^{-12}$
8	0.022775	$-3.46 \cdot 10^{-9}$	$2.22 \cdot 10^{-10}$
16	0.000321	$5.15 \cdot 10^{-7}$	$-6.77 \cdot 10^{-10}$

Для циклов достаточно высоких периодов вблизи критической точки три из пяти мультипликаторов равны нулю, что хорошо видно по мультипликаторам циклов, соответствующих найденным PDT-точкам (табл. 2), поэтому отличны от нуля только два первых инварианта матрицы Якоби, которые выражаются через мультипликаторы как

$$Sp = \mu_1 + \mu_2, \quad I_2 = \mu_1\mu_2. \tag{6}$$

Для каждого цикла удваивающихся периодов найдем такие значения параметров, при которых, во-первых, удовлетворяются соотношения (6) при $\mu_1 = -1.579739...$, $\mu_2 = -1.057149...$, и, во-вторых, удовлетворяется первое из этих соотношений для цикла удвоенного периода. Таким образом, точка определяется тремя условиями, что позволяет осуществить трехпараметрический поиск.

В табл. 3 приведены значения параметров, соответствующие этим точкам, причем видно, что они достаточно хорошо сходятся. Примем найденные для цикла периода 256 значения параметров за аппроксимацию точки FQ. Для подтверждения того, что в этой точке действительно реализуется критическое поведение FQ, необходимо исследовать свойства существующих в этой точке циклов.

Ближайшие к центру скейлинга элементы таких циклов различных периодов приведены в табл. 4, а мультипликаторы этих циклов – в табл. 5.

Таблица 3

n	α_1	α_2	β_1
16	6.6322759493	6.5855783800	10.1959699945
32	6.6346848740	6.5867114343	10.2028396484
64	6.6338779890	6.5863313934	10.2005199736
128	6.6331492820	6.5859952453	10.1984333086
256	6.6330061623	6.5859306384	10.1980230965

Таблица 4

n	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2
1	0.24659319	-0.35980782	0.76903361	0.20376135	-0.13991670
2	0.25243738	-0.53159549	0.75594684	0.22675477	-0.29124826
4	0.08677779	-0.24240962	0.88795905	0.18936405	-0.21109082
8	0.20582640	-0.25576499	0.78319741	0.15150264	-0.07601758
16	0.15922796	-0.22339862	0.84635857	0.09630167	-0.11829855
32	0.17372657	-0.22851192	0.82723572	0.11353928	-0.09961583
64	0.17189928	-0.22765608	0.83040306	0.11309123	-0.10231508
128	0.17861078	-0.23111979	0.81826776	0.11950256	-0.09245976
256	0.17515818	-0.22922687	0.82475859	0.11528035	-0.09756806
512	0.17616889	-0.22975642	0.82286977	0.11651880	-0.09604593

Таблица 5

n	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5
1	-1.61578	-1.27869	0.501664	$-4.961 \cdot 10^{-3}$	$-3.432 \cdot 10^{-3}$
2	-1.60888929	-1.06054871	0.36300185	$-2.557 \cdot 10^{-5}$	$-9.031 \cdot 10^{-6}$
4	-1.61128177	-1.02294567	0.07014112	$-1.126 \cdot 10^{-9}$	$-1.811 \cdot 10^{-10}$
8	-1.59305331	-1.03700271	0.01367606	$-1.788 \cdot 10^{-14}$	$5.713 \cdot 10^{-15}$
16	-1.55741487	-1.08679156	$-5.327 \cdot 10^{-6}$	$-6.750 \cdot 10^{-12}$	$1.270 \cdot 10^{-13}$
32	-1.58643546	-1.06785783	$1.088 \cdot 10^{-8}$	$3.107 \cdot 10^{-12}$	$1.083 \cdot 10^{-13}$
64	-1.59408160	-1.02517953	$-6.950 \cdot 10^{-11}$	$1.067 \cdot 10^{-11}$	$-6.000 \cdot 10^{-14}$
128	-1.56291148	-1.07897649	$1.686 \cdot 10^{-10}$	$3.379 \cdot 10^{-11}$	$1.563 \cdot 10^{-13}$
256	-1.57981941	-1.05708041	$-9.226 \cdot 10^{-10}$	$-1.669 \cdot 10^{-10}$	$-7.195 \cdot 10^{-12}$
512	-1.55838483	-1.07176663	$-1.428 \cdot 10^{-8}$	$1.984 \cdot 10^{-9}$	$-2.947 \cdot 10^{-12}$

Как видно, два мультипликатора хорошо сходятся к универсальным для типа FQ значениям, а остальные быстро становятся близкими к нулю. Кроме того, оценка наименьшей по модулю константы скейлинга на аттракторе по найденным элементам циклов (табл. 6) дает значения, хорошо совпадающие с константой $-1.90007167...$, характерной для типа FQ. Это дает основание утверждать, что в найденной точке действительно реализуется критическое поведение типа FQ.

Таблица 6

n	d	α
2	0.411097569236	
4	0.224659995593	1.829865473605
8	0.092598547703	2.426171912691
16	0.056513128423	1.638531617112
32	0.030592580029	1.847282196187
64	0.016537895766	1.849847191073
128	0.008637914483	1.914570443890
256	0.004639464262	1.861834469499
512	0.002442409060	1.899544322031

Заключение

Таким образом, в системах связанных автоколебательных систем с непрерывным временем критическое поведение типа FQ может реализоваться лишь как феномен полной коразмерности три даже при введении между подсистемами чисто диссипативной связи. Это существенно отличается от аналогичной динамики в связанных системах с дискретным временем и является еще одним аргументом в пользу того, что к «переносу» выводов о динамике систем, полученных для отображений, на потоковые системы, нужно подходить с осторожностью.

Авторы благодарят профессора Кузнецова С.П. за полезные и плодотворные замечания, способствовавшие работе над данной статьей.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-02-16773) и Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF REC-006 грант Y4-P-06-06).

Библиографический список

1. *Feigenbaum M.J.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // J. of Stat. Phys. 1978. Vol. 19, № 1. P. 25.
2. *Feigenbaum M.J.* The universal metric properties of nonlinear transformations // J. of Stat. Phys. 1979. Vol. 26, № 6. P. 669.
3. *Chang S.J., Wortis M., Wright J.A.* Iterative properties of a one-dimensional quartic map: Critical lines and tricritical behavior // Phys. Rev. 1981. Vol. A24. P. 2669.
4. *MacKey R.S, Tresser C.* Some flesh on skeleton: The bifurcation structure of bimodal maps // Physica D. 1987. Vol. 27, № 3. P. 412.
5. *MacKey R.S., Tresser C.* Boundary of topological chaos for bimodal maps of the interval // J. London Math. Soc. 1988. Vol. 37, № 1. P. 164.
6. *Schell M., Fraser S., Kapral R.* Subharmonic bifurcations in the sine map: An infinite of bifurcations // Phys. Rev. 1983. Vol. A28, № 1. P. 373.
7. *Mackey R.S., van Zeijts J.B.J.* Period doubling for bimodal maps: A horseshoe for a renormalization operator // Nonlinearity. 1988. Vol. 1. P. 253.
8. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Критическая динамика одномерных отображений. Ч. II. Двухпараметрический переход к хаосу // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1, № 3. С. 17.
9. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Коразмерность и типичность в контексте проблемы перехода к хаосу через удвоения периода в диссипативных динамических системах // Регулярная и хаотическая динамика. 1997. Т. 2, № 3-4. С. 90.

10. *Feigenbaum M.J., Kadanoff L.P., Shenker S.J.* Quasiperiodicity in dissipative systems: A renormalization group analysis // Physica. 1982. Vol. D5. P. 370.
11. *Shenker S.J.* Scaling behavior in a map of a circle onto itself: Empirical results // Physica. 1982. Vol. D5. P. 126.
12. *Rand D., Ostlund S., Sethna J., Siggia E.D.* Universal transition from quasiperiodicity to chaos in dissipative systems // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 49, № 2. P. 132.
13. *Ostlund S., Rand D., Sethna J., Siggia E.D.* Universal properties of the transition from quasiperiodicity to chaos in dissipative systems // Physica. 1983. Vol. D8, № 3. P. 303.
14. *Rand D.* Existence, non-existence and universal breakdown of dissipative golden-invariant tori: I. Golden critical circle maps // Nonlinearity. 1992. Vol. 5. P. 639.
15. *Kuznetsov S.P.* A variety of critical phenomena associated with the golden mean quasiperiodicity // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2002. Vol. 10, № 3. P. 22.
16. *Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Period-doubling for two-dimensional non-invertible maps: Renormalization group analysis and quantitative universality // Physica D. 1997. Vol. 101. P. 249.
17. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* A variety of period-doubling universality classes in multiparameter analysis of transition to chaos // Physica D. 1997. Vol. 109. P. 91.
18. *Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Universality and scaling in non-invertible two-dimensional maps // Physica Scripta. 1996. Vol. T67. P. 184.
19. *Kuznetsov S.P.* Tricriticality in two-dimensional maps // Phys. Lett. 1992. Vol. A169. P. 438.
20. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Mosekilde E., Turukina L.V.* Two-parameter analysis of the scaling behavior at the onset of chaos: Tricritical and pseudo-tricritical points // Physica A. 2001. Vol. 300. P. 367.
21. *Кузнецов А.П., Савин А.В.* Об одном типе перехода порядок – хаос в связанных отображениях с удвоениями периода // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т. 11, № 6. С. 16.
22. *Кузнецов С.П.* О критическом поведении одномерных цепочек // Письма в ЖТФ. 1983. Т. 9, № 2. С. 94.
23. *Исаева О.Б.* О возможности реализации феноменов комплексной аналитической динамики в физических системах, построенных из связанных элементов, демонстрирующих удвоения периода // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2001. Т. 9, № 6. С. 129.
24. *Matsumoto T., Chua L.O., Komuro M.* The double scroll // IEEE Transactions on Circuits and Systems. 1985. Vol. CAS-32, № 8. P. 797.
25. *Chua L.O., Komuro M., Matsumoto T.* The double scroll family // IEEE Transactions on Circuits and Systems. 1986. Vol. CAS-33, № 11. P. 1073.

26. *Matsumoto T., Chua L.O., Ayaki K.* Reality of chaos in the double scroll circuit: A computer-assisted proof // IEEE Transactions on Circuits and Systems. 1988. Vol. CAS-35, № 7. P. 909.
27. *Komuro M., Tokunaga R., Matsumoto T., Hotta A.* Global bifurcation analysis of the double scroll circuit // Int. J. of Bif. and Chaos. 1991. Vol. 1, № 1. P. 139.
28. *Kahlert C.* Heteroclinic orbits and scaled similar structures in the parameter space of the Chua oscillator. In Chaotic Hierarchy. Singapure, World Scientific, 1991, p. 209.
29. *Lozi R., Ushiki S.* Confinors and bounded-time patterns in Chua's circuit and the double scroll family //Int. J. of Bif. and Chaos. 1991. Vol. 1, № 1. P. 119.
30. *Genot M.* Application of 1D Chua's map from Chua's circuit: A pictorial guide // J. of Circuits, Systems and Computers. 1993. Vol. 3, № 2. P. 375.
31. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R., Chua L.O.* Self-similarity and universality in Chua's circuit via the approximate Chua's 1D map // Journal on Circuits, Systems and Computers. 1993. Vol. 3, № 2. P. 431.
32. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R., Chua L.O.* Two-parameter study of transition to chaos in Chua's circuit: Renormalization group, universality and scaling // Int. J. of Bif. and Chaos. 1993. Vol. 3, № 4. P. 943.
33. *Kennedy M.P.* Robust OP Amp realization of Chua's circuit // Frequenz. 1992. Vol. 46, № 3-4. P. 66.
34. *Zhong G.-Q.* Implementation of Chua's circuit with a cubic nonlinearity // IEEE Transactions on Circuits and Systems – I: Fundamental Theory and Applications. 1994. Vol. 41, № 12. P. 934.
35. *Zhong G.-Q., Ayrom F.* Experimental confirmation of chaos from Chua's circuit // Int. J. Circuit Theory Appl. 1985. Vol. 13, № 11. P. 93.
36. *Chua L.O., Itoh M., Kocarev L., Eckert K.* Chaos synchronization in Chua's circuit // Elecrtonics research laboratory, University of California, Berkeley, Memorandum UCB/ERL M92/111, 1 May 1992.

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН
Саратовский государственный университет

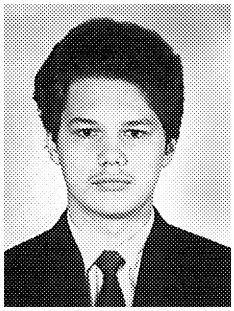
Поступила в редакцию *01.06.2006*
После доработки *18.12.2006*

ON THE CRITICAL BEHAVIOR OF NON-IDENTICAL ASYMMETRICALLY COUPLED CHUA'S CIRCUITS

A.P. Kuznetsov, A.V. Savin, I.R. Sataev

The complex dynamics and the peculiarities of the transition to chaos in two coupled flow systems – Chua's circuits are investigated. It is shown that this system demonstrates more complicated behavior at the onset of chaos than the discrete maps. In particular, the codimension of the critical behavior increases in such system.

Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского госуниверситета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и школьной научной лаборатории. Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и лицея прикладных наук СГУ, 10 учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002). E-mail: alkuz@sgu.ru; www.sgtnd.narod.ru



Савин Алексей Владимирович – родился в Саратове в 1980 году. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (2002) и аспирантуру факультета нелинейных процессов СГУ. Кандидат физико-математических наук (2005). Доцент факультета нелинейных процессов СГУ, младший научный сотрудник Саратовского филиала ИРЭ РАН. Имеет более 20 научных публикаций, в том числе 10 в центральных и международных журналах. Область научных интересов: особенности перехода к хаосу и критического поведения в связанных нелинейных системах; сложная динамика систем, близких к консервативным.

Сатаев Игорь Рустамович – родился в 1959 году. Окончил Московский физико-технический институт в 1982 году. Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов - критические явления в нелинейной динамике, моделирование динамики на пороге хаоса, применение численных методов для решения ренормгрупповых уравнений. Автор более 30 научных публикаций.

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 2, 2007 УДК 519.6:577.359

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ РИТМОВ В ДИНАМИКЕ СТРУКТУРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПОЧЕК

А.Н. Павлов, О.Н. Павлова, О.В. Сосновцева

В данной работе исследуются эффекты взаимодействия между тремя ритмическими компонентами механизма почечной авторегуляции. Выявлены существенные различия соответствующих эффектов в случае почти периодической динамики нефронов крыс с нормальным артериальным давлением по сравнению с нерегулярной (хаотической) динамикой, наблюдаемой в функционировании нефронов крыс с повышенным артериальным давлением.

Введение

Одной из типичных особенностей динамики биологических систем является сосуществование нескольких ритмов, которые находят отражение в структуре сигналов, генерируемых данными системами. Такая ситуация хорошо известна на разных уровнях организации объектов живой природы, начиная от микроскопического уровня отдельной клетки (наличие быстрых и медленных колебаний в функционировании нейронов [1] или β-клеток поджелудочной железы [2], бипериодическая динамика электрорецепторов [3], различные ритмические компоненты внутриклеточных процессов [4] и т.д.) до макроскопического уровня отдельных органов и всего организма в целом. В частности, известно, что в динамике сердечно-сосудистой системы можно выделить, по крайней мере, пять независимых колебательных процессов [5]. Сосуществование суточного циркадного ритма и колебаний с периодом 2–4 часа обнаружено при выработке инсулина β-клетками [6]. Сложные колебательные процессы с несколькими характерными частотами можно идентифицировать в сигналах электрической активности мозга – электроэнцефалограммах [1].

Наличие нескольких ритмов в функционировании биологической системы часто приводит к различным формам их взаимодействия. Хорошо известным примером служит синхронизация колебаний, которая играет важную роль в динамике многих объектов живой природы [7, 8]. В числе примеров данного явления можно упомянуть эффект подстройки ритмов дыхания и сердцебиений [9, 10], кооперативную динамику нейронных ансамблей [11] и генерацию стабильных ритмов биологическими осцилляторами [12]. Синхронизация может играть и негативную роль, приводя

к различным заболеваниям. Например, патологическая синхронизация ритмических процессов в мозге способна приводить к возникновению паркинсоновского тремора [13]. К настоящему времени эффекты синхронизации выявлены в механизмах почечной регуляции, причем в экспериментах на крысах было обнаружено, что эти эффекты существенно различаются при нормальном и повышенном артериальном давлении [14, 15].

Другим вариантов взаимодействия ритмов служит модуляция: мгновенная амплитуда или частота сравнительно быстрого ритма может быть промодулирована более медленной динамикой. В функционировании сердечно-сосудистой системы человека или животных хорошо известно явление модуляции сердцебиений процессом дыхания: частота ударов сердца увеличивается при вдохе и уменьшается при выдохе. Эффекты амплитудной модуляции сердечного ритма частотой дыхания к настоящему времени были продемонстрированы при анализе сигналов артериального давления [16] и фотоплетизмограмм [17]. Взаимодействие ритмов в форме частотной и амплитудной модуляции было обнаружено в функционировании нефронов почек [18–20] и во внутриклеточной динамике [21].

Сложности экспериментальных исследований эффектов взаимодействия колебательных процессов зачастую связаны с нестационарностью сигналов живых систем, которая является в физиологии скорее правилом, чем исключением. В некоторых частных случаях нестационарные процессы имеют особенности, упрощающие их анализ: иногда данные удается представить в виде суммы или произведения выборочной функции стационарного случайного процесса и детерминированной функции, определяющей нестационарную часть процесса, называемую трендом. Возможность выделить в анализируемом процессе тренд значительно упрощает дальнейший анализ. Однако такой подход, как правило, является неэффективным при рассмотрении переходных процессов, которые наблюдаются в функционировании любых объектов живой природы из-за их постоянной адаптации к изменению внешних условий. В динамике объектов живой природы нестационарность связана не только с медленными изменениями среднего значения или дисперсии анализируемого процесса, но и, в частности, с изменением во времени характерных частот различных ритмов. Выделение и устранение тренда в этом случае не решает полностью проблему нестационарности.

Кроме того, на основе стандартных методов анализа структуры сигналов может быть достаточно сложно выявить эффекты взаимодействия ритмов, которые происходят в течение коротких интервалов времени. В последние годы нестационарная динамика биологических систем часто исследуется на основе специальных подходов, наиболее популярным из которых является вейвлет-анализ [22–27]. Как известно, обработка нестационарных процессов с применением классических методов (например, основанных на преобразовании Фурье) может приводить к сложностям в интерпретации полученных результатов, которые являются следствием ограничений статистических подходов. Классические методы представляют собой инструменты исследования стационарных случайных процессов, они не учитывают того, что частота характерного ритма может претерпевать значительные изменения во времени. В частности, наличие двух «пиков» в спектре мощности физиологического процесса с некратными частотами может соответствовать принципиально разным ситуациям: сосуществованию двух независимых ритмов или «переключениям» частоты одного

ритмического процесса. Анализ Фурье покажет сам факт наличия двух частот, но не позволит определить, существуют оба ритма одновременно или же мы имеем дело только с одним характерным ритмом, мгновенная частота которого со временем изменилась. Вейвлет-анализ позволяет четко различать эти случаи.

Для изучения эффектов взаимодействия колебательных процессов в динамике биологической системы представляется целесообразным провести некоторую модификацию обычно используемого метода вейвлет-анализа. В работе [17] была предложена идея последовательного вычисления двух вейвлет-преобразований для изучения особенностей временной динамики мгновенных частот. Независимо в работе [18] и последующих публикациях [19, 20] для исследования эффектов модуляции в почечной авторегуляции кровотока был разработан метод «двойного вейвлет-анализа». Данный подход позволяет выявлять эффекты взаимодействия ритмов даже в случае сравнительно быстрых изменений их мгновенных частот. Двойной вейвлет-анализ продемонстрировал свою эффективность как при исследовании динамики математических моделей биосистем [20] (где знание уравнений позволяет осуществить проверку полученных результатов), так и при анализе экспериментальных данных [19]. В настоящей работе с использованием данной техники мы изучаем взаимодействие трех ритмических компонент в динамике индивидуальных функциональных элементов почек (нефронов). Мы демонстрируем существование четких различий нелинейного взаимодействия ритмов для нефронов крыс с нормальным и повышенным артериальным давлением. Основное внимание уделяется исследованию очень медленных ритмов (0.002–0.01 Гц) и их влиянию на более быструю динамику. Роль данных ритмов до настоящего времени остается неизвестной, а их воздействие на другие механизмы почечной авторегуляции ранее не исследовалось.

1. Метод двойного вейвлет-анализа

В последние годы анализ структуры сигналов медико-биологического происхождения очень часто проводится на основе вейвлет-преобразования, которое позволяет не только выявлять характерные ритмы, присутствующие в динамике анализируемой системы, но и отслеживать эволюцию мгновенных частот данных ритмов во времени. Вейвлет-преобразование сигнала $x(t)$ вычисляется по формуле

$$W(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)\psi^* \left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \tag{1}$$

где $W(a,b)$ – коэффициенты вейвлет-преобразования, a – масштаб наблюдения, b – параметр смещения, ψ – базисная функция (вейвлет). При проведении исследований ритмических компонент предпочитают использовать базисную функцию Морле

$$\psi(\tau) = \pi^{-1/4} \exp(-j2\pi f_0 \tau) \exp\left[-\frac{\tau^2}{2}\right], \tag{2}$$

в которой параметр f_0 характеризует частотное разрешение, а связь параметра масштаба a с частотой анализируемого ритма f определяется соотношением $f = f_0/a$. Выделение временных зависимостей мгновенных частот и амплитуд характерных

ритмов осуществляется путем поиска локальных максимумов коэффициентов $W(a,b)$ при каждом фиксированном значении параметра b.

Если в динамике некоторой системы одновременно присутствуют несколько независимых ритмов, то между ними возможны различные формы взаимодействия, одной из которых является модуляция амплитуды или частоты более быстрого ритма медленными процессами. Данное явление легко обнаружить, проводя анализ быстрой (модулируемой) динамики. На практике, однако, могут возникать сложности, если в эксперименте удается осуществить регистрацию только одной медленной переменной состояния, в которой каким-то образом отражена быстрая динамика. Эта задача усложняется в условиях нестационарности ритмов, приводящей к изменению во времени частоты и глубины модуляции. Если эти характеристики демонстрируют сильные изменения, могут возникать сложности с разделением ритмических процессов из скалярного временного ряда на основе процедуры полосовой фильтрации. Полосу пропускания для быстрого ритма нельзя выбирать ни слишком узкой из-за нестационарности, ни слишком широкой, чтобы в нее не попали гармоники медленного ритма. Исследование ритмической динамики в такой ситуации целесообразно проводить с помощью вейвлет-анализа, базирующегося на преобразовании (1).

Для выявления особенностей амплитудной и частотной модуляции в условиях нестационарности в наших предыдущих работах [18–20] был предложен специальный подход, основанный на технике двойного вейвлет-анализа. Идея данного подхода состоит в том, чтобы использовать выделенную мгновенную частоту или амплитуду быстрого ритма в качестве исходного сигнала для еще одного вейвлет-преобразования (1). Повторное преобразование позволяет извлекать информацию обо всех процессах, принимающих участие в модуляции быстрой динамики. В качестве количественных критериев рассматриваются глубина частотной M_f и амплитудной M_a модуляции, которые можно оценить следующим образом: M_f=$\Delta\omega/\Omega$, где $\Delta\omega$ характеризует диапазон изменения модулируемой частоты (быстрого ритма), а Ω представляет собой модулирующую частоту (сравнительно медленная динамика); величину M_a можно оценить по формуле $M_a = \Delta A/A$, где ΔA характеризует диапазон изменения мгновенной амплитуды быстрого ритма, A – среднее значение амплитуды. Отметим, что для нестационарных процессов все указанные величины $\Omega, \Delta\omega, A, \Delta A$ зависят от времени, так же как и значения M_f и M_a. При расчетах целесообразно вначале оценивать мгновенные значения данных характеристик, после чего проводить усреднение по времени для глубины модуляции. Временные зависимости $\Omega(t), A(t)$ можно вычислить на первом этапе (после однократного вейвлет-преобразования анализируемого сигнала), тогда как $\Delta\omega(t), \Delta A(t)$ предлагается оценивать, осуществив еще одно вейвлет-преобразование для выделенных мгновенных частоты и амплитуды быстрого ритма. Данный подход несколько сложнее обычно используемого в радиофизике, однако он имеет одно важное преимущество – он учитывает возможность сильных изменений во времени характеристик процесса.

Предложенный метод был нами тщательно протестирован в работе [20] на ряде тестовых примеров, в которых можно было проконтролировать корректность полученных результатов. В частности, были рассмотрены классические для радиофизики примеры амплитудной и частотной модуляции (моделируемые с помощью двух гармонических функций), а также более сложные сигналы (модуляция колебаний в режиме динамического хаоса). Особое внимание уделялось случаю нестационар-

ной динамики, когда характеристики модуляции изменялись во времени. Проведенные расчеты продемонстрировали корректность вычислений, выполняемых на основе разработанного подхода. В следующих разделах данной работы мы применяем метод двойного вейвлет-анализа для исследования эффектов модуляции в динамике структурных элементов почек.

2. Динамика нефрона

2.1. Ритмические компоненты сигналов давления в канальцах нефронов. Почечная авторегуляция кровотока в отдельных нефронах обеспечивается, по крайней мере, двумя механизмами: канальцево-гломерулярной обратной связью (КГОС) и миогенным откликом [28–30]. Первый из этих механизмов приводит к появлению отрицательной обратной связи, которая регулирует входящий поток крови, а следовательно, скорость фильтрации и скорость потока жидкости в канальцах в зависимости от концентрации ионов NaCl в фильтрате на выходе петли Генли. В соответствии с работами [28, 29], данный механизм регуляции приводит к появлению колебаний давления в проксимальном канальце нефрона с периодом 30–40 секунд. Для крыс с нормальным артериальным давлением соответствующие колебания являются почти периодическими, а для крыс с повышенным артериальным давлением (так называемых «спонтанных гипертензивных» крыс) наблюдается сильно нерегулярная (хаотическая) динамика. Таким образом, повышение артериального давления сопровождается переходом от регулярного к хаотическому поведению.

Второй механизм (миогенный отклик) состоит в способности гладких мышц сосудистой стенки сокращаться при повышении артериального давления. Увеличение напряжения в стенках сосуда, вызванное увеличением артериального давления (соответственно, трансмурального давления), ведет к сокращению гладких мышечных клеток и уменьшению диаметра сосуда, а следовательно, к уменьшению напряжения. В этом случае регуляция кровотока осуществляется за счет подстройки диаметра, с тем чтобы поддержать постоянство напряжения стенок сосудов. В настоящее время существует множество экспериментальных доказательств миогенного механизма в почках [31, 32]. Он приводит к возникновению колебаний потока крови в артериоле с частотой 0.1–0.25 Гц («эхо» этих колебаний хорошо различимо и в записях давления ультрафильтрата в проксимальном канальце). Поскольку оба описанных механизма оказывают воздействие на одну и ту же артериолу, активация одного из них модифицирует отклик другого.

Индивидуальный структурный элемент почек (нефрон) часто рассматривают как двухмодовый осциллятор [33], который демонстрирует колебания с двумя характерными временными масштабами: быстрый ритм, связанный с динамикой гладких мышечных клеток, и более медленный ритм, обусловленный механизмом КГОС. Однако экспериментальный анализ записей давления в проксимальных канальцах нефронов демонстрирует, что истинная динамика нефрона не ограничивается только двумя данными ритмами. В частности, вейвлет-анализ позволяет дополнительно обнаружить очень медленные колебания (0.002–0.01 Гц), физиологическая интерпретация которых менее очевидна. Мы предполагаем, что эти колебания могут быть связаны с вариациями величины давления крови во входящей артериоле. Они могут иметь большую амплитуду по сравнению с динамикой на других частотах. Как видно

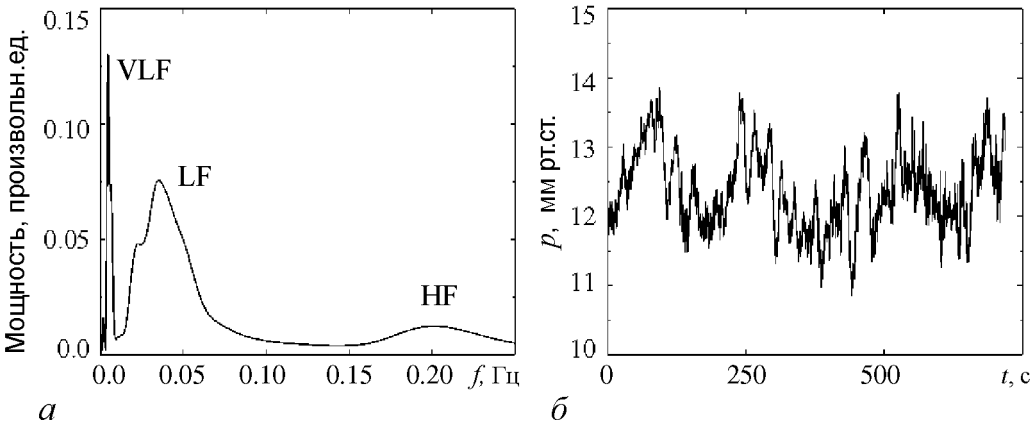


Рис. 1. *а* – спектр мощности сигнала давления ультрафильтрата в проксимальном канальце нефрона для крысы с повышенным артериальным давлением. Очень медленные колебания (с частотой около 0.005 Гц) являются более четко выраженными по сравнению с другими ритмами. *б* – экспериментальная запись, иллюстрирующая хорошо заметные колебания с периодом порядка 200 с

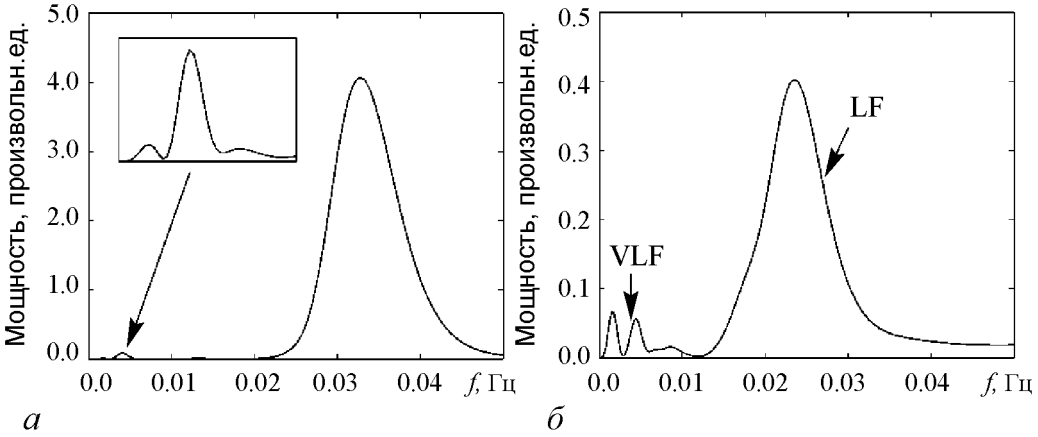


Рис. 2. Примеры спектров мощности в диапазонах VLF и LF для крыс с нормальным (*а*) и повышенным (*б*) артериальным давлением

из рис. 1, *а*, амплитуда ритма в районе частоты 0.005 Гц превышает амплитуду колебаний, обусловленных механизмом КГОС (около 0.035 Гц) и значительно превышает размах миогенных осцилляций (около 0.2 Гц). Далее мы будем обозначать указанные ритмы как очень медленную (VLF), медленную (LF) и быструю (HF) динамику, соответственно. Наличие VLF-ритмов (0.002–0.01 Гц) можно визуально наблюдать на рис. 1, *б*, который иллюстрирует достаточно сильные колебания с периодом примерно 200 с (они особенно четко видны для первой половины экспериментальной записи).

Мы хотели бы отметить, что наличие сильных VLF-ритмов не является типичным эффектом для функционирования нефрона. Чаще наблюдается ситуация, когда соответствующие колебания характеризуются сравнительно небольшой мощностью по отношению к остальным ритмам, однако их можно четко выявить в динамике нефронов крыс как с нормальным, так и с повышенным артериальным давлением (рис. 2). В примере, представленном на рис. 2, *а*, колебания в VLF-диапазоне, на частоте 0.0045 Гц*, очень малы по сравнению с амплитудой LF-ритма (0.033 Гц).

*Здесь и далее указаны приблизительные значения частот.

Для того чтобы лучше их идентифицировать, спектр целесообразно рассматривать в логарифмическом масштабе. Для крысы с повышенным артериальным давлением (рис. 2, *б*) амплитуда LF-ритма значительно меньше, чем на рис. 2, *а*, и, как следствие, VLF-динамика является более четко выраженной в спектре мощности.

2.2. Статистический анализ. Для того чтобы обсудить типичные явления в динамике нефронов, рассмотрим результаты, полученные для серии экспериментов. Мы использовали 76 записей сигналов давления ультрафильтрата в проксимальных канальцах нефронов, включая 34 записи для крыс с нормальным (первая группа) и 42 – для крыс с повышенным (вторая группа) артериальным давлением. Детали экспериментальной процедуры и методика препарирования животных описаны в работах [28–30]. Рис. 3 служит подтверждением того, что все упомянутые ритмы присутствуют в усредненных спектрах, вычисленных для двух рассматриваемых групп. Хорошо видно, что VLF-динамика является более четко выраженной на рис. 3, *б*. Осуществляя сравнение спектров мощности, следует отметить, что амплитуда LF-ритма для крыс с нормальным артериальным давлением значительно больше амплитуд других компонент (VLF и HF ритмы являются близкими по мощности) – рис. 3, *а*. Иная картина наблюдается для крыс с повышенным артериальным давлением: ритмы в VLF и HF диапазонах демонстрируют сильные различия по своим энергетическим характеристикам (см. рис. 3, *б*), причем первый из них приближается по амплитуде к LF-динамике.

В настоящей работе мы рассматриваем область частот выше 0.002 Гц из-за конечного времени регистрации экспериментальных записей, имеющихся в нашем распоряжении (около 1000 с). Таким образом, мы вводим ограничения частотного диапазона для того, чтобы анализируемый сигнал содержал не менее двух периодов очень медленных колебаний. Средняя частота VLF-динамики на рис. 3, *б* составляет приблизительно 0.005 Гц. В этом случае в экспериментальной записи давления в проксимальном канальце можно идентифицировать не менее пяти периодов данного ритма, что вполне достаточно для осуществления спектральных оценок с помощью базисной вейвлет-функции Морле. Дело в том, что при анализе медленных процессов (с частотами менее 1.0 Гц) параметр f_0 в формуле (2) обычно выбирается

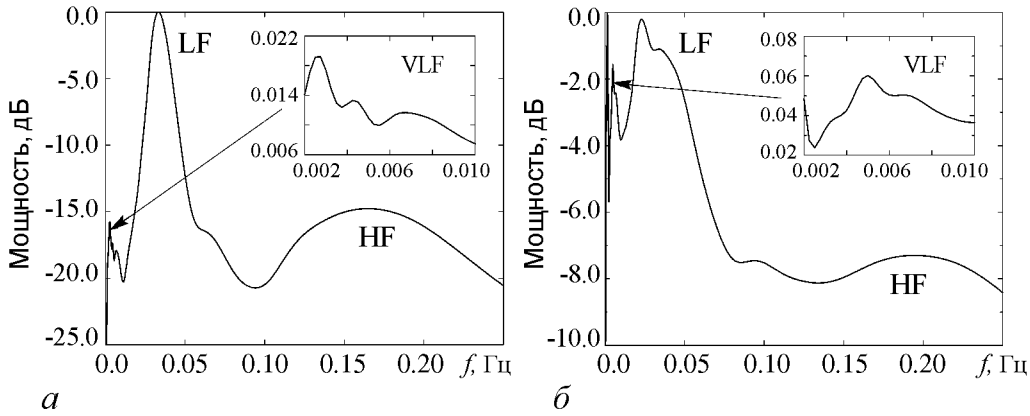


Рис. 3. Усредненные по 34 записям спектры мощности для крыс с нормальным артериальным давлением (*а*) и по 42 записям для крыс с повышенным артериальным давлением (*б*). Кроме LF- и HF-динамики наблюдается наличие очень медленных ритмов в VLF-диапазоне. На вставках мощность в произвольных единицах

равным единице, что обеспечивает хороший компромисс между локализацией базисной функции вейвлет-преобразования в частотной и временной областях. В этом случае функция Морле, являющаяся солитоноподобной, содержит пять осцилляций, после чего спадает до нуля. Даже если бы анализировался длительный по времени процесс, локальный спектральный анализ проводился бы по сравнительно короткому участку сигнала, попадающему внутрь временного окна вейвлет-преобразования.

Для иллюстрации детальных различий между ритмической динамикой нефронов крыс с нормальным и повышенным артериальным давлением рассмотрим отношение энергий колебаний в трех рассматриваемых диапазонах спектров мощности. В соответствии с рис. 3 можно ожидать, что анализируемые группы крыс должны демонстрировать различающиеся значения данной характеристики. Рис. 4 служит подтверждением этому: наиболее сильные различия наблюдаются для VLF и LF диапазонов ($P_{\mathrm{VLF}}/P_{\mathrm{LF}}$ – рис. 4, *а*, *б*). Более 55% крыс с нормальным артериальным давлением и всего лишь 5% крыс с повышенным давлением характеризуются отношением $P_{\mathrm{VLF}}/P_{\mathrm{LF}} < 0.1$. Таким образом, мы можем говорить о наличии очень существенных различий между группами.

Нефроны крыс первой группы демонстрируют малые значения энергии колебаний в VLF-диапазоне по сравнению с нефронами крыс второй группы, которые могут демонстрировать сравнительно большую вариабельность значений энергии VLF-колебаний (см. рис. 3). Отметим, что противоположная ситуация наблюдается

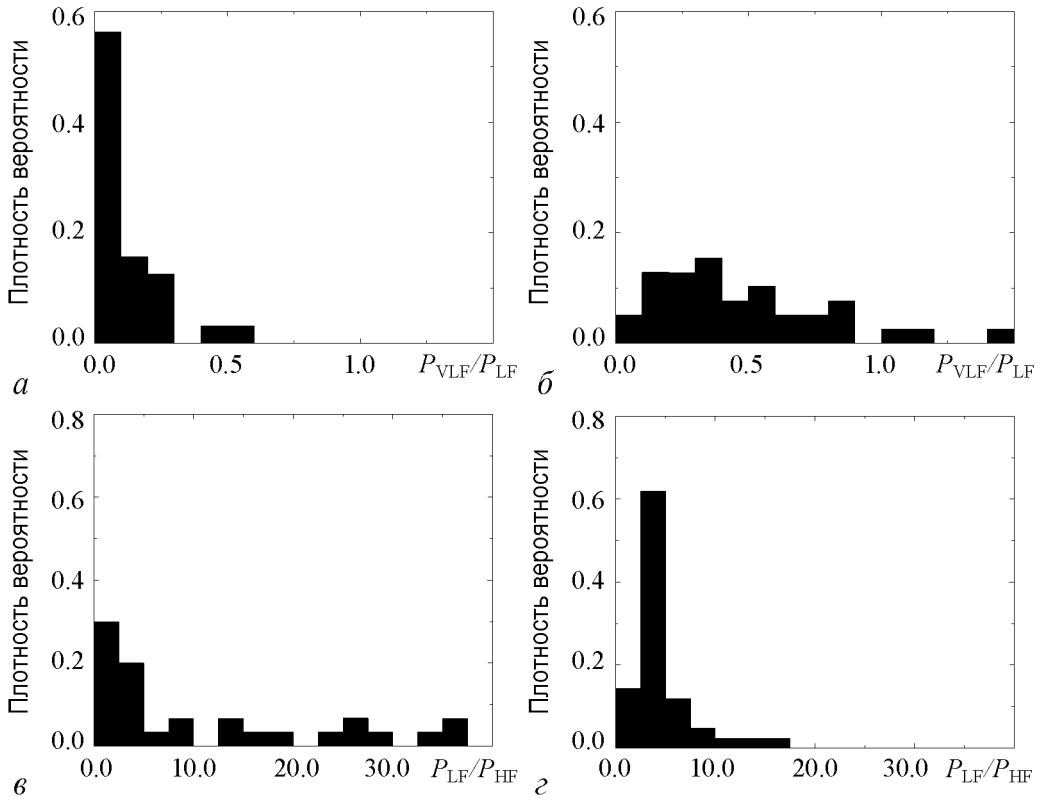


Рис. 4. Распределения отношения величин энергии колебаний в различных частотных диапазонах для крыс с нормальным (*а, в*) и повышенным (*б, г*) артериальным давлением

для LF-диапазона, где теперь уже вторая группа крыс демонстрирует малую амплитуду колебаний, тогда как динамика нефронов крыс первой группы не ограничена столь малыми амплитудами. Отмеченные особенности динамики нефронов приводят к достаточно сильным различиям, показанным на рис. 4, *а*, *б*. Аналогичные различия в функционировании отдельных нефронов между двумя группами крыс наблюдаются и в других частотных диапазонах. В частности, рис. 4, *в*, *г* иллюстрируют, что отношение P_{LF}/P_{HF} принимает только достаточно малые значения для крыс второй группы по сравнению с первой. Из рис. 5 хорошо видно, что характеристики крыс с нормальным артериальным давлением (белые кружочки) и крыс с повышенным артериальным давлением (черные кружочки) заметно отличаются друг от друга.

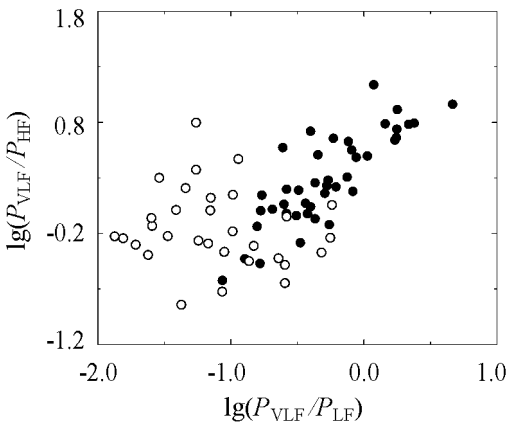


Рис. 5. Различия в динамике нефронов крыс с нормальным и повышенным артериальным давлением. Отношения величин энергии колебаний в соответствующих частотных диапазонах для наглядности представлены в логарифмическом масштабе

3. Эффекты модуляции в динамике нефрона

3.1. Канальцево-гломерулярная динамика. Эффекты взаимодействия между медленными ритмами парных нефронов, обусловленными механизмом КГОС (то есть между колебательными процессами в LF-диапазоне спектра) недавно обсуждались в работе [14]. Рассмотрим особенности модуляции данных ритмов в динамике индивидуальных функциональных элементов почек. Модуляция мгновенной частоты или амплитуды колебательного процесса может осуществляться более медленными ритмами. В случае LF-диапазона модулирующие процессы относятся к VLF-динамике. Рис. 6 демонстрирует примеры изменения во времени характеристик LF-ритма. Как видно из рис. 6, *а*, мгновенная частота модулирующего процесса может существенно варьироваться (в приведенном примере она меняется приблизительно от 0.0025 до 0.01 Гц), а интенсивность модуляции при этом оказывается достаточно велика. Последнее означает, что очень медленные колебания могут существенно влиять на динамику отдельного нефрона; это влияние нельзя устранить путем простого применения высокочастотных фильтров, которое часто используется для удаления тренда. Изменение мгновенной частоты VLF-ритма в широких пределах приводит к «размыванию» характерного пика в соответствующем диапазоне спектра мощности, вычисленного по сигналу давления в проксимальном канальце (см. рис. 3, *а*). Сильная вариабельность частоты может даже привести к исчезновению четко выраженных VLF-пиков в усредненном спектре для большой группы нефронов. Тем не менее данная очень медленная динамика оказывает влияние на два других механизма почечной авторегуляции: канальцево-гломерулярную обратную связь (см. рис. 6) и, как мы продемонстрируем в следующем разделе, миогенный отклик входящей артериолы.

