



## ОСОБЕННОСТИ ПЕРЕХОДА К РЕЖИМУ ПОЛНОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ В СЕТЯХ ЭЛЕМЕНТОВ ХОДЖКИНА–ХАКСЛИ

*Е.В. Панкратова, В.Н. Белых*

В работе рассматриваются различные ансамбли диффузионно связанных идентичных элементов, динамика которых моделируется системой уравнений Ходжкина–Хаксли. Проводится теоретическое и численное исследование особенностей перехода к режиму полной синхронизации в условиях наложения надпорогового периодически изменяющегося во времени и случайного полей. В рамках метода покрытия цепями графа связи получены условия глобальной устойчивости полной синхронизации в сетях, содержащих структуры типа «звезда». Рассмотрены различные сценарии развития таких сетей. Исследуется влияние шумового воздействия на характер изменения сил связи, достаточных для установления синхронного поведения элементов в сети.

### Введение

В настоящее время исследование коллективной динамики ансамблей, состоящих из систем, демонстрирующих хаотическое поведение, является одним из актуальных направлений нелинейной физики. При этом к одному из наиболее важных эффектов коллективного поведения относят эффект синхронизации. Проблема синхронного поведения структурных элементов интенсивно исследуется в контексте различных физических [1], химических [2], биологических систем [3]. В частности, изучению проблемы синхронной генерации электрических импульсов нейронными популяциями посвящен целый ряд как теоретических [3–5], так и экспериментальных научных работ [6–8]. В рамках экспериментальных работ было показано, что синхронное поведение нервных клеток – явление, наблюдающееся в различных областях мозга. В частности, синхронное возбуждение различных нейронных популяций является типичным механизмом восприятия зрительных образов [6], обонятельной [7] или тактильной [8] информации. В связи с этим проблема исследования синхронной активности клеток в различных, в том числе изменяющихся во времени, нейронных структурах представляет собой одну из центральных проблем нейробиологии.

При проведении аналитических исследований вопросов синхронного поведения элементов в сетях используют различные математические модели, демонстрирующие разнообразие и сложность динамики отдельных нервных клеток. Определяемые на разных уровнях сложности описания такие модели воспроизводят различные

аспекты деятельности нейронных систем. Выбор определенной модели связан с типом решаемой задачи. Это могут быть модели, способные качественно воспроизвести то или иное поведение клетки. В число таких систем входят модели ФитцХью–Ринцеля, система Хиндмарш–Розе и др. Также могут быть использованы модели количественного описания, так называемые *conductance-based* модели, среди которых, к примеру, система Моррис–Лекара, описывающая колебания в гигантских мышечных волокнах ракообразных, модель Уилсона для корковых нервных клеток и др. (см. [3, Приложение]).

В настоящей работе рассматриваются сети, поведение элементов которых описывается системой уравнений Ходжкина–Хаксли [9]. Эта модель изначально была предложена для описания экспериментально наблюдаемой кинетики изменений натриевой и калиевой проводимости при различных смещениях мембранного потенциала в аксоне кальмара. Однако ввиду того, что у самых различных животных сигналы, передаваемые по нервам, имеют много общих черт, результаты, полученные в рамках формализма Ходжкина–Хаксли, часто приобретают гораздо более общее значение [10]. В связи с этим модель Ходжкина–Хаксли, являясь классической моделью математического описания поведения нервной клетки, часто используется при исследовании нейронной активности. В данной работе рассматриваются ансамбли диффузионно связанных элементов Ходжкина–Хаксли, содержащие структуры типа «звезда»\* [11]. Исследование синхронного поведения элементов в сетях такого типа вызывает особый интерес. С одной стороны, так называемые «звезды» могут рассматриваться как модели дивергентных сетей с одним входом – одного из наиболее распространенных в центральной нервной системе типов межнейронных связей [12]. С другой стороны, сети, в которых один нейрон оказывает влияние сразу на множество нервных клеток, могут выступать согласующим элементом в сложном сочетании нейросетевых систем. В частности, организованные по иерархическому принципу двигательные или сенсорные системы также могут содержать структуры такого типа. В многослойных сетях, моделирующих структуру иерархических систем, информация передается от слоя к слою. В общем случае число нейронов в слое, как и число связей с нейронами соседних слоев, может быть любым. При этом нейроны одного слоя между собой никак не связаны. Рассмотренные в данной работе сети, содержащие две связанные цепочкой «звезды», представляют собой один из вариантов многослойных структур, внутренние слои которых содержат по одному нейрону. В таких сетях анализ глобальной устойчивости режима полной синхронизации проводится в рамках метода покрытия цепями графа связи. Рассмотрены различные сценарии их расширения. Получены условия, определяющие закон изменения значений коэффициентов связи, достаточных для поддержания режима синхронного поведения элементов в ансамбле. Исследованы особенности влияния случайных полей, описываемых в данной работе гауссовым случайным процессом, на установление режима синхронной генерации.

## 1. Метод покрытия цепями графа связи

Рассмотрим сеть, состоящую из  $n$  взаимосвязанных идентичных осцилляторов,

$$\dot{\mathbf{x}}_i = F(\mathbf{x}_i) + \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij}(t) \mathcal{P} \mathbf{x}_j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

\* Структура типа «звезда» представляет собой сеть, один из осцилляторов которой связан со всеми  $(n - 1)$  несвязанными между собой элементами.

Здесь  $\mathbf{x}_i = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^d)$  –  $d$ -вектор, содержащий координаты  $i$ -го осциллятора;  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_i)$  – нелинейная вектор-функция, определяющая динамику элемента сети. Ненулевые элементы  $(d \times d)$ -матрицы  $\mathcal{P} = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_d)$ , где  $p_h = 1$  для  $h = 1, 2, \dots, s$  и  $p_h = 0$  для  $h = s + 1, \dots, d$ , определяют переменные, по которым связаны индивидуальные системы.

Матрица связи  $\mathcal{G} = \{\varepsilon_{ij}(t)\}$  –  $(n \times n)$  симметричная матрица с неотрицательными недиагональными элементами. Диагональные элементы матрицы связи выбираются из условия существования синхронного многообразия  $M = \{\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) = \dots = \mathbf{x}_n(t)\}$  (диффузионности), то есть полагаются равными  $\varepsilon_{ii} = -\sum_{j=1; j \neq i}^n \varepsilon_{ij}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Многообразие  $M$  представляет собой  $d$ -мерную гиперплоскость в  $(d \times n)$ -мерном пространстве системы (1). Глобальная асимптотическая устойчивость многообразия  $M$  соответствует процессу установления синхронизации в сети. При этом любая траектория системы (1) неограниченно приближается к какому-либо аттрактору, расположенному на  $M$ .

Матрица  $\mathcal{G}$  определяет связный граф с  $n$  вершинами и  $m$  ребрами, где число ребер  $m$  равно числу ненулевых элементов  $\varepsilon_{ij}$ , лежащих над главной диагональю. При этом  $i$ -й вершине графа поставлен в соответствие  $i$ -й осциллятор. Таким образом, если  $l$ -й и  $k$ -й осцилляторы связаны, то есть  $\varepsilon_{lk} = \varepsilon_{kl} > 0$ , то граф имеет ребро, соединяющее  $l$ -ю и  $k$ -ю вершины. Через это ребро проходит путь  $P_{lk}$  единичной длины. В общем случае длина пути  $z(P_{ij})$  равна числу ребер, содержащихся в простой цепи  $P_{ij}$ , соединяющей согласно матрице связи  $\mathcal{G}$   $i$ -ю и  $j$ -ю вершины графа.

В ансамблях хаотических систем, как известно, явление полной синхронизации носит пороговый характер и наблюдается при превышении некоторого критического значения силы связи. В основе метода покрытия цепями графа связи лежит теорема, согласно которой для ансамбля  $n$  идентичных линейно связанных диссипативных элементов синхронное многообразие  $M = \{\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) = \dots = \mathbf{x}_n(t)\}$  глобально асимптотически устойчиво при выполнении следующего условия на коэффициенты связи [11]:

$$\varepsilon_k(t) > \varepsilon_k^* = \frac{a}{n} b_k(n, m). \quad (2)$$

Здесь  $b_k(n, m) = \sum_{j>i; k \in P_{ij}}^n z(P_{ij})$  – сумма длин всех цепей  $P_{ij}$ , проходящих через  $k$ -е ребро связного графа. Параметр  $a$  определяется особенностями динамики индивидуального элемента сети и в общем случае может быть получен различными способами. В частности, в работах [11], [13] и [14] значение этого параметра получено в рамках метода функций Ляпунова на примерах ансамблей систем Лоренца, Хиндмарш–Розе и ФитцХью–Ринцеля, соответственно. Однако, как показывают результаты численного моделирования, определенное таким образом значение  $a$  часто бывает завышенным. При изучении эффекта полной синхронизации в сетях, состоящих из большого числа элементов, для получения более точной оценки можно использовать значение параметра  $a$ , полученное численно для существенно меньших ансамблей. В частности, для системы двух взаимосвязанных осцилляторов нетрудно показать, что  $a = 2\varepsilon^*$ . Как показывают результаты численного моделирования, параметр  $a$  служит «скейлингом», определяемым особенностями динамики одиночного элемента сети. Этот параметр масштабирует количественный закон роста порогов синхронизации, определяемых суммой  $b_k(n, m)$ .

## 2. Переход к режиму полной синхронизации в простейших сетях

**2.1. Взаимная синхронизация двух систем Ходжкина–Хаксли.** Рассмотрим простейшую сеть, состоящую из двух диффузионно связанных систем Ходжкина–Хаксли [9],

$$\begin{aligned} C_m \dot{V}_{1,2} &= I_{ion}(V, m, h, n) + I_{ext}(t) + \varepsilon(V_{2,1} - V_{1,2}), \\ \dot{m}_{1,2} &= \alpha_m(1 - m_{1,2}) - \beta_m m_{1,2}, \\ \dot{h}_{1,2} &= \alpha_h(1 - h_{1,2}) - \beta_h h_{1,2}, \\ \dot{n}_{1,2} &= \alpha_n(1 - n_{1,2}) - \beta_n n_{1,2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Переменная  $V = V_m - V_{eq}$  задает отклонение мембранного потенциала  $V_m$  от его равновесного значения  $V_{eq}$  [10],  $I_{ion}(V, m, h, n) = -G_L(V_{1,2} - V_L) - G_K n_{1,2}^4 (V_{1,2} - V_K) - G_{Na} m_{1,2}^3 h_{1,2} (V_{1,2} - V_{Na})$ . Последние три уравнения в системе (3) описывают изменение так называемых переменных ворот. При этом  $m$  и  $h$  отвечают за активацию и инактивацию  $Na^+$ -тока, переменная  $n$  контролирует активацию  $K^+$ -тока. При численном моделировании мы использовали те же параметры, что и в работе [15]. Параметры сигнала  $I_{ext}(t) = A \sin(2\pi f t)$  выбраны так, что для одиночного элемента наблюдается хаотическая генерация:  $A = 4 \mu A / \text{см}^2$ ,  $f = 123.5$  Гц.

Рассмотрим особенности перехода к режиму полной синхронизации на основе анализа изменения спектра показателей Ляпунова (ПЛ) при увеличении силы связи между элементами (рис. 1, а). Динамическая система восьмого порядка (3) имеет восемь ПЛ. При нулевом значении коэффициента связи ( $\varepsilon = 0$ ) система (3) распадается на две несвязанные между собой подсистемы, каждая из которых имеет три отрицательных и один положительный ПЛ. Подсистемы идентичны, поэтому спектры их одинаковы. Так как обе подсистемы подвержены влиянию синусоидального воздействия, то нулевого ПЛ в спектрах нет.

Появление связи между подсистемами приводит к снятию вырождения. При этом генерация системы (3) происходит в режиме гиперхаоса, о чем свидетельствует наличие в спектре двух положительных ПЛ. Увеличение силы связи приводит к уменьшению их значений. При  $\varepsilon \approx 0.034$  в спектре остается один положительный ПЛ: режим гиперхаоса сменяется хаотическим поведением, которое, в свою очередь, при  $\varepsilon \approx 0.092$  переходит в режим периодической генерации. При  $\varepsilon \approx 0.116$  в системе (3) устанавливается синхронное хаотическое поведение подсистем.

На рис. 1, б изображены множества значений межимпульсных интервалов, наблюдаемых в реализациях одной из подсистем при изменении  $\varepsilon$ . Из рисунка видно, что перед установлением полной синхронизации подсистем при  $\varepsilon \approx 0.092$  увеличение силы связи выводит поведение системы (3) из хаотического режима в режим периодической генерации, при которой каждый третий импульс в реализации отсутствует. При этом, как видно из рис. 1, в, происходит синхронизация с задержкой, о чем свидетельствуют нулевые значения минимумов  $S_{min} = \min_{\tau} S(\tau)$  так называемой функции подобия (*similarity function*) [16]

$$S^2(\tau) = \frac{\langle [V_2(t + \tau) - V_1(t)]^2 \rangle}{\sqrt{\langle V_1^2(t) \rangle \langle V_2^2(t) \rangle}}, \quad (4)$$

где  $V_{1,2}(t)$  – изменение во времени мембранного потенциала соответствующей подсистемы системы (3).

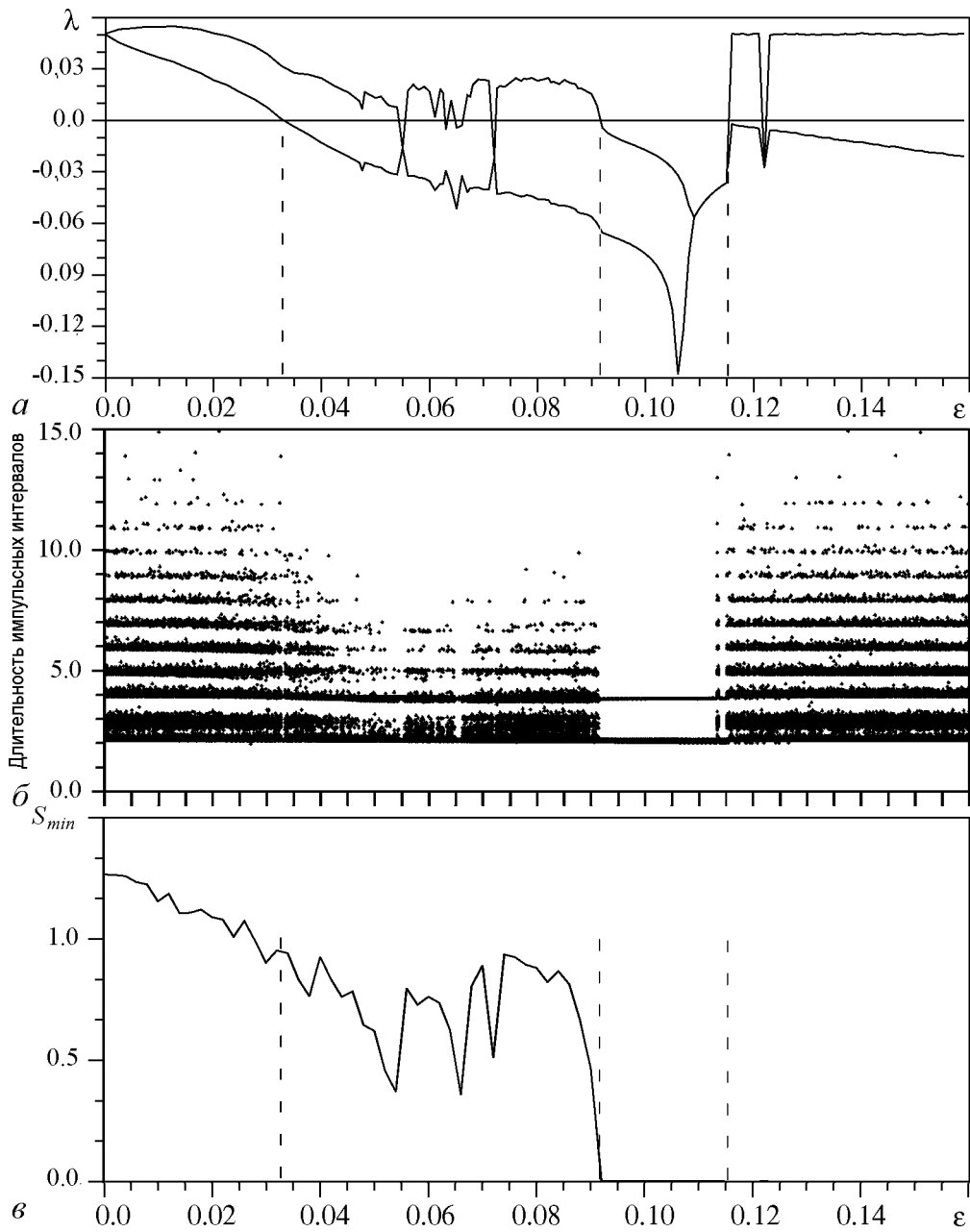


Рис. 1. *a* – изменение двух максимальных показателей Ляпунова при увеличении силы связи в системе (3); *b* – наблюдаемые при изменении силы связи множества возможных значений длительностей интервалов между импульсами в реализации  $V_1(t)$ ; *c* – зависимость минимального значения функции подобия (4) от силы связи

**2.2. Синхронизация общим шумом.** Как и любые другие живые системы в природе, нервные клетки подвержены влиянию различных случайных воздействий окружающей среды [10]. В частности, при регистрации клеточной активности обнаружены флуктуации мембранного потенциала, объясняемые различными синаптическими шумами.

В связи с этим, при изучении коллективной динамики нейродинамических систем, демонстрирующих хаотическое поведение, широкое распространение получили исследования синхронизационных процессов в условиях наличия различных шумов. В частности, определенный интерес вызывают задачи, связанные с возможностью синхронизации подсистем в результате воздействия на них одного и того же шумового поля в отсутствие каких бы то ни было связей между элементами [5]. В этом случае известно, что полная синхронизация возможна под воздействием шума достаточно большой интенсивности [17,18]. Рассмотрим проявление этого эффекта в системе двух несвязанных между собой ( $\varepsilon = 0$ ) элементов Ходжкина–Хаксли

$$\begin{aligned} C_m \dot{V}_{1,2} &= I_{ion}(V, m, h, n) + I_{ext}(t), \\ \dot{m}_{1,2} &= \alpha_m(1 - m_{1,2}) - \beta_m m_{1,2}, \\ \dot{h}_{1,2} &= \alpha_h(1 - h_{1,2}) - \beta_h h_{1,2}, \\ \dot{n}_{1,2} &= \alpha_n(1 - n_{1,2}) - \beta_n n_{1,2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть для обеих систем переменные, отвечающие за изменение мембранного потенциала клетки, подвержены влиянию одного и того же шумового поля. Таким образом, рассматриваемое внешнее воздействие есть  $I_{ext}(t) = A \sin(2\pi ft) + \xi(t)$ . При этом шумовая компонента рассматриваемого поля  $\xi(t)$  моделируется белым гауссовым процессом с нулевым средним  $\langle \xi(t) \rangle = 0$  и корреляционной функцией  $\langle \xi(t)\xi(t + \tau) \rangle = D\delta(\tau)$ .

При численном моделировании в качестве критерия для обнаружения режима полного синхронизма элементов в ансамбле использовалось понятие *относительной ошибки синхронизации* [5]

$$\delta = \frac{\langle |V_1 - V_2| \rangle}{\sigma_V}. \quad (6)$$

Здесь  $V_{1,2}$  – переменная, отвечающая за изменение мембранного потенциала соответствующей клетки,  $\sigma_V$  – среднеквадратичное отклонение переменной  $V$ .

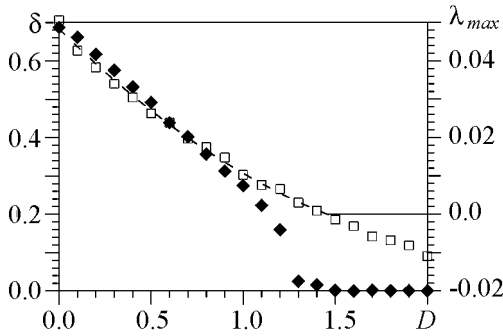


Рис. 2. Зависимость относительной ошибки синхронизации  $\delta$  (◆) и старшего показателя Ляпунова  $\lambda_{max}$  (□) от интенсивности шума  $D$

На рис. 2 представлена зависимость относительной ошибки синхронизации  $\delta$  и старшего ПЛ отдельного элемента от интенсивности шума  $D$ . Из рисунка видно, что смена знака  $\lambda$  происходит при  $D_c \approx 1.5$ . Начиная с этого же значения интенсивности шума поведение элементов в рассматриваемом ансамбле становится синхронным, о чем свидетельствуют пренебрежимо малые значения относительной ошибки синхронизации. Иначе говоря, при  $D > D_c$  синхронное поведение элементов Ходжкина–Хаксли устанавливается и в

отсутствие каких бы то ни было связей между ними. Таким образом, для установления синхронного поведения элементов, подверженных влиянию одного и того же шумового поля, необходимо, чтобы старший ПЛ стал меньше нуля [19].

### 3. Синхронизация в сетях, содержащих структуры типа «звезда»

Как было сказано ранее, в методе покрытия цепями графа связи влияние особенностей динамики индивидуального элемента сети на значение порога синхронизации заложено в параметре  $a$  выражения (2). Поэтому, учитывая широкий спектр моделей, задающих математическое описание для изменения мембранного потенциала нервной клетки, при дальнейшем теоретическом анализе будем рассматривать силы связи вида

$$\tilde{\varepsilon}_k^* = \frac{\varepsilon_k^*}{a} = \frac{b_k(n, m)}{n}. \quad (7)$$

**3.1. Порог синхронизации в рамках метода покрытия цепями графа связи. Детерминированный случай.** В данном разделе для коэффициентов связи получим достаточные условия, при которых в ансамбле, изображенном на рис. 3, устанавливается режим полной синхронизации. Введем следующие обозначения:  $m_c$  – число элементов, составляющих цепочку, соединяющую центральные узлы «звезд»;  $m_{st}^l, m_{st}^s$  – число элементов в «звездах». Индексы  $l, s$  введены для того, чтобы можно было различать «звезды» между собой. Таким образом, полное число элементов, входящих в сеть есть  $n = m_{st}^l + m_{st}^s + m_c$ .

**Утверждение 1:** В ансамбле, представляющем собой две «звезды», связанные посредством цепочки, порог синхронизации для  $k$ -го ребра цепочки ( $k = 1, 2, \dots, m_c + 1$ ) определяется выражением

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_k^* = & -0.5k^2 + \frac{m_c^2 + 2m_c + 2m_cm_{st}^s + 5m_{st}^s - m_{st}^l}{2(m_c + m_{st}^l + m_{st}^s)}k + \\ & + \frac{(m_{st}^l - 1)[m_c(m_c + 3 + 2m_{st}^s) + 6m_{st}^s]}{2(m_c + m_{st}^l + m_{st}^s)}, \end{aligned} \quad (8)$$

а для ребер, которые не принадлежат цепочке (то есть ребер  $\zeta_l$  или  $\zeta_s$ ) – выражением

$$\tilde{\varepsilon}_{m_{st}^{l,s}}^* = \frac{m_c^2 + 3m_c - 8 + 4m_{st}^{l,s} + 2(m_c + 3)m_{st}^{s,l}}{2(m_c + m_{st}^l + m_{st}^s)}. \quad (9)$$

**Доказательство:** см. Приложение.

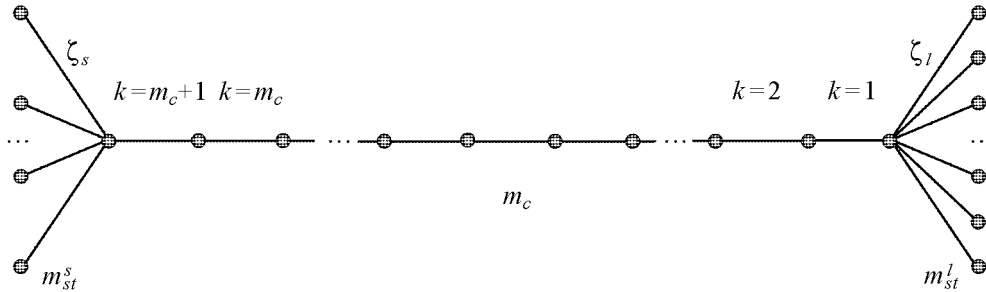


Рис. 3. Структура сети, в которой две «звезды» объединены посредством цепочки последовательно связанных элементов

Выражения (8) и (9) задают детальное распределение сил связи по ребрам структуры. Однако далее рассмотрим характеристику, отражающую изменение суммарных затрат на коэффициенты связи при увеличении числа элементов в сети,

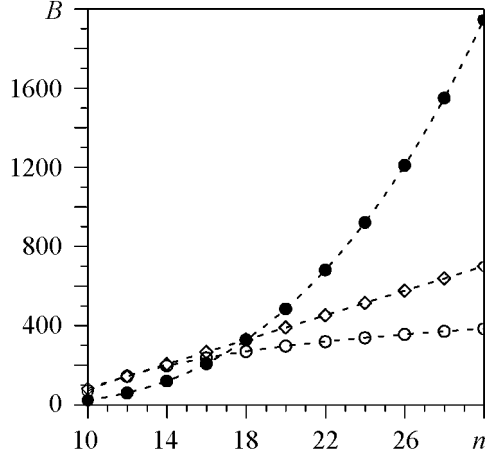


Рис. 4. Изменение суммарной силы связи  $B$  при увеличении числа элементов  $n$  в неоднородно связанной сети, содержащей структуры «звезды». Рассмотрены случаи, когда увеличивается число элементов в цепочке  $m_c, m_{st}^l = m_{st}^s = 5$  (●) и число элементов либо в одной из «звезд»  $m_{st}^l, m_{st}^s = 2, m_c = 8$  (○), либо в обеих «звездах» одновременно  $m_{st}^l = m_{st}^s, m_c = 8$  (◇)

$$B = \sum_{k=1}^{m_c+1} \tilde{\varepsilon}_k^* + \sum_{\zeta_l=1}^{m_{st}^l-1} \tilde{\varepsilon}_{m_{st}^l}^* + \sum_{\zeta_s=1}^{m_{st}^s-1} \tilde{\varepsilon}_{m_{st}^s}^*. \quad (10)$$

Эта характеристика позволяет оценить увеличение полной «стоимости» сети, достаточной для расширения ансамбля без потери устойчивости синхронного состояния [20]. Так, для цепочки  $B = \sum_{k=1}^{n-1} 0.5ak(n-k) = an(n^2-1)/12$  [21]. Следовательно, для поддержания синхронного состояния при увеличении числа элементов в цепочке суммарная сила связи должна увеличиваться пропорционально  $n^3$ . В отличие от цепочки, в структурах типа «звезда», где  $\varepsilon^* \sim (2-3/n)$  (вывод см. в работе [11]),  $B = \sum_{k=1}^{n-1} (2-3/n) = 2n-5+3/n$ . Организация синхронного поведения элементов в сетях такого типа требует существенно меньших затрат.

Зависимость суммарной силы связи  $B$  от числа элементов в сети рассматриваемой структуры (см. рис. 3) можно также получить аналитически, а именно:

$$B = \frac{m_c^4 + 4(m_{st}^s + m_{st}^l)m_c^3 + (18m_{st}^s - 25 + 18m_{st}^l + 12m_{st}^s m_{st}^l)m_c^2}{12(m_{st}^l + m_{st}^s + m_c)} + \frac{2m_c(m_{st}^l + m_{st}^s + 36m_{st}^s m_{st}^l - 24)}{12(m_{st}^l + m_{st}^s + m_c)} + \frac{12[2(m_{st}^l - 5)m_{st}^l - 10m_{st}^s + 9m_{st}^l m_{st}^s + 2(m_{st}^s)^2 + 8]}{12(m_{st}^l + m_{st}^s + m_c)}. \quad (11)$$

Изменение  $B$ , наблюдаемое при различных сценариях увеличения числа элементов  $n$ , представлено на рис. 4. При этом увеличение силы связи  $\tilde{\varepsilon}_k^*$  может происходить по любому закону, переводящему точки с кривой одного распределения (задаваемого выражениями (8) и (9)) на кривую распределения, полученного для большего числа элементов.

Ребра, принадлежащие цепочке, изображенной на рис. 3, нагружены больше, чем ребра, непосредственно входящие в «звезды». Из выражения (8) получаем, что



ребро, на которое приходится максимальное значение силы связи, есть

$$k = \frac{m_c^2 + 2m_c + 2m_cm_{st}^s + 5m_{st}^s - m_{st}^l}{2(m_c + m_{st}^l + m_{st}^s)}. \quad (12)$$

Номер этого ребра зависит и от числа элементов в цепочке, и от числа элементов в «звездах». На рис. 5, *a* представлены распределения пороговых значений сил связи  $\tilde{\varepsilon}_k^*$  для двух случаев (симметричной и несимметричной сети) при фиксированной длине цепочки ( $m_c = \text{const}$ ).

Из рисунка видно, что увеличение числа элементов в одной из «звезд» приводит к смещению наиболее нагруженного ребра, для которого порог синхронизации максимален. При этом все значения  $\tilde{\varepsilon}_k^*$  становятся меньше по сравнению со случаем одинакового увеличения числа элементов в обеих «звездах». Таким образом, нарушение симметрии приводит к понижению порогов синхронизации.

В случае однородной связи (когда  $\varepsilon_k = \varepsilon$  для всех ребер сети) порог синхронизации определяется максимальным значением  $\tilde{\varepsilon}^* = \max_k \tilde{\varepsilon}_k^*$ . В связи с этим номер наиболее «нагруженного» ребра цепочки представляет особый интерес. На рис. 5, *б* представлена поверхность максимальных значений  $\tilde{\varepsilon}^*$ . Значения  $\tilde{\varepsilon}^*$ , задаваемые этой поверхностью, являются достаточными для установления режима полной синхронизации в соответствующих ансамблях однородно связанных элементов. В этом случае пороговое значение коэффициента связи определяется следующим образом.

**Утверждение 2:** Порог синхронизации в ансамбле, представляющем собой две связанные посредством цепочки «звезды» (связь однородная), определяется как

$$\tilde{\varepsilon}^* = \frac{(m_c + 3)(m_{st}^l - 1)(m_c + 2m_{st}^s)}{2(m_c + m_{st}^l + m_{st}^s)} + \frac{[m_{st}^l - 5m_{st}^s - m_c(m_c + 2m_{st}^s + 2)]^2}{8(m_c + m_{st}^l + m_{st}^s)^2}. \quad (13)$$

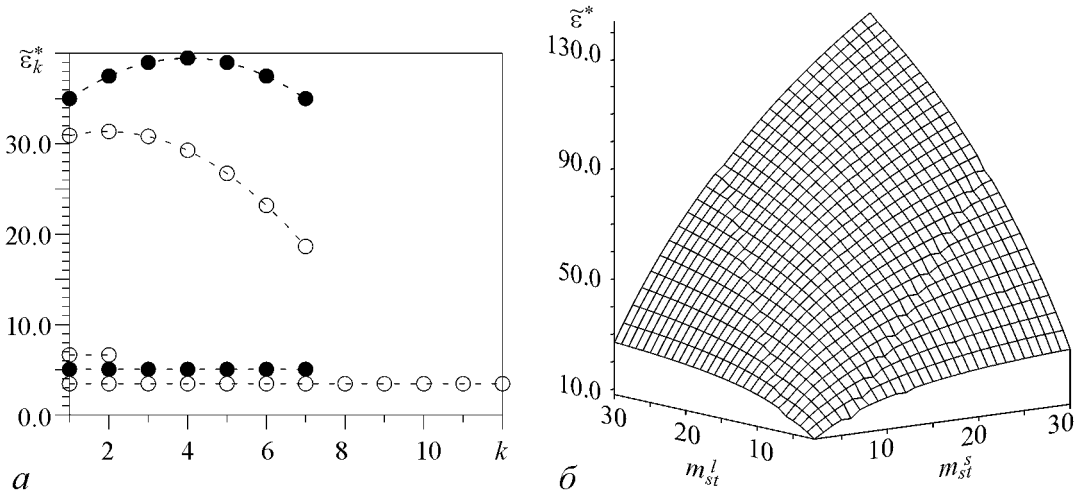


Рис. 5. *a* – распределение пороговых значений сил связи  $\tilde{\varepsilon}_k^*$ , достаточных для установления режима полной синхронизации в ансамбле, представляющем собой две «звезды», объединенные посредством цепочки последовательно связанных элементов. Рассмотрены случаи, когда «звезды» состоят из различного числа элементов  $m_{st}^l = 13, m_{st}^s = 3$  ( $\circ$ ), и когда число элементов в «звездах» одинаково  $m_{st}^l = m_{st}^s = 8$  ( $\bullet$ ). Число элементов в цепочке фиксировано  $m_c = 6$ . Две верхние кривые соответствуют распределениям порогов синхронизации по ребрам цепочки. Пороговые значения сил связи для ребер  $\zeta_l$  или  $\zeta_s$ , принадлежащих «звездам», одинаковы. Число таких ребер равно  $(m_{st}^l - 1)$  или  $(m_{st}^s - 1)$ , соответственно. *б* – поверхность максимальных значений порогов синхронизации,  $m_c = 6$

Отметим, что порог синхронизации в случае симметричной структуры сети ( $m_{st}^s = m_{st}^l$ ) всегда больше, чем при  $m_{st}^s \neq m_{st}^l$ .

Рассмотрим три сценария, по которым может происходить увеличение числа узлов  $n$  в сети, состоящей из элементов Ходжкина–Хаксли.

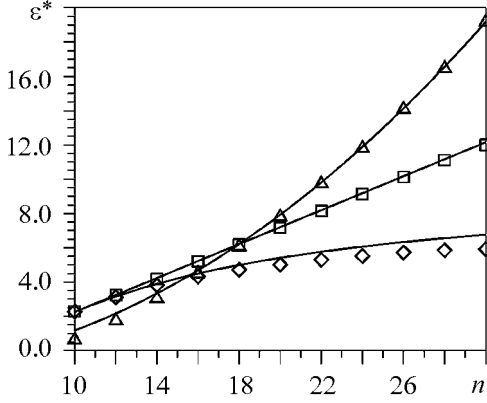


Рис. 6. Зависимость порога синхронизации  $\varepsilon^*$  ( $a = 0.18$ ) от числа элементов  $n$ . Теоретические оценки представлены кривыми, результаты численного счета – символами. Рассмотрены два случая симметричной структуры ( $m_c = 8$  –  $\square$ ;  $m_{st}^l = m_{st}^s = 5$  –  $\triangle$ ) и случай сильно несимметричной структуры ( $m_c = 7$  и  $m_{st}^s = 2$  –  $\diamond$ ; при этом одна из «звезд» вырождается)

происходит благодаря увеличению числа элементов в одной из «звезд»  $m_{st}^l$ . Как и в предыдущих случаях, из формулы (13) получаем

$$\tilde{\varepsilon}^* = \frac{(110 - 21n)^2}{8n^2}. \quad (16)$$

Как видно из рис. 6, теоретические зависимости, полученные для порогов синхронизации в рамках метода покрытия цепями графа связи ( $\varepsilon^* = a\tilde{\varepsilon}^*$ ), дают хорошее согласование с результатами численного моделирования.

**3.2. Влияние шумов.** Рассмотрим случай, когда во всех подсистемах ансамбля переменные, отвечающие за изменение мембранного потенциала клетки, подвержены влиянию одного и того же шумового поля  $\xi(t)$ , моделируемого белым гауссовым процессом с нулевым средним  $\langle \xi(t) \rangle = 0$  и корреляционной функцией  $\langle \xi(t)\xi(t + \tau) \rangle = D\delta(\tau)$ .

Полученные в п. 3.1 в рамках метода покрытия цепями графа связи условия на пороги синхронизации позволяют оценить изменение этих порогов и при наличии шумового поля. Флуктуации не влияют на качественную картину поведения сил связи при изменении числа элементов в ансамбле. Так, например, если в детерминированном случае для цепочки  $n$  последовательно связанных осцилляторов рост порогов синхронизации происходит пропорционально квадрату  $n$ , то и при наличии шумового воздействия такая зависимость сохранится [21]. Необходимо лишь

- *Симметричный случай с  $m_c = \text{const}$  ( $m_c = 8$ ).* Пусть увеличивается число элементов в «звездах», при этом ( $m_{st}^l = m_{st}^s \equiv m_{st}$ ). Полное число элементов в таком ансамбле определяется как  $n = 8 + 2m_{st}$ . Подставляя  $m_{st} = 0.5(n - 8)$  в (13), получаем

$$\tilde{\varepsilon}^* = \frac{11n}{4} - 15. \quad (14)$$

- *Симметричный случай с  $m_{st}^l = m_{st}^s \equiv m_{st} = \text{const}$  ( $m_{st} = 5$ ).* Пусть увеличивается число элементов в цепочке  $m_c$ . Подстановка  $m_c = n - 10$  в (13) дает

$$\tilde{\varepsilon}^* = \frac{n^2}{8} - 6. \quad (15)$$

- *Асимметричный случай с  $m_c = \text{const}$  и  $m_{st}^s = \text{const}$  ( $m_c = 7$ ,  $m_{st}^s = 2$ ).* Пусть расширение сети происходит

определенным образом изменить значение параметра  $a$ , входящего в выражение для оценки порогов синхронизации. При этом закон изменения сил связи, достаточных для установления режима полной синхронизации, примет следующий вид:

$$\varepsilon_D^*(n) = \tilde{a} \tilde{\varepsilon}^*(n), \quad \tilde{a} = a \frac{\lambda_{max}^D}{\lambda_{max}^0}, \quad D < D_c. \quad (17)$$

Здесь  $\lambda_{max}^0, \lambda_{max}^D$  – значения старшего ПЛ в детерминированном случае и при наличии шума с интенсивностью  $D$ , соответственно. В выражении (17)  $D_c \approx 1.5$  – значение интенсивности шума, при котором старший ПЛ становится отрицательным. Также, зная характер зависимости  $\lambda_{max}(D)$ , полученной для индивидуального элемента сети, можно в итоге получить зависимость порога синхронизации от интенсивности шумового поля

$$\varepsilon^*(D) = \frac{\varepsilon^*}{\lambda_{max}^0} \lambda_{max}(D), \quad D < D_c. \quad (18)$$

Здесь  $\varepsilon^*$  – пороговое значение силы связи, определяемое выражением (13). На рис. 7 изображены зависимости  $\varepsilon^*(D)$  для сетей, структуры которых были рассмотрены в п. 3.1 ( $n = 30$ ).

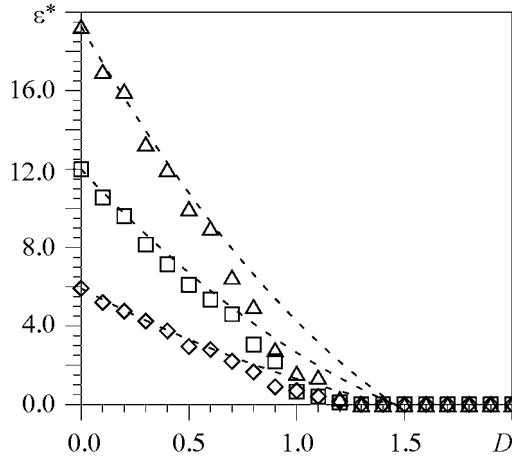


Рис. 7. Зависимость порога синхронизации от интенсивности шума  $D$ . Теоретические оценки представлены кривыми, результаты численного счета – символами. Рассмотрены сети, состоящие из  $n = 30$  элементов: симметричный случай с  $m_c = 8$  (□), симметричный случай с  $m_{st}^l = m_{st}^s \equiv m_{st} = 5$  (Δ) и асимметричный случай с  $m_c = 7$  и  $m_{st}^s = 2$  (◇)

### Заключение

Исследованы особенности установления режима полной синхронизации в сетях диффузионно связанных элементов Ходжкина–Хаксли. В рамках метода покрытия цепями графа связи [11] проводится анализ глобальной устойчивости режима полной синхронизации в сетях, состоящих из структур типа «звезда». Получены условия, определяющие закон изменения значений коэффициентов связи, достаточных для поддержания режима синхронного поведения элементов в таком ансамбле. Показано, что порог синхронизации всегда больше в случае симметричной конфигурации сети, когда число элементов в «звездах» одинаково. Рассмотрены различные сценарии, по которым может происходить развитие рассматриваемой сети. Показано, что при расширении сети за счет увеличения числа элементов в цепочке, нарастание порога синхронизации происходит по квадратичному закону. Этот сценарий развития сети требует максимальных затрат ресурса связи. Исследовано влияние общего шумового воздействия на изменение пороговых сил связи. Оценки, полученные в рамках используемого теоретического подхода, хорошо согласуются с результатами численного моделирования.

Полученные в данной работе результаты позволяют продемонстрировать эффективность использования метода покрытия цепями графа связи для оценки порогов синхронизации в различных сетях. В общем случае конфигурация связей исследуемого ансамбля может быть более сложной. В частности, в работе [20] проведен анализ некоторых аспектов синхронизации в многослойных сетях, используемых при моделировании сенсорно-двигательных систем. В работе [22] рассмотрена модель типа *small-world*, состоящая из кольца осцилляторов, в котором связь между ближайшими соседями жесткая, а между дальними по отношению друг к другу элементами связь возникает в случайные моменты времени (так называемая мерцающая модель). Более того, метод покрытия цепями графа связи позволяет рассматривать сети, коэффициенты связи в которых зависят от времени. Для таких сетей, как известно, методы, основанные на вычислении собственных значений матрицы связи, не могут дать результата. При этом очевидно, что достаточные условия полной синхронизации, полученные в рамках используемого в данной работе подхода, могут быть использованы не только в контексте нейродинамических систем, но и в различных приложениях, где проблема контроля синхронного поведения подсистем является актуальной.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 05-01-00509 и 07-02-01404), гранта РФФИ-NWO 047-017-018 и гранта фонда «Династия».*

## Приложение

### Вывод Утверждения 1

1. *Ребра, принадлежащие соединяющей «звезды» цепочке.* Записывая сумму длин цепей  $P_{ij}$ , проходящих через ребро  $k = 1$  рассматриваемого графа (см. рис. 3), получаем

$$\begin{aligned}
 b_{k=1}(n, 1) &= 1 + 2[1 + (m_{st}^l - 1)] + \dots + (m_c + 1)[1 + (m_{st}^l - 1)] + \\
 &+ (m_c + 2)[(m_{st}^s - 1) + (m_{st}^l - 1)] + (m_c + 3)(m_{st}^s - 1)(m_{st}^l - 1) = \\
 &= \underbrace{[1 + \dots + (m_c + 1)]}_{S_1} + (m_{st}^l - 1)[2 + \dots + (m_c + 2)] + \\
 &+ (m_{st}^s - 1)(m_c + 2) + (m_c + 3)(m_{st}^s - 1)(m_{st}^l - 1).
 \end{aligned} \tag{19}$$

Здесь сумма  $S_1$  есть сумма длин цепей, проходящих через крайнее ребро цепочки, состоящей из  $m_c + 2$  элементов. Выражение для произвольного ребра цепочки известно [21], поэтому сумма (19) в общем случае может быть переписана в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 b_k(n, k) &= 0.5k(m_c + 2)(m_c + 2 - k) + (m_{st}^l - 1) \underbrace{[(k + 1) + \dots + (m_c + 2)]}_{(m_c + 2 - k) \text{ элементов}} + \\
 &+ (m_{st}^s - 1) \underbrace{[(m_c + 3 - k) + \dots + (m_c + 2)]}_{k \text{ элементов}} + (m_c + 3)(m_{st}^s - 1)(m_{st}^l - 1).
 \end{aligned} \tag{20}$$

В результате подсчета сумм  $S_2$  и  $S_3$ , а также дальнейшего упрощения выражения (20) для суммы длин цепей, проходящих через  $k$ -е ребро рассматриваемой сети, получаем

$$\begin{aligned} b_k(n, k) = & -0.5k^2(m_c + m_{st}^l + m_{st}^s) + \\ & + k(0.5m_c^2 + m_c + m_c m_{st}^s + 2.5m_{st}^s - 0.5m_{st}^l) + \\ & + 0.5m_c m_{st}^l (m_c + 3 + 2m_{st}^s) - 0.5m_c(m_c + 3 + 2m_{st}^s) + 3m_{st}^l m_{st}^s - 3m_{st}^s. \end{aligned} \quad (21)$$

Учитывая (21), согласно (2), получаем распределение пороговых значений сил связей в цепочке, соединяющей центральные узлы звезд

$$\begin{aligned} \varepsilon_k^* = & -0.5k^2 + \frac{m_c^2 + 2m_c + 2m_c m_{st}^s + 5m_{st}^s - m_{st}^l}{2(m_c + m_{st}^l + m_{st}^s)} k + \\ & + \frac{m_c m_{st}^l (m_c + 3 + 2m_{st}^s) - m_c(m_c + 3 + 2m_{st}^s) + 6m_{st}^s (m_{st}^l - 1)}{2(m_c + m_{st}^l + m_{st}^s)}, \end{aligned} \quad (22)$$

или

$$\begin{aligned} \varepsilon_k^* = & -0.5k^2 + \frac{m_c^2 + 2m_c + 2m_c m_{st}^s + 5m_{st}^s - m_{st}^l}{2(m_c + m_{st}^l + m_{st}^s)} k + \\ & + \frac{(m_{st}^l - 1)[m_c(m_c + 3 + 2m_{st}^s) + 6m_{st}^s]}{2(m_c + m_{st}^l + m_{st}^s)}. \end{aligned} \quad (23)$$

2. Ребра, не принадлежащие соединяющей «звезды» цепочке. Запишем сумму длин цепей, проходящих через ребро  $\zeta_l$  (см. рис. 3):

$$\begin{aligned} b_{m_{st}^l} = & 1 + 2(m_{st}^l - 1) + [3 + \dots + (m_c + 2)] + (m_c + 3)(m_{st}^s - 1) = \\ = & 0.5m_c^2 + 1.5m_c - 4 + 2m_{st}^l + (m_c + 3)m_{st}^s \end{aligned} \quad (24)$$

Аналогично, для ребра  $\zeta_s$  получаем

$$b_{m_{st}^s} = 0.5m_c^2 + 1.5m_c - 4 + 2m_{st}^s + (m_c + 3)m_{st}^l. \quad (25)$$

В результате, согласно (2), пороговые значения сил связи определяются как

$$\varepsilon_{m_{st}^{l,s}}^* = \frac{m_c^2 + 3m_c - 8 + 4m_{st}^{l,s} + 2(m_c + 3)m_{st}^{s,l}}{2(m_c + m_{st}^l + m_{st}^s)}. \quad (26)$$

■

## Библиографический список

1. Anischenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E., and Safonova M.A. Synchronization of chaos // Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng. 1992. Vol. 2. P. 633.
2. Parmananda P. Generalized synchronization of spatiotemporal chemical chaos // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 56. P. 1595.
3. Абарбанель Г.Д.И., Рабинович М.И., Селверстон А., Баженов М.В., Хуэрта Р., Суццик М.М., Рубчинский Л.Л. Синхронизация в нейронных ансамблях // Успехи физических наук. 1996. Т. 166, № 4. С. 363.

4. *Belykh I., Lange E., and Hasler M.* Synchronization of bursting neurons: what matters in the network topology // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 94. P. 188101.
5. *Zhou C. and Kurths J.* Noise-induced synchronization and coherence resonance of a Hodgkin–Huxley model of thermally sensitive neurons // *Chaos.* 2003. Vol. 13. P. 401.
6. *Gray C.M., König P., Engel A.K., and Singer W.* Oscillatory responses in cat visual cortex exhibit inter-columnar synchronization which reflects global stimulus properties // *Nature.* 1989. Vol. 338. P. 334.
7. *Stopfer M., Bhagavan S., Smith B.H., and Laurent G.* Impaired odour discrimination on desynchronization of odour-encoding neural assemblies // *Nature.* 1997. Vol. 390. P. 70.
8. *Steinmetz P.N., Roy A., Fitzgerald P.J., Hsiao S.S, Johnson K.O., and Niebur E.* Attention modulates synchronized neuronal firing in primate somatosensory cortex // *Nature.* 2000. Vol. 404. P. 187.
9. *Hodgkin A.L. and Huxley A.F.* A quantitative description of membrane current and its application conduction and excitation in nerve // *J. Physiology.* 1952. Vol. 117. P. 500.
10. *Keener J. and Sneyd J.* *Mathematical Physiology.* Berlin: Springer Verlag, 1998.
11. *Belykh V.N., Belykh I.V., Hasler M.* Connection graph stability method for synchronized coupled chaotic systems // *Physica D.* 2004. Vol. 195. P. 159.
12. *Блум Ф., Лейзерсон А., Хофстедтер Л.* Мозг, разум и поведение Москва: Мир, 1988.
13. *Belykh I.V., Hasler M., Lauret M., Nijmeijer H.* Synchronization and graph topology // *Int. J. Bif. and Chaos.* 2005. Vol. 15. P. 3423.
14. *Белых В.Н., Панкратова Е.В.* Хаотическая синхронизация в ансамблях связанных нейронов, моделируемых системой ФитцХью–Ринцеля // *Изв. вузов. Радиофизика.* 2006. Т. 49. С. 910.
15. *Pankratova E.V., Belykh V.N., and Mosekilde E.* Role of the driving frequency in a randomly perturbed Hodgkin–Huxley neuron with suprathreshold forcing // *Europ. Phys. J. B.* 2006. P. 00401.
16. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., and Kurths J.* From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol.78. P. 4193.
17. *Toral R., Mirasso C.R., Hernandez-Garcia E., and Piro O.* Analytical and numerical studies of noise-induced synchronization of chaotic systems // *Chaos.* 2001. Vol.11. P. 665.
18. *Jensen R.V.* Synchronization of randomly driven nonlinear oscillators // *Phys. Rev. E.* 1998. Vol. 58. P. 6907.
19. *Пиковский А., Розенблум М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. Москва: Техносфера, 2003.
20. *Belykh V.N. and Pankratova E.V.* Synchronization and control in ensembles of periodic and chaotic neuronal elements with time dependent coupling // *Proceedings of 3rd IFAC Workshop «Periodic Control Systems» PSYCO-07, 2007.*
21. *Belykh V.N., Pankratova E.V., and Mosekilde E.* Dynamics and synchronization of

noise perturbed ensembles of periodically activated neuron cells // Int. J. Bif. Chaos. 2008 (in press).

22. *Belykh V.N., Belykh I.V., Hasler M.* Blinking model and synchronization in small-world networks with a time-varying coupling // Physica D. 2004. Vol. 195. P. 188.

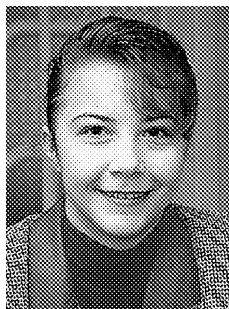
*Волжская государственная  
академия водного транспорта,  
Нижний Новгород*

*Поступила в редакцию 29.10.2007  
После доработки 12.02.2008*

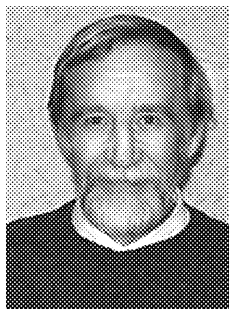
## THE PECULIARITIES OF TRANSITION TO COMPLETE SYNCHRONIZATION IN NETWORKS OF HODGKIN–HUXLEY ELEMENTS

*E.V. Pankratova, V.N. Belykh*

In this paper we consider various networks of mutually coupled identical Hodgkin–Huxley systems. The peculiarities of transition to complete synchronization in networks subjected to suprathreshold periodic driving and common random forcing are examined both theoretically and through numerical simulation. The conditions for global stability of complete synchronization in networks of two «star»-coupled structures are obtained within the framework of connection graph stability method. Various scenarios determining the increase of the number of elements in such ensembles are considered. The behavior of the coupling strength necessary to achieve complete synchronization in the presence of random forcing is examined.



*Панкратова Евгения Валерьевна* – родилась в 1981 году в Горьком, окончила радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского в 2004 году. На данный момент аспирант кафедры математики Волжской государственной академии водного транспорта. Область научных интересов: динамический хаос, бифуркации, случайные процессы, синхронизация.  
E-mail: [pankratova@aqu.sci-nnov.ru](mailto:pankratova@aqu.sci-nnov.ru).



*Белых Владимир Николаевич* – родился в 1943 году в Горьковской области, окончил радиофизический факультет Горьковского университета в 1966 году. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ГГУ (1972) и доктора физико-математических наук (1985) по специальности дифференциальные уравнения и математическая физика. Лауреат премии ленинского комсомола (1974). Заслуженный деятель науки Российской Федерации (1993), соросовский профессор (1995). Заведующий кафедрой математики Волжской государственной академии водного транспорта, действительный член Академии транспорта Российской Федерации. Область научных интересов: динамический хаос, теория бифуркаций динамических систем, теория колебаний, синхронизация, радиофизика. Опубликовал более 200 научных работ по указанным выше направлениям.  
E-mail: [belykh@aqu.sci-nnov.ru](mailto:belykh@aqu.sci-nnov.ru)



## КВАНТОВЫЙ ПРОСТРАНСТВЕННО-ОГРАНИЧЕННЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР В СИСТЕМЕ С ТРЕНИЕМ И ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

*А.Л. Санин, А.А. Смирновский*

Динамика квантовых волновых пакетов в одномерной системе с пространственно-ограниченным квадратичным потенциалом, обратной связью и трением исследована численно в рамках уравнения Шредингера–Ланжевена–Костина. При определенных значениях силы обратной связи и коэффициента трения возможны когерентные колебания в системе. Существуют критические значения этих параметров, когда колебания становятся сложными, произведение неопределенностей резко возрастает, осциллирует, а фурье-спектр колебаний становится всюду плотным.

### **Введение: обратная связь и формулировка задачи**

Квантовые системы, характеризующиеся в классическом пределе нелинейными динамическими свойствами, являются объектом интенсивных исследований как теоретических, так и экспериментальных. Среди них особое внимание уделяется гамильтоновым системам, у которых потенциальные функции являются периодическими по координате и времени. Временная зависимость может быть непрерывной, в виде мгновенных ударов или импульсов конечной длительности [1, 2]. Одна из моделей таких квантовых систем – частица в потенциальной яме с непроницаемыми стенками – исследовалась во многих статьях, например, в [3, 4]. Другая – осциллятор в потенциальной яме – представляет не меньший интерес как для теории, так и приложений. Эта модель также обсуждалась неоднократно, в частности, в [5, 6]. Классические системы, являющиеся «двойниками» квантовых, с периодическими по координате и времени потенциальными функциями изучались длительное время; им посвящено много публикаций, следует отметить хотя бы некоторые из них [7–9]. Наряду с гамильтоновыми системами, в классической теории детально исследованы нелинейные диссипативные системы, например, осциллятор ван дер Поля, электронные автогенераторы [7, 9]. Переход к наноразмерам, аттосекундным лазерным импульсам является стимулом для исследования квантовых динамических закономерностей и разработки теории квантового осциллятора с трением и обратной связью, который в классическом пределе соответствует известным моделям автоколебательной системы. Для построения простейшего квантового осциллятора-аналога можно использовать классическую модель механических часов, достаточно общую и не зависящую от конкретной конструкции, которая обсуждалась в монографии [9]. Эта



модель описывается уравнением

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x = p \sum_{t_s} \delta(t - t_s), \quad (1)$$

где  $t_s$  – моменты включения импульсного источника (удара), когда система проходит через равновесное состояние;  $\delta$  – дельта-функция Дирака;  $p$  – параметр интенсивности обратной связи. Если правая часть (1) отсутствует, то это уравнение описывает затухающие колебания осциллятора, параметр  $k$  характеризует трение. В целом уравнение (1) описывает автоколебания в системе с трением и обратной связью. Оно анализировалось в [9] как для  $k > 0$ , так и для  $k < 0$ . Наряду с моделью, описываемой уравнением (1), можно рассмотреть другую классическую модель, задаваемую в виде потенциала обратной связи

$$U_{oc} = \begin{cases} -F_0 x, & t \in (t_s, t_s + \Delta t), \\ 0, & t \notin (t_s, t_s + \Delta t). \end{cases} \quad (2)$$

Этот потенциал определяет силу  $F_0$ , действующую на промежутке  $t_s < t < t_s + \Delta t$ , где  $\Delta t$  есть длительность действия силы. В качестве моментов  $t_s$  выбирались различные варианты, отличающиеся положением фазовой точки на фазовой плоскости. Один из них – когда система проходит через равновесное состояние. Предложенный потенциал (2) применялся ниже для анализа классической модели осциллятора и его квантового аналога.

В настоящей статье представлены результаты исследования когерентных колебаний квантового осциллятора, подверженного обратной связи и трению, а также сложных колебаний, когда соотношение неопределенностей не является минимизированным, а фурье-спектр становится всюду плотным. Для описания динамических закономерностей используется уравнение Шредингера–Ланжевена–Костина (ШЛК) [10]. Это уравнение обсуждалось нами и применялось для исследования конкретных квантовых систем, в том числе для упомянутых выше [11–14]. Статья содержит четыре раздела. В первом формулируются основные уравнения и решения стационарной задачи. Второй раздел посвящён когерентным колебаниям пространственно-ограниченного осциллятора, подверженного обратной связи и трению. В третьем и четвертом разделах анализируются временные промежутки между последовательными включениями обратной связи и переход к сложным колебаниям.

## 1. Основные положения, спектр энергий

Уравнение ШЛК, записанное в безразмерном виде, можно представить как

$$i \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \zeta^2} + \tilde{U}_\Sigma \tilde{\psi} - \frac{ik}{2} \left( \ln \frac{\tilde{\psi}}{\tilde{\psi}^*} - \left\langle \ln \frac{\tilde{\psi}}{\tilde{\psi}^*} \right\rangle \right) \tilde{\psi}, \quad (3)$$

где безразмерные величины определяются следующим образом:  $\zeta = x/b_\delta$ ,  $\tau = t/t_\delta$ ,  $\tilde{U}_\Sigma = U_\Sigma/U_\delta$ ,  $\tilde{\psi} = \psi/\psi_\delta$ ,  $k = f/(m_e \omega_\delta)$ ,  $\partial/\partial t = (1/\tau_\delta) \partial/\partial \tau$ ,  $\partial^2/\partial x^2 = (1/b_\delta^2) \partial^2/\partial \zeta^2$ , а единицы измерения равны  $b_\delta = \sqrt{\hbar/(m_e \omega_\delta)}$ ,  $t_\delta = \omega_\delta^{-1}$ ,  $U_\delta = \hbar^2/(m_e b_\delta^2)$ ,  $\psi_\delta = \sqrt{b_\delta^{-1}}$ . Здесь  $x$ ,  $t$  – координата и время, соответственно;

$f$  – диссипативный коэффициент;  $\psi$  – волновая функция;  $m_e$ ,  $\hbar$  – масса частицы и постоянная Планка, соответственно. Безразмерная комплексно-сопряженная волновая функция обозначена как  $\tilde{\psi}^*$ ,  $i$  – мнимая единица. Рассматриваемая квантовая система ограничена непроницаемыми стенками в точках  $\zeta = \pm\zeta_L$ , где  $\zeta_L = L/b_\delta$ ,  $L$  – полуширина системы. Величина  $\tilde{U}_\Sigma$  состоит из двух слагаемых

$$\tilde{U}_\Sigma = \frac{1}{2}\Omega_0^2\zeta^2 + \tilde{U}_{oc}, \quad (4)$$

где  $\Omega_0 = \omega_0/\omega_\delta$ ,  $\omega_0$  – характеристическая частота осциллятора. Первое слагаемое в (4) определяет ограниченный квадратичный потенциал на отрезке  $-\zeta_L \leq \zeta \leq \zeta_L$ . Второе слагаемое в (4) представляет собой безразмерную форму (2)

$$\tilde{U}_{oc}(\zeta, \tau) = \begin{cases} -\tilde{F}_0\zeta, & \tau \in (\tau_s, \tau_s + \Delta\tau), \\ 0, & \tau \notin (\tau_s, \tau_s + \Delta\tau). \end{cases} \quad (5)$$

Здесь  $\tilde{F}_0 = F_0/F_\delta$ ,  $F_0$  – классическая сила,  $F_\delta = U_\delta/b_\delta$ ,  $\tau_s$  – моменты включения импульса,  $n$  – целое число. Слагаемое в (3), включающее множитель  $k$ , характеризует диссипативные свойства системы. Величина  $\ln(\tilde{\psi}/\tilde{\psi}^*)$  может быть представлена в виде

$$\ln \frac{\tilde{\psi}}{\tilde{\psi}^*} = i(2 \arg(\tilde{\psi}) + 2n\pi), \quad (6)$$

где  $\arg(\tilde{\psi}) = \arctg(\text{Im}\tilde{\psi}/\text{Re}\tilde{\psi})$  есть главное значение фазы. Необходимо отметить, что физически корректные решения имеют место, когда фаза является непрерывной функцией координаты  $\zeta$ . Символ  $\langle \rangle$  означает среднее значение, так что

$$\left\langle \ln \frac{\tilde{\psi}}{\tilde{\psi}^*} \right\rangle = \int \tilde{\psi}^* \ln \frac{\tilde{\psi}}{\tilde{\psi}^*} \tilde{\psi} d\zeta. \quad (7)$$

Ниже используются безразмерные величины для плотности вероятности  $N$  и полевой скорости  $V$ , определяемые при помощи соотношений

$$N = \tilde{\psi}^*\tilde{\psi}, \quad V = \frac{1}{2iN} \left( \tilde{\psi}^* \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \zeta} - \tilde{\psi} \frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial \zeta} \right). \quad (8)$$

Условие нормировки для волновой функции  $\tilde{\psi}$  может быть записано в виде

$$\int_{-\zeta_L}^{\zeta_L} N d\zeta = 1. \quad (9)$$

Расчетные формулы для средних значений динамических переменных и функций от них выражаются формулами

$$\begin{aligned} \langle \zeta \rangle &= \int_{-\zeta_L}^{\zeta_L} \tilde{\psi}^* \zeta \tilde{\psi} d\zeta, & \langle V \rangle &= \int_{-\zeta_L}^{\zeta_L} \tilde{\psi}^* \left( -i \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \tilde{\psi} d\zeta, \\ \langle \tilde{T} \rangle &= \frac{1}{2} \int_{-\zeta_L}^{\zeta_L} \left| \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \zeta} \right|^2 d\zeta, & \langle \tilde{U}_\Sigma \rangle &= \int_{-\zeta_L}^{\zeta_L} \tilde{\psi}^* \tilde{U}_\Sigma \tilde{\psi} d\zeta. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $\langle \zeta \rangle$ ,  $\langle V \rangle$  – средние значения координаты и скорости, соответственно;  $\langle \tilde{T} \rangle$ ,  $\langle \tilde{U}_\Sigma \rangle$  – средние значения кинетической и потенциальной энергий, соответственно. В отдельных случаях проводились вычисления средней полной энергии  $\langle \tilde{E} \rangle$  как суммы  $\langle \tilde{T} \rangle$ ,  $\langle \tilde{U}_\Sigma \rangle$ . Величины  $\langle \zeta \rangle$ ,  $\langle V \rangle$ ,  $\langle \tilde{T} \rangle$ ,  $\langle \tilde{U}_\Sigma \rangle$  являются безразмерными. Для анализа соотношения неопределенностей проведены вычисления стандартных отклонений координаты и скорости  $\langle (\Delta \zeta)^2 \rangle$ ,  $\langle (\Delta V)^2 \rangle$ , а также стандартных отклонений, определяемых как

$$\sigma_\zeta = \sqrt{\langle (\Delta \zeta)^2 \rangle}, \quad \sigma_V = \sqrt{\langle (\Delta V)^2 \rangle}. \quad (11)$$

Произведение  $\sigma_\zeta \sigma_V$  описывает соотношение неопределенностей как функцию времени. Используя метод дискретного преобразования Фурье (см. [15]), мы анализировали только квадраты модулей  $|\Phi_W(\Omega)|^2$  как функцию  $\Omega$ . Здесь  $W$  – некоторая переменная времени,  $\Phi_W(\Omega)$  – фурье-преобразование,  $\Omega = \omega/\omega_\delta$ ,  $\omega$  – частота процесса. С использованием обозначения

$$F_W(\Omega) = |\Phi_W(\Omega)|^2, \quad (12)$$

были вычислены квадраты модулей фурье-компонент для  $W = \langle \zeta \rangle$ . Граничные условия на стенках системы и начальное условие задавались в виде

$$\tilde{\psi}(\pm \zeta_L, \tau) = 0, \quad \tilde{\psi}(\zeta, \tau = 0) = \tilde{\psi}_0(\zeta), \quad (13)$$

где  $\tilde{\psi}_0(\zeta) = A \exp(-\zeta^2/2 + iV_0\zeta)$ , постоянная  $A$  определялась из условия нормировки,  $V_0$  – начальная скорость пакета.