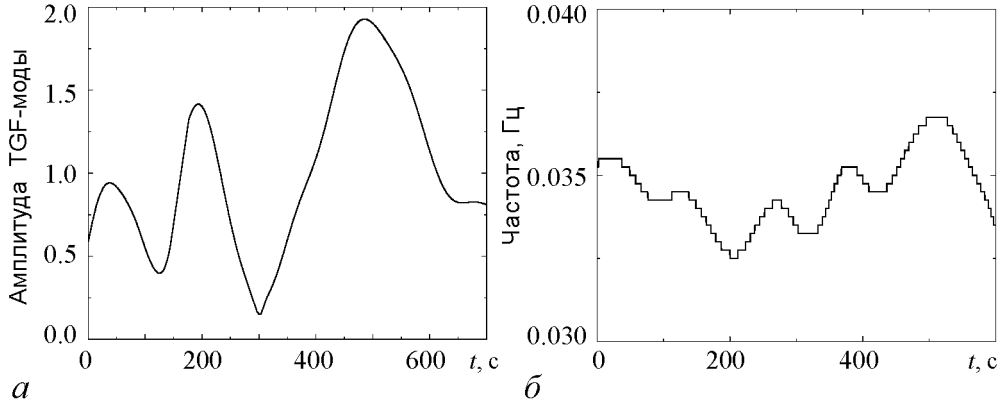


Рис. 6. Мгновенная амплитуда (*а*) и мгновенная частота (*б*) медленного ритма демонстрируют наличие колебаний. Результаты приведены для двух разных экспериментальных записей

Характеристики модуляции могут различаться для крыс с нормальным и повышенным артериальным давлением. Первая группа характеризуется малыми значениями глубины модуляции (как амплитудной, так и частотной). Это видно на рис. 7, где приведены результаты, полученные на основе двойного вейвлет-анализа по аналогии с работами [18–20]. Как следует из данного рисунка, существуют хорошо заметные различия между двумя группами крыс как для глубины амплитудной M_a, так и для глубины частотной M_f модуляции. Усредненные по всем экспериментальным записям значения глубины модуляции отмечены пунктирными линиями. Хорошо видно, что глубина модуляции и, следовательно, нелинейное взаимодействие между двумя рассматриваемыми процессами является более сильным для крыс второй группы. Относительное количество нефронов с глубиной частотной модуляции, превышающей среднее значение, составляет 26% для крыс с нормальным артериальным давлением и 60% для крыс с повышенным давлением. Для амплитудной модуляции мы получили 32% и 71%, соответственно. Более подробное описание методики вычисления характеристик M_a и M_f, а также техники двойного вейвлет-анализа приводится в нашей предыдущей работе [20].

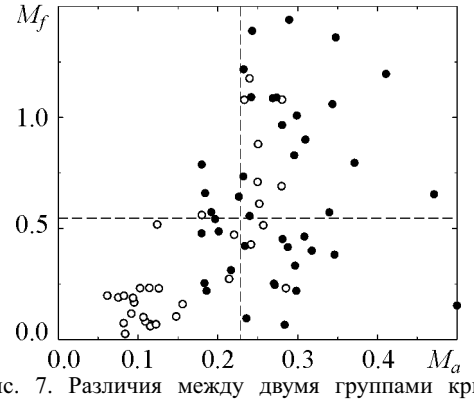


Рис. 7. Различия между двумя группами крыс по значениям глубины амплитудной и частотной модуляции LF-ритма VLF-динамикой. Пунктирные линии показывают усредненные значения величин M_f и M_a по всем экспериментальным записям

3.2. Миогенная динамика. В отличие от ритма, обусловленного механизмом КГОС, модуляция миогенной динамики является более сложной. В предыдущих работах [15, 18] мы частично обсуждали особенности взаимодействия ритмов, рассматривая нефрон как двухмодовый осциллятор. Однако следует отметить, что миогенная (HF) динамика подвергается одновременному воздействию нескольких ритмических компонент. В случае LF-ритма спектр модуляции является очень простым (см., например, рис. 8, *а*, где он содержит только один четкий пик). Как следствие, не возникает проблем с оценкой характеристик M_a и M_f. Спектр модуляции мио-

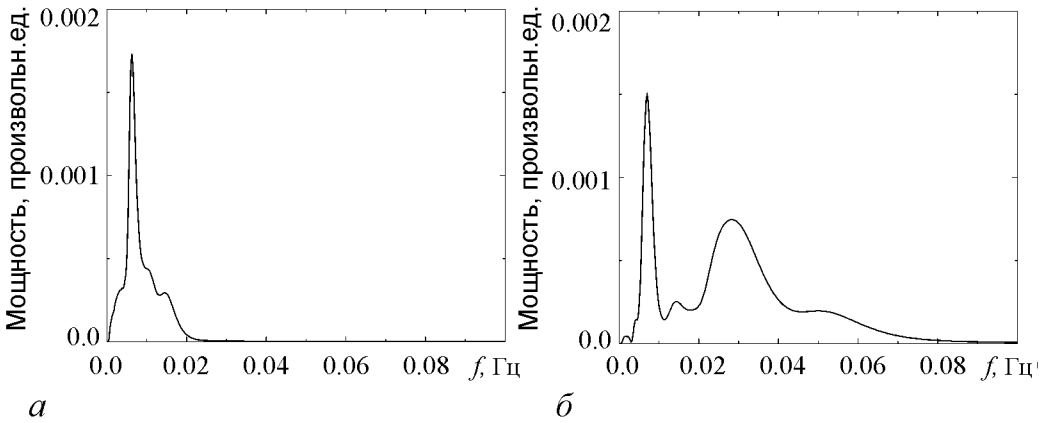


Рис. 8. Спектры мощности амплитудной модуляции для LF (*а*) и HF (*б*) ритмов

генной динамики является более сложным (рис. 8, *б*). Мы видим, что в модуляции участвуют ритмы двух частотных диапазонов (VLF и LF). Для того чтобы выявить влияние, которое оказывает каждый ритм по отдельности, необходимо извлечь временные зависимости мгновенных частот и амплитуд. Осуществив это, можно количественно охарактеризовать вклад каждого ритма в процесс модуляции. Применение методики двойного вейвлет-анализа в данной ситуации является более эффективным по сравнению с простыми оценками M_a и M_f, которые базируются, например, на определении максимального и минимального значения амплитуды промодулированного процесса. Двойной вейвлет-анализ учитывает, что вычисляемые характеристики могут сильно меняться во времени, поэтому представляется полезным вначале вычислить их мгновенные значения, и лишь затем проводить оценку усредненных характеристик [20].

Рис. 9 иллюстрирует различия значений глубины модуляции миогенного ритма VLF-динамикой для крыс с нормальным (белые кружочки) и повышенным (черные кружочки) артериальным давлением. По аналогии с результатами предыдущего раздела, вторая группа характеризуется более сильным взаимодействием ритмов, что проявляется в увеличении M_a и M_f. В данном случае относительное количество нефронов, для которых глубина амплитудной модуляции превышает среднее значение, составляет 21% для крыс с нормальным и 69% для крыс с повышенным артериальным давлением. Соответствующие результаты для частотной модуляции составляют 24% и 57%.

Исследование взаимодействия между колебаниями, возникающими за счет механизма КГОС, и миогенной динамикой в форме частотной и амплитудной модуляции позволяет выявить похожие различия между анализируемыми группами, как и в случае модуляции VLF-динамикой. Вторая группа крыс вновь демонстрирует большую глубину модуляции и, следовательно, более сильное взаимодействие между механизмами почечной авторегуляции (рис. 10, *а*). Относительное количество нефронов с превышающей среднее значение глубиной частотной модуляции составляет 18% для первой группы и 74% для второй. Результаты для амплитудной модуляции миогенной динамики составляют, соответственно, 21% и 64%.

Отметим, что явление амплитудной модуляции миогенной динамики ранее уже было исследовано в работе [32], однако частотная модуляция до недавнего времени оставалась неизвестным явлением в физиологии почек. Как было показано в рабо-

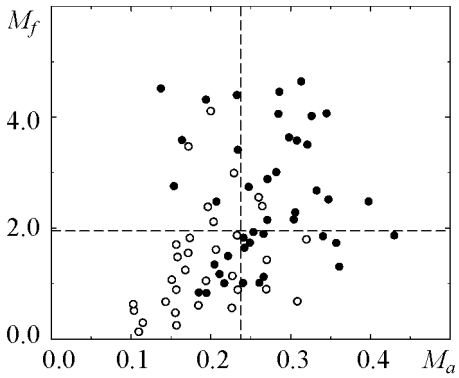


Рис. 9. Различия между двумя группами крыс по значениям глубины амплитудной и частотной модуляции HF-ритма VLF-динамикой

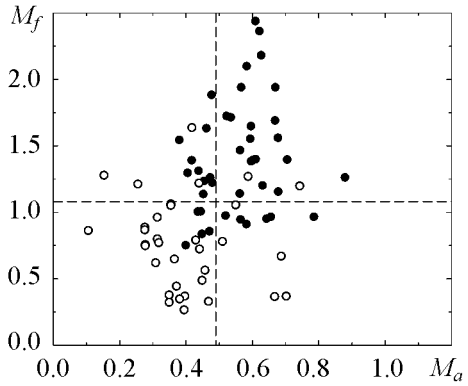


Рис. 10. Различия между двумя группами крыс по значениям глубины амплитудной и частотной модуляции HF-ритма LF-динамикой

тах [19, 20], частотная модуляция является механизмом, препятствующим сильному растяжению сосудов за счет подстройки частоты их сокращений.

Таким образом, в соответствии с полученными результатами, динамика нефронов крыс с повышенным артериальным давлением характеризуется более сильным взаимодействием *всех* характерных ритмов, которые можно идентифицировать в структуре сигналов индивидуальных функциональных элементов почек.

Заключение

В данной работе мы исследовали особенности взаимодействия ритмических компонент в динамике индивидуальных функциональных элементов почек (нефронов). В отличие от предыдущих работ, посвященных данной тематике, мы акцентировали внимание на взаимодействии всех ритмов, наблюдаемых в структуре сигналов давления ультрафильтрата в проксимальных канальцах. Для того чтобы охарактеризовать степень взаимодействия, мы рассмотрели количественную характеристику (глубину модуляции), которая оценивалась на основе двойного вейвлет-анализа, предложенного в работах [18, 19]. Причиной выбора данного подхода являлась сильная нестационарность динамики нефронов, приводящая к менее достоверным оценкам данной характеристики, вычисляемым с помощью более простых методов.

На основе техники двойного вейвлет-анализа были изучены эффекты модуляции ритмов, обусловленных механизмами канальцево-гломерулярной обратной связи и миогенным откликом сосудов. В обоих случаях существенное влияние на указанные механизмы почечной авторегуляции кровотока оказывают очень медленные ритмические компоненты (0.002–0.01 Гц), предположительно связанные с вариациями давления крови во входящей артериоле.

Полученные результаты демонстрируют существенные различия эффектов взаимодействия ритмов для крыс с нормальным и повышенным артериальным давлением, причем эти различия наблюдаются для всех ритмических компонент. Результаты исследования трех частотных диапазонов хорошо согласуются между собой и показывают, что повышение артериального давления увеличивает степень взаимодействия всех механизмов почечной авторегуляции. Обнаруженные эффекты, в первую

очередь те из них, которые относятся к взаимодействию между очень медленной динамикой и остальными механизмами, являются новыми; они показывают, что очень медленная динамика существенно влияет на функционирование нефронов. В связи с этим на данном этапе представляется важным сам факт обнаружения нелинейного взаимодействия ритмов и выявление четких различий между состояниями нормы и патологии. Мы надеемся, что исследование соответствующих различий в динамике позволит расширить существующие представления об особенностях регуляции в индивидуальных функциональных элементах почек и предложить в дальнейшем более детальную физиологическую интерпретацию наблюдаемых явлений.

Авторы благодарят N.-H. Holstein-Rathlou и D.J. Marsh за предоставленные экспериментальные данные и обсуждение результатов.

Проводимые исследования были поддержаны Министерством образования и науки РФ по программе «Развитие научного потенциала высшей школы (2006–2008 гг.)» и грантом фонда «Династия».

Библиографический список

1. *Tuckwell H.C.* Introduction to Theoretical Neurobiology. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. Vols. 1 and 2.
2. *Goldbeter A.* Biochemical Oscillations and Cellular Rhythms. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
3. *Neiman A., and Russell D.F.* Stochastic biperiodic oscillations in the electroreceptors of paddlefish // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 86. P. 3443.
4. *Тычинский В.П.* Когерентная фазовая микроскопия внутриклеточных процессов // Успехи физических наук. 2001. № 6. С. 649.
5. *Stefanovska A. and Bračič M.* Physics of the human cardiovascular system // Contemporary Physics. 1999. Vol. 40. P. 31.
6. Sturis J., Mosekilde E., and Van Cauter E. Modeling modulatory effects on pulsatility // Methods in Neurosciences. 1994. Vol. 20. P. 393.
7. *Pikovsky A., Rosenblum M., and Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge Nonlinear Science Series 12, Cambridge University Press, 2001.
8. *Mosekilde E., Maistrenko Yu., and Postnov D.* Chaotic Synchronization: Applications to Living Systems. World Scientific, Singapore, 2002.
9. *Schäfer C., Rosenblum M.G., Abel H., and Kurths J.* Synchronization in the human cardiorespiratory system // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 60. P. 857.
10. *Rzeczinski S., Janson N.B., Balanov A.G., and McClintock P.V.E.* Regions of cardiorespiratory synchronization in humans under paced respiration // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 66. P. 051909.
11. *Kopell N., Ermentrout G.B., Whittington M.A., and Traub R.D.* Gamma rhythms and beta rhythms have different synchronization properties // Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 2000. Vol. 97. P. 1867.
12. *Glass L., and Mackey M.C.* From Clocks to Chaos: The Rhythms of Life. Princeton University Press, Princeton, 1988.

13. *Tass P.* Effective desynchronization with bipolar double-pulse stimulation // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 66. P. 036226.
14. *Holstein-Rathlou N.-H., Yip K.-P., Sosnovtseva O.V., and Mosekilde E.* Synchronization phenomena in nephron-nephron interaction // Chaos. 2001. Vol. 11. P. 417.
15. *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E., and Holstein-Rathlou N.-H.* Bimodal oscillations in nephron autoregulation // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 66. P. 061909.
16. *Bračič M., and Stefanovska A.* Synchronization and modulation in the human cardiorespiratory system // Physica A. 2002. Vol. 283. P. 451.
17. *Adison P.S., and Watson J.N.* Secondary transform decoupling of shifted nonstationary signal modulation components: Application to photoplethysmography // Int. J. of Wavelets, Multiresolution and Information Processing. 2004. Vol. 2. P. 43.
18. *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H., and Marsh D.J.* Double-wavelet approach to study frequency and amplitude modulation in renal autoregulation // Phys. Rev. E. 2004. Vol. 70. P. 031915.
19. *Marsh D.J., Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Yip K.-P., Holstein-Rathlou N.-H.* Frequency encoding in renal blood flow regulation // Am. J. Physiol. (Regul. Integr. Comp. Physiol.) 2005. Vol. 288. P. R1160.
20. *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H., and Marsh D.J.* Double-wavelet approach to studying the modulation properties of nonstationary multimode dynamics // Physiol. Measur. 2005. Vol. 26. P. 351.
21. *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Brazhe N.A., Brazhe A.R., Erokhova L.A., Maksimov G.V., and Mosekilde E.* Interference microscopy under double-wavelet analysis: A new tool to studying cell dynamics // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 94. P. 218103.
22. *Grossman A., and Morlet J.* Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape // S.I.A.M. J. Math. Anal. 1984. Vol. 15. P. 723.
23. *Daubechies I.* Ten lectures on Wavelets. Philadelphia, S.I.A.M., 1992.
24. Wavelets and Applications / Ed. Y. Meyer. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
25. *Chui C.K.* An Introduction to Wavelets. New York, Academic Press, 1992.
26. *Mallat S.G.* A Wavelet Tour of Signal Processing. San Diego, Academic Press, 1998.
27. *Короновский А., Храмов А.* Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003.
28. *Holstein-Rathlou N.-H., and Leyssac P.P.* TGF-mediated oscillations in the proximal intratubular pressure: Differences between spontaneously hypertensive rats and Wistar-Kyoto rats // Acta Physiol. Scand. 1986. Vol. 126. P. 333.
29. *Leyssac P.P., and Holstein-Rathlou N.-H.* Effects of various transport inhibitors on oscillating TGF pressure response in the rat // Pflügers Arch. 1986. Vol. 407. P. 285.
30. *Holstein-Rathlou N.-H., and Marsh D.J.* Renal blood flow regulation and arterial pressure fluctuations: A case study in nonlinear dynamics // Physiol. Rev. 1994. Vol. 74. P. 637.
31. *Holstein-Rathlou N.-H., Wagner A.W., and Marsh D.J.* Tubuloglomerular feedback dynamics and renal blood flow autoregulation in rats // Am. J. Physiol. (Renal Fluid Electrolyte Physiol.) 1991. Vol. 260. P. F53.
32. *Chou K.H., Chen Yu-Ming, Marmarelis V.Z., Marsh D.J., and Holstein-Rathlou N.-H.*

Detection of interaction between myogenic and TGF mechanisms using nonlinear analysis // Am. J. Physiol. (Renal Fluid Electrolyte Physiol.) 1994. Vol. 267. P. F160.

33. *Mosekilde E.* Topics in Nonlinear Dynamics: Applications to Physics, Biology and Economic Systems. World Scientific, Singapore, 1996.

Саратовский государственный университет
Датский технический университет

Поступила в редакцию *04.09.2006*
После доработки *23.11.2006*

INTERACTION OF RHYTHMS IN THE DYNAMICS OF FUNCTIONAL UNITS OF THE KIDNEY

A.N. Pavlov, O.N. Pavlova, O.V. Sosnovtseva

In this paper we study the phenomena of interaction between three rhythmic components of renal autoregulation. Clear distinctions of the corresponding phenomena for almost periodic dynamics of nephrons observed in normotensive rats and irregular (chaotic) dynamics that occur in the nephrons of genetically hypertensive rats are revealed.

Павлов Алексей Николаевич – родился в Саратове (1973). Окончил физический факультет Саратовского университета по специальности радиофизика и электроника (1995). Кандидат физико-математических наук (1998). В настоящее время работает доцентом на кафедре радиофизики и нелинейной динамики. Область научных интересов: анализ временных рядов, динамика биологически систем. Имеет более 60 работ, опубликованных в отечественной и зарубежной печати. E-mail: pavlov@chaos.ssu.runnet.ru

Павлова Ольга Николаевна – студентка 5-го курса физического факультета Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (кафедра радиофизики и нелинейной динамики, специальность «биохимическая физика»). Область научных интересов – применение методов нелинейной динамики в исследованиях биологических систем. Имеет 4 научные публикации.

Сосновцева Ольга Владимировна родилась в 1966 году. Окончила физический факультет Саратовского университета (1989). Защитила кандидатскую диссертацию (1996). Неоднократно работала за рубежом: в Германии, Дании и Южной Корее. В настоящее время работает в Датском техническом университете (г. Люнгбю). Научные интересы - явления самоорганизации в ансамблях нелинейных хаотических и стохастических систем; особенности синхронизации хаотической динамики и стохастических процессов, динамика биологических систем. Имеет около 50 публикаций в отечественной и зарубежной печати. E-mail:olga@fysik.dtu.dk

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 2, 2007 УДК 536.25

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ТЕЧЕНИЙ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ ПРИ СЛУЧАЙНО НЕОДНОРОДНОМ НАГРЕВЕ

Д.С. Голдобин

В работе исследуются свойства локализации термоконвективных течений в тонком горизонтальном слое при заданном потоке тепла поперек слоя и то, как на эти свойства влияет прокачивание жидкости в горизонтальном направлении. Навязываемый тепловой поток не зависит от времени, но случайно неоднороден в пространстве вдоль одного из горизонтальных направлений (рассматривается двухмерная задача; средний по слою тепловой поток близок к критическому). Интерпретация результатов линейной теории подкреплена численным интегрированием полной нелинейной задачи. Полученные результаты справедливы не только для конвекции жидкости в пористой среде, но и для конвекции в однородной жидкости и для некоторых других гидродинамических систем.

Введение

Эффекты локализации в распределенных системах со случайно неоднородными параметрами впервые привлекли широкое внимание в связи с явлениями в квантово-механических системах (локализация Андерсона [1, 2]). Позже подобные эффекты были обнаружены и исследовались не только для случайной, но и для квазипериодической модуляции параметров (например, [3, 4]). Локализация изучалась также и в некоторых гидродинамических системах (например, [5]).

В данной работе рассматривается тепловая конвекция в горизонтальном слое со случайной стационарной пространственной неоднородностью нагрева. Ранее, в работе [6], исследовалось влияние такой неоднородности на порог устойчивости в одномерном уравнении Ландау – Гинзбурга, но свойства локализации решений в линеаризованном варианте этой системы не отличаются от таковых в стационарном уравнении Шредингера с потенциалом в виде δ-коррелированного гауссова шума (подробно описанных, например, в [7]). Гидродинамическая система, фигурирующая в настоящей работе, описывается уравнением, линеаризация которого может быть сведена к упомянутому уравнению Шредингера лишь в отсутствие горизонтального прокачивания жидкости через слой. Кроме того, есть существенная разница в наблюдаемости эффектов, связанных с формальными свойствами уравнений, описывающих разные по своей природе системы.

Данная работа посвящена анализу вопроса об интерпретации локализации формальных решений линеаризованного варианта уравнений, описывающих тепловую конвекцию в тонком слое при случайно неоднородном нагреве, исследованию влияния на эти свойства прокачивания жидкости и наблюдению проявления этих свойств в исходной нелинейной системе.

1. Тепловая конвекция в тонком горизонтальном слое

Рассматривается подогреваемый снизу горизонтальный слой пористой среды, насыщенный жидкостью. Система координат выбирается так, что плоскость (x, y) горизонтальна, а $z = 0$ и $z = h$ – нижняя и верхняя границы слоя, соответственно. Верхняя и нижняя границы слоя непроницаемы для жидкости и обладают низкой теплопроводностью, что подразумевает заданный тепловой поток через границы. Этот тепловой поток полагается стационарным, но может быть неоднороден в горизонтальных направлениях: $Q(x, y) = Q_{\mathrm{cr}}(1 + \varepsilon^2 q(x, y))$, где Q_{cr} — критическое значение теплового потока, при котором в однородном слое возникают конвективные течения; ε^2 — характерная величина относительных отклонений.

Характерные горизонтальные размеры неоднородностей нагрева полагаются большими по сравнению с толщиной слоя: $h|\nabla q|/|q| \sim \sigma \ll 1$, — а $\varepsilon \ll 1$. Тогда в описанной системе будут развиваться длинноволновые структуры [8] с характерным горизонтальным масштабом $L = \varepsilon^{-1} h$, который удобно выбирать за единицу измерения горизонтальных координат.

Поскольку в используемой нами постановке задачи уравнения тепловой конвекции жидкости, насыщающей пористую среду, подобны таковым, например, для конвекции в слое однородной [9] или турбулентной жидкости [10], мы позволяем себе не останавливаться здесь на исходных уравнениях и выводе уравнений длинноволнового приближения в конкретной задаче, а сразу приводим безразмерное уравнение длинноволновой конвекции в слое пористой среды, ограничившись приведенной выше постановкой задачи.

В длинноволновом приближении (или, что то же самое, приближении тонкого слоя) возмущения температуры остаются почти постоянными поперек слоя $\theta = \theta(x, y)$ и при соответствующем выборе единиц измерения их эволюция описывается уравнением

$$\begin{gathered} \dot{\theta} - \nabla P_{\mathrm{adv}} \nabla \theta = -\Delta^2 \theta + \nabla \left(-q(x, y) \nabla \theta + \nabla \theta (\nabla \theta)^2 \right), \\ \Delta P_{\mathrm{adv}}(x, y) = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где $P_{\mathrm{adv}}(x, y)$ – давление, связанное с возможным вынужденным прокачиванием жидкости через слой (прокачивание может быть навязано за счет условий на боковых границах слоя), скорость прокачивания $\vec{u}_{\mathrm{adv}} = -\nabla P_{\mathrm{adv}}$; поскольку θ, P_{adv} и q зависят только от горизонтальных координат, все операторы дифференцирования двухмерны.

В настоящей работе рассматривается случай $q(x, y) = q_0 + \xi(x)$, где $\xi(x)$ – нормированный гауссовский δ-коррелированный шум[1], $\langle \xi(x) \rangle = 0$,

[1]Приближение δ-коррелированного шума не противоречит длинноволновому приближению – достаточно соблюсти следующую иерархию малости величин: $\varepsilon \ll \sigma^2 \ll 1$.

$\langle\xi(x+x')\xi(x)\rangle = 2\delta(x')$ (интенсивность шума обращена в единицу подходящим выбором единиц измерения), и исследуются однородные вдоль y решения, для которых скорость прокачивания $-\nabla P_{\rm adv} = u\vec{e}_x$ ($\vec{e}_x$ – орт оси x), $u = \mathrm{const}$. Тогда уравнение (1) принимает вид

$$\dot{\theta} = \left(-u\theta - \theta_{xxx} - [q_0 + \xi(x)]\theta_x + (\theta_x)^3\right)_x . \tag{2}$$

Можно отметить, что поле скорости жидкости в главном порядке имеет вид

$$\vec{v} = \frac{\partial\Psi}{\partial z}\vec{e}_x - \frac{\partial\Psi}{\partial x}\vec{e}_z, \qquad \Psi = f(z)\,\psi(x) = \Psi_0\frac{z}{h}\left(1-\frac{z}{h}\right)\theta_x, \tag{3}$$

где $\psi(x) \equiv \theta_x(x)$ – амплитуда функции тока; константа Ψ_0 определяется выбором единиц измерения. Здесь не фигурирует вклад в скорость от прокачивания, поскольку его характерные значения малы на фоне конвективных течений. Существенное же влияние прокачивания на систему связано с тем, что его пространственная симметрия отличается от симметрии конвективных течений: у конвективных течений суммарный поток жидкости через любое сечение слоя равен нулю, а для течения, связанного с прокачиванием, это не так. Важно, что, хотя в длинноволновом приближении уравнения эволюции возмущений температуры при двухмерной конвекции в однородной жидкости и при конвекции жидкости в пористой среде совпадают (с точностью до перенормировки параметров), функции $f(z)$ различны.

Численный счет выявил, что при достаточно малых u в системе (2) реализуются устойчивые стационарные решения. Мы интересуемся свойствами локализации нетривиальных стационарных решений. Если некоторое решение будет локализовано в окрестности точки x_0, то вдали от нее $\theta_x \sim \exp(-\gamma_\pm|x-x_0|)$ (при $(x-x_0)u > 0$ выбирается показатель локализации в направлении по потоку γ_-, при $(x-x_0)u < 0$ – показатель локализации в направлении против потока γ_+; обратную величину $\lambda_\pm = \gamma_\pm^{-1}$ принято называть длиной локализации). В области этих экспоненциальных «хвостов» решения малы и показатели могут быть определены из линеаризации уравнения (2), которое в стационарном случае может быть однократно проинтегрировано по x:

$$u\theta + \theta''' + [q_0 + \xi(x)]\theta' = \mathrm{const} \equiv S \tag{4}$$

(штрих обозначает производную по координате x), при $u \neq 0$ замена $\theta \to \theta + S/u$ позволяет обратить поток тепла S в ноль.

Примечательно, что при $u = S = 0$ для θ' получается стационарное уравнение Шредингера (уравнение при $q(x,y)$, зависящем от обеих горизонтальных координат, к уравнению Шредингера уже не сводится), свойства локализации в котором при δ-коррелированном потенциале хорошо исследованы (см., например, [7]): все состояния с любой энергией (соответствующей в нашем случае средней надкритичности q_0) локализованы. Однако данный случай примечателен не только наличием прокачивания, но и принципиальным различием в физической интерпретации и наблюдаемости эффектов, связанных с формальными свойствами уравнений, в данной нелинейной гидродинамической задаче и линейном уравнении Шредингера: в уравнении Шредингера различные локализованные решения линейной задачи принципиально не взаимодействуют между собой и соответствуют связанным состояниям

частиц в случайном потенциале, тогда как в данной задаче все такие моды взаимодействуют между собой через нелинейность и вместе формируют некоторое стационарное течение, которое при большой пространственной плотности локализованных мод может иметь примерно постоянную в пространстве интенсивность.

Таким образом, для того чтобы наблюдать локализованные течения в данной системе (если они имеют место в линеаризованной стационарной задаче), пространственная плотность возбуждаемых мод должна быть невелика. Такая ситуация реализуется при достаточно большом отрицательном среднем отклонении теплового потока от критического значения: $q_0 < 0$. Для пояснения этого утверждения введем локальное среднее $q_l(x) \equiv l^{-1}\int_{x-l/2}^{x+l/2} q(x_1)\mathrm{d}x_1$. Если в окрестности некоторой точки x значение $q_l(x)$ положительно для достаточно больших l («достаточно большие l» – это l порядка единицы), в окрестности этой точки может развиться конвективное течение, в то время как в областях с отрицательными q_l течение в среднем демпфируется. Для гауссова δ-коррелированного шума q_l – гауссова случайная величина со средним $\langle q_l\rangle = q_0$ и дисперсией $D(q_l) = 2/l$, то есть q_l принимает положительное значение с вероятностью $P(q_l > 0) = \Phi(q_0/\sqrt{D(q_l)}) = \Phi(q_0\sqrt{l/2})$ (здесь Φ – функция ошибок). При больших отрицательных q_0 величина $P(q_l > 0) \approx \approx (-q_0)^{-1}(\pi l)^{-1/2}\exp(-q_0^2 l/4)$ является малой, и области возбуждения конвективного течения располагаются в пространстве достаточно разрежено, что может позволить наблюдать локализованные течения.

2. Показатель локализации

2.1. Показатели роста поля температуры. Рассмотрим стохастическую динамическую систему

$$\theta' = \psi, \quad \psi' = \phi, \quad \phi' = -[q_0 + \xi(x)]\psi - u\theta. \tag{5}$$

Спектр показателей Ляпунова данной системы состоит из трех элементов: $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \gamma_3$. В силу инвариантности системы (5) относительно преобразования $(u, x, \theta, \psi, \phi) \to (-u, -x, \theta, -\psi, \phi)$,

$$\gamma_1(q_0, u) = -\gamma_3(q_0, -u) \quad \text{и} \quad \gamma_2(q_0, u) = -\gamma_2(q_0, -u).$$

Помимо прочего, из этих соотношений следует, что $\gamma_2(q_0, u = 0) = 0$. С другой стороны, при $u = 0$ система пропускает однородное решение $\{\theta, \psi, \phi\} = \{1, 0, 0\}$, которое и соответствует $\gamma_2 = 0$. Поскольку дивергенция фазового потока системы (5) равна нулю,

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \quad \text{и} \quad \gamma_2(q_0, u) = -\gamma_1(q_0, u) + \gamma_1(q_0, -u).$$

Таким образом, достаточно вычислять максимальный показатель Ляпунова γ_1. На рис. 1 приведены результаты вычисления γ_1 и γ_2.

При $u = 0$, $S = 0$ для течения, локализованного в окрестности x_0, на достаточном удалении от x_0

$$\theta(x) \approx \begin{cases} \Theta_{2,-} + \Theta_1(x)\mathrm{e}^{\gamma_1(x-x_0)}, & \text{при } x < x_0, \\ \Theta_{2,+} + \Theta_3(x)\mathrm{e}^{\gamma_3(x-x_0)}, & \text{при } x > x_0, \end{cases}$$

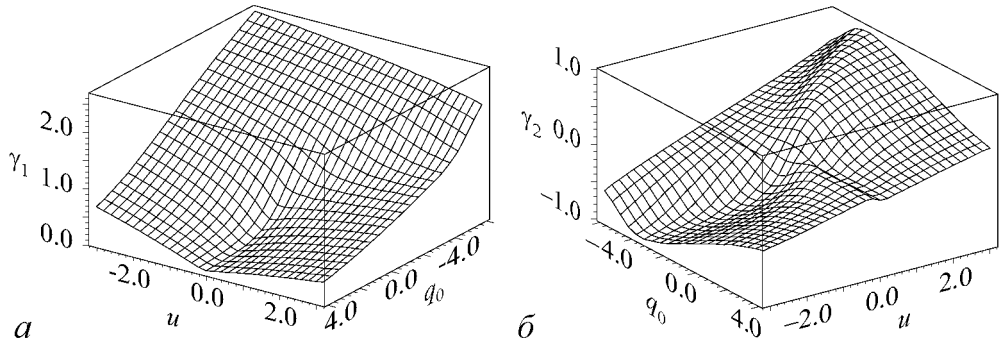


Рис. 1. Показатели Ляпунова в системе (5)

где $\Theta_1(x)$ и $\Theta_3(x)$ – ограниченные функции (не затухающие и не нарастающие на больших расстояниях), зависящие от конкретной реализации шума. Собирая эти асимптоты, можно выписать решение между двумя областями возбуждения конвективных течений, локализованными в x_1 и $x_2 > x_1$,

$$\theta(x_1 < x < x_2) \approx \Theta_3(x)\mathrm{e}^{\gamma_3(x-x_1)} + \Theta_2 + \Theta_1(x)\mathrm{e}^{\gamma_1(x-x_2)}. \tag{6}$$

Амплитуда соответствующей функции тока $\psi \approx \Psi_3(x)\mathrm{e}^{\gamma_3(x-x_1)} + \Psi_1(x)\mathrm{e}^{\gamma_1(x-x_2)}$ ($\Psi_{1,3}(x)$ ограничены подобно $\Theta_{1,3}(x)$) локализована в окрестности x_1 и x_2 с показателем γ_1 ($\gamma_3(q_0, u = 0) = -\gamma_1(q_0, u = 0)$), тогда как возмущения поля температуры не локализованы.

При $u > 0$ (случай $u < 0$ подобен и отдельного рассмотрения не требует) сдвигом начала отсчета температуры $\theta \to \theta + S/u$ всегда можно добиться отсутствия потока тепла: $S = 0$. Из требования $S = 0$ при $u \neq 0$ следует, что в области демпфирования течения, где $\psi \to 0$, и возмущение температуры $\theta \to 0$. В самом деле, решение (6) принимает вид

$$\theta(x_1 < x < x_2) \approx \Theta_3(x)\mathrm{e}^{\gamma_3(x-x_1)} + \Theta_2(x)\mathrm{e}^{\gamma_2(x-x_2)} + \Theta_1(x)\mathrm{e}^{\gamma_1(x-x_2)} \tag{7}$$

(поскольку $\gamma_2(q_0 < 0, u > 0) > 0$, связанная с этим показателем Ляпунова мода локализована в окрестности x_2), и при $u \neq 0$ вклад второго слагаемого вдали от центров возбуждения стремится к нулю. С другой стороны, теперь мода, связанная с γ_2, вносит вклад в амплитуду функции тока: $\psi \approx \Psi_3(x)\mathrm{e}^{\gamma_3(x-x_1)} + \Psi_2(x)\mathrm{e}^{\gamma_2(x-x_2)} + \Psi_1(x)\mathrm{e}^{\gamma_1(x-x_2)}$.

В результате, при $\gamma_2 > 0$ ($u > 0$) течение локализовано по потоку (правый склон локализованного решения) с показателем γ_3: $\gamma_- = |\gamma_3|$. В левой же части окрестности области возбуждения в течении представлены две моды

$$\psi(x < x_2) \approx \Psi_2(x)\mathrm{e}^{\gamma_2(x-x_2)} + \Psi_1(x)\mathrm{e}^{\gamma_1(x-x_2)}. \tag{8}$$

При умеренных значениях u $\Psi_1(x)$ и $\Psi_2(x)$ соизмеримы, мода $\Psi_1(x)\mathrm{e}^{\gamma_1(x-x_2)}$ при удалении от x_2 быстро «теряется» на фоне $\Psi_2(x)\mathrm{e}^{\gamma_2(x-x_2)}$ и свойства локализации определяются γ_2: $\gamma_+ = \gamma_2$. При $u = 0$ функция $\Psi_2(x) = 0$, и при малых u, по непрерывности, $\Psi_2(x)$ должно быть мало. Тогда течение (8) успевает существенно затухнуть в области, где еще доминирует мода, связанная с γ_1, и именно эта мода определяет характерную длину локализации: $\gamma_+ = \gamma_1$.

2.2. Показатели роста среднеквадратичных значений. Для приблизительной аналитической оценки ведущего показателя Ляпунова можно проанализировать поведение средних по реализациям шума значений полей (см. [11]; в работе [12], например, подобным образом оценивался показатель Ляпунова в похожей стохастической системе). А именно, здесь полезен следующий результат из [11], справедливый для стохастического линейного обыкновенного дифференциального уравнения с шумом в коэффициентах:

$$y_i' = L_{ij}\, y_j + \xi(x)\, \mathit{\Gamma}_{ij}\, y_j\,.$$

При гауссовом δ-коррелированном шуме $\xi(x)$ ($\langle\xi(x)\rangle = 0$, $\langle\xi(x+x')\xi(x)\rangle = 2\delta(x')$) динамика средних $\langle y_i\rangle$ подчиняется системе уравнений

$$\langle y_i\rangle' = (\mathrm{L} + \Gamma^2)_{ij}\langle y_j\rangle\,. \tag{9}$$

Если рассматривать $\langle\theta\rangle$, $\langle\psi\rangle$ и $\langle\phi\rangle$, то $\Gamma^2 = 0$, и шум себя не проявляет. Это связано с симметрией системы и мало говорит о ее поведении при конкретной реализации шума. Для анализа того, что имеет место при конкретной реализации шума, следует рассматривать поведение среднеквадратичных значений (см. [11]). Для $\vec{y} = \{\theta^2, \theta\psi, \theta\phi, \psi^2, \psi\phi, \phi^2\}$ уравнения (5) дают

$$\begin{aligned}
y_1' &= 2y_2\,,\\
y_2' &= y_4 + y_3\,,\\
y_3' &= y_5 - [q_0 + \xi(x)]y_2 - uy_1\,,\\
y_4' &= 2y_5\,,\\
y_5' &= y_6 - [q_0 + \xi(x)]y_4 - uy_2\,,\\
y_6' &= -2[q_0 + \xi(x)]y_5 - 2uy_3\,.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\mathrm{A} \equiv \mathrm{L} + \Gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -u & -q_0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -u & 0 & -q_0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -2u & 2 & -2q_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Показателем роста среднеквадратичных значений μ является максимальное вещественное (среднеквадратичная величина не может колебаться) собственное значение матрицы A, имеющее физический смысл[2]. Хотя характеристическое уравнение матрицы A имеет шестую степень относительно собственных значений μ, оно имеет лишь вторую степень относительно u, и поверхность максимального вещественного значения $\mu(q_0, u)$ может быть найдена в параметрическом виде — она состоит из

[2]Формальное собственное решение имеет физический смысл, если для него соблюдены условия $\langle\theta^2\rangle \geq 0$, $\langle\psi^2\rangle \geq 0$, $\langle\phi^2\rangle \geq 0$, $\langle\theta^2\rangle\langle\psi^2\rangle \geq \langle\theta\psi\rangle^2$, $\langle\theta^2\rangle\langle\phi^2\rangle \geq \langle\theta\phi\rangle^2$ и $\langle\psi^2\rangle\langle\phi^2\rangle \geq \langle\psi\phi\rangle^2$.

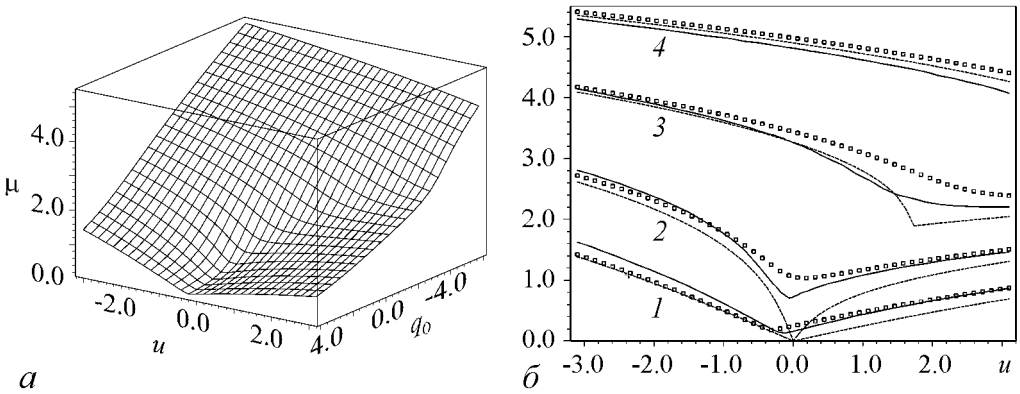


Рис. 2. Показатели роста в системе (5). На правом графике: сплошная линия — удвоенный максимальный показатель Ляпунова $2\gamma_1$, квадраты — показатель роста среднеквадратичных μ, и пунктирная линия — удвоенный максимальный показатель Ляпунова системы (5) в отсутствие шума. Кривые *1–4* построены для значений $q_0 = 3.0,\ 0.0,\ -3.0,\ -6.0$, соответственно

двух частей:

$$u_{1,2} = \frac{7\mu^3 + 4q_0\mu - 8 \pm \sqrt{81\mu^6 + 216q_0\mu^4 - 240\mu^3 + 144q_0^2\mu^2 - 192q_0\mu + 64}}{16}, \quad (10)$$

определенных при $\mu > 0$, $q_0 \geq 2\mu/3 - 3\mu^2/4 + \sqrt{2\mu/3}$. На рис. 2 можно видеть эту поверхность, а также оценить степень согласования между показателями роста $2\gamma_1$ и μ (которые не обязаны совпадать, по определению).

3. Решения полной нелинейной задачи

Хотя свойства локализации в стационарном линейном уравнении (4) при $u = 0$ хорошо известны, поведение гидродинамической задачи (2) при отсутствии прокачивания заслуживает внимания в силу упомянутых ранее принципиальных различий между данной системой и уравнением Шредингера.

В соответствии с ожиданиями относительно наблюдаемости локализованных решений при $q_0 < 0$, на рис. 3 можно видеть примеры локализованных решений при $u = 0$. При адиабатических боковых границах (рис. 3, *а*) течение локализовано в окрестности области, где $q_{l=\pi}$ спонтанно принимает положительные значения, и демпфируется за ее пределами в соответствии с предсказаниями линейной теории (нерегулярный фон на уровне $\theta_x^2 \sim 10^{-25}$ связан с погрешностью численного счета). Адиабатические граничные условия для ограниченной в горизонтальном направлении области соответствуют большому (по сравнению с горизонтальными размерами области, где производится численный счет) расстоянию между областями возбуждения течений в бесконечном слое. При $q_0 = -3.1$, $P(q_{l=\pi} > 0) \approx 5 \cdot 10^{-5}$, и эти области, действительно, должны располагаться в пространстве достаточно редко[3].

При периодических граничных условиях (рис. 3, *б*) эффективно проявляется конечность расстояния между областями возбуждения. В отсутствие шума систе-

[3]Использованная оценка очень груба и не подразумевает достоверного определения характерных расстояний между центрами возбуждения течений.

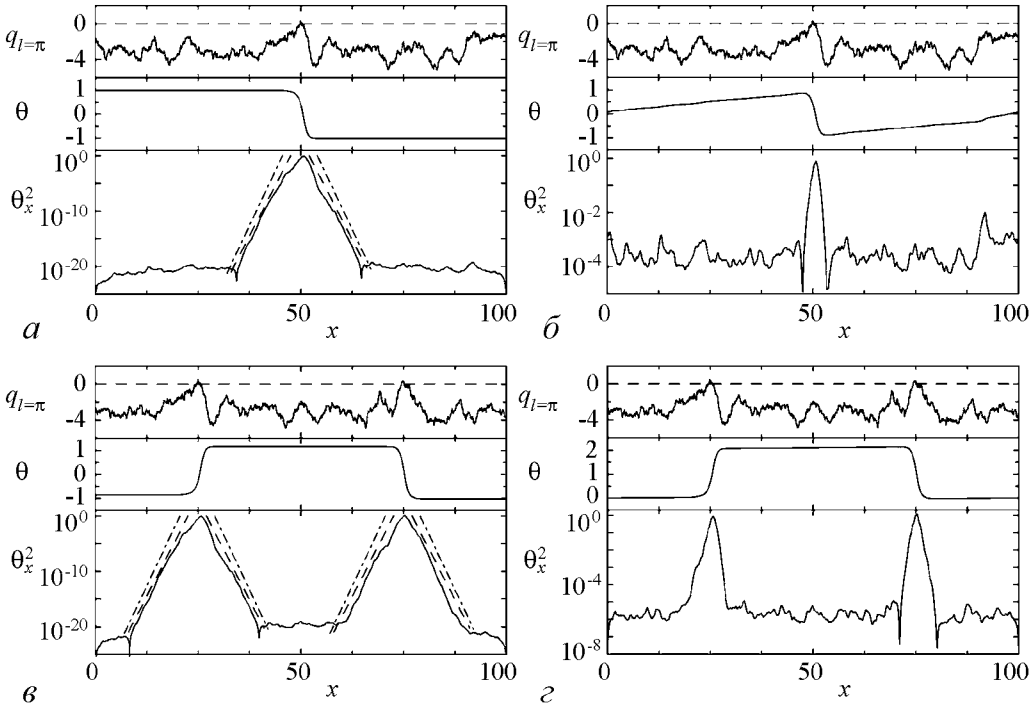


Рис. 3. Примеры стационарных решений уравнения (2) в отсутствие прокачивания при $q_0 = -3.1$ (реализации $q(x)$ представлены графиками $q_{l=\pi}(x)$). Боковые границы: *а, в* – адиабатические непроницаемые, *б* – периодические, *г* – изотермические. Штриховая линия отмечает наклон, соответствующий затуханию решения с показателем $2\gamma_1 = 3.332$, а штрихпунктирная – $\mu = 3.623$

ма (2) пропускает тривиальное решение в виде $\theta = q_0^{-1} S\, x$. При наличии шума с этой модой связано стационарное решение $\theta' = q_0^{-1} S + \psi_1$, $\langle \psi_1 \rangle = 0$, которое при малых S подчиняется линейному уравнению

$$\psi_1'' + [q_0 + \xi(x)]\psi_1 = -q_0^{-1} S\, \xi(x)$$

(здесь $\langle \xi(x)\psi_1 \rangle = 0$), то есть $\psi_1 \propto S$. При наличии шума это решение реализуется в области демпфирования течения ($q_l < 0$). В ситуации, изображенной на рис. 3, *б*, $q_0^{-1} S = [\theta]/L$, где $[\theta] \approx 2$ – перепад температур, навязанный нелинейным течением в области $q_l > 0$, а $L \approx 100$ – период структуры, и $(S/q_0)^2 \approx 4 \cdot 10^{-4}$ – именно такой порядок интенсивности переходного течения и наблюдается вдали от центра возбуждения и не позволяет наблюдать характер затухания «хвостов» интенсивного локализованного течения. Для стационарного течения поток тепла S постоянен вдоль слоя, в силу чего среднее переходное течение $\langle \Psi \rangle \propto \langle \theta' \rangle = q_0^{-1} S$ остается постоянным по всему слою даже при наличии нескольких областей возбуждения конвективного течения.

Примечательно, что связанный с переходным течением поток тепла S при адиабатических граничных условиях должен затухать до нуля. Поэтому в слое с адиабатическими вертикальными границами стационарные локализованные решения реализуются без переходного течения при произвольном количестве областей возбуждения (рис. 3, *в*). В свою очередь, при изотермических вертикальных границах интенсивность фонового течения тем меньше, чем протяженней слой. Дело в том, что

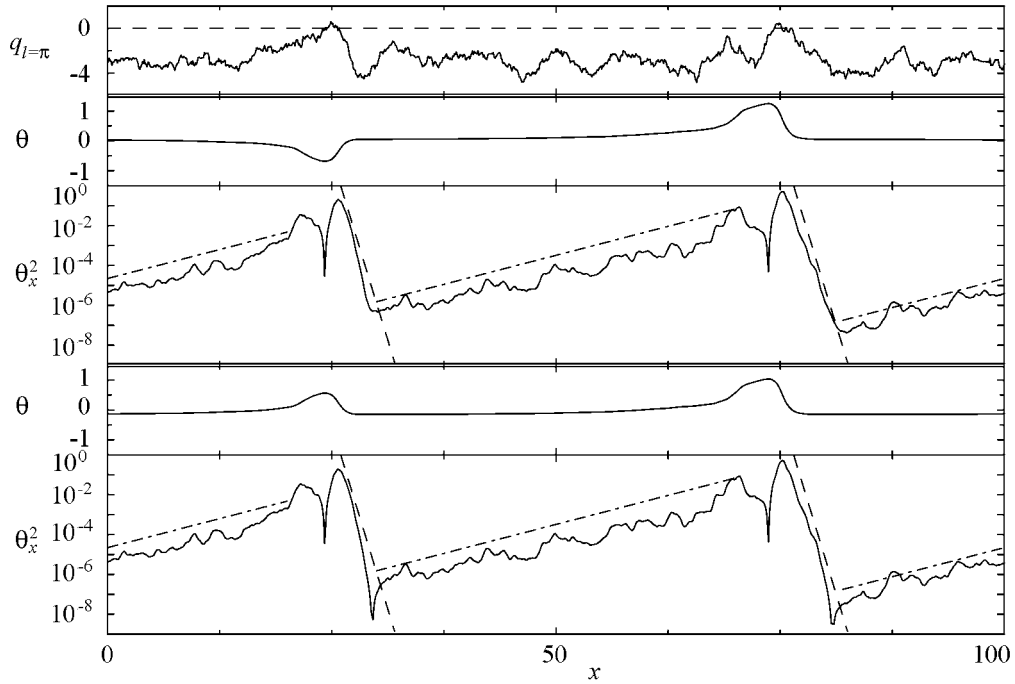


Рис. 4. Примеры стационарных решений уравнения (2) при $u = 0.3$, $q_0 = -3.0$ (реализация $q(x)$ представлена графиком $q_{l=\pi}(x)$) в слое с периодическими граничными условиями. Штриховая линия отмечает наклон, соответствующий затуханию решения с показателем $2\gamma_3 = -3.394$, а штрихпунктирная — $2\gamma_2 = 0.268$

в системе имеется мультистабильность относительно знака скачка поля температуры при переходе через область интенсивного течения и при большом количестве скачков они, в среднем, друг друга компенсируют, что приводит к небольшому значению $q_0^{-1}S = L_{\text{layer}}^{-1}\sum_j[\theta]_j$ (например, на рис. 3, *г* фоновое течение существенно меньше, чем на рис. 3, *б*).

Примеры течений при $u \neq 0$ можно видеть на рис. 4. В соответствии с предсказаниями раздела 2.1. температура по обе стороны от области интенсивного течения одинакова: локализованы не только течения, но и возмущения поля температуры. И, что более примечательно, свойства локализации против потока определяются показателем γ_2 даже при довольно малых u и, соответственно, γ_2, то есть могут очень сильно изменяться.

Примечательно также, что горизонтальное прокачивание может приводить к подавлению конвективных течений. Причем, чем больше u, тем сильнее стабилизирующая роль прокачивания. Однако этот эффект не связан с рассматриваемыми в работе эффектами локализации, и потому остается за рамками настоящего исследования.

Заключение

В работе рассматривается двухмерная тепловая конвекция жидкости в тонком горизонтальном слое со случайной стационарной неоднородностью нагрева, обеспечиваемой фиксированным потоком тепла поперек слоя. Средняя величина пото-

ка тепла ниже критического значения для однородного слоя. При неоднородности, моделируемой гауссовым δ-коррелированным шумом, в системе возможны локальные превышения критического значения теплового потока, приводящие, как показано, к возбуждению локализованных течений, изучению свойств которых и посвящена данная работа.

Исследованы свойства локализации нелинейных течений и влияние на них прокачивания жидкости в горизонтальном направлении. Обнаружено, что прокачивание приводит к локализации не только течений, но и возмущений поля температуры. Вычислены показатели локализации в направлении по потоку прокачивания и против (см. рис. 1). Аналитически определен показатель роста среднеквадратичных значений, дающий оценку показателей локализации, определяемых численно.

В соответствии с предсказаниями теории, численное интегрирование полной нелинейной системы выявило радикальное влияние прокачивания на свойства локализации в направлении против потока прокачивания: длина локализации при малых конечных u может увеличиваться на порядок.

Автор признателен Д.В. Любимову и А.С. Пиковскому за плодотворные обсуждения и полезные комментарии.

Работа была выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ–ННИО 04-02-04011 и РЕ-009-0 Американского Фонда Гражданских Исследований и Развития (АФГИР).

Библиографический список

1. *Anderson P.W.* Absence of diffusion in certain random lattices// Phys. Rev. 1958. Vol. 109. P. 1492.
2. *Fröhlich J., Spencer T.* Absence of diffusion in the Anderson tight binding model for large disorder or low energy // Commun. Math. Phys. 1983. Vol. 88. P. 151.
3. *Grempel D.R., Fishman Sh., Prange R.E.* Localization in an incommensurable potential: an exactly solvable model // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 49. P. 833.
4. *Bourgain J., Wang W.-M.* Anderson localization for time quasi-periodic random Schrödinger and wave equations // Commun. Math. Phys. 2004. Vol. 248. P. 429.
5. *Vlad M.O., Ross J., Schneider F.W.* Long memory, fractal statistics, and Anderson localization for chemical waves and patterns with random propagation velocities // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 57. P. 004003.
6. *Hammele M., Schuler S., Zimmermann W.* Effects of parametric disorder on a stationary bifurcation // Physica D. 2006. Vol. 218. P. 139.
7. *Лифшиц И.М., Гредескул С.А., Пастур Л.А.* Введение в теорию неупорядоченных систем. М.: Наука, 1982.
8. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
9. *Knobloch E.* Pattern selection in long-wavelength convection // Physica D. 1990. Vol. 41. P. 450.
10. *Аристов С.Н., Фрик П.Г.* Крупномасштабная турбулентность в конвекции Рэлея – Бенара // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1989. № 5. С. 43.

11. *Кляцкин В.И.* Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. М.: Наука, 1975.
12. *Zillmer R., Pikovsky A.* Continuous approach for the random-field Ising chain // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72. P. 056108.

Пермский государственный университет

Поступила в редакцию 11.01.2007

LOCALIZATION OF FLOWS IN A HORIZONTAL LAYER SUBJECT TO RANDOMLY INHOMOGENEOUS HEATING

D.S. Goldobin

We study localization of thermo-convective flows in a shallow horizontal layer subject to a fixed thermal flux across the layer, and the effect of advection on the localization properties. The thermal flux applied is stationary in time and randomly inhomogeneous in space (the problem considered is 2-D; the mean flux is nearly critical). The interpretation of linear results is underpinned by numerical simulation of the original nonlinear problem. The results presented in the article are relevant for thermal convection in a porous medium as well as for natural convection and some other hydrodynamical systems.

Голдобин Денис Сергеевич – родился в Перми (1981). Окончил физический факультет Пермского университета (2004). В настоящее время является аспирантом Пермского государственного университета по специальности «Механика жидкости, газа и плазмы». Область научных интересов – вибрационные эффекты в гидродинамике, тепловая конвекция, статистическая физика, нелинейная динамика. Автор 10 научных статей по указанным выше направлениям. E-mail:Denis.Goldobin@gmail.com

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 2, 2007 УДК 517.9

ВЛИЯНИЕ АСИММЕТРИИ СВЯЗИ НА БИФУРКАЦИОННЫЕ МЕХАНИЗМЫ РАЗРУШЕНИЯ ПРОТИВОФАЗНОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ ХАОСА

В.В. Астахов, А.В. Шабунин, П.А. Стальмахов

В работе рассматриваются режимы управляемой противофазной синхронизации хаоса в диффузионно связанных кубических отображениях. Исследуется влияние асимметрии управляющего воздействия на механизмы разрушения синхронизации. Обнаружен новый бифуркационный сценарий потери синхронизации хаоса, который включает седло-репеллерную и транскритическую бифуркации неустойчивых неподвижных точек. Показано, что в зависимости от степени асимметрии управляющих воздействий одна и та же последовательность бифуркаций неустойчивых неподвижных точек может индуцировать переход как к пузырящемуся поведению, так и к изрешечиванию бассейна аттрактора.

Введение

В работе [1] рассматривалась противофазная синхронизация хаоса в связанных бистабильных системах с дискретным временем при использовании дополнительной управляющей обратной связи. Было обнаружено, что устойчивые синхронные колебания существуют в ограниченной области значений параметра управления. При выходе за этот диапазон наблюдается разрушение хаотической синхронизации через локальную изрешеченность хаотического аттрактора, а затем через бифуркацию прорыва [2]. Механизмы этих явлений для случая симметричной связи повторяют соответствующие механизмы, ответственные за разрушение полной синфазной синхронизации хаоса (см., например, [3]). Естественно, что полная идентичность взаимодействующих осцилляторов, наряду с симметрией управляющей связи, является идеализацией реальных систем. Представляется интересным вопрос: как асимметрия повлияет на обнаруженные закономерности потери синхронизации хаоса. В работе [4] нами уже рассматривалось влияние неидентичности осцилляторов при сохранении симметрии связи на механизмы разрушения полной синхронизации. При этом исследования ограничивались случаем малой расстройки между подсистемами, так чтобы ее можно было рассматривать как возмущение «идеальной» системы. Было обнаружено, что при переходе от одинаковых осцилляторов к осцилляторам с малой расстройкой по параметрам десинхронизация происходит по тому же сценарию, то есть через последовательность этапов слабой синхронизации и изрешечивания бассейна притяжения синхронного аттрактора, но бифуркационный механизм,

отвечающий за эти явления, меняется. В настоящей работе исследуется разрушение противофазной синхронизации для системы идентичных осцилляторов, но с несимметричной связью. Рассматривается весь диапазон возможной асимметии связи – от симметричной до однонаправленной.

1. Исследуемая система, свойства симметрии, существование и устойчивость противофазных колебаний

Рассмотрим систему двух взаимодействующих кубических отображений в виде

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) + \gamma(f(y_n) - f(x_n)), \\ y_{n+1} &= f(y_n) + \gamma(f(x_n) - f(y_n)), \end{aligned} \tag{1}$$

где x_n, y_n – динамические переменные первой и второй подсистемы, $n = 0, 1, 2, 3, ...$ – дискретное время, γ – коэффициент диффузионной связи, функция $f(x_n) = (a-1)x_n - ax_n^3$ задает одиночное кубическое отображение, a – его управляющий параметр.

Каждое из отображений представляет собой бистабильную систему, симметричную относительно преобразования $x \leftrightarrow -x$. При любых значениях a в системе существует неподвижная точка в начале координат

$$C_0 : x = 0.$$

Она является устойчивой при $0 < a < 2$. При $a = 2$ в ее окрестности в результате бифуркации вил рождается пара симметричных друг другу устойчивых неподвижных точек

$$C_{1,2} : x = \pm\sqrt{\frac{a-2}{a}}.$$

Сама точка C_0 становится неустойчивой и определяет границу бассейнов притяжения точек C_1 и C_2, а в дальнейшем – и сформированных на их основе хаотических аттракторов. При увеличении a на базе неподвижных точек C_1 и C_2 наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода, завершающийся при $a = 3.3$ возникновением хаотических аттракторов. При $a = 3.6$ два симметричных друг другу хаотических аттрактора объединяются в один.

В системе связанных отображений (1) при $0 < a < 2$ и любых значениях связи существует устойчивая неподвижная точка в начале координат

$$C_{00} : x = 0, y = 0.$$

При $a = 2$ она претерпевает бифуркацию потери симметрии, в результате чего в симметричном подпространстве ($I_i : x = y$) рождается пара устойчивых, симметричных друг другу неподвижных точек

$$\begin{aligned} C_{01} &: x = y = \sqrt{\tfrac{a-2}{a}}, \\ C_{02} &: x = y = -\sqrt{\tfrac{a-2}{a}}. \end{aligned}$$

После бифуркации неподвижная точка C_{00} становится неустойчивой в тангенциальном направлении к I_i, но остается устойчивой в трансверсальном направлении.

Затем, при $a = (2-2\gamma)/(1-2\gamma)$ она претерпевает еще одну бифуркацию потери симметрии. В симметричном подпространстве ($I_a : x = -y$) рождается пара седловых симметричных друг другу неподвижных точек

$$C_{10} : x = -y = \sqrt{1 - \frac{1-\gamma}{a(0.5-\gamma)}},$$
$$C_{20} : x = -y = -\sqrt{1 - \frac{1-\gamma}{a(0.5-\gamma)}}.$$

Регулярные и хаотические режимы полной синфазной синхронизации формируются на базе неподвижных точек C_{01} и C_{02} в симметричном подпространстве I_i. Режимы полной противофазной синхронизации формируются на базе неподвижных точек C_{10} и C_{20} в симметричном подпространстве I_a. В дальнейшем будут рассматриваться режимы, сформированные на базе точки C_{10} (при этом нижний индекс «10» у этой орбиты и всех порожденных ею орбит будет опускаться).

Два связанных отображения при симметрии связи и полной идентичности подсистем демонстрируют явления полной синфазной и полной противофазной синхронизации. Однако, как было показано в [1], если полная синфазная синхронизация наблюдается как для регулярных, так и для хаотических колебаний, то режимы противофазной синхронизации реализуются только для периодических орбит. Чтобы обеспечить в системе (1) противофазную синхронизацию хаоса, можно использовать управляющие воздействия вида $r(f(x_n) + f(y_n))$, реализуемые с помощью дополнительных обратных связей. Естественно, предлагаемая форма управляющего воздействия не единственная. Она выбрана с той целью, чтобы управляющее воздействие не оказывало влияния на форму целевых (противофазных) колебаний, но при этом влияло бы на их устойчивость. С учетом выбранной формы управляющего воздействия, уравнения системы (1) перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) + \gamma(f(y_n) - f(x_n)) + r(f(x_n) + f(y_n)), \\ y_{n+1} &= f(y_n) + \gamma(f(x_n) - f(y_n)) + \delta r(f(x_n) + f(y_n)). \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь r – интенсивность управляющей связи, $0 \le \delta \le 1$ – коэффициент асимметрии связи. Записав в таком виде уравнения, мы сможем, меняя δ, рассмотреть весь диапазон асимметрии связи: от полностью симметричной (взаимной) при $\delta = 1$ до однонаправленной при $\delta = 0$.

Как видно из уравнений (2), управляющее воздействие не меняет формы противофазных колебаний, поскольку при достижения цели управления дополнителное слагаемое управляющей связи $(f(x_n)+f(y_n))$ становится равным нулю. Определим, как дополнительная обратная связь влияет на устойчивость противофазных колебаний. Так как фазовые траектории, соответствующие режимам полной противофазной синхронизации, располагаются в одномерном инвариантном подпространстве I_a полного фазового пространства системы, то можно по отдельности рассматривать их устойчивость к возмущениям внутри подпространства (тангенциальная устойчивость) и в трансверсальном к нему направлении (трансверсальная устойчивость). Устойчивость к возмущениям внутри I_a определяется тангенциальным показателем Ляпунова $\Lambda_{||}$, имеющим вид

$$\Lambda_{||} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} ln \left| (1-2\gamma) f' \left(\frac{x_n + y_n}{2} \right) \right|. \tag{3}$$

Он отрицателен для периодических синхронных орбит и положителен для синхронных хаотических траекторий. Устойчивость хаотического предельного множества в нормальном направлении к симметричному подпространству I_a определяет трансверсальный показатель Ляпунова $\Lambda_\perp$. Для системы с асимметричным управляющим воздействием (2) выражение для трансверсального показателя Ляпунова имеет вид

$$\Lambda_\perp = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} ln \left| (1 + (1+\delta)r) f' \left(\frac{x_n + y_n}{2} \right) \right|. \tag{4}$$

Сопоставляя (3) и (4), можно записать соотношение между трансверсальным и тангенциальным показателями Ляпунова

$$\Lambda_\perp \;=\; \Lambda_{||} + ln \left| \frac{1 + (1+\delta)r}{1 - 2\gamma} \right|, \tag{5}$$

из которого следует, что при любом значении $\Lambda_{||}$ (то есть при любой степени хаотичности синхронных движений) и любом $\gamma \neq 0.5$ можно выбрать значение коэффициента r таким, чтобы синхронные противофазные движения стали трансверсально устойчивыми.

Выберем значения параметров $a = 3.8$, $\gamma = 0.04$, соответсвующие режиму развитого объединенного хаоса в системе без управления, то есть при $r = 0$. На рис. 1 для этих значений построена зависимость трансверсального показателя Ляпунова от параметра r, как для случая симметричной связи ($\delta = 1$), так и при незначительной асимметрии ($\delta = 0.9$).

Сравнивая области устойчивости для этих двух случаев, можно заключить, что с введением асимметрии связи область устойчивости (область отрицательных значений трансверсального показателя Ляпунова) смещается в сторону отрицательных значений параметра r и становится шире. Соответственно отличаются бифуркационные значения параметра r, при которых наблюдается бифуркация прорыва, когда трансверсальный показатель Ляпунова меняет знак. В симметричном случае бифуркации прорыва происходят при значениях r, равных -0.7475 и -0.2525, а в асимметричном случае – при значениях r, равных -0.7915 и -0.2605. Таким образом, при $\delta = 0.9$ область устойчивости расширилась на интервал $\Delta r = 0.0359$. При выходе параметра r за пределы указанного диапазона синхронные колебания теряют

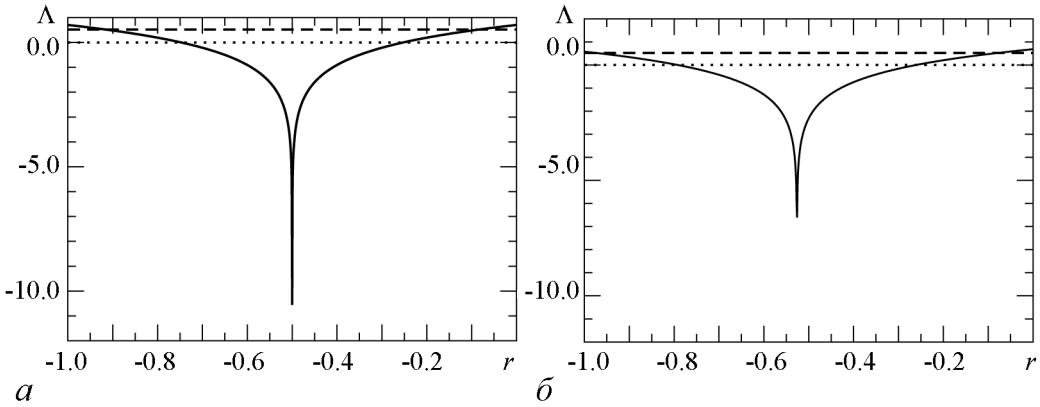


Рис. 1. Зависимость трансверсального показателя Ляпунова от коэффициента управляющей связи при двух значениях параметра асимметрии δ: *а* – 1.0, *б* – 0.9

устойчивость в трансверсальном к I_a направлении, что ведет к разрушению синхронизации хаоса по определенным сценариям.

2. Бифуркационный сценарий разрушения синхронизации при малой асимметрии связи

Как известно, сценарий разрушения хаотической синхронизации во многом определяется бифуркациями седловых периодических орбит, встроенных в синхронный хаотический аттрактор. В нашем случае синхронное хаотическое предельное множество сформировано (при $r = 0$) в результате каскада бифуркаций удвоения периода трансверсально неустойчивых периодических орбит [1]

$$C \to 2C \to 4C \to 8C \to 16C \to \dots .$$

Эти бифуркации происходят внутри симметричного подпространства при любом значении параметра r, который влияет только на трансверсальную устойчивость орбит.

Исследуем поведение симметричных периодических орбит $2^N C,\ N = 0, 1, 2, ...$ при выходе из области противофазной синхронизации хаоса, как в сторону увеличения, так и уменьшения параметра r. Будем рассматривать случай слабой асимметрии связи при $\delta = 0.9$, сопоставляя его со случаем симметричной связи.

Первым этапом разрушения полной хаотической синхронизации является этап локальной изрешеченности хаотического аттрактора, когда внутри него появляются репеллерные орбиты, из окрестности которых (при наличии трансверсальных возмущений) траектория «выбрасывается» в сторону от симметричного подпространства I_a. В результате режим синхронизации становится негрубым, то есть чувствительным к слабому шуму и малой расстройке по параметрам. Причиной появления локальной изрешеченности являются бифуркации седловых периодических орбит, встроенных в хаотический аттрактор, в результате которых они теряют устойчивость в трансверсальном направлении. Так, при увеличении параметра r орбиты основного семейства $2^N C$ $(N = 0, 1, 2, ...)$, а именно, C, $2C$, $4C$, $8C$, не меняя своих координат, претерпевают бифуркации удвоения периода с потерей устойчивости в трансверсальном направлении при значениях $r = -0.2862454$, -0.2774312, -0.2798463, -0.2787813, соответственно. Эти бифуркации полностью соответсвуют последовательности бифуркаций в случае симметричной связи, которые происходят при близких значениях параметра r к вышеперечисленным. Также как и в симмет-

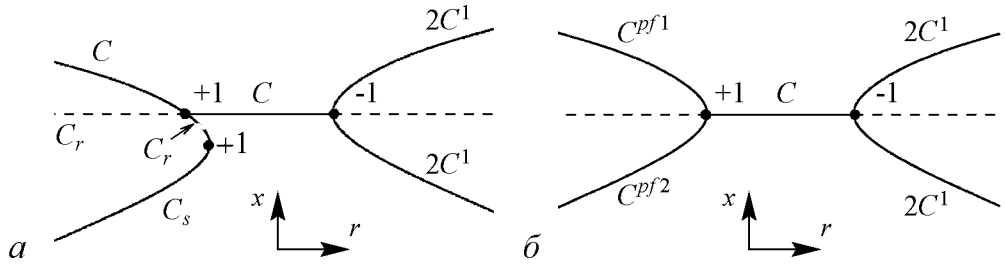


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма режимов, сформированных на базе орбиты C: *а* – случай слабой асимметрии при $\delta = 0.9$, *б* – для полностью симметричной связи при $\delta = 1.0$. Сплошная линия – седловые точки, штриховая линия – репеллер

ричном случае, потеря устойчивости режима хаотической управляемой синхронизации начинается с бифуркации седловой неподвижной точки C. При $r = -0.2862454$ ее собственное значение, соответствующее трансверсальному направлению к I_a, становится равным -1. Происходит бифуркация удвоения периода. В результате C превращается в репеллер, и в его окрестности вне симметричного подпространства мягко рождается седловая орбита удвоенного периода $2C^1$. С увеличением r точки этой орбиты плавно расходятся от симметричного подпространства. На рис. 2 показана бифуркационная диаграмма на базе орбиты C как для указанного случая слабой асимметрии (рис. 2, *а*), так и полностью симметричной связи (рис. 2, *б*).

Теперь в малой окрестности репеллера C имеются начальные условия, стартуя с которых фазовые траектории уходят из окрестности противофазного симметричного подпространства в сторону седловой орбиты $2C^1$. Седловая орбита $2C^1$ и ее неустойчивые многообразия ограничивают область вблизи симметричного подпространства, которую траектории не могут покинуть. После этой бифуркации в рассматриваемой системе может наблюдаться пузырящееся поведение, которое проявляется следующим образом. Без возмущений синхронное движение сохраняется, однако добавление слабого шума индуцирует режим перемежающейся синхронизации [5]. Теперь фазовая траектория в течение длительных интервалов времени демонстрирует почти синхронное поведение, когда траектория находится вблизи симметричного подпространства (так называемые «ламинарные фазы»). Этапы синхронного движения время от времени прерываются «выбросами» в сторону от симметричного подпространства, что приводит к кратковременным нарушениям синхронизации (так называемые «турбулентные всплески»). Характерный вид временной реализации $(x_n + y_n)$ для данного процесса показан на рис. 3, *а*. На нем приведена временная зависимость суммы динамических переменных при добавленном в систему аддитивном шуме интенсивностью порядка 10^{-5}.

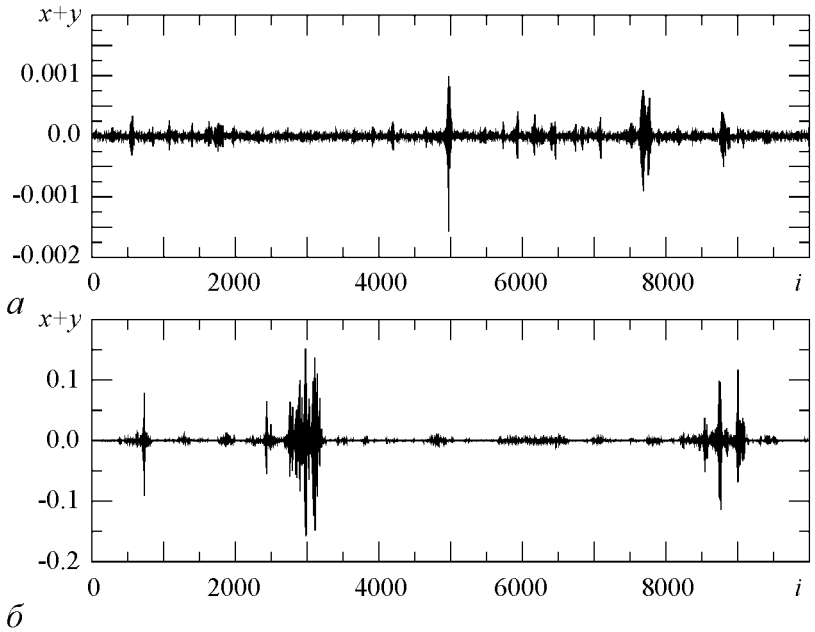


Рис. 3. Временная реализация $x + y$, соответствующая перемежающейся синхронизации при значениях r: -0.278 (*а*) и -0.27 (*б*). Остальные значения параметров: $a = 3.8$, $\gamma = 0.04$, интенсивность шума 10^{-5}

При дальнейшем увеличении параметра r происходят бифуркации удвоения седловых циклов с более высокими периодами ($2C$, $4C$ и $8C$), встроенных в хаотический аттрактор. В результате они становятся репеллерами и в их окрестностях вне симметричного подпространства мягко рождаются седловые циклы удвоенных периодов. С увеличением r точки седловых циклов плавно расходятся от симметричного подпространства. Пузырящееся поведение становится более развитым (рис. 3, *б*). Однако без внешнего шума, также как в системе с симметричным управляющим воздействием, после переходных процессов наблюдаются синхронные противофазные хаотические колебания.

Далее при $r = -0.2605$ происходит бифуркация прорыва, завершающая процесс разрушения синхронизации хаоса. За точкой бифуркации при малой надкритичности наблюдаются режимы перемежающейся синхронизации, когда интервалы синхронного поведения чередуются случайным образом с интервалами нарушения синхронизации. Теперь, в отличие от этапа локальной изрешеченности (пузырящегося поведения), перемежающаяся синхронизация наблюдается как в системе с малым шумом, так и без шума. С увеличением надкритичности длительность синхронных фаз уменьшается, и перемежающаяся синхронизация постепенно сменяется полностью несинхронными хаотическими колебаниями. Здесь следует отметить, что описанный сценарий десинхронизации, происходящей с увеличением параметра r, полностью идентичен случаю симметричной связи ($\delta = 1.0$).

Поведение системы при десинхронизации имеет существенные различия в случаях симметричных и асимметричных управляющих воздействий, когда выход из области противофазной синхронизации происходит при уменьшении значений управляющего параметра r. Здесь также как и во всех других случаях потерю синхронизации определяют бифуркации основного семейства симметричных седловых периодических орбит, встроенных в синхронный хаотический аттрактор.

Для случая симметричной связи процесс локальной изрешеченности хаотического аттрактора начинается с трансверсальной бифуркации седловой орбиты C, при которой она претерпевает бифуркацию потери симметрии (бифуркация вил). Усиливают процесс локального изрешечивания бифуркации орбит более высокого периода ($2C$, $4C$, $8C$), которые теряют устойчивость в трансверсальном направлении через бифуркацию удвоения периода.

При асимметричных управляющих воздействиях бифуркация потери симметрии седловой точки C, как бифуркация обусловленная симметрией системы, не может быть реализована. Поэтому бифуркационный механизм в этой части меняется. При небольшой асимметрии связи (в данном случае $\delta = 0.9$) вблизи того же бифуркационного значения, при $r = -0.7507$ происходит седло-репеллерная бифуркация (см. рис. 2). В окрестности седловой точки C, встроенной в хаотический аттрактор, рождается пара неподвижных точек: репеллер C_r и седловая точка C_s. При уменьшении управляющего параметра седловая неподвижная точка C_s удаляется от симметричного подпространства. При этом репеллер C_r перемещается к симметричному подпространству и сближается с седловой неподвижной точкой C, встроенной в синхронный хаотический аттрактор. При $r = -0.7513$ репеллер C_r сливается с седловой неподвижной точкой C, происходит транскритическая бифуркация. Неподвижные точки обмениваются устойчивостью: репеллер C_r превращается в седло, а седло C становится репеллером. При дальнейшем уменьшении параметра r репеллер C остается встроенным в синхронное хаотическое множество внутри симметричного

подпространства, а седло C_r уходит в сторону от симметричного подпространства. Дальнейшее развитие потери трансверсальной устойчивости синхронного хаотического множества происходит в результате бифуркаций удвоения периода седловых орбит более высокого периода $2C$, $4C$, $8C$ и т.д. Данные бифуркации присутствуют в обоих случаях при $\delta = 0.9$ и $\delta = 1.0$.

Таким образом, здесь процесс потери полной противофазной синхронизации хаоса начинается совершенно иным образом, по другому бифуркационному сценарию. Вначале в бассейне притяжения синхронного хаотического аттрактора в результате седло-репеллерной бифуркации рождается пара неустойчивых неподвижных точек. Затем одна из них (репеллер) входит в симметричное подпространство и взаимодействует с седловой неподвижной точкой, встроенной в синхронный хаотический аттрактор. Происходит транскритическая бифуркация, в результате которой появляется трансверсально неустойчивая неподвижная точка (репеллер), встроенная в хаотический аттрактор. Следует отметить, что такой бифуркационный сценарий потери противофазной синхронизации хаоса еще не был описан в литературе и выявлен впервые.

3. Изменения в механизме разрушения синхронизации с ростом асимметрии

Проследим более подробно за изменениями области устойчивости режимов синхронизации и бифуркационного сценария потери синхронизации по мере увеличения асимметрии управляющих воздействий на подсистемы: от симметричного до однонаправленного, уменьшая параметр δ от 1.0 до 0.

На рис. 4 построены области устойчивости синхронных режимов при различных значениях параметра δ. Они представляют собой интервалы значений управляющих параметров, при которых трансверсальный показатель Ляпунова принимает отрицательные значения. Из рисунка видно, что при уменьшении δ область устойчивости смещается в сторону меньших значений параметра r и расширяется. В предельном случае $\delta = 0$ интервал устойчивости имеет ширину $\Delta r = 1.0$. Область устойчивой противофазной синхронизации хаоса увеличилась в два раза по параметру r по сравнению с полностью симметричным случаем $\delta = 1.0$.

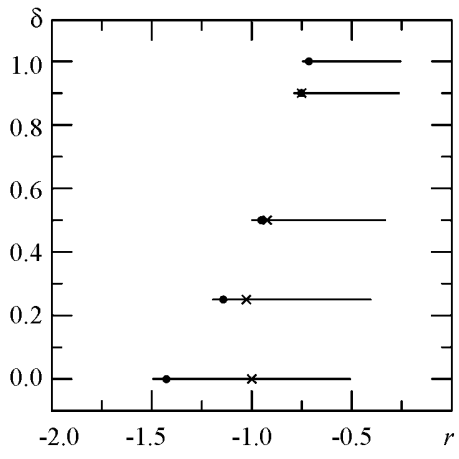


Рис. 4. Зависимость ширины области трансверсальной устойчивости синхронного режима от параметра асимметрии δ. Кружочками отмечены точки транскритической бифуркации орбиты C, крестиками – седло-репеллерной бифуркации

Рассмотрим, как увеличение асимметрии связи влияет на бифуркационный механизм потери синхронизации хаоса.

На рис. 5 показаны бифуркационные диаграммы неустойчивых периодических орбит, участвующих в процессе потери синхронизации хаоса, при уменьшении r для

различных значений параметра δ. Кружочками отмечены точки бифуркаций, цифры означают соответствующие значения мультипликаторов периодических орбит. Два верхних рисунка (рис. 5, *а*, *б*) относятся к уже рассмотренным в предыдущем разделе случаям полной симметрии и слабой асимметрии управляющего воздействия. При этом центральная точка $+1$, соответствующая бифуркации вил для случая симметричного воздействия, расщепляется на две точки $+1$ и $+1$, соответствующие седло-репеллерной и транскритической бифуркациям в слабонесимметричном случае. Из бифуркационных диаграмм видно, что увеличение асимметрии приводит к смещению бифуркационных значений для седло-репеллерной и транскритической бифуркаций в сторону меньших значений r. При этом интервал между бифуркационными значениями по параметру r увеличивается. Точка фазового пространства, где происходит рождение седло-репеллера (седло-репеллерная бифуркация), плавно отдаляется от симметричного подпространства и точки C все дальше и дальше (рис. 5, *б*-*д*).

Эти изменения в поведении неустойчивых периодических орбит с ростом асимметрии связи приводят к качественным изменениям процесса десинхронизации. При небольшой асимметрии управляющих воздействий на подсистемы с уменьшением параметра r процесс потери полной противофазной синхронизации хаоса происходит через пузырящийся переход. Однако по мере увеличения асимметрии эта же последовательность бифуркаций неустойчивых периодических орбит может вместо пузырящегося перехода индуцировать изрешечивание бассейна притяжения синхронного хаотического аттрактора [6]. Под явлением изрешечивания бассейна притяжения обычно понимают возникновение в окрестности синхронного аттрактора областей притяжения других аттракторов. При этом, выбор начальных условий сколь угодно близко к аттрактору не гарантирует, что траектория не уйдет к другому пре-

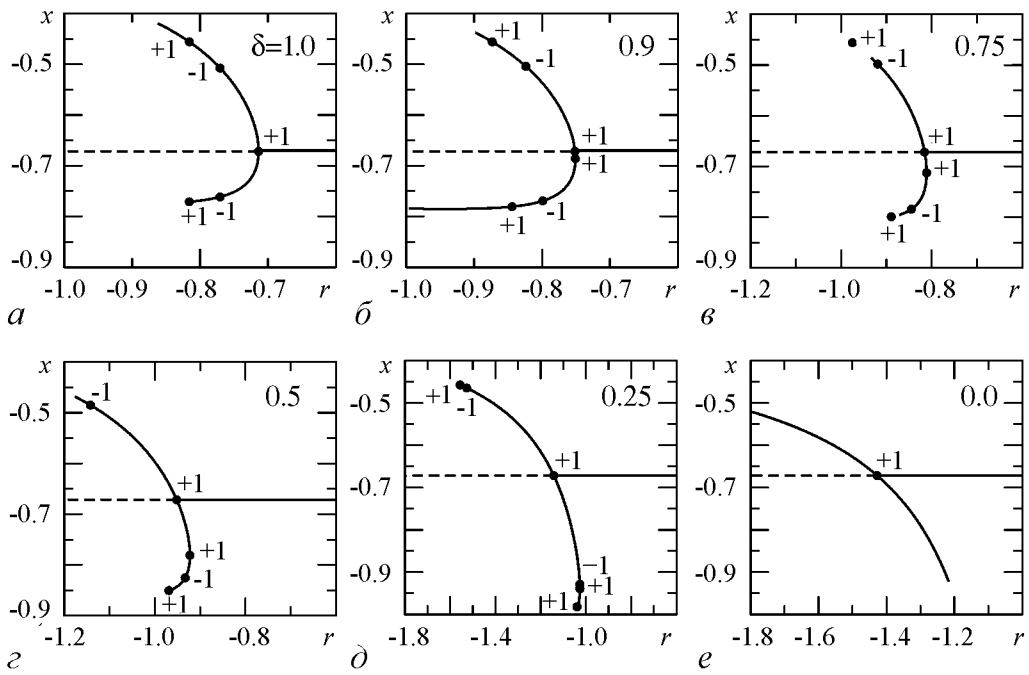


Рис. 5. Бифуркационные диаграммы на плоскости (r, x) для неустойчивых периодических орбит в зависимости от расстройки δ

дельному множеству. В случае изрешечивания бассейна синфазного аттрактора такими предельными множествами, чьи области притяжения «вклиниваются» в бассейн синхронного аттрактора, являются периодические орбиты разных периодов [1]. В настоящем случае, при сильно асимметричной связи, бассейн притяжения синхронного аттрактора изрешечивается областью притяжения аттрактора, находящегося на бесконечности. Рассмотрим это явление более детально.

4. Эволюция структуры бассейна притяжения хаотического аттрактора с увеличением асимметрии управляющей связи

В исследуемой системе синхронный хаотический аттрактор окружен бассейном притяжения конечного размера, за пределами которого фазовые траектории уходят на бесконечность. Будем исследовать изменения бассейна притяжения при увеличении асимметрии связи. Для этого использовался стандартный алгоритм: выбирались значения начальных условий x_0, y_0, после чего система (1) в течение длительного времени предоставлялась сама себе. По истечении интервала релаксации определялось, находится ли конечная точка вблизи симметричного подпространства I_a, либо стремится к бесконечности. Бассейн притяжения синхронного аттрактора в дальнейшем отображается серым цветом, а бассейн притяжения аттрактора на бесконечности – белым.

При малой асимметрии управляющей связи рождение седло-репеллера происходит внутри бассейна притяжения (рис. 6, *а*). Место рождения седло-репеллера в фазовом пространстве зависит от величины асимметрии связи δ. Чем меньше асимметрия (чем ближе значение δ к единице), тем ближе к синхронному хаотическому аттрактору располагается седло-репеллер. Обозначим эту неподвижную точку как SR, и отметим, что она существует только при бифуркационном значении r, а затем распадается на седло и репеллер. При изменении величины параметра асимметрии δ меняется форма бассейна притяжения и место рождения седло-репеллера SR в фазовом пространстве. Проследим за этими изменениями более подробно.

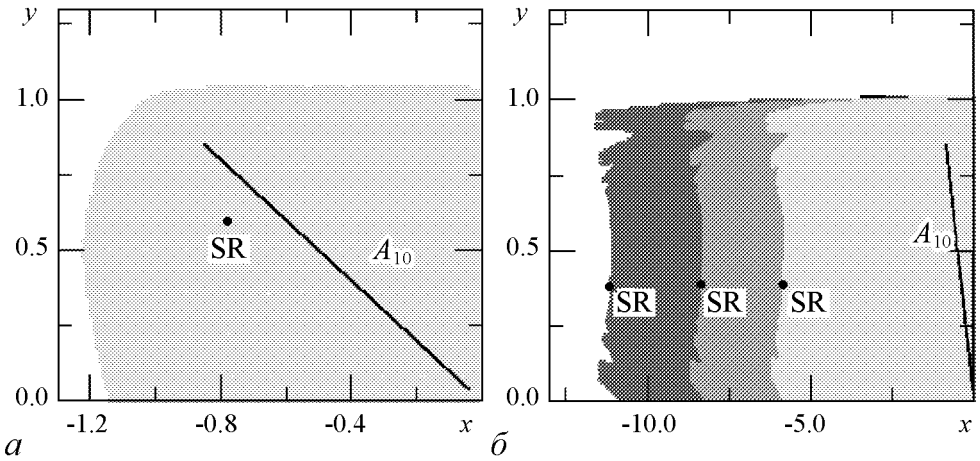


Рис. 6. Бассейн притяжения синхронного хаотического аттрактора: *а* – при малой асимметрии воздействия $\delta = 0.9$; *б* – при сильной асимметрии $\delta = 0.0419, 0.0417, 0.04166$ (более темный цвет соответствует меньшему значению δ)

Будем менять параметр асимметрии δ от единицы до нуля и следить за изменениями координат неподвижной точки SR и структуры бассейна притяжения синхронного хаотического аттрактора. Вначале рост асимметрии ведет к постепенному смещению точки SR к границе бассейна притяжения, а затем она оказывается лежащей на границе бассейна притяжения. При дальнейшем увеличении параметра асимметрии точка SR продолжает отдаляться от синхронного хаотического аттрактора A_{10}, при этом она «тянет» за собой и границу бассейна притяжения. На рис. 6, *б* показаны бассейны притяжения и положение неподвижной точки SR при различных значениях параметра асимметрии δ.