Было проведено численное интегрирование уравнения ШЛК при заданных начальном и граничных условиях. Поскольку уравнение является нелинейным, использовался итерационный конечно-разностный метод установления по псевдовремени, который является аналогом метода простых итераций. Производные по координате аппроксимировались со вторым порядком точности. Временные производные также вычислялись со вторым порядком точности, за исключением тех моментов времени, где потенциал обратной связи  $\tilde{U}_{oc}$  меняется скачком (первый порядок аппроксимации). В процессе вычислений контролировалось условие нормировки (7), которое сохранялось с точностью до  $10^{-6}$ . Реализованный численный метод также тестировался на простейших задачах (например, для гармонического осциллятора). Для получения приведенных ниже результатов в расчетах использовалась равномерная пространственно-временная сетка с шагом по времени  $\Delta \tau_{\text{сетки}} = \pi/1024$  и с 400 узлами по координате.

Для интерпретации результатов полезно знать энергетический спектр стационарной задачи, когда обратная связь и трение отсутствуют, то есть  $\tilde{U}_{oc} = 0$ ,  $k = 0$ . В этом частном случае уравнение для собственных функций и собственных значений имеет вид

$$\left( -\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{1}{2} \Omega^2 \zeta^2 \right) \varphi_n = \varepsilon_n \varphi_n, \quad (14)$$

где  $\varepsilon_n$ ,  $\varphi_n$  – собственные числа энергетического спектра и собственные функции, соответственно;  $n$  – номер квантового состояния. При нулевых граничных условиях

для  $\varphi_n$  на стенках системы  $\xi = \pm\zeta_L$  были проведены расчеты собственных значений  $\varepsilon_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, 46$ . Энергетические спектры  $\varepsilon_n$  для гармонического осциллятора на полном интервале  $(-\infty, \infty)$ , для частицы в потенциальной яме с непроницаемыми стенками, для пространственно-ограниченного осциллятора на конечном промежутке  $[-\zeta_L, \zeta_L]$  в целом различаются между собой. Здесь кратко обсудим расчеты для  $\Delta\varepsilon_n$ .

Результаты расчетов для  $\Delta\varepsilon_n$  как функции  $n$  приведены на рис. 1. Здесь же приведены данные для потенциальной ямы без квадратичного потенциала. Грубо можно выделить три режима движения: осцилляторный, промежуточный и для частицы в потенциальной яме без квадратичного потенциала. Осцилляторный режим определяется тем, что  $\Delta\varepsilon_n \approx \Omega_0$ , то есть разница энергий между соседними уровнями приблизительно равна частоте осциллятора  $\Omega_0$ . Если  $\Omega_0 = 1$ , то число состояний  $n$ , удовлетворяющих этому условию, равно 5; при  $\Omega_0 = 2$  число  $n$  равно 11. С увеличением  $n$  разница  $\Delta\varepsilon_n$  постепенно возрастает. Например, при  $\Omega_0 = 1$  для  $n = 6$  величина  $\Delta\varepsilon_n = 1.08166$ ; при  $\Omega_0 = 2$  для  $n = 15$  величина  $\Delta\varepsilon_n = 2.1712$ .

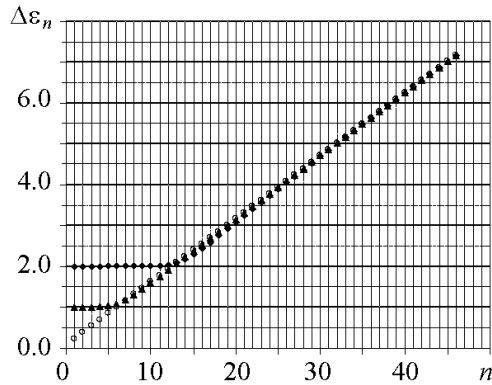


Рис. 1. Зависимость  $\Delta\varepsilon_n$  от квантового числа. Горизонтальные участки определяют режим гармонического осциллятора с  $\Omega_0 = 1$  (▲), 2 (◆), для которых  $\Delta\varepsilon_n = \Omega_0$  с высокой степенью точности. После излома функциональных зависимостей  $\Delta\varepsilon_n$  имеем промежуточный режим. При достаточно больших  $n$  влияние квадратичного потенциала ослабевает и решения приближаются к спектру частицы в потенциальной яме (○), значения  $\Delta\varepsilon_n$  для пространственно-ограниченного осциллятора и свободной частицы в яме совпадают при достаточно больших  $n$ .

Затем происходит излом функциональной зависимости  $\Delta\varepsilon_n(n)$ , почти горизонтальная прямая переходит в наклонную прямую, возникает промежуточная область. В промежуточной области значения  $\Delta\varepsilon_n$  увеличиваются с ростом  $n$ , однако отличаются от значений  $\Delta\varepsilon_n$  для потенциальной ямы без квадратичного потенциала. При больших  $n$  решения задачи соответствуют решениям для ямы без квадратичного потенциала.

Отметим свойства решений нестационарной системы при  $\tilde{U}_{oc} = 0$ ,  $k = 0$ , рассмотренной нами ранее в [11]. При малых начальных скоростях гауссова пакета  $V_0$  и  $\zeta_0 = 0$  фактически генерируется основная частота как и для гармонического осциллятора, а с увеличением  $V_0$  ситуация изменяется: появляются высшие гармоники, а также другие особенности спектра [11].

## 2. Квантовый аналог классического осциллятора с трением и обратной связью

Прежде чем перейти к квантовой модели движения с трением и обратной связью, полезно кратко обсудить численные решения уравнения для классического осциллятора с трением и обратной связью, обусловленной потенциалом (5), например, для параметров  $\tilde{F}_0 = -0.5$ ,  $k = 0.1$ ,  $\Delta\tau = \pi/16$  и начального условия  $\zeta_0 = 0$ ,  $V_0 = -1$  (рис. 2). Последовательным значениям  $\tau_s$  соответствуют  $\zeta = 0$ ,  $V \leq 0$ .

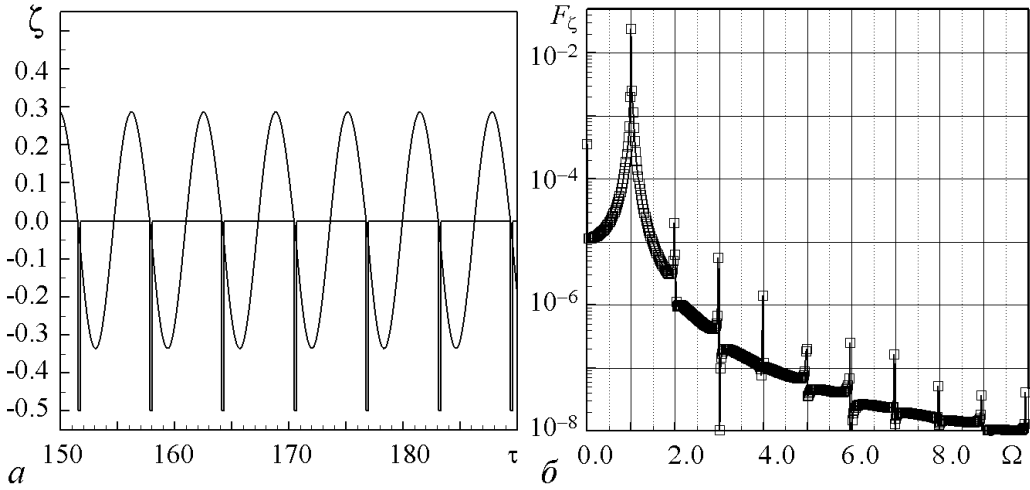


Рис. 2. Классический осциллятор с трением и обратной связью при  $\tilde{F}_0 = -0.5$ ,  $k = 0.1$ ,  $V_0 = -1$ ,  $\zeta_0 = 0$ : *a* – фрагмент временной зависимости  $\zeta(\tau)$  и импульсов силы  $\tilde{F}_0$  на промежутке  $[150, 190]$ , длительность импульсов силы здесь и далее равна  $\Delta t = \pi/16$ ; *б* – функция  $F_\zeta(\Omega)$  вычислена для реализации  $\zeta(\tau)$  на временном промежутке  $[0, 200]$

На интервале  $[0, 70]$  функция  $\zeta$  осциллирует с затуханием, затем её амплитуда колебаний становится неизменной (рис. 2, *a*). Основная гармоника  $F_\zeta(\Omega)$  имеет частоту  $\Omega \leq 1$ , высшие гармоники являются слабыми (рис. 2, *б*). Если коэффициент трения увеличить, например, до  $k = 0.5$ , а остальные параметры и начальное условие оставить неизменными, то в системе будут генерироваться колебания с меньшей амплитудой. В этом случае основная частота будет заметно меньше единицы, интенсивность фурье-компоненты на этой частоте более чем на порядок ниже по сравнению с предыдущим случаем, когда  $k = 0.1$ . Высшие гармоники также возбуждаются слабо.

Теперь рассмотрим задачу о колебаниях для динамических средних  $\langle \zeta \rangle$ ,  $\langle V \rangle$  с позиции квантового уравнения ШЛК при тех же значениях параметров  $\tilde{F}_0 = -0.5$ ,  $V_0 = -1$ ,  $k = 0.1$ . В моменты времени  $\tau_s$ , когда  $\langle \zeta \rangle = 0$ ,  $\langle V \rangle \leq 0$ , включается сила  $\tilde{F}_0$ , характеризующая обратную связь. Плотность вероятности  $N$  распределена вдали от стенок системы (рис. 3, *a*). На рис. 3, *б* даны реализации для средних  $\langle \zeta \rangle$ ,  $\langle V \rangle$  как функции времени. Колебания этих величин смещены по фазе относительно друг друга, а относительно оси  $\langle \zeta \rangle = 0$  не являются совершенно симметричными. Между последовательными включениями  $\tilde{U}_{oc}$  промежутки времени  $\Delta \tau_s$  сохраняются и характеризуют период колебательного процесса, который равен  $\Delta \tau_s \approx 2\pi$ . Функция  $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$  содержит интенсивную основную частоту  $F_{\langle \zeta \rangle}(1) = 2 \cdot 10^{-2}$ , вторая гармоника является слабой  $F_{\langle \zeta \rangle}(2) \approx 10^{-3} F_{\langle \zeta \rangle}(1)$ , остальные также малы и спадают с увеличением номера гармоники (рис. 3, *в*). Установившееся колебательное движение характеризуется минимальным значением произведения неопределённостей  $\sigma_\zeta \sigma_V = 0.5$ . Как известно, аналогичная ситуация имеет место для когерентных колебаний гармонического осциллятора. Поэтому можно сказать, что для данного режима колебаний диссипация не играет деструктивной роли в ослаблении когерентности. В характере динамического поведения следует отметить аналогию с классическим осциллятором (ср. рис. 2) и выполнение принципа соответствия.

Для того, чтобы рассмотреть влияние начальной скорости пакета  $V_0$  на переход к установившимся колебаниям и на произведение стандартных отклонений  $\sigma_\zeta \sigma_V$ ,

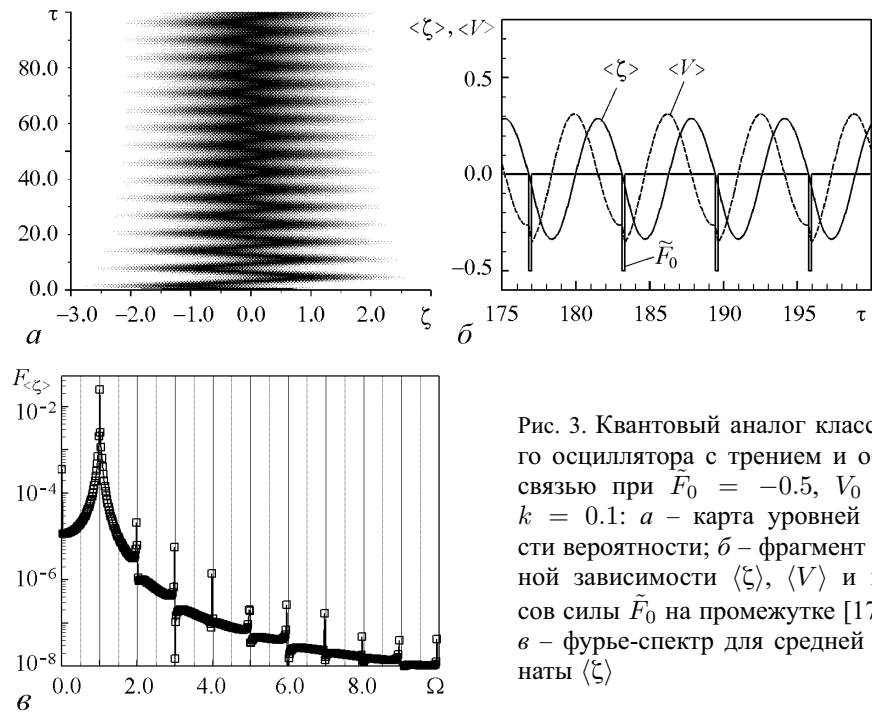


Рис. 3. Квантовый аналог классического осциллятора с трением и обратной связью при  $\tilde{F}_0 = -0.5$ ,  $V_0 = -1$ ,  $k = 0.1$ :  $a$  – карта уровней плотности вероятности;  $b$  – фрагмент временной зависимости  $\langle \zeta \rangle$ ,  $\langle V \rangle$  и импульсов силы  $\tilde{F}_0$  на промежутке  $[175, 200]$ ;  $c$  – фурье-спектр для средней координаты  $\langle \zeta \rangle$

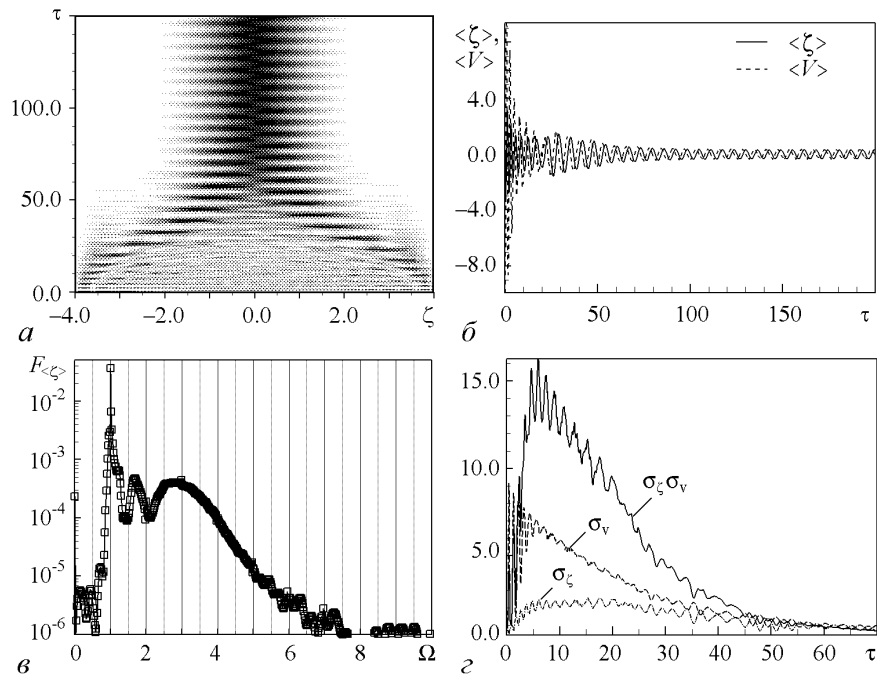


Рис. 4. Влияние начальной скорости пакета  $V_0$  на переход к установившимся колебаниям при  $\tilde{F}_0 = -0.5$ ,  $V_0 = -10$ ,  $k = 0.1$ :  $a$  – карта уровней плотности вероятности характеризует заметные изменения волнового пакета на промежутке  $[0, 70]$  и затем неизменную картину на плоскости  $(\zeta, \tau)$ ;  $b$  – динамические средние  $\langle \zeta \rangle$ ,  $\langle V \rangle$  на промежутке  $[0, 200]$ ;  $c$  – фурье-спектр колебаний для средней координаты  $\langle \zeta \rangle$ ;  $d$  – стандартные отклонения  $\sigma_\zeta$ ,  $\sigma_V$  на промежутке  $[0, 70]$  (при  $\tau > 120$  произведение  $\sigma_\zeta \sigma_V \approx 0.5$ )

был исследован динамический режим, характеризующийся параметрами:  $\tilde{F}_0 = -0.5$ ,  $k = 0.1$ ,  $V_0 = -10$ . По сравнению с предыдущим режимом, когда  $V_0 = -1$ , здесь следует отметить заметную фрагментацию исходного волнового пакета и последующее постепенное удаление его от стенок ямы (рис. 4, *a*). Синхронно с этой картиной меняется характер колебаний для средних  $\langle \xi \rangle$ ,  $\langle V \rangle$ , а также для стандартных отклонений  $\sigma_\xi$ ,  $\sigma_V$  (рис. 4, *б, з*). Стандартные отклонения превосходят средние значения. Только при  $\tau > 120$  произведение  $\sigma_\xi \sigma_V$  приближается к минимальной величине, равной 0.5. Наибольшие значения  $\sigma_\xi$ ,  $\sigma_V$  и их произведение  $\sigma_\xi \sigma_V$  приобретают для  $\tau \in [0, 70]$  (см. рис. 4, *з*). Фурье-спектр колебаний средней координаты (рис. 4, *в*) отличается от предыдущего режима (см. рис. 3, *в*) тем, что высшие гармоники не являются выраженными, а распределение  $F_{\langle \xi \rangle}(\Omega)$ , соответствующее высшим гармоникам, размывается. Это отличие обусловлено переходными процессами на промежутке  $[0, 100]$ . Отметим, что установившийся режим колебаний характеризуется величинами амплитуд  $\langle \xi \rangle$ ,  $\langle V \rangle$ , которые приближаются к соответствующим значениям для режима колебаний при  $V_0 = -1$ , представленного на рис. 3. В тех случаях, когда начальная скорость  $V_0$  гауссова пакета велика, он может приближаться к стенкам ямы, видоизменяться, но через определённый промежуток времени снова становится гауссовым по форме с минимизированным соотношением неопределённостей.

### 3. Неравномерные временные промежутки между импульсами обратной связи

Выше были исследованы режимы колебаний, когда промежутки  $\Delta\tau_s = \tau_s - \tau_{s-1}$  между последовательными включениями  $\tau_s$  были одинаковыми. Форма этих колебаний и их фурье-спектры были достаточно простыми, а произведение неопределённостей для координаты и скорости было минимизированным. Для этих режимов колебаний величина  $\tilde{F}_0$  была относительно малой, а коэффициент трения  $k < \Omega_0$ . Естественно возникает вопрос о динамических свойствах системы при изменении силы  $\tilde{F}_0$  и коэффициента трения  $k$ . Изменяя одну из этих величин при фиксированном значении другой, можно реализовать переход к колебаниям более сложного вида, чем рассмотренные в предыдущем разделе. Здесь представлены результаты численного моделирования при достаточно высоком значении  $\tilde{F}_0$  и варьируемой величины  $k$ . Последовательность моментов времени  $\tau_s$ , в которые «включается» сила  $\tilde{F}_0$ , может генерировать неодинаковые промежутки времени  $\Delta\tau_s$ , подчиняющиеся определённым закономерностям и распределениям по величине  $\Delta\tau_s$ . Теперь значения  $\Delta\tau_s$  зависят от  $\tau_s$ , то есть  $\Delta\tau_s$  является функцией дискретного аргумента  $\tau_s$  и может изменяться скачкообразно. Характер изменения существенно зависит от параметров системы  $\tilde{F}_0$ ,  $k$ ,  $\Delta\tau$ ,  $V_0$ . Расчёты были проведены для  $\tilde{F}_0 = -10$ ,  $V_0 = -1$  при  $k = 0.2$ ,  $0.167$ ,  $0.165$ ,  $0.16$ ,  $0.14$ ,  $0.1$  и  $0$  (при фиксированном значении  $\Delta\tau$ ). Как и раньше, сила  $\tilde{F}_0$  «включалась» в моменты времени  $\tau_s$ , соответствующие  $\langle \xi \rangle = 0$  и  $\langle V \rangle \leq 0$ . Величина временного интервала варьировалась в широких пределах от 300 до 8000, длительность импульса обратной связи была неизменной и равной  $\Delta\tau = \pi/16$ .

В зависимости от величины  $k$  динамические режимы можно условно разделить на две группы: одна из них при  $k > 0.165$ , другая при  $k \leq 0.165$ . Значение  $k \approx 0.165$  можно назвать критическим, так как при этом значении происходят замет-

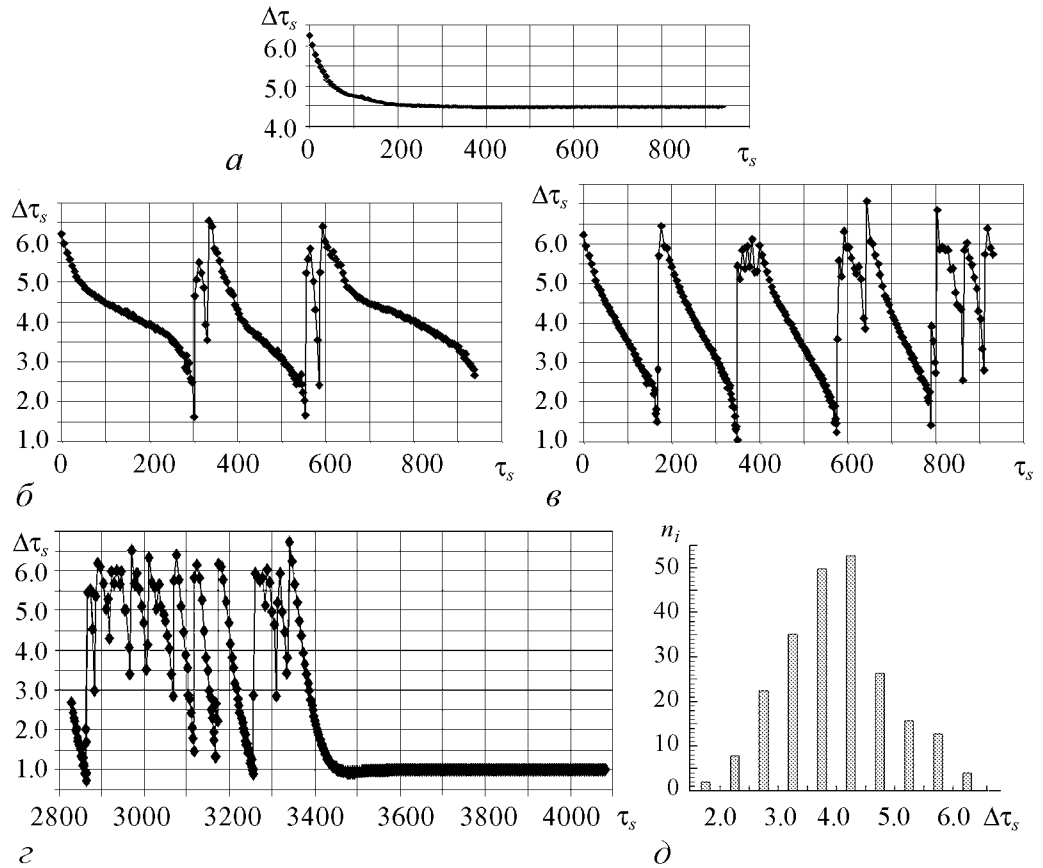


Рис. 5. Эволюция временных масштабов  $\Delta\tau_s(\tau_s)$  при разных коэффициентах трения  $k$ :  $a - 0.167$ ,  $b - 0.165$ ,  $c - 0.16$ ,  $d - 0.14$ ;  $d -$  количество временных масштабов  $n_i$  как функция величины  $\Delta\tau_s$  на длине временной реализации  $T$  при  $k = 0.165$

ные качественные изменения в динамике колебаний. На рис. 5 представлены графики  $\Delta\tau_s(\tau_s)$  для  $k = 0.167, 0.165, 0.16, 0.14$  (рис. 5,  $a-d$ ) и гистограмма, характеризующая распределения  $\Delta\tau_s$  на временных длинах  $T$  (рис. 5,  $d$ ). Наиболее простая зависимость  $\Delta\tau_s(\tau_s)$  имеет место для  $k = 0.167$ . На участке  $\tau_s \in [0, 80]$  постепенно  $\Delta\tau_s(\tau_s)$  скачками уменьшаются, некоторые малые отклонения от такого вида зависимости происходят для  $\tau_s > 120$ , спустя некоторое время спадание замедляется и зависимость  $\Delta\tau_s(\tau_s)$  выходит почти на прямую, то есть практически  $\Delta\tau_s$  становятся постоянными и равными 4.5. Промежутки  $\Delta\tau_s$  определяют соответствующую частоту  $\Omega = 2\pi/\Delta\tau_s$ . При увеличении  $k$  (например, при  $k = 0.2$ ) функциональная зависимость  $\Delta\tau_s(\tau_s)$  имеет сходный вид с предыдущей формой для 0.167, однако величина  $\Delta\tau_s$  спадает до значения  $\Delta\tau_s \approx 5.92$ . При  $k = 0.5$  практически все промежутки  $\Delta\tau_s$  одинаковы, то есть характеризуют один и тот же период колебаний.

После приведенного краткого обсуждения функциональных зависимостей  $\Delta\tau_s(\tau_s)$  для группы с  $k > 0.165$ , можно перейти к граничной величине  $k = 0.165$ , а затем для  $k < 0.165$ . Картина функциональной зависимости  $\Delta\tau_s(\tau_s)$  для  $k = 0.165$  дана на рис. 5,  $b$ . В отличие от предыдущего расчета (см. рис. 5,  $a$ ), характер зависимости усложняется. Теперь можно отметить 3 участка для  $\tau_s$ :  $(0, 300)$ ,  $(330, 550)$ ,  $(595, 940)$ . На этих участках происходят скачкообразные уменьшения величин  $\Delta\tau_s$ ,



то есть последующие значения  $\Delta\tau_{s+1}$  меньше предыдущих  $\Delta\tau_s$  для подавляющего числа точек (значений  $\tau_s$ ). Однако возможны отдельные точки или набор их, нарушающие это правило, отклонения в этих случаях очень малы, а затем спад значений продолжается. В среднем на этих участках функциональную зависимость  $\Delta\tau_s(\tau_s)$  можно назвать монотонно убывающей. На каждом из трех участков уменьшение  $\Delta\tau_s$  происходит до некоторой минимальной величины. Однако монотонно убывающие участки перемежаются участками малой длительности по времени, которые имеют восходящую и нисходящую ветви (см. рис. 5, б), своего рода всплески. С последующим уменьшением коэффициента трения  $k$  увеличивается число убывающих участков и всплесков на одном и том же временном интервале (см. рис. 5, в, г), а расстояния между минимальными (или максимальными) значениями  $\Delta\tau_s$  уменьшаются. При увеличении длины временной реализации вплоть до 8000 для  $k = 0.165, 0.16$  характер функциональных зависимостей  $\Delta\tau_s(\tau_s)$  сохраняется, однако для параметра  $k = 0.14$  происходит переход функциональной зависимости  $\Delta\tau_s(\tau_s)$  на пологий участок. Для интервала  $\tau \in (3460, 4090)$  величина  $\Delta\tau_s$  близка к единице, однако не является строго постоянной, а слабо осциллирует относительно этой величины. Минимальное отклонение между соседними  $\tau_s$  составляет 0.001, а максимальное 0.009. Расчеты для  $k = 0.1$  показывают переход зависимости  $\Delta\tau_s(\tau_s)$  на пологий участок, как и для режима  $k = 0.14$ , но в более ранний момент времени  $\tau \approx 840$ . Контроль полученных функциональных зависимостей  $\Delta\tau_s(\tau_s)$  проводился посредством уменьшения шага интегрирования в два, в четыре и в восемь раз. При такой процедуре зависимости  $\Delta\tau_s(\tau_s)$  качественно не меняются, однако имеют место некоторые различия во временных промежутках, соответствующих падающим и восходящим участкам.

Последовательность моментов включения импульсов обратной связи и соответствующая им зависимость  $\Delta\tau_s(\tau_s)$ , как видно из графиков рис. 5, а–г, подчиняются определённым закономерностям. Для установления этих закономерностей диапазон изменения  $\Delta\tau_s$  делился на поддиапазоны шириной  $\varepsilon$ , равной 0.5, и подсчитывалось количество попаданий чисел  $\Delta\tau_s$  на каждый из этих поддиапазонов. Гистограмма попаданий для  $k = 0.14$  дана на рис. 5, д. Количество точек (значений  $\Delta\tau_s$ ), содержащихся в  $i$  поддиапазоне обозначим через  $n_i$ , общее количество точек  $n$  на длине временной реализации может быть найдено путем суммирования по  $i$ , то есть  $n = \sum_i n_i$ . Тогда частота попадания  $W_i$  может быть определена как  $W_i = n_i/n$ . Гистограмма попаданий, представленная на рис. 5, д, имеет один максимум; увеличение числа  $n$  не приводило к деформации формы распределения. Последовательно уменьшая  $\varepsilon$ , можно построить функцию распределения, задаваемую как предел

$$P(\Delta\tau_s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} W_i.$$

В том случае, когда  $k = 0$ , а остальные параметры остаются неизменными, следует отметить следующие свойства. Во-первых, как и для предыдущих режимов движения, существует переходный участок  $\tau \in (0, 70)$ , на котором происходит постепенное уменьшение  $\Delta\tau_s$  до некоторого значения в окрестности  $\Delta\tau_s \approx 0.5$ . Во-вторых, возникает отличие, обусловленное сокращением длительности участков убывания и возрастания  $\Delta\tau_s$ . Характер зависимости  $\Delta\tau_s(\tau_s)$  представляет собой мелкомасштабные осцилляции, которые также можно обрабатывать на основе функций распре-

деления. В целом, промежутки времени  $\Delta\tau_s$  между последовательными возвратами пакета в область с  $\langle\zeta\rangle = 0$ ,  $\langle V\rangle \leq 0$  можно рассматривать как циклы Пуанкаре в рамках теоремы Пуанкаре о возвратах, а область с  $\langle\zeta\rangle = 0$ ,  $\langle V\rangle \leq 0$  как малую часть ограниченной фазовой плоскости  $(\langle\zeta\rangle, \langle V\rangle)$ .

Наряду с интерпретацией промежутков  $\Delta\tau_s$  как циклов Пуанкаре для динамических средних, полезно сравнить величины  $\omega_s = 2\pi/\Delta\tau_s$  с частотами переходов  $\Delta\varepsilon_n$  между состояниями энергетического спектра стационарной задачи (см. рис. 1). Оказалось, что  $\omega_s$  близки к  $\Delta\varepsilon_n$ , разница  $\Delta\varepsilon_n - \omega_s$  была незначительна. Например, для  $k = 0.1$  на первом участке убывания  $\omega_s \in [1.029, 5.233]$  наблюдалась  $\Delta\varepsilon_n - \omega_s < 0.02$ , и лишь в отдельных случаях она достигала 0.06.

Таким образом, обратная связь приводит: к модуляции временных промежутков  $\Delta\tau_s$  между последовательными включениями силы  $\tilde{F}_0$ ; возникновению убывающих и возрастающих участков  $\Delta\tau_s(\tau_s)$ ; изменению временных расстояний между ними вплоть до величины  $\Delta\tau_s$ . Это обеспечивает перемешивание в фазовом пространстве системы, подтверждаемое (см. ниже) характером фурье-спектров.

#### 4. Сложные режимы движения

Расчеты динамических закономерностей при  $V_0 = -1$ ,  $\tilde{F}_0 = -10$ ,  $\Delta\tau = \pi/16$  и значениях  $k = 0.5, 0.3, 0.25, 0.2, 0.17$  показывают переход к установившимся колебаниям. Режим колебаний при  $k = 0.167$  все еще сохраняет черты динамических закономерностей, имеющих место при более высоких значениях параметра  $k$ . При значении  $k = 0.167$  функция плотности вероятности  $N(\zeta, \tau)$  имеет области повышенной локализации вблизи стенок потенциальной ямы, то есть вблизи  $\zeta_L = \pm 4$  пакет фрагментирован слабо (рис. 6, а). На временном промежутке  $[0, 70]$  происходит

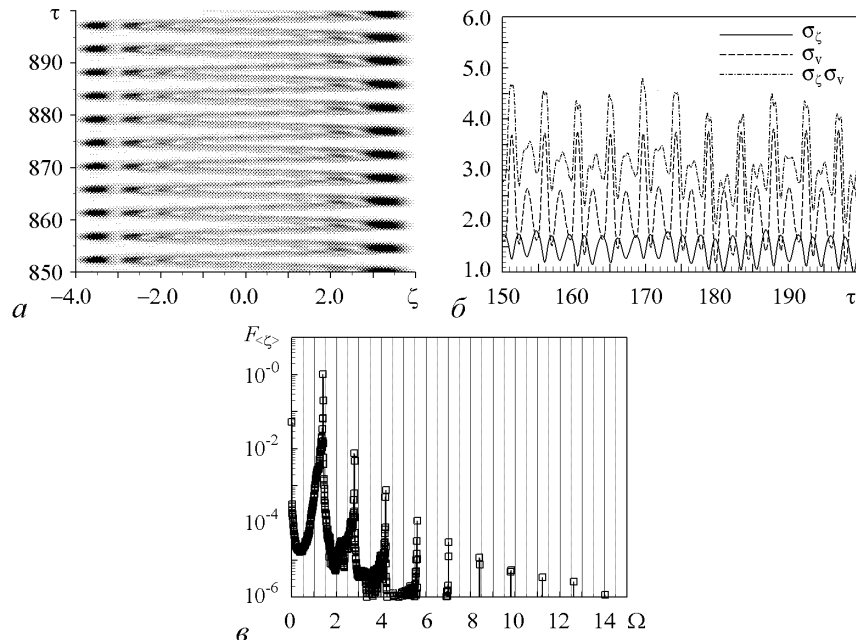


Рис. 6. Динамический режим при  $k = 0.167$ : а – карта уровней плотности вероятности для  $\tau \in [850, 900]$  соответствует заметной локализации волнового пакета вблизи стенок; б – стандартные отклонения  $\sigma_\zeta$ ,  $\sigma_V$  и их произведение  $\sigma_\zeta\sigma_V$ ; в – основная спектральная линия  $F_{\langle\zeta\rangle}(\Omega)$  при  $\Omega \approx 1.4$  и её высшие гармоники

постепенный переход к режиму с установившимися колебаниями. Колебания  $\sigma_\zeta$ ,  $\sigma_V$  и их произведение  $\sigma_\zeta\sigma_V$ , как функции времени, показаны на рис. 6, б. Произведение  $\sigma_\zeta\sigma_V$  не является минимизированным и заметно больше минимальной величины 0.5. Фурье-спектр временной зависимости  $\langle \zeta \rangle$  вычислялся для  $\tau \in [0, 900]$ , так что влияние процессов переходного участка  $\tau \in [0, 70]$  автоматически учитывалось (рис. 6, в). Согласно зависимости  $\Delta\tau_s = f(\tau_s)$  (см. рис. 5, а), для  $\tau_s > 200$  имеем  $\Delta\tau_s \approx 4.5$ , соответствующая ей величина  $\omega_s = 2\pi/\Delta\tau_s \approx 1.395$  является основной в спектре частот, величина  $F_{\langle \zeta \rangle}(1.395) \approx 1$  наибольшая. Кроме того, существенно выражены высшие гармоники основной частоты и нулевая частота. Уширение спектральных линий обусловлено переходными процессами, которые происходят одновременно с изменением  $\Delta\tau_s$  и, соответственно, с частотой  $\omega_s$ . Характер спектра можно считать достаточно простым.

Ситуация качественно изменяется по мере дальнейшего уменьшения коэффициента трения  $k$ . Значение  $k = 0.165$  можно назвать критическим (бифуркационным). Как отмечалось в разделе 3, при этом значении  $k$  промежутки  $\Delta\tau_s$  не только убывают, но и возрастают по величине, а функциональная зависимость  $\Delta\tau_s(\tau_s)$  имеет восходящие и нисходящие ветви (см. рис. 5, б). С другой стороны, бифуркационную точку  $k = 0.165$  при  $\tilde{F}_0 = -10$  можно проанализировать на основе формулы отклонения вероятности  $\Delta P_L = \sqrt{\langle (P_L(t) - \langle P_L(t) \rangle)^2 \rangle}$ , где  $P_L(t) = \int_0^{\xi_L} N d\xi$ . Эта формула использовалась для анализа когерентного и некогерентного движения [16]. Если  $k$  изменяется от 0.2 до 0, то  $\Delta P_L$  монотонно уменьшается от 0.38 до 0.068, но величина отношения  $\Delta P_L/\Delta k$  претерпевает скачок более чем на порядок как раз при  $k = 0.165$ .

Расчеты средних значений  $\langle \zeta \rangle$ ,  $\langle V \rangle$  для  $\tau \in [0, 900]$  дают картину колебаний с переменным периодом, фрагмент таких колебаний представлен на рис. 7, а. Для  $\tau \in [250, 350]$  следует отметить наличие вариации амплитуд  $\langle \zeta \rangle$ ,  $\langle V \rangle$  при уменьшении периода  $\Delta\tau_s$ , а также при скачкообразном увеличении периода  $\Delta\tau_s$  для  $\tau \in [302, 305]$ . Аналогичные картины имеют место и на других участках. Произведение стандартных отклонений  $\sigma_\zeta\sigma_V$  существенно возрастает по сравнению с предыдущим режимом колебаний ( $k = 0.167$ ): осциллируя, оно изменяется от минимального значения, примерно равного 2, до максимального значения, примерно равного 13.5 (рис. 7, б). Пределы этих изменений значительно больше, чем в предыдущем режиме и, тем более, когда  $k \geq 0.2$ . Несмотря на очень маленькое уменьшение  $\Delta k = 0.002$  по сравнению с режимом движения при  $k = 0.167$ , фурье-спектр колебаний  $\langle \zeta \rangle$  существенно видоизменяется – он всюду плотно заполняет частотный диапазон (рис. 7, в; расчет проводился на временном промежутке  $[0, 900]$ ). Увеличение временного промежутка вдвое не изменяет характера заполнения указанного частотного диапазона, расстояние между соседними спектральными линиями соответствует минимальной частоте разрешения  $\Omega_{\min} = 2\pi/T$ , где  $T$  – полный временной промежуток реализации колебательного процесса для  $\langle \zeta \rangle$ . Дополнительное описание сложного движения может быть получено на основе точечных отображений  $V_{s+1}(V_s)$ . Здесь в качестве временного масштаба следует брать промежуток времени между импульсами обратной связи, то есть между моментами  $\tau_{s+1}$  и  $\tau_s$ . Для периодического процесса значения  $V_{s+1}$  и  $V_s$  совпадают, и на графике  $V_{s+1}(V_s)$  они отображаются точкой на биссектрисе квадранта. В других ситуациях, когда  $V_{s+1} \neq V_s$ , точки могут распределяться по обе стороны биссектрисы. Зависимость  $V_{s+1}$  от  $V_s$  представлена на рис. 7, з, она характе-

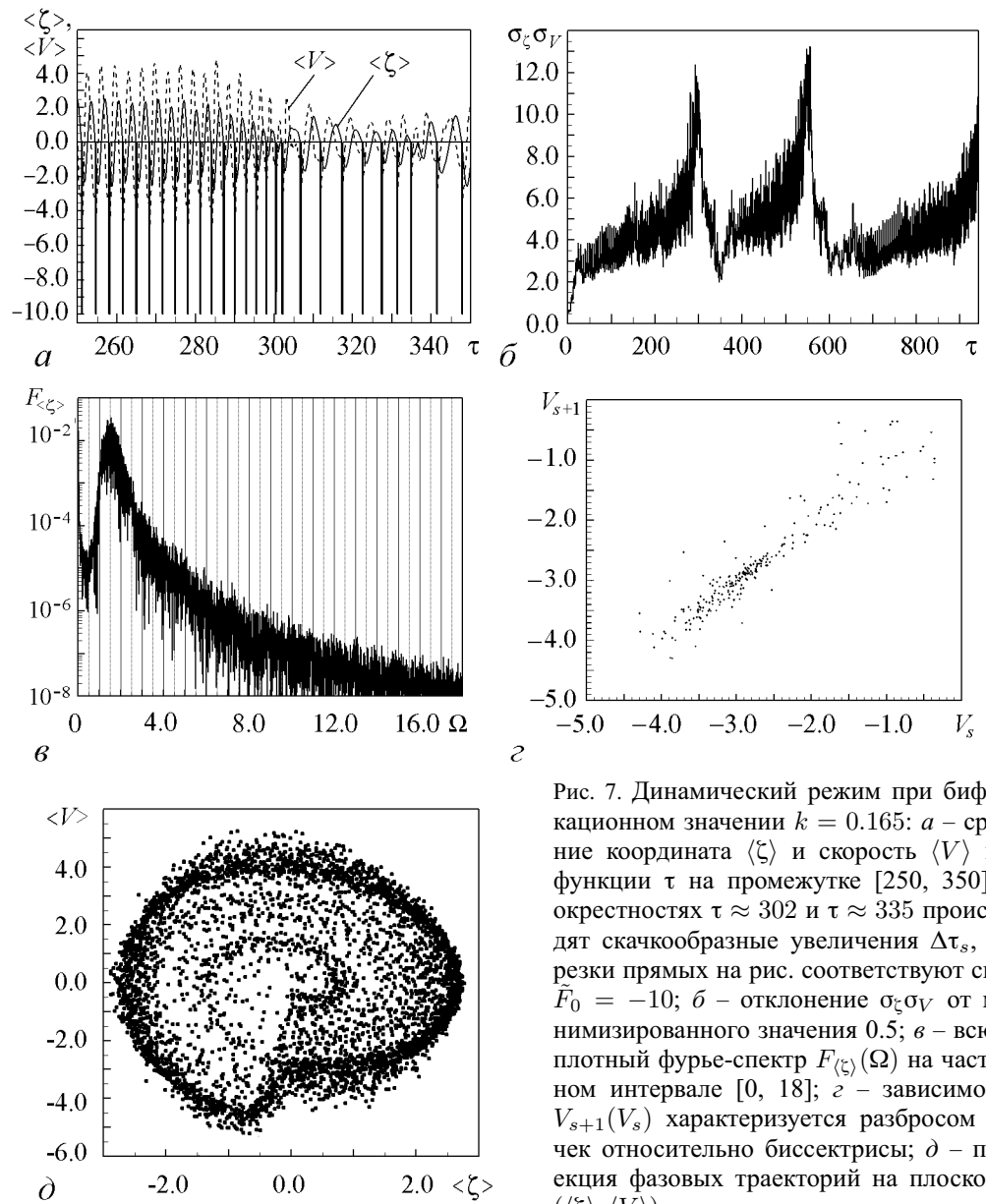


Рис. 7. Динамический режим при бифуркационном значении  $k = 0.165$ :  $a$  – средние координата  $\langle \zeta \rangle$  и скорость  $\langle V \rangle$  как функции  $\tau$  на промежутке  $[250, 350]$ , в окрестностях  $\tau \approx 302$  и  $\tau \approx 335$  происходят скачкообразные увеличения  $\Delta\tau_s$ , отрезки прямых на рис. соответствуют силе  $\bar{F}_0 = -10$ ;  $б$  – отклонение  $\sigma_\zeta \sigma_V$  от минимизированного значения 0.5;  $в$  – всюду плотный фурье-спектр  $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$  на частотном интервале  $[0, 18]$ ;  $г$  – зависимость  $V_{s+1}(V_s)$  характеризуется разбросом точек относительно биссектрисы;  $д$  – проекция фазовых траекторий на плоскость  $(\langle \zeta \rangle, \langle V \rangle)$

ризуется случайно распределенными точками относительно биссектрисы квадранта. На плоскости  $(\langle \zeta \rangle, \langle V \rangle)$  имеем «распылённую» фазовую траекторию, которая хранит память о регулярном движении в виде более плотной «упаковки» точек и разрушение контура этой памяти в виде разреженного облака блуждающих точек (рис. 7, д). Следует считать, что движение является более сложным по сравнению с режимами, когда коэффициент трения не является малым. При дальнейшем уменьшении параметра  $k$  характерные свойства колебаний в целом сохраняются, однако возникают некоторые качественные и количественные изменения.

Численные результаты моделирования для параметра  $k = 0.16$  даны на рис. 8,  $a, б$ . Для  $k = 0.16$  временные зависимости  $\langle \zeta \rangle, \langle V \rangle$  характеризуются такими же свойствами, как и для  $k = 0.165$  (см. рис. 7,  $a$ ). Характер эволюции точечных

фазовых траекторий на плоскости  $(\langle \zeta \rangle, \langle V \rangle)$  виден из рис. 8, б. Если для  $k = 0.165$  внешняя «оболочка» в виде набора точек довольно плотно упакована (см. рис. 7, д), то для  $k = 0.16$  происходит разрежение и фазовые точки более равномерно заполняют плоскость  $(\langle \zeta \rangle, \langle V \rangle)$ .

Частотный спектр для режима движения с обратной связью при  $k = 0.16$  рассматривался детально с минимальной частотой разрешения  $\Omega_{\min} = 0.0067$  на сетке частот  $\Omega \in [0, 5]$ . Для всех частот  $\Omega_l = l\Omega_{\min}$  ( $l$  – целое) компоненты  $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_l) \neq 0$  и заключены на промежутке  $[10^{-5}, 2.96 \cdot 10^{-2}]$ , причем  $F_{\langle \zeta \rangle}(1.1467) = 2.96 \cdot 10^{-2}$ ; с уменьшением частоты разрешения  $\Omega_{\min}$  появляются новые компоненты, а спектр остается всюду плотным.

Уместно сравнить режим движения при обратной связи и режим движения, когда нет обратной связи, но включается периодическая последовательность импульсов  $\tilde{F}_0$  в моменты  $\tau \in (nT, nT + \Delta\tau)$ ,  $\Delta\tau$  – длительность импульса,  $T$  – средний период; для случая с  $k = 0.16$  величина  $T$  определялась посредством вычисления среднего значения  $\Delta\tau_s$ . В таком режиме фурье-спектр не был всюду плотным, а состоял из отдельных дискретных линий (высших гармоник основной частоты).

Уменьшение  $k$  на 0.02 (до значения  $k = 0.14$ ) изменяет картину распределения «блуждающих» точек: наиболее плотная «упаковка» фазовых точек происходит в центральной части  $-2 < \langle \zeta \rangle < 1.6$ ,  $-0.3 < \langle V \rangle < 0.2$  и на границе (рис. 8, в). Граница имеет форму полосы с конечной шириной и плотной «упаковкой» и соответствует выходу на почти установившийся режим колебаний. Между центральной и граничной областями распределение точек является менее плотным. Такая картина соответствует тому факту, что при малых отклонениях пакета от центра  $\zeta = 0$  существует один тип колебаний, когда влияние квадратичного потенциала существенно. При сильных отклонениях пакета от центра роль непроницаемых стенок значительна, а влияние квадратичного потенциала практически исключается. В отличие от режимов движения при  $0.14 < k \leq 0.16$ , здесь при  $k = 0.14$ , а также при  $k = 0.1$  для достаточно больших  $\tau$  имеет место переход к практически установившимся колебаниям с высокой средней частотой, относительно которой происходят очень малые вариации её значения. Такие колебания для  $k = 0.14$  изучались на временном промежутке  $\tau \in [3450, 4100]$ . При этом для  $\tau \in [0, 3450]$  наблюдался сложный режим колебаний.

Динамический режим при  $k = 0$  и тех же значениях  $V_0, \tilde{F}_0$  характеризуется тем, что на временном промежутке  $[0, 50]$  колебания наиболее интенсивные – для  $\tau \in [10, 50]$  амплитуды осцилляций удовлетворяют неравенству  $-2 < \langle \zeta \rangle < 2$ ; затем при  $\tau > 70$  они резко уменьшаются, но сильно возрастают стандартные отклонения  $\sigma_\zeta, \sigma_V$ . Для временного промежутка  $\tau \in [70, 300]$  точки фазовой плоскости  $(\langle \zeta \rangle, \langle V \rangle)$  локализуются в области  $\langle \zeta \rangle \in (-0.2, 0.2)$ ,  $\langle V \rangle \in (-5, 5)$ . Вне этой области, на периферии, точки разрежены и соответствуют промежутку  $[0, 50]$ . Общее число пар точек  $(\langle V_i \rangle, \langle \zeta_i \rangle)$ , характеризующее фазовый портрет на плоскости  $(\langle V \rangle, \langle \zeta \rangle)$ , примерно  $3 \cdot 10^5$ ; на рис. 8, з их в 64 раза меньше.

Расчеты временных реализаций и фурье-спектров были проведены для трех временных интервалов  $T$ : 300, 600, 1200. Для интервала  $T = 600$  соответствующая минимальная частота  $\Omega_{\min} = 2\pi/600 \approx 0.01$ , а равномерная сетка частот  $\Omega_l = l \cdot \Omega_{\min}$ ,  $l$  – целое. На рис. 8, д представлен фурье-спектр  $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$  для  $T = 600$ . Наиболее интенсивные пики  $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_l)$  заключены в диапазоне  $0 \leq \Omega_l \leq 12.8$ , при  $\Omega > 12.8$  спектр резко обрывается. Пики  $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$  всюду плотно заполняют диапазон частот. При увеличении длины временной реализации  $T = 1200$  (и, соответственно, уменьшении  $\Omega_{\min}$ ) происходит образование новых пиков, но спектр остается всюду плотным. Для трех рассчитанных временных реализаций  $T = 300, 600, 1200$  не было

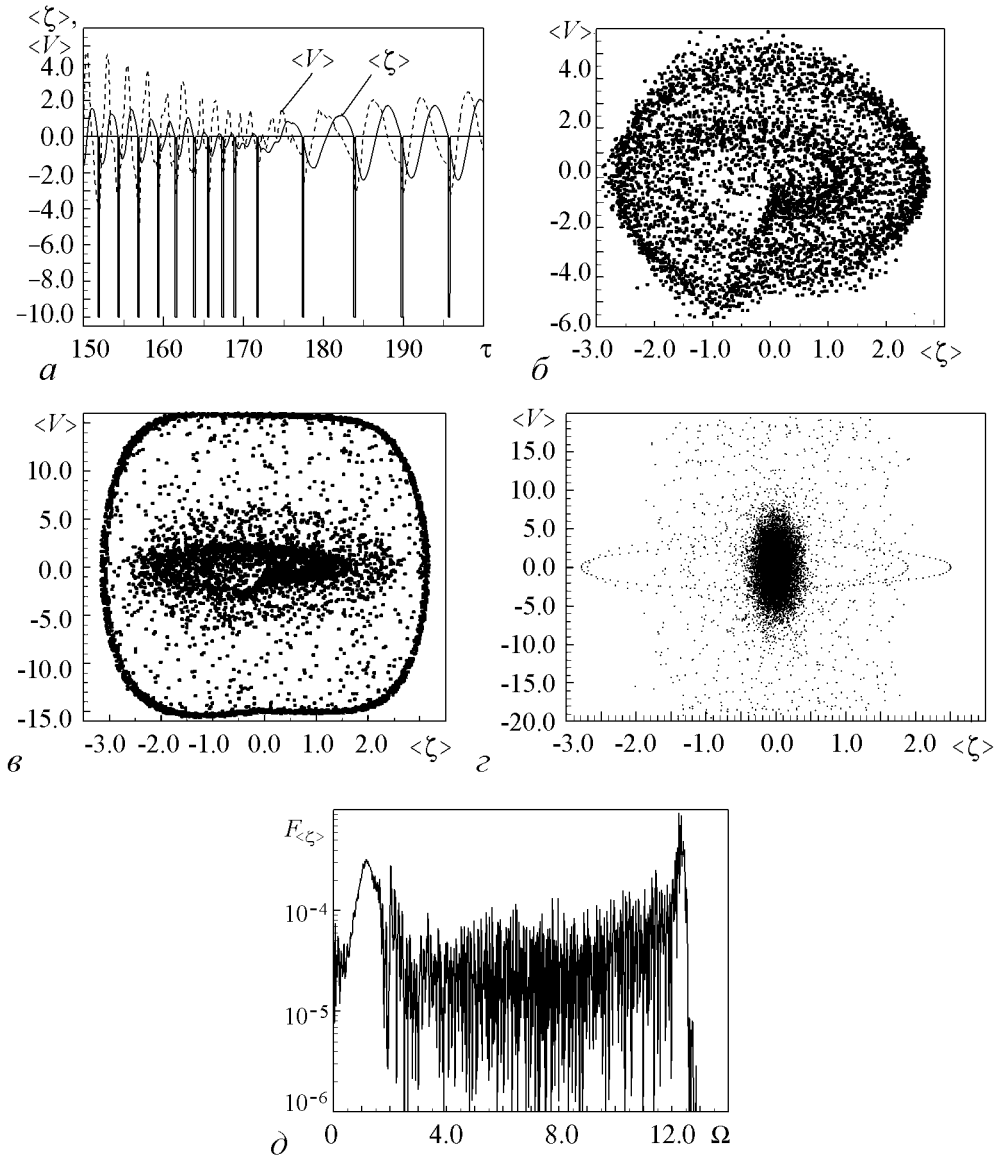


Рис. 8. Сложные колебания при  $k = 0.16$  (а, б),  $k = 0.14$  (в),  $k = 0$  (г, д): а – средние координата и скорость для  $\tau \in [150, 200]$  (скачкообразные изменения  $\Delta\tau_s$  на промежутке [169, 173]), отрезки прямых, равные  $-10$ , соответствуют моментам включения  $\tilde{F}_0$ ; б – проекция фазового портрета на плоскости  $(\langle \zeta \rangle, \langle V \rangle)$ ; в – на плоскости  $(\langle \zeta \rangle, \langle V \rangle)$  фазовые точки распределены неравномерно – больше в центральной области и на периферии, меньше в промежуточной области; г – фазовый портрет временной реализации с  $T = 300$ , фазовые точки распределены неравномерно – наиболее плотно в области с  $\langle \zeta \rangle \in (-0.2, 0.2)$ ,  $\langle V \rangle \in (-5, 5)$ ; д – фурье-спектр временной реализации  $\langle \zeta \rangle$  для  $T = 600$ ,  $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$  имеет максимумы в окрестностях  $\Omega = 1$ ,  $\Omega = 12.7$ , а также при  $\Omega = 0$ . Набор частот спектра соответствует переходам режима гармонического осциллятора в промежуточный и затем в динамический режим частицы в потенциальной яме, когда влияние квадратичного потенциала становится несущественным

ни одной частоты  $\Omega_l$ , для которой фурье-спектр  $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_l)$  приближался бы к уровню компьютерного шума. Эти расчеты позволяют утверждать, что спектр стремится к непрерывному и соответствует хаотическому движению.

### Краткие выводы

Проведен анализ динамических режимов пространственно-ограниченного осциллятора, подверженного действию сил трения и обратной связи. При умеренных значениях силы и коэффициента трения возможен режим колебаний с минимизированным произведением неопределенностей, как и для гармонического осциллятора. При увеличении силы обратной связи реализуется промежуточный режим: произведение неопределенностей возрастает, спектр колебаний остается дискретным. Установлено критическое значение параметра (коэффициента трения), при котором движение становится сложным; оно характеризуется неравномерностью временных возвратов в состояние с нулевой средней координатой, а также всюду плотным фурье-спектром. Если трение отсутствует, колебания остаются сложными, а всюду плотный фурье-спектр имеет максимумы в окрестностях характеристической частоты осциллятора и некоторой частоты перехода для свободной частицы в яме.

### Библиографический список

1. *Штокман Х.-Ю.* Квантовый хаос / Пер. с англ. А.И. Малышева; Под ред. В.Я. Демиховского. М.: Физматлит, 2004.
2. *Демиховский В.Я., Малышев А.И.* Квантовая диффузия Арнольда в канале с гофрированной границей в присутствии переменного электрического поля // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2004. Т. 12, № 5. С. 3.
3. *Sankaranarayanan R., Lakshminarayan A., Sheorey V.B.* Quantum chaos of a particle in a square well: competing length scales and dynamical localization // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64. P. 046210.
4. *Беляев М.В., Лазерсон А.Г.* Сложная динамика неавтономного квантового осциллятора // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т. 11, № 2. С. 25.
5. *Mott N., Sneddon I.* Wave mechanics and its applications. Oxford and the Clarendon Press, 1948. 427 p.
6. *Багманов А.Т., Санин А.Л.* Резонансы пространственно-ограниченного квантового осциллятора // Успехи современной радиоэлектроники. 2005. № 12. С. 46.
7. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1984.
8. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
9. *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны. М.: Наука – Физматлит, 1997.
10. *Kostin M.D.* On the Schrödinger–Langevin equation // J. Chem. Phys. 1972. vol. 57(9). P. 3589.
11. *Санин А.Л., Смирновский А.А.* Вынужденные колебания квантовых волновых пакетов в системе с трением, квадратичным потенциалом и стенками // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 4. С. 68.
12. *Sanin A.L., Smirnovsky A.A.* Oscillatory motion in confined potential systems with dissipation in the context of the Schrödinger–Langevin–Kostin equation // Phys. Lett. A. 2007. Vol. 372. P. 21.

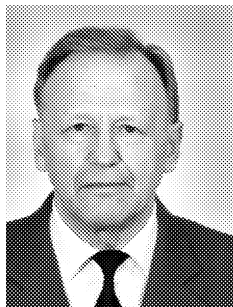
13. *Sanin A.L., Smirnovsky A.A.* Influence of dissipation on quantum wave dynamics in confined potential systems // *Proc. SPIE.* 2007. Vol. 6597. P. 659704.
14. *Смирновский А.А.* Уравнение Шредингера–Ланжевена–Костина с диссипативным слагаемым в интегральной форме // *Материалы докладов XIV Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» / Отв. ред. И.А. Алешковский, П.Н. Костылев. [Электронный ресурс] М.: Издательский центр Факультета журналистики МГУ им. М.В. Ломоносова, 2007.*
15. *Grindlay J.* On an application of a generalization of the discrete Fourier transform to short time series // *Can. J. Phys.* 2001. Vol. 79. P. 857.
16. *Igarashi A., Yamada H.S.* Quantum dynamics and delocalization in coherently driven one-dimensional double-well system // *arXiv:cond-mat/0508483.*

*Санкт-Петербургский государственный политехнический университет*      *Поступила в редакцию*      *21.12.2007*  
*После доработки*      *6.02.2008*

### QUANTUM SPATIALLY CONFINED OSCILLATOR IN SYSTEM WITH FRICTION AND FEEDBACK

*A.L. Sanin, A.A. Smirnovsky*

The dynamics of quantum wave packets in one-dimensional system with spatially confined quadratic potential, feedback and friction was numerically investigated in the context of the Schrödinger–Langevin–Kostin equation. The coherent oscillations are possible in the system under determined values of the feedback force and friction coefficient. There are the critical values of these quantities when the packet oscillations become complicated, the uncertainty product increases sharply, oscillates, but the Fourier-spectrum is everywhere dense.



*Санин Андрей Леонардович* – родился в Ленинграде (1935). Окончил Ленинградский политехнический институт (1963), инженер-физик. Работает на кафедре «Теоретическая физика» Санкт-Петербургского государственного политехнического университета (СПбГПУ), доктор физико-математических наук, профессор кафедры. Область научных интересов: качественный анализ и численное моделирование электронных волн, структур, квантовая динамика гамильтоновых и диссипативных систем, фундаментальное образование. По данной тематике имеет более 150 публикаций.



*Смирновский Александр Андреевич* – родился в Ленинграде (1982). Окончил СПбГПУ (2005), магистр по направлению «Прикладная математика и физика». В настоящее время аспирант кафедры «Теоретическая физика» СПбГПУ. Область научных интересов: квантовая механика, гидроаэродинамика, нелинейные и диссипативные системы, численные методы. Опубликовал около 20 работ, включая тезисы докладов.





## ДВЕ ТЫСЯЧИ СЕДЬМОЙ ГОД В ДАТАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ<sup>1</sup>

*Д.И. Трубецков*

### Код да Винчи и числа Фибоначчи<sup>2</sup>

В геометрии существует два сокровища – теорема Пифагора и деление отрезка в крайнем и среднем отношении. Первое можно сравнить с ценностью золота, второе можно назвать драгоценным камнем.

*Иоганн Кеплер (цит. по [11])*

### Что такое код да Винчи?

Наверняка кто-то из читателей журнала знаком с романом американского писателя Дэна Брауна «Код да Винчи» [12], опубликованном в 2003 году, или смотрел фильм с Томом Хэнксом в главной роли. Роман по праву называют бестселлером XXI века: в первый же день после публикации он был продан в количестве 6000 экземпляров, за первую неделю продажи занял первое место в списке нью-йоркских бестселлеров, а затем стал одним из наиболее продаваемых романов всех времен<sup>3</sup>.

Кто же автор романа и почему произведение стало бестселлером?

Американский писатель Дэн Браун родился в 1965 году в Нью-Хэмпшире (США). Его отец был профессором математики, обладателем Президентской награды (Presidential Award), а мать – профессиональным музыкантом. Мальчик рос в среде парадоксов философии в науке и религии. Начиная взрослую жизнь как автор песен, музыкант и исполнитель. Выпустил несколько своих компакт-дисков. Написанная вместе с женой в 1995 году книга «187 мужчин, от которых следует держаться подальше: путеводитель для романтически фрустрированных женщин» – его первый писательский опыт.

<sup>1</sup>Начало см. в журнале «Известия вузов. ПНД», 2008, т. 16, № 1, с. 33.

<sup>2</sup>В этой части статьи использованы материалы книги А. Стахова, А. Слученковой, И.Щербакова «Код да Винчи и ряды Фибоначчи» [11].

<sup>3</sup>Роман переведен на 42 языка и разошелся 20-миллионным тиражом.

Дэна всегда интересовали философия, история религии, тайные общества, криптография. Результат этих интересов – первый роман, триллер «Цифровая крепость», опубликованный в 1998 году. В 2000 году появился интеллектуальный конспирологический детектив «Ангелы и демоны», в 2001 – триллер «Точка обмана» (Deception Point).

Приключения профессора Роберта Лэнгдона из «Ангелов и демонов» продолжились в романе «Код да Винчи». Чем интересен роман? Почему критики характеризовали его следующим образом:

- книга, которую все купили, но мало кто прочитал;
- роман, от которого все в восторге, но мало кто может объяснить, почему;
- история, которая всех заинтриговала, но мало кто с ней согласился.

Коротко перескажем интригу романа, связанную с историей христианства. В частности, в романе сделана попытка раскрыть тайну Ватикана о некоторых моментах жизни Иисуса Христа. По Брауну, церковь на протяжении веков скрывает от верующих, что Иисус Христос женился на блуднице Марии Магдалине. После распятия беременная Мария скрывается в Галлии, где рождает ребенка от Иисуса. Якобы от этого дитя пошел род французских королей династии Меровингов, потомки которых будто бы живут до сих пор. Хранит эту тайну таинственный Приорат Сиона. Роман Брауна начинается с убийства в Лувре Великого Магистра этого ордена Жака Соньера. Умиравший Магистр оставляет зашифрованное послание своей внучке Софи Неве, которая становится главной героиней романа, а главным героем – Роберт Лэнгдон – гарвардский профессор несуществующей дисциплины «религиозная символика», которой в Гарварде, естественно, нет. Лэнгдон пытается разгадать закодированный смысл фрески Леонардо да Винчи «Тайная вечеря» и раскрыть тайну Священного Грааля.

Общественный резонанс от романа был невиданным. Разразилась скандальная полемика о жизни Иисуса Христа. С резкой критикой романа выступили Ватикан и Русская православная церковь. Они обеспокоены тем, что читатели могут воспринять сюжет романа как священный текст – пересказанную евангельскую историю.

Книга прочитана, но четкого ответа на вопрос – что же такое «код да Винчи» – нет. Браун считает, что секретный код скрыт во фреске «Тайная вечеря», в портрете Моны Лизы и даже в лике на одной из величайших христианских святынь – знаменитой туринской плащанице (якобы это автопортрет Леонардо).

Анализируя одну из глав романа, в которой Роберт Лэнгдон вспоминает лекцию, прочитанную им студентам Гарвардского университета, позволю себе дать иной, вполне определенный ответ на поставленный выше вопрос. Вернемся к тексту романа.

Роберт Лэнгдон связывает убийство с «Витрувийским человеком» Леонардо да Винчи (рис. 1), поскольку именно такую позу принял Жак Соньер перед смертью. Здесь же цифры, написанные кровью, составляют последовательность Фибоначчи, и, наконец, начертан пентакл – символ пифагорейского союза. Лэнгдон размышляет, пытаясь связать воедино известные факты.

«Да Винчи, последовательность Фибоначчи, пентакл ... Неким непостижимым образом их связывала одна из самых фундаментальных концепций в истории искусств, рассмотрению которой он, Лэнгдон, даже посвящал несколько лекций на своем курсе...

Мысленно он перенесся в Гарвард, увидел себя перед аудиторией. Вот он поворачи-

чивается к доске, где мелом выведена тема «Символизм в искусстве». И пишет под ней своё любимое число: 1.618».

Это число называется числом  $\Phi$  (phi) в честь выдающегося греческого скульптора Фидия (Phidias), который широко использовал его в своих скульптурах. Лэнгдон рассказывает студентам о том, что все растения, животные и даже люди наделены физическими пропорциями, основанными на числе  $\Phi$ . Раньше считалось, что число  $\Phi$  было предопределено Творцом Вселенной и по сему его называли «Божественной пропорцией».

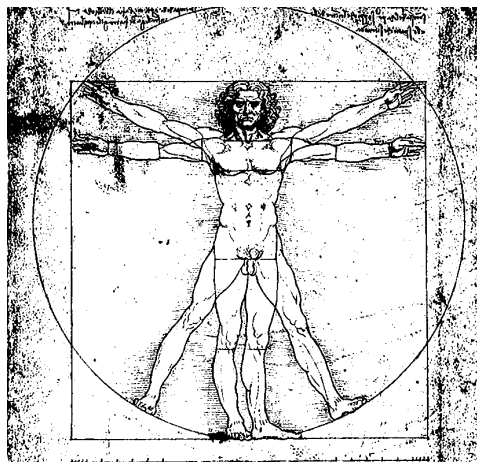


Рис. 1.

Профессор Лэнгдон приводит студентам массу примеров: соотношение мужских и женских особей в пчелином рое, строение спиралеобразной морской раковины (наутилуса), цветка подсолнечника со зрелыми семенами, расположение листьев на стеблях растений, сегментационные части тел насекомых – все это покорно следует закону «божественной пропорции».

Впервые здесь Лэнгдон говорит о Леонардо да Винчи, демонстрируя студентам знаменитый рисунок обнаженного мужчины в круге – «Витрувийского человека»<sup>4</sup>, высоко оценивая роль великого итальянца в развитии теории и практическом использовании «божественной пропорции».

«Никто лучше да Винчи не понимал божественной структуры человеческого тела. Его строения. Да Винчи даже эксгумировал трупы, изучая анатомию и измеряя пропорции костей скелетов. Он первым показал, что тело человека состоит из «строительных блоков», соотношение пропорций которых всегда равно нашему заветному числу».

Действительно, достаточно измерить расстояние от пупа до пола, затем разделить свой рост на это расстояние, и мы получим число  $\Phi$ . Его же получим, если измерим расстояние от плеча до кончиков пальцев и разделим его на расстояние от локтя до тех же кончиков пальцев. Число  $\Phi$  дает и отношение расстояния от верхней части бедра до пола к расстоянию от колена до пола.

Далее Лэнгдон в своей лекции демонстрирует студентам слайды с картинами Микеланджело, Альбрехта Дюрера, Леонардо да Винчи и других, доказывая, что все они следовали «божественной пропорции» в построении своих композиций; профессор обращается к архитектуре, к музыкальным произведениям и т.п. Наконец, в конце лекции он рассказывает о пентаграмме или пентакле (рис. 2). Если нарисовать правильный пятиугольник – пентагон (от гр. *pentagōnon*), и в нем провести все диагонали, то получим пятиконечную звезду, называемую пентаграммой<sup>5</sup> или пентаклем.

<sup>4</sup>Так он был назван в честь Маркуса Витрувия, гениального римского архитектора, который в своих «Десяти книгах об архитектуре» вознес хвалу «божественной пропорции». Леонардо да Винчи сделал рисунок, на котором показано, что размах вытянутых рук человека примерно равен его росту, поэтому фигура человека вписывается в квадрат и круг.

<sup>5</sup>Название пентаграмма происходит от греческого слова *pentagrammon* (*pen*te – пять, *grammon* – линия) и означает правильный пятиугольник, на сторонах которого построены равнобедренные треугольники одинаковой высоты.

Точки пересечения диагоналей в пентагоне всегда являются точками «божественной пропорции». При этом образуется новый пентагон, в котором можно провести диагонали, их пересечение даст еще один пентагон и так до бесконечности. Таким образом, соотношение линейных сегментов в пятиконечной звезде всегда равно  $\Phi$ .

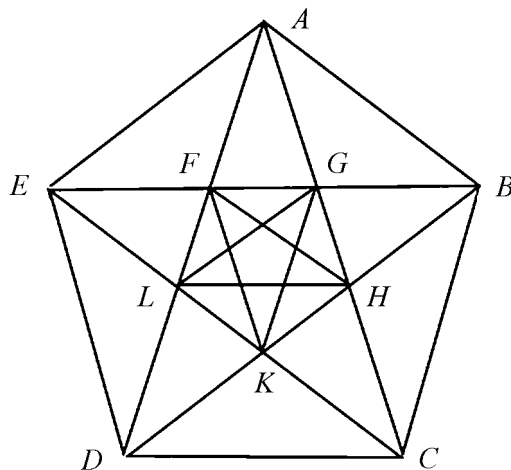


Рис. 2. Пентагон и пентакл – один из самых могущественных образов, считавшийся во многих культурах одновременно божественным и магическим

Пятиконечная звезда символизирует Венеру – богиню любви и красоты, которая занимает свое место и на ночном небе под тем же именем. Каждые восемь лет планета Венера описывает абсолютно правильный пентакл по большому кругу небесной сферы. Именно потрясение древних этим явлением сделало Венеру и ее пентакл символом совершенства и красоты. Современные Олимпийские игры следуют половинному циклу Венеры. Более того, пятиконечная звезда чуть не стала символом олимпиад. Лишь в последний момент ее модифицировали, заменив на пять переплетенных колец.

Считается, что именно Леонардо да Винчи ввел термин «золотое сечение» (*aurea sectio*) и использовал пропорции этого сечения во многих своих знаменитых произведениях (в частности, в «Тайной вечере» и «Моне Лизе»). Мысль о том, что золотая пропорция – универсальный код природы на всех уровнях ее организации, впервые выразил великий итальянский математик Лука Пачоли в своей книге «О божественной пропорции», которая написана под влиянием Леонардо да Винчи. Своими иллюстрациями Леонардо способствовал широкому признанию книги в научном мире, был ее вдохновителем, а по существу – соавтором.

*Вот почему можно высказать гипотезу о том, что введенный Брауном термин «код да Винчи» есть, по мнению древних греков и представителей Ренессанса, универсальный код Природы, названный Леонардо да Винчи Золотым сечением (возможно, в сочетании с пентаклем).*

### Геометрическое определение Золотого сечения<sup>6</sup>

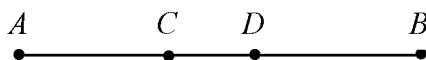


Рис. 3.

Из «Начал» Евклида пришла задача о делении отрезка в крайнем и среднем отношении. В чем суть задачи?

Разделим отрезок  $AB$  точкой  $C$  в таком отношении, чтобы большая часть отрезка  $CB$  так относилась к меньшей части  $AC$ , как отрезок  $AB$  к своей большей части  $CB$  (рис. 3), то есть

$$\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{AC}. \quad (1)$$

<sup>6</sup>Материал статьи в виде лекции читался школьникам, поэтому содержит много выкладок; есть даже задачи.

Обозначим пропорцию (1) через  $x$ . Тогда с учетом того, что  $AB = AC + CB$ , перепишем (1) в виде

$$x = \frac{AC + CB}{CB} = 1 + \frac{AC}{CB} = 1 + \frac{1}{\frac{CB}{AC}} = 1 + \frac{1}{x}$$

или

$$x^2 = x + 1. \quad (2)$$

Очевидно, что решение (2) должно быть положительным числом, следовательно, решением  $\tau$  задачи о делении отрезка в крайнем и среднем отношении должно быть

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Приближенное значение золотой пропорции

$$\tau = 1.6180339887498948482045868343656381177203\dots$$

Это удивительное число стало эстетическим каноном древнегреческого искусства и искусства Возрождения. Уже указывалось, что термин «золотое сечение» связывают с именем Леонардо да Винчи. Однако существует мнение, что термин восходит к Клавдию Птолемею – великому античному астроному и географу. Но термин стал популярным и закрепился в науке благодаря Леонардо да Винчи, то есть он стал поистине «кодом да Винчи».

Уравнение (2) часто называют *уравнением золотой пропорции*. Заметим, что на отрезке  $AB$  существует еще одна точка,  $D$  (см. рис. 3), которая также делит его золотым сечением

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{DB} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Из «Начал» Евклида известен следующий способ построения золотого сечения с использованием циркуля и линейки (рис. 4). Построим прямоугольный треугольник с катетами  $AB = 1$  и  $AC = 0.5$ . По теореме Пифагора

$$CB = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

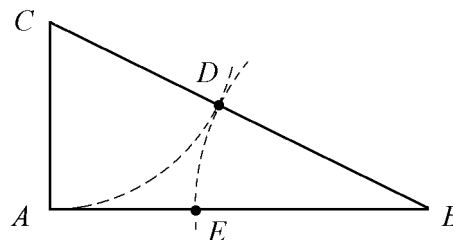


Рис. 4.

Проведя дугу  $AD$  с центром в точке  $C$  до ее пересечения с отрезком  $CB$  в точке  $D$ , получим

$$BD = CB - CD = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \tau^{-1}.$$

Аналогично

$$\frac{AB}{EB} = \frac{EB}{AE} = \tau \quad \text{или} \quad AB = AE + EB, \text{ но}$$

$AB = 1$ ,  $AE = EB^2$ , поэтому

$$1 = \tau^{-2} + \tau^{-1}$$

или

$$\tau^2 = \tau + 1.$$

Таким образом, хорошо известный в древнем мире прямоугольный треугольник с отношением катетов 1:2 мог послужить основой для открытия теоремы квадратов (теоремы Пифагора), золотого сечения и несоизмеримых отрезков<sup>7</sup> – трех великих математических открытий, приписываемых Пифагору.

### Замечательные тождества для золотой пропорции

Если корень  $\tau$  подставить в уравнение (2), то получим

$$\tau^2 = \tau + 1. \quad (3)$$

Убедитесь сами в справедливости (3), подставив в него  $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$ . Если члены тождества (3) разделить на  $\tau$ , то имеем

$$\tau = 1 + \frac{1}{\tau} \quad (4)$$

или

$$\tau - 1 = \frac{1}{\tau}. \quad (5)$$

Как получить  $\tau^{-1}$ ? Из (5) следует, что надо вычесть 1 из золотой пропорции

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Давайте теперь умножим (3) на  $\tau$  и объединим полученное с (4). Тогда

$$\tau^3 = \tau^2 + \tau, \quad (6)$$

$$\tau = 1 + \tau^{-1}. \quad (7)$$

Будем далее (6) умножать на  $\tau$ , а (7) делить на  $\tau$ . На  $n$ -м этапе процедуры получим

$$\tau^n = \tau^{n-1} + \tau^{n-2}, \quad (8)$$

где  $n$  пробегает все значения в пределах от  $+\infty$  до  $-\infty$ , то есть  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Итак, *любая целая степень золотой пропорции равна сумме двух предыдущих.*

Пример:

$$\tau^{100} = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{100} = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{99} + \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{98}.$$

Трудно, на первый взгляд, себе представить, что это так, но это так.

<sup>7</sup>Если отношение отрезков не может быть выражено в виде отношения двух рациональных чисел, то такие отрезки называются несоизмеримыми (пример – отношение диагонали квадрата к его стороне, равно  $\sqrt{2}$ ).

φωτο

фото



## Золотая геометрическая прогрессия

Рассмотрим последовательность степеней золотой пропорции, то есть

$$\left\{ \dots, \tau^{-n}, \tau^{-(n-1)}, \dots, \tau^{-2}, \tau^{-1}, \tau^0 = 1, \tau^1, \tau^2, \dots, \tau^{n-1}, \tau^n, \dots \right\}. \quad (9)$$

Последовательность (9) – геометрическая прогрессия со знаменателем  $\tau$ , то есть

$$\tau^n = \tau \times \tau^{n-1}.$$

С другой стороны, в соответствии с (8) каждое число ряда (9) есть сумма двух предыдущих.

Заметим, что свойство (8) характерно только для геометрической прогрессии со знаменателем  $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$ , и такая прогрессия называется *золотой прогрессией*.

## Представление золотой пропорции в виде цепной дроби

Если в правую часть тождества (4) вместо  $\tau$  подставить его значение, выражаемое тем же (4), то мы получим «многоэтажную дробь»

$$\tau = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\tau}}.$$

Если продолжить такую подстановку в правой части бесконечное число раз, то в результате получим непрерывную цепную дробь

$$\tau = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} = \frac{1}{1 + \tau}. \quad (10)$$

Подходящие дроби для  $\tau$  получаются как последовательные отношения чисел Фибоначчи

$$\tau_m = \frac{F_{m-1}}{F_m},$$

$$F_0 = 1, F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5, \dots, F_{m+1} = F_m + F_{m-1}.$$

Об этих числах разговор впереди.

Золотое сечение и приведенное выше представление используется в теории хаоса при объяснении того, как квазипериодическое движение с двумя несоизмеримыми частотами на торе становится хаотическим при добавлении нелинейного возмущения.

Мы вернемся и к этому вопросу.

## Уравнения золотой пропорции $n$ -й степени

Напомним, что в общем виде квадратное уравнение имеет вид

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (11)$$

где  $a \neq 0$ . Известно, что

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (12)$$

а детерминант уравнения

$$D = b^2 - 4ac. \quad (13)$$

Уравнение (2) есть уравнение типа (11), значения коэффициентов которого

$$a = 1, \quad b = -1, \quad c = -1, \quad (14)$$

детерминант  $D = 5$ , и корни

$$x_1 = \tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad (15)$$

$$x_2 = -\frac{1}{\tau} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}. \quad (16)$$

Существуют ли алгебраические уравнения более высоких степеней, корнем которых является  $\tau$ ? Умножим обе части уравнения (2) на  $x$

$$x^3 = x^2 + x. \quad (17)$$

Выразим из (2)  $x = x^2 - 1$  и подставим в (17). Имеем

$$x^3 = 2x^2 - 1. \quad (18)$$

С другой стороны, если в (17) подставить  $x^2 = 1 + x$ , то получим еще одно уравнение

$$x^3 = 2x + 1. \quad (19)$$

Подставим  $x = \tau = (1 + \sqrt{5})/2$  в (18)

$$\tau^3 = \tau^2 + \tau = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{5}}{2}, \quad 2\tau^2 - 1 = 2 \frac{3 + \sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{4 + 2\sqrt{5}}{2}.$$

Таким образом, уравнение (18) является *золотым*.

*Задача.* Докажите сами, что (19) тоже золотое.

Умножим теперь (17) на  $x$  и получим

$$x^4 = x^3 + x^2.$$

Воспользуемся уравнением (2) для  $x^2 = x + 1$  и уравнениями (18) и (19) для  $x^3$ . Находим

$$x^4 = 2x^2 - 1 + x^2, \quad x^4 = 3x^2 - 1, \quad (20)$$

$$x^4 = 3x + 2. \quad (21)$$

Замечательно, как показал Ричард Фейнман, уравнение (21) описывает энергетическое состояние молекулы бутадиена – ценного химического вещества, используемого при производстве каучука. Он восхищенно пишет:

«Какие чудеса существуют в математике! Согласно моей теории, золотая пропорция древних греков дает минимальное энергетическое состояние молекулы бутадиена» (цитируется по [11]).

Чтобы получить уравнения более высоких степеней, нужно использовать равенство  $x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$ .

*Задача.* Выведите в качестве примера сами следующие золотые уравнения высших степеней:

$$x^5 = 5x^2 - 2 = 5x + 3,$$

$$x^6 = 8x^2 - 3 = 8x + 5,$$

$$x^7 = 13x^2 - 5 = 13x + 8.$$

Анализ показывает, что числовые коэффициенты в правой части этих уравнений есть не что иное, как знаменитые числа Фибоначчи, о которых уже упоминалось.

В общем случае алгебраические уравнения золотой пропорции  $n$ -й степени выражаются в следующем виде:

$$x^n = F_n x^2 - F_{n-2} = F_n x + F_{n-1}, \quad (22)$$

где  $F_n, F_{n-1}, F_{n-2}$  – числа Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Итак, мы нашли замечательное тождество, связывающее золотую пропорцию с числами Фибоначчи, если  $x = \tau = (1 + \sqrt{5})/2$ :

$$\tau^n = F_n \tau^2 - F_{n-2} = F_n \tau + F_{n-1} \quad (23)$$

Дальше мы узнаем, что, например, 18, 19 и 20-е числа Фибоначчи суть

$$F_{18} = 2584, \quad F_{19} = 4181, \quad F_{20} = 6765.$$

Тогда

$$x^{20} = 6765x^2 - 2584,$$

$$x^{20} = 6765x + 4181.$$

Кажется непостижимым, что корнем этих уравнений также является золотая пропорция.

### **Золотое сечение в пирамиде Хеопса, в греческой культуре и в искусстве эпохи Возрождения**

Рассмотрим прямоугольный треугольник  $ABC$  (рис. 5), в котором отношение катетов  $AC/CB = \sqrt{\tau}$ . Обозначим его стороны через  $x, y, z$ . Тогда  $y/x = \sqrt{\tau}$ ,  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , и при  $x = 1, y = \sqrt{\tau}$

$$z = \sqrt{1 + \tau} = \sqrt{\tau^2} = \tau.$$

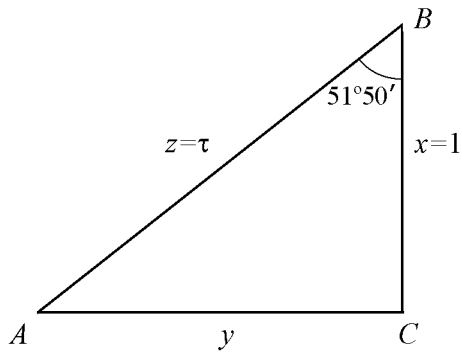


Рис. 5. «Золотой» треугольник

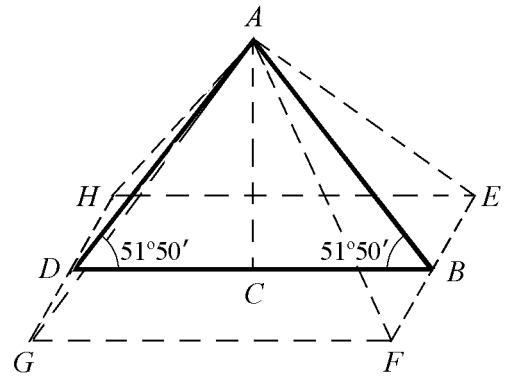


Рис. 6. Схематичное изображение пирамиды Хеопса.  $GF = L$ ,  $AC = H$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = AC/CB = H/(L/2) = 2H/L$

Прямоугольный треугольник, в котором стороны относятся как  $\tau : \sqrt{\tau} : 1$  называется *золотым треугольником*.

Оказалось, что он является главной геометрической идеей пирамиды Хеопса (рис. 6).

В 1837 году (170 лет назад) английский полковник Г. Вайз измерил угол  $\alpha$  наклона граней пирамиды Хеопса: он оказался равным  $51^\circ 51'$  (эта величина и сегодня признается большинством исследователей). Обычно считают, что длина стороны основания  $L = 233.16$  м, высота пирамиды  $H = 146.6$  м (из-за осадки конструкции высота пирамиды уменьшилась). Строго говоря, пирамида Хеопса – усеченная. Сегодня ее верхняя площадка имеет размер  $10 \times 10$  м, а столетие назад она была  $6 \times 6$  м. Скорее всего, вершину пирамиды разобрали, и потому опять же уменьшилась ее высота. Какова же была ее первоначальная высота? Вернемся к измерению Г. Вайза. Исследователей ждал большой сюрприз: значение  $\operatorname{tg}(51^\circ 51') = 1.27306$  оказалось очень близко к значению  $\sqrt{\tau} = 1.272$ ! Если же взять  $\alpha = 51^\circ 50'$ , то  $\operatorname{tg} \alpha = 1.272 = \sqrt{\tau}$ . В 1840 году все тот же Вайз повторил свои измерения и получил  $\alpha = 51^\circ 50'$ ! Тогда исследователи высказали гипотезу: в основу треугольника  $ABC$  пирамиды Хеопса было положено отношение  $AC/BC = \sqrt{\tau} = 1.272$  и

$$H = \frac{L}{2} \sqrt{\tau} = 148.28 \text{ м.}$$

*Задача.* Докажите сами главную геометрическую тайну пирамиды Хеопса: отношение внешней суммарной площади пирамиды к площади основания равно золотой пропорции. Примите  $CB = 1$ .

Измерения пирамиды Хефрена показали, что угол боковых граней в ней равен  $53^\circ 12'$ , что отвечает отношению катетов прямоугольного треугольника 4:3. Плутарх писал, что египтяне сравнивали природу Вселенной со «священным» или египетским треугольником; они уподобляли вертикальный катет мужу, основание – жене, а гипотенузу – тому, что рождается от обоих.

Может быть, гениальные создатели египетских пирамид стремились поразить далеких потомков глубиной своих знаний, увековечив золотой прямоугольный тре-

угольник и теорему Пифагора<sup>8</sup> задолго до ее открытия (для треугольника с отношением сторон 3:4:5 получается  $3^2 + 4^2 = 5^2$ )? Кстати, теорема Пифагора была известна и вавилонянам, и китайцам.

Конечно, идея гармонии, основанной на золотом сечении, не могла не найти отражение в греческой культуре. Достаточно упомянуть, что на протяжении пятнадцати лет правления Перикла в Афинах сооружали необыкновенные по красоте храмы, алтари, скульптуры. Всеми работами руководил выдающийся греческий скульптор Фидий. Мы уже упоминали, что в честь него золотое сечение часто называют числом Ф.

В 447 году до н. э. начались работы по строительству храма Афины – Парфенона, которые продолжались до 434 года до н.э. Исследователи считают, что главной причиной красоты Парфенона является исключительная соразмерность его частей, основанная на золотом сечении. Связаны с золотым сечением и знаменитые скульптуры – статуя Дорифора (скульптуру назвали «Канон» как наилучший пример для анализа пропорций идеального человеческого тела, установленных античными греческими скульпторами) и Венера Милосская – статуя богини Афродиты.

Идея «божественной гармонии» была доминантной в эпоху Ренессанса. Церковь с большой заинтересованностью относилась к концепции гармонии, поскольку, согласно христианской доктрине, Вселенная была творением Бога и беспрекословно подчинялась его воле. При этом христианский Бог руководствовался при создании Мира математическими принципами. Посему наука и искусство эпохи Возрождения приобрели форму поиска этого божественного математического плана. По мнению ряда историков тесное слияние религиозной доктрины о Боге как творце Вселенной и античной идеи о числовой гармонии Мира и стало главной причиной по существу флукуационного подъема культуры в эпоху Возрождения.

Вот как Иоганн Кеплер формулирует цель науки того времени: «Главной целью всех исследований внешнего мира должно быть открытие рационального порядка и гармонии, которые Бог ниспослал миру и открыл нам на языке математики» (цит. по [11]).

В живописи преобладали библейские сюжеты. Знаменитое «Святое семейство» Микеланджело основано на использовании в композиции пентакла, «Распятие» Рафаэля Санти содержит золотой равнобедренный треугольник. Можно еще раз упомянуть и «Витрувийского человека» Леонардо да Винчи. И, наконец, «Мона Лиза». Исследователи обнаружили, что композиционное построение основано на двух золотых треугольниках, повернутых друг к другу основаниями. Анализ картины показывает, что зрачок левого глаза, через который проходит вертикальная ось полотна, находится на пересечении биссектрис верхнего золотого треугольника, которые, с одной стороны, делят пополам углы золотого треугольника, а с другой стороны, в точках пересечения с боковыми сторонами золотого треугольника делят их в пропорции золотого сечения. Таким образом, великий Леонардо использовал в картине и принцип симметрии, и золотое сечение – код да Винчи.

Несомненно, что еще одним ярким представителем эпохи Возрождения был

---

<sup>8</sup>Пифагор долгое время пробыл в Египте и получил там ранг «посвященного» в тайны египетской науки. Его имя состоит из двух частей: «прозревающий гармонию», ибо пифии в Древней Греции были жрицы-прорицательницы, а Гор в Древнем Египте олицетворял гармонию. Так древнеегипетские жрецы, передавая сокровенные знания представителю набирающей силу цивилизации, символически скрепляли в одном лице союз мужского и женского начал – оплот гармонии.

великий итальянский математик Лука Пачоли. Уже упоминалось, что под непосредственным влиянием Леонардо он написал книгу *Divine Proportione* («Божественная пропорция») – первое математическое сочинение, целиком посвященное золотому сечению. Книга состоит из трех частей: в первой излагаются свойства золотого сечения, во второй описаны правильные многогранники, в третьей – приложения золотого сечения в архитектуре. Пачоли вывел двенадцать различных свойств золотой пропорции. Он считает ее универсальным отношением, выражающим в природе и искусстве совершенство красоты, и называет «божественной». Леонардо да Винчи принадлежит не только идея книги, но и 60 великолепных иллюстраций, ценных и сегодня. Поистине, он – соавтор книги Пачоли.

О золотом сечении написано много и по-разному. Тем, кто интересуется архитектурой, можно порекомендовать книгу русского архитектора профессора Г.Д. Гримма «Пропорциональность в архитектуре» [13], изданную в 1935 году.

Исследователи искусства XIX и XX веков находят золотое сечение и в живописи, и в скульптуре, и в архитектуре, и в музыке. Но скорее всего, авторы этих творений в отличие от древних греков и титанов Ренессанса, если и использовали золотое сечение, то неосознанно.

### Ряды Фибоначчи

Современные историки математики называют Фибоначчи «блестящим метеором, промелькнувшим на темном фоне западно-европейского средневековья». Фибоначчи написал несколько математических книг, наиболее известная из которых «*Liber abaci*» – своеобразная математическая энциклопедия эпохи Средневековья. Наиболее известной из сформулированных Фибоначчи задач является «задача о размножении кроликов», которая привела к открытию числовой последовательности 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., названной впоследствии рядом Фибоначчи. Фибоначчи получил образование в арабских учебных заведениях, и его историческая роль в том, что он своими математическими книгами передавал математические знания арабов в западно-европейскую науку. Его вклад в развитие математики более существен, чем задача о кроликах.

В чем же суть задачи?

Пусть в отгороженном месте в первый день января имеется пара кроликов (самка и самец). Эта пара кроликов производит новую пару кроликов в первый день февраля, а потом в первый день каждого последующего месяца. Каждая новорожденная пара кроликов становится зрелой через месяц, а затем через месяц дает жизнь новой паре. Сколько пар кроликов будет в отгороженном месте через 12 месяцев?

Обозначим через  $A$  пару зрелых кроликов, а через  $B$  – пару новорожденных. Тогда процесс размножения может быть описан с помощью двух «переходов», соответствующих ежемесячным превращениям кроликов

$$A \rightarrow AB, \quad (24)$$

$$B \rightarrow A. \quad (25)$$

Весь процесс можно представить таблицей (ограничимся полугодом для рассмотрения).

Таблица

Дата	Пары кроликов	A	B	A+B
1 января	A	1	0	1
1 февраля	AB	1	1	2
1 марта	ABA	2	1	3
1 апреля	ABAAB	3	2	5
1 мая	ABAABABA	5	3	8
1 июня	ABAABABAABAAB	8	5	13

Из таблицы следует, что каждый член последовательности равен сумме двух предыдущих, поэтому общее правило может быть записано в виде

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (26)$$

Такая формула называется рекуррентной формулой (от лат. *recurrere* – возвращаться).

Значения числовой последовательности, порождаемой (26), зависят от начальных значений последовательности  $F_1, F_2$ . Если  $F_1 = F_2 = 1$  для A-последовательности, то (26) дает такую числовую последовательность

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots \quad (27)$$

Для B-чисел  $F_1 = 0, F_2 = 1$ , и тогда имеем

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots \quad (28)$$

Для (A + B)  $F_1 = 1, F_2 = 2$ , следовательно

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots \quad (29)$$

Обычно под числами Фибоначчи понимают последовательность (27).

На самом деле кролики размножаются еще интенсивнее, чем предположил Фибоначчи в задаче. Пример – национальная трагедия Австралии, начавшаяся с того, что в 1837 году один из фермеров создал ферму всего из 24 кроликов. Они расплодились, вырвались на свободу и чуть ли не уничтожили всю зелень континента. Борьба с ними длится уже 160 лет с переменным успехом.

Заметим, что размножение пчел также осуществляется по принципу Фибоначчи.

### Вариации на тему Фибоначчи

В замечательной книге венгерского математика Альфреда Реньи «Трилогия о математике» [14] есть статья «Вариации на тему Фибоначчи» (с. 326). Начинается она так.

«Вариации на избранную тему – жанр хорошо известный в музыкальной литературе. Большим любителем этого жанра был Моцарт... Отличительная особенность произведений вариационного жанра заключается в том, что они в большинстве случаев начинаются с несложной основной темы, претерпевающей в дальнейшем значительные изменения по темпу, настроению, характеру... Но сколь бы причудливыми ни были вариации, у

слушателя непрерывно должно создаваться впечатление, будто каждая из них является естественным развитием основной темы, содержится в ней в зародышевой форме, и композитору остается лишь услышать и подробно разработать их. Последуем примеру музыкальной литературы и, выбрав простую математическую тему (последовательность, образуемую так называемыми числами Фибоначчи), рассмотрим ее вместе с многочисленными вариациями».

У Реньи таких вариаций 15. Рассмотрим некоторые из них.

- Суммы последовательных чисел Фибоначчи.

Вычислим сумму из  $n$  подряд идущих чисел Фибоначчи. Начнем с простейших сумм:

$$\begin{aligned} 1 + 1 &= \mathbf{3} - 1; \\ 1 + 1 + 2 &= \mathbf{5} - 1; \\ 1 + 1 + 2 + 3 &= \mathbf{8} - 1; \\ 1 + 1 + 2 + 3 + 5 &= \mathbf{13} - 1. \end{aligned} \tag{30}$$

Выделенные цифры также составляют последовательность ряда Фибоначчи. Поэтому

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1. \tag{31}$$

- А теперь рассмотрим сумму из  $n$  подряд идущих чисел Фибоначчи с нечетными индексами  $1, 3, 5, \dots, 2n - 1, \dots$ . Опять начнем с простейших сумм

$$\begin{aligned} 1 + 2 &= \mathbf{3}; \\ 1 + 2 + 5 &= \mathbf{8}; \\ 1 + 2 + 5 + 13 &= \mathbf{21}; \\ 1 + 2 + 5 + 13 + 34 &= \mathbf{55}. \end{aligned} \tag{32}$$

Видно, что сумма из  $n$  подряд идущих чисел Фибоначчи с нечетными индексами всегда равна некоторому числу Фибоначчи.

$$F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}. \tag{33}$$

*Задача.* Докажите сами, что:

1.  $F_2 + F_4 + F_6 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$ .
2.  $F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$ .
3.  $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$ .

- Связь с золотой пропорцией.

Рассмотрим числовую последовательность, образованную из отношений соседних чисел Фибоначчи, то есть:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \dots \\ &\frac{1}{1} = 1, \frac{2}{1} = 2, \frac{3}{2} = 1.5, \frac{5}{3} = 1.66, \frac{8}{5} = 1.6, \frac{13}{8} = 1.625, \frac{21}{13} = 1.61538\dots \end{aligned} \tag{34}$$



К чему стремится последовательность (34), то есть отношение двух соседних чисел Фибоначчи  $F_n/F_{n-1}$ , если  $n \rightarrow \infty$ ?

Для ответа вернемся к представлению золотой пропорции в виде непрерывной дроби (10). Дроби (34) являются последовательными приближениями непрерывной дроби (10)

$$\frac{1}{1} = 1 \text{ (первое приближение);}$$

$$\frac{2}{1} = 1 + \frac{1}{1} \text{ (второе приближение);}$$

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} \text{ (третье приближение);}$$

$$\frac{5}{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} \text{ (четвертое приближение).}$$

Устремляя процесс в бесконечность, мы получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Считается, что первым, кто установил эту связь, был Кеплер.

- Разберитесь сами в четвертой вариации Реньи.

*Задача.* Дома в новом поселке требуется окрасить так, чтобы каждый этаж оказался выкрашенным либо в белый, либо в синий цвет. Из эстетических соображений никакие два соседних этажа не должны быть окрашены в синий цвет. Сколькими способами можно окрасить дома в поселке с учетом указанных требований, если число этажей задано?

### Вместо заключения

Эпиграфом к первой части повествования о Леонардо да Винчи взяты строчки из книги Аталя Бюлента [1]. Закончим изложение еще одним отрывком из этой книги. «Числа Фибоначчи дают представление о динамической симметрии, золотом сечении или «божественной пропорции», о которых он сам, возможно, не подозревал. Через триста лет после Фибоначчи Леонардо да Винчи иллюстрировал книгу, которая называлась «О божественной пропорции». Но наука и искусство имеют гораздо больше точек соприкосновения, чем открытия Фибоначчи и творчество Леонардо: эта связь проявляется в элементах архитектуры, астрономии, биологии, химии, геологии, техники, математики, философии, физики – во всем, что входило в круг интересов Леонардо да Винчи. Для него это были ветви одного дерева, часть общей структуры Вселенной» [1, с. 28].

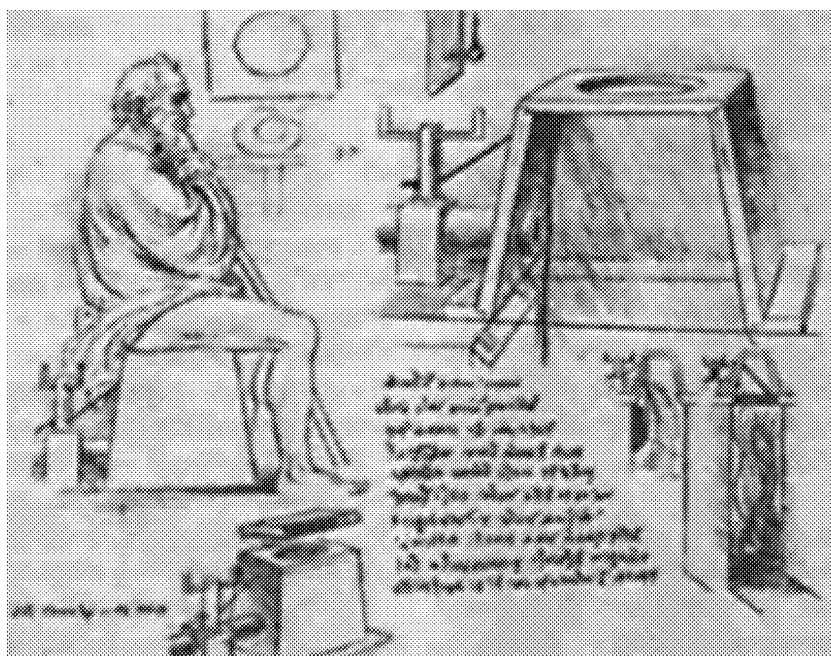
P.S. Когда мои материалы о Леонардо да Винчи были уже сданы в редакцию, профессор Н.М. Рыскин любезно указал мне на книгу Мартина Гарднера «Путешествие во времени». Перевод с английского Ю.А. Данилова. М.: Мир, 1991, 341 с., в которой приведены удивительные сведения еще об одном изобретении великого

флорентийца. Поскольку пересказывать Гарднера бессмысленно, я посчитал целесообразным перепечатать в журнале соответствующий отрывок из книги. Думаю, что он будет интересен читателям журнала.

«Когда в 1974 году компания «Макгроу-Хилл» выпустила факсимильное издание двух считавшихся утерянными книг с рабочими записями и набросками Леонардо да Винчи, новые материалы привлекли всеобщее внимание. Достоянием широкой публики стали такие ранее не известные изобретения да Винчи, как шарикоподшипники с коническим шипом (считалось, что такая фиксация вращающейся оси впервые была применена в 20-е годы нашего столетия в гироскопах Сперри), червячный винт (изобретение которого приписывалось одному часовщику, жившему в XVIII в.) и многие другие технические устройства, в том числе двухколесный велосипед с цепной передачей.

Если учесть необычайную рекламу, выпавшую на долю двухтомного издания «Макгроу-Хилл», то трудно понять, почему широкой публике ничего не было сообщено об открытии одного рисунка, которого не доставало в первой книге заметок. Эта книга, известная как «Мадридский кодекс I» (она была найдена десятью годами ранее в Национальной библиотеке в Мадриде), содержит систематическое (на 382 страницах) изложение теоретической и прикладной механики (см. статью Л. Рети «Леонардо о подшипниках и шестернях» <Reti L. Leonardo on Bearings and Gears. – Scientific American, February 1971>]). Относительно содержания утерянной страницы строились различные домыслы. А. Макарони из Католического университета в Милане высказал предположение, что, поскольку недостающая страница должна была находиться в разделе, посвященном гидравлическим устройствам, на ней скорее всего должны быть изображены какие-то типы смывного механизма.

Недостающую страницу обнаружил Р. Пац-и-Бикуспид, заведующий отделом рукописей Мадридской библиотеки. Он же нашел и те две рабочие книги Леонардо да Винчи, о которых мы уже упоминали. Недостающая страница была вырвана из рукописи и вклеена в трактат XV в. о приготовлении благовоний.



На рисунке воспроизведена фотокопия найденной страницы. Как нетрудно видеть, профессор Макарони был прав в своих предположениях, что именно Леонардо да Винчи является изобретателем туалета с клапанным смывным устройством.

Давно известно, что Леонардо да Винчи изобрел складное сиденье в туалете и предложил конструкцию ватерклозета с непрерывной подачей воды по каналам внутри стен, вентиляционной шахтой с выходом на крышу и противовесом, обеспечивающим плотное закрытие двери. Однако изобретение унитаза со смывным клапанным механизмом ранее приписывалось крестнику королевы Елизаветы сэру Дж. Харрингтону, который весьма занимательно описал свое изобретение в книге «Метаморфоза Аякса» (1596) – клозетной сатире, за что он был лишен права появляться при дворе. Хотя его «Аякс» действительно был построен в Келстоне неподалеку от Бата, широкое распространение он получил лишь через двести лет.

Первый английский патент на туалет с клапанным смывным устройством был выдан в 1775 г. часовых дел мастеру А. Каммингсу. Современный механизм с шаровым поплавком, автоматически отмеряющим очередную порцию воды в бачке после очередного смыва, восходит к патентам, выданным в начале XIX в. на имя англичанина Т. Краппера, занимавшегося изготовлением водопроводной фурнитуры. Более подробно об истории сантехники см. <Wright L. Clean and Decent: the Fascinate Story of the Bathroom and Water Closet. – Routledge and Kegan Paul, 1960; Reyburn W. Flushed with Pride: The Story of Thomas Crapper. – Prentice-Hall, 1971>.

**Дополнение.** Глава, которую вы только что прочитали, была впервые опубликована в апрельском номере Scientific American за 1975 г. Это – первоапрельская шутка. Мне казалось, что всерьез ее никто не воспримет: слишком много в ней абсурдных идей и ссылок на иностранные фамилии. Однако после ее публикации я получил более тысячи писем от читателей, не понявших, что их просто разыграли.

<...> «Рисунок Леонардо да Винчи» выполнен в действительности Антони Равиелли, художником-графиком, известным своими иллюстрациями к книгам по спорту, физике и математике. Один из ранних вариантов этого рисунка навел меня на мысль о первоапрельской колонке. Много лет назад приятель Равиелли заключил шуточное пари с одним писателем о том, что именно Леонардо да Винчи изобрел клапанное сливное устройство, используемое в современном туалете. По настоянию приятеля Равиелли выполнил «рисунок Леонардо» коричневой тушью на тонированной под старину бумаге. Рисунок Равиелли «контрабандой» попал в Нью-Йоркскую публичную библиотеку, получил свой регистрационный номер и был заключен в официальный библиотечный конверт. Увидев все эти атрибуты, удостоверявшие «подлинность» рисунка Леонардо да Винчи с изображением смывного механизма, писатель счел себя проигравшим и уплатил пари.

Аугусто Макарони – шаржированный вариант имени Аугусто Маринони, специалиста по Леонардо да Винчи из Католического университета в Милане, а Рамон Пац-и-Бикуспид – шуточный «псевдоним» Рамона Пац-и-Ремолара, которому действительно удалось найти две недостававшие книги с записями Леонардо да Винчи. Приведенные мной даты из истории туалета – подлинные, включая ссылку на Т. Краппера. Не выдумана и книга У. Рейборна <Reyburn W. Flushed with Pride: The Story of Thomas Crapper. – Prentice-Hall, 1971> – она действительно существует.

Долгие годы я считал книгу Рейборна остроумным розыгрышем на темы, связанные с историей сантехники, пока Х.Л. Менкен не написал свою псевдоисторию современной ванной. Я исходил из двух соображений. (1) В книге Рейборна утверждалось, что выражения «to take crap» – оправляться (в уборной), «crap» – чепуха, безделица происходят от фамилии Краппера, хотя сленговые выражения «crap» и «crapping case» указаны в «Словаре сленга», изданном в Лондоне еще в 1873 г. (2) Рейборн написал небольшую книгу под названием «Выше бюст: история возвышения Отто Тетцлинга и развития бюстгальтера». Выяснилось, однако, что и Томас Краппер, и Отто Титцлинг были реальными людьми и ни одна из книг Рейборна не является чистым розыгрышем».

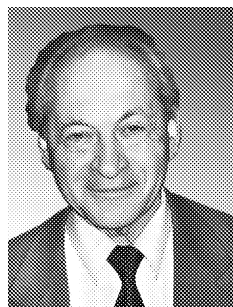
© Гарднер М. Путешествие во времени. М.: Мир, 1991.

## Библиографический список

1. *Бюлент А.* Математика и «Мона Лиза». Искусство и наука в творчестве Леонардо да Винчи. М.: Техносфера, 2007. 304 с.
2. *Данилов Ю.А.* Причудливый мир науки. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2004. 228 с.
3. *Баткин Л.М.* Леонардо да Винчи и особенности ренессансного творческого мышления. М.: Искусство, 1999. 415 с.
4. *Джорджо Вазари.* Леонардо да Винчи, живописец и скульптор флорентийский (Из кн. Жизнеописания наиболее знаменитых живописцев, ваятелей и зодчих) // Леонардо да Винчи. Суждения о науке и искусстве. СПб.: Издательский дом «Азбука – классика», 2006. 224 с.
5. *Проф. Зигмундъ Фрейдъ.* Леонардо да Винчи. М.: Типография Торг. д. «Мысль», Петровка, д. 17, 1912. 119 с.
6. Леонардо да Винчи. Избранные произведения: В 2 т. СПб.: Издательский дом «Нева»; М.: Изд-во «Олма-Пресс», 2000.
7. Леонардо да Винчи. Избранные естественно-научные произведения. М.: Изд-во Академии наук СССР, 1955. 1207 с.
8. *Зубов В.П.* Леонардо да Винчи. М.: Техносфера, 1962.
9. *Тайш Джессика, Барр Трейси.* Леонардо да Винчи для «чайников». М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. 304 с.
10. *Мэттьюз Кэйтлин.* Таро да Винчи. М.: ООО ТД Изд-во «Мир книги», 2006. 144 с.
11. *Стахов А., Слученкова А., Щербаков И.* Код да Винчи и ряды Фибоначчи. СПб.: Издательский дом «Питер», 2007. 320 с.
12. *Браун Д.* Код да Винчи. М.: «АСТ», 2004.
13. *Гримм Г.Д.* Пропорциональность в архитектуре. Л.: Издательство ОНТИ, 1935.
14. *Реньи А.* Трилогия о математике. М.: Мир, 1980. 376 с.

*Саратовский государственный университет*

*Поступила в редакцию 14.01.2008*



*Трубецков Дмитрий Иванович* – родился в Саратове (1938). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ, профессор, член-корреспондент Российской академии наук, заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования. Научный руководитель Лицея прикладных наук и факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: вакуумная электроника и микроэлектроника сверхвысоких частот, теория колебаний и волн, нелинейная динамика, история науки. Автор более двадцати учебных пособий и монографий, а также более двухсот статей в периодической печати.



### НАУЧНАЯ ОЛИМПИАДА «ФИЗИК-ИССЛЕДОВАТЕЛЬ»

*А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, А.В. Савин*

Представлена новая форма работы с молодыми исследователями – научная олимпиада. Приведены анонс научной олимпиады, задачи и пример решения.

И вот Знайка стал думать.  
Думал он три дня и три ночи и придумал...

*Н. Носов*

#### **О научной олимпиаде**

В течение нескольких десятков лет основной формой выявления интересующихся физикой одаренных школьников являются олимпиады. В определенной мере, именно на олимпиады (и на поступление в вуз) нацелена работа с наиболее сильными учащимися. Конечно, олимпиады очень важны и могут существенно совершенствовать технику решения задач. Однако не всякий учащийся, склонный к повседневной, вдумчивой и серьезной исследовательской работе, может проявить себя за 4-5 часов, отводимых на традиционную олимпиаду. Из-за своей скоротечности такие олимпиады не формируют навыки, необходимые будущему исследователю. С другой стороны, из-за специфики организации учебного процесса, перегруженности учителей текущей преподавательской работой и сложившихся традиций очень трудно внедрить в школьный учебный процесс индивидуальную исследовательскую работу. Помочь в разрешении перечисленных вопросов, по нашему мнению, может такая форма работы, как *научная олимпиада*.

Предлагаем вниманию читателей ПНД научную олимпиаду «Физик-исследователь 2007». Прежде всего, представляем анонс олимпиады, который предваряет условия задач. Анонс достаточно важен, так как объясняет существенную разницу между организацией и целями *научной олимпиады* и традиционными олимпиадами

с решением задач повышенной трудности. В частности, предлагается использовать литературу, возможности сети Интернет, компьютерное моделирование, обсуждать задачи друг с другом, смело выходить за рамки школьной программы и т.д. (см. ниже). Сохранена форма обращения к школьнику – участнику олимпиады.

Далее представлены задачи олимпиады 2007 года. Отметим, что при подготовке задач *научной олимпиады* можно использовать подходы и методологию тех областей науки, в которых специализируются организаторы. Например, *задача 1* для 8-го класса связана с возможным качественным изменением состояния системы при изменении параметра – объема доливаемой в систему жидкости. В *задаче 2* для 10-го класса в системе с ростом температуры может произойти катастрофа (бифуркация) исчезновения устойчивого равновесия, в результате чего ртуть выталкивается из сосуда. *Задача 3* для 11-го класса связана с катастрофой (бифуркацией) сборки, которая обусловлена возможностью в системе двух устойчивых и одного неустойчивого равновесий и различных ситуаций их слияния друг с другом при вариации двух параметров задачи. При решении *задачи 3* для 8-го класса можно использовать дискретные отображения, которые позволяют обосновать существование установившегося режима (аттрактора) в системе. Решения *задач 1 и 3* для 8-го класса, иллюстрирующие сказанное, представлены в следующей публикации\*.

На решение и оформление задач отводилось примерно 2 месяца. Тексты заданий были доступны в сети Интернет по адресу <http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/index.htm>. Лучшие решения были отмечены дипломами и призами. Заметим, наконец, что по итогам олимпиады можно устроить презентацию и обсуждение (в форме научной конференции) решенных задач.

При подготовке задач для научной олимпиады рекомендуется литература [1–3].

### Анонс олимпиады

Научная олимпиада отличается от традиционной. На традиционной олимпиаде на решение каждой задачи отводится примерно 45 минут, что существенно ограничивает характер заданий, которые, требуя глубокого знания физики, в то же время сильно отличаются от реальных задач, решаемых учеными в ходе исследовательской работы. Каждая же из предлагаемых на *научной олимпиаде* задач допускает определенное исследование. Для них имеет значение не скорость решения и «правильный» ответ, а глубина проработки, обсуждение различных вариантов и путей развития задачи. Вы также самостоятельно выбираете методы решения задачи и подбираете иллюстрации к решению. Таким образом, эти задачи наиболее приближены к настоящим научным задачам.

Некоторые задачи по «антуражу» могут показаться Вам знакомыми, но вопросы и задания к ним поставлены иначе.

---

\*См. статью А.П. Кузнецов, М.Н. Рыскина. Решения задач научной олимпиады. Качественный анализ и дискретное отображение в кинематических задачах, с. 62 в этом номере.

Задания *научной олимпиады* могут быть решены как индивидуально, так и в составе «научной группы», количество участников которой должно быть не более трех человек. Вы можете обсуждать задачи друг с другом, использовать, как это и принято в научных исследованиях, любую литературу, справочники, Интернет, а также при необходимости привлекать знания, выходящие за рамки школьной программы. Если Вы используете «разделение труда» внутри научной группы, позаботьтесь, чтобы все участники группы владели решением всех задач в полной мере.

При решении и представлении решений всех задач может быть использован компьютер, а при решении некоторых он необходим. Как и на любой олимпиаде, для участия не обязательно решить (или даже начать решать) все задачи.

Итогом научной работы ученого является статья в научном журнале. Поэтому также будет учитываться и качество оформления Ваших решений, в первую очередь, ясность изложения материала. Если Вы оформляете решение в электронном виде (что желательно, но необязательно), лучше пользоваться текстовым редактором MSWord. Как дополнения принимаются к рассмотрению также компьютерные презентации решений задач. Для задач, использующих компьютерное моделирование, в решении необходимо приводить результаты, полученные при помощи созданных Вами программ, а не сами тексты программ.

## 1. Условия задач

### 8 класс

1. В сообщающихся сосудах находится жидкость с плотностью  $\rho$ , так что ее высота равна  $H$ . В один из сосудов начинают очень медленно подливать другую, более легкую жидкость с плотностью  $\rho$ . Что будет происходить в системе? Жидкости не перемешиваются.

2. На поверхности воды плавает шар радиуса  $R$  и плотности  $\rho$ . На какую глубину погрузится шар, если  $\rho = 0.1 \text{ г/см}^3$ ,  $0.6 \text{ г/см}^3$ ? Что можно сказать в общем случае?

3. Ученик вышел из дома в школу (рис. 1), но на полпути он передумал и решил пойти в кинотеатр. Пройдя полпути в кинотеатр, он передумал и пошел на каток, затем на полпути снова пошел в школу и т.д. Создайте компьютерную модель, иллюстрирующую движение ученика. Каким будет в конечном



Рис. 1.

итоге характер его движения? Чем он определяется? Определите период установившегося движения. Все объекты расположены на открытой местности (рис. 1). Обсудите возможные частные случаи и предельные переходы. Может быть, задача допускает какое-то обобщение?

### 9 класс

1. На гладкую наклонную плоскость с углом наклона к горизонту  $\beta$  падает «плашмя» плоская шайба массы  $m$  так, что ее скорость перед ударом равна  $v$  и образует с поверхностью угол  $\alpha$ . Считая, что коэффициент трения скольжения шайбы по поверхности равен  $\mu$ , исследуйте, как будет двигаться шайба после удара.

2. а. Перед «забором», представляющем собой тонкие планки ширины  $D$ , расположенные на расстоянии  $a$  друг от друга (рис. 2, а), помещен точечный источник света, а за забором параллельно ему – плоский экран. Опишите распределение освещенности на экране. Как оно будет меняться при удалении экрана от забора? Зависит ли вид этого распределения от положения источника?

б. Пусть теперь «доски» «забора» имеют конечную толщину  $L$  (рис. 2, б). Как изменится распределение освещенности по экрану?

3. Поле имеет вид прямоугольника со сторонами  $a$  и  $b$ , причем  $b < a$ . Из вершины прямоугольника идет человек. Он может идти по дороге по краю поля со скоростью  $u$ , или по полю со скоростью  $v$ . (Переходить с поля на дорогу и наоборот можно в любой точке.) Исследуйте с помощью компьютерного моделирования вопрос, как при заданном отношении  $\varepsilon = v/u$  пешеходу выбрать путь, чтобы попасть в противоположную вершину за минимальное время? Продумайте возможность различных компьютерных иллюстраций. Сначала рассмотрите случай какого-либо фиксированного отношения сторон поля  $\mu = b/a$ , а затем проведите общее рассмотрение в случае произвольных параметров  $\mu$  и  $\varepsilon$ . В каком случае пешеходу сложнее всего «на глаз» выбрать маршрут?

### 10 класс

1. У Знайки имеется  $m_{\text{гор}}$  воды при температуре  $100^\circ\text{C}$  и  $m_{\text{хол}}$  воды при температуре  $0^\circ\text{C}$ . Предложите способ, позволяющий за минимальное время получить не

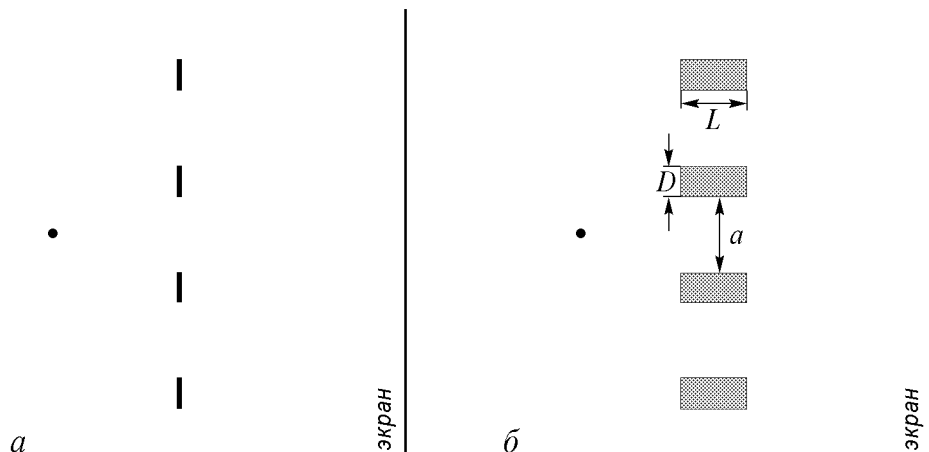


Рис. 2.



менее  $m_{\text{гор}}$  воды температурой  $40^\circ\text{C}$ . Оцените это время, если за одну минуту (пока Знайка размышлял над задачей) горячая вода остыла до  $99^\circ\text{C}$ . Считайте, что при смешивании жидкостей тепловое равновесие устанавливается мгновенно, горячая и холодная вода находятся в одинаковых стаканах, теплоемкость которых пренебрежимо мала, а стенки всегда имеют ту же температуру, что и вода внутри стакана; вместительность каждого из стаканов превышает суммарный объем воды. Температура воздуха в комнате  $20^\circ\text{C}$ . (Указание: при численной оценке величины времени выберите несколько конкретных значений масс горячей и холодной воды.)

2. В пробирке под поршнем, поверх которого налита ртуть, находится идеальный газ (рис. 3). Газ начинают очень медленно нагревать. Что будет происходить при повышении температуры? Обсудите все возможные сценарии развития событий. Атмосферное давление  $p_0$ , масса поршня  $M$ , его площадь  $S$ , начальная температура газа  $T_0$ , длина пробирки  $l$ , первоначальное расстояние от дна пробирки до поршня  $l_0$ . Ртуть может выливаться через край пробирки.

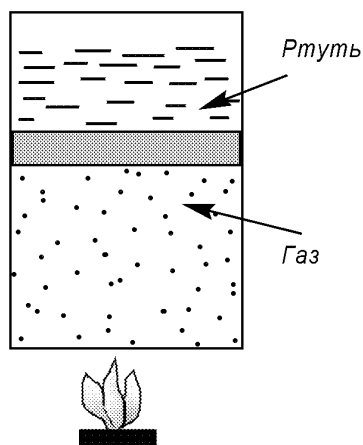


Рис. 3.

3. На прямой между шаром массы  $M$  и стенкой располагается другой шар массы  $m$ . Начальное расстояние между первым шаром и стенкой  $L$ . Первый шар первоначально неподвижен, а второй имеет скорость  $v$ . Удар между шарами и стенкой всегда абсолютно упругий. Постройте компьютерную модель и с ее помощью дайте иллюстрацию динамики системы. С помощью этой модели определите число соударений в системе в зависимости от параметров. Как изменится динамика в случае неупругого удара?

## 11 класс

1. Цилиндрический световод состоит из сердцевины радиуса  $r_1$  с показателем преломления  $n_1$  и окружающей ее оболочки с внешним радиусом  $r_2$  и с показателем преломления  $n_2 < n_1$ . Торец световода освещается точечным источником света, находящимся на его оси на расстоянии  $L$  от торца.

а. Пусть световод выпрямлен. Найдите угол расхождения пучка на выходе из него.

б. Световод согнули по дуге окружности радиуса  $R$  ( $R \gg r_2$ ). Исследуйте, что произойдет с пучком на выходе световода.

2. Рассмотрим «модель» известной игрушки «неваляшка»: однородный по длине цилиндр, центр тяжести которого отстоит от оси на расстояние  $h$ . Если такой цилиндр положить на плоскую поверхность, то он, очевидно, будет иметь два положе-

ния равновесия: устойчивое, в котором центр тяжести занимает наинизшее положение, и неустойчивое, в котором центр тяжести занимает наивысшее положение. Исследуйте, какие положения равновесия будет иметь этот цилиндр, если его положить на выпуклый (или вогнутый) полуцилиндр большего радиуса. Что будет происходить при выведении цилиндра из положений равновесия?