Проследим, как будет меняться бассейн притяжения хаотического аттрактора при изменении параметра r в случае однонаправленного управляющего воздействия (при $\delta = 0$). Предварительно отметим, что в этом случае репеллер располагается на границе бассейна притяжения, причем фазовые координаты седло-репеллера SR стремятся к бесконечности при стремлении параметра δ к нулю и управляющего параметра r к -1. Таким образом, при уменьшении r от значения -1, соответствующего абсолютной трансверсальной устойчивости противофазных колебаний

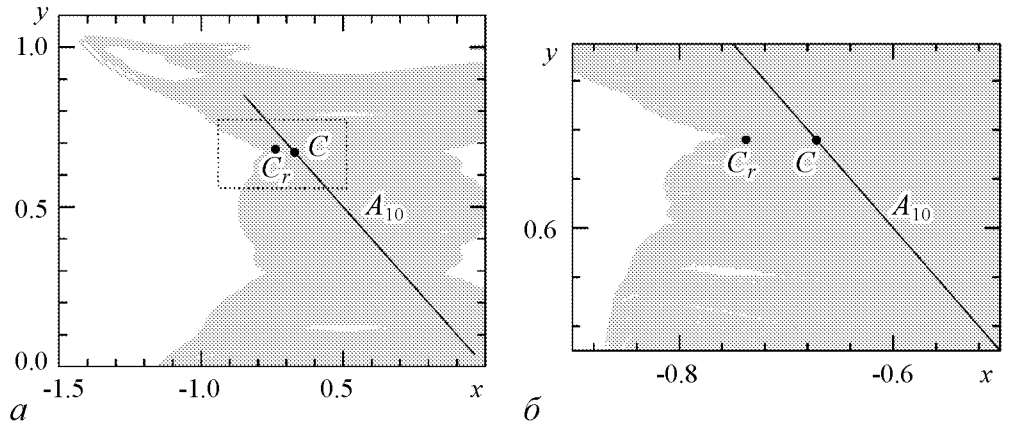


Рис. 7. *а* – бассейн притяжения хаотического аттрактора при $\delta = 0$, $r = -1.35$; *б* – фрагмент бассейна вблизи неподвижных точек

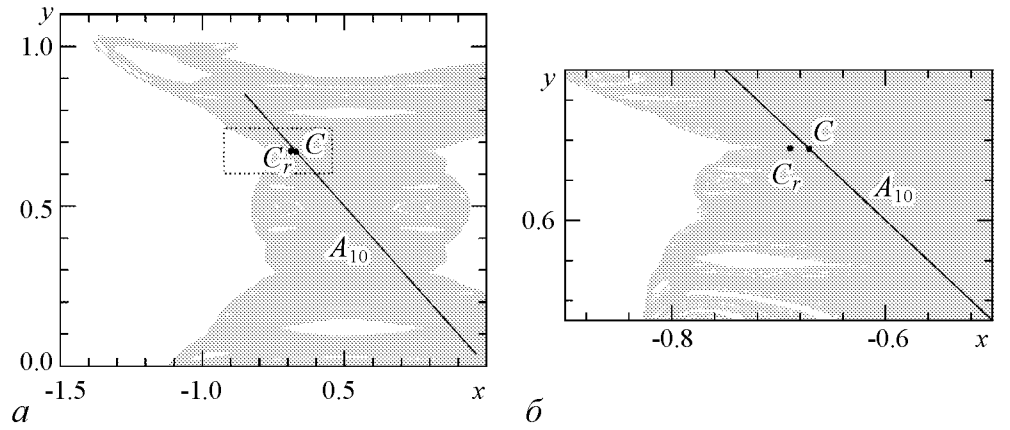


Рис. 8. *а* – бассейн притяжения хаотического аттрактора при $\delta = 0$, $r = -1.4$; *б* – фрагмент бассейна вблизи неподвижных точек

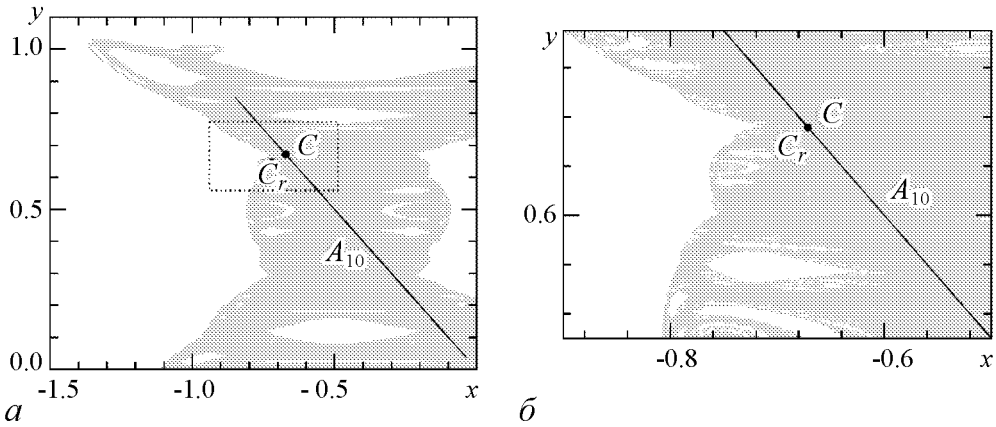


Рис. 9. *а* – бассейн притяжения хаотического аттрактора при $\delta = 0$, $r = -1.427$; *б* – фрагмент бассейна вблизи неподвижных точек

($\Lambda_\perp = -\infty$), седло-репеллер приходит с аттрактора на бесконечности, притягивая вместе с собой границу области притяжения этого аттрактора.

При движении по параметру r к границе области синхронизации ($r \to -1.5$) координаты репеллера меняются, и он плавно приближается к хаотическому аттрактору. Приближаясь к аттрактору, репеллер «тянет» за собой и границу бассейна притяжения синхронного хаотического аттрактора (рис. 7-8). На рис. 7, *а* и 8, *а* показаны фрагменты бассейна притяжения в окрестности репеллера C_r и точки C. Затягивая границу бассейна притяжения хаотического аттрактора, репеллер образует «клюв», который опирается на репеллер. В окрестности репеллера, клюв очень узкий. Далее, как уже отмечалось во втором разделе, происходит транскритическая бифуркация, при которой репеллер C_r сливается с седлом C, встроенным в синхронный хаотический аттрактор (рис. 9). После этой бифуркации в малой окрестности синхронного хаотического аттрактора появляется множество начальных условий, стартуя с которых фазовые траектории уходят на бесконечность. Дальнейшее уменьшение параметра r ведет к более сильной изрешеченности бассейна притяжения. Изрешеченный бассейн синхронного хаотического аттрактора наглядно проиллюстрирован на рис. 10. Для его построения использовалась система «нормальных координат» $u = (x + y)/2$ и $v = (x - y)/2$, в которых симметричное подпространство задается горизонтальной прямой $u = 0$. При значении $r = -1.49$ происходит бифуркация прорыва, хаотический аттрактор теряет трансверсальную устойчивость и одновременно с этим теряет бассейн притяжения. Таким образом, при уменьшении параметра r в процессе потери синхронизации хаоса происходит только изрешечивающий переход. Пузырящегося перехода в этом случае не наблюдается.

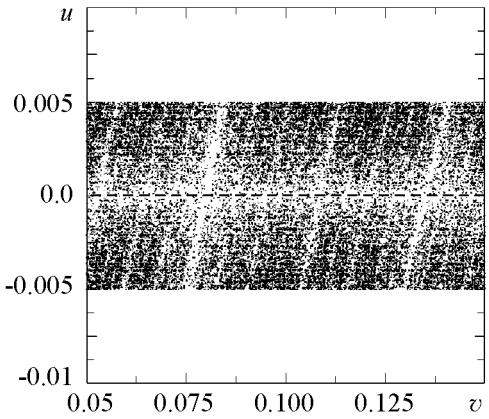


Рис. 10. Фрагмент бассейна притяжения хаотического аттрактора в режиме изрешечивания

Заключение

В двух диффузионно связанных бистабильных отображениях устойчивый режим полной противофазной синхронизации хаоса можно обеспечить, используя методы управления хаосом, а именно с помощью дополнительной управляющей связи. Стабилизация синхронных колебаний происходит в ограниченной области значений управляющего параметра. Устойчивый режим противофазной синхронизации хаоса возникает как в случае симметричных управляющих воздействий на подсистемы (при взаимной управляющей связи), так и в случае различных асимметричных управляющих воздействий (вплоть до однонаправленной управляющей связи). При переходе от взаимной к однонаправленной связи область синхронизации увеличивается.

При симметричной управляющей связи потеря полной противофазной синхронизации хаоса происходит по тому же бифуркационному сценарию, что и потеря синфазной синхронизации хаоса. Наблюдается такая же последовательность бифуркаций и также на базе основного семейства седловых периодических орбит, формирующих скелет синхронного хаотического аттрактора. Однако в случае потери полной противофазной синхронизации хаоса до бифуркации прорыва наблюдается только пузырящийся переход, изрешечивания бассейна притяжения хаотического аттрактора не происходит.

При исследовании явления полной противофазной синхронизации хаоса в бистабильных системах с асимметричной управляющей связью обнаружен новый бифуркационный сценарий потери синхронизации. Бифуркационный сценарий, в результате которого режим синхронизации хаоса становится негрубым, существенно отличается от уже известных сценариев, и выглядит следующим образом. Вначале в окрестности синхронного противофазного подпространства рождается седло-репеллер. С уменьшением параметра r седло удаляется от синхронного хаотического аттрактора, а репеллер приближается к седловой неподвижной точки C, встроенной в хаотический аттрактор. Затем они взаимодействуют и в результате транскритической бифуркации обмениваются устойчивостью. Седловая точка C превращается в репеллер, а репеллер C_r - в седло. Такая последовательность бифуркаций неустойчивых неподвижных точек ведет к пузырящемуся переходу. Однако по мере увеличения асимметрии управляющих воздействий на подсистемы эта же последовательность бифуркаций неустойчивых неподвижных точек может вместо пузырящегося перехода индуцировать изрешечивающий переход. Причина заключается в том, что, начиная с некоторого значения параметра асимметрии связи, неподвижная точка (седло-репеллер) рождается не внутри бассейна притяжения синхронного хаотического аттрактора, а на его границе. Репеллер, перемещаясь к хаотическому аттрактору, «тянет» за собой границу бассейна притяжения. В этом случае транскритическая бифуркация при взаимодействии репеллера с седлом, встроенным в хаотический аттрактор, ведет к изрешечиванию бассейна притяжения.

Библиографический список

1. *Астахов В.В., Шабунин А.В., Стальмахов П.А., Климшин А.В.* Управляемая противофазная синхронизация хаоса в связанных кубических отображениях // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8. С. 4.

2. *Ashvin P., Bescu J., Stewart I.* Bubbling of attractors and sinchronization of chaotic oscillations // Phys. Lett. A. 1994. Vol. 193. P. 126.
3. *Astakhov V., Shabunin A., Kapitaniak T., Anishchenko V.* Loss of chaos synchronization through the sequence of bifurcations of saddle periodic orbits // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 79. P. 1014.
4. *Astakhov V., Hasler M., Kapitaniak T., Shabunin A.,Anishchenko V.* Effect of parameter mismatch on the mechanism of chaos synchronization loss in coupled systems // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58. P. 5620.
5. *Platt N., Spiegel E.A., Tresser C.* On-off intermittency: A mechanism for bursting // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 70. P. 279.
6. *Lai Y.-C., Grebogi C., Yorke J.A., Venkataramani S.C.* Riddling bifurcation in chaotic dynamical systems // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 77. P. 1.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

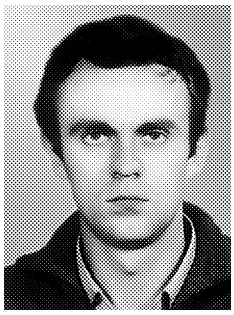
Поступила в редакцию *17.10.2006*
После доработки *26.01.2007*

ASYMMETRICAL COUPLING INFLUENCE ON BIFURCATIONAL MECHANIZMS OF ANTIPHASE CHAOTIC SYNCHRONIZATION DESTRUCTION

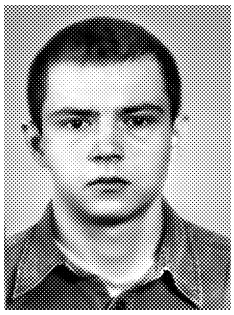
V.V. Astakhov, A.V. Shabunin, P.A. Stalmakhov

The work is devoted to anti-phase controlled synchronization of chaos in diffusivelly coupled cubic maps. Influence of asymmetry of controlling feed-back coupling on mechanizms of the synchronization loss is considered. A new bifurcational scenarium which includes a sequence of transcritical and saddle-repeller bifurcation has been found. We demonstrate that the same squence of bifurcations can lead to either «bubbling» or «riddling» transitions in dependance of assymetry value.

Астахов Владимир Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1980). Доктор физико-математических наук (1999), профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов – теория колебаний и динамический хаос, синхронизация и управление хаосом. Имеет более 80 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях. E-mail: astakhov@chaos.ssu.runnet.ru



Шабунин Алексей Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1990). Доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ, кандидат физико-математических наук (1998). Научные интересы – нелинейная динамика, теория колебаний, синхронизация и управление хаосом. Автор более 40 научных публикаций. E-mail:alexey@chaos.ssu.runnet.ru



Стальмахов Петр Андреевич – окончил Саратовский государственный университет (2001, кафедра радиофизики и нелинейной динамики), аспирантуру, защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2006, СГУ). Область научных интересов – хаотическая динамика, синхронизация, управление хаосом. Имеет 8 научных публикаций.

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 2, 2007 УДК 537.86

ГЕНЕРАЦИЯ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ СХЕМЕ ТРЕХ КАСКАДНО СВЯЗАННЫХ ФАЗОВЫХ СИСТЕМ

К.Г. Мишагин, В.В. Матросов, В.Д. Шалфеев, В.В. Шохнин

Представлены результаты экспериментального исследования хаотической динамики ансамбля трех каскадно связанных фазовых систем. Продемонстрирована возможность управления динамическими режимами путем изменения параметров связи без изменения внутренних параметров элементов. Представлены спектральные и корреляционные свойства различных хаотических режимов. Показано, что генерация хаотически модулированных колебаний возможна в широких и однородных областях параметров.

Известно, что хаотические сигналы, генерируемые в радиотехнических системах, могут обладать свойствами шумоподобных сигналов (широким спектром, резко спадающей автокорреляционной функцией). Благодаря таким свойствам они представляют большой интерес с точки зрения использования в качестве несущих в системах связи и радиолокации [1, 2]. В настоящее время проблема прикладного использования динамического хаоса переходит из области научных исследований в область конкретных инженерных разработок. Одной из важных задач в данном направлении остается создание эффективных генераторов хаотических колебаний сверхвысокочастотного диапазона.

В работах [3, 4] было предложено использование сигналов с хаотической угловой модуляцией, генерируемых в фазовых системах (системах фазовой автоподстройки частоты [5]), для передачи информации. В [13] показано, что такие сигналы являются широкополосными. Известно, что системы фазовой автоподстройки используются для синхронизации генераторов различных частотных диапазонов, включая сверхвысокочастотный диапазон, таким образом, представляется возможным использование хаотических режимов в таких системах для генерации широкополосных сверхвысокочастотных сигналов. Отметим, что хаотические колебания в фазовых системах можно разделить на два типа: квазисинхронные хаотические колебания или хаотически модулированные колебания (средняя частота таких колебаний стабилизирована относительно частоты опорного сигнала) и хаотические биения. Хаотически модулированные колебания интересны с точки зрения реализации схем передачи информации, основанных на эффекте хаотической синхронизации [1, 3, 4]. Возможность осуществления надежной синхронизации таких колебаний в случае неидентичных принимающей и передающей систем была показана в [3, 4] с помощью численного моделирования.

Известно, что генерация хаотических колебаний возможна в одиночной фазовой системе с фильтром второго (либо более высокого) порядка, однако области параметров системы, внутри которых осуществляется генерация хаотически модулированных колебаний, крайне малы [6, 7]. В работах [3, 4, 8–13] было показано, что ансамбли каскадно связанных фазовых систем позволяют генерировать хаотически модулированные колебания в широких областях параметров. В данной работе представлены результаты экспериментального исследования ансамбля трех каскадно связанных фазовых систем. Теоретическое исследование [9 – 12] показало, что такой ансамбль позволяет генерировать хаотические колебания в более широких и, что особенно важно, более «однородных» [7, 12] областях параметров по сравнению с ансамблем двух каскадно связанных фазовых систем [3, 4, 13]. Экспериментальная установка, описанная ниже, реализована на базе генераторов, работающих в диапазоне от нескольких десятков килогерц до нескольких мегагерц.

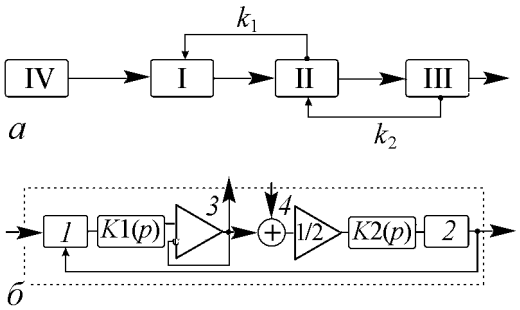


Рис. 1. Ансамбль трех каскадно связанных фазовых систем (*а*) и внутренняя структура фазовой системы (*б*)

В качестве фазовой системы в эксперименте используется широко распространенная микросхема 74HC4046A, предназначенная для синхронизации сигналов вида меандра. Данная микросхема позволяет конструировать кольцо управления системы фазовой автоподстройки, задавать частоту и полосу удержания подстраиваемых генераторов. Функциональная схема экспериментальной установки представлена на рис. 1, *а*, где I, II, III – фазовые системы; IV – генератор опорных колебаний; k_1, k_2 – величины обратной связи $(0 \leq k_{1,2} \leq 1)$. Все фазовые системы имеют одинаковую структуру, которая показана на рис. 1, *б*: *1* – фазовый дискриминатор, реализующий операцию булевой алгебры ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ; *2* – генератор, управляемый напряжением; $K1(p)$, $K2(p)$ – коэффициенты передачи фильтров низких частот первого порядка $(p = d/dt)$; *3*, *4* обозначают точки выхода и входа сигналов, соответственно, для организации обратной связи между кольцами управления фазовых систем. Коэффициенты передачи фильтров имеют вид: $K1,2(p) = 1/(1 + T_{1,2}p)$, где $T_{1,2}$ – постоянные времени фильтров. Параметры первого фильтра во всех системах одинаковы и являются фиксированными: $T_1 = 14.9$ мкс. Полосы удержания режима синхронизации в фазовых системах (максимальные отклонения начальных частот управляемых генераторов от частоты опорного колебания, когда возможна синхронизация): $\Delta f_1 \approx \Delta f_2 \approx \Delta f_3 \approx 15$ кГц. В ходе эксперимента варьировались постоянные времени второго фильтра T_2 в фазовых системах, коэффициенты связи k_1, k_2, начальные частоты управляемых напряжением генераторов f_1, f_2, f_3 и частота опорных колебаний f_0.

Общий коэффициент передачи двух фильтров в кольце управления фазовых систем $K(p) = K1(p)K2(p) = 1/(1 + (T_1 + T_2)p + T_1T_2p^2)$ соответствует фильтру второго порядка, однако в рассматриваемой области параметров каждая фазовая система в отдельности обладает исключительно регулярной динамикой. В изолированной фазовой системе возможен либо синхронный, либо квазисинхронный регулярный режим, либо режим биений в зависимости от параметров фильтра и начальной

частотной расстройки. Коллективная динамика трех каскадно связанных фазовых систем качественно отличается от динамики одной системы. В ансамбле возможны различные регулярные и хаотические режимы, которые в соответствии с [9–12] будем классифицировать следующим образом. Присвоим каждому режиму три индекса $[i_1, i_2, i_3]$. Индекс i_j принимает значение 0, если j-я фазовая система находится в синхронном или квазисинхронном режиме (фазовый сдвиг в данной системе фиксирован или изменяется в ограниченных пределах), и равен 1, если j-я фазовая система находится в режиме биений (фазовый сдвиг неограниченно нарастает или убывает).

В отсутствие обратных связей $(k_1, k_2 = 0)$ первая и вторая фазовые системы находятся в синхронном режиме, а третья система находится в квазисинхронном режиме. Введение обратной связи от третьей фазовой системы ко второй приводит к возникновению колебаний в цепи управления второй фазовой системы, которые становятся хаотическими при достаточно малом значении параметра связи k_2 [13]. Введение малой обратной связи от второй системы к первой приводит к хаотической модуляции в первой фазовой системе. Управляя величинами связей, можно не только добиться возбуждения хаотических колебаний в ансамбле, но и целенаправленно переходить от одного хаотического режима к другому, не меняя параметров самих элементов. На рис. 2 представлены проекции фазовых портретов, спектры и автокорреляционные функции хаотических колебаний в первой фазовой системе для различных значений коэффициентов связи k_1, k_2. Результаты получены при следующих значениях параметров: $f_0 = 65.7$ кГц, $f_1 = 66$ кГц, $f_2 = 67.4$ кГц, $f_3 = 59.6$ кГц, постоянные времени второго фильтра во второй и третьей системе $T_2 = 165$ мкс, в первой системе $T_2 = 66$ мкс. Проекции фазовых портретов на рис. 2 демонстрируют, что увеличение коэффициентов обратной связи приводит к увеличению амплитуды и к усложнению хаотических колебаний в кольце управления первой фазовой системы. В данном примере показано, что последовательное увеличение коэффициентов обратной связи позволяет перейти от режима [0,0,1] к режиму [0,1,1] и далее к режиму [1,1,1]. При переходе от режима [0,0,1] к режиму [0,1,1] уменьшается время корреляции хаотических колебаний в кольце управления первой фазовой системы и происходит расширение спектра, хотя качественно спектр выглядит так же: имеет место яркий пик, свидетельствующий о том, что частота хаотически модулированного сигнала стабилизирована относительно частоты опорного сигнала (рис. 2, *а*, *б*). Существенное изменение спектра происходит при смене квазисинхронного хаотического режима в первой фазовой системе на режим хаотических биений (рис. 2, *в*), тогда спектр становится значительно более равномерным и широкополосным. Время корреляции хаотических колебаний в кольце управления первой системы в режиме хаотических биений уменьшается в сравнении с квазисинхронным хаотическим режимом. Отметим, что для представленного режима хаотических биений в первой системе движение фазовой траектории в проекции на соответствующие переменные является смешанным и объединяет в себе колебательное и вращательное движение (см. рис. 2, *в*). Благодаря этому движение является довольно сложным, с малым временем корреляции, и спектр выходного сигнала широкий и равномерный. Таким образом, квазисинхронные хаотические колебания и колебания, соответствующие режиму хаотических биений, обладают разными свойствами, и если в первом случае хаотические колебания в большей степени интересны с точки зрения возможности

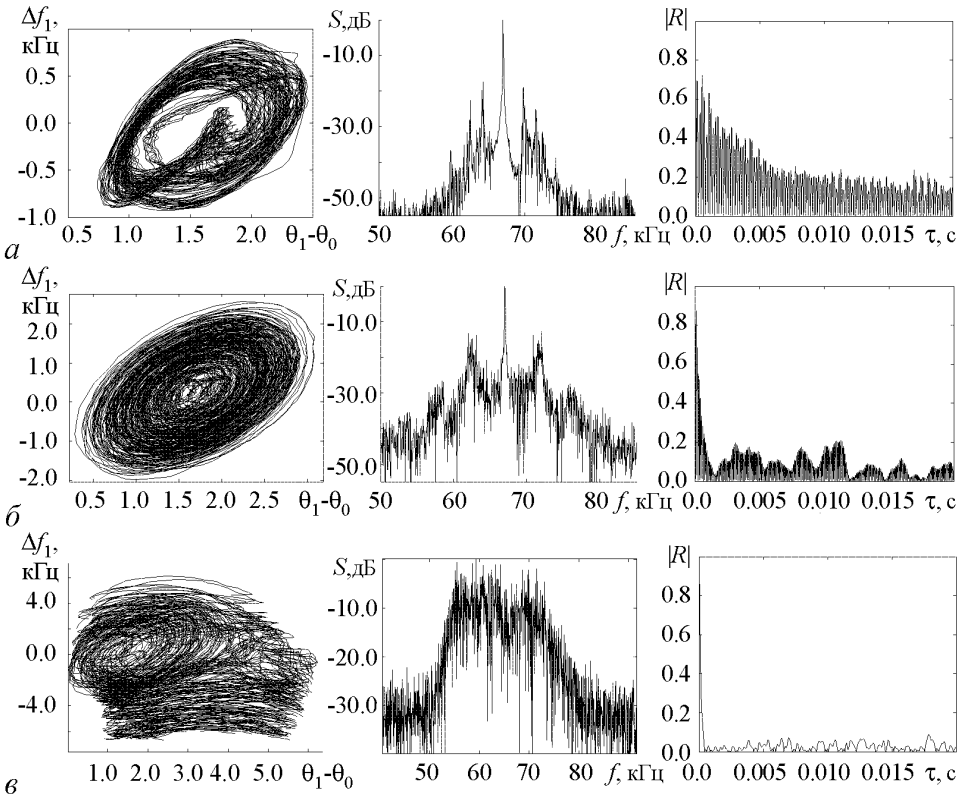


Рис. 2. Проекции фазовых портретов, характеризующие состояние первой фазовой системы (θ_0 – фаза опорных колебаний, θ_1 – фаза колебаний на выходе первой фазовой системы, Δf_1 – отклонение мгновенной частоты колебаний на выходе первой фазовой системы от начальной частоты f_1), спектры колебаний на выходе первой фазовой системы и автокорреляционные функции хаотических колебаний на выходе второго фильтра в кольце управления первой фазовой системы; *а* – режим [0,0,1], $k_1 = k_2 = 0.2$; *б* – режим [0,1,1], $k_1 = 0.2$, $k_2 = 1.0$; *в* – режим [1,1,1], $k_1 = k_2 = 1.0$

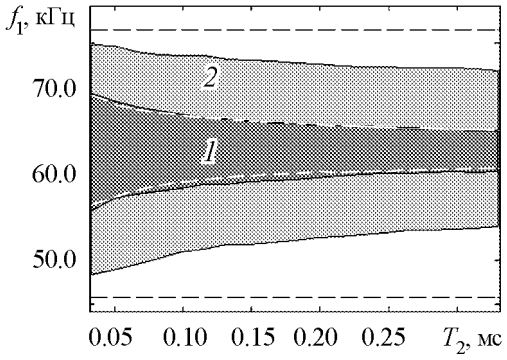


Рис. 3. *1* – полоса захвата; *2* (светло-серая область, включающая область *1*) – полоса удержания режима генерации хаотически модулированных колебаний в первой фазовой системе; штриховыми линиями обозначены границы полос захвата и удержания синхронного режима в изолированной первой фазовой системе

осуществления их синхронизации, то во втором случае хаотические колебания интересны благодаря широкому равномерному спектру и резко спадающей автокорреляционной функции.

На рис. 3 представлены области в плоскости параметров (T_2, f_1), соответствующие удержанию и захвату в режим генерации хаотически модулированных колебаний в первой фазовой системе. Параметры ансамбля имеют следующие значения: $k_1 = 0.1$, $k_2 = 0.5$; постоянные времени вторых фильтров во второй и третьей фазовой системе одинаковы – $T_2 = 165$ мкс; частоты генераторов $f_0 = 62$ кГц, $f_2 = 70.4$ кГц, $f_3 = 59.6$ кГц. Полученные в эксперименте области удер-

жания и захвата являются широкими и однородными. Важно отметить, что область захвата в режим генерации хаотически модулированных колебаний почти совпадает с областью захвата в синхронный режим изолированной первой фазовой системы ($k_1 = 0$). Полученные результаты хорошо согласуются с результатами теоретического исследования ансамбля трех каскадно связанных фазовых систем [9–12]. Здесь мы ограничились рассмотрением режима генерации квазисинхронных хаотических колебаний. Относительно режима хаотических биений можно заметить, что данный режим также существует в достаточно больших и однородных областях параметров.

Представленные в работе результаты свидетельствуют о том, что ансамбль трех каскадно связанных фазовых систем позволяет генерировать хаотические колебания в широких и однородных областях параметров. Управление хаотическими режимами с различными спектральными и корреляционными свойствами может осуществляться с помощью изменения величин связей без изменения внутренних параметров элементов ансамбля. Показано, что сигнал, соответствующий режиму хаотических биений, может обладать более равномерным и широким спектром, более резко спадающей автокорреляционной функцией в сравнении с сигналом, который соответствует квазисинхронному хаотическому режиму. Следовательно, режим хаотических биений также может представлять интерес для приложений, например, для использования в качестве несущих в широкополосных системах связи с некогерентным приемом. Стоит отметить, что для постановки экспериментов были использованы микросхемы систем фазовой автоподстройки частоты, которые не являются высокочастотными; это удобно для проведения эксперимента, так как дает возможность изменять параметры, конструировать фильтры в кольцах управления и наблюдать фазовые портреты. При использовании сверхвысокочастотных схем необходимо учитывать их специфику, однако можно надеяться, что динамические свойства ансамбля трех каскадно связанных фазовых систем в этом случае будут качественно совпадать со свойствами, которые были продемонстрированы в данной работе на примере низкочастотной схемы.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 05-02-17409, № 06-02-16499, № 06-02-16596 и гранта поддержки ведущих научных школ НШ-7309.2006.2.

Библиографический список

1. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: ФМЛ, 2002. 252 с.
2. *Залогин Н.Н., Кислов В.В.* Широкополосные хаотические сигналы в радиотехнических и информационных системах. М.: Радиотехника. 2006. 208 с.
3. *Korzinova M.V., Matrosov V.V. and Shalfeev V.D.* Communications using cascade coupled phase-locked loop chaos // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1998. Vol. 9, № 5. P. 963.
4. *Шалфеев В.Д., Матросов В.В., Корзинова М.В.* Динамический хаос в ансамблях связанных фазовых систем // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1998. № 11. С. 44.

5. Системы фазовой синхронизации / Под ред. В.В. Шахгильдяна, Л.Н. Белюстиной М.: Радио и связь. 1982. 288 с.
6. *Матросов В.В.* Регулярные и хаотические колебания в фазовой системе // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22, вып. 23. С. 4.
7. *Матросов В.В.* Автомодуляционные режимы системы фазовой автоподстройки частоты с фильтром второго порядка // Изв. вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49, № 4. С. 357.
8. *Shalfeev V.D. and Matrosov V.V.* Dynamical chaos in phase-locked loops // Chaos in Circuits and Systems / Ed. by G. Chen and T. Ueta. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2002. P. 111.
9. *Матросов В.В., Касаткин Д.В.* Динамические режимы связанных генераторов с фазовым управлением // Радиотехника и электроника. 2003. Т. 48, № 6. С. 637.
10. *Матросов В.В., Касаткин Д.В.* Анализ процессов возбуждения хаотических колебаний во взаимосвязанных генераторах с фазовым управлением // Изв. вузов. ПНД. 2003. Т. 11. № 4-5. С. 31.
11. *Матросов В.В., Касаткин Д.В.* Особенности динамики трех каскадно связанных генераторов с фазовым управлением // Изв. вузов. ПНД. 2004. Т. 12, № 1-2. С. 159.
12. *Матросов В.В., Шалфеев В.Д., Касаткин Д.В.* Анализ областей генерации хаотических колебаний взаимосвязанных фазовых систем // Изв. вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49, № 5. С. 448.
13. *Мишагин К.Г., Матросов В.В., Шалфеев В.Д., Шохнин В.В.* Экспериментальное исследование генерации хаотических колебаний в ансамбле двух каскадно-связанных фазовых систем // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31, вып. 24. С. 31.

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

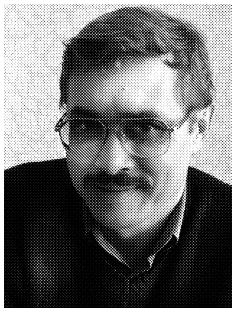
Поступила в редакцию 12.02.2007

GENERATION OF CHAOTIC OSCILLATIONS IN EXPERIMENTAL SCHEME OF THREE CASCADE-COUPLED PHASE SYSTEMS

K.G. Mishagin, V.V. Matrosov, V.D. Shalfeev, V.V. Shokhnin

Results of experimental investigation of chaotic dynamics of the ensemble of three cascade-coupled phase systems (phase-locked loops) are presented. The possibility of dynamical regimes control by means of coupling parameters changing without changing of inner parameters of elements is demonstrated. Spectral and correlation properties of different chaotic regimes are presented. It is shown, that excitation of chaotically modulated oscillation is possible in wide and homogeneous domains of system parameters.

Мишагин Константин Геннадьевич – родился в Н. Новгороде в 1981 году. В 2004 году окончил радиофизический факультет ННГУ. На данный момент аспирант на кафедре теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ. Область научных интересов: прикладные вопросы нелинейной динамики ансамблей фазовых осцилляторов (задачи когерентного суммирования мощностей и нелинейное фазирование, использование динамического хаоса в связи), локализация энергии и периодические орбиты в решетках консервативных нелинейных осцилляторов. E-mail: mishagin@rf.unn.ru



Матросов Валерий Владимирович – родился в 1960 году. Окончил факультет вычислительной математики и кибернетики Горьковского государственного университета по специальности «прикладная математика» (1982). С 1984 по 1999 – научный сотрудник НИИ прикладной математики и кибернетики при ННГУ, с 1999 года – доцент кафедры теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1994, НИИ ПМК при ННГУ) и доктора физико-математических наук (2007, ННГУ), доцент (2001). Область научных интересов – динамика нелинейных систем, динамический хаос, синхронизация и управление хаосом, математическое моделирование. Имеет более 100 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях, в том числе два учебных пособия и две монографии (в соавторстве). E-mail: matrosov@rf.unn.ru

Шалфеев Владимир Дмитриевич – родился в 1941 году, окончил Горьковский университет в 1963 году. Заведующий кафедрой теории колебаний Нижегородского государственного университета и отделом нелинейной динамики Института прикладной физики РАН, доктор физико-математических наук, профессор, действительный член Академии инженерных наук РФ. Область научных интересов: динамика нелинейных систем, теория синхронизации, пространственно-временной хаос, структуры. Соавтор монографий «Системы фазовой синхронизации», «Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации». E-mail: shalfeev@rf.unn.ru

Шохнин Вадим Вячеславович – родился в Н. Новгороде в 1964 году. В 2002 году окончил радиофизический факультет ННГУ. Работает на кафедре теории колебаний ННГУ с 1982 года, на данный момент в должности старшего лаборанта.

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 2, 2007 УДК 531.19

СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ЧИСЛА ОПЕРАТОРА ПЕРРОНА – ФРОБЕНИУСА КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ ХАОТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В.М. Аникин, А.С. Ремизов, С.С. Аркадакский

Представлено аналитическое решение спектральной задачи для несамосопряженного оператора Перрона – Фробениуса одномерного кусочно-линейного хаотического отображения. Его возрастающие и убывающие линейные ветви переводят отрезок своего определения на полный (единичный) интервал и обладают одинаковым (по модулю) тангенсом угла наклона, но чередуются произвольным образом. Получены явный вид полиномиального представления для собственных функций оператора и соответствующие выражения для собственных чисел.

Введение

В статье [1] дано общее введение в проблему исследования оператора Перрона – Фробениуса одномерных хаотических отображений (см. также [2, 3]) и представлено решение спектральной задачи для оператора Перрона – Фробениуса для кусочно-линейных «пилообразных» отображений с произвольным (четным или нечетным) числом ветвей. Показано, что собственные функции и функции ядра этого оператора могут быть представлены через полиномы Бернулли и Эйлера, а собственные числа выражены через целые отрицательные степени числа ветвей отображения. Для итеративной функции этих отображений характерно строгое чередование возрастающих и убывающих линейных ветвей с одинаковым по модулю тангенсом угла наклона (каждая ветвь переводит отрезок своего определения на единичный интервал). Возникает вопрос: а как изменится решение спектральной задачи, если ввести в рассмотрение отображение, ветви которого чередуются в произвольном порядке с сохранением равного по модулю тангенса угла наклона, зависящего от числа ветвей. Так, представляет интерес отображение, полученное произвольной перестановкой ветвей пилообразного отображения. Вариация вида отображения играет роль, в частности, при построении топологически сопряженных отображений и нахождении кусочно-линейного аналога нелинейного отображения общего вида (иначе говоря, при решении задачи С. Улама [4]).

В данной работе сформулированная проблема находит свое аналитическое решение – найдены полиномиальные функции и соответствующие собственные числа оператора Перрона – Фробениуса, отвечающего кусочно-линейному отображению с произвольным чередованием возрастающих и убывающих ветвей.

1. Кусочно-линейное отображение с произвольным чередованием ветвей и его оператор Перрона – Фробениуса

Рассмотрим кусочно-линейное отображение, отдельные составляющие которого переводят отрезок своего задания на полный (единичный) интервал и характеризуются одинаковым модулем тангенса угла наклона. Это означает, что все подынтервалы определения линейных составляющих итеративной функции равны. Предполагается, что наклон ветвей чередуется произвольным образом в отличие от пилообразных отображения, где чередование наклона регулярно. Примером такого отображения может служить пятизвенное отображение, приведенное на рисунке:

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

$$f(x) = \begin{cases} 5x, x \in (0, 1/5)\,, \\ 2 - 5x, x \in [1/5, 2/5)\,, \\ 3 - 5x, x \in [2/5, 3/5)\,, \\ 5x - 3, x \in [3/5, 4/5)\,, \\ 5x - 4, x \in [4/5, 1)\,. \end{cases} \qquad (1)$$

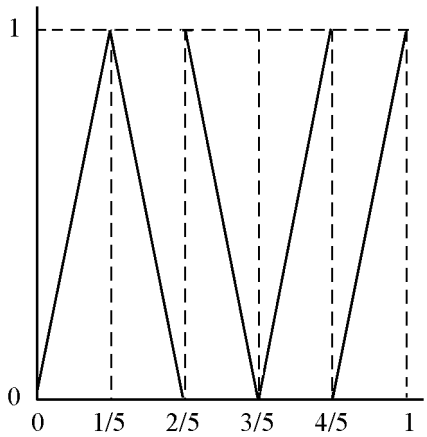


Рис. 1. Пример кусочно-линейного отображения с нерегулярным чередованием возрастающих и убывающих ветвей ($G = 5$)

Данное кусочно-линейное отображение имеет пять интервалов монотонного изменения, на каждом из которых соответствующая линейная функция отображает свой интервал на единичный отрезок. Такую ветвь мы называем «полной», подразумевая, что «неполная» ветвь отображает свой интервал только на какую-то часть единичного отрезка. Очевидно, что модуль тангенса угла наклона всех ветвей отображения (1) одинаков и равен числу ветвей, то есть пяти. Наклоны ветвей чередуются нерегулярным образом – положительный, отрицательный, отрицательный, положительный, положительный.

Предположим, что в общем случае отображение имеет G ветвей. Пронумеруем интервалы монотонности изменения итеративной функции (1) и рассмотрим некоторый k-й интервал ($k = 1, 2, \ldots, G$). Уравнение для k-й ветви монотонности можно записать как

$$f_k\,(x) = Gx - (k - 1) \qquad (2)$$

(при положительном наклоне) или как

$$f_k\,(x) = k - Gx \qquad (3)$$

(при отрицательном наклоне). Если для каждого интервала монотонности ввести параметр s_k, равный $+1$ при положительном наклоне k-й ветви, и равный -1 при отрицательном наклоне, то в общем виде уравнение для k-й ветви с учетом (2) и (3) можно записать как

$$f_k\,(x) = Gs_k x - s_k \left(k - \frac{1 + s_k}{2}\right). \qquad (4)$$

Очевидно, что совокупность значений $S = \{s_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, G$ определяет кусочно-линейное отображение с произвольным чередованием наклона ветвей

$$x_{n+1} = f(x_n) = \sum_{k=1}^{G} f_k(x_n)\Theta_k(x_n), \tag{5}$$

где $\Theta_k(x)$ – индикаторная функция k-го участка монотонности итеративной функции

$$\Theta_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in [(k-1)/G,\ k/G), \\ 0, & x \notin [(k-1)/G,\ k/G). \end{cases}$$

С учетом (4) оператор Перрона – Фробениуса для отображения (5) можно записать в виде (определение и свойства оператора см. в [1-12])

$$P\rho\,(x) = \frac{1}{G}\sum_{k=1}^{G} \rho\left(\frac{1}{G}\left(s_k x + \left(k - \frac{1+s_k}{2}\right)\right)\right). \tag{6}$$

Очевидно, что представления (5) и (6) при определенном регулярном чередовании ветвей (задании s_k) включают и изученные ранее случаи сдвигов Бернулли и пилообразного отображения [1, 2]. Сдвигам Бернулли отвечают исключительно положительные значения s_k, а для пилообразного отображения значения s_k и s_{k+1} всегда имеют разные знаки.

2. Собственные числа оператора Перрона – Фробениуса

Запишем уравнение, определяющее собственные функции $\psi_n(x)$ и собственные числа λ_n оператора Перрона – Фробениуса (6) [1],

$$\lambda_n\psi_n(x) = P\psi_n\,(x) = \frac{1}{G}\sum_{k=1}^{G} \psi_n\left(\frac{1}{G}\left(s_k x + \left(k - \frac{1+s_k}{2}\right)\right)\right). \tag{7}$$

Пользуясь соображениями, изложенными в [1], будем искать собственные функции оператора в форме полиномов

$$\psi_n\,(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n. \tag{8}$$

Подставив (8) в (7) и приравняв коэффициенты при n-й степени независимой переменной, получим следующее представление для собственных чисел оператора Перрона – Фробениуса (6):

$$\lambda_n = \frac{1}{G^{n+1}}\sum_{k=1}^{G} s_k^n. \tag{9}$$

Из соотношения (9) величины s_k можно исключить. Так, для четного $n = 2l$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, когда $s_k^{2l} = 1$, для любого набора s_k формула (9) записывается как

$$\lambda_{2l} = \frac{1}{G^{2l}}, \quad l = 0, 1, \ldots. \tag{10}$$

Для нечетного $n = 2l + 1,\ l = 0, 1, 2, ...$ формула (9) сводится к виду

$$\lambda_{2l+1} = \frac{G_P - G_N}{G^{2l+1}}, \quad l = 0, 1, 2, ..., \tag{11}$$

где G_P – число ветвей с положительным наклоном (число положительных s_k), а G_N – число ветвей с отрицательным наклоном (число отрицательных s_k). Ясно, что $G_P + G_N = G$. Оба случая (четных и нечетных n) можно объединить в одной формуле для собственных чисел оператора (6)

$$\lambda_n = \frac{G_P + (-1)^n G_N}{G^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2 \dots . \tag{12}$$

Любопытно, что последнее простое соотношение (12) позволяет, во-первых, прояснить, с чем связано возникновение кратности собственных чисел оператора Перрона – Фробениуса, а во-вторых, сделать прогноз относительно структуры ядра этого оператора. Так, если число возрастающих и убывающих ветвей отображения (5) совпадает ($G_P = G_N$), то нечетный набор собственных чисел обнуляется. Тогда соотношение (7) сохраняет смысл лишь в том случае, когда соответствующие функции $\psi_n(x)$ образуют нуль-пространство оператора Перрона – Фробениуса и удовлетворяют функциональному уравнению $P\psi_n(x) \equiv 0$. Специального рассмотрения заслуживает случай $G_P - G_N = 1$ (число ветвей с положительным наклоном на единицу превышает число ветвей с отрицательным наклоном), когда собственные числа становятся кратными, поскольку их наборы с четными и нечетными номерами перекрываются.

3. Полиномиальные собственные функции оператора Перрона – Фробениуса

Применим для решения уравнения (7) развитый ранее метод производящих функций для полиномиальных собственных функций оператора [1-3]. Напомним, что под производящими функциями собственных функций оператора понимается целая функция

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) \frac{t^n}{n!}. \tag{13}$$

Она удовлетворяет условию нормировки, $\int\limits_0^1 \Psi(x, t) dx = 1$, и может быть представлена в виде суммы функций четной и нечетной по параметру t

$$\Psi_{\mathrm{e}}(x, t) = \frac{1}{2} \left(\Psi(x, t) + \Psi(x, -t) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{2k}(x) \frac{t^{2k}}{(2k)!}, \tag{14}$$

$$\Psi_{\mathrm{o}}(x, t) = \frac{1}{2} \left(\Psi(x, t) - \Psi(x, -t) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{2k+1}(x) \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{15}$$

Наша цель – получить на основе уравнения (7) с учетом значений для собственных чисел (12) функциональные уравнения для производящих функций $\Psi_{\mathrm{e}}(x, t)$

и $\Psi_{\mathrm{o}}(x,t)$, найти решения этих функциональных уравнений, а затем проинтерпретировать эти решения в терминах собственных функций оператора Перрона – Фробениуса.