3. Имеются два одинаковых кольца радиуса  $R$ , по которым равномерно распределены положительные заряды  $Q_1$  и  $Q_2$ . Вдоль оси, проходящей через центры колец, может скользить маленький шарик массы  $m$ , несущий отрицательный заряд  $-q$  (рис. 4). С помощью компьютера выясните все возможные типы движения шарика. Начальная скорость и координата точечного заряда могут быть произвольными. Рекомендуем обсудить возможные частные случаи и предельные переходы.

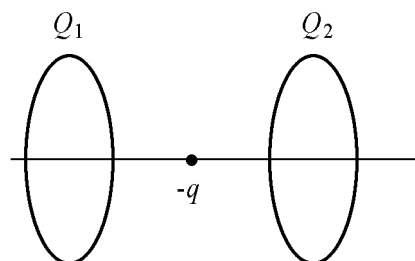


Рис. 4.

#### Библиографический список

1. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Савин А.В. Исследовательские задачи // Известия вузов. ПНД. 2007. Т. 15, № 2. С. 121. (Статья доступна в сети Интернет по адресу <http://sgtnd.narod.ru/sciedu/rus/index.htm>)
2. Кузнецов А.П. Как работают и думают физики. Ижевск-Москва: РХД, 2006. 180 с.
3. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Мельников Л.А., Савин А.В. Неформальная физика. Саратов: Изд-во «Научная книга», 2006. 104 с. (Книга доступна в сети Интернет по адресу <http://sgtnd.narod.ru/sciedu/rus/index.htm>)

Саратовский государственный  
университет  
Саратовский филиал ИРЭ РАН

Поступила в редакцию 13.03.08

#### SCIENTIFIC OLYMPIAD «PHYSICIST-RESEARCHER»

*A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov, A.V. Savin*

The new form of work with young researchers – Scientific Olympiad is introduced. The announcement of Scientific Olympiad and the problems are presented.



*Кузнецов Александр Петрович* – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и школьной научной лаборатории. Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и лица прикладных наук СГУ, 10 учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002). E-mail: [alkuz@sgu.ru](mailto:alkuz@sgu.ru); [www.sgtnd.narod.ru](http://www.sgtnd.narod.ru)



*Кузнецов Сергей Петрович* – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). С 1988 – сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, в настоящее время – заведующий лабораторией теоретической нелинейной динамики. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиофизика. Профессор кафедры динамических систем СГУ. Автор учебно-научной монографии «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 150 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под его руководством защищены семь кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994-1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика». E-mail: [spkuz@rambler.ru](mailto:spkuz@rambler.ru)



*Савин Алексей Владимирович* – родился в Саратове в 1980 году. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (2002) и аспирантуру факультета нелинейных процессов СГУ. Кандидат физико-математических наук (2005). Ассистент базовой кафедры динамических систем СГУ, младший научный сотрудник Саратовского филиала ИРЭ РАН. Имеет более 20 научных публикаций в центральных и международных журналах. Область научных интересов: особенности перехода к хаосу и критического поведения в связанных нелинейных системах.



**КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ И ДИСКРЕТНОЕ  
ОТОБРАЖЕНИЕ В КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ:  
Решения задач научной олимпиады**

*А.П. Кузнецов, М.Н. Рыскина*

Представлено решения двух задач научной олимпиады, которые иллюстрируют на школьном уровне примеры систем, в которых возможно качественное изменение состояния и применим метод дискретных отображений.

В этом сообщении представлены решения двух задач 1 и 3 (8 класс) научной олимпиады<sup>1</sup>. Эти решения иллюстрируют возможность *анализа* физической системы, что очень важно для будущих исследователей и способствует неформальному изучению физики. Одна задача решается с использованием компьютерного моделирования и метода дискретных отображений, что позволяет учащимся познакомиться с ними на «уровне» 8-го класса. Для удобства мы воспроизводим условия задач.

**Задача 1.** В сообщающихся сосудах находится жидкость с плотностью  $\rho_1$ , так что ее высота равна  $H$ . В один из сосудов начинают очень медленно подливать другую, более легкую жидкость с плотностью  $\rho_2$ . Что будет происходить в системе? Жидкости не перемешиваются.

**Решение.** Начальное состояние системы показано на рис. 1, а. Начнем подливать жидкость в одно (правое) колено. В этом случае уровень жидкости в обоих коленах начнет повышаться, однако, с разной скоростью: суммарная высота в правом колене будет больше, чем в левом (рис. 1, б). Если продолжать подливать жидкость, то наступит момент, когда давление столба легкой жидкости окажется достаточно велико для того, чтобы вытеснить всю тяжелую жидкость из колена 1 (рис. 1, в). Тогда в колене 2 будут находиться обе жидкости, а в колене 1 – только легкая. Таким образом, при некотором критическом количестве подлитой в жидкости  $V_{кр}$  в системе происходит качественное изменение, и, соответственно, изменяется вид зависимости высоты жидкости в коленах от добавляемого объема. Таким образом, это пример системы, в которой имеет место качественное изменение системы при переходе параметра через некоторое «бифуркационное» значение.

Теперь несложно провести количественный анализ задачи.

<sup>1</sup>См. статью А.П., Кузнецов, С.П., Кузнецов, А.В. Савин. Научная олимпиада «Физик-исследователь», с. 55 в этом номере.

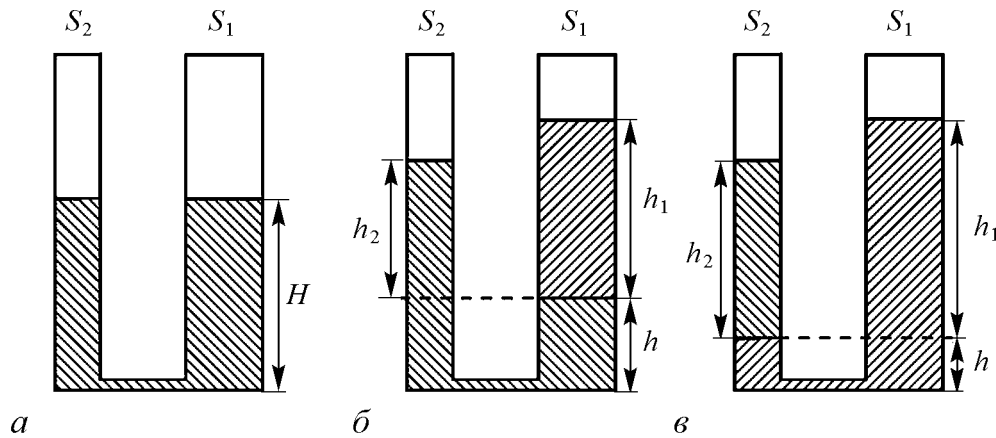


Рис. 1. Начальное (а) и два качественно разные состояния системы (б), (в)

Обратимся сначала к ситуации, показанной на рис. 1, б. Обозначим: объем влитой легкой жидкости через  $V$ ; площадь поперечного сечения правого колена –  $S_1$ ; левого колена –  $S_2$ ; высоту, выше которой находится легкая жидкость –  $h$ ; высоты столбов легкой и тяжелой жидкости выше уровня  $h$  обозначим как  $h_1$  и  $h_2$  (рис. 1, б); причем очевидно, что  $h_1 = V/S_1$ .

Давления столба легкой жидкости высоты  $h_1$  в первом колене и тяжелой жидкости высоты  $h_2$  во втором колене равны

$$\rho_T g h_2 = \rho_L g h_1. \quad (1)$$

Поскольку объем тяжелой жидкости не меняется, должно выполняться соотношение

$$h(S_1 + S_2) + h_2 S_2 = H(S_1 + S_2). \quad (2)$$

Из соотношений (1)–(2), с учетом  $h_1 = V/S_1$ , получаем высоту жидкости в правом колене

$$h + h_1 = H + \frac{\rho_T(S_1 + S_2) - \rho_L S_2}{\rho_T(S_1 + S_2)} V \quad (3)$$

и в левом колене

$$h + h_2 = H + \frac{\rho_L V}{\rho_T(S_1 + S_2)}. \quad (4)$$

Эта ситуация, однако, будет сохраняться до критического момента, когда легкая жидкость вытиснит всю тяжелую из правого колена. Критический момент, очевидно, отвечает условию  $h = 0$ . Тогда из (1)–(2) получаем для критического объема подлитой жидкости

$$V = \frac{\rho_T(S_1 + S_2)S_1}{\rho_L S_2} H. \quad (5)$$

Если  $V > V_{кр}$ , то реализуется ситуация, показанная на рис. 1, в. В этом случае удобно ввести обозначения, как показано на этом рисунке. Из условия равенства давлений жидкости, находящейся выше уровня  $h$ , имеем

$$\rho_T g h_2 = \rho g h_1. \quad (6)$$

Условия сохранения объема тяжелой жидкости в этом случае имеет вид

$$h_2 S_2 = H (S_1 + S_2). \quad (7)$$

С другой стороны, высоту  $h_1$  можно выразить через объем  $V$  налитой легкой жидкости

$$h_1 S_1 + h (S_1 + S_2) = V. \quad (8)$$

Собирая соотношения (6)-(7) вместе, получаем высоту жидкости в первом колене

$$h + h_1 = \frac{V}{(S_1 + S_2)} + \frac{\rho_T H}{\rho_L} \quad (9)$$

и во втором колене

$$h + h_2 = \frac{V}{(S_1 + S_2)} + \frac{\rho_L (S_1 + S_2) - \rho_T S_1}{\rho_L S_2} H. \quad (10)$$

Можно отметить, что в соответствии с (4) график зависимости уровня жидкости в левом колене от объема подлитой жидкости  $V$  до критической ситуации имеет наклон

$$k_1 = \frac{\rho_L}{\rho_T (S_1 + S_2)_1}, \quad (11)$$

а после критической ситуации

$$k_2 = \frac{1}{(S_1 + S_2)}. \quad (12)$$

Таким образом, этот график имеет в критической точке  $V = V_{кр}$  излом, поскольку  $\rho_L / \rho_{T1} < 1$ .

Полезно получить более простые формулы, отвечающие частному случаю, когда площади колен одинаковы. Наконец, отметим, что несложно провести и экспериментальное исследование, используя воду и различные более легкие жидкости (масло, бензин и др.)<sup>2</sup>. Экспериментальное исследование можно снабдить фотографиями различных ситуаций.

**Задача 3.** Ученик вышел из дома в школу, но на полпути он передумал и решил пойти в кинотеатр. Пройдя полпути в кинотеатр, он передумал и пошел на каток, затем на полпути снова пошел в школу и т.д. Создайте компьютерную модель, иллюстрирующую движение ученика. Каким будет в конечном итоге характер его движения? Чем он определяется? Определите период установившегося движения. Все объекты расположены на открытой местности. Обсудите возможные частные случаи и предельные переходы. Может быть, задача допускает какое-то обобщение?

**Решение.** Обозначим координаты дома  $x_d, y_d$ , школы –  $x_{ш}, y_{ш}$ , кинотеатра –  $x_{кт}, y_{кт}$ , катка –  $x_k, y_k$ . Составим компьютерную модель движения ученика. Сначала он прошел половину расстояния от дома до школы. Вычислим координаты точки, в которую сместится ученик, по формуле середины отрезка

$$\begin{aligned} x &:= \frac{x_d + x_{ш}}{2}, \\ y &:= \frac{y_d + y_{ш}}{2}. \end{aligned} \quad (13)$$

<sup>2</sup>Экспериментальное исследование было выполнено и представлено учениками 56-й школы Саратова.

(Символом «:=» обозначаем оператор присвоения.) После этого ученик проходит половину расстояния до кинотеатра и попадает в точку с координатами

$$\begin{aligned} x &:= \frac{x + x_{\text{кт}}}{2}, \\ y &:= \frac{y + y_{\text{кт}}}{2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Затем он идет на каток

$$\begin{aligned} x &:= \frac{x + x_{\text{к}}}{2}, \\ y &:= \frac{x + y_{\text{к}}}{2}. \end{aligned} \quad (15)$$

И далее циркулирует по маршруту школа–кинотеатр–каток. Каждый раз его координаты  $x, y$  определяются по формуле (13)-(15), куда нужно подставить соответствующие координаты школы, кинотеатра или катка. Была составлена программа на языке Борланд–Паскаль, которая рассчитывает координаты ученика и выводит траекторию его движения на экран. Можно реализовать различные компьютерные модели системы. Так, удобно составить программу, которая при щелчке мыши на плоскости параметров (экране компьютера), задающем стартовую точку, рисует траекторию пути движения ученика.

В результате моделирования движения ученика обнаружено, что если кинотеатр, каток и школа не лежат на одной прямой, то через некоторое число шагов ученик начинает периодически обходить вершины некоторого треугольника, приближаясь к каждой вершине все ближе и ближе (рис. 2).

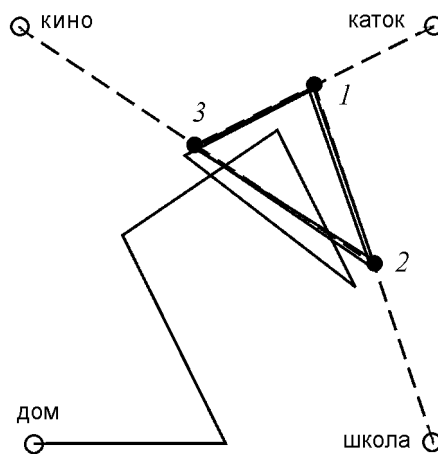


Рис. 2. Компьютерная реализация движения ученика

Вычислим координаты вершин этого треугольника. Пусть первая вершина (см. рис. 2) имеет координаты  $x_1, y_1$ . Тогда вторая вершина есть середина расстояния от первой вершины до школы, и ее координаты

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{x_1 + x_{\text{ш}}}{2}, \\ y_2 &= \frac{y_1 + y_{\text{ш}}}{2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Третья вершина есть середина расстояния от второй вершины до кинотеатра, ее координаты

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{x_2 + x_{\text{кт}}}{2} = \frac{x_1 + x_{\text{ш}} + 2x_{\text{кт}}}{4}, \\ y_3 &= \frac{y_2 + y_{\text{кт}}}{2} = \frac{y_1 + y_{\text{ш}} + 2y_{\text{кт}}}{4}. \end{aligned} \quad (17)$$

В этом случае первая вершина является также серединой расстояния от третьей вершины до катка, и ее координаты удовлетворяют уравнению

$$x_1 = \frac{x_3 + x_k}{2} = \frac{x_1 + x_{ш} + 2x_{кт} + 4x_k}{8}, \quad (18)$$

$$y_1 = \frac{y_3 + y_k}{2} = \frac{y_1 + y_{ш} + 2y_{кт} + 4y_k}{8}.$$

Из этих уравнений находим

$$x_1 = \frac{x_{ш} + 2x_{кт} + 4x_k}{7}, \quad (19)$$

$$y_1 = \frac{y_{ш} + 2y_{кт} + 4y_k}{7}.$$

Попробуем обосновать тот факт, что найденный треугольник является «притягивающей» траекторией, то есть «старт» школьника из любой точки плоскости обязательно в асимптотике больших времен приводит его к этому режиму. Для этого предположим, что начальная точка имеет координаты  $(x_n, y_n)$ . Пусть ученик совершит один полный цикл движений: в школу, на каток и в кинотеатр. Используя полученные выше соотношения, получим, что он придет в точку  $(x_{n+1}, y_{n+1})$ , координаты которой даются формулой

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{x_n + x_{ш} + 2x_{кт} + 4x_k}{8}, \quad (20)$$

$$y_{n+1} = f(y_n) = \frac{y_n + y_{ш} + 2y_{кт} + 4y_k}{8}.$$

Таким образом, координаты ученика в моменты времени, отвечающие тому, что он в очередной  $(n + 1)$ -й раз отправляется в школу, могут быть получены с помощью

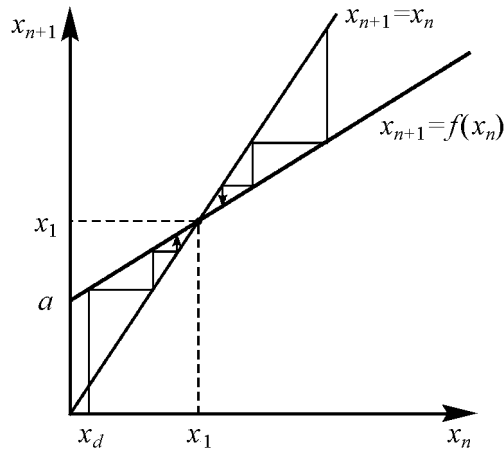


Рис. 3. Итерационная диаграмма, иллюстрирующая движение ученика за один полный цикл.  $a = (x_{ш} + 2x_{кт} + 4x_k) / 8$

итерационных соотношений, представляющих собой пример *дискретного отображения* [1–3]. Отметим, что хотя наша задача двумерна, система распадается на два независимых одномерных отображения.

Полезно представить движение ученика в виде итерационной диаграммы, как показано на рис. 3.

Из представленной итерационной диаграммы хорошо видно, что отображение имеет **устойчивую неподвижную точку**, к которой стремится изображающая точка. Неподвижная точка легко ищется аналитически из условия  $x = f(x)$ ,  $y = f(y)$ , и приводит к выражению (19).



Устойчивость неподвижной точки в данном случае вытекает из того, что формула (20) задает прогрессию с показателем  $1/8$ . Более формально устойчивость обусловлена неравенством

$$f'(x) = \frac{1}{8} < 1. \quad (21)$$

На языке дискретных отображений – мультипликатор неподвижной точки меньше единицы:  $\mu = f'(x) < 1$  [1–3]. На этом же языке можно сказать, что предельная траектория – **аттрактор** в кинематической задаче на плоскости.

Обсудим также некоторые «вырожденные» случаи и обобщения задачи.

Если школа, каток и кинотеатр лежат на одной прямой, то точки 1, 2 и 3 также лежат на этой прямой, а ученик по-прежнему последовательно обходит эти три точки. Исследовать вырожденные ситуации и вид аттрактора удобно, написав следующую программу.

Две точки (например, каток и кинотеатр) фиксированы. Фиксируем мышью положение школы, а программа рисует на экране компьютера предельную траекторию. Тогда можно визуально отследить метаморфозы предельной траектории при различных взаимных положениях объектов, «перетаскивая» мышью точку школы, в частности, ситуацию, когда школа, кинотеатр и каток лежат на одной прямой. Можно рассмотреть вырождение большей кратности, когда положение школы находится вдоль этой прямой и приближается к катку и т.д.

Интересной модификацией компьютерной модели может служить задача о движении двух учеников. В этом случае возникает вопрос о том, какое расстояние установится между ними при выходе на предельную траекторию? Компьютерное моделирование такой задачи, однако, уже нельзя ограничить видом траектории – необходимо отследить движения учеников в «реальном» времени. Можно рассмотреть задачу о динамике «ансамбля» учеников, то есть об эволюции некоторой области на плоскости  $(x, y)$ .

Если школьник движется между  $n$  пунктами с координатами  $X_i, Y_i, i = 1, 2, \dots, n$ , то траектория его движения представляет собой  $n$ -угольник, координаты вершин которого определяются по формулам

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{X_1 + 2X_2 + \dots + 2^{n-1}X_n}{2^n - 1}, \\ y_1 &= \frac{Y_1 + 2Y_2 + \dots + 2^{n-1}Y_n}{2^n - 1}, \end{aligned} \quad (22)$$

координаты остальных вершин определяются путем циклической перестановки величин  $X_i, Y_i$  в формуле (6).

Заметим, что задача о «циркулирующем» ученике является известной олимпиадной математической задачей [4]. Представленный здесь материал позволяет установить связь ее математической интерпретации с возможностями компьютерного моделирования, использования дискретных отображений, анализа частных случаев и допустимых обобщений.

## Библиографический список

1. Интернет-страница «Нелинейный минимум» на сайте «Окно в науку»  
<http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/index.htm>
2. Кузнецов А.П. Как работают и думают физики. Ижевск-Москва: РХД, 2006. 180 с.
3. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. Москва: Физматлит, 2005. 292 с.
4. Кириллов А.А. Пределы. Библиотечка физико-математической школы. М., 1973. 96 с.

*Саратовский государственный  
университет*

*Саратовский филиал ИРЭ РАН  
Физико-технический лицей № 1, Саратов*

*Поступила в редакцию 13.03.2008*

## QUALITATIVE ANALYSIS AND DISCRETE MAP FOR THE KINEMATIC PROBLEM: Solutions of problems of scientific olympiad

*A.P. Kuznetsov, M.N. Ryskina*

The solution of two problems of scientific Olympiad are discussed. At the school level the analysis of the solutions illustrates examples of systems, which can display qualitative change of a state and for which a method of discrete maps may be applied.



*Рыскина Мария Никитична – родилась в Саратове в 1993 году. Учащаяся 9-го класса Физико-технического лицея № 1 Саратова. Призер городских олимпиад по физике, математике, русскому и английскому языку.*



## СИНХРОНИЗАЦИЯ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ С ДВУМЯ ЧАСТОТАМИ\*

*В.С. Анищенко, С.М. Николаев*

В работе исследовано явление синхронизации двухчастотных квазипериодических колебаний. Рассмотрены как внешняя, так и взаимная синхронизация. Установлены закономерности синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе. Показано, что в общем случае осуществляется захват вначале одной, а затем второй базовой частоты. Результаты компьютерного моделирования подтверждаются данными радиофизического эксперимента.

### Введение

Квазипериодическими колебаниями называют устойчивые решения динамических систем, которые зависят от конечного числа периодических функций  $\phi_k(\omega_k t)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), имеющих период  $T_k = 2\pi/\omega_k$  по каждому аргументу. Квазипериодические решения описывают достаточно сложные процессы колебаний с  $n$  независимыми частотами  $\omega_k$ , которые в общем случае рационально не связаны. Эти частоты  $\omega_k$  представляют собой с физической точки зрения независимые частотные моды парциальных колебательных систем, взаимодействующих между собой. Результатом такого взаимодействия и являются квазипериодические колебания.

Квазипериодические колебания с двумя и более независимыми частотами являются широко распространенным типом колебаний. В фазовом пространстве им отвечает предельное множество в виде  $n$ -мерного тора. Устойчивость, бифуркации и переходы к хаосу через квазипериодические колебания представляют достаточно сложную и во многом не до конца решенную задачу, которой посвящено большое количество работ [1–6]. Однако важная проблема синхронизации квазипериодических колебаний оказалась наименее исследованной. По существу, впервые синхронизация квазипериодических колебаний с двумя независимыми частотами была частично решена в [7, 8]. В работе [7] исследовано явление захвата числа вращения в системе двух связанных генераторов двухчастотных колебаний. Уже в этой работе установлено, что режим полной синхронизации реализуется в результате последовательного захвата сначала одной, а затем двух базовых частот. В работе [8] описаны результаты исследований по синхронизации двухчастотных резонансных колебаний внешним

\*По материалам доклада на Школе «ХАОС–2007», Саратов, 9–14.10.2007.

гармоническим сигналом. Установлено принципиальное явление: при синхронизации предельного цикла на торе каждая из двух базовых частот системы синхронизируется независимо, несмотря на резонанс, при котором эти частоты рационально связаны. Бифуркационные механизмы синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе были исследованы в работе [9].

В настоящей статье излагаются результаты работ [7–10], которые систематизированы в более правильной, логически обоснованной последовательности, позволяющей наиболее полным образом осветить исследуемую проблему.

Исследуется наиболее простой случай двухчастотных колебаний, образом которых в фазовом пространстве является двумерный тор. Речь идет о синхронизации устойчивых фазовых траекторий динамической системы на двумерном торе. Как известно, на двумерном торе возможны две структуры траекторий. Первая – резонансная структура, отвечающая «языкам Арнольда» с рациональным числом вращения  $\Theta = p : q$ , где  $p, q$  – целые числа. Притягивающее предельное множество фазовых траекторий в случае резонансов на двумерном торе есть не что иное, как устойчивый предельный цикл, спектр мощности которого формально содержит лишь одну независимую частоту  $\omega_0$  и ее гармоники  $n\omega_0$ . Вторая структура отвечает так называемым эргодическим колебаниям с двумя рационально не связанными частотами  $\omega_0$  и  $\omega_1$ . Число вращения  $\Theta$  в этом случае выражается иррациональным числом. Спектр мощности колебаний в эргодическом случае включает две рационально не связанные частоты и набор комбинационных частот  $n\omega_0 \pm m\omega_1$ ,  $n$  и  $m$  – целые числа  $\pm 1, \pm 2, \dots$ . Сечения Пуанкаре резонансного и эргодического двумерного торов существенно различаются. В первом случае это конечное число неподвижных точек, зависящее от величины числа вращения  $\Theta$ , во втором – замкнутая инвариантная кривая.

Анализ проблемы синхронизации квазипериодических колебаний начнем с резонансного случая, а затем перейдем к случаю эргодических колебаний.

## 1. Синхронизация резонансного предельного цикла на двумерном торе

С целью проведения исследований необходимо задать динамическую систему, реализующую резонанс с заданным числом вращения  $\Theta = p : q$ , а затем решить задачу о синхронизации резонансного предельного цикла внешней периодической силой. Выберем для этого модель в виде системы двух симметрично связанных генераторов ван дер Поля с малой расстройкой их по частоте, чтобы реализовать резонанс на основном тоне с числом вращения  $\Theta = 1 : 1$  [9].

Зададим парциальный генератор ван дер Поля уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1, \\ \dot{y}_1 &= (m - x_1^2)y_1 - \alpha_1^2 x_1. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $m$  – параметр возбуждения,  $\alpha_1^2 = (2\pi f_1)^2$ ,  $f_1 = 1/T_0$  – частота,  $T_0$  – период колебаний. Как хорошо известно, автоколебания в системе (1) возникают вследствие бифуркации Андронова–Хопфа в точке  $m^* = 0$ , их амплитуда при  $m > m^*$  растет пропорционально  $\sqrt{m}$ .

В качестве второй системы рассмотрим тот же генератор ван дер Поля (1), введя расстройку по частоте ( $\alpha_2 \neq \alpha_1$ ). Будем исследовать режим автоколебаний в случае симметричной связи между генераторами

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1, \\ \dot{y}_1 &= (m - x_1^2)y_1 - \alpha_1^2 x_1 + k(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= (m - x_2^2)y_2 - \alpha_2^2 x_2 + k(x_1 - x_2). \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь параметр  $k$  характеризует степень внутренней связи между генераторами, параметр  $m$  будет одинаковым для обоих генераторов, а частоты  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  выберем различными, но достаточно близкими друг к другу.

Рассмотрим режимы автоколебаний в системе (2) при значениях параметров  $m = 0.1$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $k = 0.02$ . Параметр  $\alpha_2$  будем изменять в пределах  $0.98 < \alpha_2 < 1.02$ , исследуя влияние расстройки парциальных частот  $f_1$  и  $f_2$  на динамику системы.

На рис. 1 представлен результат расчета области синхронизации, которая характеризует эффект захвата частоты на основном тоне. Первый генератор ( $\alpha_1 = 1$ ) захватывает частоту второго и в результате в области синхронизации (область I на рисунке) частоты взаимодействующих генераторов равны:  $f_1 = f_2$ . Рис. 1 иллюстрирует эффект взаимной синхронизации двух генераторов путем захвата частоты. Область синхронизации I на рисунке представляет собой «клюв» или «язык» Арнольда с числом вращения Пуанкаре  $\Theta = 1 : 1$ , что отвечает синхронизации на основном тоне.

Вне области синхронизации (на рис. 1 это области II) наблюдаются режимы двухчастотных колебаний или биений, при которых частоты парциальных генераторов не совпадают ( $f_1 \neq f_2$ ).

Рассмотрим этот эффект с точки зрения качественной теории дифференциальных уравнений. В области II образом автоколебательного режима является нерезонансный (в общем случае) эргодический двумерный тор, отвечающий режиму двухчастотных квазипериодических колебаний.

При входе в область I из области II (с пересечением бифуркационных линий  $l_s$ , см. рис. 1) на двумерном торе рождается структура в виде устойчивого и седлового предельных циклов, лежащих на поверхности тора. Устойчивый цикл отвечает режиму взаимной синхронизации двух генераторов, характеризуя устойчивое периодическое движение с частотой  $f_1 = f_2$  в режиме захвата частоты.

Вышесказанное иллюстрирует рис. 2, где представлены проекции фазовых

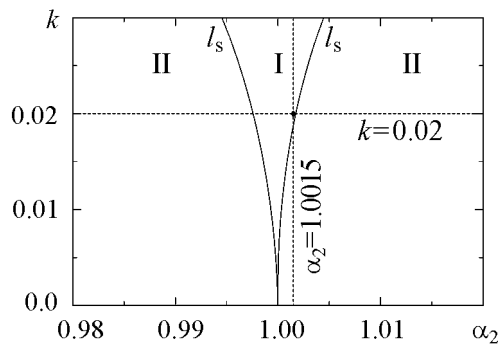


Рис. 1. Область взаимной синхронизации генераторов системы (2) при  $m = 0.1$ ,  $\alpha_1 = 1$ . I – область существования резонансного предельного цикла с числом вращения  $\Theta = 1 : 1$ , II – область квазипериодических колебаний

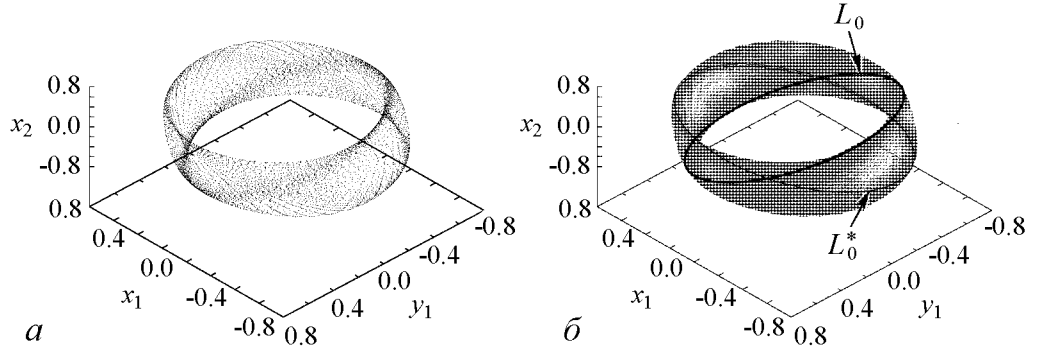


Рис. 2. Проекция фазовых траекторий на плоскость переменных  $(x_1, y_1, x_2)$  системы (2) для значений параметров  $m = 0.1, k = 0.02, \alpha_1 = 1$ : (а) для области II ( $\alpha_2 = 1.003$ ) и (б) для области I ( $\alpha_2 = 1.0015$ ). Проекция двумерного тора вне резонанса изображена серым, устойчивый  $L_0$  и седловой  $L_0^*$  циклы на торе в области резонанса изображены жирными линиями

портретов двумерного тора  $T^2$  (рис. 2, а) и устойчивого ( $L_0$ ) и седлового ( $L_0^*$ ) резонансных предельных циклов на нем (рис. 2, б).

Нашей задачей будет изучение особенностей синхронизации устойчивого резонансного предельного цикла на торе, показанного на рис. 2, б, внешним гармоническим сигналом. С этой целью исследуем реакцию системы (2) на внешний периодический сигнал, введя источник гармонического воздействия  $k_e \sin[(2\pi f_e)t]$  во второе уравнение системы (2)

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= y_1, \\
 \dot{y}_1 &= (m - x_1^2)y_1 - \alpha_1^2 x_1 + k(x_2 - x_1) + k_e \sin[(2\pi f_e)t], \\
 \dot{x}_2 &= y_2, \\
 \dot{y}_2 &= (m - x_2^2)y_2 - \alpha_2^2 x_2 + k(x_1 - x_2).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Выберем режим колебаний автономной системы (3) ( $k_e = 0$ ), отвечающий области резонанса I (см. рис. 1), задав значения параметров  $m = 0.1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1.0015, k = 0.02$ . Этому режиму отвечает указанная точка на плоскости параметров рис. 1. В автономной системе будет реализоваться режим устойчивых периодических автоколебаний. Ему отвечает устойчивый предельный цикл  $L_0$ . Отметим, что с точки зрения экспериментатора, наблюдающего режим периодических колебаний, это обычное устойчивое периодическое движение с частотой  $f_1$  и спектром, включающим нечетные гармоники  $f_1(2n + 1), n = 0, 1, 2, \dots$ , в силу квадратичного характера нелинейности. Тот факт, что предельный цикл  $L_0$  лежит на поверхности двумерного тора, никак не проявляется в обычном эксперименте. Однако более детальные исследования показали, что этот факт является принципиальным и приводит к весьма существенным отличиям при анализе эффекта внешней синхронизации, если речь идет о синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе.

На рис. 3, а, б представлены зависимости частот генераторов  $f_1$  и  $f_2$  от частоты внешнего сигнала  $f_e$ . Амплитуда сигнала воздействия была выбрана  $k_e = 0.025$ , частоты  $f_1$  и  $f_2$  нормировались на частоту внешнего сигнала  $f_e$ . Рис. 3, в иллюстрирует зависимость числа вращения  $\Theta = f_1 : f_2$  от частоты внешнего воздействия. Как видно из графиков, на рис. 3 целесообразно выделить области А, В, С и D, в ко-

торых динамика системы качественно различна. Используем для анализа результаты расчета спектра характеристических показателей Ляпунова (рис. 4).

В области  $A$  частота внешнего сигнала достаточно удалена от частоты предельного цикла  $f_1 = f_2 \approx 0.158$ . В системе реализуются квазипериодические колебания с частотами  $f_e$  и  $f_1 = f_2$ . Им отвечает существование в фазовом пространстве двумерного тора, что подтверждается наличием двух нулевых показателей Ляпунова в спектре ЛХП (см. рис. 4). Условие резонанса  $f_1 = f_2$  в области  $A$  еще не нарушается.

В области  $B$  режим взаимной синхронизации (см. рис. 1, 2) разрушается. Частоты  $f_1$  и  $f_2$  становятся различными, о чем свидетельствует график зависимости числа вращения  $\Theta$  от частоты внешнего воздействия (см. рис. 3, в). Рождается режим квазипериодических колебаний с тремя независимыми частотами  $f_1$ ,  $f_2$  и  $f_e$ . Ему отвечает аттрактор в виде трехмерного тора и наличие трех нулевых показателей в спектре ЛХП (см. рис. 4). Динамика системы в области  $B$  достаточно сложна. На трехмерном торе с изменением частоты  $f_e$  могут возникать частичные резонансы в виде  $T^2$  и даже хаотические режимы.

В области  $C$  реализуется первое из явлений, представляющих особый интерес: имеет место захват базовой частоты первого генератора внешним сигналом, при котором  $f_e = f_1$ , но  $f_1 \neq f_2$ . На трехмерном торе возникает резонансная структура в виде двумерного тора, что доказывается наличием двух нулевых показателей в спектре ЛХП (см. рис. 4). Расчеты показали, что сечение Пуанкаре в этом режиме имеет вид замкнутой инвариантной кривой.

Наконец, в области  $D$  реализуется режим полной синхронизации: внешний сигнал захватывает обе частоты взаимодействующих генераторов, и выполняется условие  $f_e = f_1 = f_2$ . В области  $D$  в спектре ЛХП лишь один показатель является нулевым, на фазовом портрете можно видеть аттрактор в виде предельного цикла.

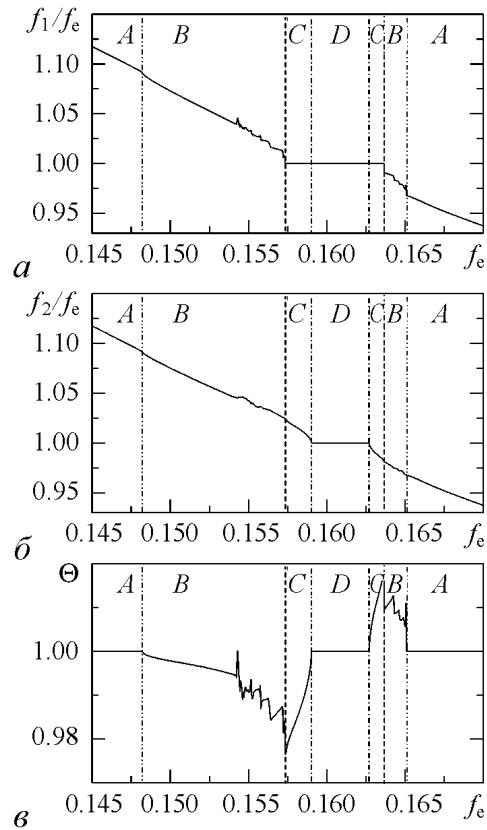


Рис. 3. Зависимости отношений частот генераторов  $f_1$  (а) и  $f_2$  (б) к частоте внешнего воздействия  $f_e$  и числа вращения  $\Theta = f_1 : f_2$  (в) от частоты внешнего воздействия  $f_e$  при  $k_e = 0.025$

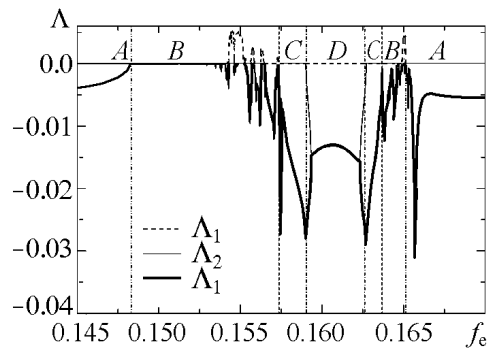


Рис. 4. Зависимости трех старших показателей Ляпунова от частоты внешнего воздействия  $f_e$  при  $k_e = 0.025$

Изложенные выше результаты свидетельствуют о весьма важном отличии эффекта синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе от классического случая. Это отличие заключается в том, что при уменьшении расстройки частот  $f_e - f_1$  внешнее воздействие вначале разрушает режим исходной взаимной синхронизации, а затем осуществляется последовательный захват вначале одной базовой частоты, потом второй. В итоге реализуется эффект полной синхронизации, которому отвечает эффект захвата числа вращения (см. рис. 3, *в*, область *D*).

## 2. Основные бифуркации квазипериодических режимов при синхронизации резонансного предельного цикла

С целью более детального понимания механизмов перестройки режимов колебаний в системе (3) при вариации частоты внешнего воздействия была построена бифуркационная диаграмма системы на плоскости параметров амплитуда – частота внешней силы (рис. 5). Графики, представленные на рис. 3 и 4, соответствуют движению по прямой  $k_e = 0.025$  диаграммы рис. 5. Переходам из областей *A* в области *B* отвечают бифуркационные линии  $l_{T^3}$ , из областей *B* в области *C* – линии  $l_p$ , из областей *C* в область *D* – линии  $l_f$ . Как видно из диаграммы, переходы в область *D* (полная синхронизация резонансного цикла) могут осуществляться из областей *A* или *B* через бифуркационные линии  $l_f$ . Рассмотрим более детально бифуркационные явления, которым отвечают вышеуказанные бифуркационные линии  $l_{T^3}$ ,  $l_p$  и  $l_f$ .

Как показали исследования, основным колебательным режимом системы (3) является режим трехчастотных квазипериодических колебаний с частотами  $f_e \neq f_1 \neq f_2$ . Соответствующим аттрактором является трехмерный тор  $T^3$ , область существования которого на диаграмме рис. 5 обозначена символом *B*. Все основные бифуркации в системе (3), ведущие к синхронизации исходного резонансного цикла, связаны с бифуркациями именно режима  $T^3$ .

Рассмотрим область *B*, где существует устойчивый трехмерный тор  $T^3$ . С целью более наглядного представления бифуркаций трехмерного тора будем использовать двойное сечение Пуанкаре. Для получения двойного сечения Пуанкаре сначала производился расчет обычного сечения Пуанкаре, а затем в полученную последовательность точек вводилась дополнительная секущая плоскость. Далее, так как вероятность того, что полученные решения окажутся близки к дополнительной секущей плоскости, мала, производилась линейная аппроксимация решений в ее окрестности. Обычное сечение Пуанкаре для  $T^3$  даст нам двумерный тор  $T_{T^3}$ . Двойное сечение Пуанкаре будет представлять собой инвариантную замкнутую кривую  $L_{T^3}$ . Неподвижная точка на этой инвариантной кривой будет являться образом резонансного двумерного тора, лежащего на  $T^3$ .

Исследуем переход из области *B* в область *A* диаграммы рис. 5 через бифуркационную линию  $l_{T^3}$ . На рис. 6 представлены результаты соответствующих расчетов с использованием двойного сечения Пуанкаре. Образом  $T^3$  здесь является кривая  $L_{T^3}$ , отвечающая режиму  $T^3$  в области *B*. При достижении бифуркационной точки (точки пересечения линии  $l_{T^3}$  из области *B* в направлении области *A*) на кривой  $L_{T^3}$  рождается неподвижная точка типа «седло-узел». Смещение по параметрам в область *A*



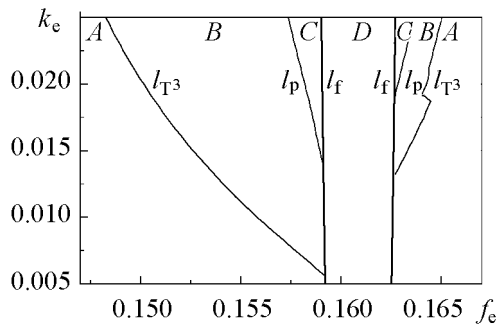


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма системы (3) на плоскости параметров  $(f_e, k_e)$ , построена для фиксированных значений  $m = 0.1$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 1.0015$ ,  $k = 0.02$

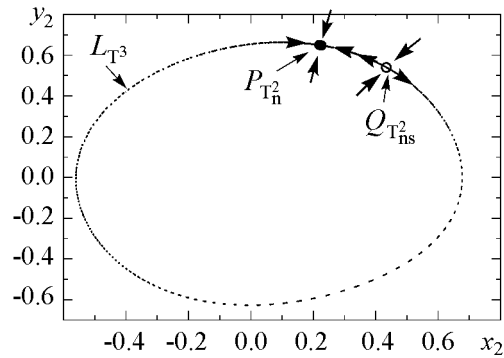


Рис. 6. Седло-узловая бифуркация в двойном сечении Пуанкаре, соответствующая пересечению линии  $l_{T^3}$  из области  $B$  в область  $A$ .  $L_{T^3}$  – инвариантная кривая,  $P_{T_n^2}$  – устойчивый узел,  $Q_{T_{ns}^2}$  – седло. Расчеты представлены для значений параметров:  $f_e = 1.482$ ,  $k_e = 0.025$ ,  $m = 0.1$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 1.0015$ ,  $k = 0.02$

приводит к расщеплению седло-узла на устойчивый узел и седло. В представлении двойного сечения Пуанкаре реализуется классическая седло-узловая бифуркация.

В полном фазовом пространстве системы (3) картина, представленная на рис. 6, отвечает рождению (исчезновению) пары двумерных торов на трехмерном торе  $T^3$ . Один из этих торов устойчивый ( $T_n^2$ ), другой – седловой ( $T_{ns}^2$ ).

Исследуем бифуркационный переход из области  $B$  в область  $C$ , которому отвечает пересечение бифуркационных линий  $l_p$  на диаграмме рис. 5. Расчеты показали, что на линии  $l_p$  реализуется также седло-узловая бифуркация и в области  $C$  рождаются также устойчивый и седловой резонансные<sup>1</sup> двумерные торы, лежащие на трехмерном торе  $T^3$ . Результаты расчетов иллюстрирует рис. 7. Режиму колебаний в области  $B$  отвечает трехмерный тор  $T^3$ , сечение Пуанкаре которого обозначено  $T_{T^3}$  на рис. 7. Резонансному устойчивому двумерному тору в области  $C$  отвечает инвариантная замкнутая кривая, обозначенная  $L_{T_p^2}$ . Для сравнения на рис. 7 представлен и образ устойчивого двумерного резонансного тора  $L_{T_n^2}$  в области  $A$ . Седловые торы на рис. 7 не приведены.

Торы  $T_n^2$  и  $T_p^2$  различны, так как с физической точки зрения отвечают разным условиям частичной синхронизации. В области  $A$  –  $f_1 = f_2$  и  $f_e \neq f_1$ , а в области  $C$  –  $f_e = f_1$  и  $f_1 \neq f_2$ .

Наконец, рассмотрим бифуркационный переход из области  $C$  в область  $D$  путем пересечения линии  $l_f$ . Этому переходу отвечает эффект захвата второй частоты  $f_2 = f_e$  и возникновение режима полной синхронизации  $f_1 = f_2 = f_e$ . Исследования показали, что линия  $l_f$  отвечает классической седло-узловой бифуркации резонансных циклов, лежащих на двумерном торе  $T_p^2$ . На двумерном торе  $T_p^2$ , который существует в области  $C$  и является резонансной структурой на  $T^3$ , в бифуркационной точке (на линии  $l_f$ ) рождаются устойчивый и седловой циклы. При пересечении

<sup>1</sup>Под резонансным двумерным тором здесь понимается частичный резонанс на трехмерном торе, когда две из трех независимых частот становятся равными. При этом двумерный тор на трехмерном торе является эргодическим.

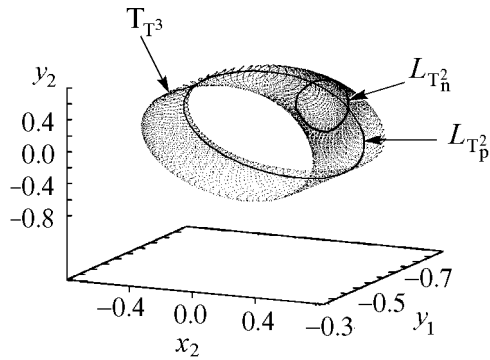


Рис. 7. Проекция сечений Пуанкаре трехмерного тора  $T_{T^3}$  ( $f_e = 0.15$ ) и резонансных двумерных торов  $L_{T_n^2}$  ( $f_e = 0.1482$ ) и  $L_{T_p^2}$  ( $f_e = 0.158$ )

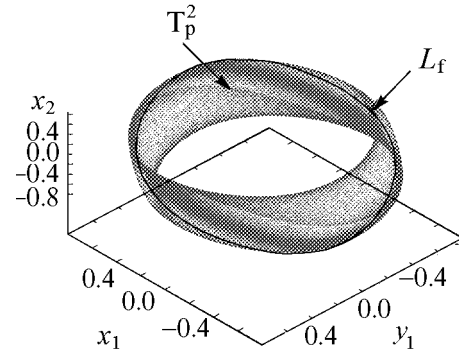


Рис. 8. Проекция фазовых портретов двумерного тора  $T_p^2$  (серый) и резонансного предельного цикла  $L_f$  (черный) на нем, рассчитанные для значений частоты  $f_e = 0.1587$  ( $T_p^2$ ) и  $f_e = 0.1592$  ( $L_f$ )

линии  $l_f$  в направлении области  $D$  возникает устойчивое периодическое движение, отвечающее режиму полной синхронизации. Результаты иллюстрирует рис. 8, где представлены фазовые проекции двумерного тора  $T_p^2$  (в области  $C$ ) и устойчивого резонансного предельного цикла  $L_f$  на нем (область  $D$ ).

### 3. Особенности синхронизации резонансных предельных циклов при различных значениях числа вращения $\Theta$ и коэффициента связи $k$

Изучение эффектов синхронизации, представленных выше, показало, что рассмотренный случай резонанса с числом вращения  $\Theta = 1 : 1$  является наиболее общим и достаточно сложным с точки зрения теории бифуркаций. Представляется важным изучение эффектов синхронизации при других значениях числа вращения, отвечающих резонансам  $\Theta = p : q$ , где  $p, q = 1, 2, \dots$ . Кроме того, эффекты синхронизации в системе (3) должны зависеть от коэффициента связи генераторов  $k$ . Эта зависимость важна для понимания механизмов синхронизации генераторов квазипериодических колебаний, в которых параметр связи может не входить явным образом в динамическую модель или в силу конструктивных особенностей системы не являться независимым параметром. В связи с вышесказанным представляется интересным исследовать особенности бифуркационных свойств системы (3) при различных значениях параметра связи  $k$ .

Рассмотрим режим резонансного предельного цикла в системе (2) с числом вращения  $\Theta = 1 : 3$  и попытаемся осуществить его синхронизацию внешним периодическим сигналом (3).

В автономной системе (3) при значениях параметров  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0.328$ ,  $m = 0.1$  и  $k = 0.005$  реализуется эффект взаимной синхронизации, и существует устойчивый резонансный цикл на двумерном торе с числом вращения  $\Theta = 1 : 3$ . Фазовый портрет этого цикла и спектр мощности показаны на рис. 9. Введем внешнее воздействие (3) и будем изменять  $f_e$  вблизи частоты  $f_2$ .

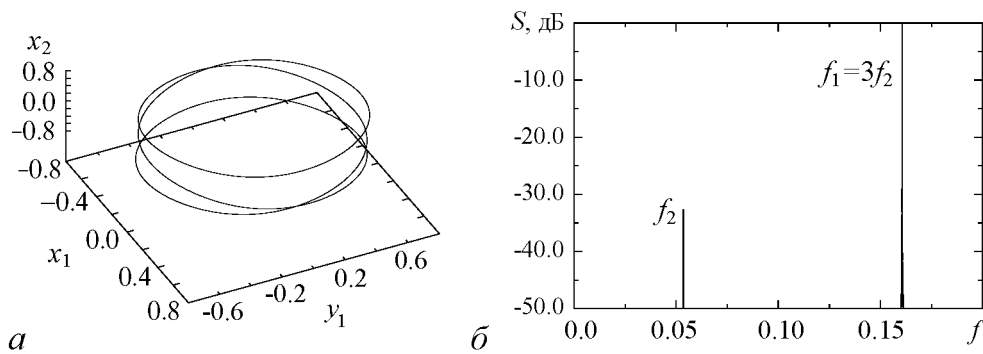


Рис. 9. Предельный цикл в системе (2) в условиях резонанса  $\Theta = 1 : 3$  (а) и соответствующий спектр мощности колебаний (б), рассчитанные для значений параметров  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0.328$ ,  $m = 0.1$  и  $k = 0.005$

Результаты внешнего воздействия представлены на рис. 10. Главное отличие результатов от случая  $\Theta = 1 : 1$  (см. рис. 3) заключается в том, что эффект полной синхронизации здесь не имеет места. Реализуется эффект захвата второй частоты

( $f_e = f_2$ ), но при этом частота  $f_1$  не изменяется под действием внешней силы. Как и в случае резонанса  $1 : 1$  при условии, что частота  $f_e$  далека от  $f_2$ , существует область *A*, в которой реализуется резонансный двумерный тор  $T_{n1:3}^2$  на поверхности трехмерного тора  $T^3$ . Также имеется область *B*, в которой ввиду разрушения резонанса  $1 : 3$  существует трехмерный тор  $T^3$ . Далее реализуется переход из области *B* в область *C*, при котором возникает резонансный двумерный тор  $T_{p1:3}^2$ , отвечающий режиму частичной синхронизации  $f_e = f_2$ ,  $f_1 \neq 3f_2$ . Область *D* в данном случае отсутствует. Для полной синхронизации резонансного цикла в рассматриваемом случае необходимо использовать дополнительный внешний сигнал, по частоте близкий к  $f_1$ . На рис. 11 представлены в виде циклов *L* проекции сечений Пуанкаре двумерных торов, отвечающих областям *A* ( $T_{n1:3}^2$ ) и *C* ( $T_{p1:3}^2$ ) рис. 10, лежащие на трехмерном торе  $T^3$ , представленном в сечении Пуанкаре в виде двумерного тора  $T_{T^3}$ .

Результаты, представленные на рис. 10, получены для относительно малой величины коэффициента связи  $k = 0.005$ . Интересно выяснить, как

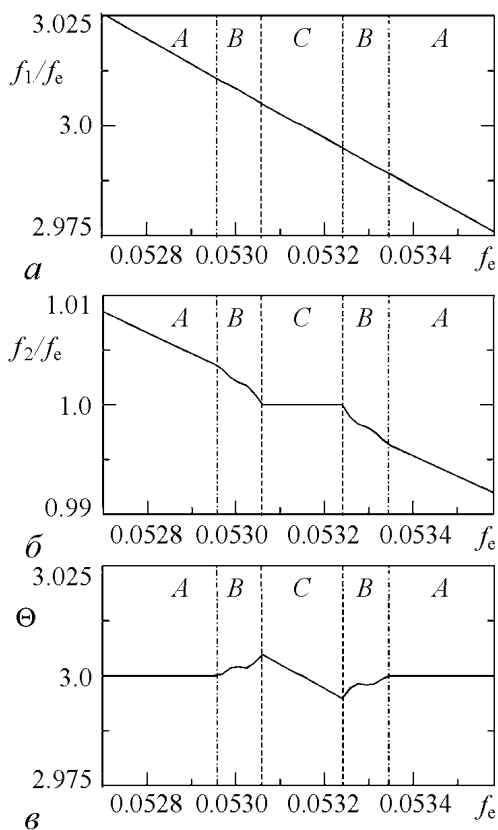


Рис. 10. Зависимость отношений частот генераторов  $f_1$  и  $f_2$  к частоте  $f_e$  и числа вращения  $\Theta$  от частоты внешнего воздействия  $f_e$  при  $k_e = 0.005$  для резонанса  $1 : 3$

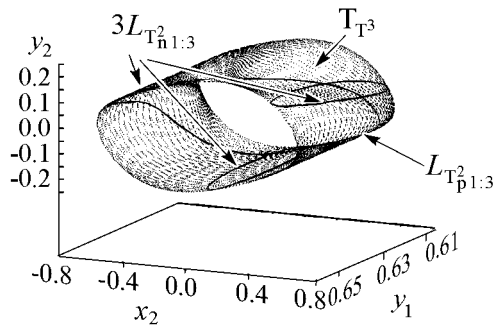


Рис. 11. Проекция сечений Пуанкаре двумерных торов в виде циклов:  $3L_{T_{n1:3}^2}$ , отвечающего области  $A$  (рис. 10) ( $f_e = 0.0527$ ), и  $L_{T_{p1:3}^2}$  отвечающего области  $C$  (см. рис. 10) ( $f_e = 0.0531$ ), лежащих на поверхности трехмерного тора  $T_{T^3}$

повлияет увеличение степени взаимосвязи генераторов на эффекты синхронизации? С этой целью были проведены расчеты для значения  $k = 0.02$  (рис. 12). Как видно из рисунка, с увеличением связи появляется область  $D$  – область полной синхронизации резонансного цикла на торе. Исследования показали, что с ростом  $k$  ( $k > 0.02$ ) ширина области  $D$  увеличивается и реализуется картина, качественно повторяющая случай резонанса 1 : 1 (см. рис. 3).

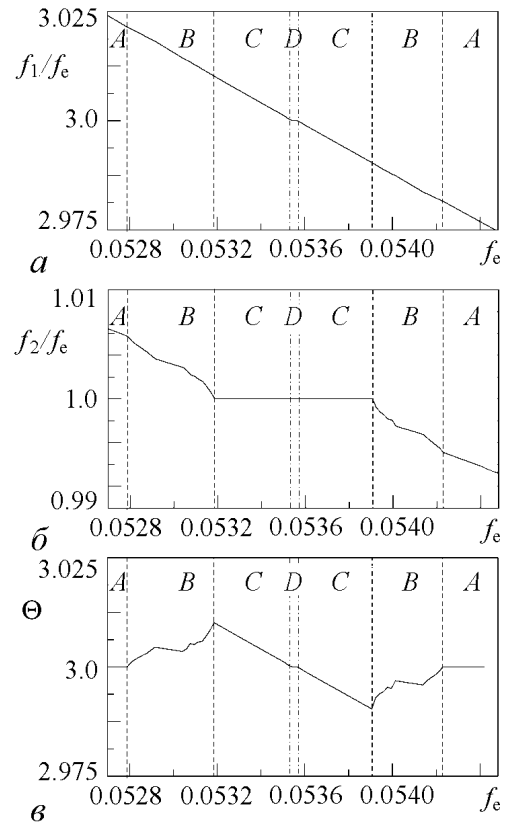


Рис. 12. Зависимость отношений частот генераторов  $f_1$  и  $f_2$  к частоте  $f_e$  и числа вращения  $\Theta$  от частоты внешнего воздействия  $f_e$  при  $k_e = 0.005$  и  $k = 0.02$  для резонанса 1 : 3

#### 4. Синхронизация двухчастотных колебаний в автогенераторе квазипериодических колебаний

Представленные результаты свидетельствуют о следующем: резонансный цикл на двумерном торе в общем случае невозможно синхронизовать внешним периодическим сигналом. Основной причиной является то, что под действием внешнего сигнала режим резонанса разрушается. Колебания становятся квазипериодическими с тремя независимыми частотами. Эффект синхронизации реализуется при вариации параметров через седло-узловую бифуркацию рождения резонансных двумерных торов на трехмерном торе и далее – классическим образом – через седло-узловую бифуркацию предельных циклов на двумерном торе. С физической точки зрения картина выглядит следующим образом. Вначале реализуется эффект захвата одной из базовых частот системы, вторая при этом оказывается незахваченной. Затем осуществляется эффект захвата второй базовой частоты. Реализуется синхронизация исходного периодического режима колебаний.

Наблюдаемые эффекты зависят от расстройки базовых частот (от числа вращения) и от степени взаимосвязи двух генераторов. Большая расстройка, когда исходные базовые частоты различаются в несколько раз, приводит к тому, что синхро-

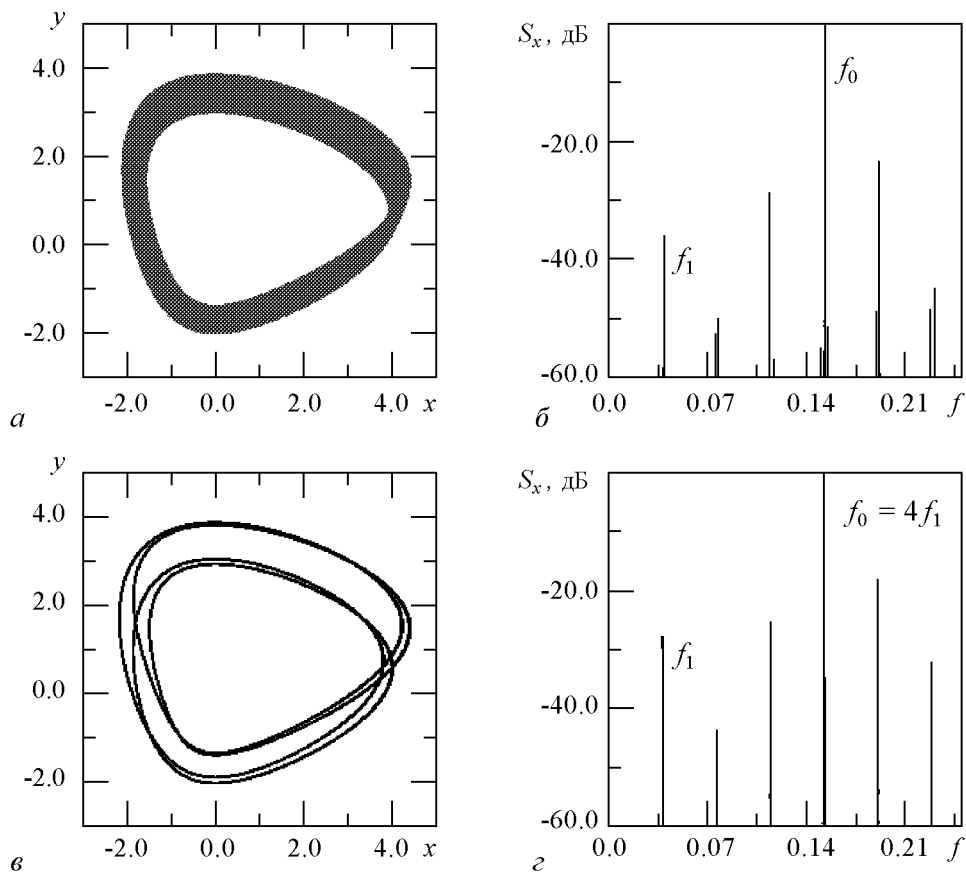


Рис. 13. Режимы эргодических (*a*, *б*) и резонансных (*в*, *г*) квазипериодических колебаний с двумя частотами ( $f_1$  – частота модуляции,  $f_0$  – частота несущей): *a* – проекция эргодического тора на плоскость  $(x, y)$ ; *б* – соответствующий спектр мощности колебаний  $x(t)$ ; *в* – предельный цикл на торе в случае резонанса  $f_1 : f_0 = 1 : 4$ ; *г* – спектр мощности резонансного цикла на торе

низуется лишь одна из базовых частот системы. Облегчить синхронизацию одновременно и второй базовой частоты может увеличение степени связи между генераторами. Таковы основные выводы. Являются ли они в достаточной степени общими? С целью ответа на поставленный вопрос проведем исследования синхронизации квазипериодических колебаний с использованием генератора двухчастотных колебаний, описанного в работе [8].

Рассмотрим уравнения генератора

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= mx + y - x\phi - dx^3, \\
 \dot{y} &= -x, \\
 \dot{z} &= \phi, \\
 \dot{\phi} &= -\gamma\phi + \gamma\Phi(x) - gz.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Используя бифуркационную диаграмму системы (4), выберем значения управляющих параметров так, чтобы реализовать режим резонансных колебаний с числом вращения  $\Theta = 1 : 4$  и эргодических колебаний с близким, но иррациональным значе-

нием числа вращения. Параметры имеют следующие значения:  $m = 0.096$ ,  $\gamma = 0.2$ ,  $d = 0.001$ ; функция  $\Phi(x) = I(x)x^2$ . Для значения  $g = 0.257$  получаем режим эргодического двумерного тора, для  $g = 0.263$  – резонансный<sup>2</sup> тор с числом вращения  $\Theta = 1 : 4$ . Результаты расчетов иллюстрирует рис. 13, на котором  $f_1$  и  $f_0$  – базовые частоты системы (4).