Прежде всего перепишем (7), выделив в явном виде слагаемые, отвечающие возрастающим и убывающим ветвям итеративной функции рассматриваемого отображения. Найдем

$$\psi_n(x) = \frac{G^n}{G_P + (-1)^n G_N}\left[\sum_{k\in M_P}\psi_n\left(\frac{x+k-1}{G}\right) + \sum_{k\in M_N}\psi_n\left(\frac{k-x}{G}\right)\right], \qquad (16)$$

где суммирование в первой сумме ведется по значениям индексов, отвечающих возрастающим ветвям итеративной функции (эти значения образуют подмножество M_P), а суммирование во второй сумме – по индексам, отвечающим убывающим ветвям (эти индексы объединены в подмножество M_N).

Получим уравнение для $\Psi_{\mathrm{e}}(x,t)$. Для этого в уравнении (16) индекс n рассматривается как четный ($n = 2l$), так что (16) сводится к виду

$$\psi_{2l}(x) = \frac{G^{2l}}{G}\left[\sum_{k\in M_P}\psi_{2l}\left(\frac{x+k-1}{G}\right) + \sum_{k\in M_N}\psi_{2l}\left(\frac{k-x}{G}\right)\right]. \qquad (17)$$

Умножая (17) на $t^{2l}/(2l)!$ и суммируя по l от 0 до ∞, найдем после очевидных преобразований уравнение для четной составляющей производящей функции

$$\Psi_{\mathrm{e}}(x,t) = \frac{1}{G}\left[\sum_{k\in M_P}\Psi_{\mathrm{e}}\left(\frac{x+k-1}{G}, Gt\right) + \sum_{i\in M_N}\Psi_{\mathrm{e}}\left(\frac{k-x}{G}, Gt\right)\right]. \qquad (18)$$

Решение уравнения (18) будем искать в виде [1]

$$\Psi_{\mathrm{e}}(x,t) = \frac{1}{2}\left[e^{xt}H(t) + e^{-xt}H(-t)\right]. \qquad (19)$$

Подставляя (19) в (18), в результате группировки членов со множителями e^{xt} и e^{-xt} получим уравнение для функции $H(t)$, входящей в представление (19),

$$H(t) = \frac{1}{G}\left[H(Gt)\sum_{k\in M_P}e^{(k-1)t} + H(-Gt)\sum_{k\in M_N}e^{-kt}\right]. \qquad (20)$$

Представление для функции $H(t)$ будем искать в общем виде – в форме степенного ряда

$$H(t) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m \frac{t^m}{m!}. \qquad (21)$$

Для пилообразного отображения [1] удалось найти компактное аналитическое выражение для $H(t)$. Определим коэффициенты h_m этого разложения. Подставляя (21) в уравнение (20), получим

$$\sum_{m=0}^{\infty} h_m \frac{t^m}{m!} = \frac{1}{G}\left[\sum_{m=0}^{\infty} h_m \frac{G^m t^m}{m!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \sum_{k\in M_P} (k-1)^m + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=0}^{\infty} h_m \frac{(-G)^m t^m}{m!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \sum_{k\in M_N} (-k)^m \right]. \tag{22}$$

Коэффициент h_0, формально находимый путем приравнивания свободных членов слева и справа в соотношении (22) с учетом того, что $\sum\limits_{k\in S_P} (k-1)^0 = G_P$ и $\sum\limits_{k\in S_N} (-k)^0 = G_N$, приводит к тождеству: $h_0 = \frac{h_0}{G}(G_P + G_N) \equiv h_0$. Из условия нормировки полиномиальных собственных функций $\int\limits_0^1 \psi_0(x) = 1$, выбирается значение $h_0 = 1$. Одновременно условие $\int\limits_0^1 \psi_1(x) = 0$ приводит к значению $h_1 = -0.5$. При $m \geq 1$ операция приравнивания выражений при степенях t^m приводит к следующей замечательной рекуррентной формуле для коэффициентов h_m:

$$h_m = \frac{1}{(G - G^m G_P - (-G)^m G_N)} \sum_{k=1}^{m} h_{m-k} C_m^k \left(G^{m-k} S_P(k) + (-G)^{m-k} S_N(k)\right), \tag{23}$$

где

$$S_P(k) = \sum_{i\in M_P} (i-1)^k, \quad S_N(k) = \sum_{i\in M_P} (-i)^k, \tag{24}$$

$C_m^k = \dfrac{m!}{k!\,(m-k)!}$, $m = 1, 2, \ldots$.

Из выражения для четной производящей функции (19) можно получить следующее представление для четных собственных функций оператора Перрона – Фробениуса (6):

$$\psi_{2l}(x) = \sum_{k=0}^{2l} x^{2l-k} h_k C_{2l}^k. \tag{25}$$

Определим теперь нечетные (по порядку) собственные функции оператора (6), когда $G_P \neq G_N$. Для нечетных $n = 2l+1, l = 0, 1, 2, \ldots$, уравнение (16), включающее эти функции, запишется как

$$\psi_{2l+1}(x) = \frac{G^{2l+1}}{G_P - G_N}\left[\sum_{k\in M_P} \psi_{2l+1}\left(\frac{x+k-1}{G}\right) + \sum_{k\in M_N} \psi_{2l+1}\left(\frac{k-x}{G}\right)\right]. \tag{26}$$

Соответствующее уравнение для нечетной производящей функции $\Psi_{\text{o}}(x,t)$ получается в результате умножения (16) на $t^{2l+1}/(2l+1)!$ и суммированием по l

$$\Psi_{\text{o}}(x,t) = \frac{1}{G_P - G_N}\left[\sum_{k\in M_P} \Psi_{\text{o}}\left(\frac{x+k-1}{G}, Gt\right) + \sum_{k\in M_N} \Psi_{\text{o}}\left(\frac{k-x}{G}, Gt\right)\right]. \tag{27}$$

Решение этого уравнения будем искать в виде [1]

$$\Psi_{\text{o}}(x,t) = \frac{1}{2}\left[e^{xt}\tilde{H}(t) - e^{-xt}\tilde{H}(-t)\right]. \tag{28}$$

Подставляя (28) в (27) и реализуя действия, аналогичные тем, что были использованы в случае четного номера n, получим уравнение относительно функции $\tilde{H}(t)$

$$\tilde{H}\left(t\right) = \frac{1}{G_P - G_N}\left[\tilde{H}(Gt)\sum_{k\in M_P} e^{(k-1)t} - \tilde{H}\left(-Gt\right)\sum_{k\in M_N} e^{-kt}\right]. \tag{29}$$

Подчеркнем, что случай равенства числа возрастающих и убывающих ветвей $(G_P = G_N)$ исключается. Функцию $\tilde{H}(t)$ будем искать в форме ряда

$$\tilde{H}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{h}_m \frac{t^m}{m!}. \tag{30}$$

Подставляя (30) в (29), получим следующее рекуррентное уравнение для коэффициентов разложения (30):

$$\begin{aligned} \tilde{h}_m &= \tfrac{1}{((G_P-G_N)-G^m G_P+(-G)^m G_N)}\times \\ &\times \sum_{k=1}^{m} \tilde{h}_{m-k} C_m^k \left(G^{m-k} S_P(k) - (-G)^{m-k} S_N(k)\right), \end{aligned} \tag{31}$$

где $h_0 = 1$, $h_1 = -0.5$, $m = 1, 2, ...$ По аналогии с (25) определяется выражение для нечетных по порядку собственных функций оператора Перрона – Фробениуса

$$\psi_{2l+1}(x) = \sum_{k=1}^{2l+1} x^{2l+1-k}\tilde{h}_k C_{2l+1}^k, \quad l = 0, 1, 2, \ldots. \tag{32}$$

4. Полиномообразующие коэффициенты для различных модификаций кусочно-линейного отображения (5)

В этом разделе приведем рекуррентные формулы, определяющие коэффициенты h_m и $\tilde{h}_m$ собственных полиномиальных функций оператора Перрона – Фробениуса для некоторых модификаций изучаемого хаотического отображения (5).

Сдвиги Бернулли. Прежде обратимся к тестовому примеру – хаотическому отображению, именуемому сдвигами Бернулли,

$$x_{n+1} = \sum_{i=0}^{G-1} (Gx_n - i)\Theta_i\left(x_n\right). \tag{33}$$

В этом случае имеем: $S = \{s_k = 1\}$, $k = 1,\ 2, \ldots, G$; $G_P \equiv G$; $G_N = 0$; $M_P = \{1, 2, ..., G\}$; $M_N = \emptyset$; $S_P\left(k\right) = \sum\limits_{i\in M_P}(i-1)^k = \sum\limits_{l=0}^{G-1} l^k$; $S_N(k) = 0$.

Оператор Перрона – Фробениуса (6) для сдвигов Бернулли сводится к известному выражению [2]

$$P\rho\left(x\right)=\frac{1}{G}\sum_{k=0}^{G-1}\rho\left(\frac{x+k}{G}\right). \tag{34}$$

Собственные числа оператора (34), согласно (9) и (10), образуют единый набор: $\lambda_n=1/G^n,\ n=0,1,2,\ldots$. Соответственно, вспомогательные функции $H\left(t\right)$ (21) и $\tilde{H}\left(t\right)$ (30), вводимые для нахождения четной и нечетной составляющей производящей функции полиномиальных собственных функций оператора (34), удовлетворяют одному и тому же уравнению

$$H\left(t\right)=\frac{1}{G}H\left(Gt\right)\sum_{i=0}^{G-1}e^{it};\quad \tilde{H}\left(t\right)=\frac{1}{G}\tilde{H}\left(Gt\right)\sum_{k=0}^{G-1}e^{kt}.$$

Это позволяет искать производящую функцию непосредственно – в виде $\Psi\left(x,t\right)=e^{xt}H\left(t\right)$. Из условия нормировки $\int\limits_0^1\Psi(x,t)dx=1$ сразу следует, что тогда $H(t)=t/(e^t-1)$, то есть производящая функция $\Psi\left(x,t\right)$ совпадает с производящей функцией для полиномов Бернулли. Согласно (23) и (31), коэффициенты полиномов Бернулли удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$\begin{gathered}h_m=\tfrac{1}{G(G^{-m}-1)}\sum\limits_{k=1}^{m}C_m^k h_{m-k}G^{-k}\sum\limits_{i=0}^{G-1}i^k,\\ h_0=1,\quad h_1=-1/2,\quad m=2,3,\ldots.\end{gathered} \tag{35}$$

Пилообразное отображение с четным числом ветвей определим как отображение с функцией (5) вида

$$\begin{gathered}x_{n+1}=\sum\limits_{i=1}^{G}f_i\left(x_n\right)=\sum\limits_{i=1}^{G}\left(G\left(-1\right)^{i-1}x_n-\left(-1\right)^{i-1}\left(i-\tfrac{1+(-1)^{i-1}}{2}\right)\Theta_i\left(x_n\right)\right),\\ G=2L,\end{gathered} \tag{36}$$

что означает задание введенных выше характеристик отображения как

$$S=\left\{1,-1,1,-1,\ldots,1,-1\right\},\quad G_P=G_N=G/2,$$

$$M_P=\{1,3,...,G-1\},\quad M_N=\{2,4,...,G\},$$

$$S_P\left(k\right)=\sum_{i\in M_P}\left(i-1\right)^k=\sum_{l=0}^{G/2-1}\left(2l\right)^k,\quad S_N\left(k\right)=\sum_{i\in M_N}\left(-i\right)^k=\sum_{l=0}^{G/2-1}\left(-2(l+1)\right)^k.$$

Оператор Перрона – Фробениуса (6) для отображения (36) записывается как [1]

$$P\rho(x)=\frac{1}{G}\sum_{i=0}^{L-1}\rho\left(\frac{x+2i}{G}\right)+\frac{1}{G}\sum_{i=0}^{L-1}\rho\left(\frac{2(i+1)-x}{G}\right). \tag{37}$$

Собственные числа оператора (37), согласно (10) и (11), имеют вид

$$\lambda_{2l}=1/G^{2l},\quad \lambda_{2l+1}=0,\quad l=0,1,2,\ldots.$$

В данном случае собственные функции оператора определяет четная производящая функция, для которой вспомогательная функция (20) удовлетворяет уравнению

$$H(t) = \frac{1}{G}\left[H(Gt)\sum_{l=0}^{L-1} e^{2lt} + H(-Gt)\sum_{l=0}^{L-1} e^{-2(l+1)t}\right].$$

Полиномообразующие числа (23) для собственных функций (с четными номерами) рекуррентно выражаются как

$$\begin{aligned} h_m &= \tfrac{1}{GG^{-m}-L-(-1)^m L}\sum_{k=1}^{m} C_m^k h_{m-k} G^{-k}\times \\ &\times\left(\sum_{l=0}^{L-1}(2l)^k + (-1)^{m-k}\sum_{l=0}^{L-1}(-2(l+1))^k\right), \end{aligned} \tag{38}$$

где $h_0 = 1,\ h_1 = -1/2,\ m = 2, 3, \ldots$.

Пилообразное отображение с нечетным числом ветвей имеет вид (35), для которого параметр $G = 2L + 1$. При этом характеристики отображения имеют вид

$$P = (G+1)/2 = L+1, \quad N = (G-1)/2 = L,$$

$$S = \{1, -1, 1, -1, ..., 1, -1, 1\}, \quad M_P = \{1, 3, 5, 6, \ldots, G\},$$

$$M_N = \{2, 4, 6, \ldots, G-1\}.$$

$$s_i = (-1)^{i-1}, \quad S_P(k) = \sum_{i\in M_P}(i-1)^k = \sum_{l=0}^{L}(2l)^k,$$

$$S_N(k) = \sum_{i\in M_N}(-i)^k = \sum_{l=0}^{L-1}(-2(l+1))^k.$$

Оператор Перрона – Фробениуса (6) для рассматриваемого случая имеет вид

$$P\rho(x) = \frac{1}{G}\left[\sum_{i=0}^{L}\rho\left(\frac{x+2i}{G}\right) + \sum_{i=0}^{L-1}\rho\left(\frac{2i+2-x}{G}\right)\right]. \tag{39}$$

Собственные числа оператора (39) согласно (10) и (11) представляются как $\lambda_{2k} = 1/G^{2k}$ и $\lambda_{2k+1} = 1/G^{2k+2}$ $(k = 0, 1, 2, ...)$.

Уравнения (20) и (28) относительно функций $H(t)$ и $\tilde{H}(t)$, отвечающих соответственной четной и нечетной производящей функции, принимают вид

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{1}{G}\left[H(Gt)\sum_{l=0}^{L} e^{2lt} + H(-Gt)\,e^{-2t}\sum_{l=0}^{L-1} e^{-2lt}\right], \\ \tilde{H}(t) &= \tilde{H}(Gt)\sum_{i=0}^{L} e^{2it} - \tilde{H}(-Gt)\,e^{-2t}\sum_{i=0}^{L-1} e^{-2it}. \end{aligned}$$

Полиномообразующие числа для собственных функций четных номеров, находимые из (23), суть

$$\begin{aligned} h_m &= \frac{1}{GG^{-m}-(L+1)-(-1)^m L}\times \\ &\times\sum_{k=1}^{m} C_m^k h_{m-k} G^{-k}\left[\sum_{l=0}^{L}(2l)^k + (-1)^{m-k}\sum_{l=0}^{L-1}(-2(l+1))^k\right]. \end{aligned} \tag{40}$$

Полиномообразующие числа для собственных функций нечетных номеров, согласно (24), представляются как

$$\tilde{h}_m = \frac{1}{[G^{-m} - (L+1) + (-1)^m L]} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{m} C_m^k \tilde{h}_{m-k} G^{-k} \left[\sum_{l=0}^{L} (2l)^k - (-1)^{m-k} \sum_{l=0}^{L-1} (-2(l+1))^k \right], \qquad m = 2, 3, ...,$$

где $h_0 = 1$, $\tilde{h}_0 = 1$, $\tilde{h}_1 = -1/2$, h_1 – произвольно (следствие кратности собственных чисел).

5. Автокорреляционные функции орбит

Знание точного решения спектральной задачи для оператора Перрона – Фробениуса помогает осветить фундаментальные вопросы хаотической динамики, касающиеся существования инвариантной меры отображения, оценки скорости ее установления в процессе итераций, а также оценки скорости расцепления корреляций в хаотической динамической системе [1- 3]. Инвариантным для всех рассмотренных выше кусочно-линейных отображений является равномерное распределение $\rho(x) = \Theta_{0,1}(x)$, а соответствующее собственное число равно единице. Если начальное распределение $\rho_0(x)$ рассмотреть в форме разложения по собственным функциям оператора, то в силу того, что все собственные числа (10), (11) меньше единицы (кроме собственного числа, отвечающего инвариантной плотности), повторные действия оператора $P^n \rho_0(x)$ в асимптотике исключат все составляющие исходного разложения, кроме инвариантной плотности.

Рассчитаем аналитически автокорреляционные функции орбит для некоторых рассмотренных выше отображений по формуле [3], требующей определения многократного действия оператора Перрона – Фробениуса на независимую переменную

$$R(n) = \int_0^1 x P^n x dx - \frac{1}{4}. \tag{41}$$

При этом для любого отображения дисперсия процесса одинакова

$$R(0) = \int_0^1 x^2 dx - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}. \tag{42}$$

Чтобы эффективно пользоваться внешне простой формулой (41), переменную x необходимо представлять в виде суммы (!) константы и линейной собственной функции оператора Перрона – Фробениуса. Результат действия оператора на константу окажется константой, а собственная функция будет воспроизводиться с множителем в виде собственного числа.

Получим теперь выражение для автокорреляционной функции траекторий пилообразного отображения (5) с нерегулярным чередованием G ветвей. Подействуем

оператором Перрона – Фробениуса (6), отвечающим данному отображению, на независимую переменную

$$Px = \frac{1}{G^2}\sum_{k=1}^{G}(s_k x + (k-(1+s_k)/2) = \frac{G_P - G_N}{G^2}x + \frac{1}{2} - \frac{G_P - G_N}{2G^2},$$

где G_P и G_N – соответственно число ветвей с положительным и отрицательным тангенсом угла наклона. Линейная собственная функция и соответствующее собственное число оператора (6) представляются, соответственно, как

$$\psi_1(x) = x - 1/2 \equiv B_1(x), \quad \lambda_1 = \frac{G_P - G_N}{G^2},$$

где $B_1(x)$ – линейный полином Бернулли [13]. Тогда результат многократного действия оператора Перрона – Фробениуса на независимую переменную суть

$$P^m x = \lambda_1^m \psi_1(x) + \frac{1}{2} = \lambda_1^m\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}.$$

Следовательно, автокорреляционная функция орбит пилообразного отображения с произвольным чередованием ветвей имеет вид

$$R(n) = \lambda_1^n \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)x dx + \frac{1}{2}\int_0^1 x dx - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}\lambda_1^n, \quad \lambda_1 = \frac{G_P - G_N}{G^2}, \quad n \geq 0. \quad (43)$$

Формула (43) включает как частные случаи и результаты для конкретных вариаций отображения (5). Для *сдвигов Бернулли общего вида* (33) автокорреляционная функция (41) выразится как [5]

$$\begin{aligned} R(n) = \frac{1}{G^n}\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)x dx + \frac{1}{2}\int_0^1 x dx - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}\frac{1}{G^n} = \\ = \frac{1}{12}\frac{1}{\lambda_1^n} = \frac{1}{12}e^{-n\Lambda}, \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (44)$$

где $\lambda_1 = G^{-1}$ – собственное число оператора Перрона – Фробениуса, отвечающее линейной функции; $\Lambda = -\ln\lambda_1 = \ln G$ – показатель Ляпунова для сдвигов Бернулли.

Интересная ситуация возникает при расчете автокорреляционной функции орбит для пилообразного отображения вида (36) с четным числом ветвей. Действуя отвечающим этому виду отображения оператором Перрона – Фробениуса (37) на независимую переменную, получим

$$Px = \frac{1}{G}\left(\sum_{k=0}^{G/2-1}\frac{x+2k}{G} + \sum_{k=0}^{G/2-1}\frac{2(k+1)-x}{G}\right) = \frac{2}{N^2}\sum_{k=0}^{N/2-1}(2k+1) = \frac{1}{2}.$$

Это приводит к следующему виду автокорреляционной функции:

$$R(n) = \frac{1}{12}\delta(n) = \begin{cases} 1/12, & n = 0, \\ 0, & n \geq 1. \end{cases} \tag{45}$$

Дельта-коррелированность траекторий регулярных пилообразных отображений с четным числом ветвей позволяет рассматривать их как генераторы *дискретного белого шума*.

Для регулярных пилообразных отображений (35) с *нечетным* числом ветвей $G = 2L + 1$ автокорреляционная функция траекторий имеет вид

$$R(n) = \frac{1}{12}\lambda_1^n, \quad \lambda_1 = \frac{1}{G^{2n}}. \tag{46}$$

Заключение

В работе продолжено внедрение идеологии, развитой в работах [1-3], нахождения полиномиальных собственных функций и собственных чисел несамосопряженного оператора Перрона – Фробениуса кусочно-линейных отображений на основе построения производящих функций для собственных функций. Найдено аналитическое решение данной задачи для хаотического кусочно-линейного отображения с произвольным чередованием возрастающих и убывающих ветвей, характеризуемых одинаковым модулем тангенса угла наклона и переводящих отрезки своего задания на полный единичный интервал.

Получен явный вид полиномиального представления для собственных функций оператора Перрона – Фробениуса данного отображения с коэффициентами, определяемыми рекуррентно. Четные и нечетные по порядку собственные функции описываются несколько отличающимися выражениями. Коэффициенты этих полиномов определяются соответствующими рекуррентными соотношениями.

Значения четных по порядку собственных чисел определяются только общим количеством ветвей отображения; нечетные же по порядку собственные числа выражаются и через разность числа возрастающих и убывающих ветвей отображения. Когда такая разность равна единице, собственные числа перестают быть простыми, и им соответствуют два подпространства собственных функций. Когда же число возрастающих и убывающих ветвей совпадает, нечетные полиномы из разряда собственных функций переходят в разряд функций ядра оператора Перрона – Фробениуса.

В «предельных» случаях, к которым могут быть отнесены сдвиги Бернулли (все возрастающие кусочно-линейные ветви) и пилообразное отображение (строгое чередование возрастающих и убывающих линейных участков итеративной функции), полученные результаты сводятся к данным работ [1-3], дополняя их рекуррентными соотношениями для полиномообразующих коэффициентов.

Полученные результаты применены к расчету автокорреляционных функций орбит рассмотренных кусочно-линейных отображений. Для расчета корреляционных функций наблюдаемых, сложным образом зависящих от траекторий отображения, необходимо привлекать к расчету собственные функции и числа более высоких порядков.

Библиографический список

1. *Аникин В.М., Аркадакский С.С., Ремизов А.С.* Аналитическое решение спектральной задачи для оператора Перрона – Фробениуса кусочно-линейных хаотических отображений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 2. С. 16.
2. *Голубенцев А.Ф., Аникин В.М., Аркадакский С.С.* О некоторых свойствах оператора Фробениуса – Перрона для сдвигов Бернулли // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 2. С. 67.
3. *Голубенцев А.Ф.*, *Аникин В.М.* Инвариантные функциональные подпространства линейных эволюционных операторов хаотических отображений // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13, № 1-2. С. 3.
4. *Улам С.* Нерешенные математические задачи. М.: Наука, 1964.
5. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988.
6. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
7. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Курс лекций. М.: Физматлит, 2001.
8. *Пригожин И.Р., Стенгерс И.* Время, хаос, квант. К решению парадокса времени. М.: Прогресс, 1994.
9. *Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б.* Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
10. *Бланк Л.М.* Устойчивость и локализация в хаотической динамике. М.: МЦНМО, 2001.
11. *Lasota A., Mackey M.C.* Probabilistic properties of deterministic systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. Ch.4.
12. *Iosifescu M., Kraaikamp C.* Metrical theory of continued fractions. Kluwer Boston, Inc. 2002. Chps. 1, 2.
13. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Ред. М. Абрамовиц и И. Стиган. Пер. с англ. М.: Наука, 1979.

Саратовский государственный университет

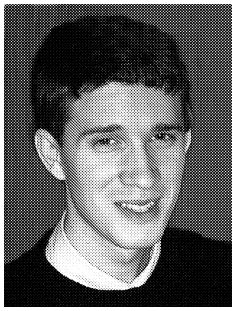
Поступила в редакцию *13.07.2006*
После доработки *9.01.2007*

EIGENFUNCTIONS AND EIGENVALUES OF THE PERRON–FROBENIUS OPERATOR OF PIECE-WISE LINEAR CHAOTIC MAPS

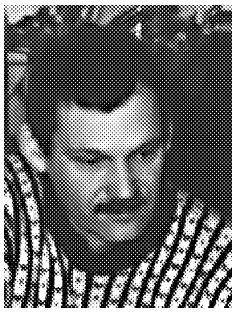
V.M. Anikin, A.S. Remizov, S.S. Arkadaksky

A chaotic piece-wise linear map having arbitrary interchange of linear increasing and decreasing branches is introduced. Polynomial eigenfunctions for associated non-self-adjoint Perron–Frobenius operator are found. Odd eigenvalus of the operator depend on difference between numbers of increasing and decreasing map branches. This situation may determine transition of odd polynomials from set of eigenfunctions to null-space of the operator or lead to nonsimplicity of eigenvalues.

Аникин Валерий Михайлович окончил физический факультет СГУ (1970). Доктор физико-математических наук (2005), профессор кафедры вычислительной физики и автоматизации научных исследований СГУ, заместитель декана физического факультета СГУ по научной работе, ученый секретарь докторского диссертационного совета при СГУ по специальностям радиофизика, физическая электроника, оптика, твердотельная электроника. Область научных интересов – аналитические модели хаотических и стохастических процессов. Автор 5 монографий и 85 статей. E-mail: AnikinVM@info.sgu.ru; ivesc@sgu.ru



Ремизов Александр Сергеевич окончил физический факультет СГУ (2002). Ассистент кафедры вычислительной физики и автоматизации научных исследований СГУ, аспирант заочной аспирантуры. Область научных интересов – хаотическая динамика. Автор 10 публикаций по данному научному направлению.



Аркадакский Сергей Сергеевич окончил физический факультет СГУ (1971). Кандидат физико-математических наук (1986), доцент кафедры вычислительной физики и автоматизации научных исследований СГУ, заместитель декана физического факультета СГУ по общим вопросам. Область научных интересов – электроника СВЧ, нелинейная динамика.

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 2, 2007 УДК 663.551.4 (043)

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ В АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ БРАГОРЕКТИФИКАЦИИ СПИРТОВОГО ПРОИЗВОДСТВА

В.Г. Рубанов, А.Г. Филатов, Ю.В. Касьянов, А.А. Руднев

Проведен анализ суточных колебаний режимных параметров эпюрационной колонны и доказано, что наблюдаемые в системе дефлегматор – конденсатор шумоподобные колебания имеют не стохастическую, а детерминированную природу и обусловлены хаотическим характером динамики процесса. Разработана система стабилизации расхода эфиро-альдегидной фракции в составе автоматизированной системы управления процессом брагоректификации, учитывающая выявленные особенности динамики объекта управления.

Введение

Наметившаяся в последнее время напряженность энергетического баланса, связанная с ограниченностью запасов топливно-энергетических ресурсов, вызвала необходимость проведения энергосберегающей политики во всех отраслях народного хозяйства. Учитывая важность проблемы ресурсосбережения, Белгородским технологическим университетом совместно с Веселолопанским спиртовым заводом была разработана и внедрена автоматизированная система управления процессом (АСУП) брагоректификации, которая при достаточно простой и надежной структуре с ограниченным числом локальных контуров регулирования обеспечивает получение спирта-ректификата требуемого качества при минимальных энергетических затратах [1].

Промышленная эксплуатация иерархической системы автоматизации управления, включающей на нижнем уровне исполнительные механизмы и устройства сбора информации о режиме функционирования технологического комплекса, на среднем уровне – цифровые контроллеры, реализующие локальные контуры стабилизации параметров технологического процесса, на верхнем уровне – автоматизированное рабочее место оператора системы с супервизорным управлением, показала высокую технико-экономическую эффективность.

Однако, несмотря на полученную ощутимую выгоду в виде повышения производительности до 7–10%, экономии энергетических затрат до 12%, уменьшения

фактических потерь спирта до 0,01%, детальный анализ динамики внедренной системы автоматизации выявил отдельные недостатки качества стабилизации технологических режимов брагоректификационной установки. В частности, реализованная на подчиненном уровне АСУП подсистема стабилизации расхода эфиро-альдегидной фракции (ЭАФ) эпюрационной колонны, входящей в состав трехколонной брагоректификационной установки косвенного действия [2], не дала ожидаемых результатов в виде снижения колебаний расхода ЭАФ.

1. Система автоматизации процесса ректификации бражного дистиллята

Технологическая схема работы эпюрационной колонны представлена на рис. 1. Бражный дистиллят *1* поступает на питающую тарелку эпюрационной колонны *2*. В нижней извлекающей части колонны *3* производится выделение высококипящих компонентов, в том числе этанола, а в верхней *4* – концентрирование головных низкокипящих компонентов, то есть ЭАФ. Пары бражного дистиллята *5*, обогащенные ЭАФ, поступают в дефлегматор *6*. В дефлегматоре происходит неполная конденсация паров, отводимых из верхней части колонны, за счет чего достигается дополнительное обогащение продукта низкокипящими компонентами. Полученный конденсат в виде флегмы *7* поступает на орошение колонны. Оставшаяся часть паров поступает в конденсатор *8*, где происходит их окончательная конденсация.

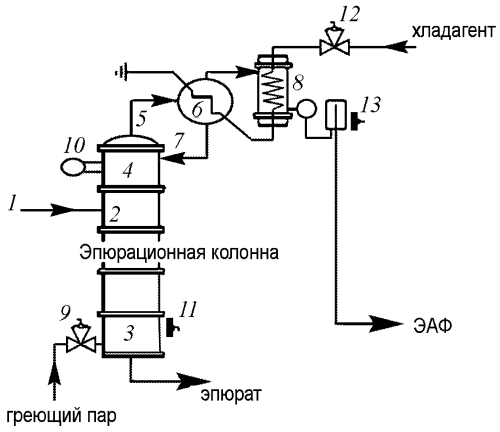


Рис. 1. Технологическая схема работы эпюрационной колонны

В отличие от схемы с полной конденсаций, в которой функции дефлегматора и конденсатора совмещаются в одном устройстве, подобная технологическая схема с парциальной (частичной) конденсацией дистиллята в дефлегматоре и дальнейшей окончательной конденсацией паров в конденсаторе является наиболее экономичной и эффективной при использовании воды для охлаждения дефлегматора и конденсатора, фактически самого дешевого хладагента [3]. Однако это накладывает повышенные требования к качеству процесса стабилизации расхода ЭАФ. Подсистема управления эпюрационной колонной в составе АСУТП, обеспечивающая стабильный режим работы эпюрационной колонны, включает два контура: контур управления расходом греющего пара, формирующий управление клапаном расхода пара *9* на основе сигналов датчиков температуры верха колонны *10* и давления низа колонны *11*, и контур управления расходом ЭАФ, формирующий управление клапаном расхода хладагента *12* на основе сигнала датчика уровня эпюрата в стакане импульсного преобразователя расхода *13*, который, соответственно, условно пропорционален расходу ЭАФ. Расход ЭАФ стабилизируется за счет регулирования расхода охлаждающей воды, подаваемой в систему конденсатор – дефлегматор.

Следовало ожидать, что реализация контуров стабилизации режимных параметров позволит скомпенсировать негативное влияние случайных помех (температуры греющего пара, температуры хладагента, температуры, расхода и состава поступающего в колонну бражного дистиллята и т. д.) на ход технологического процесса. Однако стабилизировать удалось только тепломассообменный режим непосредственно эпюрационной колонны. Ожидаемой абсолютной стабилизации расхода ЭАФ, как уже было упомянуто выше, не произошло.

Поэтому авторами была выдвинута гипотеза о том, что наблюдаемые в системе шумоподобные колебания расхода ЭАФ, которые не удалось ликвидировать за счет ввода в эксплуатацию соответствующей подсистемы стабилизации, обусловлены, главным образом, не влиянием совокупности случайных помех, а сложной нелинейной динамикой самого процесса парциальной конденсации, протекающей в системе конденсатор – дефлегматор. Данное предположение является логичным, поскольку:

- классические методы теории автоматического управления, широко использующиеся при построении систем стабилизации, дают удовлетворительные результаты (чего, соответственно, не произошло) в случае, если колебания регулируемых величин обусловлены преимущественно случайными воздействиями на объект управления, то есть носят стохастический характер;
- следует ожидать, что динамика системы дефлегматор – конденсатор будет качественно напоминать динамику известной системы Лоренца [4], поскольку при описании процессов, протекающих в данной системе, будут использоваться те же уравнения математической физики, как-то: уравнения Навье – Стокса, теплопроводности и неразрывности, дополненные уравнениями, описывающими динамику процесса конденсации.

2. Анализ шумоподобных колебаний в системе дефлегматор – конденсатор

Гидродинамика дефлегматоров и конденсаторов, которые представляют собой сложные конструкции в виде кожухотрубных теплообменников, практически не поддается аналитическому описанию со степенью точности, необходимой для исследования условий возникновения в системе нелинейных непериодических колебаний, поскольку существующие математические модели подобных тепломассообменных аппаратов, основанные на балансовых, диффузионных и критериальных уравнениях, являются либо упрощенными и пригодными только для инженерных расчетов статических установившихся режимов работы, либо неразрешимыми аналитически и требующими для своего использования методов имитационного моделирования [3].

Поэтому, для того чтобы выяснить природу наблюдаемых в системе шумоподобных колебаний – действительно ли они не имеют стохастического происхождения, а являются проявлением в системе детерминированного хаоса, был проведен численный анализ временных рядов, представляющих суточную выборку значений параметров, характеризующих динамику эпюрационной колонны: давления в кубовой части колонны, расхода охлаждающей воды в системе дефлегматор – конденсатор, уровня эпюрата в стакане конденсатора (рис. 2).

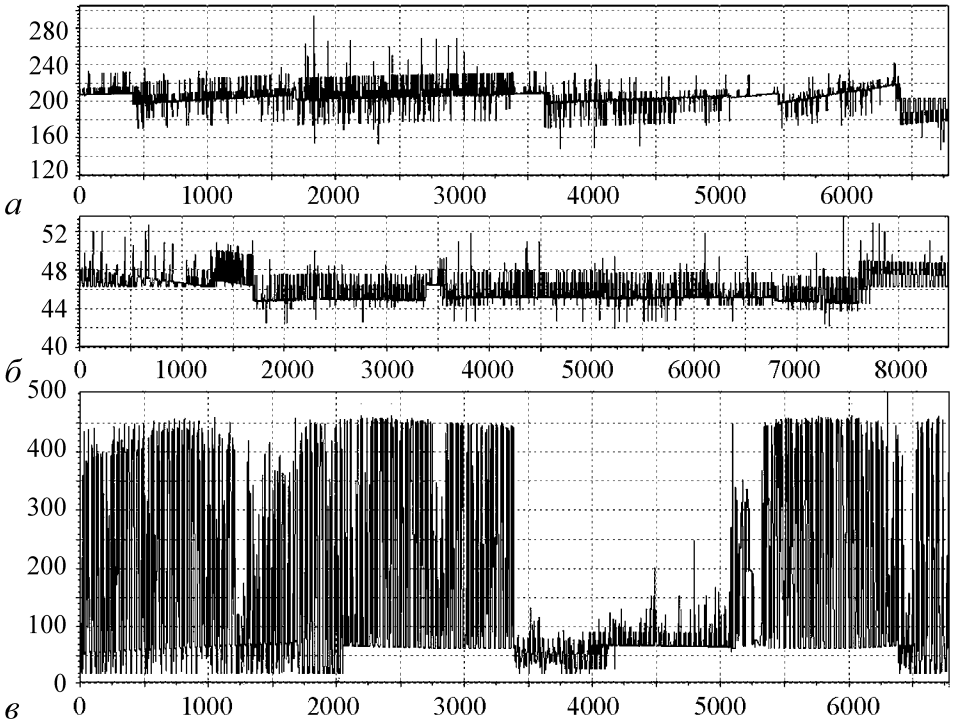


Рис. 2. Графики режимных параметров эпюрационной колонны: *а* – давление кубовой части эпюрационной колонны, кПа; *б* – расход воды в системе дефлегматор – конденсатор, дм^3; *в* – уровень эпюрата в стакане конденсатора, мм

Вышеуказанные временные ряды получены в результате дискретизации экспериментальных данных, представляющих собой графики динамики режимных параметров эпюрационной колонны. Измерение экспериментальных данных и автоматическое построение графиков проводилось в течение 24-х часов при помощи контрольно-измерительных приборов с записью типа КСП-3П. Шаги дискретизации по уровню и по времени определялись исходя из максимальной точности контрольно-измерительной аппаратуры. Дискретизация экспериментальных данных выполнялась с шагом квантования по времени 10 секунд и шагами квантования по уровню для давления в кубовой части колонны 1 кПа, расхода охлаждающей воды в системе дефлегматор – конденсатор $0.01\,\text{м}^3/\text{час}$, по уровню эпюрата в стакане конденсатора 1 мм.

Построим изображения Пуанкаре вышеуказанных временных рядов, характеризующих динамику эпюрационной колонны, в пространстве состояний (x, y, z), где положение изображающей точки временного ряда $x_1, x_2, \ldots x_n$ в момент времени $i = 1 \ldots N - 2$ определяется как $x = x_i$, $y = x_{i+1} - x_i$, $z = x_{i+2} - x_{i+1} + x_i$. Отображение Пуанкаре временного ряда, имеющего стохастическую природу, представляет собой неупорядоченное скопление точек на фазовой плоскости. Если отображение Пуанкаре имеет четко выраженную структуру, то это свидетельствует о том, что движение носит упорядоченный характер, причем степень порядка определяется исходя из конкретного вида структуры и может лежать в пределах от линейных гармонических колебаний до детерминированного хаоса. В случае движения системы, носящего характер хаотических колебаний (именно тот случай, присутствие

которого мы хотим идентифицировать), отображение Пуанкаре имеет просматривающиеся в наборе изображающих точек структурные образования фрактального характера, подобные канторовым множествам. Наличие таких визуально определяемых упорядоченных массивов точек среди беспорядочно расположенных изображающих точек временного ряда является признаком того, что движение системы носит не стохастический, а хаотический характер [5].

На рис. 3 представлены отображения Пуанкаре режимных параметров эпюрационной колонны в вышеописанном пространстве состояний (x, y, z). Анализ отображений Пуанкаре показывает, что колебания уровня эпюрата в стакане конденсатора носят ярко выраженный хаотический характер. Причем факт наличия структурного порядка в отображении Пуанкаре суточных колебаний уровня эпюрата в стакане конденсатора четко определяется визуально (рис. 3, *а, б*), что свидетельствует о ярко выраженном характере хаотических колебаний и их преобладании над стохастической составляющей в динамике процесса.

Визуальное определение структурной упорядоченности и фрактального характера отображения Пуанкаре колебаний расхода охлаждающей воды в системе дефлегматор – конденсатор эпюрационной колонны (рис. 3, *в*) является сомнительным и неоднозначным. Хотя на графиках и просматриваются структуры, напоминающие

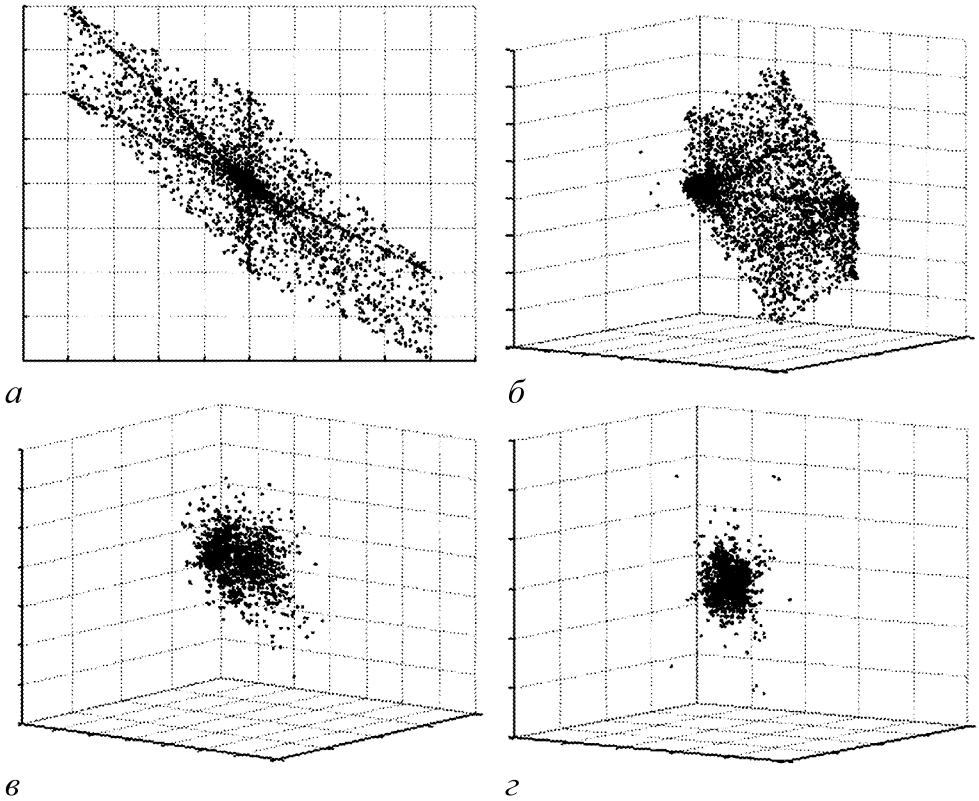


Рис. 3. Отображения Пуанкаре (x, y, z) колебаний режимных параметров объекта: *а* – сечение отображения Пуанкаре (y, z) колебаний уровня эпюрата; *б* – уровень эпюрата в стакане конденсатора; *в* – расход охлаждающей воды в системе дефлегматор – конденсатор; *г* – давление в кубовой части колонны

известную канторову пыль, для уверенной констатации хаотического характера процесса необходимо проведение численных расчетов корреляционной размерности соответствующего временного ряда. Потенциальная возможность присутствия слабо выраженной хаотической составляющей на фоне стохастических колебаний случайного характера объясняется тем, что вследствие автоматической работы контура расхода ЭАФ в системе существует обратная связь между расходом охлаждающей воды и уровнем эпюрата в стакане конденсатора.

Что касается давления в кубовой части эпюрационной колонны, то наблюдаемые суточные колебания этих параметров, происходящие при стационарном режиме работы объекта, носят преимущественно стохастический характер, то есть их наличие вызвано, в основном, случайным воздействием большого числа неконтролируемых факторов на динамику процессов, протекающих в эпюрационной колонне. Если же хаотическая составляющая и присутствует, то ее вклад в динамику процесса настолько мал, что упорядоченные структуры соответствующего отображения Пуанкаре (рис. 3, *г*) визуально не определяются, и для доказательства их фрактального характера и требуется проведение численных расчетов корреляционной размерности соответствующего временного ряда.

Для определения корреляционной размерности временных рядов, характеризующих уровень давления в кубовой части колонны, расход охлаждающей воды в системе дефлегматор – конденсатор и уровень эпюрата в стакане конденсатора, воспользуемся методикой, основанной на вычислении корреляционного интеграла с последующим анализом графиков корреляционной размерности [6, 7]. Построенные для различных значений вложенности фазового пространства m графики корреляционных размерностей временных рядов, соответствующих динамике уровня эпюрата в стакане конденсатора, расхода охлаждающей воды в системе дефлегматор – конденсатор, давления в кубовой части колонны, представлены на рис. 4.

При построении графиков корреляционной размерности применялся алгоритм box counting [7] и использовались временные ряды длиной $N = 8640$ отсчетов, что соответствует дискретизации экспериментальных данных с шагом 10 секунд в течение суток. Для каждого из временных рядов варьировалась размерность пространства вложения $m = 1, 2, \ldots, 20$, и для каждого из значений размерности фазового пространства m строились графики зависимости корреляционной размерности D_c от размера ячейки разбиения фазового пространства ε. При этом принималось во внимание ограничение $D_c \leq 2 \log N$, определяющее достоверность диагностики фрактального характера множества, в лучшем случае, при десятикратном изменении масштаба представления [7], что в нашем случае дает оценку $D_c \leq 7.87$. Более строгое определение минимальной мощности выборки для достоверной диагностики фрактального характера временного ряда с использованием корреляционного интеграла и корреляционной размерности дает соотношение $M \geq 10^{2+0.4D_c}$ [8], что в нашем случае приводит к оценке $D_c \leq 4.75$. Это не противоречит оценке $D_c \approx 1.9$, полученной по экспериментальным данным для временного ряда, характеризующего динамику уровня эпюрата в стакане конденсатора эпюрационной колонны.