Теперь исследуем динамику системы (4) в указанных на рис. 13 режимах при внешнем гармоническом воздействии

$$\begin{aligned}\dot{x} &= mx + y - x\phi - dx^3 + k_e \sin[(2\pi f_e)t], \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= \phi, \\ \dot{\phi} &= -\gamma\phi + \gamma\Phi(x) - gz.\end{aligned}\tag{5}$$

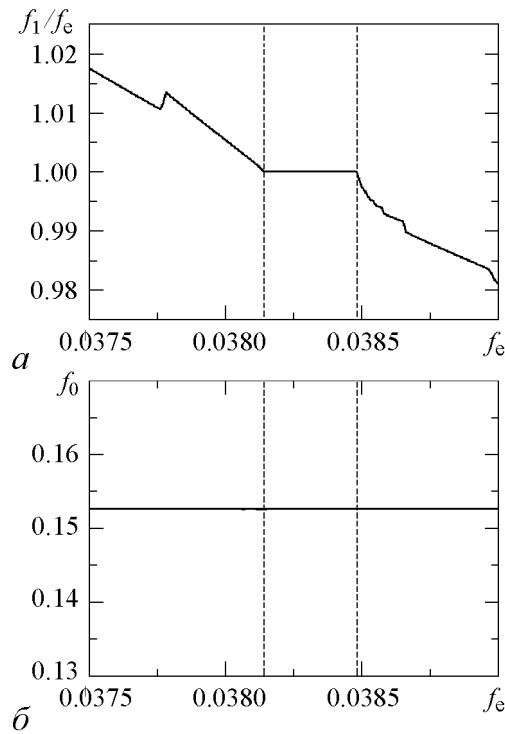


Рис. 14. Результаты расчета зависимости отношения частот  $f_1/f_e$  (а) и частоты  $f_0$  (б) от частоты воздействия в неавтономной системе (5) для значений параметров  $m = 0.096$ ,  $g = 0.263$ ,  $\gamma = 0.2$ ,  $d = 0.001$ ,  $k_e = 0.01$

Именно это и наблюдается. Резонанс  $1 : 4$  вначале разрушается, затем синхронизируется одна из базовых частот (см. рис. 14). Если мы разрушим резонанс, выйдя из области синхронизации  $\Theta = 1 : 4$  (см. рис. 13, а), то при внешнем воздействии будет синхронизоваться только одна из базовых частот. В случае, показанном на рис. 14, а, таковой является  $f_1$ , так как частота внешнего сигнала близка именно к

<sup>2</sup>Здесь термин «резонансный тор» используется в классическом смысле и характеризует режим устойчивого предельного цикла на торе.

$f_1$ . Изменив частоту внешнего сигнала, приблизив ее к  $f_0$ , будем наблюдать эффект захвата частоты  $f_0 = f_e$ , при этом  $f_1$  останется незахваченной.

Приведенные результаты подтверждают общий характер выводов, к которым мы пришли при исследовании системы двух связанных генераторов ван дер Поля. Действительно, вблизи резонанса  $\Theta = 1 : 4$ , когда  $f_1$  в четыре раза меньше  $f_0$  (расстройка между базовыми частотами велика), внешнее воздействие приводит к эффекту захвата лишь одной из двух базовых частот. Синхронизовать обе частоты не представляется возможным. Причиной является не только их большое различие, но и тот факт, что генератор (4) не позволяет увеличить степень взаимосвязи между двумя автоколебательными модами системы. Эта взаимосвязь задается внутренними свойствами системы (4).

Изложенные выше результаты численного моделирования эффекта синхронизации подтверждаются данными физического эксперимента, полученными на электронной модели генератора двухчастотных колебаний (4).

## 5. Результаты экспериментальных исследований

В эксперименте исследовалась синхронизация предельного цикла, отвечающего резонансу  $1 : 3$  (рис. 15, *a*). На рис. 15, *б* представлена экспериментальная

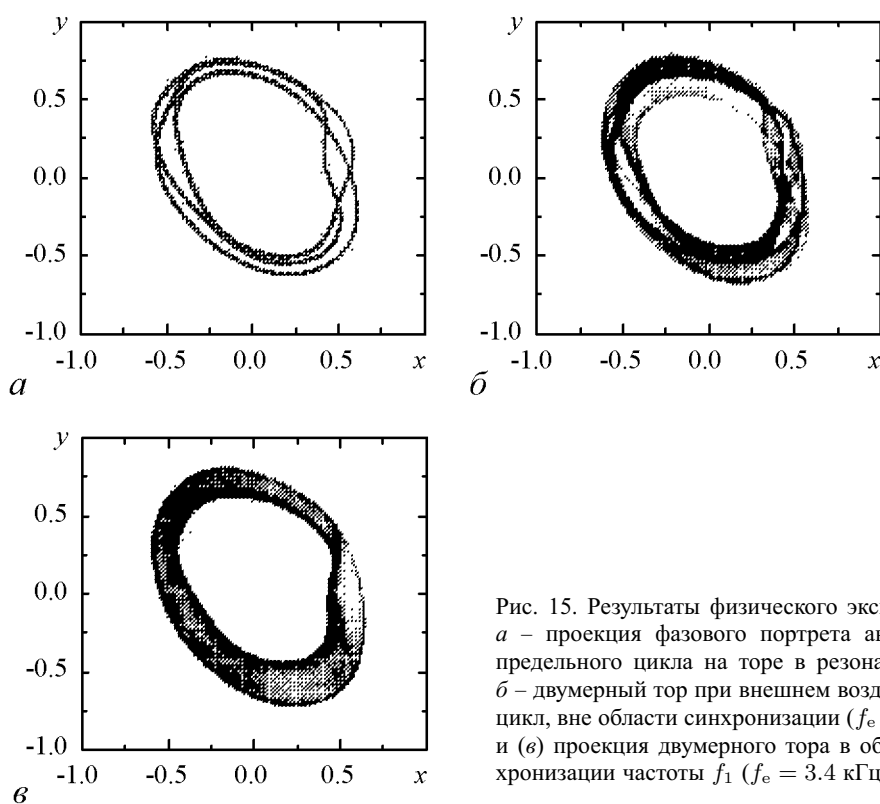
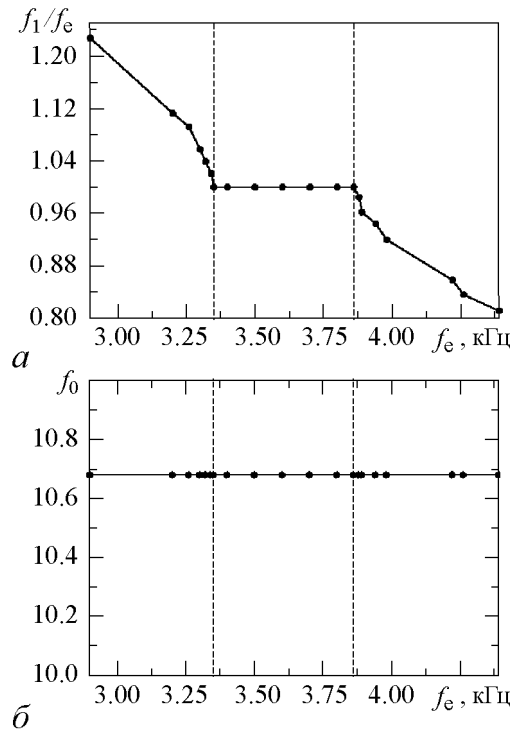


Рис. 15. Результаты физического эксперимента. *a* – проекция фазового портрета автономного предельного цикла на торе в резонансе  $1 : 3$ , *б* – двумерный тор при внешнем воздействии на цикл, вне области синхронизации ( $f_e = 2.9$  кГц) и (*в*) проекция двумерного тора в области синхронизации частоты  $f_1$  ( $f_e = 3.4$  кГц)



проекция двумерного тора, который появляется при внешнем воздействии на цикл (рис. 15, *a*) сигналом частоты 2.9 кГц (вне области синхронизации). Рис. 15, *б* соответствует проекции тора в области синхронизации частоты  $f_1$  ( $f_e = 3.4$  кГц). На рис. 16 представлены результаты измерений, аналогичных расчетам, показанным на рис. 14. Рис. 16, *a* иллюстрирует эффект внешней синхронизации частоты  $f_1$ , а рис. 16, *б* подтверждает независимость частоты  $f_0$  генератора от частоты внешнего сигнала  $f_e$ .

Рис. 16. Результаты физического эксперимента. *a* – зависимость отношения частот  $f_1/f_e$  и *б* – зависимость частоты  $f_0$  от частоты внешнего воздействия  $f_e$

## 6. Внешняя синхронизация квазипериодических колебаний двухчастотным сигналом

Представленные выше результаты свидетельствуют о том, что синхронизация двухчастотных колебаний внешним гармоническим сигналом вне зависимости от условий резонанса проявляется в захвате сначала одной и затем (возможно) второй базовой частоты генератора квазипериодических колебаний. При некоторых особых условиях (большой коэффициент связи парциальных подсистем или близость базовых частот) возможно реализовать эффект захвата двух базовых частот. Однако в общем случае это не реализуется. Естественно предположить, что эффект захвата двух базовых частот генератора можно обеспечить при внешнем двухчастотном воздействии, если число вращения внешнего генератора будет близко к числу вращения синхронизируемого генератора.

Рассмотрим случай однонаправленного воздействия квазипериодических колебаний одного генератора на второй, работающий также в режиме квазипериодических колебаний [7]. Уравнения системы двух взаимодействующих генераторов (4) при однонаправленной связи имеют вид

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= mx_1 + y_1 - x_1\phi_1 - dx_1^3 + kx_2, \\
 \dot{y}_1 &= -x_1, \\
 \dot{z}_1 &= \phi_1, \\
 \dot{\phi}_1 &= -\gamma\phi_1 + \gamma\Phi(x_1) - g_1z_1, \\
 \dot{x}_2 &= mx_2 + y_2 - x_2\phi_2 - dx_2^3, \\
 \dot{y}_2 &= -x_2, \\
 \dot{z}_2 &= \phi_2, \\
 \dot{\phi}_2 &= -\gamma\phi_2 + \gamma\Phi(x_2) - g_2z_2.
 \end{aligned} \tag{6}$$



Данная системы описывает случай воздействия второго генератора на первый (слагаемое  $kx_2$  в первом уравнении), интенсивность которого определяет величина параметра  $k$ . Зафиксируем значения параметров  $m = 0.06$ ,  $d = 0.001$ ,  $\gamma = 0.2$ ,  $g_1 = 0.55$ . При фиксированном параметре  $g_1 = 0.55$  первый генератор в автономном режиме реализует квазипериодические колебания с числом вращения  $\Theta_1 = f_{11}/f_{01}$  (в нижних индексах частот первая цифра соответствует частоте: «0» – несущая частота, «1» – частота модуляции; вторая цифра – номер генератора). Число вращения второго генератора  $\Theta_2$  управляется с помощью параметра  $g_2$ . В случае нулевой связи при  $g_1 \neq g_2$  числа вращения будут различаться:  $\Theta_1 \neq \Theta_2$ . По аналогии с синхронизацией предельного цикла, когда вводится расстройка частот  $\Delta f = f_1 - f_2$ , мы будем рассматривать расстройку числа вращения  $\Delta\Theta \simeq g_1 - g_2$ . Задача анализа синхронизации в этом случае состоит в анализе режимов колебаний на плоскости двух управляющих параметров  $k$  и  $g_2$ . Численное решение этой задачи иллюстрирует рис. 17, представляющий структуру областей синхронизации.

Внутри большого «клюва» синхронизации, ограниченного бифуркационными линиями  $l_c$ , имеет место эффект захвата базовых частот квазипериодических колебаний,  $f_{01} = f_{02}$ , то есть происходит синхронизация несущих частот. При этом частоты модуляции остаются различными,  $f_{11} \neq f_{12}$ . Реализуется эффект частичной синхронизации квазипериодических колебаний. Внутри области, ограниченной бифуркационными линиями  $l_m$ , реализуется захват частот модуляции и, соответственно, числа вращения  $\Theta_1 = \Theta_2$ . Этот эффект иллюстрирует рис. 18. Как видно из рисунка, существует конечная область расстройки по числу вращения  $\Delta g_2$ , в которой  $\Theta_2/\Theta_1 = 1$ . Число вращения генератора 2 захватывает число вращения генератора 1. Как и в случае предельного цикла, ширина области захвата числа вращения растет с увеличением интенсивности воздействия  $k$ .

Описанные численные эксперименты по внешней синхронизации двух генераторов квазипериодических колебаний показали, что область захвата частот модуляции генераторов лежит внутри клюва синхронизации несущих частот. Сближая значения управляющих параметров генераторов, в колебаниях системы сначала присутствуют четыре независимых частоты, затем, после захвата несущих частот, остаются три независимых частоты, а затем захватываются частоты модуляции и, соответственно, числа вращения.

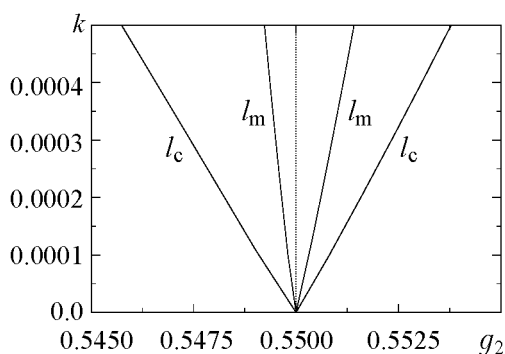


Рис. 17. Области синхронизации несущей ( $l_c$ ) и огибающей ( $l_m$ ) ( $m = 0.06$ ,  $\gamma = 0.2$ ,  $g_1 = 0.55$ ,  $d = 0.001$ )

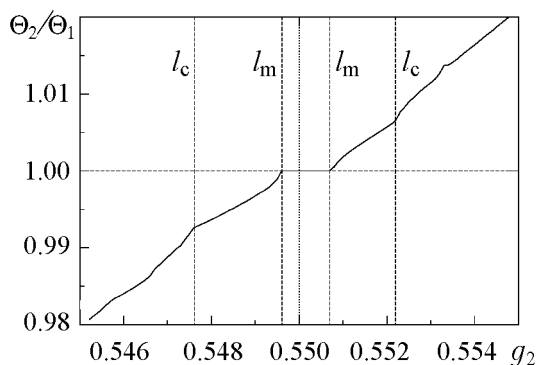


Рис. 18. Эффект захвата числа вращения ( $m = 0.06$ ,  $\gamma = 0.2$ ,  $g_1 = 0.55$ ,  $d = 0.001$ ,  $k = 0.0003$ )

## 7. Экспериментальный анализ внешней синхронизации двухчастотного генератора квазипериодическим сигналом

Исследуем эффекты воздействия двухчастотных колебаний в физическом эксперименте [10]. Выберем в качестве синхронизируемого генератора квазипериодических колебаний, описываемый уравнениями (4). Внешним сигналом  $F(t)$  будут служить амплитудно-модулируемые колебания, которые получались с использованием двух генераторов стандартных сигналов и модулятора

$$F(t) = k_e [1 + K_{\text{mod}} \sin(2\pi f_{1e} t)] \sin(2\pi f_{0e} t),$$

где  $k_e$  – амплитудный множитель,  $K_{\text{mod}}$  – коэффициент модуляции,  $f_{1e}$  – частота модуляции,  $f_{0e}$  – частота несущей. Параметры генератора квазипериодических колебаний были выбраны следующими:  $f_{1g} = 2.82$  кГц,  $f_{0g} = 10.69$  кГц, а коэффициент модуляции был приблизительно равен 0.3.

Зададим параметры внешнего сигнала  $F(t)$  следующими:  $f_{1e} = 3.06$  кГц,  $f_{0e} = 10.69$  кГц,  $K_{\text{mod}} = 0.5$  и будем изменять в эксперименте несущую частоту  $f_{0e}$  в пределах  $10.0 \leq f_{0e} \leq 11.0$  кГц. Так как высокочастотная часть спектра сигнала  $F(t)$  будет состоять из трех спектральных линий  $f_{0e}$  и  $f_{0e} \pm f_{1e}$ , то изменяя  $f_{0e}$ , мы будем изменять число вращения внешнего квазипериодического сигнала  $\Theta = f_{1e}/f_{0e}$ .

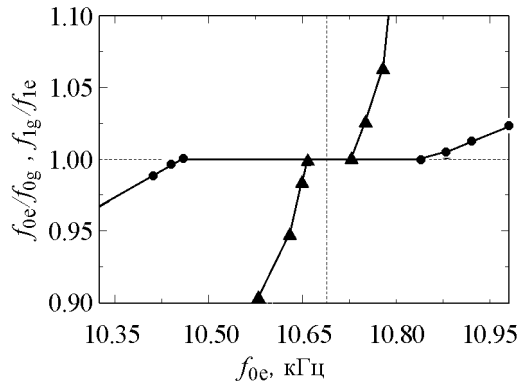


Рис. 19. Зависимость нормированных частот модуляции и несущей генератора от несущей частоты сигнала внешнего возмущения

Результаты представлены на рис. 19. На графиках изображены зависимости нормированных частот  $f_{0e}/f_{0g}$  (обозначено черными кружочками) и  $f_{1g}/f_{1e}$  (треугольниками) от частоты несущей  $f_{0e}$ .

Как видно из графиков, вначале осуществляется захват несущей частоты генератора ( $f_{0g}$ ) несущей частотой внешнего сигнала ( $f_{0e}$ ). Появляется область в интервале частот  $10.5 < f_{0e} < 10.85$ , в которой  $f_{0g} = f_{0e}$ . Затем имеет место эффект захвата частоты модуляции, которому отвечает заметно меньший интервал частот ( $10.65 < f_{0e} < 10.77$ ). Именно в этой

области обе частоты генератора  $f_{0g}$  и  $f_{1g}$  оказываются захваченными внешним сигналом  $F(t)$ . Реализуется эффект захвата числа вращения.

### Выводы

Представленные результаты анализа синхронизации двухчастотных квазипериодических колебаний позволяют обоснованно сделать следующие выводы. Квазипериодические автоколебания с двумя независимыми частотами являются результатом взаимодействия двух нелинейных активных осцилляторов, каждый из которых

характеризуется собственной независимой базовой частотой автоколебаний. Случаи резонансов, отвечающие «языкам Арнольда», соответствуют эффектам взаимной синхронизации, когда осуществляется взаимозахват базовых частот. Несмотря на тот факт, что формально резонансам отвечают режимы устойчивых периодических колебаний с некоторой частотой синхронизации, с физической точки зрения в системе продолжают существовать две базовые моды колебаний. При попытке синхронизовать резонансный предельный цикл системы внешним гармоническим сигналом, режимы резонансов разрушаются и в системе реализуются трехчастотные колебания. Эффект синхронизации в этом случае будет наблюдаться для каждой из существующих мод независимо. Вначале реализуется эффект захвата одной из двух независимых частот, затем второй. Конкретные условия синхронизации будут зависеть от числа вращения (от первоначальной расстройки базовых частот взаимодействующих осцилляторов) и от степени их взаимосвязи.

Авторы считают своим долгом выразить глубокую благодарность профессору Т.Е. Вадивасовой за интерес к работе и плодотворные дискуссии и Г.И. Стрелковой за большой труд по подготовке рукописи к печати.

*Данная работа поддержана Программой Министерства образования и науки РФ «Развитие научного потенциала высшей школы на 2006–2008 годы».*

## **Библиографический список**

1. *Ruelle D., Takens F.* On the nature of turbulence // *Commun. Math. Phys.* 1971. Vol. 20. P. 167.
2. *Newhouse S., Ruelle D., Takens F.* Occurrence of strange axiom A attractors near quasi-periodic flows on  $T^m$ ,  $m \geq 3$  // *Commun. Math. Phys.* 1978. Vol. 64. P. 35.
3. *Franceschini V.* Bifurcations of tori and phase locking in a dissipative system of differential equations // *Physica D.* 1983. Vol. 3. P. 285.
4. *Kaneko K.* Collapse of tori and genesis of chaos in dissipative systems. World Scientific, Singapore, 1986.
5. *Афраймович В.С., Шильников Л.П.* Методы качественной теории дифференциальных уравнений // Горький: Изд-во ГГУ, 1983. С. 3.
6. *Гонченко С.В., Стенькин О.В., Шильников Л.П.* О существовании счетного множества устойчивых и неустойчивых инвариантных торов у систем из областей Ньюхауса с гетероклиническими касаниями // *Нелинейная динамика.* 2006. Т. 2, № 1. С. 3.
7. *Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J.* Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasi-periodic motions // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 73. 056202.
8. *Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J.* Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 76. 046216.
9. *Анищенко В.С., Николаев С.М., Куртс Ж.* Механизмы синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе // *Нелинейная динамика.* 2008. Т. 4, № 1. С. 39.

10. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Экспериментальное исследование синхронизации двухчастотных квазипериодических колебаний // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 6. С. 93.

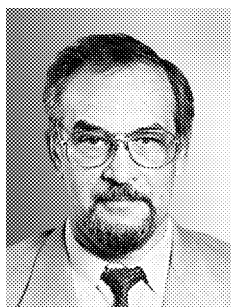
*Саратовский государственный университет*

*Поступила в редакцию 26.02.2008*

## SYNCHRONIZATION OF TWO-FREQUENCY QUASI-PERIODIC OSCILLATIONS

*V.S. Anishchenko, S.M. Nikolaev*

In present paper we study the effect of synchronization of two-frequency quasi-periodic oscillations. We analyze both external and mutual synchronization. The peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus are established. It is shown that in general case, one and then another one of the basic frequencies is locked. The results of computer simulation are confirmed experimentally.



*Анищенко Вадим Семенович* – родился в 1943 году. Окончил физический факультет СГУ (1966). Защитил диссертацию на звание кандидата физико-математических наук (1970) и доктора физико-математических наук (1986). С 1988 года – заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики СГУ. С 1979 и по настоящее время работает в области исследования нелинейной динамики и стохастических процессов в нелинейных системах. Является автором более 300 научных работ, среди которых 7 монографий на русском и английском языках и 4 учебника. Неоднократно читал лекции в ведущих вузах Германии в качестве приглашенного профессора. Член-корреспондент РАН, заслуженный деятель науки РФ (1995), Соросовский профессор, лауреат премии Фонда Александра Гумбольдта (1999).  
E-mail: wadim@chaos.ssu.runnet.ru



*Николаев Сергей Михайлович* – аспирант кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика, хаотические и квазипериодические колебания.  
E-mail: sergeyn@chaos.ssu.runnet.ru



## ВЫЧИСЛЕНИЕ СПЕКТРА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ РАДИОФИЗИЧЕСКОЙ ПРИРОДЫ\*

*А.А. Балякин, Е.В. Блохина*

Описана численная схема расчета спектра показателей Ляпунова для ряда распределенных систем радиофизической природы, основанная на модификации метода Бенеттина. Приведены результаты численного моделирования различных моделей распределенных систем (модель автогенератора с запаздывающей обратной связью, гиротрон с нефиксированной структурой поля и кольцевой нелинейный резонатор, заполненный средой с модуляционной неустойчивостью). Обсуждаются характерные особенности, возникающие при вычислении спектра показателей Ляпунова в распределенных системах. Приводятся примеры расчета ляпуновских спектров в различных режимах. Анализируются размерности хаотических аттракторов, вычисленные по формуле Каплана–Йорке.

### Введение

Одним из подходов к изучению систем радиофизической и электронно-волновой природы является разработка модели и постановка численного эксперимента. На настоящий момент существует ряд работ, в которых проводится подробное исследование таких систем в широком диапазоне изменения управляющих параметров. В ходе экспериментов и в численных расчетах надежно установлено, что при определенном выборе параметров в этих устройствах могут реализоваться многочастотные и хаотические колебания (см., например, [1–4], и цитируемую там литературу). Ранее подобные режимы считались паразитными, но в последнее время обсуждаются возможности их практического применения, что увеличивает интерес к их исследованию.

С момента обнаружения многочастотной и хаотической автомодуляции в лампе обратной волны (ЛОВ), режимы сложной динамики обнаружены и изучаются практически во всех электронных СВЧ-генераторах и усилителях [5–10]. Для исследования распределенных систем электронно-волновой природы (таких как лампа обратной волны, гиротроны, генераторы с запаздывающей обратной связью на основе ламп бегущей волны и клистронов), а также других систем радиофизики

\*По материалам доклада на Школе «ХАОС–2007», Саратов, 9–14.10.2007.

(распределенные нелинейные резонаторы, заполненные средами с различными видами нелинейности) оказалось продуктивным привлечение идей и методов нелинейной динамики. Поэтому для наглядного представления результатов обычно используют построение временных реализаций, спектров, фазовых портретов, бифуркационных диаграмм. Анализ спектра показателей Ляпунова следует также считать полезным в контексте исследования сигналов сложной природы, поскольку он позволяет выявить более глубокую информацию о природе наблюдаемых режимов.

Одно из основных свойств динамического хаоса заключается в присутствии экспоненциальной неустойчивости фазовых траекторий [1–4]. Для количественной характеристики этой неустойчивости используются показатели Ляпунова для аттрактора рассматриваемой системы. В случае системы с  $N$ -мерным фазовым пространством имеется спектр из  $N$  показателей Ляпунова, среди которых положительные и отрицательные определяют, соответственно, экспоненциальный рост или затухание малых возмущений вблизи принадлежащих аттрактору типичных траекторий. Для хаотических аттракторов характерно присутствие одного или более положительных показателей. Анализ спектра показателей Ляпунова широко применяется для исследования сложной динамики в системах обыкновенных дифференциальных уравнений и в моделях с дискретным временем (отображениях), где к настоящему времени разработан детальный и достаточно простой алгоритм расчета (см., например, монографии [1–3] и содержащуюся в них библиографию). Однако системы, о которых идет речь в настоящей работе, являются распределенными (бесконечномерными), расчет спектра показателей Ляпунова для них по-прежнему представляет собой трудоемкую и нетривиальную задачу. Сложности заключаются как в больших затратах компьютерного времени (для расчета  $N$  показателей необходимо численно решать  $N + 1$  систему исходных уравнений с последующей перенормировкой переменных), так и с заданием вектора возмущений в гильбертовом пространстве и подбором параметров численной схемы, обеспечивающих наилучшую сходимость результатов.

К настоящему времени известно несколько работ, использующих показатели Ляпунова в контексте исследования нелинейной динамики электронно-волновых устройств. Исторически первой была работа [11], где рассматривались хаотические автоколебания в лампе обратной волны. Было показано в численных расчетах и в эксперименте, что хаос в этой электронно-волновой системе ассоциируется с присутствием неустойчивости динамики по отношению к малым возмущениям начальных условий. Получены оценки старшего показателя Ляпунова. В работе [12] была исследована другая распределенная система: диод Пирса — модель системы, содержащей электронный пучок с виртуальным катодом. В настоящее время приборы с виртуальным катодом активно используются для генерации микроволнового излучения высокой мощности. В [12] было обнаружено существование различных типов хаотического поведения в диоде Пирса: так называемых «слабого» и «развитого» хаоса, то есть сильно нерегулярной динамики, характеризующейся резким возрастанием значения старшего показателя Ляпунова<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Отметим, что термин «развитый хаос» не является устоявшимся. В некоторых работах он выступает синонимом термина «гиперхаос», то есть под ним понимают такой режим, который характеризуется более чем одним положительным показателем Ляпунова. Однако в работе [12] рассчитывался только

Кроме того, в ряде работ приводились результаты расчета спектров показателей Ляпунова для систем с запаздыванием (см., например, [13, 14]). Однако в них в основном изучался вопрос о поведении показателей при больших значениях времени запаздывания. Было установлено, что число положительных показателей в целом растет с ростом этого параметра и может достигать 8-10, хотя энтропия Колмогорова (сумма положительных показателей) остается приблизительно постоянной.

В работе [15] было проведено вычисление нескольких показателей Ляпунова для модели лампы обратной волны и дана оценка размерности аттракторов, отвечающих хаотическим режимам. Установлено, что в зависимости от величины тока пучка в системе могут реализоваться хаотические режимы с одним положительным показателем («слабый» хаос) и с несколькими положительными показателями (развитый хаос или гиперхаос). В статье [16] обсуждалась хаотическая динамика в генераторе на основе лампы бегущей волны и была приведена оценка нескольких показателей Ляпунова. В работах [17–19] исследовался гиротрон с нефиксированной структурой поля. Было обнаружено, что развитые хаотические режимы, как правило, характеризуются более чем одним положительным показателем Ляпунова, то есть являются гиперхаотическими. Интересной особенностью является то, что возникающий в модели гиротрона развитый хаотический аттрактор имеет аномально высокую размерность вложения (20–40). Такое необычное поведение связано с существованием большого числа высокодобротных собственных мод резонатора, слабо взаимодействующих с электронным пучком. Их наличие приводит к появлению соответствующего количества малых по абсолютной величине показателей Ляпунова, и в результате размерность аттрактора, вычисленная по показателям Ляпунова с помощью формулы Каплана–Йорке [1], оказывается существенно больше, чем размерность исследованных систем, имеющих низкую собственную добротность электродинамической структуры, например, диода Пирса [12] или ЛОВ [15].

Для распределенной системы количество показателей Ляпунова в спектре, формально говоря, должно быть бесконечно большим. С практической точки зрения, значимым является их ограниченное подмножество – это набор расположенных в порядке убывания показателей в количестве, позволяющем определить размерность соответствующего аттрактора по известной формуле Каплана–Йорке (так называемая ляпуновская размерность) [1, 3]. Она задает число переменных, необходимых для достаточно полного описания рассматриваемой системы. Этот подход находит всё большее практическое применение при исследовании реальных систем. В эксперименте набор данных в общем случае неограничен и размерность пространства вложения, вычисленная по методу ложных соседей, необычайно велика. Однако, как показывает практика, значение ляпуновской размерности, рассчитанное по формуле Каплана–Йорке, оказывается на несколько порядков меньше. В частности, этот подход хорошо зарекомендовал себя при составлении долгосрочных прогнозов погоды [20]: найденная величина получается сравнительно небольшой, что позволяет ускорить расчеты без потери требуемой точности.

---

старший показатель Ляпунова и под развитым хаосом в ней понимался сильно нерегулярный режим. Мы в нашей работе используем аналогичное определение.

Таким образом, расчет спектра показателей Ляпунова является важным инструментом анализа хаотических колебаний в распределенных системах, позволяющим выявить детали динамического поведения. Настоящая работа посвящена расчету спектра показателей Ляпунова для ряда моделей распределенных автоколебательных систем. Обсуждаются результаты для различных типов распределенных систем: системы, распределенные в пространстве (описываемые уравнениями в частных производных), системы с запаздывающей обратной связью (как сосредоточенные в пространстве, так и распределенные по координате). Подобные системы играют важную роль во многих областях физики: радиофизике, нелинейной оптике, биофизике и т.д. [4,21]. Отметим, что некоторые предварительные результаты, относящиеся к расчету спектра показателей Ляпунова в распределенных автоколебательных системах с запаздывающей обратной связью, были представлены в работе [22].

### 1. Алгоритм вычисления спектра показателей Ляпунова

Как отмечалось во Введении, можно выделить различные типы распределенных систем, связанные с их физическими особенностями. Распределенность систем может иметь следующий характер.

1. Первый тип – распределенность «во времени» (но одновременно сосредоточенность в пространстве). Пример такой системы – модель генератора с запаздывающей обратной связью или однорезонаторного клистрона, представляющая собой обыкновенное дифференциальное уравнение (с производной по времени)<sup>2</sup>, но с начальным условием, заданным в виде функции на отрезке времени  $f(t) : \{t \in [0, \tau]\}$ .

2. Второй тип – распределенность «по координате». Классический пример этой системы в СВЧ-электронике – устройство с длительным взаимодействием электронного пучка с электромагнитным полем  $F(x, t)$  (в одномерном случае) в замедляющей системе, волноводе (ЛЮВ, ЛБВ, гиротрон). Такой прибор будет описываться уравнением в частных производных, а начальное условие – задаваться в виде функции на отрезке  $F_0(x) : \{x \in [0, L]\}$ , где  $L$  – длина системы.

3. Третий тип – представляет собой объединение первых двух: система будет описываться уравнением в частных производных, отражающим распределенность в пространстве, но при этом будет присутствовать еще петля запаздывающей обратной связи, добавляющая распределенность во времени.

Мы акцентируем внимание именно на таком делении распределенных систем, чтобы подчеркнуть их различную физическую природу, но, в то же время, отмечаем, что математический подход и описанный далее алгоритм являются универсальными и применимы ко всем распределенным системам.

Для вычисления спектра показателей Ляпунова был использован алгоритм Бенеттина [1, 3], адаптированный к распределенной электронно-волновой системе (см. [15]). Для получения  $N$  показателей производится численное решение  $N + 1$  комплектов систем уравнений с соответствующими граничными и начальными усло-

<sup>2</sup>В общем виде дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом можно записать следующим образом  $A'(t) = f(t, A(t), A(t - \tau))$ .



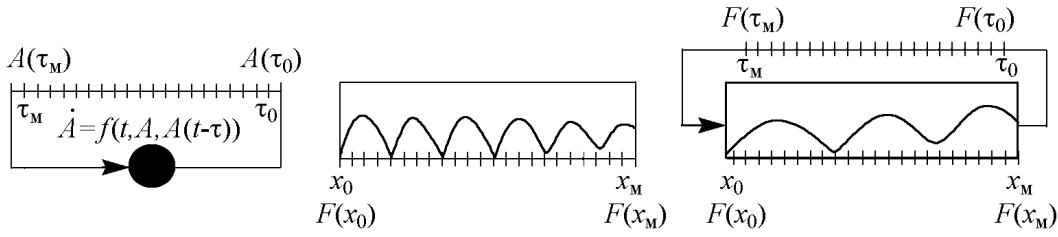


Рис. 1. Схематическое изображение систем, иллюстрирующих разные типы распределенности: *a* – автоколебательная система с запаздывающей обратной связью, *b* – модель СВЧ-устройства с длительным взаимодействием электронного пучка с полем, *в* – кольцевой нелинейный резонатор

виями. Пусть состояние исходной физической (с номером  $n = 0$ ) системы в некоторый момент времени определяется комплексной функцией  $F(x, t)$ , а в остальных системах функциями  $F_n(x, t) = F(x, t) + \varepsilon \tilde{F}_n(x, t)$ , где  $\tilde{F}_n(x, t)$  по норме равно 1, а  $\varepsilon$  – малая величина. Для выделенных выше трех типов систем функции  $F_n(x, t)$  формируются следующим образом.

1. Для системы первого типа при численном моделировании временной интервал запаздывания искусственно разбивается на  $M$  отрезков. Как правило, расстояние между точками разбиения принимается за шаг дискретизации по времени  $dt = \tau/M$ . Функция, определяющая состояние системы, есть вектор с размерностью  $M$ , составленный из значений динамической переменной  $x(t)$  в дискретные моменты времени в петле обратной связи, то есть  $F(x, t) = (A(\tau_0) \dots A(\tau_M))$  (рис. 1, *a*).

2. Для системы второго типа производится дискретизация по координате, то есть длина системы  $L$  разбивается на  $M$  отрезков длины  $d\xi = L/M$ . Тогда  $F(x, t)$  представляет собой вектор, компоненты которого есть значения поля  $F(x, t)$  в текущий момент времени в соответствующих точках, то есть  $F(x, t) = (F(x_0) \dots F(x_M))$  (рис. 1, *b*).

3. Состояние системы третьего типа описывается вектором  $F(x, t) = (F(x_0), \dots, F(x_{M_1}), F(t_0), \dots, F(t_{M_2}))$ , в котором компоненты  $F(x_k)$ ,  $k = 0, \dots, M_1$  представляют собой распределение поля вдоль координаты, а компоненты  $F(t_k)$ ,  $k = 0, \dots, M_2$  есть значения поля в петле обратной связи (см. п. 1). Таким образом, для системы третьего типа векторы, описывающие состояние системы, формируются из объединения векторов, описанных в пп. 1 и 2 (рис. 1, *в*).

Решая раздельно  $N + 1$  комплектов нестационарных уравнений с начальными условиями, заданными в момент времени  $t$ , на следующем шаге по времени  $t_1 = t + \Delta t$  получим новый набор функций, определяющих, как «отклонилось» решение  $n$ -ой системы от решения исходной системы

$$\tilde{F}_n(x, t_1) = \frac{F_n(x, t_1) - F(x, t_1)}{\varepsilon}. \quad (1)$$

При этом время  $\Delta t$  выбирается небольшим, чтобы возмущение по модулю оставалось малым. Затем проводится ортогонализация по методу Грама–Шмидта и перенормировка получившихся векторов возмущений [15]. Далее, продолжаем вычисления на следующем шаге алгоритма длительностью  $\Delta t$ , считая, что теперь системы

описываются новыми комплексными функциями

$$F_n(x, t_1) \leftarrow F(x, t_1) + \varepsilon \tilde{F}_n^0(x, t_1), \quad (2)$$

где  $\tilde{F}_n^0(x, t)$  – набор ортогональных возмущений, полученных в ходе процедуры Грама–Шмидта, норма которых равна единице. Вся процедура повторяется многократно, на протяжении большого числа шагов. В ходе вычислений каждый раз подсчитываются  $N$  величин  $S_n$ , представляющих собой накапливающиеся суммы и показывающих, на сколько изменяется норма каждого  $n$ -го возмущения за  $K$  шагов алгоритма. По этим суммам оцениваются показатели Ляпунова  $\Lambda_n$

$$S_n = \sum_{i=1}^K \ln \|\tilde{F}_n(x, t = i \cdot \Delta\tau)\|, \quad \Lambda_n = S_n / (K\Delta\tau). \quad (3)$$

Для получения более точной оценки можно аппроксимировать график временной зависимости накапливающейся суммы прямой линией, применяя метод наименьших квадратов; при этом величина  $\Lambda_n$  получается как угловой коэффициент данной прямой.

Если известно достаточное количество показателей Ляпунова, то можно оценить ляпуновскую размерность аттрактора по формуле Каплана–Йорке [1]

$$D = m + \frac{\sum_{i=1}^m \Lambda_i}{|\Lambda_{m+1}|}, \quad (4)$$

где  $m$  – такое число, что  $\sigma_m = \sum_{i=1}^m \Lambda_i > 0$ , но уже  $\sigma_{m+1} = \sum_{i=1}^{m+1} \Lambda_i < 0$ . Как известно из многочисленных примеров, обсуждавшихся в литературе по нелинейной динамике, величина, вычисленная по формуле (4), обычно дает хорошую оценку фрактальной размерности аттрактора хаотического режима.

## 2. Сложная динамика автогенератора с кубической нелинейностью и однорезонаторного клистрона

Рассмотрим вначале наиболее простую распределенную систему первого типа, описывающую динамику автогенератора с запаздывающей обратной связью. Подобные системы составляют обширный класс приборов микроволновой электроники. Хорошо известно, что такие системы способны генерировать сложные, в том числе хаотические, колебания [4, 23]. Общий вид уравнения, описывающего динамику данной системы, имеет вид

$$\dot{A} + \gamma A = \alpha e^{i\psi} f(A(t-1)), \quad (5)$$

где комплексная переменная  $A$  имеет смысл медленно меняющейся амплитуды колебаний;  $\alpha$  и  $\gamma$  – параметры, характеризующие неравновесность и диссипацию;

$\psi$  – набег фазы в цепи обратной связи; точка отвечает дифференцированию по времени. Правая часть (5) зависит от значений амплитуды в запаздывающий момент времени. Отметим, что нормировкой переменных всегда можно добиться того, что время запаздывания равно единице. Напомним, что для корректного решения задачи Коши для (5) необходимо задать начальное распределение  $A(t)$  на интервале длительностью 1, то есть использовать распределенное описание [24].

При выборе кубично-нелинейной функции вида

$$f = (1 - |A(t - 1)|^2) A(t - 1)$$

уравнение (5) приближенно описывает, например, динамику триодного генератора Ван дер Поля с линией задержки в анодной цепи в случае, когда анодно-сеточная характеристика лампы аппроксимируется кубическим полиномом. Эта модель была подробно исследована в [23, 25].

В случае, когда

$$f = J_1(|A(t - 1)|) \frac{A(t - 1)}{|A(t - 1)|},$$

где  $J_1$  – функция Бесселя 1-го рода первого порядка, получается система, названная в [25, 26] моделью «однорезонаторного» клистрона (поскольку генераторы на базе двух- и многорезонаторных клистронов с запаздывающей обратной связью описываются системами из соответствующего числа подобных уравнений).

Отметим, что в рассматриваемой системе всегда присутствуют два нулевых показателя Ляпунова, которые в стационарном режиме вырождаются в один нулевой показатель (подробнее см. раздел 5). Это связано с существованием в системе симметрии по отношению к двум произвольным малым сдвигам по времени и по аргументу комплексной величины  $A$  [15, 22]. Ниже приведены основные результаты расчета спектра показателей Ляпунова для указанных систем, представленные в работе [22].

Для модели генератора с кубичной нелинейностью в стационарных режимах имеется один нулевой показатель Ляпунова (так как в этом случае оба сдвига – по времени и фазе – оказываются эквивалентными), в периодических автомодуляционных режимах все показатели (не считая двух нулевых) отрицательны, в квазипериодических появляется третий нулевой показатель, а в режиме хаотических колебаний, возникших в результате последовательности бифуркаций удвоения периода, спектр содержит один положительный и два нулевых показателя. Как оказалось, для аттрактора, образовавшегося в результате объединения хаотических аттракторов на базе различных мод, имеется два положительных показателя, и следовательно, в этом случае можно говорить о режиме гиперхаоса. В отличие от модели генератора с кубичной нелинейностью модель «однорезонаторного» клистрона имеет еще один механизм образования развитого хаоса [25, 26]. Для нее характерна мультистабильность стационарных состояний, соответствующих одной и той же собственной моде колебаний. В этом случае имеется только один положительный показатель, то есть соответствующие режимы не являются гиперхаотическими. Однако величина положительного показателя при переходе в режим развитого хаоса резко возрастает

Таблица 1

Старшие пять показателей Ляпунова в типичных режимах динамики автогенератора с кубичной нелинейностью

$n$	Периодическая автомодуляция	Квазипериодическая автомодуляция	Хаос	Гиперхаос
1	0.00	0.00	0.08	0.29
2	0.00	0.00	0.00	0.14
3	-0.02	0.00	0.00	0.01
4	-0.89	-0.08	-0.91	-0.01
5	-1.11	-1.41	-0.94	-0.52

Таблица 2

Старшие пять показателей Ляпунова в различных режимах хаотической динамики модели «однорезонаторного» клистрона

$n$	Хаотическая динамика на базе одного положения равновесия $\gamma = 0.1, \alpha = 5.1, \psi = 0.0$	Хаотическая динамика на базе двух положений равновесия $\gamma = 0.1, \alpha = 7.6, \psi = 0.0$
1	0.08	0.37
2	0.00	0.00
3	0.00	0.00
4	-1.09	-0.63
5	-1.35	-1.34

(примерно в пять раз). На основании этих результатов в [22] был сделан вывод, что режимами гиперхаоса в рассмотренных моделях распределенных автоколебательных систем с запаздывающей обратной связью являются только принципиально много-модовые хаотические колебания, для которых, по терминологии работ [27, 28], не сохраняется фазовый топологический инвариант.

Иллюстрацией описанной выше динамики служит рис. 2, значения параметров указаны в подписи к рисунку. В первой колонке представлены зависимости модуля амплитуды от времени  $|A(t)|$ , во второй колонке – спектры сигнала и в последней – графики накапливающихся сумм от времени. Графики иллюстрируют различные типы динамики в зависимости от управляющих параметров  $\alpha$  и  $\gamma$ : периодическая автомодуляция (*a*), квазипериодическая автомодуляция (*b*), хаотические колебания (*в*) и режим гиперхаоса (*г*). Значения показателей Ляпунова для обсуждавшихся режимов приведены в табл. 1.

В табл. 2 приведены значения пяти старших показателей Ляпунова для модели однорезонаторного клистрона для двух разных типов хаотических колебаний. Видно, что в случае развитых хаотических режимов, сформировавшихся в результате объединения аттракторов на базе различных состояний равновесия, имеется только один положительный показатель, то есть они не являются гиперхаотическими. Однако величина положительного показателя при переходе в режим развитого хаоса резко возрастает (примерно в пять раз). Аналогичная картина наблюдалась для диода Пирса в работе [12].

Рассчитаем по формуле (4) размерности хаотических аттракторов. Для автоге-

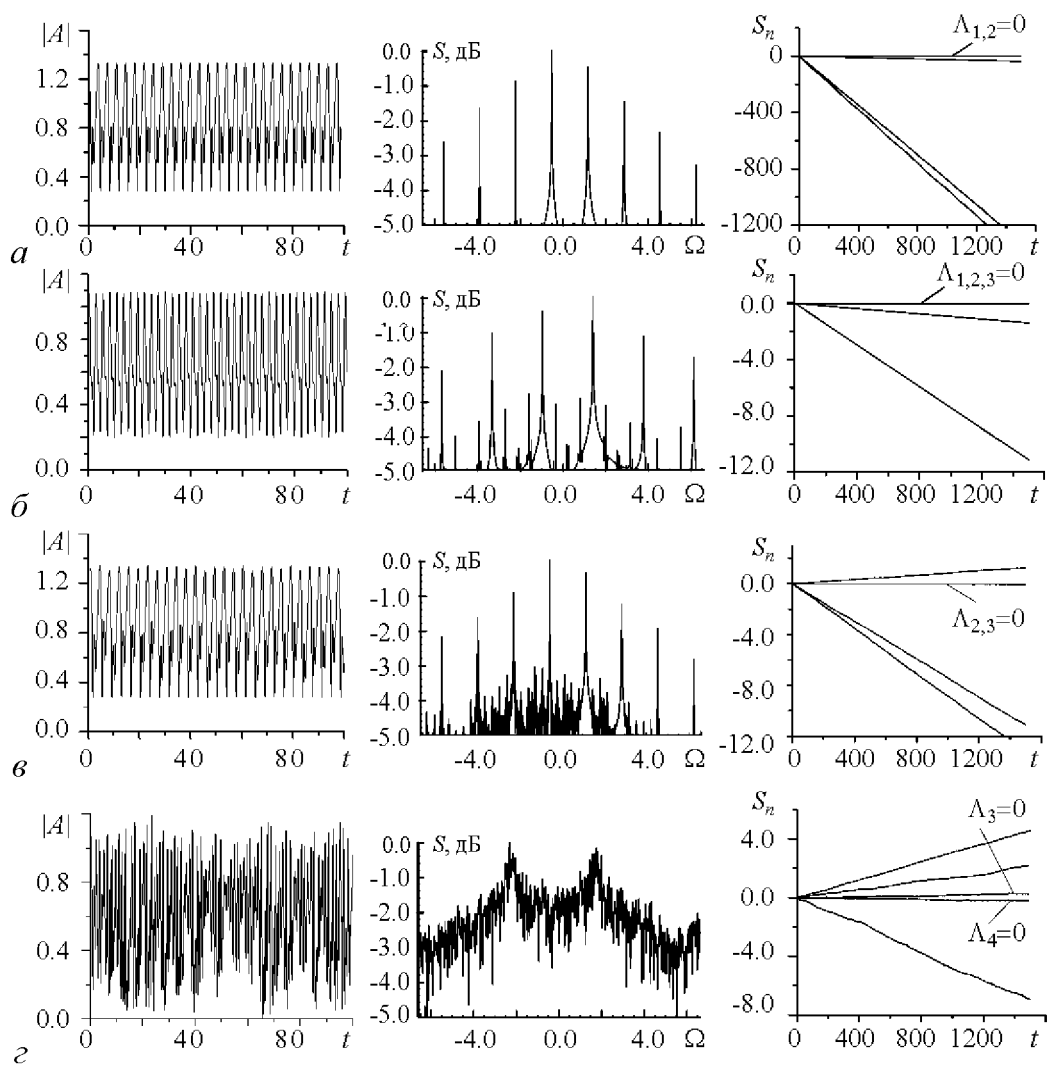


Рис. 2. Зависимость выходного сигнала от времени (первая колонка), спектр сигнала (вторая колонка) и зависимость накапливающихся сумм для старших пяти показателей Ляпунова от времени для типичных режимов динамики автогенератора с кубической нелинейностью: *a* – периодическая автомодуляция,  $\gamma = 0.3$ ,  $\alpha = 2.35$ ,  $\psi = 0.1\pi$ ; *б* – квазипериодическая автомодуляция,  $\gamma = 0.3$ ,  $\alpha = 3.77$ ,  $\psi = 0.9\pi$ ; *в* – хаос,  $\gamma = 0.3$ ,  $\alpha = 2.38$ ,  $\psi = 0.1\pi$ ; *г* – гиперхаос,  $\gamma = 1.0$ ,  $\alpha = 5.68$ ,  $\psi = 0.9\pi$

нератора с кубической нелинейностью в режиме хаоса  $D = 3.09$ , в режиме гиперхаоса  $D = 4.83$ . Для модели однорезонаторного клистрона  $D = 3.07$  (хаотическая динамика на базе одного положения равновесия) и  $D = 3.59$  (хаотическая динамика на базе двух положений равновесия). Видно, что получающееся значение ляпуновской размерности оказывается невелико, что связано, прежде всего, с тем, что хаотические режимы возникают на базе одной или двух (в режиме гиперхаоса) мод. Следует, впрочем, ожидать, что для многомодовых режимов размерность  $D$  должна серьезно вырасти.

### 3. Сложная динамика в гиротроне с нефиксированной структурой поля

Рассмотрим пример распределенной системы второго типа (модель гиротрона с нефиксированной структурой поля в одномерном случае). Ее динамика описывается дифференциальным уравнением в частных производных. Будем рассматривать нестационарные режимы колебаний на основе численного решения системы уравнений [29]

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - i \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{I_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\varphi) d\varphi_0, \quad (6)$$

$$\frac{dp}{dx} + ip(|p|^2 + \Delta - 1) = iF, \quad p|_{x=0} = e^{i\varphi_0}, \quad \varphi_0 \in [0, 2\pi].$$

Здесь функция  $F(x, t)$  описывает мгновенное продольное распределение комплексной амплитуды высокочастотного поля,  $p$  – поперечный импульс электронов,  $\Delta$  – параметр рассинхронизма циклотронной частоты и критической частоты рабочей моды волновода,  $I_0$  – параметр тока пучка. Нормировка переменных и параметров соответствуют принятой в работе [29]. Уравнения взаимодействия дополняются начальными условиями для поля  $F(x, 0) = F_0(x)$ . Будем полагать, что во входном сечении задано граничное условие полного отражения, то есть поле здесь равно нулю:  $F(0, t) = 0$ . На коллекторном конце имеется рупор с малым углом раскрыва. Постановка задачи с учетом граничного условия на правом конце системы и выбор параметров описана подробно в [17, 19], а вывод граничного условия приведен в [30]. Как показало численное моделирование, проведенное для уравнений (6) в работах [17, 19], точное граничное условие может быть заменено на приближенное, более простое в обращении при построении численной схемы. Далее для краткости граничное условие для рупора будем обозначать граничным условием  $\mathcal{A}$ , а приближенное условие – условием  $\mathcal{B}$ .

Карта режимов на плоскости основных параметров системы  $(\Delta, I_0)$  получена в [19, 31], в этой работе найдены значения параметров, при которых наблюдаются различные типы колебаний – стационарные колебания, автомодуляция, хаотические режимы. В этих работах было показано, что в гиротроне существуют два механизма перехода от стационарной генерации к автомодуляции, с ними связаны два сценария перехода к хаотическим колебаниям. При  $\Delta \approx 0.0$  (и увеличении тока пучка  $I_0$ ) реализуется последовательность бифуркаций удвоения периода. Как было показано в [17], хаотические колебания, возникающие по такому сценарию являются неразвитыми, то есть характеризуются одним положительным показателем Ляпунова. При  $\Delta \approx 1.0$  хаотические режимы возникают после разрушения квазипериодического движения, и при увеличении  $I_0$  хаотические колебания становятся развитыми и характеризуются несколькими положительными показателями (режим гиперхаоса).

Для вычисления спектра показателей Ляпунова был использован алгоритм Беннеттина, описанный в разделе 1. Заметим, что в данной системе у аттракторов присутствуют два нулевых показателя, которые связаны с инвариантностью уравнений

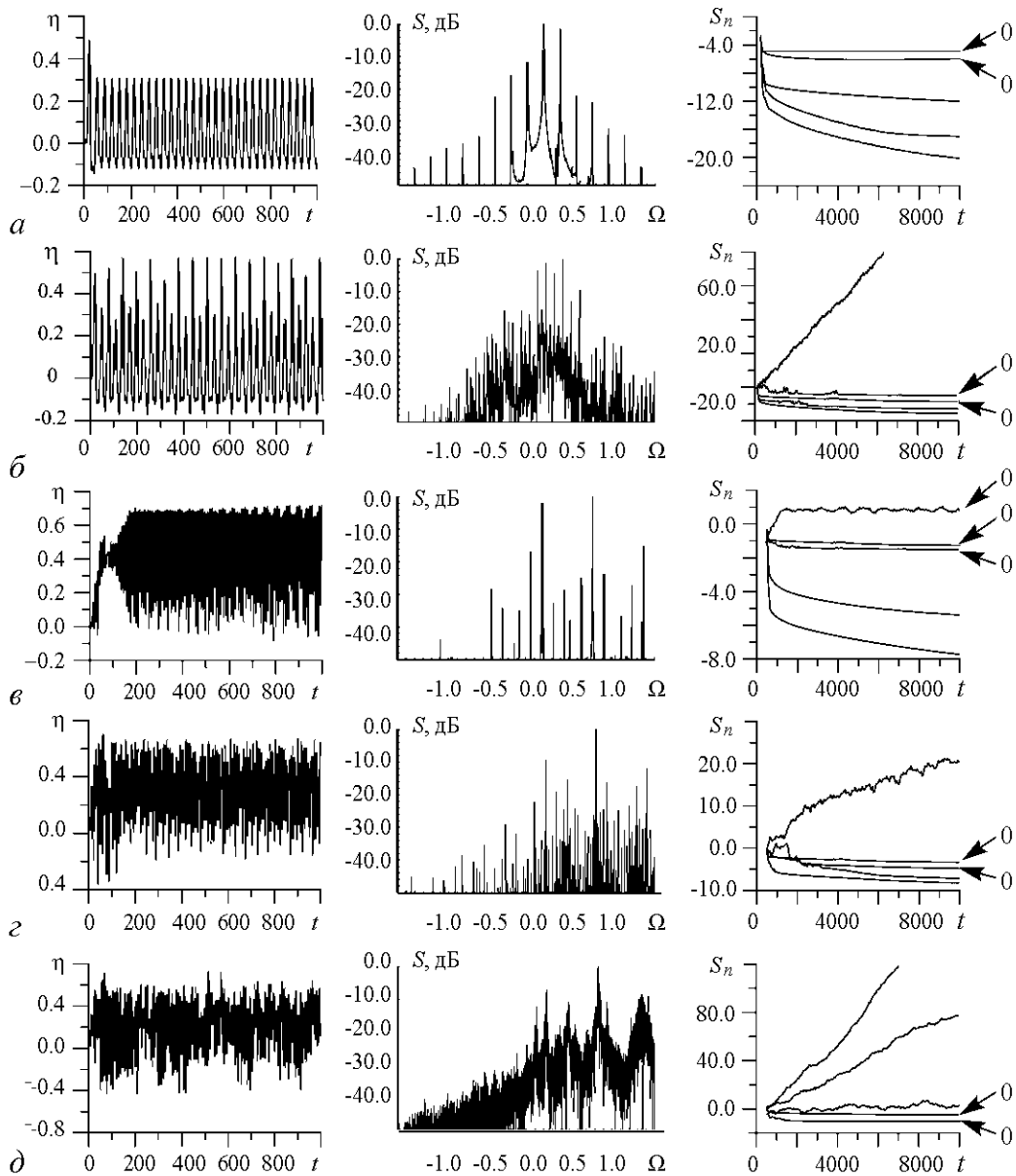


Рис. 3. Зависимость электронного КПД  $\eta$  от времени, спектр выходного сигнала и графики накапливающихся сумм  $S_n$  от времени в модели гиротрона при следующих параметрах: *a* – периодическая автомодуляция,  $\Delta = 0.0$ ,  $I_0 = 0.028$ ; *б* – хаотические колебания,  $\Delta = 0.0$ ,  $I_0 = 0.038$ ; *в* – квазипериодическая автомодуляция,  $\Delta = 1.0$ ,  $I_0 = 0.05$ ; *г* – хаотические колебания,  $\Delta = 1.0$ ,  $I_0 = 0.12$ ; *д* – гиперхаос,  $\Delta = 1.0$ ,  $I_0 = 0.15$

(б) к малым сдвигам по фазе и времени, аналогично генератору ван дер Поля (см. разделы 2 и 5).

Рис. 3 иллюстрирует результаты, полученные при численном решении уравнений (6) с приближенными граничными условиями  $\mathcal{B}$ . Первая колонка показывает зависимость от времени электронного КПД  $\eta$ , вычисленного по поперечным импульсам электронов  $p$  на коллекторном конце лампы по формуле

$\eta_{\perp} = 1 - 1/(2\pi) \int_0^{2\pi} |p|^2 d\varphi_0$ . Вторая колонка иллюстрирует спектр, полученный посредством фурье-анализа комплексной амплитуды поля выходного сигнала. В третьей колонке представлены накапливающиеся суммы  $S_n(t)$ , соответствующие первым пяти показателям. Показаны следующие типы колебаний: режим автомодуляции (а); неразвитые хаотические колебания, возникшие после бифуркаций удвоения периода (б); квазипериодическая автомодуляция (в); неразвитые хаотические колебания, возникшие после разрушения квазипериодического движения (з); гиперхаос (д). Те зависимости  $S_n(t)$ , которые нарастают с течением времени, соответствуют положительным характеристическим показателям. Суммы, ассоциирующиеся с нулевыми показателями, отмечены на рисунке значком «0». Заметим, что в случае квазипериодической автомодуляции (в) нулевого показателя три.

На рис. 4 приведены кривые зависимости сумм  $\sigma_n$  первых нескольких показателей Ляпунова, занумерованных в порядке убывания, от числа членов суммы. Точка пересечения каждого графика с осью абсцисс дает оценку ляпуновской размерности аттрактора по формуле Каплана–Йорке (4).

Рассмотрим результаты оценки размерности для различных режимов. В случае граничных условий  $\mathcal{A}$  для «слабого» хаоса размерность  $D$  получается равной примерно 16.4, а в режиме гиперхаоса 30.6. Для граничных условий  $\mathcal{B}$  размерности еще выше, соответственно,  $D \approx 26.6$  (слабый хаос) и  $D \approx 40.7$  (гиперхаос).

Для сравнения можно отметить, что оценки размерностей аттракторов для режимов слабого и развитого хаоса в лампе обратной волны [15] составили 3.5 и 6.4. Для ЛБВ с запаздывающей обратной связью авторы работы [16] оценили значение хаотического аттрактора как  $2 < D < 3$ . Таким образом, размерности аттракторов хаотических режимов в исследуемой системе оказываются существенно выше, чем размерности, полученные для других электронно-волновых систем. Заметим,

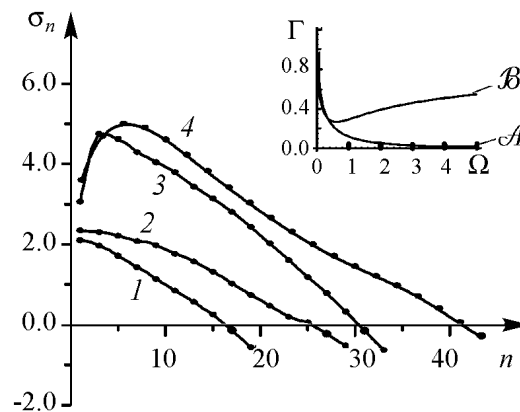


Рис. 4. Зависимости сумм показателей  $\sigma_n$  от их числа для различных режимов: 1, 2 – неразвитый хаос ( $\Delta = 0.0$ ,  $I_0 = 0.0365$  для граничных условий  $\mathcal{A}$  и  $\Delta = 0.0$ ,  $I_0 = 0.038$  для граничных условий  $\mathcal{B}$  соответственно), 3, 4 – гиперхаос ( $\Delta = 1.0$ ,  $I_0 = 0.11$  для граничных условий  $\mathcal{A}$  и  $\Delta = 1.0$ ,  $I_0 = 0.15$  для граничных условий  $\mathcal{B}$ ). На врезке показана зависимость модуля коэффициента отражения от частоты для граничных условий рупора  $\mathcal{A}$  и приближенных граничных условий  $\mathcal{B}$ , взятые из работы [18]



что возможность существования хаотических аттракторов обсуждалась ранее в [13]. В ней на примере уравнения Мэки–Гласса было показано, что, увеличивая параметр задержки, можно было наблюдать хаотические аттракторы, характеризующиеся двадцатью положительными показателями, и, как следует из формулы (4), обладающие высокой размерностью. В отличие от работы [13], в нашем случае высокая размерность определяется не наличием очень большого числа положительных показателей Ляпунова, а присутствием большого числа малых по абсолютной величине отрицательных показателей Ляпунова.

Подробное обсуждение и объяснение этого явления проведено в [17, 19]. Здесь заметим, что взаимодействие вблизи границы полосы пропускания приводит к появлению значительного числа высокодобротных мод системы, что, в свою очередь, обуславливает аномально высокое значение ляпуновской размерности хаотических аттракторов в гиротроне. Следует ожидать, что аналогичные явления можно будет обнаружить при исследовании других микроволновых электронных приборов, работающих вблизи границы полосы пропускания (релятивистских оротронов, при самовозбуждении ЛБВ ЦСР и т.д.).

#### 4. Динамика кольцевого нелинейного резонатора

Рассмотрим систему, в которой имеется как распределение по координате, так и по времени (см. рис. 1, в). В качестве модели выберем резонатор, содержащий нелинейную среду с модуляционной неустойчивостью. Данную систему можно описать при помощи нелинейного уравнения Шредингера

$$i \left( \frac{\partial A}{\partial t} + v_g \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\omega_0''}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \beta |A|^2 A = 0 \quad (7)$$

с запаздывающим граничным условием

$$A(0, t) = A_0 \exp(i\omega t) + R \cdot A(L, t - \tau). \quad (8)$$

Здесь  $A$  – медленно меняющаяся комплексная амплитуда волны,  $v_g$  – групповая скорость,  $\omega_0''$  – параметр дисперсии,  $\beta$  – параметр нелинейности,  $R = \rho \exp(i\psi)$  – комплексный коэффициент обратной связи,  $\tau$  – время запаздывания,  $L$  – протяженность нелинейной среды,  $A_0$  и  $\omega$  – амплитуда и частота входного сигнала, соответственно. Все переменные считаются безразмерными.

Эта система была подробно изучена Икедой с соавторами (см., например, [32] и цитированную там литературу), которые рассматривали динамику светового пучка в оптическом резонаторе, содержащем нелинейный диэлектрик. Влияние эффектов модуляционной неустойчивости на динамику данной системы было учтено в работе [33]. В ней был проведен теоретический анализ режимов стационарных одночастотных колебаний и определены условия их устойчивости, а также выполнено численное моделирование автомодуляции и переходов к хаосу. Было обнаружено, что по мере увеличения амплитуды входного сигнала  $A_0$  либо глубины обратной связи  $\rho$  стационарный режим теряет устойчивость, и в системе возникает периодическая автомодуляция. Она обусловлена возбуждением пары сателлитов с частотами, близкими к частотам, на которых инкремент модуляционной неустойчивости максимален. С увеличением надкритичности происходит переход к хаосу через разрушение

квазипериодического движения. Отметим, что в [33] рассматривался случай, когда модуляционная неустойчивость является конвективной, и лишь наличие механизма обратной связи превращает ее в глобальную.

Продemonстрируем типичные режимы колебаний, наблюдающиеся в модели (7), (8). Для этого зафиксируем частоту входного сигнала и будем плавно увеличивать амплитуду. Значения остальных параметров: коэффициент обратной связи  $\rho = 0.5$ ,  $\psi = 0.0$ , параметр нелинейности  $\beta = 1.0$ , параметр дисперсии  $\omega_0'' = 1.0$ , частота входного сигнала  $\omega = 0.0$ , групповая скорость  $v_g = 2.0$ , время запаздывания  $\tau = 0.05$ , длина основной части системы  $L = 20$ . Значение  $\tau$  выбрано малым для удобства численного моделирования. Как показывают расчеты, при большой длине  $L$  увеличение  $\tau$  не приводит к каким-либо качественным изменениям.

При малых значениях  $A_0$  происходит установление режима гармонических колебаний на частоте внешнего воздействия. Переходный процесс носит характер медленно затухающих осцилляций. В спектре показателей Ляпунова все показате-

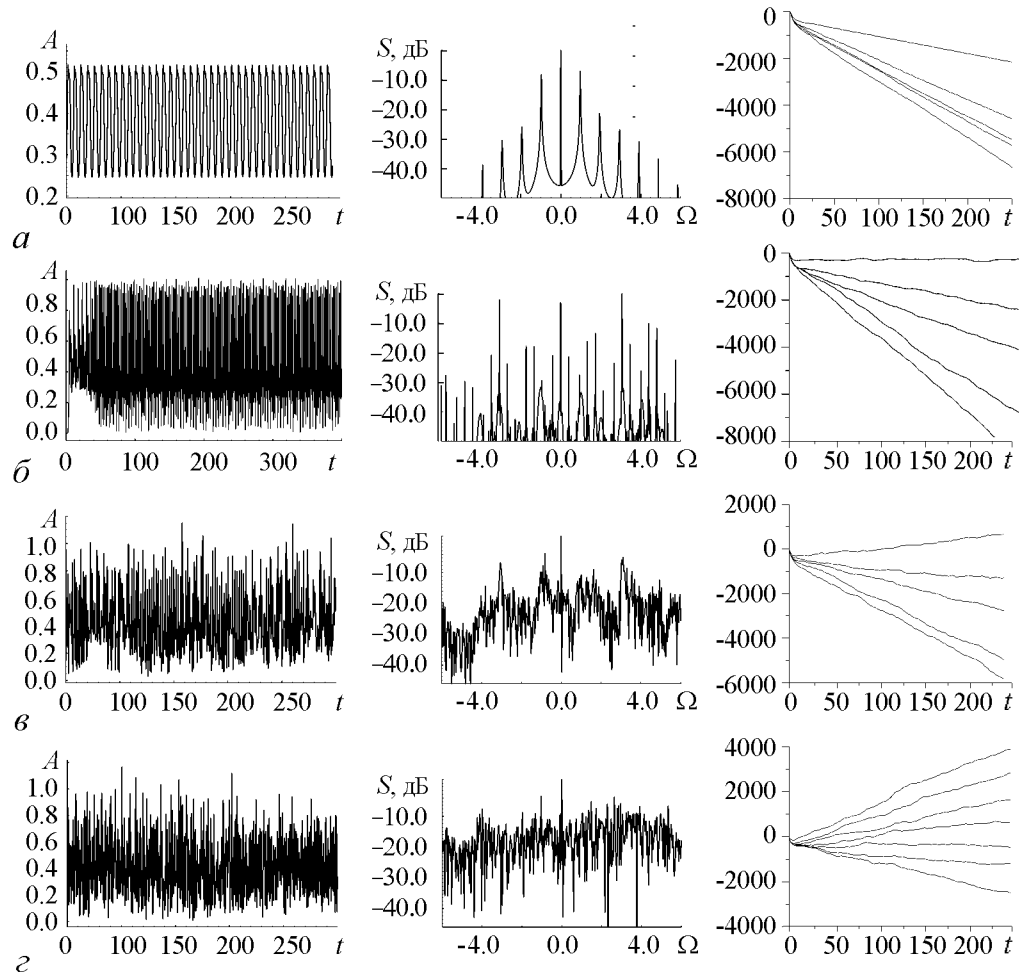


Рис. 5. Зависимость входного сигнала  $|A(0, t)|$  от времени (первая колонка), спектр сигнала (вторая колонка) и зависимость накапливающихся сумм для старших пяти показателей Ляпунова от времени для типичных режимов динамики автогенератора кольцевого нелинейного резонатора:  $a$  – периодическая автомодуляция,  $A_0 = 0.45$ ;  $b$  – квазипериодическая автомодуляция,  $A_0 = 0.57$ ;  $v$  – хаос,  $A_0 = 0.6$ ;  $z$  – гиперхаос,  $A_0 = 1.4$ , значения остальных параметров указаны в тексте.

ли отрицательны. Отметим, что в силу граничного условия симметрия уравнения нарушается (по сравнению с двумя первыми случаями) и нулевых показателей Ляпунова в спектре нет. Длительность переходного процесса с ростом  $A_0$  постепенно увеличивается, и при  $A_0 = 0.43$  мягко возникает режим периодической автомодуляции. Типичная зависимость модуля амплитуды от времени представлена на рис. 5, *а*. По мере дальнейшего увеличения амплитуды входного сигнала автомодуляция становится вначале квазипериодической (рис. 5, *б*), а затем – хаотической (рис. 5, *в*). Видно, что в квазипериодическом режиме появляется нулевой показатель. Точно локализовать в пространстве параметров режим квазипериодики достаточно сложно, и мы определили его лишь как точку, где один из показателей Ляпунова переходит через ноль. В хаотическом режиме появляется положительный показатель.

Будем увеличивать амплитуду внешнего воздействия дальше. В этом случае выходим из области параметров, отвечающих случаю конвективной модуляционной неустойчивости, в область, где она оказывается абсолютной. В [34] было установлено, что данный эффект связан с тем, что с ростом интенсивности сигнала расширяется диапазон неустойчивых возмущений, которые захватывают область встречных волн, имеющих отрицательную групповую скорость. Как показали наши расчеты, в этом случае реализуются режимы гиперхаоса. Это связано с тем, что вблизи частот отсечки происходит сгущение собственных мод резонатора и всё большее их число попадает в область неустойчивых возмущений. Таким образом, переход от конвективной модуляционной неустойчивости к абсолютной сопровождается появлением в спектре новых положительных показателей Ляпунова. Иллюстрацией этого служит рис. 6, где приведены зависимости сумм  $\sigma_n$  первых нескольких показателей Ляпунова, занумерованных в порядке убывания, от числа членов суммы. Графики построены: для случая  $A_0 = 0.6$ , что соответствует порогу возникновения хаотических колебаний в системе (модуляционная неустойчивость при этом является конвективной и сложная динамика обусловлена запаздывающей обратной связью); для случая  $A_0 = 1.4$ , что отвечает критическому значению амплитуды входного сигнала, когда

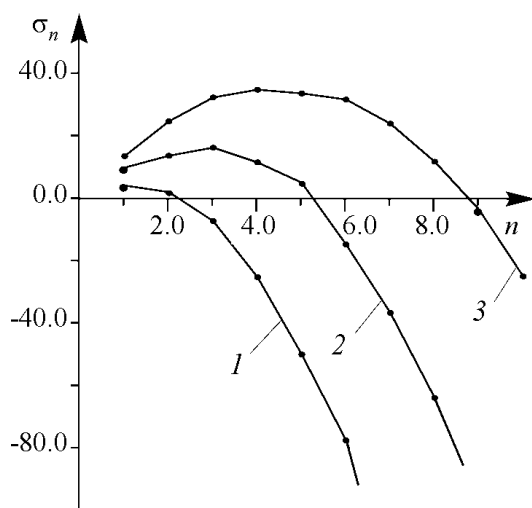


Рис. 6. Зависимости сумм показателей Ляпунова  $\sigma_n$  от числа показателей для хаотических режимов в кольцевом нелинейном резонаторе при следующих значениях  $A_0$ : 1 – 0.6, 2 – 0.8, 3 – 1.4

имеет место смена характера модуляционной неустойчивости с конвективной на абсолютную; для случая  $A_0 = 0.8$  – некоторое промежуточное значение. Видно, что с ростом амплитуды имеет место рост размерности  $D$  от 2.1 до 8.8. Рост размерности связан с возникновением все новых возмущений, имеющих отрицательную групповую скорость.

Отметим, что для обоих случаев (гиротрон с нефиксированной структурой поля и кольцевой нелинейный резонатор под внешним воздействием) принципиальным является то, что они работают вблизи критической частоты. На основании проведенных исследований был сделан вывод, что в этом случае высокая размерность хаотических аттракторов является типичной ситуацией (см. обсуждение этого вопроса в работах [35, 36]).

## 5. Типичные особенности расчета спектра показателей Ляпунова

В данном разделе обсуждаются некоторые особенности процедуры расчета спектра показателей Ляпунова, которые характерны для распределенных автоколебательных систем. Все представленные ниже результаты являются обобщением исследований, проведенных для рассмотренных в работе моделей. Некоторые результаты, представленные далее и относящиеся к системам с запаздывающей обратной связью, были опубликованы в [22]. Однако, как оказалось, особенности, обнаруженные для систем с запаздывающей обратной связью (первый тип, по нашей терминологии), присущи всему классу рассмотренных нами систем.

**5.1. Зависимость от вида начального возмущения.** Обычно в литературе считается (см., например, [1]), что начальные векторы возмущения должны выбираться ортогональными. Определить ортогональный набор векторов, разумеется, можно разными способами. Пусть, как в описано разделе 1, проведена искусственная дискретизация и требуется рассчитать  $N$  показателей Ляпунова, причем  $N < M$ , где  $M$  – число разбиений. В настоящей работе  $N$  ортогональных векторов возмущений задавались различным образом: в виде полиномов Лагранжа, Лагерра, тригонометрических функций и др. [22].

Сопоставление результатов показало, что значения показателей Ляпунова не зависят от вида начальных возмущений при условии, что время расчета достаточно большое<sup>3</sup> (аналогичный вывод был сделан в [12] при изучении диода Пирса, хотя в этой работе рассчитывался только старший показатель). Более того, нами было показано, что требование ортогональности компонент возмущения на первом шаге не является критическим; это связано с тем, что уже на следующем шаге происходит его ортогонализация.

Непосредственный вид начального возмущения оказывает влияние лишь на скорость выхода зависимости накапливающихся сумм от времени на линейный закон. При этом расчеты могут быть существенно ускорены, если векторы первоначальных возмущений сразу ориентировать по направлениям главных осей  $M$ -мерного эллипсоида изображающих точек в фазовом пространстве, растяжение

<sup>3</sup>Под «большими» мы понимаем времена, много большие характерных временных масштабов системы, таких как период автомодуляции или время запаздывания в цепи обратной связи

и сжатие которого характеризует спектр показателей Ляпунова (см. [1]). К сожалению, эти направления, как правило, заранее не известны за исключением некоторых простых модельных систем типа точечных отображений, где их удается найти аналитически. Тем не менее, может оказаться полезным, например, задание начального возмущения в виде разложения по линейным собственным модам. Подобная методика, в частности, применялась в [17, 19] для ускорения расчетов. На рис. 3, б, в отчетливо видно, что существует начальный участок на зависимости накапливающейся суммы  $S_n(t)$ , отвечающий переходному процессу до выхода на линейный закон. Причем длительность такого переходного процесса может быть много больше характерного времени системы (например, периода автомодуляции) и чем больше номер характеристического показателя, тем больше это время. Таким образом, усовершенствование процедуры определения начальных возмущений может существенно сократить время расчета, особенно если рассчитывается большое число показателей (несколько десятков). Аналогичное рассуждение справедливо и для других систем. Такие участки переходных процессов (изломы на зависимости  $S_n(t)$ ) заметны и на рис. 5, иллюстрирующем динамику кольцевого нелинейного резонатора.

Отметим также следующее обстоятельство. Как правило, требуется рассчитать показатели Ляпунова не при каких-то одних значениях управляющих параметров, а в диапазоне их изменения, например, построить зависимость показателей Ляпунова от какого-либо параметра. В этом случае следует при переходе к новой точке в пространстве управляющих параметров сохранять начальную ориентацию векторов возмущения ту же, что и на последнем шаге в какой-либо близлежащей точке. Это своего рода аналог процедуры расчета с наследованием начальных условий, но в данном случае не только для исходной, но и для возмущенных систем. Подобный подход использовался в [22].

**5.2. Поведение нулевых показателей Ляпунова.** Как уже отмечалось в разделе 2, для ряда распределенных систем с симметрией должны присутствовать нулевые показатели Ляпунова. Например, в однопараметрической модели ЛОВ [15], гиротрона с нефиксированной структурой поля [17] и в модели автогенератора с запаздывающей обратной связью [22] режимы, отличные от стационарных колебаний, характеризуются двумя нулевыми показателями Ляпунова, а квазипериодические колебания – тремя нулевыми показателями Ляпунова (см. суммы  $S_n(t)$  на рис. 2 и 3). Наличие двух нулевых показателей связано с симметрией относительно сдвига начала отсчета времени и симметрией относительно фазового сдвига. Однако в режимах стационарной генерации, когда симметрия относительно сдвига начала отсчета времени вырождается, имеется лишь один нулевой показатель; в режимах отсутствия генерации, когда вырождаются обе симметрии, все показатели Ляпунова отрицательны. Таким образом, как уже указывалось выше, наличие соответствующего числа нулевых показателей является одним из критериев правильности расчетов.

Было обнаружено, что накапливающиеся суммы, отвечающие нулевым показателям Ляпунова, ведут себя по-разному в различных режимах. Так, в случаях стационарной генерации и в периодической автомодуляции накапливающиеся суммы быстро выходят на линейную зависимость, причем значения соответствующих показателей Ляпунова получаются нулевыми с высокой точностью (до  $10^{-5}$  при шаге  $d\tau = 10^{-2}$  и  $\varepsilon = 10^{-2}$ ). В случае хаотических колебаний поведение накапливаю-

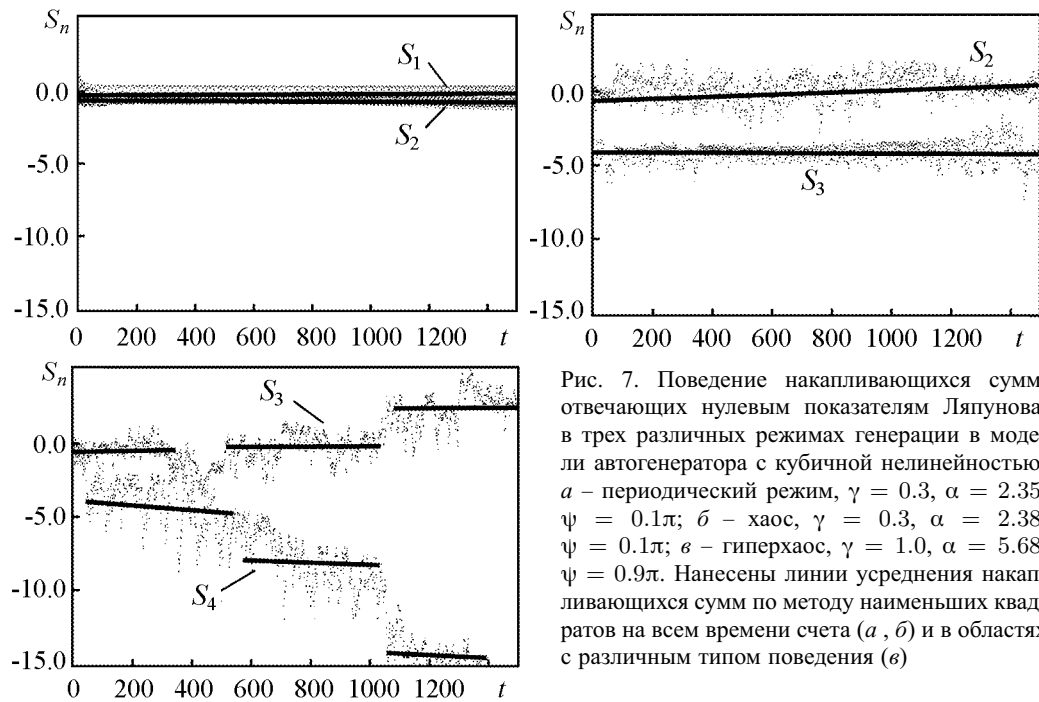


Рис. 7. Поведение накапливающихся сумм, отвечающих нулевым показателям Ляпунова, в трех различных режимах генерации в модели автогенератора с кубической нелинейностью: *a* – периодический режим,  $\gamma = 0.3$ ,  $\alpha = 2.35$ ,  $\psi = 0.1\pi$ ; *б* – хаос,  $\gamma = 0.3$ ,  $\alpha = 2.38$ ,  $\psi = 0.1\pi$ ; *в* – гиперхаос,  $\gamma = 1.0$ ,  $\alpha = 5.68$ ,  $\psi = 0.9\pi$ . Нанесены линии усреднения накапливающихся сумм по методу наименьших квадратов на всем времени счета (*a*, *б*) и в областях с различным типом поведения (*в*)

щихся сумм является более сложным и в ряде случаев может носить ступенчатый характер: в течение некоторого времени величина  $S_n$  является практически постоянной, после чего скачком изменяет свое значение [22].

На рис. 7 приведены для сравнения графики зависимости накапливающихся сумм, отвечающих нулевым показателям Ляпунова, в трех режимах генерации: периодическом, хаотическом и гиперхаотическом для модели автогенератора с кубической нелинейностью. Хорошо видно, что в режиме периодической генерации накапливающиеся суммы слабо колеблются вблизи нулевого значения. Имеющийся монотонный рост происходит чрезвычайно медленно, так что получающиеся усреднением методом наименьших квадратов значения показателей Ляпунова оказываются на 2–3 порядка меньше, чем норма возмущения  $\varepsilon$ . На рис. 7, *a* нанесены линии усреднения накапливающихся сумм  $S_n(t)$  по методу наименьших квадратов; видно, что они практически не меняются с течением времени.

В режимах хаоса и гиперхаоса (рис. 7, *б*, *в*) зависимость накапливающихся сумм от времени носит гораздо более сложный характер. Видны области, где накапливающиеся суммы ведут себя по-разному, убывая или возрастая с различной

Таблица 3

Значения нулевых показателей Ляпунова в различных режимах генерации в модели автогенератора с кубической нелинейностью,  $\varepsilon = 0.01$

Периодическая автомодуляция $\gamma = 0.3, \alpha = 1.4, \psi = 0.1\pi$	Хаотические колебания $\gamma = 0.3, \alpha = 1.4, \psi = 0.1\pi$	Гиперхаос $\gamma = 1, \alpha = 5.68, \psi = 0.9\pi$
0.00002	0.001	0.009
0.00015	-0.002	-0.02

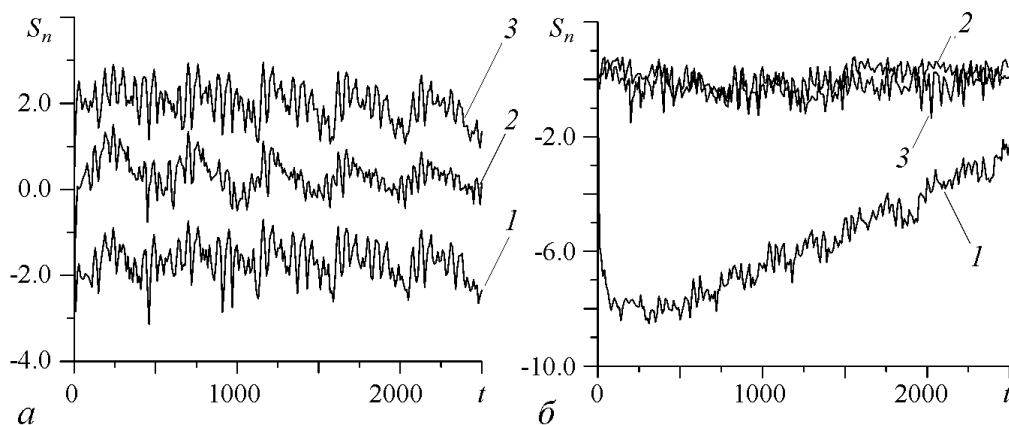


Рис. 8. Поведение накапливающихся сумм, отвечающих первому нулевому показателю (а) и второму нулевому показателю (б), для модели автогенератора с кубической нелинейностью в режиме квазипериодических колебаний,  $\gamma = 0.3$ ,  $\alpha = 3.77$ ,  $\psi = 0.9\pi$ . Цифрами на рисунке отмечены кривые, вычисленные при задании разных видов начальных возмущений: 1 – случайное начальное возмущение, 2 – возмущение, задаваемое по формуле (9), 3 – возмущение в виде тригонометрических функций

скоростью. Соответственно, падает точность вычисления показателей Ляпунова, и значение нулевых показателей оказывается порядка  $\varepsilon$ . Точность расчета нулевых показателей Ляпунова в сложных режимах можно существенно улучшить, если проводить усреднение методом наименьших квадратов не на всей области расчетов, а разбивать ее на участки, в которых поведение накапливающихся сумм остается приблизительно одинаковым (см. рис. 7, в). Значения нулевых показателей Ляпунова, отвечающих представленным на рис. 7 режимам, приведены в табл. 3. Видно уменьшение точности с переходом от периодического режима к хаосу и затем к гиперхаосу. Отметим, что все равно точность остается сравнимой с  $\varepsilon$  (норма вектора возмущения, который добавляется к невозмущенной системе).

Как показало наше исследование, нулевые показатели оказываются наиболее чувствительными к виду начального возмущения. На рис. 8 показаны зависимости накапливающихся сумм  $S_n(t)$  от времени, отвечающих первому (а) и второму (б) нулевым показателям в режиме квазипериодических колебаний для генератора Ван дер Поля. Цифрами отмечены суммы, полученные при выборе разных начальных возмущений: 1 – случайное распределение; 2 – в виде функций, определяемых формулой

$$\tilde{F}_n(x, t) = (0, \dots, 0, F_{(n-1)d}, \dots, F_{nd}, 0, \dots, 0), \quad (9)$$

где число ненулевых компонент  $n$ -го вектора возмущений  $d$  есть целая часть отношения  $M/N$ <sup>4</sup>; 3 – синусоидальное распределение ( $F_n(t) = \sin(\pi n \tau_i / (2N))$ ), где  $\tau_i$  есть  $i$ -й момент времени в петле обратной связи).

Оценка нулевых показателей приведена в табл. 4. Из сравнения значений показателей видно, что начальное распределение влияет на их величину, но в целом точность определения нулевых показателей Ляпунова остается очень высокой.

<sup>4</sup>Значения компонент вектора возмущений могут выбираться случайными, постоянными и др. (очевидно, это не повлияет на ортогональность векторов), но так, чтобы выполнялось условие нормировки. Далее рассматривается случай, когда они постоянные.

Таблица 4

Значение нулевых показателей  
в модели автогенератора с кубической нелинейностью  
в режиме квазипериодических колебаний ( $\gamma = 0.3$ ,  $\alpha = 3.77$ ,  $\psi = 0.9\pi$ )

Случайное распределение	Ступенчатая функция	Синусоидальное распределение
-0.000031	-0.00012	-0.00016
0.002	0.00024	-0.000064

**5.3. Влияние параметров численной схемы.** В ходе численного моделирования проверялась зависимость показателей Ляпунова от параметров численной схемы: шага по времени  $d\tau$ , нормы начального возмущения  $\varepsilon$ , числа рассчитываемых показателей и числа  $L$  шагов между перенормировками. Наименее чувствительным к изменению параметров схемы оказывается старший показатель Ляпунова; наиболее чувствительными, как уже отмечалось, – нулевые показатели в случае сложных режимов. С другой стороны, благодаря этой чувствительности можно идентифицировать нулевые показатели Ляпунова. При одинаковом значении управляющих параметров, но при разном выборе параметров численной схемы сильно изменяются лишь два элемента спектра показателей Ляпунова, которые и следует ассоциировать с нулевыми показателями. Это, в свою очередь, позволяет различать режимы хаоса и гиперхаоса: после того, как найдены нулевые показатели Ляпунова, становится ясно, сколько имеется положительных показателей.

Изменение таких параметров численного метода, как нормы возмущения и шага по времени, показало, что значения показателей Ляпунова остаются практически неизменными при постоянном произведении  $\varepsilon \cdot L \cdot d\tau$ . Эта величина должна быть достаточно небольшой в случае хаотических режимов<sup>5</sup>. В регулярных режимах ее можно выбирать на порядок большей. Данное обстоятельство вызвано тем, что с увеличением времени между перенормировками в каждом векторе возмущения начинает доминировать составляющая с максимальным показателем Ляпунова. Более того, если  $L$  слишком велико, все векторы возмущений окажутся ориентированными вдоль наиболее неустойчивого направления, отвечающего старшему показателю Ляпунова, и провести их ортогонализацию и вычисление спектра показателей Ляпунова не удастся. Это обстоятельство объясняет хорошую точность расчета старшего показателя Ляпунова и высокую чувствительность нулевых показателей Ляпунова к изменению параметров численной схемы. Отметим также, что выбор слишком больших значений  $L$  (порядка 10) в режимах хаоса и гиперхаоса приводит к тому, что возмущение начинает сильно расходиться и численная схема оказывается неустойчивой.

Было установлено, что число рассчитываемых показателей Ляпунова не влияет на получающиеся значения показателей. Это связано непосредственно с методикой расчетов: алгоритм Бенеттина предполагает последовательное вычисление показателей и на первом шаге рассчитывается показатель, соответствующий направлению в фазовом пространстве, вдоль которого имеет место максимальный рост начального возмущения. Ясно, что увеличение числа показателей не может изменить это значение, поскольку лишь добавляет новые направления к уже имеющимся. Нужно,

<sup>5</sup>Для систем типа генератор ван дер Поля было установлено, что наиболее эффективно алгоритм работает при  $\varepsilon \cdot L \cdot d\tau \sim 10^{-4}$  [22].



однако, отметить, что с увеличением номера показателя при его вычислении будет происходить потеря точности расчетов, поскольку ему отвечает всё меньшее по модулю возмущение в фазовом пространстве.

### Заключение

Таким образом, в настоящей работе были представлены результаты расчетов спектров характеристических показателей и обсуждены основные особенности спектра показателей Ляпунова для ряда моделей распределенных автоколебательных систем радиофизической природы. Продемонстрировано, что различные распределенные системы обладают схожими свойствами. Представленные результаты показали, что спектр показателей Ляпунова является эффективным инструментом для анализа «тонкой структуры» хаотических режимов, позволяющим количественно охарактеризовать качественно различные типы хаотического поведения.

Показано, что конкретный вид начального возмущения не влияет на получаемые значения спектра показателей Ляпунова и сказывается лишь на скорости выхода зависимости накапливающихся сумм от времени на линейный закон. Установлено, что число рассчитываемых показателей Ляпунова не влияет на точность вычислений. Описана высокая чувствительность нулевых показателей Ляпунова к изменению параметров численной схемы, что может облегчить различение режимов «слабого» хаоса с единственным положительным показателем Ляпунова и гиперхаоса. Обсуждается зависимость результатов компьютерного моделирования от параметров численной схемы.

Проведен расчет ляпуновской размерности в хаотических режимах по формуле Каплана-Йорке. Установлено, что аномально высокая размерность хаотических аттракторов является характерной для систем, работающих вблизи критической частоты, что связано с наличием возмущений, имеющих отрицательную групповую скорость.

Авторы благодарны С.П. Кузнецову, А.Г. Рожневу и Н.М. Рыскину за обсуждение результатов работы и полезные замечания.

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 06-02-16773 и 05-02-16931. Работа Балякина А.А. была также поддержана грантом CRDF Y3-P-06-02 и грантом Президента Российской Федерации для поддержки молодых кандидатов наук МК-4945.2006.2.*

### Библиографический список

1. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2001. 296 с.
2. Ott E. Chaos in dynamical systems. NY: Cambridge Univ. Press, 1993. 385 p.
3. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Изд-во Мир, 1988. 240 с.
4. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука. Физматлит. 1997.
5. Трубецков Д.И., Анфиногентов В.Г., Рыскин Н.М., Титов В.Н., Храмов А.Е. Сложная динамика электронных приборов СВЧ (нелинейная нестационарная теория с позиций нелинейной динамики) // Радиотехника. 1999. № 4. С. 61.

6. *Airila M.I., Dumbrajs O., Reinfelds A., Strautins U.* Nonstationary oscillations in gyrotrons // *Physics of Plasmas*. 2001. Vol. 8, № 3. P. 4608.
7. *Ginzburg N.S., Zaitsev N.I., Ilyakov E.V., Kulagin I.S., Novozhilova Y.V., Rozenthal R.M., and Sergeev A.S.* Observation of chaotic dynamics in a powerful backward-wave oscillator // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 89, № 10. 108304.
8. *Rozental R.M., Zaitsev N.I., Kulagin I.S. et al.* Nonstationary processes in an X-band relativistic gyrotron with delayed feedback // *IEEE Trans. Plasma Sci.* 2004. Vol. 32, № 2. P. 418.
9. *Rozental R.M., Zaitsev N.I., Kulagin I.S. et al.* Nonstationary processes in an X-band relativistic gyrotron with delayed feedback // *IEEE Transaction on Plasma Science*. 2004. Vol. 32. № 2. P. 418.
10. *Shigaev A.M., Dmitriev B.S., Zharkov D.V., Ryskin N.M.* Chaotic dynamics of delayed feedback klystron oscillator and its control by external signal // *IEEE Transaction on Electron Devices*. 2005. Vol. 52, № 5. P. 790.
11. *Безручко Б.П., Булгакова Л.В., Кузнецов С.П., Трубецков Д.И.* Стохастические автоколебания и неустойчивость в лампе обратной волны // *Радиотехника и электроника*. 1983. Т. 28, № 6. С. 1136.
12. *Анфиногентов В.Г.* Хаотические колебания в электронном потоке с виртуальным катодом // *Известия вузов. ПНД*. 1994. Т. 2, № 5. С. 69.
13. *Farmer J.D.* Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system // *Physica D*. 1982. Vol. 4, № 3. P. 366.
14. *Cenys A., Tamasevicius A., Mykolaitis G., Blumeliene S.* Coupled VHF delay line chaos generators // *Proceedings of the first international workshop on the noise radar technology (NRTW-2002)*. Yalta, Ukraine, September 18-20, 2002. P. 136.
15. *Кузнецов С.П., Трубецков Д.И.* Хаос и гиперхаос в лампе обратной волны // *Изв. вузов. Радиофизика*. 2004. Т. 47, № 5-6. С. 383.
16. *Dronov V., Hendry M.R., Antonsen T.M. and Ott E.* Communication with a chaotic traveling wave tube microwave generator // *Chaos*. 2004. Vol. 14, № 1. P. 30.
17. *Блохина Е.В., Рожнев А.Г.* Хаос и гиперхаос в гиротроне // *Изв. вузов. Радиофизика*. 2006. Т. 49, № 10. С. 887.
18. *Блохина Е.В., Кузнецов С.П., Рожнев А.Г.* Высокая размерность хаотических аттракторов в гиротроне с нефиксированной структурой поля // *Письма в ЖТФ*. 2006. Т. 32, № 8. С. 83.
19. *Blokhina E.V., Kuznetsov S.P., Rozhnev A.G.* High-dimensional chaos in a gyrotron // *IEEE Trans. on Electron Devices*. 2007. Vol. 54, № 2. P. 188.
20. *Ott E., Hunt B.R., Szunyogh I., Zimin A. V., Kostelich E.J., Corazza M., Kalnay E., Patil D.J., Yorke J.A.* A local ensemble Kalman filter for atmospheric data assimilation // [arxiv.org/abs/physics/0203058](https://arxiv.org/abs/physics/0203058).
21. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. М.: Наука, Физматлит, 2002.
22. *Балякин А.А., Рыскин Н.М.* Особенности расчета спектров показателей Ляпунова в распределенных автоколебательных системах с запаздывающей обратной связью // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2007. Т. 16, № 6. С. 3.

23. Рыскин Н.М., Шигаев А.М. Сложная динамика простой модели распределенной автоколебательной системы с запаздыванием // ЖТФ. 2002. Т. 72, № 7. С. 1.
24. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
25. Dmitrieva T.V., Ryskin N.M., Shigaev A.M. Complex dynamics of simple models of distributed self-oscillating delayed feedback systems // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2001. Vol. 4, № 4. P. 376.
26. Дмитриева Т.В., Рыскин Н.М., Титов В.Н., Шигаев А.М. Сложная динамика простых моделей распределенных электронно-волновых систем // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7, № 6. С. 66.
27. Кузнецов С.П. Сложная динамика генераторов с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25, № 12. С. 1410.
28. Kuznetsov S.P., Mosekilde E. Coupled map lattices with complex order parameter // Physica A 291. 2001., № 3-4, P. 299.
29. Гинзбург Н.С., Завольский Н.А., Нусинович Г.С., Сергеев А.С. Установление автоколебаний в электронных СВЧ генераторах с дифракционным выводом излучения // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29, № 1. С. 106.
30. Rozhnev A.G. Boundary Conditions in the Theory of Microwave Electron Devices with a Diffraction Energy Output // J. Comm. Techn. Elect. 2000. Vol. 45, Suppl. 1. P. 595.
31. Блохина Е.В., Рожнев А.Г. Влияние отражений от выходного рупора на динамику гиротрона // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 11. С. 1390.
32. Розанов Н.Н. Оптическая бистабильность и гистерезис в распределенных нелинейных системах. М.: Физматлит, 1997.
33. Балякин А.А., Рыскин Н.М., Хаврошин О.С. Нелинейная динамика модуляционной неустойчивости в распределенных резонаторах под внешним гармоническим воздействием // Изв. вузов. Радиофизика. 2007. Т. 50, № 9. С. 800.
34. Балякин А.А., Рыскин Н.М. Смена характера модуляционной неустойчивости вблизи критической частоты // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30, вып. 5. С. 6.
35. Balyakin A.A., Blokhina E.V. High-dimensional chaotic regimes in distributed radio-physical systems operating near the cutoff frequency // PIERS Proceedings. Prague, Czech Republic, August 27-30, 2007. P. 507.
36. Балякин А.А., Блохина Е.В. Особенности расчета спектра показателей Ляпунова в распределенных системах // Тез. докл. Международ. конгр. «Нелинейный динамический анализ – 2007». С.-Петербург, 4-8 июня 2007. СПб: СПбГУ, 2007. С. 362.

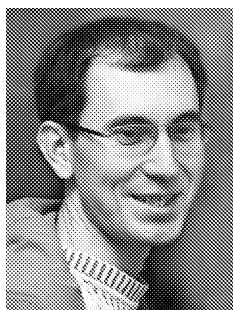
Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 16.11.2007  
После доработки 26.02.2008

## PECULIARITIES OF CALCULATION OF THE LYAPUNOV EXPONENTS SET IN DISTRIBUTED SELF-OSCILLATED SYSTEMS WITH DELAYED FEEDBACK

*A.A. Balyakin, E.V. Blokhina*

The numerical scheme for calculation the set of Lyapunov exponents in distributed systems with delayed feedback based on a modification of Benettine algorithm is described. The results of numerical simulation of two such systems (active oscillator with cubic nonlinearity and active oscillator of klystron type) are presented. The sets of Lyapunov exponents in different regimes, particularly in regimes of «weak» and «developed» chaos are analyzed. The calculation peculiarities of the set of Lyapunov exponents in the systems with delayed feedback are discussed.



*Балякин Артем Александрович* – окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета с отличием (2001), кандидат физико-математических наук (2004), доцент кафедры нелинейной физики СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика распределенных систем, анализ количественных характеристик сложных режимов. Автор 16 научных статей.



*Блохина Елена Владимировна* – родилась в Саратове (1980). Окончила с отличием Саратовский государственный университет по специальности «радиофизика» (2002), кандидат физико-математических наук (2005, СГУ). С 2005 работает в СГУ. В настоящее время проходит стажировку в Университетском колледже Дублина (Ирландия). Научные интересы – нелинейная динамика микроволновых электронных устройств. Автор 17 статей в отечественных и зарубежных журналах.



## СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТА ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ\*

*Д.А. Смирнов, Е.В. Сидак, Б.П. Безручко*

Оценка коэффициента фазовой синхронизации, полученная по временному ряду, может принимать большие значения даже для несвязанных осцилляторов в случае коротких рядов и близких основных частот колебаний. Поскольку такие ситуации часто встречаются на практике, то необходимо уметь их диагностировать, чтобы избежать ошибочных выводов о наличии связи. В работе проводится исследование статистических свойств оценки на эталонном примере – несвязанных фазовых осцилляторах. Количественно определены условия, при которых вероятность получить большие значения оценки велика. На основе проведенного анализа предложен специальный метод подготовки суррогатных данных для контроля статистической значимости результатов оценивания.

### Введение

Задача обнаружения синхронизации между колебательными системами важна в различных приложениях [1–3]. Это явление играет существенную роль в нейрофизиологии [3], где определенная степень синхронизации между различными группами нейронов обеспечивает нормальное функционирование мозга [4], но слишком высокий ее уровень свидетельствует о патологии и характерен для таких заболеваний, как эпилепсия [5] и болезнь Паркинсона [6], сопровождающихся нарушениями движения: эпилептические припадки и паркинсоновский тремор. Привлекают значительное внимание исследования синхронизации ритмов сердечно-сосудистой системы [7, 8], климатических процессов [9] и т.д.

Для количественной характеристики синхронизации между двумя осцилляторами используется ряд показателей. В частности, популярны различные коэффициенты фазовой синхронизации, отражающие стабильность разности фаз колебаний; в работах [10, 11] приведен их сравнительный анализ. Наиболее часто используется коэффициент синхронизации

$$\rho = \left| M \exp^{j(\phi_1 - \phi_2)} \right|, \quad (1)$$

где  $M$  означает математическое ожидание,  $\phi_1$  и  $\phi_2$  – одновременные значения фаз колебаний двух осцилляторов. Величина  $\rho$  принимает значения от нуля до единицы. При этом  $\rho = 1$  соответствует строго синхронному режиму, когда разность

\*По материалам доклада на Школе «ХАОС–2007», Саратов, 9–14.10.2007.

фаз  $\phi_1 - \phi_2$  постоянна. Для несвязанных осцилляторов  $\rho = 0$  (при некотором дополнительном условии). Значение  $\rho$  можно называть характеристикой степени синхронизации, если под синхронизацией понимать наличие любой, хотя бы и слабой, взаимосвязи между одновременными значениями фаз  $\phi_1$  и  $\phi_2$ . Если синхронизацией называть только режим с постоянной разностью фаз, то  $\rho$  лучше трактовать как количественную характеристику связи между осцилляторами. Величина  $\rho$  имеет много различных названий, например, средняя фазовая когерентность [12].

На практике решается задача оценивания  $\rho$  по измеренным временным рядам  $\{x_1(t_1), x_1(t_2), \dots, x_1(t_N)\}$  и  $\{x_2(t_1), x_2(t_2), \dots, x_2(t_N)\}$ , где  $x_1, x_2$  – переменные, характеризующие первый и второй осцилляторы,  $t_n = n\Delta t$  – последовательные моменты времени, разделенные интервалом выборки  $\Delta t$ ,  $N$  – длина ряда. В качестве оценки величины  $\rho$  обычно используется соответствующий эмпирический момент

$$\hat{\rho} = \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \exp^{j(\phi_1(t_n) - \phi_2(t_n))} \right|. \quad (2)$$

При достаточно большой длине ряда и эргодичности процессов оценка  $\hat{\rho}$  очень близка к истинному значению величины  $\rho$ . Однако в практически интересных ситуациях (нестационарные физиологические процессы, короткие ряды геофизических величин и т.д.) длина ряда оказывается довольно малой, не более нескольких десятков характерных периодов колебаний. При этом можно получить близкое к единице значение  $\hat{\rho}$  даже для несвязанных осцилляторов.

Аналитически получить уровень статистической значимости отличия  $\hat{\rho}$  от нуля не удастся за исключением некоторых специальных попыток, не дающих возможности практического применения [13]. В данной работе проводится подробное исследование вероятностных свойств оценки  $\hat{\rho}$  на примере несвязанных фазовых осцилляторов (п. 1) и количественно определяются условия, когда она может принимать большие значения (п. 3).

За отсутствием аналитических формул статистическую значимость полученной оценки определяют с помощью суррогатных данных [14]. Способы приготовления суррогатных данных, предложенные в работах [15, 16] и не предполагающие линейности исследуемых процессов, с некоторыми оговорками соответствуют рассматриваемой ситуации. В данной работе предложен новый способ, основанный на построении модели в виде фазовых осцилляторов (п. 2), который иллюстрируется и сравнивается с двумя указанными способами на эталонном примере в п. 3.

## 1. Методика исследования свойств оценки

В качестве объекта исследования взяты два несвязанных фазовых осциллятора

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_1}{dt} &= \omega_1 + b_1 \cos \phi_1 + \xi_1(t), \\ \frac{d\phi_2}{dt} &= \omega_2 + b_2 \cos \phi_2 + \xi_2(t), \end{aligned} \quad (3)$$

где переменные  $\phi_1$  и  $\phi_2$  – фазы колебаний; параметры  $\omega_{1,2}$  определяют угловые частоты;  $b_{1,2}$  – коэффициенты фазовой нелинейности;  $\xi_{1,2}$  – независимые белые шумы

с автокорреляционными функциями  $c_{1,2}(\tau) = \sigma_{1,2}^2 \delta(\tau)$ ; параметры  $\sigma_{1,2}$  определяют интенсивность шумов.

Фазовый осциллятор – достаточно универсальная модель колебательных процессов с явно выраженным основным ритмом [17]. Поэтому исследование свойств оценки  $\hat{\rho}$  на этой простой модели даст результаты соответствующей степени общности.

Для пары несвязанных осцилляторов (3) известно, что  $\rho = 0$  выполняется в точности при условии отсутствия фазовой нелинейности, то есть при  $b_{1,2} = 0$ . Однако  $\rho \approx 0$  и при умеренном нарушении этого условия.

Для исследования свойств оценки  $\hat{\rho}$  численно решались уравнения (3) методом Эйлера с шагом 0.01 при случайных начальных условиях. Получался ансамбль из  $M$  пар временных рядов длины  $N$  с интервалом выборки  $\Delta t$ . По каждой паре рядов рассчитывалось значение  $\hat{\rho}$  и строилась эмпирическая функция распределения, которая содержит достаточно полную информацию о свойствах этой случайной величины. Расчеты проводились при различных значениях  $N$ ,  $\Delta t$  и параметров осцилляторов.

Для наиболее информативной и компактной иллюстрации результатов мы приводим ниже (п. 3) только две статистические характеристики, полученные по функции распределения: среднее значение ( $\hat{\rho}$ ) и 95-процентный квантиль распределения  $\rho_{0.95}$ . Квантиль распределения  $\rho_{0.95}$  есть такая величина, что вероятность  $P\{\hat{\rho} < \rho_{0.95}\} = 0.95$ . Он имеет практическое значение. Если полученная по экспериментальному временному ряду оценка  $\hat{\rho}$  превышает  $\rho_{0.95}$ , то можно сделать вывод о наличии связи между осцилляторами на уровне значимости  $p = 0.05$ , то есть с вероятностью случайной ошибки не более 0.05. Ниже мы приводим графики зависимости  $\rho_{0.95}$  от различных параметров, которые могут служить как элементы каталога при практической проверке значимости полученной величины  $\hat{\rho}$ , что является одним из основных результатов данной работы.

## 2. Методы построения суррогатных данных для проверки статистической значимости

Каталог (таблица) значений  $\rho_{0.95}$  для всевозможных значений параметров исходных систем был бы весьма громоздким. Эти табличные значения можно использовать для некоторых характерных наборов параметров осцилляторов, а в общем случае мы предлагаем в качестве альтернативы процедуру расчета  $\rho_{0.95}$  для набора параметров, наиболее соответствующего практической ситуации. Эта процедура состоит в следующем.

Предполагается, что система (3) является адекватной моделью наблюдаемой динамики. Ее параметры оцениваются по наблюдаемым данным. А именно, параметры нелинейности  $b_{1,2}$  полагаются равными нулю. Как будет показано, это обоснованно, так как даже достаточно большие значения  $b_{1,2}$  (вплоть до 0.5) слабо влияют на величину  $\rho_{0.95}$ . Угловые частоты при этом можно оценить как средние скорости роста фаз:  $\hat{\omega}_{1,2} = (\phi_{1,2}(t_n) - \phi_{1,2}(t_1))/(t_n - t_1)$ . Для оценки величин  $\sigma_i$  используется следующий алгоритм. Отыскиваются такие моменты времени  $t_{n_k}$ , что значения фазы  $\phi_i(t_{n_k})$ , свернутые в интервал  $[0, 2\pi]$ , принимают примерно одинаковые значения:  $\phi^{(l)} - \Delta\phi/2 < \phi_i(t_{n_k}) \bmod 2\pi < \phi^{(l)} + \Delta\phi/2$ , где  $\phi^{(l)}$  – некоторая константа,  $\Delta\phi$  – достаточно малое число. Пусть этих моментов оказа-

лось  $N_l$  штук. Оценивается дисперсия значений фазы через  $K$  интервалов выборки после  $t_{n_k}$ :  $\sigma_{i,l}^2 = \frac{1}{N_l} \sum_{k=1}^{N_l} (\phi_i(t_{n_k+K}) - \bar{\phi}_i(t_{n_k+K}))^2$ . Это проводится для нескольких значений  $\phi^{(l)} = l\Delta\phi$ ,  $l = 1, \dots, P$ , и рассчитывается усредненная оценка дисперсии  $\langle \sigma_i^2 \rangle = \frac{1}{P} \sum_{l=1}^P \sigma_{i,l}^2$ . При условии  $b_{1,2} = 0$  эта величина должна быть равна  $\langle \sigma_i^2 \rangle \approx \sigma_i^2 K \Delta t$ . Отсюда получаем оценку  $\hat{\sigma}_i^2 = \langle \sigma_i^2 \rangle / (K \Delta t)$ . При расчетах в п. 3 мы брали 8 опорных значений  $\phi^{(l)}$ , для чего полагали  $\Delta\phi = \pi/4$ ,  $P = 8$ ,  $K \Delta t = \pi/4$ . При наличии явных признаков или априорной информации о сильной нелинейности систем можно оценить значения  $\omega_{1,2}$  и  $b_{1,2}$  с помощью более строгой процедуры, аналогичной оценке величин  $\sigma_{1,2}$ . Наконец, генерируется набор из  $M$  пар временных рядов системы (3) при случайных начальных условиях, рассчитываются оценки для каждого из них, а по ним – величина  $\rho_{0.95}$ . Проверяется, превышает ли оценка  $\hat{\rho}$ , полученная по экспериментальному ряду, значение  $\rho_{0.95}$ .

Предложенная процедура представляет собой метод приготовления суррогатных данных. Он сопоставляется в п. 2 с двумя схожими методами, основанными также на предположении об адекватности модели (3) с  $b_{1,2} = 0$ . Основная их идея состоит в том, что для линейного фазового осциллятора приращения фазы на неперекрывающихся интервалах времени независимы друг от друга. Поэтому в работе [15] предлагается для каждого из осцилляторов случайным образом тасовать участки временного ряда длиной  $\tau_k$ , на которых значение фазы нарастает на  $2\pi$ :  $\phi_i(t_{n_k} + \tau_k) - \phi_i(t_{n_k}) = 2\pi$ . Так генерируется  $M$  пар суррогатных временных рядов, в которых зависимости между  $\phi_1$  и  $\phi_2$  отсутствуют (далее – метод I). В работе [16] предлагается аналогичный метод, основанный на анализе возвратов траектории в окрестность каждой ее точки. В приложении к фазам это приводит к тасованию тех же участков ряда, но с возможным замещением, то есть в суррогатном ряде некоторые из исходных участков могут отсутствовать, а другие – повторяться два или более раз (далее – метод II).

При использовании метода I для всех суррогатных рядов сохраняются постоянными значения оценок  $\hat{\omega}_{1,2}$ . Это может внести некоторые погрешности при проверке статистической значимости отличия оценки  $\hat{\rho}$  от нуля, так как для системы (3) и любой реальной системы оценки  $\hat{\omega}_{1,2}$  варьируются от одного временного ряда к другому. Метод II только отчасти снимает это ограничение. Предложенный нами и описанный выше метод, основанный на построении модели в виде фазовых осцилляторов, позволяет генерировать ансамбль суррогатных данных, на свойства которого не наложено такое ограничение (далее – метод III). Это может быть в ряде случаев практическим преимуществом согласно исследованию [18]. Ниже мы сопоставляем все три метода в численном эксперименте.

### 3. Результаты

Большинство результатов мы приведем для интервала выборки  $\Delta t = 0.3$ , что соответствует примерно 20 точкам на характерном периоде, если  $\omega_{1,2} = 1$ . Результаты не меняются при вариации  $\Delta t$  в широких пределах, что будет также проиллюстрировано ниже. Для исследования статистических свойств оценки  $\hat{\rho}$  используются ансамбли из  $M = 1000$  рядов.



На рис. 1 представлены семейства графиков, показывающие зависимость  $\langle \hat{\rho} \rangle$  от различных параметров при отсутствии нелинейности ( $b_{1,2} = 0$ ) и шумах  $\xi_{1,2}$  с интенсивностью  $\sigma$ :  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ . Значения частот определены через расстройку  $\Delta\omega$ :  $\omega_1 = 1 + (\Delta\omega/2)$ ,  $\omega_2 = 1 - \Delta\omega/2$ .

Рис. 1, *a* иллюстрирует зависимость  $\langle \hat{\rho} \rangle$  от длины ряда  $N$  при фиксированном небольшом уровне шума  $\sigma = 0.1$  и различных  $\Delta\omega$ . При недостаточной длине рядов разность фаз не успевает существенно измениться, что приводит к большому значению  $\langle \hat{\rho} \rangle$ , тогда как истинное значение  $\rho = 0$ . Так, при нулевой расстройке частот  $\langle \hat{\rho} \rangle > 0.75$  вплоть до  $N = 700$  (35 характерных периодов). С ростом  $\Delta\omega$  длина ряда, необходимая для того, чтобы  $\langle \hat{\rho} \rangle$  не превышало некоторого значения, сокращается, так как разность фаз нарастает быстрее.

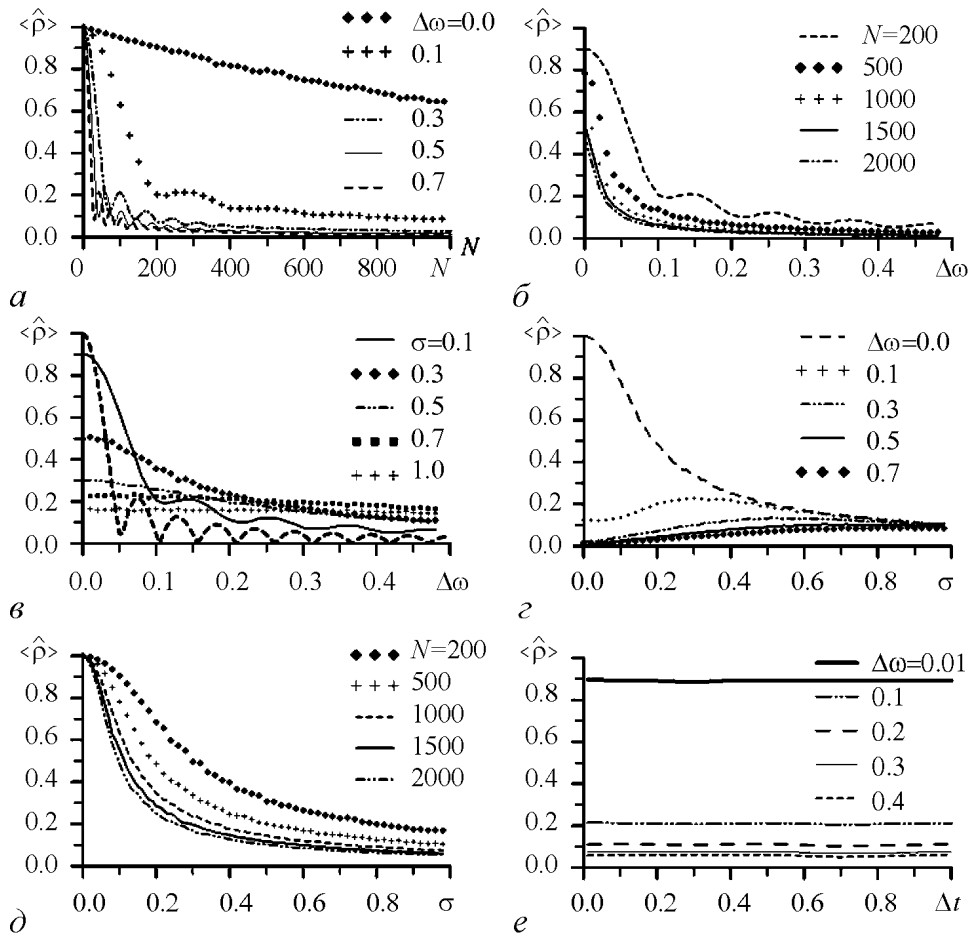


Рис. 1. Зависимости среднего значения оценки коэффициента синхронизации от различных параметров для фазовых осцилляторов (3) при  $b_{1,2} = 0$ : *a* – от длины ряда при различных расстройках частот, уровень шума  $\sigma = 0.1$ ; *b* – от расстройки частот при различных длинах ряда, уровень шума  $\sigma = 0.1$ ; *c* – от расстройки частот при различных уровнях шума, штриховая линия – аналитическая кривая для нулевого уровня шума, длина ряда  $N = 200$ ; *d* – от уровня шума при различных длинах ряда, расстройка частот  $\Delta\omega = 0$ ; *e* – от интервала выборки при различных расстройках частот, длина ряда  $N\Delta t = 60$ , уровень шума  $\sigma = 0.1$ ; (*a*–*d*) интервал выборки  $\Delta t = 0.3$ )

Последнее утверждение иллюстрирует рис. 1, б, где показаны зависимости  $\langle \hat{\rho} \rangle$  от расстройки частот при различных длинах ряда. При не слишком малой длине ряда величина  $\langle \hat{\rho} \rangle$  монотонно спадает с ростом  $\Delta\omega$ . На монотонное уменьшение накладываются заметные колебания при малой длине ряда: на рис. 1, б это длина  $N = 200$  (10 характерных периодов). Длина ряда, при которой становятся заметными эти колебания, зависит от уровня шума. Чем больше шум, тем менее заметны эти колебания. Это показано и на рис. 1, в, где представлены зависимости  $\langle \hat{\rho} \rangle$  от  $\Delta\omega$  при различных уровнях шума и  $N = 200$ .

Для  $\sigma = 0$  мы получили аналитическую формулу зависимости  $\langle \hat{\rho} \rangle$  от  $\Delta\omega$  следующим образом. Из-за отсутствия шума значение  $\hat{\rho}$  одинаково для всех временных реализаций системы и, следовательно, оно совпадает с  $\langle \hat{\rho} \rangle$ . Временные реализации фаз имеют вид  $\phi_{1,2}(t) = \phi_{1,2}(0) + \omega_{1,2}t$ . Предполагая, что интервал выборки значительно меньше периода колебаний, формулу (1) можно переписать в виде интеграла  $\hat{\rho} \approx \left| \frac{1}{N\Delta t} \int_0^{N\Delta t} e^{j(\Delta\phi(0) + \Delta\omega t)} dt \right|$ . Это приводит к зависимости  $\hat{\rho} = \sin(\Delta\omega N\Delta t) / (\Delta\omega N\Delta t)$ , график которой показан на рис. 1, в штриховой линией. На нем видны колебания, наложенные на спадающую кривую. При уменьшении  $\sigma$  до нуля зависимость  $\langle \hat{\rho} \rangle$  от  $\Delta\omega$  приближается к этому асимптотическому случаю.

Интересно, что графики  $\langle \hat{\rho} \rangle$  от  $\Delta\omega$  для различных уровней шума пересекаются друг с другом, то есть при малых расстройках частот  $\langle \hat{\rho} \rangle$  растет с уменьшением уровня шума, а при больших – наоборот. Это наглядно иллюстрирует рис. 1, з, где показаны зависимости  $\langle \hat{\rho} \rangle$  от уровня шума при  $N = 500$  и различных  $\Delta\omega$ . Такой характер зависимостей можно объяснить следующим образом. При малых  $\Delta\omega$  и малых шумах значение отдельной оценки  $\hat{\rho}$ , как правило, велико, так как разность фаз не успевает существенно измениться на длине ряда. С ростом шума вариации разности фаз растут, что ведет к уменьшению  $\langle \hat{\rho} \rangle$ . При больших  $\Delta\omega$  и малых шумах значение отдельной оценки  $\hat{\rho}$  близко к нулю, так как разность фаз практически равномерно нарастает и многократно «оборачивается», если ее свернуть на отрезок  $[0, 2\pi]$ . Рост уровня шума в таком случае приводит только к увеличению разброса значений  $\hat{\rho}$ , то есть к появлению случайных (хотя и редких) больших значений  $\hat{\rho}$ , и, следовательно, к некоторому (хотя и не сильному) увеличению  $\langle \hat{\rho} \rangle$ .

На рис. 1, з график, соответствующий  $\Delta\omega = 0.1$  (и близким значениям), имеет промежуточный характер:  $\hat{\rho}$  почти константа. Величина расстройки частот, при которой имеет место переход от убывающих к возрастающим зависимостям  $\langle \hat{\rho} \rangle$  от  $\sigma$ , определяется длиной ряда. Эта «критическая» расстройка уменьшается с ростом  $N$ , так как для более длинного ряда уже меньшая расстройка частот ведет к падению отдельной оценки  $\hat{\rho}$  почти до нуля, то есть ко второй из описанных зависимостей  $\langle \hat{\rho} \rangle$  от  $\sigma$ .

Зависимости  $\langle \hat{\rho} \rangle$  от  $\sigma$  при различных длинах ряда показаны на рис. 1, д для нулевой расстройки частот. В этом крайнем случае все они убывающие. С ростом длины ряда  $\langle \hat{\rho} \rangle$  монотонно приближается к нулю при любом фиксированном  $\sigma$ . Этого и следует ожидать, так как при наличии шума оценка по бесконечно длинному ряду соответствует расчету математического ожидания, то есть эквивалентности формул (1) и (2).

На рис. 1, е проиллюстрирована упомянутая выше слабая зависимость результатов от интервала выборки  $\Delta t$ . Изменения становятся заметными, только если

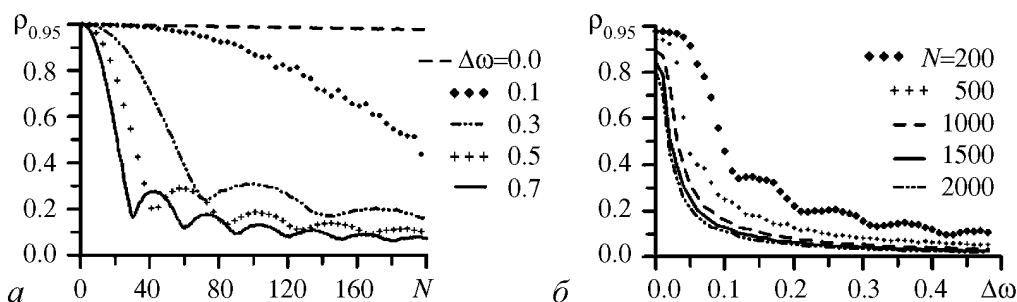


Рис. 2. Зависимости 95-процентного квантиля оценки коэффициента синхронизации от различных параметров для фазовых осцилляторов (3) при уровне шума  $\sigma = 0.1$  и  $b_{1,2} = 0$ :  $a$  – от длины ряда при различных расстройках частот;  $b$  – от расстройки частот при различных длинах ряда

интервал  $\Delta t$  не мал по сравнению с периодом колебаний и имеется нелинейность систем (не показано на графиках).

Мы подробно рассмотрели зависимости  $\langle \hat{\rho} \rangle$  от различных параметров, так как их проще анализировать и использовать для иллюстраций. С другой стороны, по ним можно судить приближенно и о характере изменений всего закона распределения оценки  $\hat{\rho}$  при изменении различных параметров. На практике же важно оценить статистическую значимость отличия  $\hat{\rho}$  от нуля. Для этого необходимо рассчитать квантиль распределения  $\hat{\rho}$ . Удобно использовать описанный выше  $\rho_{0.95}$ . На рис. 2,  $a$ ,  $b$  (сравните с рис. 1,  $a$ ,  $b$ ) показано, что зависимости  $\rho_{0.95}$  от параметров качественно те же, что и зависимости  $\langle \hat{\rho} \rangle$  от тех же параметров. Отличаются численные значения  $\rho_{0.95}$ , которые превышают значения  $\langle \hat{\rho} \rangle$ . Эти численные значения и могут использоваться для проверки статистической значимости рассчитанной оценки  $\hat{\rho}$  при соответствующей длине ряда, интервале выборки, интенсивности шума и расстройке частот.