Анализ графиков корреляционных размерностей показывает, что хаотический характер имеет только динамика уровня эпюрата, причем наблюдаемый временной ряд может быть реконструирован при помощи нелинейной динамической системы третьего порядка, о чем говорит «полочка» $D_c \approx 1.9$ на соответствующем графике

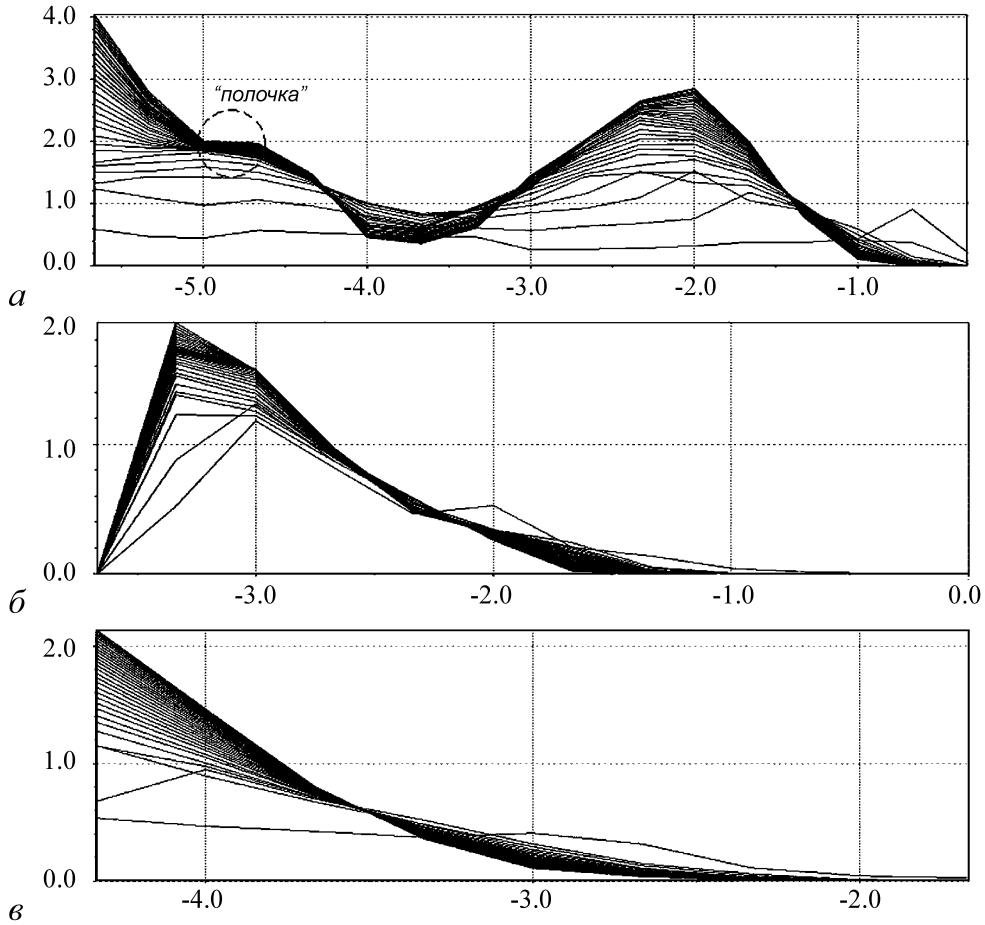
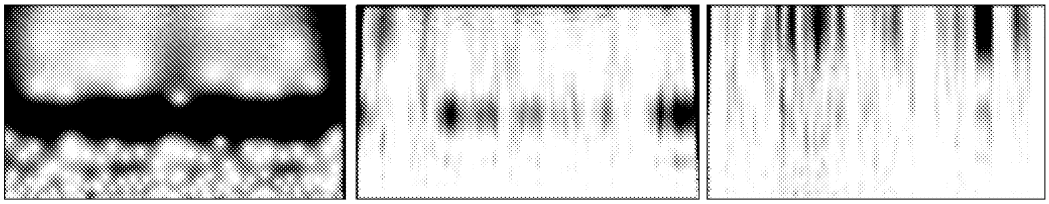


Рис. 4. Корреляционные размерности в системе координат $(\log_2 \varepsilon;\ D_c)$ временных рядов суточных колебаний режимных параметров объекта: *а* – уровня эпюрата в стакане конденсатора; *б* – расхода охлаждающей воды в системе дефлегматор – конденсатор; *в* – давления в кубовой части колонны

(рис. 4, *а*), присутствующая вне зависимости от размерности фазового пространства. Напротив, колебания давления в кубовой части эпюрационной колонны и расхода охлаждающей воды носят стохастический характер и обусловлены случайными воздействиями, а не нелинейными свойствами динамической системы, поскольку насыщения графиков корреляционной размерности у соответствующих рядов не наблюдается. Следовательно, выдвинутая первоначально гипотеза подтвердилась, и колебания уровня эпюрата в стакане конденсатора обусловлены нелинейными динамическими свойствами системы дефлегматор – конденсатор, а не случайными стохастическими воздействиями.

Дополнительным индикатором наличия детерминированного хаоса в рассматриваемом технологическом процессе могут служить характерные особенности вейвлетного преобразования анализируемых временных рядов, характеризующих динамику эпюрационной колонны. На рис. 5 представлены построенные на основе вейвлета Морле скейлограммы временных рядов, соответствующих динамике уровня эпюрата в стакане конденсатора, расхода охлаждающей воды в системе дефлегматор – конденсатор, давления в кубовой части колонны.



а *б* *в*

Рис. 5. Вейвлетные спектры суточных колебаний режимных параметров эпюрационной колонны: *а* – уровня эпюрата; *б* – расхода охлаждающей воды в системе дефлегматор – конденсатор; *в* – давления в кубовой части эпюрационной колонны

Анализ скейлограмм показывает, что характерная структура поверхности коэффициентов вейвлет-преобразования, соответствующая сценарию перехода к хаосу через перемежаемость ламинарной и турбулентной фаз движения [9], наблюдается только у колебаний уровня эпюрата (рис. 5, *а*), но отсутствует в скейлограммах расхода охлаждающей воды в системе дефлегматор – конденсатор (рис. 5, *б*) и давления в кубовой части эпюрационной колонны (рис. 5, *в*), представляющих картину, характерную для стохастического случайного шума.

Поскольку наблюдаемый в системе управления расходом ЭАФ шум имеет детерминированную природу, то есть носит характер динамического хаоса, обладающего внутренним порядком в отличие от обычных стохастических шумов и помех, то возможно построение системы управления, учитывающей хаотический характер движения объекта управления [10].

3. Реконструкция нелинейного объекта управления

Задача реконструкции оператора эволюции динамической системы решалась в соответствии с методом, изложенным в [6], путем поиска трехмерного дискретного отображения. При этом авторы исходили из того, что, хотя реальный физический процесс, протекающий в системе дефлегматор – конденсатор эпюрационной колонны является непрерывным, его математическое описание в классе нелинейных динамических систем целесообразнее искать в дискретном виде, поскольку в последующем данная модель в составе автоматической системы управления реализуется при помощи цифровой вычислительной техники, то есть так или иначе модель придется приводить к дискретной форме в виде конечно-разностных уравнений. И если возникнет необходимость дискретизации системы дифференциальных уравнений с последующей реализацией программного алгоритма, то в результате эффектов квантования непрерывная модель после аппроксимации производных дискретными аналогами и перехода от непрерывной модели к ее дискретному представлению может приобрести свойства, не свойственные исходной непрерывной модели, к примеру, потерять устойчивость.

Искомый эволюционный оператор представляется в виде разложения по базису полиномиальных функций [6], что является довольно громоздким описанием,

но при этом позволяет воспроизводить сигналы с высокой степенью точности и использовать для вычисления неизвестных коэффициентов эволюционного оператора методику параметрической идентификации методом наименьших квадратов (МНК).

Размерность пространства d, в котором размещается аттрактор реконструируемой динамической системы, находится как ближайшее целое корреляционной размерности: $d > D_c$, $D_c \approx 1.9$, $d = 2$. Размерность пространства вложения, необходимая для реконструкции аттрактора и определяемая по формуле Манэ $n \geq 2d + 1$, зачастую дает сильно завышенную оценку, поэтому, как правило, можно ограничиваться пространством меньшей размерности $D_c < n < 2d + 1$. Поскольку физические процессы тепломассообмена в анализируемой динамической системе имеют непрерывную природу, полагаем $n = 3$, что соответствует условию возникновения детерминированного хаоса в системах не ниже третьего порядка и больше корреляционной размерности аттрактора.

Проведем реконструкцию временного ряда $x_1, x_2, \ldots, x_N$ в трехмерном фазовом пространстве (x, y, z), где положение изображающей точки в момент времени $i = 1 \ldots N-2$ определяется как $x = x_i$, $y = x_{i+1} - x_i$, $z = x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i$,

$$T_{j\,k+1} = \sum_{l_1,l_2,l_3=0}^{\nu} C_{l_1,l_2,l_3} \prod_{r=1}^{n} T_{r\,k}^{l_r}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

где $T_1 = x$, $T_2 = y$, $T_3 = z$; C_{l_1,l_2,l_3} – неизвестные коэффициенты, которые необходимо найти; ν – размерность полносвязной системы; $n = 3$ – размерность пространства вложения (см. [6]).

Вопрос выбора порядка нелинейной полиномиальной системы ν решался авторами экспериментально, поскольку не может быть однозначно формализован и представляет собой компромисс между сложностью модели и точностью описания данной моделью наблюдаемого временного ряда.

Первоначально ограничимся вторым порядком нелинейной полиномиальной модели $\nu = 2$ и проведем реконструкцию временного ряда $x_1, x_2, \ldots, x_N$ в трехмерном фазовом пространстве при помощи нелинейной динамической модели вида

$$\begin{cases} x_{k+1} = a_{00} + a_{01}x_k + a_{02}y_k + a_{03}z_k + a_{04}x_ky_k + \\ \qquad\qquad + a_{05}x_kz_k + a_{06}y_kz_k + a_{07}x_k^2 + a_{08}y_k^2 + a_{09}z_k^2, \\ y_{k+1} = a_{10} + a_{11}x_k + a_{12}y_k + a_{13}z_k + a_{14}x_ky_k + \\ \qquad\qquad + a_{15}x_kz_k + a_{16}y_kz_k + a_{17}x_k^2 + a_{18}y_k^2 + a_{19}z_k^2, \\ z_{k+1} = a_{20} + a_{21}x_k + a_{22}y_k + a_{23}z_k + a_{24}x_ky_k + \\ \qquad\qquad + a_{25}x_kz_k + a_{26}y_kz_k + a_{27}x_k^2 + a_{28}y_k^2 + a_{29}z_k^2, \end{cases} \qquad (*)$$

где коэффициенты a_{ij} находятся путем решения задачи параметрической идентификации неизвестных коэффициентов методом наименьших квадратов с использованием выборки мощностью $N = 8638$ (полная мощность исходного временного ряда x_i, с учетом введенных разностей первого и второго порядка $x_{i+1} - x_i$, $x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i$).

Параметрическая идентификация приведенной нелинейной динамической модели, проведенная по временному ряду колебаний уровня эпюрата в стакане конденсатора, позволяет получить следующую матрицу коэффициентов, задающую конкретный вид динамической системы (*), динамика которой является реконструкцией исследуемого временного ряда:

$$\begin{bmatrix} a_{00} & \dots & a_{09} \\ a_{10} & \dots & a_{19} \\ a_{20} & \dots & a_{29} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 110.6531 & -0.2090 & -1.3984 & -1.2819 & -0.0018 & -0.0005 & -0.0002 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Как показали проведенные авторами вычисления, дальнейшее увеличение порядка полиномиальной модели не ведет к существенному увеличению точности представления, поскольку соответствующие коэффициенты a_{ij} при нелинейностях более высоких порядков оказываются весьма малыми и сравнимыми с погрешностью вычислений. Поэтому авторы сочли целесообразным остановиться на втором порядке нелинейной полиномиальной модели.

Результат реконструкции временного ряда, соответствующего колебаниям уровня эпюрата в стакане конденсатора, осуществленной при помощи рассмотренной нелинейной динамической системы (*), представлен на рис. 6. Анализ результатов показывает, что полученная модель хаотического движения динамической системы позволяет прогнозировать ее поведение с достаточной степенью точности с глубиной предсказания до 120 секунд (рис. 6, *а*). Несмотря на мощность выборки, глубина прогноза по сравнению с ней достаточно мала и составляет 0.15% от общего времени, на протяжении которого осуществляется наблюдение за объектом. Это обусловлено тем, что прогноз эволюции системы, динамика которой обладает свойствами детерминированного хаоса, на длительном промежутке времени невозможен. Кроме того, реконструированная динамическая система отражает в пределах глубины прогноза только количественные характеристики наблюдаемых хаотических колебаний и не соответствует его качественному характеру, что видно из отображения Пуанкаре временного ряда, реконструированного при помощи нелинейной динамической системы, моделирующей хаотическую динамику системы дефлегматор – конденсатор эпюрационной колонны (рис. 6, *б*).

Полученная в результате идентификации с помощью МНК нелинейная динамическая система позволяет предсказать на определенное время поведение реального нелинейного объекта только потому, что она ведет себя на начальном этапе движения подобным образом: имеет приблизительно такие же степень перемешивания траекторий (корреляционную энтропию) и корреляционную размерность, заполняет примерно тот же объем фазового пространства; а отнюдь не потому, что полученная система нелинейных уравнений соответствует математическому описанию динамики физических процессов в реальном объекте управления (см. рис. 6, *в*, *г*). Поэтому

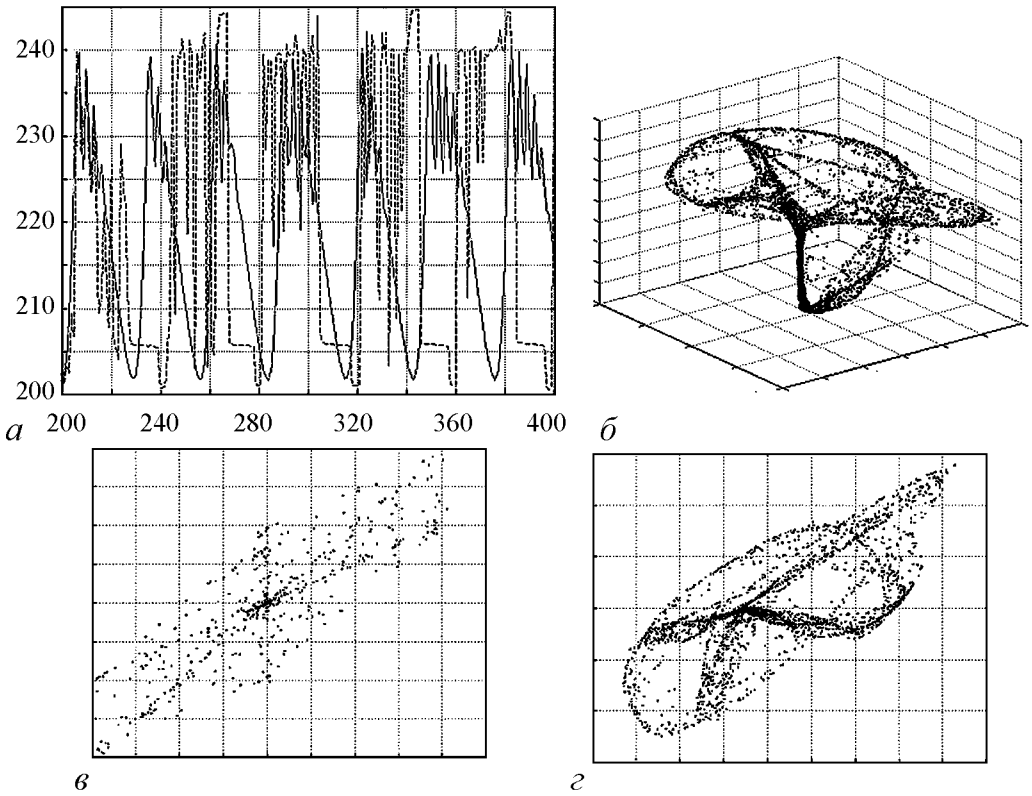


Рис. 6. Реконструкция нелинейных хаотических колебаний уровня эпюрата: *а* – фрагменты суточных графиков уровня эпюрата в стакане конденсатора (штриховая линия) и реконструкции колебаний уровня эпюрата (сплошная линия), мм; *б* – отображение Пуанкаре (x, y, z) реконструированной нелинейной модели; *в, г* – отображения Пуанкаре (z, y) реальной динамической системы (*в*) и ее реконструкции (*г*) на временном интервале, допускающем предсказание эволюции объекта управления

нельзя однозначно говорить о том, что нами получена и идентифицирована модель объекта управления – на самом деле нами получена модель, позволяющая прогнозировать поведение объекта управления на достаточно малом отрезке времени, и не более того.

4. Реализация системы автоматического управления (САУ) с учетом хаотической динамики объекта

Модификация разработанной ранее АСУП брагоректификации с учетом хаотической составляющей динамики эпюрационной колонны заключается в замене промышленного ПИД-регулятора ТСМ-21, реализующего ранее в контуре стабилизации расхода ЭАФ ПИД-регулирование без учета особенностей динамики объекта управления, на программируемый технологический контроллер ТКМ-51, средствами которого осуществляется прогнозирование хаотических колебаний и программная реализация адаптивного управления расходом ЭАФ (рис. 7).

Методы построения адаптивных САУ с использованием не непосредственно моделей объекта управления, а моделей, реконструирующих хаотическую динамику поведения объекта управления, то есть отражающих не структуру объекта управления, а количественные характеристики наблюдаемых хаотических колебаний, в настоящее время находятся в стадии разработки, являясь одним из направлений развития современной теории управления. Поэтому применительно к рассматриваемому случаю авторы, основываясь на своем опыте построения САУ с элементами прогнозирования/предсказания поведения регулируемой величины (см. [11, 12]), могут предложить один из методов построения системы управления, основанный на формировании управления не по измеренному значению регулируемой величины, что было реализовано на первоначальном этапе разработки и внедрения АСУП брагоректификации [1], а по его «предсказанному» значению (рис. 8).

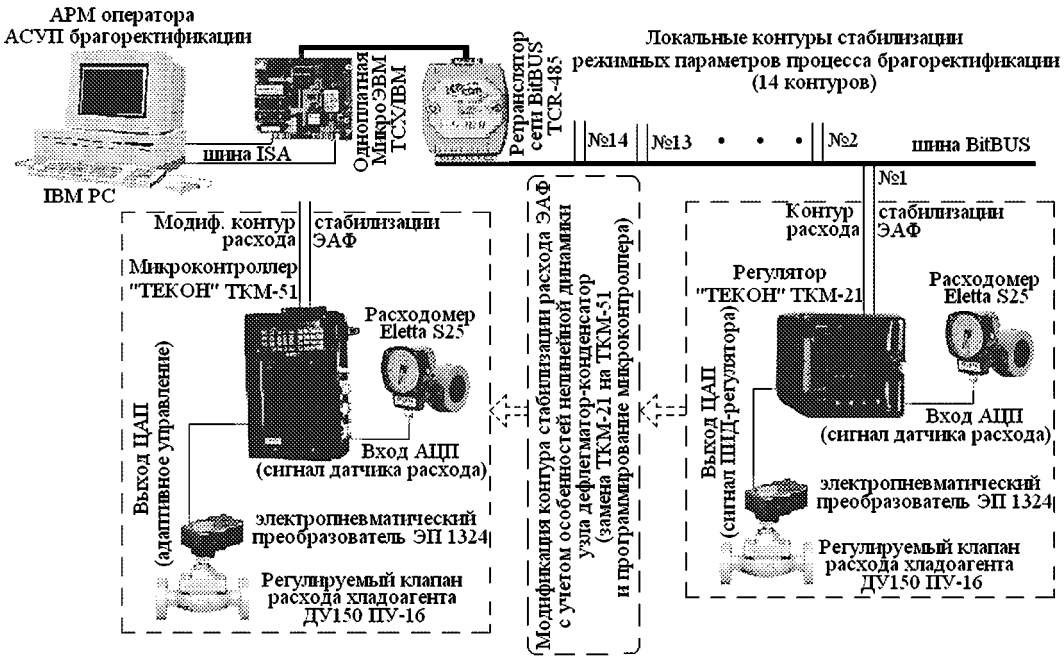


Рис. 7. Реализация подсистемы стабилизации расхода ЭАФ в составе АСУП брагоректификации с учетом нелинейной динамики эпюрационной колонны

Рис. 8. Функциональная схема системы автоматического управления расходом ЭАФ в АСУП брагоректификации с прогнозом нелинейных колебаний в системе дефлегматор – конденсатор

Заключение

Таким образом, доказано, что колебания расхода ЭАФ, наблюдаемые в стационарном режиме функционирования эпюрационной колонны и присутствующие в системе несмотря на работу соответствующего контура автоматического управления, обусловлены нелинейным характером динамики системы конденсатор – дефлегматор и имеют хаотический, а не стохастический характер, то есть вызваны детерминированными, а не случайными причинами. А поскольку хаос в нелинейной динамической системе имеет детерминированное происхождение, то этим процессом, в отличие от стохастического, в принципе, возможно управлять. В частности, наблюдаемый временной ряд, соответствующий хаотическим колебаниям уровня эпюрата, может быть реконструирован при помощи нелинейной динамической системы. Это дает возможность прогнозировать поведение объекта на некотором отрезке времени, что, в свою очередь, позволяет модернизировать разработанную ранее АСУП брагоректификации ФУГП «Веселолопанский спиртозавод» и реализовать в составе подсистемы САУ расходом ЭАФ эпюрационной колонны устройство управления, формирующее управляющее воздействие с учетом особенностей нелинейной динамики объекта управления, заключающихся в собственных хаотических колебаниях системы конденсатор – дефлегматор, и тем самым добиться удовлетворительного качества управления данным режимным параметром, чего в принципе нельзя сделать традиционными методами теории управления, поскольку они не учитывают появления в системе динамических режимов, соответствующих детерминированному хаосу.

Работа выполнена в рамках хозрасчетного договора № 4804 от 1.10.2004 «Исследования возможностей и разработка концепции создания комплексного автоматизированного предприятия на базе ФГУП Росспиртпром „Веселолопанский спиртовой завод“».

Библиографический список

1. *Касьянов Ю. В.* Автоматизация технологического процесса ректификации культуральной спиртосодержащей жидкости в производстве спирта: Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Орел: ОГТУ, 2003.
2. Справочник по производству спирта. Сырье, технология и технохимконтроль / Под ред. В. Л. Яровенко и др. М.: Легкая и пищевая промышленность, 1981. 336 с.
3. *Кафаров В. В., Глебов М. Б.* Математическое моделирование основных процессов химических производств. М.: Высшая школа, 1991. 400 с.
4. *Чуличков А. И.* Математические модели нелинейной динамики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 296 с.
5. *Мун Ф.* Хаотические колебания: вводный курс для научных работников и инженеров / Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 312 с.
6. *Анищенко В. С.* Знакомство с нелинейной динамикой. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 144 с.

7. *Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б.* Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Едиториал УРСС, 2002. 360 с.
8. *Nerenberg M.A., Essex C.* Correlation dimension and systematic geometric effects // Phys. Rev. 1986. A 42, 7605.
9. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 176 с.
10. *Хасанов М.Н.* Фрактальные характеристики динамики объектов управления // Автоматика и телемеханика. 1994. № 2. С. 59.
11. *Филатов А.Г., Луценко О.В.* Выбор «глубины прогнозирования» оценки толщины ленты стекла методом анализа робастной устойчивости системы управления машины ВВС // Сб. докл. международной научно-практической конференции «Передовые технологии в промышленности и строительстве на пороге XXI века». Белгород. 1998. Часть 3.С. 992.
12. Патент № 2141684 РФ / *Рубанов В.Г., Филатов А.Г., Луценко О.В.* Устройство для регулирования толщины листового материала // Бюл. № 32 от 20.11.99.

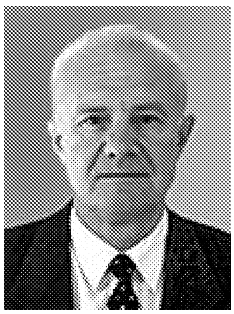
Белгородский государственный технологический университет

Поступила в редакцию *20.10.2006*
После доработки *05.02.2007*

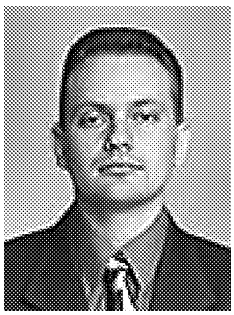
APPLICATION OF NONLINEAR DYNAMICS METHODS IN THE AUTOMATIZED CONTROL SYSTEM OF SPIRIT RECTIFICATION PROCESS

V.G. Rubanov, A.G. Filatov, J.V. Kasjanov, A.A. Rudnev

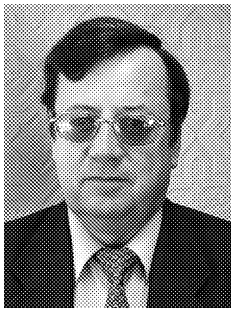
The analysis of regime parameters daily fluctuations of epuration columns is carried out, and it is proved, that observable noise-like fluctuations in the system dephlegmer – condenser have not stochastic, but the determined nature, and are caused by chaotic character of process dynamics. The system of the ether-aldehyde fractions expenditure stabilization is developed in the structure of automatic control system of ethyl spirit rectification. The revealed features of management object dynamics is took into account.



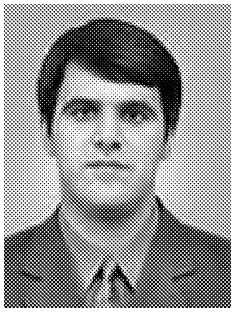
Рубанов Василий Григорьевич – окончил Харьковский авиационный институт им. Н.Е. Жуковского (1965). Заслуженный деятель науки Российской Федерации (2000), доктор технических наук (1992), профессор (1988), декан факультета автоматизации производств и информационных технологий Белгородского государственного технологического университета имени В.Г. Шухова. Основатель и руководитель научно-инженерной школы, деятельность которой направлена на совершенствование методов проектирования микропроцессорных систем автоматизации технологического оборудования и процессов различных отраслей промышленности. Автор и соавтор более 200 печатных трудов, в том числе 3 учебников, 2 монографий, 30 изобретений и патентов. Награжден знаком «Изобретатель СССР».



Филатов Александр Геннадьевич – родился в Белгороде (1973), окончил Белгородскую государственную технологическую академию строительных материалов (1995) по специальности «Автоматизация технологических процессов и производств». Кандидат технических наук (1999), доцент кафедры технической кибернетики Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. Автор и соавтор более 50 печатных трудов, в том числе 2 учебных пособий с грифом УМО, 3 изобретений и патентов. Область научных интересов: построение современных систем автоматического управления сложными техническими системами с использованием методов нелинейной динамики и «мягких» вычислений.



Касьянов Юрий Васильевич – родился в 1946 году, окончил Воронежский технологический институт (1975). Работал на ряде предприятий по производству спирта и прошел путь от рядового инженера до руководителя предприятия. На должность директора Веселолопанского спиртзавода был выдвинут в 1994 году. В 2003 году защитил кандидатскую диссертацию в Орловском государственном техническом университете по специальности 05.13.06 «Автоматизация и управление технологическими процессами и производствами». Количество научных трудов 20.



Руднев Александр Александрович – родился в Белгороде (1979), окончил Белгородскую государственную технологическую академию строительных материалов (2001) по специальности «Автоматизация технологических процессов и производств». Старший преподаватель кафедры технической кибернетики Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. Область научных интересов: обработка и визуализация данных в технических системах.

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 2, 2007 УДК 53(076)

ДВЕ ТЫСЯЧИ ШЕСТОЙ ГОД В ДАТАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ*

Д.И. Трубецков

«Электронные» даты как зеркало нелинейной науки

Джозеф Джон Томсон – 150 лет со дня рождения. Естественно начать с главного действующего героя электроники – электрона и его открывателя Дж. Дж. Томсона. В кратком предисловии к книге Т. Гнединой «Открытие Джи-Джи» [1] есть такое повествование.

«Итак, перенесемся в "тихий" девятнадцатый век, когда в увитом дикой розой старинном кирпичном доме, в лаборатории, запыленной еще со времен Максвелла, было проведено исследование, перевернувшее в научном мире все.... Прислушаемся к неторопливому старческому голосу, легко начинающему рассказ о своей жизни.

"...Я родился в Четеме, пригороде Манчестера, 18 декабря 1856 года. И время, и место были весьма удачны, ибо это был один из самых интересных периодов мировой истории. Монархии падали одна за другой, их сменяли республики, а иной раз – диктатуры. Открытия и изобретения производили все большие изменения в жизни общества.

Когда я был маленьким мальчиком, в нашем городе не было ни велосипедов, ни автомобилей, ни аэропланов, ни электрического освещения, ни телефонов, ни радио, ни граммофона, ни электротехники, ни рентгеновских снимков, ни микробов – по крайней мере, доктора их не находили..."»

О Джозефе Джоне Томсоне можно рассказывать много и по-разному: он знал великих ученых своего времени, дружил с художниками, спортсменами, политическими деятелями, деловыми людьми, был страстным футбольным болельщиком и неплохим нападающим, играл в гольф, лапту, крокет, совершал межконтинентальные путешествия, увлекался ботаникой, любил бывать в обществе, охотно позировал художникам, писавшим его портреты.

Но больше всего он любил науку.

Результаты первых экспериментов Томсона были опубликованы в 1897 году в журнале «Philosophical Magazine and Journal of Science». Они подтвердили предположение, что катодные лучи несут отрицательный заряд. Томсон начинает обращаться с катодными лучами так, как будто уже знает, что они состоят из совокупности

*Начало см. в журнале «Известия вузов. ПНД», 2007, т. 15, № 1, с. 103.

заряженных частиц, обладающих кинетической энергией $mv^2/2$ и электрическим зарядом e. Он собирается измерить отношение e/m и предлагает для этого ряд методов, реализацию которых можно увидеть и в современных учебных университетских лабораториях по физической электронике. Впоследствии вместе с Вильсоном и Таунсеном Томсон нашел метод непосредственного измерения заряда электрона. Участвовал в работе и Резерфорд.

В конечном счете Томсон, возвращаясь к катодным лучам, сделал следующий вывод.

«Создание отрицательного электричества связано с расщеплением атома. В настоящее время мы еще не располагаем данными о том, какова физическая природа массы этих отрицательных частиц: обусловлена ли она целиком электрическим зарядом». И далее.

«Я представляю себе атом, состоящий из большого числа малых частиц, которые я буду называть корпускулами. Масса этих корпускул равна массе отрицательного иона в газе, то есть $3 \cdot 10^{-26}$ грамма. В нормальном атоме этот ансамбль корпускул образует электрически нейтральную систему...»

Так появилась модель атома Томсона, в которой отрицательные частицы нейтрализуются равномерно распределенным положительным зарядом («пудинг с изюмом»).

Когда Томсон начал публиковать результаты своих открытий, второму герою нашего созвездия «электронных» дат Ирвингу Ленгмюру (иногда пишут Лангмюр) исполнилось шестнадцать лет, а когда появилась модель атома Томсона, Ленгмюр окончил университет.

Ирвинг Ленгмюр – 125 лет со дня рождения. Ирвинг Ленгмюр родился 31 января 1881 года в аристократическом Бруклине. Отец Ирвинга то терял, то наживал скромные состояния и жил постоянным ожиданием богатства. Сначала Ирвинг учился в местной начальной школе, но, когда ему исполнилось одиннадцать лет, семья переехала в Париж, поближе к старшему сыну, который собирался в Германии изучать химию. Ирвинг начал учиться в небольшом пансионе на окраине Парижа, где один из учителей стал поощрять его самостоятельные занятия по изучению логарифмов и тригонометрии.

В книге Митчела Уилсона [2] есть любопытный эпизод, связанный с этим периодом жизни Ирвинга.

---

1. И. Ленгмюр показывает Уитни одно из своих изобретений – плиотрон, 1920 год.

2. И. Ленгмюр дома, 1906 год.

3. И. Ленгмюр, 1930-е годы.

4. И. Ленгмюр, Дж.Дж. Томсон и Кулидж во время посещения Томсоном Лаборатории электрических исследований в Schenectady, Нью Йорк.

5. И. Ленгмюр, В. Шефер и К.Блоджет в лаборатории.

6. Дружеский шарж на метеорологические исследования Ирвинга Ленгмюра и Гилберта Ньютона Льюиса, 1930-е годы.

7. И. Ленгмюр, Б. Воннегут и В. Шеффер в лаборатории общих электрических исследований, Соккоро, Нью Мехико, 1940-е годы.

фото

«В огромной толпе парижан, вышедшей проводить похоронный кортеж великого ученого Пастера, стоял юный американский школьник.

Безмолвная скорбь стотысячной толпы, оплакивающей смерть своего кумира, стала одним из самых памятных и волнующих впечатлений его жизни и укрепила в мальчике стремление стать ученым».

Ирвинг-мальчик с удивительной энергией отдавался любому интересующему его делу. Он расспрашивал своего любимого старшего брата о химии, младшему рассказывал все, что узнал об электричестве, и все время узнавал что-то новое.

Семья Ленгмюров вернулась в Штаты после получения старшим сыном Артуром степени доктора. Ирвинг стал учиться в Академии Честнат Хилл в Филадельфии. И поистине, «он знал одной лишь думы власть, одну, но пламенную страсть» – страсть к науке. Так, за шесть недель он самостоятельно изучил дифференциальное и интегральное исчисления. В четырнадцать лет поступил в институт Пратта в Бруклине, а в семнадцать стал студентом Колумбийской горной школы, где изучал технику. Наконец, в 1906 году в Геттингене Ленгмюр получил диплом доктора физики, после чего институт Стивенса в Хобокене пригласил его преподавать химию, что он и делал почти три года. К концу третьего года работы в институте Стивенса Ленгмюр вместо обычного отдыха в горах решил провести летнее время в Скенектеди в новых лабораториях фирмы «Дженерал электрик». И остался там до конца своей научной карьеры. К этому времени «Дженерал электрик» была одной из крупнейших американских корпораций, и ее директора приняли решение, что компания не может дольше использовать только знания XIX века, а должна вносить вклад в фундаментальные знания. Для создания нового типа лабораторий был приглашен профессор Массачусетского технологического института Виллис Р. Уитни, который предложил Ленгмюру ознакомиться с лабораториями и с тем, что там исследуют, после чего выбрать себе «тему по душе». Впоследствии Ленгмюр писал: «Когда я стал работать в лаборатории, я обнаружил, что там гораздо больше "академической свободы", нежели в любом университете».

Приведем большую цитату из упоминавшейся выше книги Митчела Уилсона.

«В то время как Ленгмюр изучал лаборатории, Уитни изучал Ленгмюра. Уитни приглядывался к нему в течение лета и понял, что нашел в Ленгмюре редкое сочетание проницательности и догадки, педантичности и воображения. Исследование казавшейся незначительной темы, которую выбрал Лангмюр в то лето, открыло впоследствии пути во многих направлениях. Оно повлекло за собой:

1) значительное усовершенствование обычной электрической лампочки;

2) совершенствование триодов, которые изобрел де Форест;

3) развитие теории элементов в химических соединениях;

4) развитие учения об особом двухмерном мире плоскости и его применение в химии, физике и биологии;

5) объяснение замечательного явления катализа;

6) такие метеорологические опыты, как воздействие на тучи, вызывающее дождь.

В течение своей долгой карьеры Ленгмюр никогда не брался специально за исследования, преследуя прямую практическую цель. Все эти полезные результаты были просто побочными продуктами изучения основных загадок природы. Ленгмюра часто спрашивали, почему он начал то или иное исследование, и он неизменно отвечал: "Меня это забавляет".

Двумя столетиями раньше Горэс Уолпол назвал "искусство использовать неожиданные случайности – serendipity".

Талант Ленгмюра в этом искусстве целых пятьдесят лет давал ему немало возможностей "позабавиться", принес ему почетные дипломы, медали и Нобелевскую премию. Ленгмюр же открыл миру больше увлекательных подступов к новым областям знаний, чем любой другой из его современников – американцев».

Его первые исследования в «Дженерал электрик» были связаны с изучением вольфрамовых нитей для лампочек, которые давали более яркий свет, чем нити из других металлов, но были негибкими и ломкими. Первая идея Ленгмюра заключалась в том, что неприятности с вольфрамовой нитью связаны с чрезмерным количеством газа в металле, остающемся при его изготовлении. Но идея оказалась неверной. По этому поводу Ленгмюр писал следующее (цит. по [2]).

«В то лето я узнал, что стеклянные поверхности, которые предварительно не подвергались длительному прогреванию в вакууме, медленно выделяют водяной пар. Он вступает в реакцию с вольфрамом и выделяет водород.

Среди инженеров-электриков существовало мнение, что если бы можно было повысить вакуум в лампе, лампа стала бы работать значительно лучше... Однако я не знал, как добиться большего разрежения, и вместо этого предложил изучить отрицательное действие газов, наполняя газами лампу. Я надеялся, что таким образом настолько хорошо изучу воздействие газа, что смогу экстраполировать до нулевого давления газа и тем самым предсказать, не ставя на самом деле эксперимента, насколько улучшится работа лампы при идеальном вакууме».

Три года работы, и Ленгмюр устанавливает, что эмиссия электронов из вольфрамовой нити зависит только от ее температуры и не зависит от количества газа в лампе. Он идет на разрушение установившихся представлений и наполняет лампу азотом; это приводит к тому, что она горит ярче и становится прочнее всех предыдущих ламп. Результатом этих же исследований является вывод, что триоды де Фореста будут иметь высокую чувствительность при высоком вакууме. Чтобы достичь нужной степени вакуума, Ленгмюр изобретает вакуумный насос, в 100 раз более мощный, чем существовавшие.

Исследования Ленгмюра физики электрических разрядов в газах и термоионной эмиссии были использованы при конструировании различных электронных приборов, в частности, он построил газотронный выпрямитель. В 1911 году Ленгмюр получил атомарный водород и предложил процесс сварки металлов в водородном пламени. В 1913 году установил закон термоионной эмиссии (закон Богуславского–Ленгмюра–Чайльда). Напомним этот закон на примере плоского диода, используя анализ размерностей и ограничиваясь нерелятивистским приближением.

В рамках гидродинамического подхода (модель электронной жидкости для электронного потока) в число определяющих величин войдут j – плотность анодного тока, e/m – удельный заряд электрона, V_{a} – анодное напряжение, D – расстояние между катодом и анодом, $\sqrt{\overline{v^2}}$ – корень квадратный из среднеквадратичного значения тепловой скорости. В системе LMT матрица размерности имеет вид:

$$\begin{array}{cccccc} & e/m & V_{\text{a}} & D & \sqrt{\overline{v^2}} & j \\ L & 3/2 & 1/2 & 1 & 1 & -1/2 \\ M & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ T & -1 & -1 & 0 & -1 & -2 \end{array}.$$

Перейдем к новым основным единицам e/m, D, $V_{\rm a}$, размерности которых, как легко видеть, являются независимыми, и, следовательно, из пяти определяющих величин можно составить две безразмерные комбинации – критерии подобия.

Заметим, что выбранные нами новые единицы определяют характерные масштабы задачи: D – характерный масштаб длины; $\sqrt{2\dfrac{e}{m}V_{\rm a}}$ – характерный масштаб скорости.

Находим далее

$$\frac{[j]}{[\frac{e}{m}]^{\alpha}[V_{\rm a}]^{\beta}[D]^{\gamma}} \quad \to \quad \frac{L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}}{L^{\frac{3}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta+\gamma}M^{-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta}T^{-\alpha-\beta}} = 1,$$

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}\alpha + \dfrac{1}{2}\beta + \gamma \\ \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}\alpha + \dfrac{1}{2}\beta \\ -2 = -\alpha - \beta \end{array}\right\} \to \begin{array}{r} \alpha = \dfrac{1}{2} \\ \beta = \dfrac{3}{2} \\ \gamma = -2 \end{array} \to \prod_j = \frac{jD^2}{\left(\dfrac{e}{m}\right)^{\frac{1}{2}} V_{\rm a}^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\sqrt{\overline{v^2}}}{[\frac{e}{m}]^{\alpha_1}[V_{\rm a}]^{\beta_1}[D]^{\gamma_1}} \to \left.\begin{array}{l} 2 = 3\alpha_1 + \beta_1 + 2\gamma_1 \\ 0 = -\alpha_1 + \beta_1 \\ 1 = \alpha_1 + \beta_1 \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} \alpha_1 = \dfrac{1}{2} \\ \beta_1 = \dfrac{1}{2} \\ \gamma_1 = 0 \end{array} \to \prod_{\sqrt{\overline{v^2}}} = \frac{\sqrt{\overline{v^2}}}{\left(\dfrac{e}{m}V_{\rm a}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Используя $\prod$-теорему в виде

$$\prod_{r+k} = f(1,1,...1;\prod_{r+1},... \prod_{r+k-1}, \prod_{r+k+1},...\prod_{n}),$$

где r – число определяющих величин с независимыми размерностями, находим

$$j = \frac{\left(\dfrac{e}{m}\right)^{\frac{1}{2}} V_{\rm a}^{\frac{3}{2}}}{D^2} f\left(\frac{\sqrt{\overline{v^2}}}{\left(\dfrac{e}{m}V_{\rm a}\right)^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Очевидно, что при $\sqrt{\overline{v^2}} = 0$ получаем знаменитый закон трех вторых, поскольку $f = C_0$. Если $\dfrac{\sqrt{\overline{v^2}}}{(\frac{e}{m}V_{\rm a})^{\frac{1}{2}}} << 1$, то

$$j = \frac{\left(\dfrac{e}{m}\right)^{\frac{1}{2}} V_{\rm a}^{\frac{3}{2}}}{D^2}\left\{C_0 + C_1\frac{\sqrt{\overline{v^2}}}{(\frac{e}{m}V_{\rm a})^{\frac{1}{2}}}\right\}.$$

Последнюю формулу можно уточнить, введя в число определяющих величин $(V_{\rm a} - V_{\rm m})$ вместо $V_{\rm a}$ и $(D - x_{\rm m})$ вместо D, где $V_{\rm m} < 0$ – значение потенциала в потенциальном минимуме при $x = x_{\rm m}$. Тогда получим формулу

$$j = \frac{\left(\frac{e}{m}\right)^{\frac{1}{2}} (V_{\mathrm{a}} - V_{\mathrm{m}})^{\frac{3}{2}}}{(D - x_{\mathrm{m}})^2} f \left\{ \frac{\sqrt{\overline{v^2}}}{\sqrt{\frac{e}{m}(V_{\mathrm{a}} - V_{\mathrm{m}})}} \right\},$$

в которой x_{m} зависит от тока эмиссии.

С открытием закона 3/2 связано и имя русского физика-теоретика Сергея Анатольевича Богуславского (1883–1923). Он родился в Москве, учился во Фрейбургском и Геттингенском университетах, в 1915–1916 годах сдал магистерские экзамены в Петербургском университете. В 1918–1921 годах преподавал в Саратовском университете, заведуя кабинетом теоретической физики. С 1921 года работал в Московском университете. Его научные работы посвящены статистической теории кристаллов, гидродинамике, молекулярной физике, термодинамике, исследованию движения зарядов в электромагнитных полях.

В замечательной книге В.Д. Зернова* «Записки русского интеллигента» [3] есть описание появления Богуславского в Саратове.

«Когда мы жили в институте, в Саратове появился Сергей Анатольевич Богуславский, которого я пригласил на кафедру теоретической физики, он же читал вначале и теоретическую механику. Для Саратовского университета это было большое приобретение. Сергей Анатольевич был человеком с заграничным образованием. Он докторировался в Геттингене и, возвратясь в Россию, уже во время войны защитил магистерскую диссертацию. Так как Богуславский долгое время жил за границей, то и вид у него был европейский. Мы уже ходили в валенках и "бурках" – обуви, сшитой из старой солдатской шинели, а летом на даче – так даже в лаптях. Сергей Анатольевич же в отличие от нас был одет в отлично сшитый заграничный костюм и лаковые туфли.

Утром мы сидели в моем институтском кабинете и пили чай (вернее – отвар какой-то из листьев) с вареной картошкой. Вдруг отворяется дверь и входит интересный, полуседой человек. Он, как-то немного театрально "расшаркавшись", представился: "Я Богуславский". Я был очень ему рад. И для факультета он был необходим, и мне понравились его вид и его европейские повадки.

Вначале Сергей Анатольевич появился в Саратове совершенно один, и о нем приходилось заботиться: к практической жизни, в особенности в наступивших революционных условиях, он был мало приспособлен. Потом в Саратов переехала мать Богуславского, а еще позднее и его сестра Елена Анатольевна...»

Я умышленно привел эту цитату, чтобы было понятно, в каких неравных условиях работали Ленгмюр и Богуславский. Неслучайно, видимо, Богуславский прожил такую короткую жизнь.

Заметим, что вклад в закон каждого из трех авторов распределяется следующим образом.

Чайльд [4] для бесконечно протяженных плоских электродов без учета начальных скоростей электронов получил формулу

$$j = \frac{\sqrt{2}}{9\pi} \frac{(e/m)^{\frac{1}{2}} V_{\mathrm{a}}^{\frac{3}{2}}}{D^2},$$

то есть в нашей формуле $C_0 = \sqrt{2}/(9\pi)$ и $C_1 = 0$.

*Владимир Дмитриевич Зернов (1878–1946), доктор физико-математических наук, один из семи первых профессоров – учредителей Саратовского университета, его ректор с 1918 по 1921 год.

Ленгмюр [5] для модели бесконечно длинных коаксиальных цилиндрических электродов (внутренний цилиндр – катод) для тока с единицы длины цилиндра нашел выражение

$$j = \frac{2\sqrt{2}}{9}\left(\frac{e}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{V_{\text{a}}^{\frac{3}{2}}}{r\beta^2},$$

где β – табулированная функция отношения r к r_0, r и r_0 – радиусы внешнего и внутреннего цилиндров.

Богуславский впервые точно вычислил значения β (см. [6]; статья была опубликована уже после его смерти).

Влияние начальных скоростей на распределение потенциала между электродами и на вольт-амперную характеристику диода исследовали Шотки (1914), Бурсиан (1919) и Ленгмюр (1923). Основной результат этих исследований – появление феномена виртуального катода.

В 1929 году Ленгмюр и Леви Тонкс назвали плазмой ионизованный газ в газоразрядной трубке. Заметим, что словом плазма (греч. – оформленное) в середине XIX века стали именовать бесцветную часть крови (без красных и белых телец) и жидкость, наполняющую живые клетки.

Ленгмюру принадлежит следующее определение плазмы (цитируется по книге Л.А. Арцимовича [7]). *Собрание свободно движущихся разноименно заряженных частиц, то есть ионизованный газ, называется плазмой, если дебаевская длина мала по сравнению с размерами объема, занимаемого газом.*

Напомним с помощью простых оценок, что такое радиус Дебая и плазменная (ленгмюровская) частота. В общем случае плазму можно рассматривать как смесь трех компонентов – свободных электронов, положительных ионов и нейтральных атомов и молекул. Квазинейтральность плазмы, то есть приблизительное равенство плотностей электронов и ионов определяется электрическими силами, которые связывают отрицательные и положительные заряды в плазме. При смещении группы электронов относительно ионов, то есть при разделении зарядов возникают электрические поля, стремящиеся восстановить квазинейтральность.

Пусть в некотором объеме после возмущения остались заряды одного знака, что соответствует полному разделению зарядов. Если объемная плотность заряда $\rho = ne$, где n – концентрация частиц, e – заряд частицы, то поле в выделенной области удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div}\overrightarrow{E} = 4\pi\rho.$$

Тогда для области с линейными размерами порядка x имеем $\operatorname{div}\overrightarrow{E} \sim \dfrac{E}{x} = 4\pi ne$ и $E \sim 4\pi nex$, что соответствует изменению потенциала плазмы в области разделения зарядов на величину $V \sim 4\pi nex^2$.

Л.А. Арцимович приводит следующий цифровой пример для полностью ионизованной водородной плазмы. Водород первоначально находился при нормальной температуре и давлении 1 мм рт. ст. В 1 см^3 такой плазмы будет $7\cdot 10^{16}$ ионов и электронов. Поэтому, если резкое нарушение квазинейтральности происходит в объеме диаметром порядка 1 мм, то электрическое поле превзойдет 10^{10} В·см$^{-1}$ и в пределах этого объема возникнет разность потенциалов порядка 10^9 В. Ясно, что разделение зарядов в такой ситуации нереально.

Таким образом, если разность потенциалов V велика, то разделения зарядов не будет: сильное поле вытолкнет из объема, где нарушена квазинейтральность, частицы с зарядом одного знака и втянет частицы другого знака. Что будет, если выделенный в плазме объем настолько мал, что поле, созданное избытком в нем частиц одного знака, слабо и не может существенно изменить движение частиц? В таком объёме, для которого $x << r_D$ (r_D – характерный линейный размер), при заданных концентрации и температуре плазмы возможно нарушение квазинейтральности; если же $x >> r_D$, то концентрации частиц противоположных знаков в указанном объеме должны быть почти одинаковы. Оценим r_D.

Если в области с линейным размером r_D произошло полное разделение зарядов, то потенциальная энергия заряженной частицы имеет порядок тепловой энергии частиц, то есть $W = eV \sim 4\pi n e^2 r_D^2 \sim k_Б T$ ($k_Б$ – постоянная Больцмана, T – температура плазмы, которая принята одинаковой и для электронного и для ионного компонентов). Таким образом,

$$r_D = \left\{ \frac{k_Б T}{4\pi n e^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \sim \left(\frac{T}{n} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Эту величину, как известно, называют радиусом Дебая или радиусом экранирования (используется термин «дебаевская длина»). Почему радиус экранирования? Дело в том, что при введении в плазму пробного точечного заряда вокруг него образуется область сильного электрического поля, ограниченная сферой, радиус которой равен r_D. Таким образом, радиус Дебая – характерный пространственный масштаб областей декомпенсации плазмы.

Время t, в течение которого сохраняются области декомпенсации, пропорционально r_D/v_e, где скорость v_e электронов (наиболее быстрых частиц) определяется из соотношения

$$\frac{m_e v_e^2}{2} \sim k_Б T,$$

где m_e – нерелятивистская масса электрона, и $v_e \sim \{k_Б T/m_e\}^{\frac{1}{2}}$. Тогда характерный временной масштаб декомпенсации

$$t \sim \frac{\left\{k_Б T/(4\pi n e^2)\right\}^{\frac{1}{2}}}{\{k_Б T/m_e\}^{\frac{1}{2}}} \sim \left[\frac{m_e}{4\pi n e^2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Замечательно, что это время от температуры уже не зависит. Соответствующая этому времени частота

$$\omega_p = \left(\frac{4\pi n e^2}{m_e} \right)^{\frac{1}{2}}$$

называется плазменной или ленгмюровской частотой.

Пусть в некотором тонком плоском слое плазмы создается избыток электронов. Ионы плазмы будем считать неподвижными. Из-за избытка заряда возникает возвращающая сила $F_{возвр} = eE_x$, обусловленная декомпенсацией зарядов. Величину E_x

мы уже оценивали: если электроны сместились на величину $\tilde{x}$, то $F_{\text{возвр}} \sim 4\pi n e^2 \tilde{x}$. Эта сила сообщает им ускорение

$$\ddot{\tilde{x}} = -\frac{4\pi n e^2}{m_{\text{е}}}\tilde{x},$$

то есть движение группы смещенных электронов описывается уравнением гармонических колебаний с плазменной частотой $\omega_{\text{р}}$

$$\ddot{\tilde{x}} + \omega_{\text{р}}^2 \tilde{x} = 0.$$

Такие колебания называются плазменными или ленгмюровскими колебаниями в «холодной» бесстолкновительной плазме.

Ленгмюровские колебания могут распространяться в плазме в виде волн с частотой ω, которая не зависит от длины волны, причем фазовая скорость этих волн $v_{\text{ф}} = \omega/\kappa$ (κ – волновое число) возрастает с увеличением длины волны. При больших значениях κ (малые длины волн) следует учесть влияние обычного звукового эффекта, связанного с изменением давления в плазме, то есть две упругих силы нужно сложить. Тогда

$$\frac{\omega^2}{\kappa^2} = \frac{4\pi n_{\text{е}} e^2}{m_{\text{е}}\kappa^2} + \frac{dp_{\text{е}}}{d\rho_{\text{е}}} \quad \text{и} \quad \omega^2 = \omega_{\text{р}}^2 + \kappa^2 \frac{dp_{\text{е}}}{d\rho_{\text{е}}},$$

где $n_{\text{е}}$, $p_{\text{е}}$, $\rho_{\text{е}}$ – концентрация, давление, плотность электронного газа; $\rho_{\text{е}} = n_{\text{е}} m_{\text{е}}$, $m_{\text{е}}$ – масса электрона. Именно в такой форме дисперсионное уравнение плазмы было получено Ленгмюром, который исходил из аналогии со звуковыми волнами и пользовался уравнениями гидродинамики.

Ленгмюр при вычислении $dp_{\text{е}}/d\rho_{\text{е}}$ для адиабатического сжатия положил $\gamma = 5/3$ в уравнении состояния $p_{\text{е}}/n_{\text{е}}^{\gamma} = \text{const}$, считая электронный газ одноатомным, что справедливо, если в процессе колебаний все время успевает устанавливаться равнораспределение тепловой энергии между тремя степенями свободы поступательного движения. Однако в любой плазме равнораспределение не устанавливается, поскольку за один период колебаний $2\pi/\omega$ электроны не испытывают столкновений. На основе теории кинетического уравнения А.А. Власов показал, что $\gamma = 3$, то есть $dp_{\text{е}}/d\rho_{\text{е}} = 3k_{\text{Б}}T_{\text{е}}/m_{\text{е}}$. Уравнение $p_{\text{е}} \sim n_{\text{е}}^3$ – уравнение состояния газа в случае одномерного адиабатического сжатия и может быть получено из термодинамики. С учетом сказанного выше окончательно имеем

$$\omega^2 = \omega_{\text{р}}^2 + \frac{3k_{\text{Б}}T_{\text{е}}}{m_{\text{е}}}\kappa^2,$$

но

$$\frac{k_{\text{Б}}T_{\text{е}}}{(4\pi n_{\text{е}}\dfrac{e^2}{m_{\text{е}}})m_{\text{е}}} = r_D^2 = \frac{k_{\text{Б}}T_{\text{е}}}{\omega_{\text{р}}^2 m_{\text{е}}},$$

поэтому

$$\omega^2 = \omega_{\text{р}}^2[1 + 3\kappa^2 r_D^2].$$

Это дисперсионное уравнение справедливо только для длинноволновых возмущений, когда $\kappa r_D << 1$ или $r_D << \lambda$. Электроны смещаются за период $2\pi/\omega$ на расстояние, меньшее, чем длина волны; сжатие должно быть адиабатическим.

И здесь можно отметить еще одну дату.

60 лет назад Л.Д. Ландау обнаружил, что даже в отсутствие столкновений (то есть сил трения) электронные колебания затухают. Этот эффект известен как «затухание Ландау» [8]. Если скорость электронов меньше фазовой скорости волны, но близка к ней, то электроны забирают энергию у волны и колебания затухают. Чем больше будет таких резонансных частиц, тем больше будет затухание. Если функция распределения для плазмы монотонно спадает со скоростью (например, при максвелловском распределении), то электронов, отстающих от волны (отбирающих энергию), будет больше, чем обгоняющих (отдающих энергию). Своеобразным аналогом этого эффекта в сверхвысокочастотной электронике является условие полного подавления сигнала в лампе бегущей волны (Kompfner dip condition).

Для физики плазмы есть еще одна знаменательная дата.

50 лет назад в 1956 году И.В. Курчатов сделал в Харуэлле доклад о термоядерных исследованиях в СССР.

Но вернемся к творчеству Ленгмюра.

В любом учебнике по электрическим явлениям в газах и вакууме излагается метод Ленгмюра (см., например, [9]) – метод зондовых вольт-амперных характеристик, который позволяет определять концентрацию и энергию носителей заряда в плазме, а также потенциал плазмы относительно некоторого электрода (опорного). Потенциал этого электрода не меняется в процессе измерений. Напомним, что под электрическим зондом понимают электрод, который вводится в жидкие газообразные среды, а также в вакуум для определения характеристик электрического поля, заряда и тока в различных точках пространства.

Переход к исследованию явлений на поверхности произошел у Ленгмюра фактически случайно. Взятая им нить, изготовленная Кулиджем для каких-то особых целей, продемонстрировала большую эмиссию. Оказалось, что эта вольфрамовая нить была пропитана окисью тория. Дальнейшие исследования показали, что нить обладает наилучшими свойствами, если она покрыта мономолекулярным слоем окиси тория. Сам Ленгмюр писал по этому поводу следующее (цитируется по книге М.Уилсона).

«...Я наполнил баллон азотом, водородом и кислородом и разогрел нить накаливания до $3000°$С. Произошло нечто удивительное. Прежде всего, кислород образовал пленку на поверхности нити. Пленка эта была такой прочной, что могла бы выдержать даже нагревание до $1500°$С в течение нескольких лет... Я наткнулся еще на несколько подобных явлений. Я обнаружил, что мономолекулярный слой окиси тория на вольфраме может увеличить эмиссию электронов из вольфрамовой нити в вакууме в 100 тысяч раз».

Ленгмюр был уверен, что атомы и молекулы – реальные объекты, хотя в те годы это не было еще общепризнанным фактом, и сказал себе: «...Если это так, доведи эту мысль до конца».

Вот как описывает его эксперименты Митчел Уилсон.

«Ленгмюр наблюдал за поведением нерастворимых веществ на поверхности жидкости. То были обыкновенные пленки смазочного масла, плавающие в тазу с водой, но Ленгмюр сумел претворить свои наблюдения в проницательные выводы относительно размеров и формы молекул и их химии.

Капля маслянистого вещества, помещенная на поверхности жидкости, может вести себя двояко: сохраниться как компактный шарик или разлиться по поверхности в тонкую пленку. Идею о том, что такая пленка будет распространяться по поверхности жидкости, пока не достигнет толщины в одну молекулу, впервые высказал Ленгмюр (об этом ду-

мал еще Франклин. – *Д.И.Т.*). Сила сцепления молекул не позволит пленке растекаться дальше этого предела.

Прибором ему служил таз с водой. На поверхности воды плавал легкий стержень. Когда образовывалась маслянистая пленка, Ленгмюр перемещал стержень боком, сжимая пленку. Динамометр – прибор для измерения силы – показывал ему, какая сила требовалась, чтобы сжать пленку. Даже самое ничтожное усилие можно было измерить. При перемещении стерженька Ленгмюр обнаружил, что до определенного предела площадь маслянистой пленки уменьшается почти без приложения силы. Однако при сокращении площади наступал момент, когда пленка оказывала существенное сопротивление. Динамометр регистрировал резкое возрастание прикладываемой силы».

Ленгмюр начинал опыты с органических кислот, имеющих длинные углеводородные молекулы, которые представляли собой цепи, содержащие от 14 до 34 атомов углерода в каждой. Он следующим образом описывает свои эксперименты (цитируется по М. Уилсону).

«Я думаю о молекулах на воде, как о реальных предметах. Видите ли, в тот момент, когда вы пытаетесь представить их себе, как представляет химик-органик, вы думаете о них, как о чем-то, имеющем форму, длину, объем. Не следует рассматривать эти углеводородные цепи, как твердые негнущиеся цепочки. Их надо представлять себе, как куски обычной железной якорной цепи... Молекула... может принимать различные формы, в которых атомы углерода всегда расположенны в одну линию. Поэтому, когда вы сжимаете пленку... цепи приобретают вертикальное положение.

Тогда молекулы займут минимальную площадь; и когда молекулы сжаты вместе и растянуты до максимальной длины, измерение этой площади дает возможность высчитать их поперечное сечение.

Что же происходит затем? Ну, прежде всего, когда вы увеличиваете длину цепи, покрывая воду пленкой, составленной из молекул, имеющих более длинную углеводородную цепь, это не изменяет площади пленки, но изменяет ее толщину. Объем, поделенный на площадь, равен толщине, так что можно высчитать толщину».

Но толщина пленки в этом случае равна длине одной молекулы, поэтому, по Ленгмюру, «общая площадь, поделенная на количество молекул, равна площади, занимаемой каждой молекулой».

Начав подобные измерения в 1917 году, Ленгмюр определил размеры многих молекул и получил сведения о расположении молекул в сложных молекулах белка. Чтобы нагляднее проиллюстрировать логику Ленгмюра, решим на уровне оценок следующую бытовую задачу (конечно, это лишь некая логическая аналогия). *Наливая в стакан молоко, вы пролили часть на клеенку и обнаружили, что под слоем молока еле заметен рисунок клеенки. Полагая, что молоко представляет собой взвесь маленьких шариков жира в воде, оцените размер этих шариков.* Пусть шарики жира в молоке имеют одинаковые размеры, распределены равномерно по объему жидкости, а их количество можно определить, вспомнив, что жирность молока бывает от 1 до 6%. Предположим, что она равна 3%. Поскольку плотность жира не очень сильно отличается от плотности воды, будем считать, что жир составляет 3% от общего объема. Пусть радиус шарика r, а толщина слоя пролитого молока h. Число шариков N, которое содержится в лужице молока площадью S, легко найти из очевидного соотношения

$$\frac{4}{3}\pi r^3 N = 0.03Sh.$$

Своим поперечным сечением шарики полностью перекрывают площадь лужицы. Но они распределены хаотически и поэтому частично перекрываются между собой.

Чтобы учесть это, возьмем удвоенную площадь лужицы, что, впрочем, не сильно изменит результат. Тогда

$$\pi r^2 N = 2S.$$

Поделив первое соотношение на второе, получим

$$r \approx 0.01h.$$

Из опыта известно, что $h \sim 1...2$ мм (хотя можно сделать оценку, используя известные значения коэффициента поверхностного натяжения). Окончательно имеем: $r \sim 0.01...0.02$ мм.

В 1916 году Ленгмюр вывел простейшее уравнение изотермы мономолекулярной адсорбции (уравнение Ленгмюра). Известно также уравнение Ленгмюра – Саха, устанавливающее зависимость степени поверхностной ионизации от температуры поверхности металла, его работы выхода и потенциала ионизации ионизующихся атомов.

Ирвинг Ленгмюр в 1932 году был удостоен Нобелевской премии по химии «за открытия и исследования по химии поверхностных явлений».

На языке сегодняшнего дня Ленгмюр занимался нанотехнологиями. Правда, в его время такого термина не было; он появился в новейшей истории. В 1959 году Ричард Фейнман прочитал лекцию с интригующим названием «Внизу полным-полно места: приглашение войти в новый мир физики, в мир миниатюризации» [10]. В ней он рассказал о фантастических перспективах, которые могут появиться при изготовлении материалов и устройств на атомном или молекулярном уровне. Японский физик Н. Танигучи в 1974 году впервые употребил термин «нанотехнология», предсказав, что к 2000 году точность обработки материалов перейдет в нанометровый диапазон.

Одна из задач нанотехнологий – создание слоя прогнозируемой структуры. Так вот, одной из привлекательных технологий для решения подобных задач оказался метод, который описан выше, метод, созданный И. Ленгмюром и его ученицей К. Блоджетт. Он долгое время был не востребован, и к нему вернулись только после второй мировой войны. В последующие годы поток исследований по пленкам Ленгмюра – Блоджетт возрастал лавинообразно. Достаточно сказать, что стал выходить специальный журнал «Langmuir». Есть ли еще примеры, когда сделанное ученым оценивается столь высоко?!

В 1919 году Ленгмюр предложил модель атома – усовершенствованную модель Бора – Резерфорда, которая объясняла активность и инертность элементов и удовлетворяла потребностям химиков. Ему принадлежит также теория химической валентности (теория Льюиса – Ленгмюра).

Ленгмюр был страстным альпинистом, что вызвало у него интерес к структуре облаков и к задаче создания искусственного снегопада и дождя из охлажденных облаков. Он провел ряд экспериментов, вводя различные кристаллы в переохлажденный воздух, считая, что кристалл может стать ядром для цепной реакции конденсации.

Глобальный эксперимент в этом направлении М. Уилсон описывает так.

«21 июля 1949 года Армейский корпус связи и Управление морских исследований в Нью-Мексико предоставили Ленгмюру и его персоналу возможность провести испытания.

В пять тридцать утра наземный генератор Ленгмюра начал испускать йодизированный дым. Через три часа можно было видеть большое облако, сгущавшееся над генератором. В 9 часов 57 минут экраны радара отметили дождевые капли в туче. Вскоре после этого сверкнула молния, загрохотал гром, и полился обильный дождь, шедший на большом пространстве в течение нескольких часов. Последующие испытания не были столь эффективными, может быть потому, что от них ждали слишком многого».

Умер Ленгмюр 6 августа 1957 года.

Ли де Форест, триод и ламповый генератор. 100 лет назад, в 1906 году Ли де Форест изобрел триод. Будущий великий изобретатель родился 26 августа 1873 года в семье Мэри и Генри Свифта де Форестов. Отец его окончил Йельский университет и Эндоверскую духовную семинарию и был священником в городе Каунсил Блафс штата Айова. Через шесть лет доктор де Форест был назначен на пост директора школы Американской миссионерской ассоциации, «открытой для всех лиц обоего пола независимо от национальности, расы или цвета кожи» в городе Талладегу штата Алабама. Фактически это была школа для детей недавно освобожденных рабов, и Ли был в ней одним из немногих белых учеников.

Митчел Уилсон [2] так описывает Ли в этот период в главе с соответствующим названием – «Душевный пыл».

«Все окружавшее мальчика приводило его в восторг. Увидав доменную печь, он тут же изготовил ее модель из старого мусорного ведра. Воздушный компрессор он сделал из старинных кузнечных мехов, хранившихся в семье в память о каком-то предке. Стоило ему увидеть паровоз, как он стал мастерить свой собственный из старых ящиков, бочек из-под сахара и консервной банки вместо свистка. Ему казалось, что его паровоз великолепен. Он гонял мяч вместе с другими детьми, любил купаться в ручье, научился играть на кларнете, выписывал журнал «Спутник молодежи» и из напечатанных в нем объявлений узнал о тысяче разнообразных способах нажить капитал. В дождливые дни, расположившись на полу гостиной, он чертил сложные детали цилиндров и клапанов для огромных своих грез».

В Йельском университете для двух поколений семейства де Форестов (его окончили дед и отец Ли) существовала особая стипендия. В 16 лет Ли горячо желал стать студентом Шеффилдской научной школы, а не «семейного» факультета искусств Йельского университета. Доказательство тому – его письмо отцу; лично объясниться с родителем он не посмел. Далее письмо цитируется по книге М. Уилсона.

---

1. После защиты докторской диссертации, 1899 год.
2. 1902 год.
3. 1910-е годы.
4. Вакуумный триод Ли де Фореста.
5. Схема звукового генератора из патента 1915 года.
6. Мастерская Ли де Фореста, 1904 год.
7. Чикаго, 1944 год.
8. В рабочем кабинете, 1950-е годы.

фото

«Дорогой сэр, не соблаговолите ли Вы уделить мне внимание в течение нескольких минут и прочитать нижеследующее? Я хочу изложить свои намерения и цели. Я собираюсь стать... изобретателем, так как обладаю большими способностями в этой области... И поскольку это факт, зачем же препятствовать моим занятиям, имеющим целью подготовить меня к будущей профессии?

Я пишу эти строчки без злого намерения, а лишь уверовав в то, что настало время принять решение и выбрать учебное заведение в соответствии с ним.

Ваш послушный сын, Ли де Форест».

Пройдя через множество трудностей, Ли окончил университет в 1896 году и стал аспирантом великого Джозайи Уилларда Гиббса. По этому поводу Ли писал в дневнике: «Я должен заявить со всей страстностью, что решимостью сделать исследовательскую работу и изобретательство делом моей жизни я целиком обязан влиянию и вдохновению со стороны Уилларда Гиббса».

В 1899 году Ли де Форест защитил докторскую диссертацию, связанную с недавно отрытыми волнами Герца, после чего стал целиком отдавать себя делу, которое по-настоящему интересовало его, – беспроволочному телеграфу, получив в 1900 году место в лаборатории пионера беспроволочного телеграфа Джонсона.

Но жизненные трудности преследовали де Фореста, и только в 1907 году он организовал корпорацию под названием «Де Форест Радиотелефон Компани» с капиталом в 2 миллиона долларов. Казалось бы, дела пошли на лад, но... Вот что пишет об этом периоде жизни де Фореста М. Уилсон.

«Командование флота США тут же передало де Форесту заказ на двадцать семь радиоустановок для флотилии, которая отправлялась в кругосветное плавание.

В 1910 году де Форест провел первую в истории музыкальную радиопередачу из театра "Метрополитен Хауз", где давалась опера с участием Карузо. Тогда же он начал ежедневные музыкальные передачи, которые слушало все возрастающее число радиолюбителей.

В 1911 году правительство предприняло крестовый поход против распространителей акций радиокомпаний, и де Форест, лишившись новых источников средств, обанкротился. Чтобы компенсировать потери, де Форест вернулся к работе над изобретением, запатентованным им еще в 1906 году. Именно об этом изобретении много лет спустя лауреат Нобелевской премии И.И. Раби писал, что оно стоит в одном ряду с величайшими открытиями всех времен».

Речь идет о трехэлектродной лампе – триоде, которую де Форест назвал аудионом. Изобретение не было озарением, и путь к нему начался в 1900 году. В 1903 году де Форест сконструировал лампу с угольной нитью и платиновой пластинкой, которая была расположена вблизи нее. Де Форест предполагал присоединить пластинку к источнику высокого напряжения. Он думал, что радиоволны будут ионизировать газ в баллоне лампы; последнее привело бы к колебаниям внутреннего сопротивления лампы в соответствии с колебаниями радиосигнала. Для увеличения влияния радиоволн на газ де Форест обернул баллон лампы куском фольги, создав третий электрод, соединенный с антенной, на которую попадал радиосигнал. Он писал так о своих дальнейших действиях: «В этот момент я сообразил, что эффективность лампы может быть еще увеличена, если этот третий электрод поместить внутри... Очевидно, что этот третий электрод не должен быть сплошной пластиной... Чтобы упростить конструкцию, я решил изготовить третий электрод в форме решетки из простого куска проволоки,

изогнутого в различных направлениях, и поместить его как можно ближе к нити накаливания». Так в триоде появилась сетка, а сам он стал прототипом миллиардов радиоламп, изготовленных с тех пор. Конечно, первые «вакуумные» аудионы позднее (скажем, во времена Ленгмюра) назвали бы газонаполненными.

С 1906-м годом связаны еще две «электронные» даты. 1906 – год смерти Александра Степановича Попова, о котором написано очень много. На мой взгляд, лучшее – лекция М.А. Миллера «Об изобретении радио... и не только», прочитанная на открытии летней физматшколы в Зеленом городе 4 августа 1997 года (см. [11]).

В этом же году родился Габриэль Семенович Горелик (08.12.1906 – 27.06.1957) – крупный специалист в области физики колебаний, теории флуктуаций. Широкую известность получила его книга «Колебания и волны» (М.; Л., 1950).

Когда очередная компания де Фореста обанкротилась, он переехал в Сан-Франциско и стал заниматься усовершенствованием аудиона с целью добиться максимального усиления сигнала.

Дальнейшее развитие событий, как пишет Уилсон, выглядит так: «Осенью 1913 года "Телефон Компани" заплатила 50 тысяч долларов за право пользоваться аудионными усилителями для телефонной связи... Через год, в октябре 1914 года, "Вестерн Электрик" уплатила 90 тысяч долларов за право пользоваться аудионом для радиосвязи, а затем откупила у де Фореста все остальные права на аудион. Окончательно цена, уплаченная компанией "Вестерн Электрик", достигла четверти миллиона долларов».

После окончания войны в США начался всеобщий радиобум: все стали делать самодельные радиоприемники, магазины были завалены серийными радиоприемниками со шкалой настройки, начались развлекательные радиопередачи, пошли финансовые битвы и слияния компаний. Ли де Форест был больше не нужен гигантским компаниям, но чувство личной независимости не позволило ему довольствоваться положением инженера с месячным жалованием, и он начинает успешно заниматься звуковым кино, которое называет «фонофильм». Вскоре началась «кинолихорадка», но и здесь крупные компании обманывают де Фореста, безвозмездно пользуясь его новыми изобретениями. Личная жизнь де Фореста также складывалась не лучшим образом: он часто влюблялся, был дважды неудачно женат.

Когда данная статья уже была написана, в сети Интернет мы нашли дополнительную информацию еще об одном замечательном изобретении Ли де Фореста – генераторе с положительной обратной связью.

«Ли де Форест получил первый патент на генератор с положительной обратной связью в 1915 году. На рисунке (рис. 5 коллажа, стр. 105. – *Ред.*), воспроизводящем пояснения к патенту, показана схема взаимодействия лампового триода и колебательного контура с переключаемыми конденсаторами, катушкой индуктивности и блоком резисторов. Амплитуда колебаний управлялась с помощью выключателя, замыкающегося на один из резисторов, подсоединенных между сеткой и катодом лампового триода. Частота вибрации зависела от номиналов использованных в системе конденсаторов. В патентной документации де Форест указал, что, плавно изменяя емкость конденсатора колебательного контура, можно имитировать звук сирены... А в одной из статей, описывающих изобретение де Фореста, было напечатано следующее: "Высоту нот изменять чрезвычайно легко – путем изменения емкости или индуктивности в схеме. Практически, достаточно дотронуться пальцем до определенных деталей или просто приблизить кисть руки

к открытой схеме. Звуки, извлекаемые таким образом, кажутся сверхъестественными, они завораживают слушателя, увлекают его в совершенно фантастическое звуковое пространство." Эти комментарии предвосхищали появление "пространственно-управляемых" музыкальных инструментов Льва Термена.» (Лев Орлов. Основы синтеза звука. Часть 4. Журнал "Звукорежиссер", 1999, № 3).

Закончим рассказ об этом незаурядном человеке так, как заканчивает его Митчел Уилсон.

«К 1930 году Ли де Форесту было уже далеко за пятьдесят. Человек этот все еще сохранял свою независимость как память о давно ушедших днях. Он работал в своей собственной маленькой лаборатории в Калифорнии над новыми изобретениями, до поры не попавшими в поле зрения гигантских компаний – компаний, в большей степени обязанных своим появлением на свет де Форесту и его триоду.

Де Форест женился снова, и на этот раз счастливо. В течение следующих двадцати лет... де Форест сделал... более трехсот изобретений. Многие из них имели коммерческий успех, но ни одно даже не приблизилось по важности к чудесному триоду. Нельзя винить Ли де Фореста в этом, ибо изобретения, равные по значению созданию триода, случаются, от силы, два или три раза в столетие».

Как работает триод, все помнят со школы. Многие изучали его характеристики в университетских практикумах. В науке о колебаниях с триодом ассоциируется ламповый генератор – классическая автоколебательная система, исследование которой в первую очередь связано с именами ван дер Поля и Александра Александровича Андронова. В 2006 году исполнилось 105 лет со дня рождения Андронова. О его жизни, научно-педагогической деятельности рассказывается в книге В.Д. Горяченко [12].

Позволим себе некоторые напоминания об автоколебаниях* в генераторе, изображенном на рис. 1, *а*, где представлена схема генератора с RLC-контуром в цепи анода. Источником энергии служит батарея с постоянным напряжением. Батарея, которая обеспечивает постоянное отрицательное смещение потенциала на сетке, не показана. На рис. 1, *б* приведена зависимость анодного тока $I_{\text{а}}$ от напряжения U_g на сетке, которую ван дер Поль аппроксимировал кубическим полиномом. Здесь M – коэффициент взаимной индукции.

Как устанавливаются колебания в таком генераторе? Случайно возникшие в контуре малые колебания через катушку L' обратной связи, включенную в цепь сетки, управляют анодным током лампы. При определенном взаимном положении L и L' анодный ток усиливает колебания в контуре. Если потери в контуре меньше, чем вносимая в него таким образом энергия, амплитуда колебаний в контуре возрастает. С увеличением амплитуды колебаний вследствие нелинейной зависимости анодного тока от напряжения на сетке лампы (см. рис. 1, *б*) энергия, поступающая в контур, уменьшается и при некоторой амплитуде колебаний сравнивается с потерями. В результате устанавливается режим стационарных периодических колебаний, в котором все потери энергии компенсирует анодная батарея.

Роль нелинейности для установления автоколебаний принципиальна, поскольку она управляет поступлением и потерями энергии источника, в то время как ча-

*Будем придерживаться следующего определения автоколебаний. Автоколебания – это незатухающие колебания, поддерживаемые внешними источниками энергии в нелинейной диссипативной системе, вид и свойства которых определяются самой системой и не зависят от начальных условий (по крайней мере, в конечных пределах).

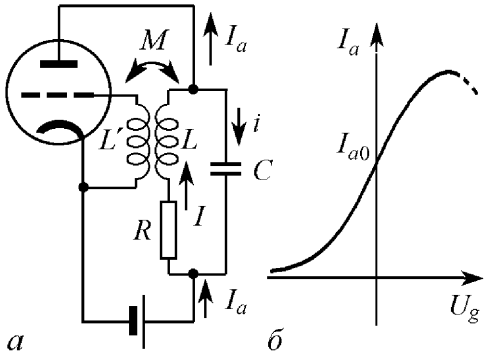


Рис. 1.

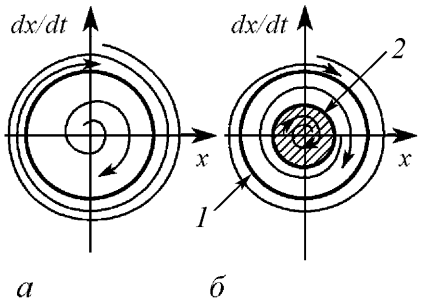


Рис. 2.

стотные характеристики источника принципиальной роли не играют. Амплитуда и частота автоколебаний определяются только параметрами системы и не зависят от начальных условий, причем фаза не существенна.

А.А. Андронов впервые связал автоколебания с предельными циклами Пуанкаре (1854–1912). *Предельный цикл – замкнутая фазовая траектория, к которой стремятся все соседние траектории.*

Рассмотренный выше качественно применительно к ламповому генератору режим возникновения автоколебаний, не требующий начального толчка, называется режимом «мягкого» возбуждения (см. фазовый портрет на рис. 2, *а*). Известно, что есть системы с «жестким» возбуждением, когда колебания самопроизвольно нарастают с некоторой начальной амплитуды. Для перехода систем с «жестким» возбуждением в режим стационарной генерации необходимо начальное возбуждение с амплитудой, большей некоторого критического значения (см. фазовый портрет на рис. 2, *б*). Из этого рисунка видно, что для выхода траектории на устойчивый предельный цикл начальная точка на фазовой плоскости должна лежать вне области притяжения устойчивого состояния равновесия. Размеры предельного цикла определяют амплитуду автоколебаний генератора, время движения изображающей точки по циклу – их период, а форма предельного цикла – форму колебаний. В конечном счете задача об исследовании периодических автоколебаний в системе сводится к задаче нахождения предельных циклов и определения их параметров.

Выше уже указывалось, что введение предельных циклов в теорию колебаний связано с именем Александра Александровича Андронова. С 1925 по 1929 год он был аспирантом Л.И. Мандельштама в Московском университете. Его диссертация носила название «Предельные циклы Пуанкаре и теория автоколебаний». Как пишет В.Д. Горяченко о работе А.А. Андронова над диссертацией, «начало работы, по рассказу Г.С. Горелика... было весьма скромным» [12]. И далее: «А.А. Андронов составил простейшие, идеализированные до предела математические модели динамики часов и лампового генератора. Он построил фазовые портреты этих систем, выяснил, что совокупность спиралей накручивается на замкнутую фазовую траекторию как изнутри, так и снаружи. Замкнутая кривая соответствует установившимся колебаниям (автоколебаниям), спирали – процессам установления. Несколько раньше (А.А. Андронов об этом знал) аналогичный фазовый портрет построил ван дер Поль при аппроксимации характеристики лампы кубической кривой».

Самое главное, что усмотрел Андронов: обнаруженные им и ван дер Полем

замкнутые фазовые кривые и предельные циклы, открытые Пуанкаре вне всякой связи с физикой, – одно и то же. До А.А. Андронова математики не подозревали, что предельные циклы «живут» в прикладных задачах, а физики и инженеры, занимающиеся исследованием колебаний, не знали, что уже существует математический аппарат, необходимый для общей теории колебательных процессов.

Удивительно, как в истории науки связываются имена, как сближаются, казалось бы, далекие даты.

В декабре 1881 года (сто двадцать пять лет тому назад) вышел в свет первый мемуар Пуанкаре «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями», в котором впервые появилось понятие предельного цикла, а в августе 1882 года – второй мемуар. Еще в докторской диссертации 1879 года и в одной из статей 1880 года Пуанкаре уделяет внимание особым точкам дифференциальных уравнений. Во всех перечисленных работах были заложены идеи и методы, составившие содержание нового раздела математики, которому Пуанкаре дал название «качественные методы теории дифференциальных уравнений».

Проанализировав множество особых точек различного рода, он приходит к выводу, что все они сводятся к четырем видам: центр, седло, фокус и узел. Не часто первая классификация чего-либо доходит до наших дней. Пуанкаре пишет: «Я изучил затем распределение этих особых точек в плоскости. Я показал при этом, что они всегда существуют (на конечном или бесконечном расстоянии) и что всегда выполняется простое соотношение между числом седел, фокусов и центров...» Стало ясно, что кривые, представляющие решения дифференциальных уравнений, либо замыкаются вокруг центра, либо неограниченными спиралями навиваются на фокус, либо удаляющаяся в одну сторону кривая упирается другим своим концом в узел, либо же кривая, исходящая из узла или фокуса, заканчивается в другом узле или фокусе. Но была и еще одна возможность, для реализации которой пришлось ввести новое понятие – предельный цикл. Определение было дано выше. В физической формулировке А.А. Андронова оно звучит так: *Предельный цикл есть геометрический образ, изображающий в фазовом пространстве периодическое движение автоколебательной системы; он представляет собой замкнутую кривую, к которой асимптотически приближаются соседние фазовые траектории.*

Пуанкаре доказал, что число предельных циклов всегда конечно, не считая некоторых исключительных случаев. Причем он разработал способы их обнаружения и дал общий метод для определения их количества.

Несколько слов о Пуанкаре – великом французском математике, физике, астрономе и философе. Нет области математики, которую он не обогатил бы результатами первостепенного значения. Он – создатель топологии, основоположник, наряду с А.М. Ляпуновым, качественной теории дифференциальных уравнений, о чем мы уже писали. В области физики работы Пуанкаре относятся к теории относительности, термодинамике, электричеству, оптике, теории упругости, молекулярной физике. Велик его вклад в небесную механику. Он построил первый вариант релятивистской теории гравитации.

В серии биографий «Жизнь замечательных людей» в 1979 году вышла интересная книга «Пуанкаре» [13], написанная доктором физико-математических наук А.А. Тяпкиным и кандидатом физико-математических наук А.С. Шибановым, в которой описан жизненный путь этого яркого и выдающегося представителя мировой науки.

Но вернемся к А.А. Андронову.

С 1929–30 гг. вполне можно говорить о школе Мандельштама–Андронова. А.А. Андронов сделал необычайно много для нелинейной физики, многое из сделанного осталось в науке навсегда, однако особое место занимает книга «Теория колебаний», написанная им вместе с А.А. Виттом и С.Э. Хайкиным [14] (впервые книга вышла в 1937 году; было еще два издания – в 1959 и 1981 годах). Ученик А.А. Андронова, профессор Н.В. Бутенин, писал по этому поводу: «Вряд ли можно переоценить значение этой книги в становлении нелинейной теории колебаний как в нашей стране, так и во всем мире. Ведь, в сущности, впервые появилась книга, где с ясной теоретической позиции излагались основы теории нелинейных колебаний как сложившейся науки; эта теория иллюстрировалась многочисленными примерами из различных областей физики и техники. Исследователи получили в руки мощное оружие для решения задач, возникающих при рассмотрении нелинейных динамических систем».

Чтобы понять масштаб личности А.А. Андронова, приведем следующие слова Г.С. Горелика: «Я лично не знал и не знаю ни одного человека, который бы отличался от моего идеала хорошего человека меньше, чем А.А. Андронов. Полное бескорыстие, абсолютное отсутствие лицемерия, мелкого «ученого» самолюбия, академического чванства, бесконечная готовность жертвовать своим спокойствием, если нужно помочь товарищу или просто человеку, деятельная доброжелательность ко всему живому и талантливому!..

Он обладал обширным умом и богатой, разносторонней культурой. В круг его непосредственных научных интересов входили: вся физика, математика, техника, астрономия. Его живейшим образом интересовало все естествознание, медицина, история, литература, живопись. Он был знатоком русской культуры. Речь А.А. Андронова была сильной, остроумной, неотразимой. Вместе с тем он был прост в обращении, отзывчив и чистосердечен. В нем не было эгоизма и неуверенного в себе мелкого самолюбия».

Вот еще небольшой штрих к портрету А.А. Андронова. До 1931 года Л.И. Мандельштам и А.А. Андронов думали, что первыми сопоставили автоколебания с предельными циклами, но вскоре обнаружили, что интуитивно это было сделано практически одновременно с открытием предельных циклов. В дальнейшем они всегда упоминали об этом. Вот выдержка из статьи А.А. Андронова с соавторами [15]: «...Для того чтобы не извращать исторической перспективы, необходимо предварительно сделать следующее замечание. За десять лет до открытия радио французский инженер Леотэ (1885) изучал автоколебания в некотором устройстве автоматического регулирования, исследовал фазовое пространство этого устройства и вычертил для него интегральные кривые и предельные циклы (не давая им этого названия, он, по-видимому, не был знаком с опубликованной несколько раньше работой Пуанкаре, в которой предельные циклы впервые появились в математике). По причинам, о которых мы здесь не будем говорить, замечательные работы Леотэ были почти полностью забыты».

Выше упоминалось имя Балтазара ван дер Поля (1889–1956). Напомним, что уравнение, носящее его имя, которое в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - \mu(1-x^2)\frac{dx}{d\tau} + x = 0,$$

было получено для схемы лампового генератора с триодом.

Библиографический список

1. *Гнедина Т.* Открытие Джи-Джи. М.: Молодая гвардия, 1973.
2. *Уилсон М.* Американские ученые и изобретатели. М.: Знание, 1964.
3. *Зернов В.Д.* Записки русского интеллигента. М.: «Индрик», 2005.
4. *Child C.D.* // Phys. Rev. 1911. Vol. 32, № 5. P. 49.
5. *Langmur I.* // Phys. Rev. 1913. Vol. 2, ser. 2. P. 450.
6. *Богуславский С.А.*// Тр. Гос. экспериментального электротехнического института, 1924, вып. 3.
7. *Арцимович Л.А.* Избранные труды. Атомная физика и физика плазмы. М.: Наука, 1978. С. 167.
8. *Ландау Л.Д.* О колебаниях электронной плазмы // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. С. 574.
9. *Грановский В.Л.* Электрический ток в газе. Т. 1. М.;Л., 1952, гл. 8.
10. *Feinman R.*// Eng. Sci. 1960. Vol. 23. P. 22.
11. *Миллер М.А.* Всякая и не всякая всячина, посвященная собственному восьмидесятилетию. Н. Новгород, 2005. С. 90.
12. *Горяченко В.Д.* Андронов Александр Александрович. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2001, 80 с.
13. *Тяпкин А.А., Шибанов А.С.* Пуанкаре. Серия ЖЗЛ. М.: Молодая гвардия, 1979. 415 с.
14. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959.
15. *Андронов А.А.* и др. //УФН. 1947. Т. 33. С. 343.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию 23.01.2007

Трубецков Дмитрий Иванович – родился в Саратове (1938). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ, профессор, член-корреспондент Российской академии наук, заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования. Научный руководитель Лицея прикладных наук и факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: вакуумная электроника и микроэлектроника сверхвысоких частот, теория колебаний и волн, нелинейная динамика, история науки. Автор более двадцати учебных пособий и монографий, а также более двухсот статей в периодической печати.