При этом важно оценить влияние параметров нелинейности на величину  $\rho_{0.95}$ . Рис. 3 показывает зависимости  $\rho_{0.95}$  от  $\Delta\omega$  при различных нелинейностях  $b$ :  $b_1 = b_2 = b$ . В данном диапазоне  $\Delta\omega$  величина  $\rho_{0.95}$  практически не зависит от  $b$  вплоть до значения  $b = 0.4$ . При  $b = 0.5$  некоторая зависимость наблюдается только при  $\Delta\omega \approx 0.45$ , то есть когда одна из частот становится равной 0.775 (приближается к значению  $b$ ). Однако при этом осциллятор демонстрирует поведение, резко отличное от случая малой нелинейности: зависимость фазы от времени становится «ступенчатой», чередуются интервалы примерного постоянства фазы и быстрые скачки на  $2\pi$ . Такую ситуацию легко диагностировать визуально. Если она не наблюдается, то почти отсутствует и зависимость  $\rho_{0.95}$  от параметров нелинейности, а следовательно, можно использовать результаты, полученные для линейных осцилляторов (напри-

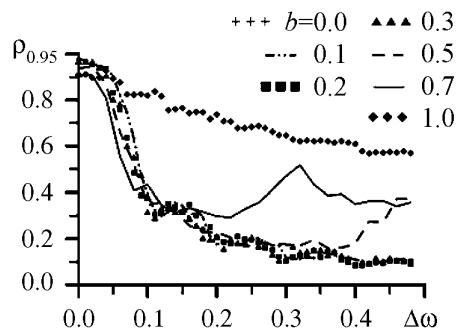


Рис. 3. Зависимости 95-процентного квантиля оценки коэффициента синхронизации от расстройки частот для фазовых осцилляторов (3) при различных значениях параметра нелинейности  $b$ . Длина ряда  $N = 500$ , уровень шума  $\sigma = 0.1$

мер, приведенные на рис. 1) для проверки статистической значимости оценки  $\hat{\rho}$ . Это же наблюдение обосновывает и применимость описанных трех методов получения суррогатных данных (п. 2). Качественно зависимости  $\langle \hat{\rho} \rangle$  и  $\rho_{0.95}$  от различных параметров при  $b$ , не превышающем значения 0.4–0.5, не отличаются от случая линейных осцилляторов (графики не приводятся).

Предложенный нами метод приготовления суррогатных данных (метод III) заменяет необходимость построения полного каталога значений  $\rho_{0.95}$ . Мы сравнили его с методами I и II на примере системы двух осцилляторов ван дер Поля

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} - \mu(1 - x_1^2) \frac{dx_1}{dt} + \omega_1^2 x_1 &= k(x_2 - x_1) + \xi_1(t), \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} - \mu(1 - x_2^2) \frac{dx_2}{dt} + \omega_2^2 x_2 &= k(x_1 - x_2) + \xi_2(t), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\mu = 0.2$ ,  $\omega_1 = 1.02$ ,  $\omega_2 = 0.98$ ,  $\xi_{1,2}$  – белые шумы с  $\sigma_{1,2} = 0.2$ . Параметр связи  $k$  меняется от нуля до больших значений. При каждом значении  $k$  мы генерировали ансамбль из 100 временных рядов системы (4). Интервал выборки  $\Delta t = \pi/10$ , длина каждого ряда  $N = 10000$ . Реализации фаз получали с помощью преобразования Гильберта [1, 2]. По каждому из рядов рассчитывалось значение оценки  $\hat{\rho}$  и проверялась его значимость на уровне  $p = 0.05$ . Затем рассчитывалась доля временных рядов, для которых оценка  $\hat{\rho}$  признана значимой. Обозначим ее  $r$ . При нулевой связи  $r$  есть число ложных выводов об отличии  $\rho$  от нуля, то есть о наличии связи. Если он не превосходит уровня 0.05, то метод работает корректно, так как уровень значимости и определяет число случайных ошибок. Для ненулевого  $k$  величина  $r$  есть число правильных выводов о наличии связи. Чем больше число правильных выводов, тем чувствительнее метод.

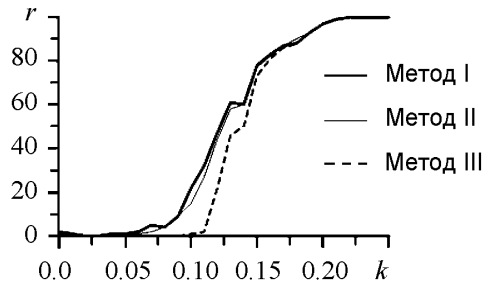


Рис. 4. Вероятности вывода о наличии значимой связи между осцилляторами ван дер Поля (4) в зависимости от коэффициента связи для трех методов приготовления суррогатных данных

этого рассмотрения можно предложить и некоторые рекомендации по их применению. Метод II следует использовать вместо метода I при обработке больших объемов данных, так как тасование с замещением реализуется быстрее (п. 2). Однако метод III более адекватно учитывает возможные вариации оценки угловой частоты и более адекватно отражает статистические свойства ансамбля реализаций. Поэтому результаты применения метода II полезно выборочно проверять с использованием метода III. В случае адекватности линейной модели (3) оба метода должны давать примерно одинаковые результаты. Существенные различия свидетельствуют о нарушении этого условия и возможной некорректности всех трех методов. Тогда следует

На рис. 4 показаны зависимости  $r(k)$  для трех методов приготовления суррогатных данных. Все три метода дают вероятность ложных выводов не более 0.05 при нулевой связи. Для всех методов  $r(k)$  одновременно достигает большого значения 0.9 при  $k = 0.18$ . Некоторые различия имеют место в промежуточном случае, когда метод III несколько менее чувствителен. Однако эти различия не велики. Таким образом, для проверки значимости  $\hat{\rho}$  одинаково пригодны все три подхода. На основе

проводить более тщательный анализ, например, методом III с учетом фазовой нелинейности. Эта возможность является преимуществом предложенного метода, так как не ясно, как учесть нелинейность в методах I и II.

### Выводы

Практическая важность обнаружения явления синхронизации и определения его характеристик обуславливает необходимость получения надежных оценок коэффициентов синхронизации по наблюдаемым данным. При этом в большинстве ситуаций, например, в биомедицинских и геофизических приложениях, приходится иметь дело с короткими сигналами. В таком случае велика вероятность получить большое значение оценки для несвязанных систем и ошибочно истолковать его как характеристику существующей связи систем, а не как результат флуктуаций.

В работе на простой и универсальной модели автоколебательных систем – фазовых осцилляторах – подробно исследованы свойства оценки (2) одного из широко используемых коэффициентов фазовой синхронизации (1). Продемонстрированы количественные условия, при которых наблюдаются большие (близкие к единице) значения оценки. Показан характер зависимости свойств оценки от различных параметров и даны объяснения.

На основе проведенных расчетов составлен каталог некоторых избранных значений 95-процентного квантиля распределения оценки для проверки статистической значимости результатов оценивания на практике, что отчасти иллюстрирует рис. 2. В качестве более удобного подхода, реализующего ту же идею, предложен новый метод получения суррогатных данных, основанный на построении эмпирической модели в виде фазовых осцилляторов (3) для конкретного наблюдаемого ряда. Работоспособность метода показана на численном примере. Предложенный метод дополняет известные методы [15, 16], так как более адекватно воспроизводит свойства ансамбля временных реализаций фаз несвязанных автоколебательных систем [18]. Полученные результаты позволяют получать оценки коэффициента синхронизации на практике с более надежным контролем значимости результатов.

Исследование проведено для синхронизации на основном тоне (синхронизации 1:1). Однако степень общности рассмотрения больше, так как оценки синхронизации более высоких порядков (синхронизации  $n : m$ ) могут быть рассмотрены полностью аналогично лишь с заменой формул (1) и (2) на соответствующие формулы. Характер зависимостей свойств оценки от параметров систем при этом не меняется.

Е. Сидак благодарит А.С. Караваева и Т.В. Диканева за обсуждения.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 07-05-00381, 08-02-00081) и программы Президиума РАН.*

### Библиографический список

1. Пиковский А.С., Розеблум М.Г., Куртс Ю. Синхронизация: фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера. 2002.
2. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е. и др. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

3. *Tass P.A.* Phase resetting in medicine and biology – stochastic modelling and data analysis. Berlin: Springer, 1999.
4. *Kazantsev V.B., Nekorkin V.I., Makarenko V.I., Llinas R.* Olivo-cerebellar cluster-based universal control system // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 2003. Vol. 100, № 22. P. 13064.
5. *Lopes da Silva F., Blanes W., Kalitzin S.N., Parra J., Suffczynsky P., Velis D.N.* Epilepsies as dynamical diseases of brain systems: Basic models of the transition between normal and epileptic activity // Epilepsia. 2003. Vol. 44 (suppl. 12). P. 72.
6. *Tass P.A.* A model of desynchronizing deep brain stimulation with a demand-controlled coordinated reset of neural subpopulations // Biological Cybernetics. 2003. Vol. 89. P. 81.
7. *Janson N.B., Balanov A.G., Anishchenko V.S., Mc-Clintock P.V.E.* Phase Synchronization between Several Interacting Processes from Univariate Data // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 86. P. 1749.
8. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D.* Detection of synchronization from univariate data using wavelet transform // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 75. 056207.
9. *Maraun D., Kurths J.* Epochs of phase coherence between El Nino/Southern Oscillation and Indian monsoon // Geophys. Res. Lett. 2005. Vol. 32. L15709, doi: 10.1029/2005GL023225.
10. *Kraskov A.* Synchronization and interdependence measures and their applications to the electroencephalogram of epilepsy patients and clustering of data. Dissertation (PhD thesis). Research Centre Juelich, John von Neumann Institute for Computing (NIC Series. Vol. 24), 2004. 90 p.  
<http://www.fz-juelich.de/nic-series/volume24/nic-series-band24.pdf>.
11. *Mormann F., Andrzejak R.G., Kraskov A., Lehnertz K., Grassberger P.* Measuring synchronization in coupled model systems: A comparison of different approaches // Physica D. 2007. Vol. 225. P. 29.
12. *Mormann F., Lehnertz K., David P., Elger C.E.* Mean phase coherence as a measure for phase synchronization and its application to the EEG of epilepsy patients // Physica D. 2000. Vol. 144. P. 358.
13. *Allefeld C., Kurths J.* Testing for phase synchronization // Int. J. Bif. Chaos. 2004. Vol. 14, № 2. P. 405.
14. *Schreiber T., Schmitz A.* Surrogate time series // Physica D. 2000. Vol. 142. P. 346.
15. *Brea J., Russell D.F., Neiman A.B.* Measuring direction in the coupling of biological oscillators: A case study for electroreceptors of paddlefish // Chaos. 2006. Vol. 16. 026111.
16. *Romano M.C., Thiel M., Kurths J., Rolfs M., Engbert R., Kliegl R.* Synchronization analysis and recurrence in complex systems // Handbook of time series analysis / Eds B. Chelton, M. Wuntherhalder, J. Timmer. Weinheim: Wiley-VCH Verlag, 2006.
17. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* Phase synchronization in regular and chaotic systems // Int. J. Bifurc. Chaos. 2000. Vol. 10, № 10. P. 2291.
18. *Dolan K.T., Spano M.L.* Surrogate for nonlinear time series analysis // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64, № 4. P. 046128.

*Саратовский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 14.11.2007*

## STATISTICAL PROPERTIES OF PHASE SYNCHRONIZATION COEFFICIENT ESTIMATOR

*D.A. Smirnov, E.V. Sidak, B.P. Bezruchko*

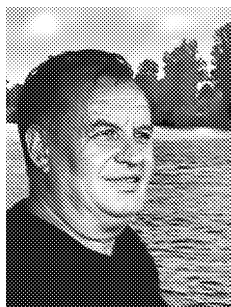
A phase synchronization coefficient estimate, obtained from a time series, can take a high value even for uncoupled oscillators in the case of short signals and close basic frequencies. Since such situations are widespread in practice, it is necessary to detect them to avoid false conclusions about the presence of coupling. We investigate statistical properties of the estimator with the use of an exemplary system – uncoupled phase oscillators. Conditions leading to high probability to get big values of the estimator are determined quantitatively. Based on the performed analysis, we suggest a special technique for surrogate data generation to control statistical significance of the estimation results.



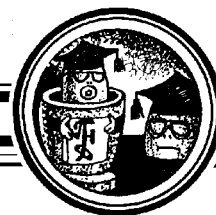
*Смирнов Дмитрий Алексеевич* – родился в 1977 году, окончил факультет нелинейных процессов Саратовского госуниверситета (1999), защитил кандидатскую диссертацию (2001). Старший научный сотрудник СФ ИРЭ РАН. Опубликовал более 30 статей в научных журналах и (в соавторстве с Б.П. Безручко) монографию «Математическое моделирование и хаотические временные ряды» (Саратов, ГосУНЦ «Колледж», 2005, 320 с.). Область научных интересов: теория колебаний и волн, теория динамических систем, анализ временных рядов, математическое моделирование сложных систем по данным наблюдений.



*Сидак Елена Владимировна* – родилась в 1987 году, студентка 3-го курса факультета nano- и биомедицинских технологий Саратовского госуниверситета. Автор и соавтор 1 научной статьи и 10 докладов на конференциях. Область научных интересов: анализ временных рядов.



*Безручко Борис Петрович* – родился в 1946 году. Окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1969). Доктор физико-математических наук (1995). Заведующий кафедрой биомедицинской инженерии и динамического моделирования Саратовского госуниверситета, заведующий лабораторией моделирования в нелинейной динамике СФ ИРЭ РАН. Опубликовал более 100 статей в научных журналах и 2 монографии (в соавторстве). Область научных интересов: радиофизика и электроника, нелинейная динамика, моделирование по временным рядам с приложением к задачам физиологии и медицинской диагностики, физический эксперимент.



## ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПЕРЕХОДА К ВРЕМЕННОМУ ХАОСУ В АКТИВНОЙ СРЕДЕ С ОДНОНАПРАВЛЕННОЙ СВЯЗЬЮ\*

*С.В. Астахов, Т.Е. Вадивасова, В.С. Анищенко*

В данной работе предлагается новая модель непрерывной активной среды со связью вниз по потоку, в которой активным элементом является генератор с инерционной нелинейностью. В среде реализуются как регулярные, так и хаотические во времени режимы. Результаты исследований сопоставляются с результатами, полученными для цепочки генераторов Анищенко–Астахова. Анализируется вопрос соответствия дискретной модели и непрерывной среды.

### Введение

На сегодняшний день существует обширная научная литература, посвященная исследованию регулярной и хаотической динамики нелинейных активных сред (см., например, [1–8]). При исследовании активных сред особый интерес представляют распределенные системы, активные элементы которых способны демонстрировать хаотическое поведение. Исследования таких систем, как правило, проводятся с использованием моделей, представляющих собой дискретные по пространству или по времени, или и по пространству и по времени, цепочки [2, 3, 5], [9–12]. В таких моделях найден интересный эффект – пространственные бифуркации удвоения периода. Однако пока не была предложена непрерывная по пространству и времени модель активной среды, в которой можно наблюдать пространственный каскад бифуркаций удвоения периода.

В данной работе мы предлагаем такую модель активной среды с *аддитивной* связью вниз по потоку, в которой можно наблюдать переход к хаосу вниз по потоку через последовательность пространственных бифуркаций удвоения периода.

В качестве прототипа мы выбрали модель, рассмотренную в [9, 10] – цепочку однонаправленно связанных генераторов с инерционной нелинейностью.

\*По материалам доклада на Школе «ХАОС–2007», Саратов, 9–14.10.2007.



## 1. Построение модели активной среды

Рассмотрим уравнения цепочки идентичных генераторов с инерционной нелинейностью Анищенко–Астахова с аддитивной однонаправленной связью [9]

$$\begin{cases} \dot{x}_j = mx_j + y_j - x_j z_j + \gamma x_{j-1}, \\ \dot{y}_j = -x_j, \\ \dot{z}_j = -gz_j + gI(x_j)x_j^2, \end{cases} \quad I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь нижний индекс означает номер активного элемента в цепочке,  $m$  и  $g$  – управляющие параметры парциального генератора,  $\gamma$  – коэффициент связи между соседними элементами. От системы обыкновенных дифференциальных уравнений можно перейти к системе уравнений в частных производных следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x}_j = (m + \gamma)x_j + y_j - x_j z_j - \gamma(x_j - x_{j-1}), \\ \dot{y}_j = -x_j, \\ \dot{z}_j = -gz_j + gI(x_j)x_j^2. \end{cases} \quad (2)$$

Полагаем  $x_j - x_{j-1} \approx \partial x(l)/\partial l \cdot h$ , где  $h$  – «размер элемента»,  $l$  – непрерывная пространственная координата. Устремляя «размер элемента» к нулю, перейдем от индекса к пространственной переменной:  $x_j(t) \rightarrow x(l, t)$ ,  $y_j(t) \rightarrow y(l, t)$ ,  $z_j(t) \rightarrow z(l, t)$ . В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = (m + \gamma)x + y - xz - \gamma h \frac{\partial x}{\partial l}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} = -x, \\ \frac{\partial z}{\partial t} = -gz + gI(x)x^2. \end{cases} \quad (3)$$

Обозначив

$$-\gamma h = \varepsilon, \quad M = m + \gamma, \quad (4)$$

получим окончательные уравнения среды

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = Mx + y - xz + \varepsilon \frac{\partial x}{\partial l}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} = -x, \\ \frac{\partial z}{\partial t} = -gz + gI(x)x^2. \end{cases} \quad (5)$$

Однако в такой среде нельзя ожидать существования сложных пространственно неоднородных режимов по следующей причине. Мы прибегли к замене (4) чтобы уйти от явного использования величины  $h$ , соответствующей бесконечно малому «размеру» активных элементов. При этом условием конечности величины  $\varepsilon$  будет  $\gamma \rightarrow -\infty$ , а  $m \rightarrow \infty$  – условием конечности  $M$ . Таким образом, среде (5) соответствует дискретная по пространству система (1) с бесконечными значениями управляющего параметра и коэффициента связи, следовательно, среда (5) не может служить корректным непрерывным аналогом дискретной по пространству системы (1).

Попытаемся использовать другой подход к введению связи в пространственно распределенной системе. Будем исходить из того, что в реальных средах всегда взаимодействуют не только соседние (бесконечно близкие) элементы, но и элементы, удаленные друг от друга на достаточно малое, но конечное расстояние. Тогда, переходя в системе (1) от индексов к пространственным переменным  $x_j(t) \rightarrow u(x, t)$ ,  $y_j(t) \rightarrow v(x, t)$ ,  $z_j(t) \rightarrow w(x, t)$ , получим

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = mu(x, t) + v(x, t) - u(x, t)w(x, t) + \gamma \int_0^x H(x', x)u(x', t)dx', \\ \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = -u(x, t), \\ \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = -gw(x, t) + gI(u(x, t))u(x, t)^2, \end{cases} \quad (6)$$

где  $H(x', x)$  – некоторая функция, определяющая характер взаимодействия элементов среды с координатами  $x$  и  $x'$ . Соответствие с цепочкой (1), скажем, из 10 элементов, должно достигаться при

$$H(x', x) = \begin{cases} 1, & x - x' \leq 0.1, \\ 0, & x - x' > 0.1 \end{cases} \quad (7)$$

в случае среды единичной длины. Представляется интересным сравнить результаты, полученные для цепочки, с результатами интегрирования среды, уменьшая шаг дискретизации по пространству. Однако прежде следует выбрать численную схему интегрирования и подобрать параметры, позволяющие получить стационарное решение.

Для решения системы уравнений в частных производных (6) можно воспользоваться несколькими различными подходами. Наиболее простым и явным представляется использование обычного конечно-разностного метода

$$\begin{cases} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} = mu_{i,j} + v_{i,j} - u_{i,j}w_{i,j} + \\ \quad + \gamma \sum_{k=0}^i H(\Delta x \cdot k, \Delta x \cdot i)u_{k,j} \cdot \Delta x, \\ \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta t} = -u_{i,j}, \\ \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{\Delta t} = -gw_{i,j} + gI(u_{i,j})u_{i,j}^2, \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} u_{i,j+1} = u_{i,j} + \Delta t \cdot \left[ mu_{i,j} + v_{i,j} - u_{i,j}w_{i,j} + \right. \\ \quad \left. + \gamma \sum_{k=0}^i H(\Delta x \cdot k, \Delta x \cdot i)u_{k,j} \cdot \Delta x \right], \\ v_{i,j+1} = v_{i,j} - \Delta t \cdot u_{i,j}, \\ w_{i,j+1} = w_{i,j} + \Delta t \cdot \left[ -gw_{i,j} + gI(u_{i,j})u_{i,j}^2 \right]. \end{cases} \quad (9)$$

Однако такой метод имеет ряд недостатков, наиболее ощутимым из которых является условие устойчивости

$$\Delta t \ll \Delta x, \quad (10)$$

поскольку системе требуется достаточно большое время релаксации к стационарному режиму, и при достаточно малом пространственном шаге (например,  $\Delta x = 0.001$ ) время счета оказывается слишком продолжительным.

Чтобы обойти требование (10) при численном решении системы (6), можно представить ее в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений и решать новую систему, например, методом Рунге–Кутты. Число элементов в системе будет зависеть от шага пространственного разбиения, а сам шаг будет входить в уравнения в виде параметра

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du_i(t)}{dt} = mu_i(t) + v_i(t) - u_i(t)w_i(t) + \\ \quad + \gamma \sum_{k=0}^i H(\Delta x \cdot k, \Delta x \cdot i) u_k(t) \cdot \Delta x, \\ \frac{dv_i(t)}{dt} = -u_i(t), \\ \frac{dw_i(t)}{dt} = -gw_i(t) + gI(u_i(t))u_i^2(t). \end{array} \right. \quad (11)$$

Заметим, что системы (1) и (11) не тождественны. Более того, они принципиально различны: во-первых, в (11) в качестве параметра входит шаг пространственной дискретизации; во-вторых, связь, введенная в (11), не локальна и количество взаимодействующих элементов зависит от величины  $\Delta x$ . Цепочку (1) можно рассматривать как частный случай (11) с шагом  $\Delta x = 0.1$  и функцией связи (7).

Таким образом, следует ожидать различия в результатах, полученных для систем (1) и (6) с функцией связи (7) и пространственным шагом  $\Delta x < 0.1$ . Тем не менее можно предположить их качественное сходство: наличие пространственных бифуркаций удвоения периода.

## 2. Результаты численного моделирования

Графическое представление пространственно-временной динамики модели, как правило, осуществляется путем построения поверхности в трехмерном пространстве. Однако такие поверхности не позволяют наглядно проиллюстрировать пространственный переход от периодических колебаний к хаотическим. На наш взгляд, наиболее удобным для наблюдения пространственного развития хаоса представляется рассмотрение следующего сечения. На плоскости  $(x, u)$  ставится точка с координатами  $(x_0, u(t_0, x_0))$ , если  $v(t_0, x_0) = 0$  в данный момент времени  $t_0$ . Таким образом, если в данной точке пространства активный элемент совершает периодические колебания, то отображение в этой точке будет состоять из конечного числа изолированных точек. Если же движения активного элемента непериодичны, то отображение будет представлено множеством размерности  $0 < d \leq 1$ , то есть множеством непрерывных отрезков или множеством дробной размерности. Такое отображение очень похоже на сечение Пуанкаре, однако, строго говоря, оно таковым не является, поскольку рассматриваемая система бесконечномерна.

На рис. 1 представлены примеры сечений для различных величин пространственного шага и времени установления. Значения параметров в системе (6) были выбраны следующим образом:  $m = 0.85$ ,  $g = 0.65$ ,  $\gamma = 5.2$ .

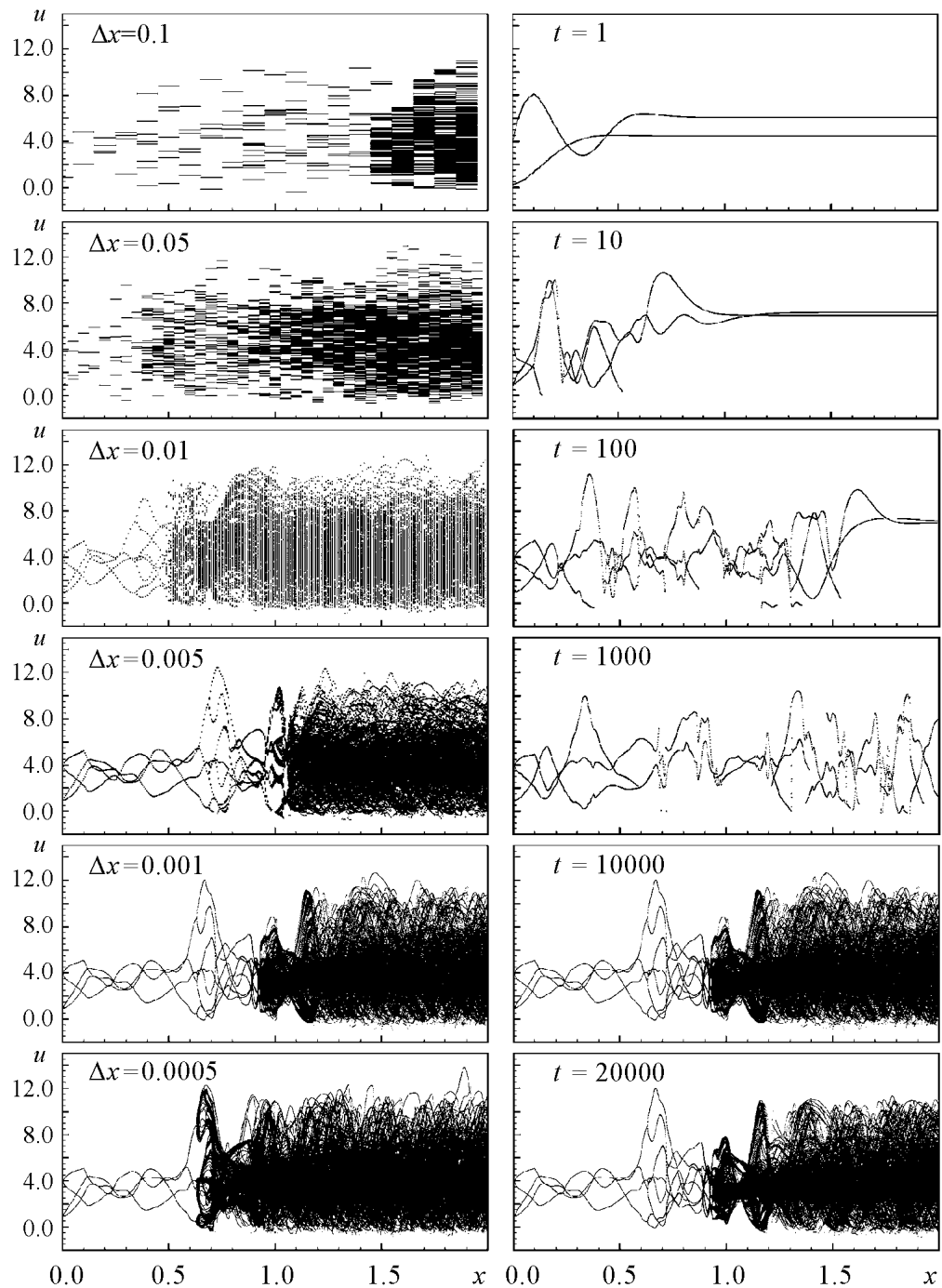


Рис. 1. Подбор времени установления стационарного процесса  $t$  и шага  $\Delta x$ . Представлены сечения  $v(t_0, x_0) = 0$  для различных точек среды в фиксированный момент времени  $t = 10000$  (левая колонка) и при фиксированном значении шага  $\Delta x = 0.001$  (правая колонка)

Возникает вопрос, при каких параметрах численной схемы рассматриваемая модель демонстрирует свойства непрерывной среды. Подберем величины пространственного шага и времени установления стационарного процесса таким образом, что их дальнейшее изменение (уменьшение шага и увеличение времени) не сказывается на наблюдаемом режиме функционирования системы.

Как видно из рис. 1, оптимальными являются значения пространственного шага  $\Delta x = 0.001$  и времени установления стационарного процесса  $T = 10000$  единиц безразмерного времени. Действительно, рассмотрим, например, координату второй пространственной бифуркации удвоения периода. Можно считать, что при  $\Delta x < 0.005$  она сходится к постоянному значению, практически не меняющемуся с дальнейшим уменьшением  $\Delta x$  (рис. 2).

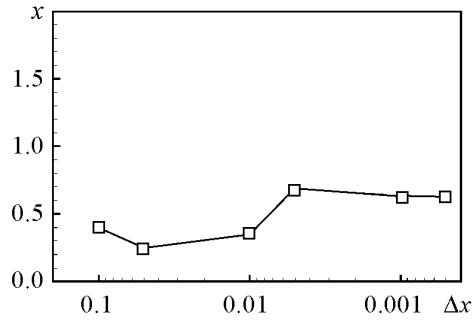


Рис. 2. Установление координаты  $x$  второго удвоения периода при уменьшении шага пространственной дискретизации  $\Delta x$

Сравним режимы, демонстрируемые системой (6) для двух значений шага пространственной дискретизации:

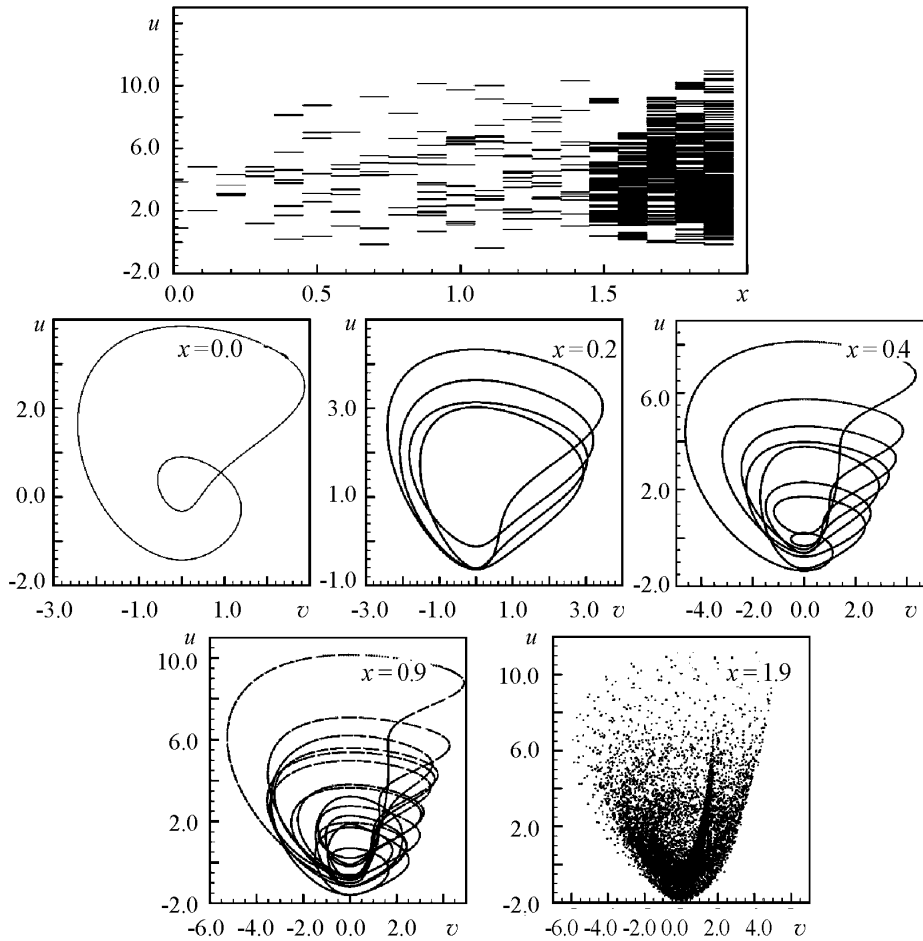


Рис. 3. Бифуркации удвоения периодов вдоль цепочки (1), где  $m = 0.85$ ,  $g = 0.65$ ,  $\gamma = 5.2$ . Для удобства сравнения поведения цепочки из 20 элементов с поведением среды (6) элементы цепочки были расположены вдоль оси  $x$  таким образом, что первый элемент находился в точке  $x = 0$ , последний – в  $x = 1.9$ , а расстояние между соседними элементами было  $\Delta x = 0.1$

$\Delta x = 0.1$  и  $\Delta x = 0.001$ . В первом случае из модели (11) с учетом (7) приходим к цепочке (1) из 20 осцилляторов. Аналогичная цепочка из 10 генераторов рассмотрена в [9] и в ней обнаружены пространственные бифуркации удвоения периода. Мы выбрали другие значения управляющих параметров, тем не менее система по-прежнему демонстрирует усложнение колебательных режимов вдоль цепочки (пространственные удвоения периодов), заканчивающееся хаосом (см. рис. 3). Следует также отметить в среднем монотонное нарастание вдоль цепочки размера области, ограничивающей аттрактор в отображении.

Во втором случае (при  $\Delta x = 0.001$ ) мы уже имеем дело с непрерывной активной средой. Результаты, представленные на рис. 4, свидетельствуют о наличии

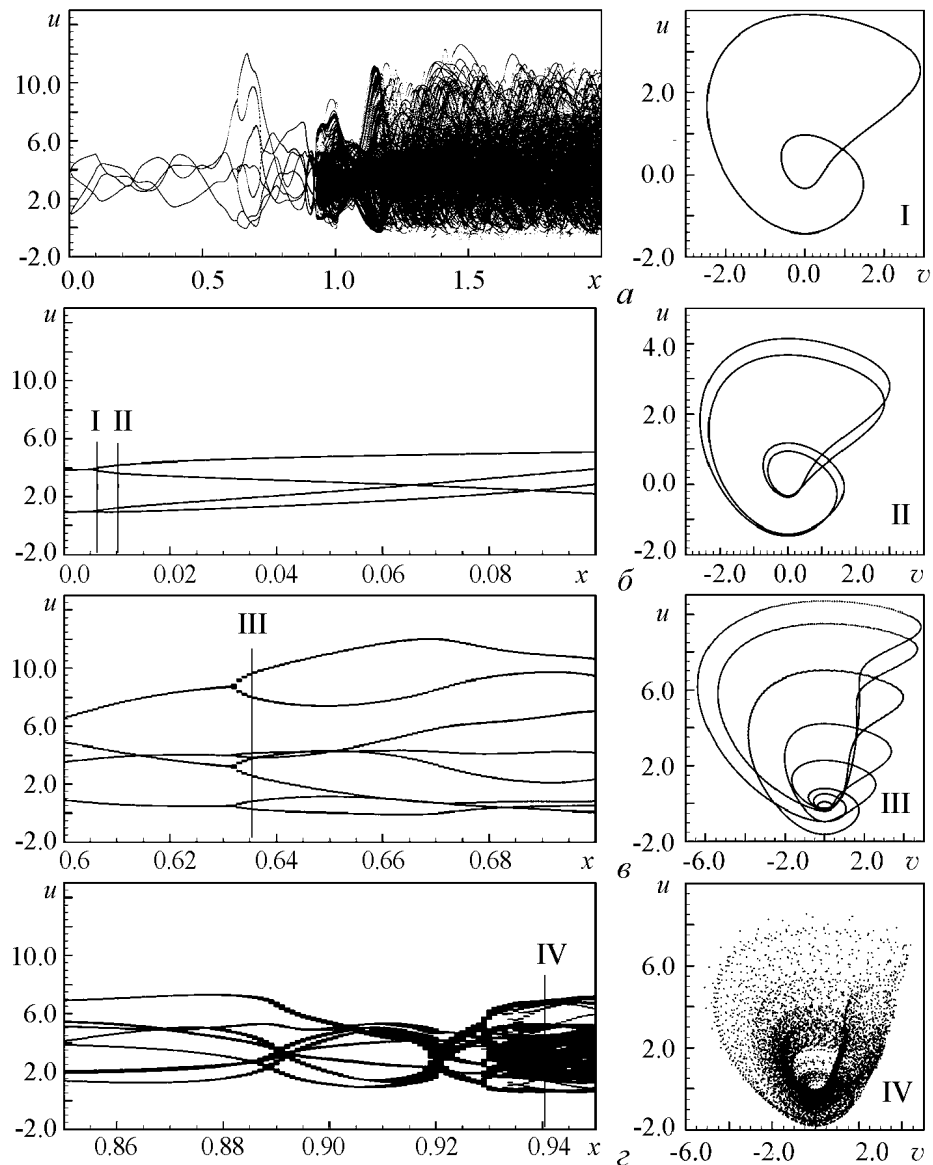


Рис. 4. Пространственные бифуркации удвоения периода колебаний вдоль среды (5). Слева представлены увеличенные фрагменты сечения  $v(t_0, x_0) = 0$  в окрестности бифуркаций, справа – проекции фазовых портретов колебаний в точках пространства перед бифуркацией и после нее

пространственных бифуркаций удвоения периода в системе (6). Причем мы можем говорить о координатах бифуркаций – точках на оси  $x$ , в которых наблюдается плавный переход от неподвижной точки (во введенном нами отображении) кратности  $k$  к неподвижной точке кратности  $2k$ . В отличие от цепочки, средняя амплитуда колебаний в среде вначале нарастает вдоль координаты  $x$  (перед вторым удвоением), затем убывает и вновь нарастает до некоторого значения, в окрестности которого и остается.

### Заключение

Итак, в данной работе мы предложили математическую модель в виде системы интегродифференциальных уравнений в частных производных непрерывной по пространству и времени системы, демонстрирующей переход к хаосу через последовательность пространственных бифуркаций удвоения периода. Мы показали, что с уменьшением шага пространственной дискретизации при интегрировании системы решения сходятся к некоторому асимптотическому режиму, соответствующему поведению непрерывной активной среды.

Предложенная модель демонстрирует пространственные бифуркации удвоения периода. Модель позволяет локализовать в пространстве точки бифуркаций, что продемонстрировано в численном эксперименте.

*Работа выполнена при поддержке гранта в рамках программы Министерства Образования и Науки РФ «Развитие научного потенциала высшей школы на 2006–2008 годы».*

### Библиографический список

1. Kuramoto Y. Chemical oscillations, waves and turbulence. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
2. Gaponov-Grekhov A.V., Rabinovich M.I. Dynamical chaos in ensembles of structures and spatial development of turbulence in unbounded systems / Ed. W. Ebeling. New York: Springer, 1986.
3. Kaneko K. Spatiotemporal chaos in one- and two- dimensional coupled map lattices // Physica D. 1989. Vol. 32. P. 60.
4. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. Москва: Наука, 1990.
5. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. Критическая динамика решеток связанных отображений у порога хаоса // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34, № 10–12. С. 1079.
6. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. Москва: Наука, 1997.
7. Bohr T., Jensen M.H., Paladin G., Vulpiani A. Dynamical systems approach to turbulence. New York: Cambridge University, 1998.
8. Aranson I.S., Kramer L. The world of the complex Ginzburg–Landau equation // Rev. Mod. Phys. 2002. Vol. 74. P. 99.
9. Anishchenko V.S. Auto-oscillatory regimes in the chain of coupled generators // Self-organization by Nonlinear Irreversible Processes. Proceedings of the Third International Conference, Kühlungsborn, GDR, March 18–22, 1985. Berlin: Springer-Verlag, 1986. P. 198.

10. *Анищенко В.С., Арансон И.С., Постнов Д.Э., Рабинович М.И.* Пространственная синхронизация и бифуркации развития хаоса в цепочке связанных генераторов // ДАН СССР. 1986. Т. 28, № 5. С. 1120.
11. *Kaneko K.* Collapse of Tori and Genesis of Chaos in Dissipative Systems. Singapore: World Scientific, 1986.
12. *Pikovsky A.S.* Discrete model of spatially mixing system // Physics Letters A. 1992. Vol. 168. P. 276.
13. *Rudzick O., Pikovsky A.* Unidirectionally coupled map lattice as a model for open flow systems// Physical Review E. 1996. Vol. 54, № 5. P. 5107.

*Саратовский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 4.12.2007  
После доработки 25.02.2008*

### STUDYING OF SPATIAL TRANSITION TO TEMPORAL CHAOS IN ACTIVE MEDIUM WITH UNIDIRECTIONAL COUPLING

*S.V. Astakhov, T.E. Vadivasova, V.S. Anishchenko*

In the work a new model of a continuous active medium with unidirectional coupling of active elements is proposed. The Anishchenko–Astakhov oscillator was selected as an active element. The model shows both regular and chaotic in time regimes. The results obtained for the medium are compared with the results for a chain of Anishchenko–Astakhov oscillators. The problem of conformity between the discrete model and the continuous medium is analyzed.



*Астахов Сергей Владимирович* – родился в Саратове (1984). Окончил физический факультет Саратовского университета по специальности радиофизика и электроника (2006). Поступил в аспирантуру по специальности «Радиофизика» (2007). Область научных интересов: хаос в сосредоточенных и распределенных системах, статистические характеристики хаоса, динамика систем с задержкой.



*Вадивасова Татьяна Евгеньевна* – родилась в 1958 году. Окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981), доктор физико-математических наук. В настоящее время – профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических осцилляторов, явление фазовой мультистабильности взаимодействующих хаотических систем, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, статистические характеристики динамического хаоса, роль флуктуаций в нелинейных системах и др. Автор более 60 публикаций в отечественной и зарубежной печати, включая 3 монографии. E-mail: [tanya@chaos.ssu.runnet.ru](mailto:tanya@chaos.ssu.runnet.ru)





## СИНХРОНИЗАЦИЯ ДВУХ СВЯЗАННЫХ КЛИСТРОННЫХ АВТОГЕНЕРАТОРОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ\*

*Б.С. Дмитриев, Ю.Д. Жарков, В.Н. Скороходов, А.М. Геншафт*

Приводятся результаты экспериментального исследования синхронизации двух связанных почти идентичных резонансных СВЧ-автогенераторов на многорезонаторных клистронах в режимах периодических и хаотических колебаний. Показано, что в зависимости от характера связи в этих автогенераторах можно осуществить режим взаимного захвата частоты генерации, синхронизацию путем полного подавления хаоса внешним гармоническим сигналом, режим полной синхронизации. Показана возможность использования эффекта подавления хаоса для генерации последовательности хаотических радиоимпульсов.

### Введение

Синхронизация автоколебательных систем, включая хаотическую синхронизацию, давно привлекает внимание исследователей [1]. В настоящее время предметом интенсивных исследований стали проблемы генерации и подавления хаотических колебаний, их взаимодействия и синхронизации с целью практического применения детерминированного хаоса [2]. В частности, большой интерес вызывают различные типы хаотического синхронного поведения связанных динамических систем с целью использования хаотических колебаний как в системах передачи и обработки информации [3], так и при управлении системами сверхвысокочастотной электроники [4]. Хаотические колебания могут использоваться и в шумовом радаре [5].

Для этих приложений весьма перспективными представляются резонансные автогенераторы СВЧ-диапазона с запаздыванием на основе многорезонаторных клистронов, отличающихся высоким уровнем мощности и КПД. Исследование сложной динамики таких автогенераторов представлено в работах [6–8].

В настоящей работе приведены результаты экспериментальных исследований синхронизации двух связанных СВЧ-автогенераторов на многорезонаторных клистронах в режимах периодических и хаотических колебаний при однонаправленной связи и при взаимной связи.

\*По материалам доклада на Школе «ХАОС–2007», Саратов, 9–14.10.2007.

## 1. Описание установки

Решение сформулированных задач потребовало разработки универсальной измерительной установки, позволяющей реализовать разнообразные режимы синхронизации. На рис. 1 приведена схема измерительной установки.

Каждый автогенератор (K1) и (K2) создан на основе промышленного пятирезонаторного клистрона десятисантиметрового диапазона длин волн среднего уровня мощности. В клистронах использованы двухззорные объемные резонаторы, работающие на противофазном виде колебаний. По конструкции и техническим данным клистроны идентичны. Незначительные различия есть только в значениях добротности объемных резонаторов. Для первого клистрона (K1) нагруженная добротность входного резонатора 250, нагруженная добротность выходного резонатора 125, собственная добротность резонаторов 460. Для второго клистрона (K2) нагруженная добротность входного резонатора 220, нагруженная добротность выходного резонатора 112, собственная добротность резонаторов 420. Частота автоколебаний в центре зоны генерации для первого клистрона 2791 МГц, для второго клистрона 2797 МГц.

Обратная связь в автогенераторах осуществлялась соединением выходного резонатора с входным с помощью стандартных передающих линий. В цепь обратной связи клистронов включены тройники для связи между клистронами и для передачи

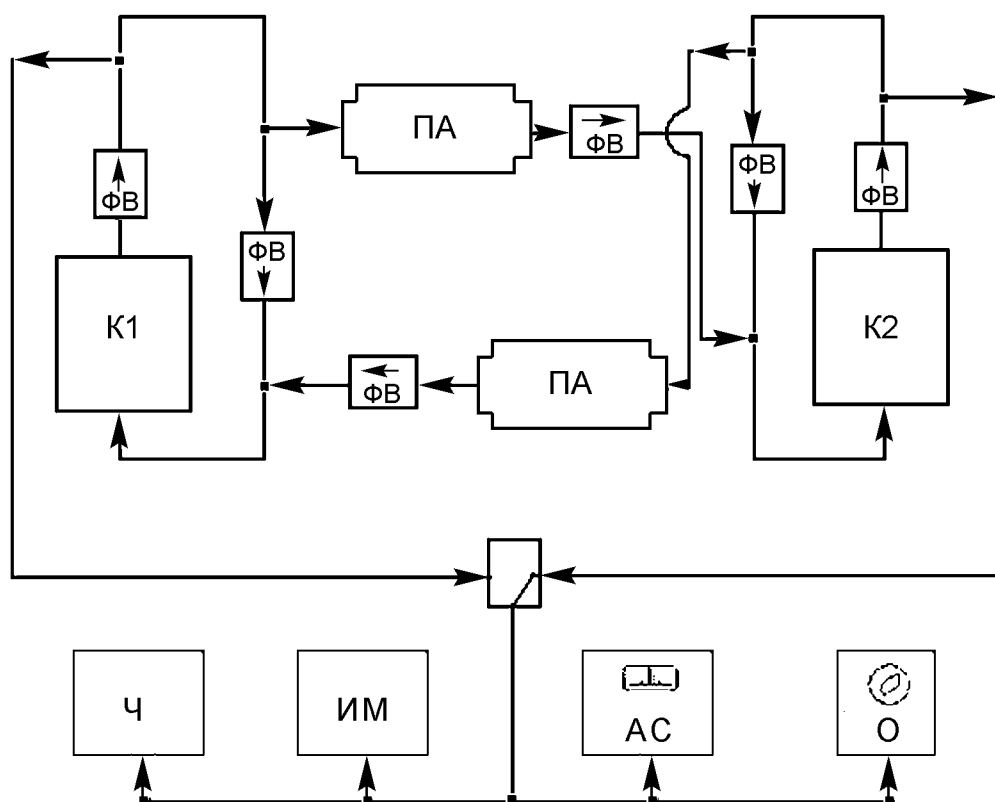


Рис. 1. Схема установки для экспериментального исследования синхронизации связанных клистронных автогенераторов

сигнала с помощью переключателя на общую измерительную цепочку. В эту цепочку через направленные ответвители включены анализатор спектра (АС), электронный цифровой частотомер (Ч), термисторный измеритель мощности (ИМ), кристаллический детектор и осциллограф (О) для наблюдения двухмерной проекции фазового портрета. Глубина связи между клистронами регулировалась с помощью поляризационных аттенуаторов (ПА). При этом сигнал с выхода одного клистронного автогенератора вводился на вход другого через ферритовый вентиль (ФВ). Следует указать, что собранная установка давала возможность изучить работу двух симметрично связанных клистронных автогенераторов при одновременном наблюдении полного спектра генерируемых сигналов, проекции фазового портрета, измерения частоты и уровня выходной мощности сигналов как в автономном режиме, так и в режимах взаимной и однонаправленной связи между клистронами для периодических и хаотических колебаний автогенераторов. Одновременное наблюдение различных характеристик сложной электронно-волновой динамической системы, состояние которой изменяется в соответствии с выбираемым характером эволюции, позволяет детально классифицировать мгновенное состояние системы. Такой анализ сложных явлений, наблюдаемых в нелинейных системах различной физической природы, применяется как в строгих математических моделях, так и в экспериментах с реальными системами и при компьютерном моделировании. Это, в частности, относится к построению и наблюдению фазовых портретов автономных и неавтономных динамических систем, обладающих рядом особенностей [9].

Что касается обсуждаемой задачи о синхронизации клистронных автогенераторов, то можно отметить, что фазовые портреты наряду со спектральными характеристиками позволяют не только наглядно идентифицировать характерные колебательные режимы, но и являются чувствительным индикатором изменения тонкой структуры спектра хаотического сигнала. На этом основана удобная методика выявления различных характеров хаотической синхронизации исследуемых радиофизических систем, что подтверждено проведенными экспериментальными исследованиями и продемонстрировано в данной работе.

В качестве управляющих параметров при проведении эксперимента использовались ток пучка и ускоряющее напряжение каждого клистрона. Выбором этих параметров можно реализовать различные режимы работы клистронных автогенераторов – периодические колебания, автомодуляцию, развитой хаос. Кроме того, ускоряющим напряжением можно плавно подстраивать частоту периодических колебаний автогенераторов.

## **2. Результаты экспериментальных исследований**

Сначала исследовалась взаимная синхронизация двух симметрично связанных почти идентичных клистронных автогенераторов, работающих в режиме автономных периодических колебаний на близких частотах с близкими уровнями выходной мощности. При плавном увеличении взаимной связи наблюдались изменения колебательных режимов, во многом совпадающие с внешней синхронизацией [1]. В самом деле, увеличение связи между клистронами вызывало сначала возникновение биений, затем захват частоты колебаний одного клистрона частотой другого авто-

генератора, а затем иногда и инициирование хаотических колебаний в первом. Но в то же время при малой разности частот и почти равной мощности в автономных режимах и достаточно сильной связи в системе взаимосвязанных автогенераторов наблюдался характерный захват частоты в результате взаимной подстройки автогенераторов, так что частота генерации связанных клистронов оказывалась между частотами автономных клистронов. Полученная зависимость частот установившихся периодических колебаний симметрично связанных клистроновых автогенераторов

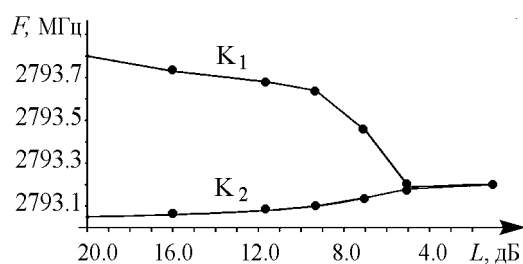


Рис. 2. Зависимость частот установившихся периодических колебаний связанных клистроновых автогенераторов от глубины связи между ними

от глубины связи между ними приведена на рис. 2 ( $L$  – величина затухания в цепи связи между клистронами). Отметим, что применяемые в экспериментах поляризационные аттенуаторы характеризовались значительным динамическим диапазоном изменения затухания (от 0 до 70 дБ), при этом обеспечивалась возможность исключительно плавной регулировки (до десятых долей дБ) и реализация различных режимов связи и синхронизации между автогенераторами.

В работе исследовалась также синхронизация путем полного подавления хаоса периодическим сигналом. Данный вид синхронизации происходил в системе, когда один автогенератор (условно обозначим его «первым») работал в режиме генерации периодических (одночастотных) колебаний, а другой – в режиме развитого хаоса (обозначим его «вторым»). Тогда, если осуществить сильное однонаправленное воздействие со стороны первого автогенератора на второй, то при определенных значениях мощности (глубине связи) и частоты воздействия, близкой к частоте генерации второго в автономном режиме, можно наблюдать срыв хаотических колебаний во втором автогенераторе и установление режима генерации периодических колебаний, по частоте полностью повторяющих вынуждающий сигнал. Явление синхронизации клистроновых автогенераторов путем полного подавления хаоса периодическим сигналом иллюстрируется на рис. 3, на котором приведены фазовые портреты и спектры колебаний при разных значениях затухания в линии однонаправленной связи клистронов.

На рис. 3, а даны спектр и фазовый портрет в автономном режиме работы второго автогенератора (70 дБ). Рис. 3, б демонстрирует преобразование этих характеристик колебаний при увеличении связи между клистронами (затухание 7 дБ в поляризационном аттенуаторе линии связи клистронов). Рис. 3, в иллюстрирует явление синхронизации клистроновых автогенераторов путем полного подавления хаоса одночастотным сигналом первого клистрона, частота которого определяет частоту колебаний второго клистрона (затухание «0 дБ» в поляризационном аттенуаторе линии связи клистронов).

На плоскости параметров «относительная мощность и частота внешнего гармонического воздействия» (рис. 4) обозначена область значений, при которых возникает синхронизация в результате полного подавления хаоса. Видно, что с ростом мощности внешнего сигнала ( $P_{\text{внеш}}$ ) область полного подавления по частоте

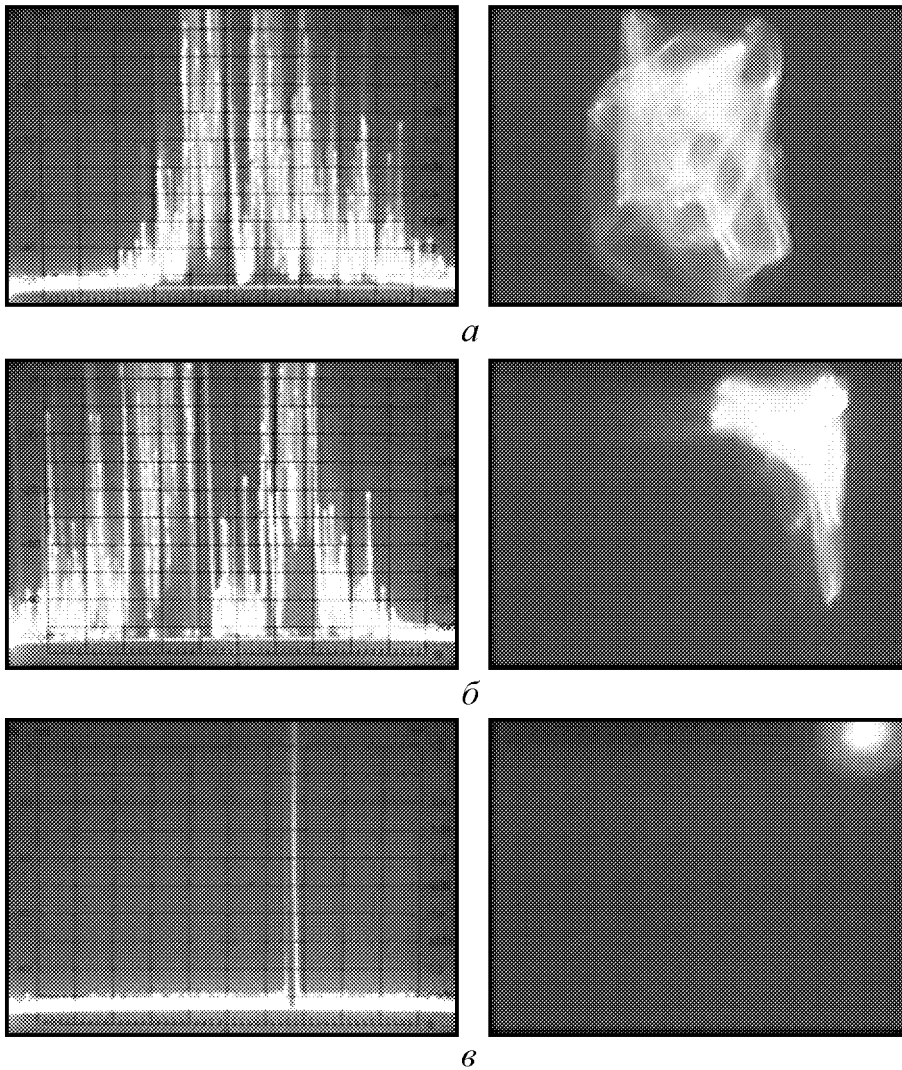


Рис. 3. Эволюция спектра и фазового портрета колебаний клистронного автогенератора при синхронизации, полученной путем полного подавления хаоса

внешнего воздействия расширяется. Приведенный график напоминает классическую картину областей синхронизации (языков Арнольда), но только с тем существенным отличием, что здесь область синхронизации не доходит до оси частот. Другими словами, имеется пороговый уровень мощности внешнего сигнала, приводящий к подавлению хаоса. Для выбранного режима работы клистрона (ток луча 40 мА, ускоряющее напряжение

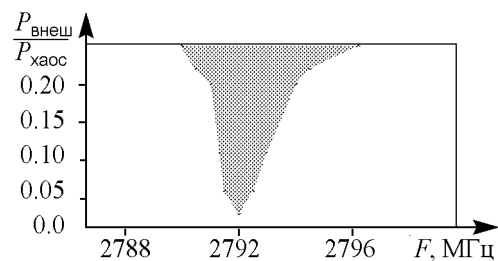


Рис. 4. Область внешней синхронизации в результате полного подавления хаотических колебаний в автогенераторе ( $P_{\text{хаос}} = 1.2$  Вт) внешним гармоническим сигналом

1930 В) этот пороговый уровень составлял 35 мВт. Исследование этого эффекта в более широком диапазоне частот проведено в [10]. Подобные физические эффекты наблюдались и при проведении экспериментов с другим типом СВЧ-генераторов – лампой обратной волны [11].

Явление синхронизации клистронных автогенераторов через полное подавление хаоса может быть использовано для генерации последовательности хаотических радиоимпульсов, применяемых в системах прямохаотической радиосвязи [12]. В этом случае автономный автогенератор вводится в режим генерации развитого хаоса. Если теперь в цепь обратной связи автогенератора подать внешний СВЧ-радиоимпульс, частота и амплитуда которого подобраны для получения полного подавления хаоса, то автогенератор будет генерировать периодическую последовательность хаотических радиоимпульсов, частота следования и длительность которых определяется параметрами внешнего СВЧ-радиоимпульса. Этот способ позволяет расширить область использования клистронных автогенераторов как источников прямохаотического сигнала большой мощности [13].

В ходе экспериментов была также исследована синхронизация почти идентичных клистронных автогенераторов, каждый из которых автономно работал в режиме развитого хаоса при однонаправленной или взаимной связи между ними.

В случае однонаправленной связи (связи типа «управление – подчинение») постепенное увеличение связи приводило к заметным изменениям характеристик ведомого клистрона – уменьшению интегральной мощности, выравниванию спектральной характеристики, значительному расширению интервалов изменения ускоряющего напряжения и тока пучка, при которых наблюдался развитой хаос. Такое поведение естественно. В самом деле, режим развитого хаоса определяется явно выраженным нелинейным режимом автономного клистрона. Подача на его вход хаотических колебаний ведущего автогенератора переводит его в еще более глубокий нелинейный режим, вызывая падение мощности и выравнивание спектральных характеристик. Спектры колебаний и фазовые портреты ведущего и ведомого клистронов приведены на рис. 5. На рис. 5, *а* представлены спектр и фазовый портрет ведущего клистрона. Рис. 5, *б* показывает эти характеристики для автономного режима ведомого клистрона. Рис. 5, *в* дает изменение этих характеристик в результате воздействия первого автогенератора на второй. Следует указать, что на основе подробного исследования (с помощью описанной схемы) изменения спектрального состава сигнала ведомого клистрона при увеличении глубины однонаправленной связи с ведущим автогенератором предложена и разработана новая методика диагностики режима обобщенной синхронизации [14].

В случае сильной взаимной связи наблюдался режим полной синхронизации двух клистронных автогенераторов, генерирующих развитой хаос. В этом режиме спектры и фазовые портреты, сильно отличающиеся друг от друга в автономном режиме, оказываются почти одинаковыми в результате сильного взаимного воздействия.