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 2, 2007 УДК 517.9; 530.1

ЛЕТНЯЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА «ВАРНАВИНО» ИНСТИТУТА ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ РАН

А.О. Перминов

С 1988 года Институт прикладной физики РАН проводит Летнюю физико-математическую школу для детей 10-11 классов средней школы, проявляющих интерес к физике и математике. Проходят две сессии Школы – июньская и августовская. В программу школы входят лекции, семинары, заседания, экспериментальная работа.

Начиная с 1988 года Институт прикладной физики РАН ежегодно проводит Летнюю физико-математическую школу (ЛФМШ) для одаренных учащихся 10-11 классов Нижегородского региона. Она проходит в августе в Детском оздоровительном лагере им. Талалушкина недалеко от Нижнего Новгорода и является важной составляющей многоуровневой системы непрерывной подготовки научных кадров ИПФ (от лицея до аспирантуры) в рамках Научно-образовательного центра. Цель этого проекта – поиск талантливой молодежи и вовлечение ее в научную работу, формирование «среды», способствующей проявлению творческих способностей будущих исследователей. Воспитатели ЛФМШ – сотрудники ИПФ РАН, студенты и аспиранты нижегородских вузов. Лекции читаются научными сотрудниками ИПФ РАН и приглашенными лекторами из других научных центров. Отбор слушателей в ЛФМШ проводится на конкурсной основе с помощью испытаний в виде тестирования по физике, математике и гуманитарным предметам с последующим индивидуальным собеседованием. Обычно конкурс составляет 2-3 человека на место.

Начиная с 2000 года проводится июньская сессия ЛФМШ на базе отдыха ИПФ РАН «Варнавино» на берегу реки Ветлуги. Учащиеся Научно-образовательного центра, школьники городов Дзержинска и Саратова приезжают туда вместе со своими учителями.

4 июля 2006 года закончила свою работу очередная ЛФМШ «Варнавино». Она продолжалась чуть более двух недель, ее слушателями были учащиеся 10-11-х классов. На ежедневных занятиях 60 старшеклассников и 17 педагогов (учителя школ

города, преподаватели Нижегородского и Саратовского университетов, сотрудники ИПФ РАН) обсуждали различные темы физики, математики, астрономии и информатики, совместно участвовали в спортивных соревнованиях и походах, вечерних культурных мероприятиях.

Учебная программа Школы состояла из нескольких частей. Лекции по физике читали как постоянно работающие на летней сессии ЛФМШ преподаватели (к.ф.-м.н., доцент А.А.Князев – Саратовский госуниверситет; к.ф.-м.н., доцент Ю.Н. Захаров – Нижегородский госуниверситет, заслуженный учитель России Л.В. Пигалицын; к.ф.-м.н. А.М. Рейман – ИПФ РАН, учитель Т.А. Сахарова – Нижний Новгород), так и специально приглашенные для этой цели гости (к.ф.-м.н. А.Ф. Беленов – Нижегородский институт развития образования; д.б.н., к.ф.-м.н. К.Ю. Богданов – зам. гл. редактора газеты «Физика», Москва). Темы некоторых лекций: «Существует ли закон бутерброда?», «Звук и свет – демонстрации, задачи-оценки», «Голография», «Фульгуриты».

Каждый слушатель ЛФМШ выступил с докладом, подготовленным дома. Темы разнообразны – не обязательно физика или математика, но также история, литература, искусство и т.д. Вот некоторые из них: «Осадные машины средневековья», «Эффект Доплера – теория и демонстрация», «Работа с LPT-портом на Delphy», «Космическая пыль и ее исследование», «Измерение толщины жирового слоя на теле человека». Это были не научные семинары, проводимые с целью информирования коллег о полученных результатах, скорее, – учебное мероприятие, направленное на развитие умения учащихся выступать перед аудиторией, слушать докладчика, формулировать свои мысли, задавать вопросы, отвечать на них, вести дискуссию. Полезность такого выступления высока для школьников, не имеющих навыков устных выступлений.

В рамках рабочей программы была проведена олимпиада по математике, олимпиада по физике с традиционным для ЛФМШ «Варнавино» экспериментальным туром. Впервые была проведена филологическая олимпиада. Работали кружки: голографии, электроники, решения олимпиадных задач по физике, теории решения изобретательских задач; проводились занятия по программированию в компьютерном классе.

---

1. Преподаватели ЛФМШ ИПФ РАН слева направо: Рейман А.М., зам. директора по научной работе; Князев А.А., руководитель саратовской группы; Аминов Р.Б., преподаватель ТРИЗ; Пигалицын Л.В., заслуженный учитель физики, руководитель группы из Дзержинска; Бударагина Н.Г., зам. директора по воспитательной работе, преподаватель графического дизайна Лицея НОЦ.

2. У вечернего костра. В центре А.О. Перминов, директор ЛФМШ.

3. Опыты со времен Архимеда. Биюшкина Ася (Лицей НОЦ), Сахарова Т.А., преподаватель физики (г. Дзержинск).

4. Опыты с шариком в струе. Слева направо: Бударагин Дмитрий (Лицей НОЦ), Вайгульт Иван (г. Семенов).

5. Экспериментальная лаборатория НИИ Всего. Слева направо: стоит Соколов Артем (Лицей НОЦ), Глушихин Игнат и Самойлыч Максим (оба из Лицея нижегородского Автозавода).

фото

фото

фото

фото

Существенной частью программы школы была работа НИИ Всего. Это самостоятельные исследовательские работы учащихся в группах по 2-3 человека под руководством преподавателя. На первом занятии преподаватели выступили со своим докладом «Измерение начальной скорости пули пневматического пистолета», чтобы продемонстрировать возможный вариант выполнения исследовательской работы. В конце смены была проведена конференция, на которой было представлено 27 оригинальных докладов школьников по итогам проведенных исследований. Темы некоторых наиболее интересных докладов – «Изучение поля скоростей реки Ветлуги», «Изучение полета камня под углом к горизонту», «Исследование и сравнение полупроводникового лазера и светодиода», «Самодельные электронные измерительные приборы – линейка и транспортир», «Управление игрушечным радиоуправляемым автомобилем с клавиатуры компьютера», «Цифровая голография».

Помимо учебной деятельности слушателям предлагалась разнообразная спортивная и развлекательная программы. В основном это были мероприятия творческой направленности, которые могли бы сдружить ребят, выявить их сильные стороны. Каждый день проводилось общелагерное мероприятие, а каждые 3-4 дня – крупное мероприятие с привлечением для подготовки самих школьников. Педагогический коллектив активно участвовал во всех мероприятиях своими выступлениями.

Школа быстротечна, поэтому было необходимо задать и удержать стремительный темп, наполнив уже начало смены интересными, творческими делами. Отрядные вечера знакомств у костров в день заезда, открытие смены на следующий день с выступлениями делегаций, в том числе, конечно, с выступлением педагогов, и затем «Интеллектуально-спортивный марафон» – все служило этой цели. «Марафон» прошел очень интересно. Это был личный зачет каждого слушателя в самых различных сферах деятельности: в спорте – бег, подтягивание, приседания, прыжки через скакалку; в решении задач по физике и математике; в других творческих делах – рисовании, пении, сочинении стихов. У каждого слушателя была личная зачетная книжка и, «набирая баллы», он переходил с этапа на этап. На «Вечере памяти» 22 июня ребята и преподаватели читали стихи о войне, пели песни. Слова песен по куплетам высвечивались на большом экране так, что весь зал мог подпевать. Интересно был подготовлен и проведен «День самоуправления». На пресс-конференции «кандидаты в президенты» отвечали на вопросы слушателей и друг друга, и очень быстро несерьезный тон «кандидатов» – «разрешу все, будет свобода» – сменился вполне серьезным и ответственным разговором о правах и обязанностях. Были проведены и другие мероприятия: организован фестиваль инсценированных сказок, однодневный пеше-водный поход, вечерние костры, соревнования на «турполосе», а перед самым отъездом – традиционный конкурс смешанных пар «Ты, да я, да мы с тобой».

---

6. Доклад исследовательской работы «Измерение начальной скорости пули пневматического пистолета». Слева направо: Ткачев Павел и Разенштейн Илья (оба из Лицея НОЦ).

7. «Полет камня в воздухе» - исследовательская работа шести авторов теоретического и экспериментального отдела НИИ Всего. Доклад делают Антипов Сергей и Бурдин Дмитрий (оба из Лицея НОЦ).

8. Спортивные развлечения. Организатор – преподаватель физкультуры Фролов С.В. (Лицей НОЦ), на переднем плане Оладушкин Иван (Лицей НОЦ).

9. На берегу Ветлуги.

Фотографии и комментарии к ним А.А. Князева

Основной целью плотного графика мероприятий различной направленности было стремление создать непрерывный поток положительных эмоций для каждого слушателя. При этом отдельные неудачи участника, например, в учебной деятельности компенсировались бы успехом в каком-либо другом виде деятельности. «Участие всех во всем» – так еще можно сформулировать эту цель. Подводя итоги, можно сказать, что Летняя школа

- способствовала созданию коллектива в десятом классе НОЦ (только что набранном из разных школ города) в атмосфере творчества, взаимопомощи и уважения; сориентировала школьников на предстоящую в течение учебного года серьезную работу; помогла им оздоровиться, набрать сил, отдохнуть;
- сформировала среду для неформального интеллектуального и творческого общения школьников и преподавателей различных учебных заведений, обмена опытом участия в олимпиадах различных уровней по физике, математике и информатике;
- реализовала новую форму учебной деятельности – самостоятельные исследовательские работы с итоговыми докладами в конце смены.

Мы надеемся, что опыт Летних физико-математических школ ИПФ РАН будет полезен всем, кто интересуется образованием «исследовательского типа», нацеленным на творчество и развитие.

Поступила в редакцию 02.03.2007

SUMMER PHYSICS MATHEMATICS SCHOOL «VARNAVINO» OF THE INSTITUTE OF APPLIED PHYSICS OF RAS

A.O. Perminov

Since 1988 Institute of Applied Physics of RAS organized Summer Physics Mathematics School for children (10-11 classes of high-school) who interested physics and mathematics. Now there are two sessions of this school – in June and in August. The program of the school consists of lectures, student's seminars, sections, experimental work.

Перминов Андрей Олегович – родился в 1965 году. Окончил Горьковский политехнический институт, физико-технический факультет, научный сотрудник ИПФ РАН, директор Летней физико-математической школы «Варнавино».

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 2, 2007 УДК 53(076)

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАЧИ

А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, А.В. Савин

Обсуждаются проблемы исследовательского подхода к образованию. Предложены исследовательские задачи, решение которых приближает учащихся к пониманию научной работы.

Мы должны знать. Мы будем знать.

Д. Гильберт

. . . Но я был один, и я решил рискнуть,
а заодно и попрактиковаться. . .

А. Стругацкий, Б. Стругацкий

Учебные заведения очень часто стремятся дать своим выпускникам как можно более объемные и «капитальные» знания. Наука же все время «генерирует» новые знания, и объемы учебного материала должны в соответствии с этим постоянно возрастать. В итоге, по образному выражению, как говорят, академика Флерова, «современный студент напоминает фаршированную щуку – набит до отказа, а плавать не может». Очень часто эти слова можно отнести и к школьнику. В то же время очень хочется воспитать юного исследователя, способного творчески мыслить и самостоятельно получать новые результаты. В первую очередь это относится к тем молодым людям, которые выберут науку своей профессией.

Путь в науку в рамках традиционного образования выглядит следующим образом. Сначала молодой человек получает набор знаний в школе. Если он имеет наклонности к физике или математике, то это может быть физико-математическая школа или лицей. Наиболее талантливые проходят через систему олимпиад различного уровня. Затем идет во многом аналогичное получение знаний в вузе. Фактически, самостоятельная работа предполагается с дипломного проекта и продолжается в аспирантуре[1]. Такое «запаздывание» по вовлечению в исследовательскую работу само по себе огорчительно.

[1]Выделяемые по действующим учебным планам 4 часа на курсовую работу для студента первых трех курсов, конечно, ничего в этой ситуации изменить не могут.

Более того, несмотря на успехи системы физико-математических олимпиад по поиску талантливой молодежи, эта система страдает и серьезными недостатками. Олимпиады учат скоротечной работе, когда за четыре часа нужно решить пять задач. В реальной же жизни одна задача может решаться годами. Поэтому к исследовательской работе очень часто оказываются склонными совсем другие школьники, нежели те, которых выделяет система олимпиад. (Например, А.Д. Сахаров в своих воспоминаниях отмечает, что не успевал сосредоточиться на олимпиадах за весьма ограниченное время.) Такие школьники зачастую не получают необходимой поддержки в традиционной школе, система получения знаний в которой мало учитывает необходимость самостоятельного индивидуального длительного труда над одной задачей. Таким образом, вовлечение школьников в исследовательскую работу – серьезная и важная проблема.

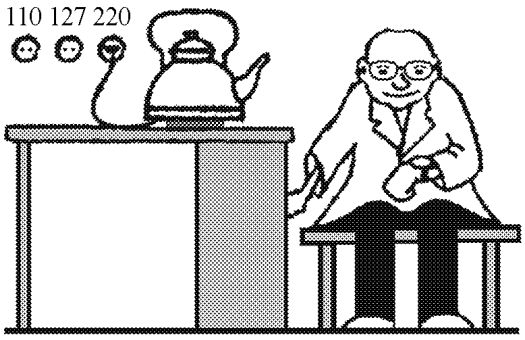


Рис. 1.

В отличие от обычных школьных задач, исследовательская работа требует своего рода «погружения» и постоянных размышлений (рис. 1). Она состоит из поиска, ошибок и открытий, больших и маленьких. В этом существенное отличие настоящей науки от олимпиад, где часто быстрота вытесняет глубину. Еще одна особенность реальных задач в том, что исследователю не только можно, но и нужно пользоваться учебниками, справочниками, монографиями, статьями, консультациями, помощью коллег, возможностями сети Интернет. Ведь цель состоит именно *в получении решения*, а не в тренинге по решению задач с известным ответом. В школе же обычно все иначе. Так, в школе никогда (за редкими исключениями) не учат технологии коллективного решения, «мозгового штурма» задачи. А это один из существенных приемов, который ученые используют в своей работе.

Еще одно отличие школьных задач состоит в том, что их авторы точно знают, как эту задачу решать. (Нетрудно представить себе, что бы творилось в школе на уроках в противоположном случае.) А вот задачи, которые решают ученые, как раз отличаются тем, что часто не ясно ни как их решать, ни что получится. (Кстати, иногда не получается ничего. Многие выдающиеся ученые, например, Альберт Эйнштейн, Игорь Евгеньевич Тамм, Дмитрий Иванович Менделеев, очень много времени потратили на задачи, которые решить не удалось.) Как не вспомнить здесь следующую цитату из известного произведения братьев Стругацких:

«Г-голубчики, – сказал Федор Симеонович озадаченно, разобравшись в почерках. – Это же п-проблема Бен Б-бецалеля. К-калиостро же доказал, что она н-не имеет р-решения.

– Мы сами знаем, что она не имеет решения, – сказал Хунта, немедленно ощетиниваясь. – Мы хотим знать, как ее решать...»

Задачи без заранее известного ее авторам ответа вообще не встречаются в школьных учебниках, но именно такие задачи учат познавать окружающий мир, устанавливать новые закономерности. Большим мастером составления таких задач

был наш выдающийся соотечественник лауреат Нобелевской премии Петр Леонидович Капица (см., например, [1]) [2]. Подобные задачи он часто давал на вступительных экзаменах в аспирантуру. По воспоминаниям, это «держало в форме» не только претендентов, но и их руководителей, поскольку к ним молодежь бегала за консультациями.

Можно и на школьном «уровне» сформулировать задачи, которые были бы близки по характеру к работе ученого. Их можно назвать *исследовательскими* задачами. Некоторые из них приведены ниже. Чтобы подчеркнуть их исследовательский характер, мы дали каждой задаче свое название.

Итак, из приведенных ниже задач для начала нужно выбрать всего одну – ту, которая больше понравится. На ее решение придется потратить не час и даже не один день. Таким образом, значение имеет *не число* решенных задач, а *глубина* проработки решения. Такие задачи, можно надеяться, помогут лучше понять науку как профессию, состоящую в получении новых результатов «своими руками». «Арсенал» исследования при этом не фиксирован. Можно использовать теоретические соображения, эксперименты, компьютерное моделирование – по своим наклонностям и возможностям – в тексте даются лишь отдельные советы (впрочем, им можно и не следовать). Если необходимые сведения выходят за рамки школьной программы, нужно использовать литературу – для решения большинства задач это полезно, а решение некоторых из них без этого и невозможно. Можно и полезно пользоваться консультациями своих учителей и ученых. Можно решать такие задачи не в одиночку, а образовать школьную научную лабораторию, работать в которой еще интереснее.

При решении некоторых задач понадобится численно решать дифференциальные уравнения. В этом нет каких-то особых трудностей. (В некотором смысле численное решение дифференциальных уравнений даже проще аналитического.)

Но с получением результата работа над задачей-проблемой не заканчивается! Необходимо донести полученный результат до «научного сообщества». Это значит, что необходимо подготовить презентацию задачи, доклад по ее решению и, наконец, связный текст, который можно опубликовать, например, в сборнике трудов какой-либо конференции. Стоит отметить, что проводится не так мало конференций для школьников, включая международные. Это Колмогоровские чтения (Москва), Сахаровские чтения (Санкт-Петербург), Харитоновские чтения (Саров), «Нелинейные дни для молодых» (Саратов), Всемирный смотр научно-технического творчества «Intel ISEF» (национальные этапы и заключительный этап в США) и др. Информация обо всех этих конференциях также доступна в Интернете.

Таким образом, *при исследовательском подходе образование получает новый оттенок – это уже не только получение знаний, но и получение целой системы навыков*, что в жизни может оказаться более важным, кстати, независимо от будущей профессии.

Подчеркнем еще раз, что ключевым является самостоятельное получение результата. К сожалению, в школе под научной работой часто понимают совсем другое, фактически, написание реферата. При этом на первое место выходит не характер исследования, а «продвинутость» темы: «Кварки», «Черные дыры во вселенной» и др. Это тоже, в общем, полезное дело, но другое.

[2] Список задач П.Л. Капицы доступен также в сети Интернет.

При формулировке и подборе задач мы также часто (но не всегда) старались ввести учащихся в область исследований, связанных с теорией колебаний, теорией бифуркаций (катастроф) и т.д. Это вполне может быть сделано на уровне физических задач, доступных учащимся, зато затем облегчает восприятие как конкретного содержания, так и методологии этих областей науки.

При написании настоящей статьи мы опирались на опыт Школьной научной лаборатории факультета нелинейных процессов Саратовского университета и лаборатории теоретической нелинейной динамики Саратовского филиала ИРЭ РАН. В течение ряда лет учащиеся разных лицеев и школ Саратова занимались исследовательской работой в Школьной лаборатории. Их работы докладывались на различных конференциях, включая студенческую конференцию ФНП СГУ.

Авторы хотели бы выразить глубокую благодарность член-корр. РАН, профессору Д.И. Трубецкову и профессору Ю.И. Левину, поддержавшим идею школьной научной лаборатории и исследовательской работы школьников. Мы благодарны профессору В.С. Анищенко и АФГИР за материальную поддержку школьной лаборатории, а также заслуженному учителю РФ Л.В. Правдиной, активно стимулировавшей исследовательскую работу учащихся.

ЗАДАЧИ

1. Катастрофы мыльной пленки. Имеются два проволочных кольца радиусов R и r (рис. 2). Выясните, при каких значениях расстояния между кольцами h может существовать мыльная пленка, натянутая одновременно на оба кольца и образующая некоторую фигуру вращения. Внутри колец пленок нет. Что произойдет с мыльной пленкой, если постепенно увеличивать h? Проведите теоретическое рассмотрение и проделайте соответствующие эксперименты. Сначала рассмотрите случай колец одинакового радиуса.

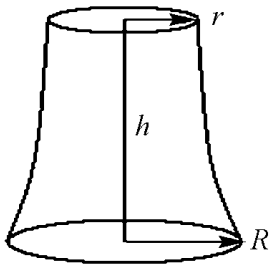


Рис. 2.

2. Поющая бутылка. Известно, что если дуть в горло бутылки, то бутылка будет издавать звук определенной частоты (гудеть). Определите, от каких параметров бутылки зависит высота издаваемого тона (то есть частота звука). Проведите эксперименты с различными бутылками и пузырьками. Проверьте найденную зависимость экспериментально.

3. Искажение поверхности океана. П.Л. Капица предложил такую задачу. Над поверхностью океана помещена материальная точка массы m. Точка располагается на высоте h над невозмущенным уровнем океана. Исследуйте вид возмущенной поверхности воды. Постройте соответствующие «профили» на компьютере. Все ли возможные конфигурации в такой системе можно наблюдать в реальных условиях на Земле? Рассмотрите возможные модификации этой задачи, например, случай расположения двух притягивающих центров над водой и т.п.

4. Оптические каустики в цилиндрической чашке. В цилиндрическом сосуде (в кружке с молоком) можно наблюдать яркую линию с еще более ярким острием. Эта линия – каустика – представляет собой огибающую световых лучей, отраженных от цилиндрической поверхности. Проведите теоретическое, экспериментальное и компьютерное исследование такой каустики.

5. Форма изогнутой линейки. Сожмите металлическую линейку, приложив к ее концам некоторое усилие. Какую форму примет слегка изогнутая линейка? Проверьте предположения, что форма линейки задается: а) синусоидой, б) параболой.

6. Цепочка с грузиками. Как надо распределить по цепочке систему грузиков разного размера, чтобы она приняла в поле силы тяжести форму полуокружности? Изготовьте такую цепочку и проведите эксперименты.

7. Монета на наклонной плоскости. Монету, лежащую на наклонной плоскости, толкают параллельно ребру этой плоскости. Исследуйте, как трансформируется траектория скольжения монеты в зависимости от угла наклона, коэффициента трения, начальной скорости. Проведите также компьютерное исследование и соответствующие эксперименты. Попробуйте провести классификацию возможных траекторий.

8. Случайное блуждание на компьютере. Проведите численное моделирование задачи о случайном блуждании на двумерной решетке размера $N \times N$, считая, что на каждом шаге по времени частица с равной вероятностью переходит в один из соседних (по вертикали и горизонтали) узлов или остается на месте. Постройте несколько траекторий. Получите численно оценку среднего времени ухода на расстояние, большее R, от точки старта для нескольких различных R. Предложите эмпирическую формулу для этой зависимости. Попробуйте исследовать аналогичную задачу в трехмерном пространстве.

9. Плавающий шар. Исследуйте вопрос о глубине погружения шара в жидкость. Проведите эксперименты с разными шариками и жидкостями разной плотности. Результаты экспериментов удобно представить в подходящих безразмерных переменных, в качестве которых могут выступать соответствующие комбинации размерных величин, характеризующих задачу. (Плотность жидкости можно менять, подсыпая в воду соль.) Изучите возможные колебания шара на поверхности воды. Как зависит период от введенных безразмерных параметров? Оцените роль диссипации в системе. Являются ли колебания шара линейными или нелинейными?

10. Статические и колебательные свойства висящей цепочки. Говорят, что если цепочку подвесить за концы, то она примет форму так называемой цепной линии. Проверьте это утверждение. Если слегка толкнуть цепочку за концы в горизонтальном направлении и снова зафиксировать их, то возникнут колебания. Попробуйте исследовать эти колебания.

11. Вращающаяся цепочка. Исследуйте устойчивые конфигурации, которые может принимать массивная цепочка, если ее вращать за один конец. Проведите предварительно эксперименты, изготовив цепочку из скрепок. Попытайтесь реализовать соответствующую компьютерную модель.

12. Изохронный маятник. Гюйгенс показал, что материальная точка, скользящая по циклоиде, совершает изохронные колебания, то есть колебания, период которых не зависит от амплитуды. Изготовьте профиль из жести в форме циклоиды и изучите колебания катающегося по нему шарика. Изготовьте и изучите маятник в виде нити с грузиком с «направляющими» в виде циклоиды. Попробуйте провести

компьютерное моделирование движения материальной точки, скользящей по циклоиде, и проверьте в численном эксперименте результат Гюйгенса.

13. Неизохронный маятник. Какую форму следует придать поверхности в предыдущей задаче, чтобы колебания шарика соответствовали «потенциальной яме» не с квадратичным минимумом, а с минимумом четвертой степени? Выясните, как зависит от амплитуды период колебаний такого маятника.

14. Радуга. Найдите в справочнике данные по коэффициенту преломления света в воде в диапазоне от красного до фиолетового цвета и воспроизведите в цветной графике на компьютере расчет траекторий лучей света в капле воды (теория радуги Декарта [2, 3]). Определите, под какими углами по отношению к направлению на солнце наблюдатель увидит красное и фиолетовое кольца радуги. Попробуйте провести аналогичное исследование для капли несферической формы.

15. Прыжок с гирями. Известно, что древнегреческие атлеты прыгали в длину с гирями. Бросая их в определенный момент, они увеличивали дальность прыжка. Попробуйте определить, в какой момент и как нужно отбросить гири, чтобы максимально увеличить дальность прыжка.

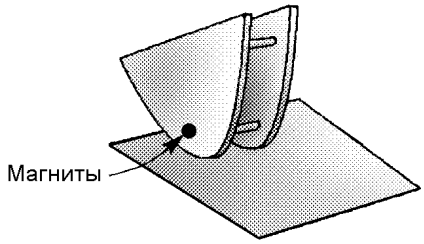


Рис. 3.

16. Качалка. В теории катастроф очень популярна модель, известная как качалка (рис. 3). Рассмотрите параболическую качалку, форма нижней поверхности которой задана уравнением $y = x^2$. Исследуйте проблему устойчивости такой системы. Ознакомьтесь с теорией качалки [3], связывающей проблему ее устойчивости с построением огибающей семейства нормалей. Проведите построение семейства нормалей на компьютере. Изготовьте качалку из картона, проведите эксперименты с ней и сравните с результатами компьютерного моделирования. Реализуйте ту же программу исследований для качалки в форме эллипса.

17. Неваляшка (Ванька-Встанька). Рассмотрим модель этой известной игрушки в виде цилиндра со смещенным центром тяжести. Если такой цилиндр положить на плоскую поверхность, то он имеет два положения равновесия: устойчивое (центр тяжести занимает наинизшее положение) и неустойчивое (центр тяжести занимает наивысшее положение). Исследуйте, какие положения равновесия будет иметь этот цилиндр, если его положить на выпуклый (или вогнутый) полуцилиндр большего радиуса. Что будет происходить при выведении цилиндра из положений равновесия?

18. Математический ряд и физический эксперимент. Если положить на один кирпич сверху второй, то его можно сдвинуть на максимальное расстояние $x_1 = l/2$. Такую конструкцию можно положить на третий кирпич. Найдите максимальное расстояние x_2, на которое ее можно сдвинуть относительно третьего кирпича. Получите далее последовательность x_n. Чему равна длина такой стенки из бесконечно большого числа кирпичей? Попробуйте экспериментально реализовать соответствующую ситуацию. (Рекомендуем использовать костяшки домино, спичечные коробки и др.) Обсудите результаты эксперимента и их соответствие с теорией. Попробуйте придумать и реализовать в эксперименте другую стратегию, нацеленную на получение наиболее длинной стенки. Стенку какой длины Вам удастся создать?

19. Маятник с переменной массой. Изготовьте маятник из сосуда, в который можно наливать воду (например, из бутылки). Изучите зависимость периода колебаний маятника от массы налитой в бутылку воды. Попробуйте построить такой график теоретически. Сначала считайте маятник *математическим* с длиной, равной расстоянию до центра масс системы, затем – *физическим*. Сравните результаты двух теорий и эксперимента.

20. Волновой фронт. Волновой фронт, испущенный некоторой поверхностью (линией), можно найти, если отложить отрезки равной длины на системе нормалей к испускающей поверхности. Проведите компьютерное исследование распространения волновых фронтов, испущенных параболой, эллипсом и другими линиями или поверхностями. Обсудите выявленные при компьютерном моделировании особенности волновых фронтов с позицией теории катастроф [2, 3].

21. Теннисный мячик на лестнице. Постройте и исследуйте модель, описывающую, как маленький мячик скачет по лестнице. Изучите возможные варианты движений в зависимости от параметров задачи. В каком случае мячик будет разгоняться сколь угодно сильно?

22. Поле решетки зарядов. С помощью компьютера получите график зависимости потенциала, созданного квадратной решеткой из $N \times N$ зарядов величины q, от расстояния x от плоскости решетки, отсчитываемого от ее геометрического центра (рис. 4). Расстояния между зарядами a, а число N достаточно велико. Выделите на полученном графике участки, отвечающие приближенным моделям, которые можно использовать в данной задаче. Используя трехмерную графику, постройте профили потенциала как функции координат y, z для различных значений x.

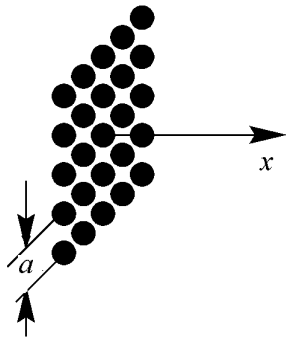


Рис. 4.

23. Бифуркации в осцилляторе. Изучите поведение осциллятора, описываемого уравнением

$$\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0,$$

если потенциал задан выражением $U(x) = U_0(x) - \varepsilon x$. Функцию $U_0(x)$ выберите так, чтобы она имела кубическую точку перегиба. Изучите, как меняется вид зависимости $x(t)$ при изменении параметра ε, и объясните полученные результаты.

24. Двумерный маятник в поле трех притягивающих центров. Изучите движение маятника, колеблющегося над горизонтальной плоскостью, на которой в вершинах равностороннего треугольника располагаются три одинаковых магнита. Положение равновесия маятника лежит на малой высоте точно над центром треугольника. В качестве простейшей модели для компьютерного исследования рассмотрите материальную точку, которая может двигаться в плоскости трех притягивающих центров (приближение длинной нити маятника). Силу притяжения вычисляйте по закону обратных квадратов. Рассмотрите случаи колебания при отсутствии затухания и в случае затухания, пропорционального скорости.

25. Оптимальный бросок. Как известно, максимальная дальность полета тела достигается при броске под углом 45 градусов к горизонту. Что изменится в этом утверждении, если учесть сопротивление воздуха?

26. Траектория брошенного тела. Известно, что тело, брошенное под углом к горизонту, летит по параболе. Но по закону Кеплера это же тело должно двигаться по ... эллипсу. Обсудите, как совместить (или не совместить) эти утверждения на примере астероида шарообразной формы.

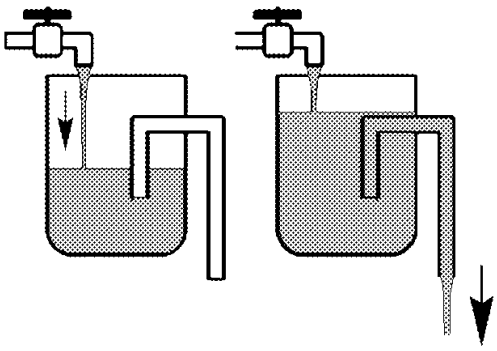


Рис. 5.

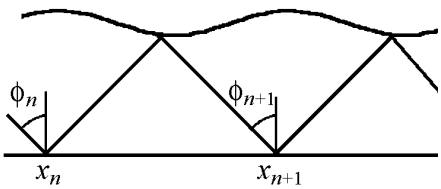


Рис. 6.

27. Ваза Тантала[3]. Система работает так: сначала вода наполняет резервуар, отводная трубка наполнена воздухом, и вода не вытекает (рис. 5). Когда вода покроет трубку, она начинает вытекать. При этом действует эффект сифона – вытекание прекратится только тогда, когда уровень воды в резервуаре упадет до нижнего обреза трубки и в нее попадет воздух. Скорость вытекания через трубку должна быть больше, чем скорость поступления воды в резервуар из крана. Изготовьте вазу Тантала и изучите зависимость периода возникающих автоколебаний от параметров системы. Попробуйте построить элементарную теорию.

28. «Запертый» луч. Изучите распространение луча света в световоде с «гофрированной» стенкой (рис. 6). Возможно ли распространение луча (после нескольких отражений) не вперед, а назад? Для начала рассмотрите случай, когда верхний профиль световода задан синусоидой с малой, а затем с большой амплитудой.

Библиографический список

1. Понимаете ли Вы физику? М.: Знание, 1967.
2. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. М.: Наука, 1990.
3. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980.

Поступила в редакцию 02.03.2007

RESEARCH PROBLEMS

A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov, A.V. Savin

Some problems of introduction of the research methods in high-school education are discussed. The research problems for high-school students are proposed. By solving those problems high-school students will get to know the methods of the scientific work.

[3]Тантал – наказанный богами персонаж древнегреческого мифа, который не мог напиться, стоя в воде: когда он наклонялся, вода уходила.

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 2, 2007 УДК 519.8

ВЫСШАЯ ШКОЛА РОССИИ С ПОЗИЦИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ
Проблемы, оценки, модели

М.Н. Стриханов, Д.И. Трубецков, А.А. Короновский, Ю.П. Шараевский, А.Е. Храмов

© М.Н. Стриханов, Д.И. Трубецков
А.А. Короновский, Ю.П. Шараевский, А.Е. Храмов, 2007
© Физматлит, 2007

М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 192 с. ISBN 978-5-9221-0774-7

В монографии собраны результаты междисциплинарных исследований, в которых предпринята попытка применить теоретические методы радиофизики и нелинейной динамики к анализу социальной системы «профессорско-преподавательский состав высшей школы Российской Федерации».

Для специалистов и всех читателей, интересующихся указанной тематикой.

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 05-02-30-062д

Введение

Ка́дра ж. или мн. *ка́дры* фрнц. офицеры, унтера и фланговые рядовые, составляющие основу полка либо иной части войска, ядро, которое в случае надобности пополняется рекрутами. Ка́дровый, къ кадрамъ относящійся, принадлежащій. *Ка́дра* бран. шваль, шушваль, дрянь – народъ.

В.И. Даль. Толковый словарь живого русского языка

В этой небольшой монографии собраны результаты междисциплинарных исследований, в которых предпринята попытка применить теоретические методы радиофизики и нелинейной динамики к анализу социальной системы «профессорско-преподавательский состав высшей школы Российской Федерации».

Заказчиком исследований, проводимых коллективом авторов монографии, выступало Министерство образования, а затем Министерство образования и науки РФ. Целью исследований являлось проведение анализа и осуществление прогноза состояния такой подсистемы

высшей школы, как ее кадровый потенциал. Вначале исследования касались только возрастной стратификации профессорско-преподавательского состава вузов, однако вскоре после начала исследований стало понятно, что проблемы кадрового состава высшей школы не ограничиваются только старением преподавательского состава. Было обнаружено, что простая попытка свести все проблемы кадрового потенциала высшей школы к проблеме возрастного состава, как это часто делается в соответствующей научной литературе, оставляет за кадром целый ряд проблем, которые слабо связаны с возрастом преподавателей, но имеют не меньшее (а зачастую и большее) значение для понимания современного состояния и тенденций эволюции кадрового потенциала высшей школы. В частности, весьма важным для оценки состояния высшей школы и системы подготовки кадров высшей квалификации оказался учет таких факторов, как активность и накопленный потенциал профессорско-преподавательского состава. Корректно определить указанные характеристики – весьма сложная и нетривиальная задача. Вместе с тем из проведенных исследований видно, что анализировать необходимо именно эти характеристики, первичные для понимания процессов, происходящих в высшей школе, в то время как возрастная и квалификационная стратификация кадрового состава вузов является величиной, зависящей от этих факторов.

У читателя может возникнуть вопрос: а почему же именно кадровый состав выбран в качестве основного объекта исследований? Действительно, у высшей школы России много и других проблем: плохая оснащенность научным и учебным оборудованием, недостаток финансирования, проблема ЕГЭ и т.д. Наше мнение хорошо иллюстрирует эпиграф к введению, взятый из «Толкового словаря живого русского языка» В.И. Даля: кадровый состав, тот преподавательский состав, который работает в высшей школе, составляет ее главное богатство и ее главный потенциал, кадры по-прежнему решают все. Цель исследований, результаты которых изложены в настоящей монографии, заключалась в определении мер, необходимых для того, чтобы кадровый состав высшей школы России полностью удовлетворял первому определению слова «кадры», данному Далем, и никогда не опустился бы до второго его определения.

Авторы не были ограничены в способах решения поставленных перед ними задач. Однако, активно проводя исследования в области нелинейной динамики, под которой они сами понимают раздел современной радиофизики – нелинейную теорию колебаний и волн, они, естественно, постарались в первую очередь применить методы нелинейной динамики к анализу исследуемой социальной системы. Широко использовалось математическое моделирование процессов, происходящих в высшей школе, был предложен целый ряд моделей, которые качественно, а в ряде случаев и количественно (причем с высокой степенью точности), позволяют провести описание процессов в высшей школе и осуществить достоверный прогноз на ближайшие несколько лет. Радиофизические методы и методы нелинейной динамики дополнялись социологическими опросами и наблюдениями, хотя, сами по себе, социологические методы не являлись главными для проведенных исследований и использовались для сбора недостающей информации, определения тех или иных параметров, для выявления корректности отдельных допущений в предлагаемых авторами математических моделях. Поэтому настоящая работа, несмотря на гуманитарное название, имеет все атрибуты книги по точным наукам: в ней приводятся модели, теории, проводится их анализ. Присутствует здесь и эксперимент, но он имеет свою специфику: это социологический эксперимент, целью которого являлась проверка работоспособности предложенных моделей.

В нелинейной динамике и синергетике давно известно, что анализ сложных систем (любой природы) необходимо начинать с выделения среди множества факторов небольшого числа существенных параметров (называемых параметрами порядка, управляющими параметрами), которые характеризовали бы систему в целом. Только после того как найдены наиболее существенные механизмы, определяющие динамику системы, можно приступать к анализу и прогнозу поведения сложных систем. Наша книга во многом является попыткой выделить существенные параметры порядка в такой сложной нелинейной системе, как кадровый потенциал высшей школы РФ. После их выделения можно считать, что мы на ка-

чественном уровне понимаем поведение системы. Как писал известный специалист в теории моделирования и самоорганизованной критичности, Пер Бак: «Понимание редко возникает из-за сложного беспорядочного моделирования, а много чаще – из грубого упрощенчества». Авторы рассчитывают, что им удалась попытка «грубого упрощенчества». Насколько им при этом удалось «не выплеснуть вместе с водой младенца», решать читателю.

Актуальность исследований, результаты которых изложены в настоящей монографии, как нам кажется, не вызывает сомнений. Сейчас, когда в стране ведется реформа образования и науки, изучение проблем системы подготовки кадров для развивающейся экономики, науки и образования России следует признать весьма важным и своевременным. Наш взгляд на эти вопросы весьма нестандартен. Можно сказать, что это взгляд физика, привыкшего к точному описанию явлений природы, попытка применить физические (точнее, радиофизические) методы к анализу весьма сложной социальной системы. С другой стороны, это и взгляд изнутри преподавателя высшей школы на процессы, протекающие в системе подготовки специалистов с высшим образованием и кадров высшей квалификации через аспирантуру и докторантуру (отметим, что все авторы активно занимаются преподавательской деятельностью в вузах и постоянно сталкиваются с описываемыми проблемами). Представленные в книге выводы зачастую пессимистичны. Однако хочется отметить, что, несмотря на огромное количество проблем, выявленных в кадровой системе высшей школы, всегда наблюдались некоторые точки роста, положительные моменты, опираясь на которые, на наш взгляд, можно изменить негативную ситуацию, сложившуюся в целом в вузах России. Авторы надеются, что их мнение будет полезно научному и образовательному сообществам нашей страны.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Глава 1. Возрастной состав высшей школы РФ: модели возрастной динамики и результаты их анализа. 1.1. Моделирование возрастной динамики высшей школы с помощью модели класса клеточных автоматов. 1.2. Анализ численности и стратификации по возрастам профессорско-преподавательского состава. 1.3. Моделирование динамики численности и возрастного состава докторов наук. 1.4. Прогноз некоторых возможных путей развития высшей школы РФ в рамках современной демографической ситуации. 1.5. Выводы

Глава 2. Феноменологические модели некоторых аспектов функционирования высшей школы России. 2.1. Модель эффективного функционирования высшей школы. 2.2. Модель функционирования иерархической структуры управления высшей школы. Моделирование различных ситуаций. 2.2.1. Модель иерархической структуры. 2.2.2. Временная динамика иерархической структуры. 2.2.3. Анализ процессов управления с помощью иерархической структуры. 2.3. Выводы

Глава 3. Современное состояние высшей школы на примере одного вуза: методы диагностики и способы коррекции. 3.1. Оценка эффективности работы, потенциала и готовности к профессиональной деятельности профессорско-преподавательского состава и системы подготовки кадров через аспирантуру и докторантуру. 3.2. Методика измерения операционального компонента готовности сотрудника высшей школы к профессиональной научно-педагогической деятельности. 3.3. Оценка состояния профессорско-преподавательского состава. Результаты социологических исследований на примере Саратовского государственного университета и простые модели на их основе. 3.4. Оценка качества подготовки кадров высшей квалификации через систему аспирантуры. 3.5. Современное состояние подготовки студенческой молодежи как нового поколения научных и научно-педагогических кадров. 3.6. Выводы

Глава 4. Научно-образовательные институты как новая модель структурной единицы высшей школы. 4.1. Научно-образовательные институты и центры в рамках классических университетов как один из путей решения современных проблем высшей школы РФ.

4.2. Научно-образовательный институт «Открытые системы» Саратовского государственного университета. 4.2.1. Лицей прикладных наук. 4.2.2. Факультет нелинейных процессов. 4.2.3. Отделение физики нелинейных систем Научно-исследовательского института естественных наук Саратовского госуниверситета. 4.2.4. Редакционно-издательский комплекс.

Заключение

Приложение А. Опросный лист рейтинга преподавателя высшей школы

Приложение Б. Анкета опроса студентов

Список литературы

Заключение

Начиная с Чарльза Сноу с его знаменитым эссе «Две культуры», всегда находятся люди, которым хочется сблизить естественнонаучный и гуманитарный взгляды на развитие общества. Высшее образование – важнейший из элементов, составляющих культуру общества и общество в целом. Кроме того, высшее образование – объект исследования, одинаково интересующий и естественников, и гуманитариев. Авторы книги проводят научные исследования в области физики и нелинейной динамики (в той ее части, которая связана с радиофизикой). Вместе с тем все они – преподаватели вузов, поэтому судьбы науки и образования – их судьбы.

Первоначально полагалось, что эта книга будет лишь взглядом на высшую школу с позиций нелинейной динамики в рамках простых моделей. Результаты теории сопоставлялись, где это можно, с известными статистическими данными. Так формировался теоретический взгляд на проблему. Однако по мере работы стало ясно, что нужен свой эксперимент, который мог быть только социологическим. Он проведен и описан, но теория для него еще не построена, главным образом из-за трудностей введения «гуманитарных переменных». Некоторые результаты кажутся теперь очевидными, некоторые из сделанных допущений - недостижимыми. Но нас успокоил Питер Хэйн (1905–1996 гг.). Имя этого человека широко известно не только на его родине – в Дании, но и по всей Скандинавии и во многих англоязычных странах. Он – поэт, романист, эссеист, художник, архитектор, математик, инженер-изобретатель. И талантлив во всем. Но наибольшую славу Питеру Хэйну принесли его короткие стихи – груки. Нас подбодрил один из них под названием «Как создавать идеи». Звучит он так:

Создание новых идей – операция,
Доступная всем, и довольно несложная:
Достаточно знать,
В каких концентрациях
Смешать очевидное
И невозможное.

На этой оптимистичной ноте мы и закончим книгу.

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина*
Оформление художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, О.Н. Строгановой
в пакете L^AT_EX

Подписка на 2007 год осуществляется
по каталогу Агентства Роспечать
«Газеты. Журналы», индекс 73498
и по договору между Подписчиком
(юридическим или физическим лицом)
и Издателем (Саратовским государственным университетом)

Стоимость подписки на 2007 год 450 руб. (6 номеров)
Заявки на заключение договора принимаются
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64
E-mail:and@nonlin.sgu.ru

Распространение журнала осуществляется
редакцией журнала по адресной системе

Сдано в набор 2.03.07. Подписано к печати 16.04.07
Формат 70x108/16. Бумага «Снегурочка». Печать трафаретная
Усл. печ. л. 11,55(8,25). Уч.-изд. л. 11,0. Тираж 200. Заказ 390

Отпечатано на ризографе GR 3750 редакции журнала

© Редакция журнала
«Известия вузов. ПНД», 2007
© Оформление художника
Д.В. Соколова, 2007