Явление полной синхронизации иллюстрирует рис. 6, на котором показано изменение спектров колебаний и фазовых портретов клистронов при увеличении

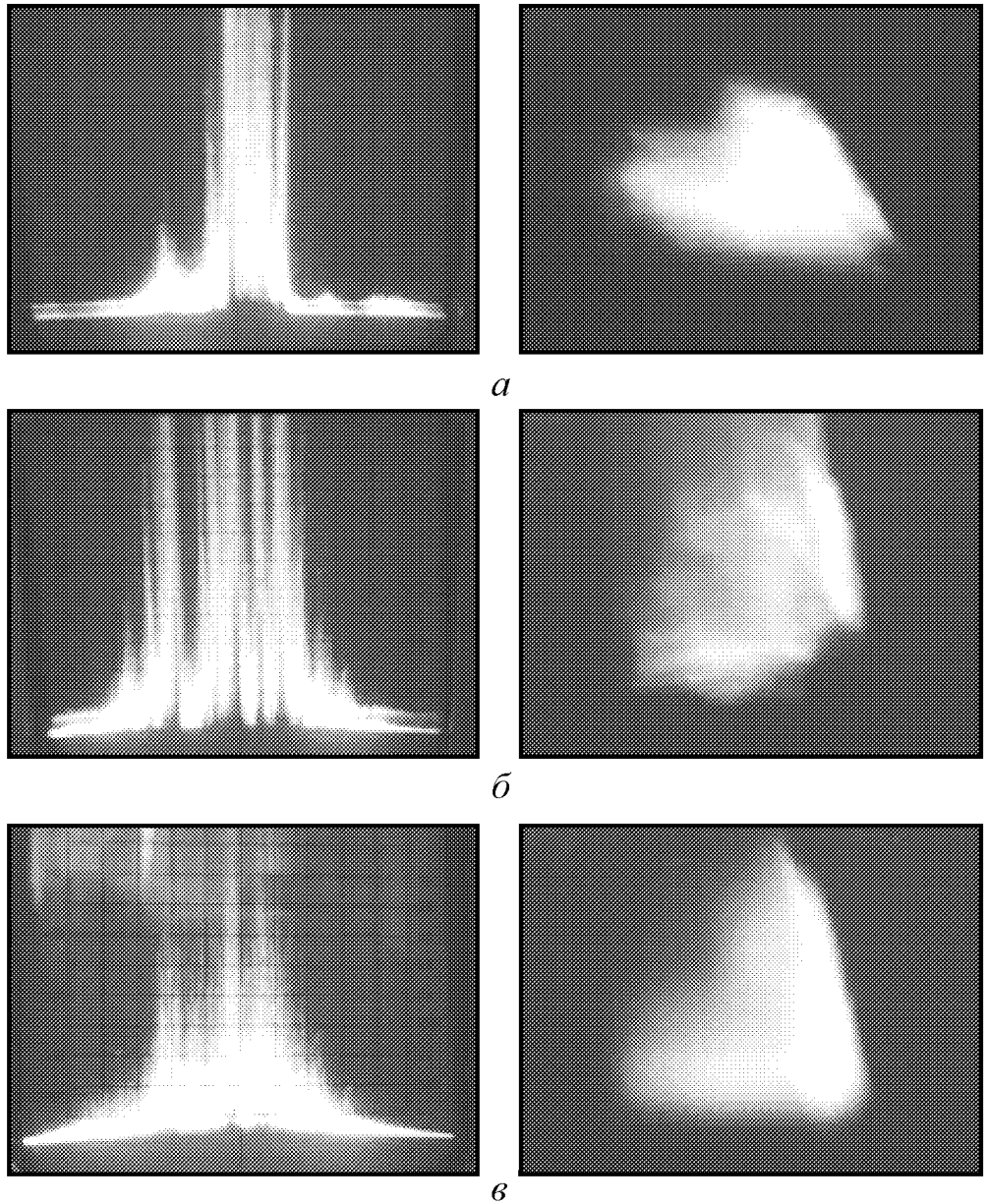


Рис. 5. Синхронизация клистронных автогенераторов, работающих в режиме генерации хаотических колебаний. Однонаправленная связь

взаимной связи между ними. На рис. 6, *а* приведены спектры и фазовые портреты в автономных режимах почти идентичных клистронных автогенераторов (затухание поляризационных аттенюаторов 70 дБ в линиях связи между клистрономми). Рис. 6, *б* показывает, что при затухании «0 дБ» в поляризационных аттенюаторах в линиях связи спектры генерируемых сигналов и фазовые портреты в результате сильного взаимного воздействия почти идентичны, что свидетельствует о реализации режима полной синхронизации, наблюдаемой ранее в связанных лазерах [15].

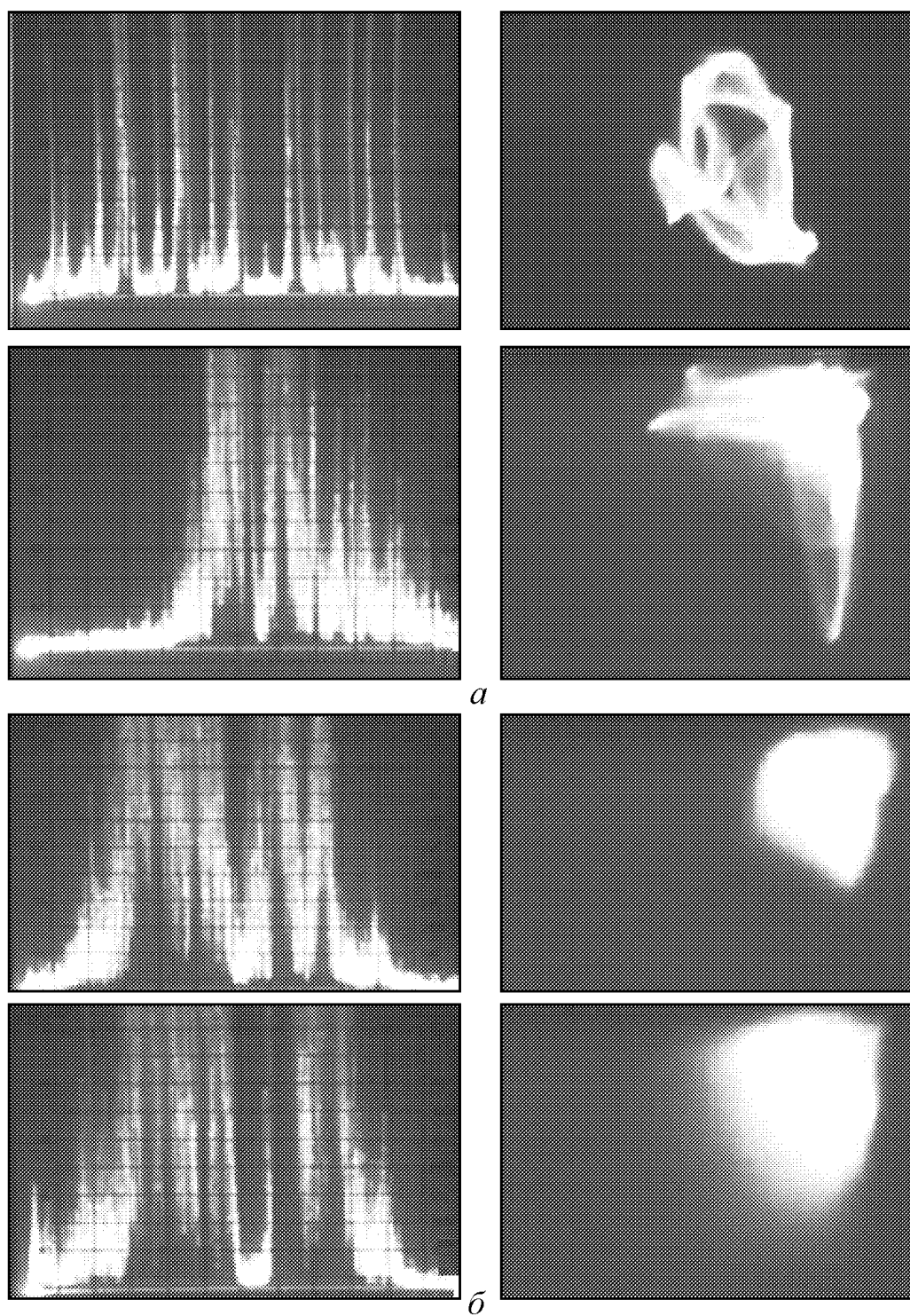


Рис. 6. Эволюция спектров и фазовых портретов клистронных автогенераторов при изменении глубины взаимной связи



## Заключение

Проведены комплексные исследования различных видов синхронизации двух симметрично связанных клистронных автогенераторов с запаздыванием. Исследования показали, что в зависимости от режима колебаний (периодические или хаотические колебания), глубины и характера связи (однонаправленная или взаимная связь) в системе из двух связанных клистронных автогенераторов можно осуществить режим взаимного захвата частоты генерации, синхронизацию путем полного подавления хаоса внешним периодическим сигналом и режим полной синхронизации. Предложено использовать эффект полного подавления хаоса для генерации последовательности хаотических радиоимпульсов большой мощности.

Таким образом, продемонстрирована широкая возможность управления сложной динамикой клистронных автогенераторов с помощью внешних сигналов.

Авторы выражают благодарность члену-корреспонденту РАН, профессору Д.И. Трубецкову за обсуждение и рекомендации по исследованию эффекта полного подавления хаоса внешним сигналом в клистронных автогенераторах.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 06-02-16451) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (шифр НШ-355.2008.2).*

## Библиографический список

1. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М. Техносфера, 2003.
2. Шалфеев В.Д., Осипов Г.В., Козлов А.К., Волковский А.Р. Хаотические колебания – генерация, синхронизация, управление // Зарубежная радиоэлектроника. 1997. № 10. С. 27.
3. Дмитриев А.С., Панас А.И. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М. Физматлит, 2002.
4. Трубецков Д.И., Короновский А.А., Храмов А.Е. Синхронизация распределенных электронно-волновых автоколебательных систем с обратной волной // Изв. вузов. Радиофизика. 2004. Т. 47, № 5–6. С. 343.
5. Lukin K.A. Noise radar technology: the principles and short overview // Applied Radio Electronics. 2005. Vol. 4, № 1. P. 74.
6. Дмитриев Б. С., Жарков Ю. Д., Рыскин Н.М., Шигаев А.М. Теоретическое и экспериментальное исследование хаотических колебаний клистронного автогенератора с запаздыванием // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46, № 5. С. 1.
7. Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Клокотов Д.В., Рыскин Н.М. Экспериментальное исследование сложной динамики в многорезонаторном клистронном автогенераторе с запаздывающей обратной связью // ЖТФ. 2003. Т. 73, вып. 7. С. 105.

8. *Shigaev A.M., Dmitriev B.S., Zharkov Yu.D., Ryskin N.M.* Chaotic dynamics of delayed feedback klystron oscillator and its control by external signal // IEEE Transactions On Electron Devices. 2005. Vol. 52, № 5. P. 790.
9. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В.* Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999.
10. *Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Скороходов В.Н., Геншафт А.М.* Синхронизация хаотических колебаний путём подавления хаоса в клистронном автогенераторе внешним гармоническим сигналом // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 3. С. 52.
11. *Безручко Б.П., Булгакова Л.В., Кузнецов С.П., Трубецков Д.И.* Экспериментальное и теоретическое исследование стохастических автоколебаний в лампе обратной волны // Лекции по высокочастотной электронике (5-я зимняя школа). Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1981. С. 25.
12. *Дмитриев А.С., Клецов А.В., Лактюшкин А.М., Панас А.И., Старков С.О.* Сверхширокополосная беспроводная связь на основе динамического хаоса // Радиотехника и электроника. 2006. Т. 51, № 10. С. 1193.
13. *Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Скороходов В.Н., Бирюков А.А.* Генерация хаотических радиоимпульсов с помощью клистронного автогенератора с запаздыванием // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 4. С. 36.
14. *Стародубов А.В., Короновский А.А., Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Храмов А.Е.* Экспериментальное и теоретическое исследование явления обобщенной синхронизации в клистронных генераторах хаоса // Материалы 17 Международной Крымской конференции «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии». Севастополь. 2007. С. 609.
15. *Roy R., Thoznburg K.S.* Experimental synchronization of chaotic lasers // Phys. Rev. Lett. 1994. Vol. 72. P. 2009.

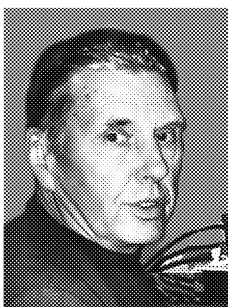
*Саратовский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 22.11.2007  
После доработки 8.02.2008*

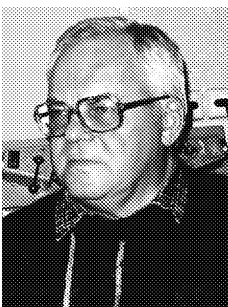
## **SYNCHRONIZATION OF TWO COUPLED KLYSTRON ACTIVE OSCILLATORS WITH DELAYED FEEDBACK**

*B.S. Dmitriev, Yu.D. Zharkov, V.N. Skorohodov, A.M. Genshaft*

Results of experimental research of synchronization of two coupled almost identical resonance microwave active oscillators on multicavity klystrons in the modes of periodic and chaotic oscillations are presented. It is shown that depending on type of coupling it is possible to realize a mode of mutual frequency capture, synchronization by means of chaos full elimination by outer harmonic signal, and full synchronization mode. A possibility of using the chaos elimination effect for generation of sequence of chaotic radio pulses is shown.



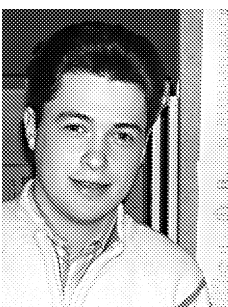
*Дмитриев Борис Савельевич* – родился в Саратове (1937), окончил физический факультет Саратовского университета (1959), защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (1967). В настоящее время – профессор кафедры нелинейной физики СГУ. Читает лекции по общему курсу физики, радиофизике и электронике, концепциям современного естествознания. Область научных интересов – микроволновая электроника и радиофизика. Опубликовал более 150 научных работ и учебных пособий, монографию «Относительность – время, пространство, поля» с грифом учебного пособия для вузов, автор 15 изобретений.  
E-mail: [DmitrievBS@info.sgu.ru](mailto:DmitrievBS@info.sgu.ru)



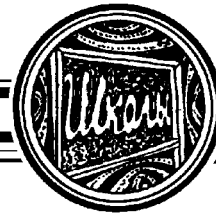
*Жарков Юрий Дмитриевич* – родился в селе Терса Еланского района Волгоградской области (1931). Окончил физический факультет СГУ (1953). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1961) и доктора (1987) в области радиофизики и электроники СВЧ. В настоящее время – профессор кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – физическое моделирование процессов взаимодействия потоков заряженных частиц с СВЧ-полями, исследование сложной динамики в СВЧ-генераторах с запаздывающей обратной связью. Опубликовал более 200 работ, среди них несколько учебных пособий, 20 изобретений.



*Скорородов Валентин Николаевич* – родился в 1959 году. Окончил физический факультет СГУ в 1982 году. В настоящее время является заведующим лабораторией кафедры электроники, колебаний и волн. Область научных интересов: нелинейная динамика в СВЧ-электронике. Автор более 15 статей в отечественных и зарубежных журналах.



*Гениафт Алексей Михайлович* – родился в 1984 году. Окончил факультет нелинейных процессов СГУ (2006). В настоящее время зачислен в магистратуру по специальности радиофизика и электроника. Область научных интересов – изучение хаотического поведения систем СВЧ-электроники. Имеет 5 публикаций.



Изв. вузов «ПНД», т. 16, № 2, 2008

**VIII МЕЖДУНАРОДНАЯ ШКОЛА  
«ХАОТИЧЕСКИЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ И ОБРАЗОВАНИЕ СТРУКТУР»**

**ХАОС-2007**

Саратов, 9–14 октября 2007

**Организаторы**

- Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, факультет нелинейных процессов
- Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН
- Научно-образовательный центр нелинейной динамики и биофизики Саратовского госуниверситета

**При поддержке**

- Российского фонда фундаментальных исследований

**Программный комитет:** *Трубецков Д.И.* (председатель), чл.-корр РАН, профессор, Саратовский госуниверситет, Саратов, Россия; *Анищенко В.С.*, д.ф.-м.н., профессор, Саратовский госуниверситет, Саратов, Россия; *Блиох Ю.П.*, д.ф.-м.н., «Технион», Хайфа, Израиль; *Боккалетти С.*, профессор, Институт сложных систем, Флоренция, Италия; *Гуляев Ю.В.*, академик РАН, директор ИРЭ РАН, Москва, Россия; *Гурбатов С.Н.*, д.ф.-м.н., профессор, Нижегородский госуниверситет, Нижний Новгород, Россия; *Эбелинг В.*, профессор, Гумбольдтский университет, Берлин, Германия; *Дмитриев А.С.*, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ РАН, Москва, Россия; *Кузнецов С.П.*, д.ф.-м.н., профессор, СФ ИРЭ РАН, Саратов, Россия; *Ланда П.С.*, д.ф.-м.н., профессор, Московский госуниверситет, Москва, Россия; *Некоркин В.И.*, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН, Нижний Новгород, Россия; *Литвак А.Г.*, академик РАН, профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, Россия; *Очкин В.Н.*, д.ф.-м.н., профессор, ФИАН, Москва, Россия; *Руденко О.В.*, чл.-корр. РАН, профессор, Московский госуниверситет, Москва, Россия; *Сергеев А.М.*, чл.-корр. РАН, профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, Россия; *Сухоруков А.П.*, д.ф.-м.н., профессор, Московский госуниверситет, Москва, Россия; *Пак Г.-С.*, профессор, Сеульский национальный университет, Корея; *Шалфеев В.Д.*, д.ф.-м.н., профессор, Нижегородский госуниверситет, Нижний Новгород, Россия; *Филимонов Ю.А.*, директор СФ ИРЭ РАН, к.ф.-м.н., доцент, Саратов, Россия; *Григорьев Ю.А.*, ученый секретарь СФ ИРЭ РАН, д.ф.-м.н., профессор, Саратов, Россия

**Программа VIII международной школы  
«Хаотические автоколебания и образование структур»  
ХАОС-2007**

**9 октября 2007**

*Открытие школы. Лекции*

*Ланда П.С.* (МГУ, Москва). Изменение эффективных параметров нелинейных систем под действием шума и вибраций

*Некоркин В.И.* (ИПФ РАН, Нижний Новгород). Нелинейная динамика колебательных нейронных сетей: фазовые кластеры, синхронизация и хаос

*Шалфеев В.Д., Мотова М.И.* (ННГУ, Нижний Новгород). О становлении курса «Теория колебаний в 1934–1937 гг. в Горьковском университете»

**10 октября 2007**

*Лекции*

*Трубецков Д.И.* (СарГУ, Саратов). Леонардо да Винчи – как нелинейное явление (лекция 1)

*Сухоруков А.П.* (МГУ, Москва). Дискретная дифракция в периодических структурах: аналогия с колебаниями связанных масс

*Кузнецов С.П.* (СО ИРЭ РАН, Саратов). Физика систем с гиперболическими аттракторами

*Шалфеев В.Д., Мишагин К.Г.* (ННГУ, Нижний Новгород). Фазирование в антенных решетках на основе эффектов коллективной динамики

*Стеновые доклады*

*Устные доклады*

**Секция 1. Влияние шумов на процессы в нелинейных системах**

*Жалнин А.Ю., Кузнецов С.П.* (СФ ИРЭ РАН, Саратов). О воздействии шума на систему с гиперболическим хаосом: численное наблюдение «затенения» траекторий

*Курушина С.Е., Максимов В.В.* (СГАУ, Самара). Иерархия шумовых фазовых переходов в модели конкуренции в распределенных средах с флуктуирующей компонентой скорости прироста ресурса

*Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* (СарГУ, Саратов). О конструктивной роли шума при передаче информации

*Половинкин А.В., Крюков А.К.* (ННГУ, Нижний Новгород). Estimation the coupling properties and optimal switching signal in the system of stochastic excitable elements

## **Секция 2. Нелинейная динамика информационных технологий, окружающей среды и общества**

*Sysoev I.V., Smirnov D.A., Bezruchko B.P., Barnikol U., Tass P.A.* (СарГУ, Саратов).

Construction of empirical model of a limb motion during Parkinsonian tremor

*Вдовин Л.В., Некоркин В.И.* (ИПФ РАН). Спайк-берстовые колебания в модели нейрона с дискретным временем

*Катруха Е.А., Гурия Г.Т.* (МФТИ, Москва). Кинетические механизмы дестабилизации роста и деполимеризации микротрубочек

*Асланов А.М., Герега А.Н., Лозовский Т.Л.* (OSAR, Одесса, Украина). Хаос в модели центробежного воздушного фильтра

*Kuzmin L.V., Morozov V.A., Starkov S.O.* (IRE RAS, Moscow). Ultrawideband chaotic communications and statistical properties of multipath channels

*Астафьева Н.М.* (ИКИ РАН, Москва). Некоторые свойства климатического аттрактора по данным палеореконокструкций, инструментальным и спутникового мониторинга

*Григорьев Е.В., Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Кузьмин Л.В.* (ИРЭ РАН, Москва).

Генерация хаоса в автоколебательной системе с полевым транзистором в качестве активного элемента

## **Секция 3. Распределенные системы и ансамбли связанных элементов со сложной динамикой**

*Grushevskaya H.V.* (BSU, Minsk, Belarus). Biological motivated neural oscillator networks

*Kazantsev V.B., Pimashkin A.S., Simonov A.Yu.* (ИПФ РАН, Нижний Новгород). Pattern recognition in a layered architecture of synaptically coupled spiking neurons

*Глызин С.Д.* (ЯрГУ, Ярославль). Dynamic properties of a circle of three unidirectionally connected oscillators

*Дмитричев А.С., Некоркин В.И.* (ИПФ РАН, Нижний Новгород). Локализованные структуры нейронной активности в двумерной модели ФитцХью–Нагумо

*Завершинский И.П., Кнестяпин В.Н., Коган Е.Я.* (СГАУ, Самара). Ламинарно-турбулентный переход в неравновесном пограничном слое

*Кныш Н.С., Сухарева Н.А.* (МГУ, Москва). Конкурентное мультиплексирование TCP потоков данных

*Кузнецова Г.Д., Гнездицкий В.В., Габова А.В., Обухов Ю.В.* (ИВНД и НФ РАН, Москва).

Анализ динамики синхронизированной электрической активности мозга у пациентов с абсансной эпилепсией

*Матросов В.В.* (ННГУ, Нижний Новгород). Автомодуляционные колебания фазовых систем

*Пономаренко В.П., Сорокин Н.Н.* (ННГУ, Нижний Новгород). Сложные колебания в автогенераторной системе с частотно-фазовым управлением

*Хаврошин О.С., Емельянов В.В., Рыскин Н.М.* (СарГУ, Саратов). Применение методики управления хаосом для подавления автомодуляции в радиофизических системах с запаздыванием

## *Дискуссия*

11 октября 2007

### *Лекции*

*Трубецков Д.И.* (СарГУ, Саратов). Леонардо да Винчи – как нелинейное явление (лекция 2)

*Дмитриев А.С.* (ИРЭ РАН, Москва). Хаос. Сети. Коммуникации

*Нетреба С.Н.* (ГУ НПО «Тайфун», Росгидромет, Москва). Механизмы усиления радиоакустического излучения при грозах

*Averyanova L.S., Osipov G.V., Chan C.-K.* (ННГУ, Нижний Новгород). Suppressing chaos in cardiac models using overdrive pacing

### *Устные доклады*

#### **Секция 2. Нелинейная динамика информационных технологий, окружающей среды и общества и Секция 4. Синхронизация**

*Панас А.И.* (ИРЭ РАН, Фрязино). Генераторы хаоса кольцевой структуры. От ЛБВ до микросхемы

*Селезнев Е.П., Смирнов Д.А., Чернокульский А.В., Мохов И.И.* (СФ ИРЭ РАН, Саратов). Оценка взаимосвязи процесса Эль-Ниньо (Южного колебания) с Индийским муссоном по данным наблюдений

*Смирнов Д.А., Мохов И.И.* (СФ ИРЭ РАН, Саратов). Влияние вариаций солнечной активности на глобальную приповерхностную температуру Земли

*Еранных В.П., Старков С.О.* (ИАТЭ, Обнинск). Эволюционная модель с эффектом памяти

*Иванов А.В., Шешнев А.С., Яшков И.А.* (СарГУ, Саратов). О вероятных аналогиях самоподобных эрозионных структур и кривой Коха

*Belykh V.N., Pankratova E.V.* (VSAWT, Nizhny Novgorod). Global stability of synchronous firing of chaotic elements in ensembles with a time-varying coupling

*Безручко Б.П., Смирнов Д.А., Караваев А.С., Барниколь У., Тасс П.* (СарГУ, Саратов). Характеристики взаимодействия мозга и конечности при спонтанном паркинсоновском треморе

*Дмитриев Б.С.* (СарГУ, Саратов). Синхронизация колебаний и управление хаосом клистронных автогенераторов

*Захаров Д.Г., Некоркин В.И.* (ИПФ РАН, Нижний Новгород). Synchronization of non-identical inferior olive cells

*Korneev A.S., Belykh V.N., Osipov G.V., Kurths J.* (ННГУ, Нижний Новгород). Controlled synchronization - desynchronization phenomena in ensembles of coupled oscillators

#### **Секция 5. Фундаментальные проблемы нелинейной динамики**

*Balyakin A.A., Blokhina E.V.* (СарГУ, Саратов). Some peculiarities of calculation of Lyapunov exponents spectrum for distributed systems

*Krylov G.G.* (BSU, Minsk, Belarus). Self-organization scenario in a billiard system of non-elastically colliding particles

*Куликов А.Н., Куликов Д.А.* (ЯрГУ, Ярославль). Бифуркации автоволн уравнения Гинзбурга–Ландау в случае трех пространственных переменных

*Куликова Н.В., Хмелевская В.С., Бондаренко В.В.* (ОГТУ, Обнинск). Анализ пространственно самоорганизованных структур методами компьютерных технологий

*Бутенина Н.Н., Бирюков Р.С.* (ННГУ, Нижний Новгород). Применение качественной теории двумерных УДС к исследованию трехмерных динамических систем

*Бутковский О.Я., Логунов М.Ю.* (ВлГУ, Владимир). Русла и джокеры хаотических систем

*Гордеева О.В., Лукьянов В.И.* (ННГУ, Нижний Новгород). О некоторых системах с негрубой гомоклинической структурой коразмерности  $n + 2$

*Горяшко В.А., Ильенко К.В., Опанасенко А.Н.* (ИРЭ НАН, Харьков, Украина). Регулярное и хаотическое движение электронов в убитроне-усилителе: коэффициент предельного усиления

*Гришин С.В., Шараевский Ю.П., Храмов А.Е.* (СарГУ, Саратов). Генерация широкополосного хаотического сигнала в автоколебательной системе с нелинейной линией передачи на магнитостатических волнах

*Гришин С.В., Давоян А.Р., Шараевский Ю.П.* (СарГУ, Саратов). Возбуждение спинволновых пакетов поверхностной магнитостатической волной в ферромагнитной пленке при параметрическом резонансе первого порядка.

*Жанабаев З.Ж.* (КазНУ, Алматы, Казахстан). Обобщенная метрическая характеристика динамического хаоса

*Zubarev N.M., Zubareva O.V.* (ИЭФ УрО РАН, Екатеринбург). Exact solutions for shapes of twodimensional charged drops in a corner

**12 октября 2007**

### *Лекции*

*Osipov G.V., Belykh V.N., Suykens J., Vandewalle J.* (ННГУ, Нижний Новгород). Cluster synchronization in oscillatory networks

*Anishchenko V.S.* (SarSU, Saratov). Synchronization of quasiperiodic oscillations

*Kotarov M.A., Ivanchenko M.V., Osipov G.V., Kurths J.* (ННГУ, Нижний Новгород). Connectivity induced multistability in ensembles of neuron-like oscillators

*Лебедева Л.В.* (ФГУ ВПО ВГАВТ, Нижний Новгород). Изолированные области в фазовом пространстве стандартного отображения тора

### *Стеновые доклады*

#### *Устные доклады*

### **Секция 4. Синхронизация**

*Круиков А.К., Канakov О.И., Osipov G.V., Kurths J.* (ННГУ, Нижний Новгород). Multistability of synchronous regimes in oscillatory ensembles

*Кузнецов А.П., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В.* (СФ ИРЭ РАН, Саратов). Фазовая динамика связанных неидентичных, неизохронных осцилляторов ван дер Поля с произвольной связью

*Кызгарина М.Т., Байболатов Е.Ж.* (КазНУ, Алматы, Казахстан). Когерентный резонанс в динамическом хаосе



*Павлов А.Н., Павлова О.Н., Сосновцева О.В.* (СарГУ, Саратов). Взаимодействие ритмических процессов в функционировании структурных элементов почек

*Petrov V.S., Osipov G.V., Chan C.-K., Kurths J.* (ННГУ, Нижний Новгород). Synchronization in ensembles of cardiac pacemakers

*Сердобинцева Ю.А., Рязанова Л.С., Постнов Д.Э.* (СарГУ, Саратов). Волны внутриклеточной концентрации кальция в условиях пространственной неоднородности свойств эндоплазматического ретикулума

*Кузнецов А.П., Паксютов В.И., Роман Ю.П.* (СарГУ, Саратов). Широкополосная синхронизация в неидентичных по управляющему параметру системах связанных осцилляторов ван дер Поля и ван дер Поля–Дуффинга

*Кузнецов А.П., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В.* (СарГУ, Саратов). Синхронизация в системе связанных идентичных осцилляторов ван дер Поля–Дуффинга в присутствии внешнего воздействия

*Щапин Д.С.* (ИПФ РАН, ННГУ). Управление фазой колебаний в нелинейной электронной схеме модели нейрона

*Жалнин А.Ю.* (СФ ИРЭ РАН, Саратов). Синхронизация хаоса на основе потоковой системы с гиперболическим аттрактором типа Смейла–Вильямса

#### **Секция 5. Фундаментальные проблемы нелинейной динамики**

*Касаткин Д.В., Некоркин В.И.* (ИПФ РАН, Нижний Новгород). Динамика импульсов возбуждения в модели электрически связанных нейронов

*Кащенко И.С.* (ЯрГУ, Ярославль). Локальная динамика уравнений с большим запаздыванием

*Кащенко С.А.* (ЯрГУ, Ярославль). Особенности локальной динамики систем параболического типа и систем с запаздыванием

*Аникин В.М., Аркадакский С.С., Ремизов А.С., Василенко Л.П.* (СарГУ, Саратов). О базисе инвариантного подпространства оператора Перрона–Фробениуса для отображения Ренья

*Кияшко С.В., Назаровский А.В.* (ИПФ РАН, Нижний Новгород). Динамика локализованных структур в средах с неоднородными в пространстве параметрами

*Кочетов А.В., Миронов В.А., Шер Э.М.* (ИПФ РАН, Нижний Новгород). Особенности самовоздействия пучков электромагнитных волн на границе раздела сред

*Логунов М.Ю., Бутковский О.Я.* (ВлГУ, Владимир). Перемешивание и ляпуновские показатели хаотических систем

*Метрикин В.С.* (ННГУ, Нижний Новгород). Стохастические автоколебания в системах с сухим трением наследственного типа

**13 октября 2007**

#### *Лекции*

*Лоскутов А.Ю.* (МГУ, Москва). Природа хаоса

*Novokshenov V. Yu.* (ИМ RAS, Ufa). Multifrequency autoresonance and Whitham averaging of integrable systems

*Дмитриев Б.С.* (СарГУ, Саратов). Новая жизнь многорезонаторных клистронов

*Макаренко Н.Г.* (ГАО РАН, Санкт-Петербург). Топология и геометрия изображений

## **Устные доклады**

### **Секция 5. Фундаментальные проблемы нелинейной динамики**

*Поляков О.П.* (МГУ, Москва). К вопросу о хиральной асимметрии в живой и неживой природе

*Корниенко В.Н., Привезенцев А.П., Ревякин А.А.* (ЧелГУ, Челябинск). Бифуркации автоколебательных режимов в потоке с виртуальным катодом

*Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Савин А.В., Савин Д.В.* (СарГУ, Саратов). О возможности реализации «гамильтоновского» критического поведения в дискретной модели неавтономной автоколебательной системы

*Кузнецов А.П., Савин А.В., Савин Д.В.* (СарГУ, Саратов). Особенности динамики почти консервативных дискретных систем с постоянной диссипацией

*Талагаев Ю.В., Тараканов А.Ф.* (БФ СарГУ, Балашов). Controlling chaos: optimal modification of chaotic systems limit sets

*Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Пиковский А.С., Тюрюкина Л.В.* (СФ ИРЭ РАН, Саратов). Хаотическая динамика в системах связанных неавтономных осцилляторов с резонансным и нерезонансным механизмом передачи возбуждения

*Vinod Patidar* (Banasthali Vidyapith Deemed University, India). A comparative study of co-existing attractors in Gaussian map and q-Gaussian map

*Жуков К.Г., Чечин Г.М.* (ЮФУ, Ростов-на-Дону). Теоретико-групповые методы для упрощения исследования устойчивости нелинейных динамических режимов в системах с дискретной симметрией

*Шутый А.М., Семенов Д.И.* (УлГУ, Ульяновск). Хаотическая прецессионная динамика намагниченности в тонкопленочных магнитных структурах

*Жанабаев З.Ж., Наурзбаева А.Ж., Алимгазинова Н.Ш., Бейсебаева А.С.* (КазНУ, Алматы, Казахстан). Классификация радиоизлучения солнца методами динамического хаоса

*Жанабаев З.Ж., Бейсебаева А.С., Наурзбаева А.Ж., Алимгазинова Н.Ш.* (КазНУ, Алматы, Казахстан). Фрактальные свойства шумоподобных сигналов

## **Культурная программа**

**14 октября 2007**

### **Лекции**

*Постнов Д.Э., Рязанова Л.С., Жирин Р.А.* (СарГУ, Саратов). Синхронизация и индуцированные шумом когерентные режимы в малых ансамблях нейронов с ионной связью

*Храмов А.Е.* (СарГУ, Саратов). Сложные нелинейные процессы в распределенных автоколебательных системах сверхвысокочастотной электроники и радиофизики

*Короновский А.А.* (СарГУ, Саратов). Обобщенная хаотическая синхронизация

*Кащенко С.А.* (ЯрГУ, Ярославль). Асимптотика сложных пространственно-временных структур в системах с запаздыванием

### **Закрытие школы**

### **Заключительная дискуссия**

**ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС В ФАЗОВЫХ СИСТЕМАХ**

Учебное пособие

*В.В. Матросов, В.Д. Шалфеев*

© В.В. Матросов, В.Д. Шалфеев, 2007

© Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского, 2007

Нижний Новгород, 2007. 258 с.

ISBN 978-591326-022-3

Представлены результаты теоретического исследования и компьютерного моделирования явлений коллективной динамики малых ансамблей связанных генераторов с фазовым управлением. Показано, что такой ансамбль может служить эффективным источником хаотически модулированных колебаний с центральной частотой, стабилизированной по опорной частоте. Рассмотрены различные варианты синхронизации хаотически модулированных колебаний неидентичных источников. Обсуждается возможность использования хаотически модулированных колебаний для решения задач передачи информации.

Пособие предназначено для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся в области радиофизики, прикладной математики, математического моделирования.

**Оглавление****Предисловие****Введение. Динамический хаос и передача информации****Глава 1. Нелинейная динамика фазовой системы**

1.1. Математические модели. 1.2. Динамические режимы и характеристики. 1.3. Фазовая система с фильтром первого порядка. 1.4. Фазовая система с фильтром второго порядка. 1.4.1. Система с фильтром типа  $[0/2]$  в случае нулевой начальной частотной расстройки. 1.4.2. Влияние начальной частотной расстройки. 1.4.3. Фазовая система с фильтром типа  $[2/2]$ . 1.4.4. Влияние нелинейности фазового дискриминатора. 1.5. Области генерации автомодуляционных режимов. 1.6. Характеристики режимов автомодуляции. 1.7. Выводы.

**Глава 2. Каскадное соединение двух фазовых систем**

2.1. Математические модели ансамбля. 2.2. Классификация динамических режимов. 2.3. Динамика связанных систем. 2.3.1. Случай малоинерционных цепей управления. 2.3.2. Влияние параметров фильтров. 2.4. Влияние связей на

динамику ансамбля. 2.4.1. Синхронные режимы. 2.4.2. Автоколебательные режимы. 2.5. Динамика ансамбля с фильтрами первого порядка. 2.5.1. Бифуркационная диаграмма. 2.5.2. Влияние параметров связей. 2.5.3. Возбуждение хаоса. 2.6. Случай фильтров второго порядка. 2.6.1. Возбуждение хаотических колебаний. 2.6.2. Области хаотических колебаний. 2.6.3. Автомодуляционные колебания. 2.7. Экспериментальное исследование хаоса.

### **Глава 3. Особенности динамики трех каскадно связанных фазовых систем**

3.1. Математические модели и динамические режимы. 3.2. Синхронные режимы. 3.3. Регулярные квазисинхронные режимы. 3.4. Бифуркационные переходы к хаотическим колебаниям. 3.4.1. Переход к хаосу через каскад удвоенный периода предельного цикла. 3.4.2. Переход к хаосу через перемежаемость. 3.4.3. Бифуркация тор–хаос. 3.4.4. Переход к хаосу через удвоение инвариантных торов. 3.4.5. Хаос при введении дополнительных связей. 3.5. Асинхронные режимы. 3.6. Анализ структуры пространства параметров. 3.6.1. Малоинерционные цепи управления. 3.6.2. Учет неидентичных дополнительных связей. 3.6.3. Ансамбль с инерционными цепями управления.

### **Глава 4. Параллельное соединение фазовых систем**

4.1. Математические модели и динамические режимы. 4.2. Ансамбль с малоинерционными цепями управления. 4.2.1. Случай слабых связей. 4.2.2. Случай сильных связей. 4.3. Влияние параметров фильтров. 4.3.1. Случай фильтров первого порядка. 4.3.2. Случай фильтров второго порядка. 4.4. Области генерации автомодуляционных режимов. Ансамбль с фильтрами первого порядка. 4.4.1. Ансамбль с фильтрами второго порядка.

### **Глава 5. Синхронизация хаотических колебаний**

5.1. Синхронизация хаотически модулированных колебаний фазовых систем. 5.2. Области синхронизации хаотически модулированных колебаний. 5.3. Синхронизация хаотически модулированных колебаний в ансамблях.

### **Глава 6. Моделирование передачи информации**

6.1. Передача бинарного сигнала. 6.2. Передача непрерывного сигнала.

### **Заключение**

### **Список литературы**

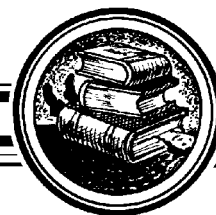
### **Приложение. Цветные иллюстрации**

## **Предисловие**

Бурное развитие новых информационных технологий – неотъемлемый признак нашего времени. Цель настоящего учебного пособия – познакомить студентов радиофизического факультета ННГУ с одним из наиболее перспективных направлений развития современных коммуникационных систем – систем передачи информации, основанных на использовании динамического хаоса (хаотических колебаний). Эта идея появилась менее 20 лет назад и оказалась весьма привлекательной, в частности, для использования в беспроводных сверхширокополосных системах связи. Открытие явления хаотической синхронизации, хаотического синхронного отклика, успехи в создании ряда модельных схем для демонстрации передачи сообщений на

основе хаотических сигналов показали перспективность дальнейших работ по созданию коммуникационных систем с использованием динамического хаоса. Однако оптимистический настрой начала 90-х годов стал быстро таять, натолкнувшись на серьезные ограничения в развитии новой технологии (в частности, слабую помехоустойчивость систем связи к искажениям в канале и к неполной идентичности параметров передатчика и приемника), что фактически поставило под сомнение перспективу реализации в ближайшее время конкурентоспособных систем когерентного приема на основе хаотических сигналов. Тем не менее, сейчас становится ясным, что такие перспективы могут быть вполне реальными. Авторы пособия предлагают для этой цели использовать не хаотические, а хаотически модулированные сигналы со стабилизированной центральной частотой. В пособии обсуждаются способы надежной генерации таких сигналов в ансамбле фазовых систем (систем фазовой автоподстройки частоты), варианты схем для их синхронизации и пути построения систем передачи информации на основе хаотически модулированных сигналов. В пособии использованы публикации авторов, часть результатов публикуется впервые.

Формирование этой тематики и многие результаты были получены под влиянием и при взаимодействии с исследовательскими группами по динамическому хаосу Института радиотехники и электроники РАН, Института прикладной физики РАН, Научно-исследовательского института прикладной математики и кибернетики ННГУ, Московского энергетического института (технического университета), Московского технического университета связи и информатики, Саратовского государственного университета, Калифорнийского университета (Беркли, Сан Диего), Потсдамского университета, Миланского университета.



## НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА СИСТЕМ ФАЗИРОВАНИЯ В АНТЕННЫХ РЕШЕТКАХ

Учебное пособие

*К.Г. Мишагин, В.Д. Шалфеев, В.П. Пономаренко*

© К.Г. Мишагин, В.Д. Шалфеев, В.П. Пономаренко, 2007  
© Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского, 2007  
Н. Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2007. 188 с.  
ISBN 978-5-91326-024-6

В пособии представлены различные варианты соединения генераторов и усилителей в активных антенных решетках с помощью систем фазовой автоподстройки с целью решения задачи фазирования. Изложен новый принцип управления фазовыми распределениями в антенных решетках, определяемый как нелинейное фазирование и основанный на использовании коллективной динамики активных элементов. Основное внимание уделено исследованию динамики рассматриваемых схем: анализ устойчивости режимов фазирования, изучение регулярных и хаотических автомодуляционных режимов. Представлены экспериментальные результаты по изучению хаотической динамики в ансамблях связанных систем фазовой автоподстройки. Пособие предназначено для аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области радиофизики, прикладной нелинейной динамики, теории управления, а также может быть полезно для инженеров и научных работников, занимающихся проектированием активных антенных решеток.

### Оглавление

#### Введение

#### Глава 1. Фазирование в решетках усилителей

1.1. Фазовая автоподстройка в усилителе. 1.2. Стационарные режимы фазирования. 1.3. Динамика системы автоматического фазирования. 1.3.1. Модель САФ с одним состоянием равновесия. 1.3.2. Модель САФ с тремя состояниями равновесия. 1.3.3. Модель САФ с пятью состояниями равновесия. 1.4. Перестройка режимов системы автофазирования. 1.5. Фазирование в решетке усилителей. 1.6. Выводы.

#### Глава 2. Фазирование в решетках генераторов

2.1. Нелинейное фазирование в антенных решетках. 2.2. Электронное управление лучом. 2.3. Генератор с цепью фазовой автоподстройки. 2.4. Фазирование

на основе синхронизации генераторов общим опорным сигналом. 2.5. Каскадное соединение генераторов. 2.6. Организация взаимных связей. 2.7. Цепочка взаимосвязанных генераторов, синхронизируемых опорным сигналом. 2.8. Фазирование в двумерных решетках генераторов. 2.8.1. Каскадное соединение генераторов. 2.8.2. Взаимосвязанные генераторы. 2.8.3. Связанные генераторы с опорным сигналом. 2.9. Скорость установления режима синхронизации. 2.10. Точность фазирования. 2.11. Управление нестационарным фазовым распределением. 2.12. Выводы.

### **Глава 3. Хаотическая динамика систем фазирования**

3.1. Хаотическая динамика САФ. 3.1.1. Математическая модель САФ. 3.1.2. Стационарные режимы фазирования. 3.1.3. Бифуркационная диаграмма динамических режимов. 3.1.4. Развитие динамических режимов при изменении параметра нелинейности. 3.1.5. Динамика модели САФ с тремя состояниями равновесия. 3.1.6. Динамика модели САФ с пятью состояниями равновесия. 3.1.7. Влияние начальной фазовой расстройки. 3.1.8. Выводы. 3.2. Хаотическая динамика ансамблей связанных ФАП. 3.2.1. Классификация динамических режимов. 3.2.2. Хаотическая динамика двух каскадно-связанных ФАП. 3.2.3. Генерация хаотических колебаний в схеме трех каскадно-связанных ФАП. 3.2.4. Спектральные и корреляционные свойства. 3.2.5. Формирование широкополосных сигналов. 3.2.6. Выводы.

### **Заключение**

#### **Приложение I. Фазирование в волоконно-оптическом усилителе**

#### **Приложение II. Влияние нелокальности связей на скорость синхронизации**

#### **Список литературы**

## **Введение**

В настоящее время проблема изучения коллективной динамики активных сред, описываемых с помощью систем связанных обыкновенных дифференциальных уравнений, имеет высокую привлекательность не только в физике, но и в биологии, химии, экономике и социальных науках (биологические возбудимые среды, нейронные сети, турбулентность, энергосети, решетки связанных лазеров, джозефсоновские контакты, антенные решетки и т.д.). Несмотря на исключительную сложность исследования пространственно-временных задач, в последние десятилетия достигнут существенный прогресс, обусловленный в значительной степени появлением мощных вычислительных средств. Многие фундаментальные явления, обнаруженные в моделях дискретных нелинейных сред и играющие важную роль в реальных физических, химических и биологических системах, представляются интересными с точки зрения прикладного использования. Явление синхронизации в ансамблях связанных нелинейных осцилляторов может быть использовано для синхронизации и управления фазовыми распределениями в активных антенных решетках. Явление динамического хаоса и эффект хаотической синхронизации интересны с точки зрения приложения к широкополосным системам связи, радиолокации, а также для осуществления конфиденциальной передачи информации. Эффекты самоорганизации и

структурообразования могут быть использованы в системах обработки информации (обработка изображений).

В данном пособии рассматривается прикладная задача нелинейной динамики, связанная с исследованием динамических процессов в активных антенных решетках, имеющих в каждом канале усилитель или генератор, охваченный цепью автоматического управления фазой или частотой, соответственно. В усилителях цепь автоподстройки управляет фазовым сдвигом с целью его стабилизации. В генераторах управляемым параметром является частота генератора, при этом управляющий сигнал использует информацию о разности фаз между сигналом подстраиваемого генератора и опорным сигналом. Такая цепь автоматического управления частотой позволяет осуществить синхронизацию генератора опорным сигналом. В литературе по физике, радиотехнике, теории систем управления и т.д. используется разная терминология при описании систем автоматического управления фазой и частотой. Для определенности будем придерживаться следующей терминологии. Систему автоматической подстройки фазы в усилителях будем называть системой автоматического фазирования (САФ), а систему автоматической подстройки частоты, использующую информацию о разности фаз, будем называть системой фазовой автоподстройки (ФАП). Системы САФ и ФАП изначально разрабатывались для решения задач синхронизации, стабилизации и управления фазой и частотой колебаний, фильтрации, демодуляции и многих других задач. Благодаря высокой точности, надежности, помехоустойчивости, способности работать на высоких и сверхвысоких частотах, а также технологичности эти системы сейчас являются неотъемлемой частью практически любых систем связи. В решетках усилителей и генераторов системы ФАП и САФ могут быть использованы не только для синхронизации, осуществления стабилизации параметров сигналов и управления ими относительно опорного сигнала, но также для организации взаимных связей между элементами. Использование взаимных связей открывает новые возможности для решения задачи автоматического фазирования в антенных решетках. Однако коллективная динамика ансамблей САФ и ФАП является существенно более сложной по сравнению с динамикой одного элемента, поэтому изучена сравнительно слабо. В пособии значительное внимание уделено описанию коллективной динамики связанных ФАП, представлены как теоретические, так и экспериментальные результаты. Приведены результаты моделирования ансамблей САФ.

В первой главе рассматривается задача автоматического фазирования в решетке усилителей с помощью САФ. Известно, что системы автоматического фазирования широко применяются для стабилизации фазы на выходе мощных усилителей СВЧ диапазона, используются при решении задачи когерентного сложения мощностей СВЧ сигналов. На данный момент представляется особенно интересным использование аналогичных электрооптических систем для фазирования в решетках оптических квантовых усилителей с целью решения важной задачи современной физики – получения мощного непрерывного лазерного излучения с высоким качеством пучка путем когерентного сложения мощностей нескольких источников. В связи с актуальностью данной задачи в первой главе представлено достаточно подробное исследование динамики модели САФ. Рассматриваемая здесь модель САФ является универсальной и подходит для описания электрооптических систем фазирования. Кроме этого представлены результаты моделирования усилителей, взаимосвязанных с помощью САФ.



Во второй главе рассматривается задача автоматического фазирования в решетке генераторов, связанных с помощью систем ФАП. В данном случае, в отличие от решетки усилителей, организация связей между элементами имеет принципиальное значение, так как дает не просто новое техническое решение, имеющее некоторые преимущества, а позволяет использовать новый принцип фазирования, который можно определить как нелинейное фазирование. Нелинейное фазирование основано на использовании коллективной динамики связанных генераторов для осуществления синхронизации и управления поворотом диаграммы направленности в антенной решетке. Такой подход имеет ряд существенных преимуществ в сравнении с традиционным способом фазирования в антенных решетках с помощью фазовращателей: низкая стоимость реализации и компактность в силу отсутствия фазовращателей и распределительной сети, возможность изменения угла поворота диаграммы направленности всей решетки с помощью управления параметрами лишь в нескольких элементах антенны. Использование систем ФАП для организации связей между генераторами позволяет обеспечить широкую полосу частот, внутри которой осуществляется синхронизация генераторов, исключает зависимость амплитуд колебаний от установившихся фазовых соотношений, способствует снижению фазовых шумов. Во второй главе рассмотрены различные схемы соединения генераторов в одномерных и двумерных антенных решетках. Основное внимание уделено возможности формирования и управления линейными градиентными фазовыми распределениями, а также устойчивости соответствующих стационарных решений.

Третья глава посвящена изучению хаотических автомодуляционных режимов в САФ и ФАП. Такие режимы являются нерабочими с точки зрения задачи фазирования в антенных решетках. Однако известно, что хаотические сигналы могут использоваться в качестве несущей в системах связи и радиолокации и имеют некоторые преимущества над регулярными сигналами благодаря своим свойствам (широкий спектр, резко спадающая автокорреляционная функция). Проблема использования динамического хаоса в системах связи изучается уже около пятнадцати лет, тем не менее, наряду с другими проблемными вопросами важной задачей в данном направлении остается создание высокоэффективных генераторов широкополосных хаотических колебаний (СВЧ диапазона, в частности). Одним из перспективных вариантов решения этой задачи является построение генераторов хаоса на основе систем САФ и ФАП. В третьей главе представлено теоретическое исследование хаотической динамики одиночной САФ и экспериментальное исследование хаотической динамики малых ансамблей связанных ФАП. Представлены спектральные и корреляционные характеристики хаотических колебаний, полученные в эксперименте.



## ГЕНЕРАЦИЯ И СИНХРОНИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМАХ С «МНОГОМАСШТАБНЫМ» ХАОСОМ

Учебное пособие

*М.В. Иванченко*

©М.В. Иванченко, 2007

©Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского, 2007

Нижегород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2007. 138 с.

ISBN 978-5-91326-012-3

Теория синхронизации регулярных и хаотических колебаний – одна из фундаментальных проблем нелинейной физики. В настоящее время для периодических и близких к периодическим хаотических колебаний она хорошо разработана и весьма исчерпывающе представлена в ряде учебных пособий, монографий и обзоров. Однако для хаотических колебаний с несколькими характерными временными масштабами подобное изложение отсутствует. Данное пособие частично восполняет этот пробел. В нем приводятся методы исследования хаотической фазовой синхронизации в системах с «многомасштабным» хаосом, рассматриваются ее основные закономерности, а также процессы генерации и синхронизации таких колебаний в модельных нейронных ансамблях.

Предназначено для широкой аудитории – от студентов до квалифицированных исследователей в области физики, прикладной математики и математической биологии.

### Оглавление

#### Введение

#### Глава 1. Анализ синхронизации в системах с «многомасштабным» хаосом

- 1.1. Хаотическая синхронизация.
- 1.2. Объединение временных масштабов.
- 1.3. Разделение временных масштабов.
- 1.4. Синхронизация лазеров в режиме генерации берстов
- 1.5. Синхронизация колебаний на различных временных масштабах.

#### Глава 2. Коллективная генерация «многомасштабных» колебаний в нейронных ансамблях

- 2.1. Собственная и коллективная «многомасштабная» динамика нейронных систем.
- 2.2. Неустойчивость фазовой хаотической синхронизации спайков.
  - 2.2.1. Цепочки нейронов с электрическими синапсами.
  - 2.2.2. Ансамбли с химическими синапсами.
  - 2.2.3. Ансамбли со сложной топологией связей.

## **Глава 3. Синхронизация и образование структур в ансамблях с конкуренцией**

3.1. Постановка задачи. 3.2. Динамика автономного нейрона. 3.3. Коллективная динамика. 3.4. Структурная устойчивость. 3.5. Бифуркации.

### **Заключение**

### **Приложение I. Математическая модель Ходжкина–Хаксли для нейрона**

### **Приложение II. Иллюстрации**

### **Список литературы**

## **Введение**

К настоящему времени достигнут значительный прогресс в изучении и понимании процессов синхронизации, десинхронизации и структурообразования в ансамблях регулярных и хаотических осцилляторов. Результаты этих исследований используются для решения весьма различных прикладных задач: от передачи информации с помощью динамического хаоса и исследования колебательных режимов в решетках микро- и наномеханических осцилляторов до анализа способов обработки и кодирования информации биологическими нейронными ансамблями. В этом промежутке лежат задачи разработки широкополосных радиолокационных систем на базе динамического хаоса и криптографических алгоритмов.

Исследование явления синхронизации на протяжении многих лет остается актуальной задачей нелинейной физики. Теория синхронизации регулярных колебаний была в основном построена в 30-60-х годах XX века и исчерпывающе описывала вынужденную синхронизацию автогенератора внешним периодическим сигналом и взаимную синхронизацию двух автоколебательных систем. Эта теория была положена в основу решения многих прикладных задач радиофизики, среди которых задачи когерентного приема в системах связи, построения радиолокационных и навигационных систем, исследования динамики ансамблей сверхпроводящих джозефсоновских контактов и т.д. Тем не менее в последние два десятилетия наблюдается крайне высокая активность в исследованиях синхронизации и связанных с ней динамических процессов, в частности, образования пространственных структур. Это продиктовано как интересом к процессам синхронизации сложных и хаотических колебаний, так и появлением целого ряда задач, требующих анализа коллективной динамики больших ансамблей со сложной топологией связи.

Во-первых, большое число физических систем может рассматриваться как класс распределенных, пространственно дискретных или непрерывных нелинейных активных колебательных систем, обладающих некоторым спектром колебательных мод. Примерами служат системы с турбулентностью, ансамбли многомодовых лазеров, джозефсоновских контактов, микро- и наномеханических осцилляторов. Одним из распространенных коллективных эффектов в таких системах является синхронизация большого числа взаимодействующих, зачастую хаотических, нелинейных мод.

Во-вторых, явление динамического хаоса – сложного, квазислучайного поведения полностью детерминированной системы, по-видимому, может быть использовано для разработки новых подходов в задаче передачи и обработки информации.

Преимущества хаотического сигнала над регулярным заключаются в его широкополосности (и, как следствие, большей помехоустойчивости и информационной емкости). Синхронизация идентичных или слабо неидентичных хаотических колебаний позволяет реализовать когерентный прием в схемах для передачи с помощью динамического хаоса, управлять распределением фаз в радиолокационных системах, декодировать сообщения, зашифрованные с помощью хаотического сигнала.

Наконец, идеи и методы радиофизики сейчас находят применение в анализе способов передачи, хранения и обработки информации биологическими нейронными сетями. Здесь одним из ключевых вопросов является механизм координации активности отдельных нейронов. Многочисленные экспериментальные и теоретические исследования отводят эту роль процессам синхронизации. Поскольку значительная часть нейронов может генерировать хаотические колебания, наиболее адекватной постановкой задачи, сформулированной в терминах теории колебаний, здесь является изучение процессов хаотической синхронизации в больших ансамблях хаотических автоколебательных систем со сложной, нерегулярной топологией связи.

Следует отметить, что под синхронизацией регулярных колебаний всегда понималось совпадение их *частот* в результате взаимодействия. С другой стороны, хаотические колебания обладают *непрерывным* спектром частот и классическое понятие синхронизации к ним неприменимо. Известны, однако, процессы *координации* хаотических колебаний, в результате которых некоторые их характеристики могут становиться идентичными. Более того, совпадение этих характеристик является необходимым и достаточным условием синхронизации периодических колебаний. Это обусловило возникновение термина «хаотическая синхронизация» и его использование применительно к нескольким типам координации хаотических колебаний взаимодействующих систем. Здесь мы будем рассматривать исключительно *фазовую хаотическую синхронизацию*, критерием которой является совпадение средних частот колебаний, как наиболее близкую к синхронизации регулярных колебаний и позволяющую достаточно полно описывать коллективные процессы в интересующих нас системах.

Несмотря на обширную литературу, посвященную исследованию фазовой хаотической синхронизации, большинство работ ограничивается случаем, когда автоколебания во взаимодействующих системах слабо хаотичны, имеют ярко выраженный максимум в спектре мощности, соответствующий некоторой средней частоте колебаний. Синхронизация таких систем имеет много общего с классическим случаем синхронизации периодических осцилляторов. Фактически, явление состоит в захвате частот из интервала вокруг выделенной частоты. Необходимо отметить, что класс слабо хаотичных осцилляторов (а следовательно, и область применения данного подхода) весьма ограничен.

В то же время дальнейшее распространение идей теории синхронизации на системы с более развитым хаосом, спектр мощности которых имеет несколько ярко выраженных максимумов, сталкивается с серьезными трудностями. Основная причина заключается в том, что неприменимым здесь оказывается даже понятие синхронизации в смысле средних частот – поскольку средняя частота, в общем случае, не совпадает ни с одной из выделенных частот. Сколько-нибудь полная теория фазовой синхронизации колебаний на нескольких характерных временных масштабах в настоящее время отсутствует, хотя в ряде работ этот вопрос и затрагивается. Следует

отметить цикл работ А.А. Короновского и А.Е. Храмова, в котором была предложена концепция синхронизации временных масштабов, предполагающая применение критериев фазовой синхронизации к динамике вейвлет-образов реализации «многомасштабных» колебаний.

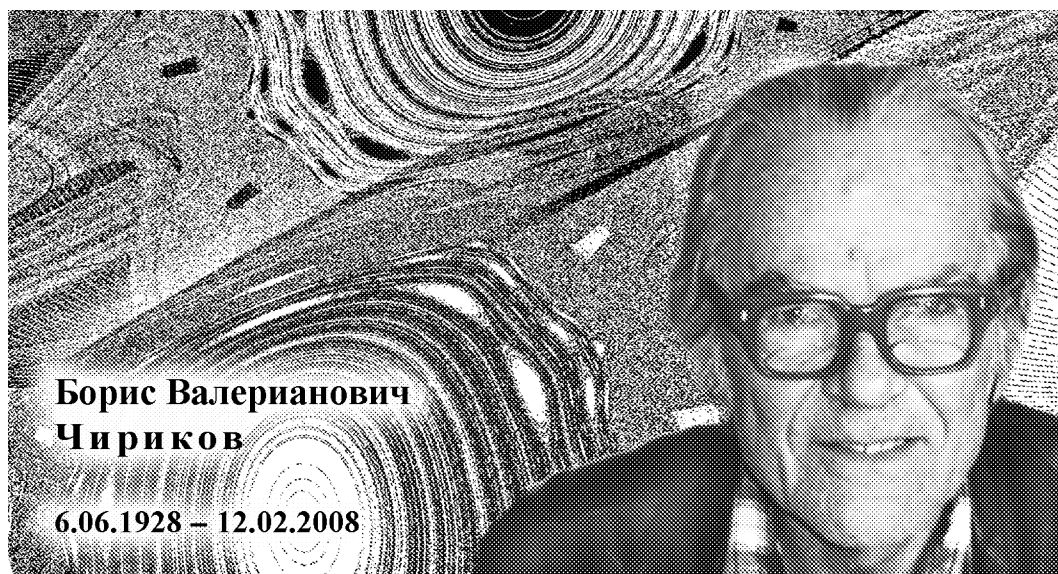
Коллективная динамика ансамблей «многомасштабных» осцилляторов, в том числе характеризующихся сложной, нерегулярной топологией связи, является на настоящий момент одной из наиболее актуальных задач нелинейной динамики и радиофизики. Она имеет принципиальное значение для понимания основных закономерностей синхронной динамики распределенных активных систем с колебаниями на нескольких временных масштабах, таких как нейронные ансамбли, модели сердечной активности, цепочки связанных лазеров, модели турбулентных сред.

**Развитие методов исследования и анализ основных свойств фазовой хаотической синхронизации, образования структур в ансамблях осцилляторов с хаотическими колебаниями на нескольких временных масштабах и генерации таких колебаний за счет эффектов синхронизации являются основными вопросами, исследуемыми в этом пособии.** Оно состоит из трех глав.

Первая глава посвящена фазовой хаотической синхронизации систем, в которых «многомасштабные» колебания уже присутствуют. В ней рассматриваются два подхода к определению и анализу синхронизации, имеющих весьма общий характер. С их помощью изучаются основные черты фазовой синхронизации «многомасштабных» систем, они применяются для исследования динамики связанных лазеров в режиме генерации берстовых импульсов. Наконец, показана возможность практически значимой синхронизации между колебаниями на *сильно различных* временных масштабах, дополняющая предыдущий случай синхронизации близких (вследствие малой неидентичности систем) временных масштабов.

Во второй главе изучается влияние синхронизации на генерацию «многомасштабных» колебаний в динамических моделях нейробиологических систем. Обнаруженный коллективный механизм возникновения «многомасштабных» колебаний в ансамблях изначально слабохаотичных нейронных осцилляторов заключается в неустойчивости режима синхронизации спайков при усилении связи. Показано существование такого механизма в ансамблях с различными типами связи, различной – регулярной и нерегулярной – топологией.

В развитие проблемы в третьей главе рассматриваются принципы взаимодействия собственных и коллективных механизмов генерации. Здесь, как и во второй главе, основными действующими лицами являются процессы синхронизации, десинхронизации и образования пространственно-временных структур. Выявлено, что взаимодействие механизмов может носить как кооперативный, так и конкурентный характер. Также обсуждается предполагаемая роль этих явлений в биологических нейронных ансамблях.



12 февраля 2008 г. ушел из жизни академик Российской академии наук, доктор физико-математических наук, профессор Борис Валерианович Чириков. Российская наука потеряла одного из своих самых ярких и оригинальных мыслителей.

Борис Валерианович широко известен мировой научной общественности как один из создателей физической теории динамического хаоса – науки, находящейся на стыке классической и квантовой механики, статистической физики и теории информации. Значение этой теории выходит далеко за рамки конкретных вопросов динамики нелинейных систем, вскрывая природу взаимосвязи закономерного и случайного, механизм и условия возникновения статистических законов и давая им полное динамическое обоснование. Исследования Бориса Валериановича Чирикова уже оказали и продолжают оказывать существенное влияние на мировую науку. Огромное число статей, прямо или косвенно связанных с проблемой динамического хаоса, ежегодно публикуется в научных журналах. Этому кругу проблем регулярно посвящаются многочисленные международные конференции. <...>

Уже в одной из первых работ (1959 г.), посвященных этому вопросу, Борис Валерианович сформулировал свой знаменитый критерий перекрытия резонансов как условие возникновения хаотического поведения полностью детерминированных нелинейных систем. <...>

Виртуозное применение идеи перекрытия нелинейных резонансов позволило Б.В. Чирикову разрешить в дальнейшем большое количество интересных и важных физических проблем. В частности, ему удалось решить (1979 г.) на этом пути поставленную еще в прошлом столетии знаменитую задачу Пуанкаре о структуре и размере области экспоненциально неустойчивого движения (стохастического слоя) в окрестности сепаратрисы нелинейного резонанса. Этот результат послужил основой для построения эффективной оценки скорости диффузии Арнольда – механизма универсальной неустойчивости многомерных нелинейных колебаний, который был предсказан В.И. Арнольдом еще в 1964 г. Это явление играет основную роль в столь различных процессах, как динамика Солнечной системы (включая астероиды, ко-

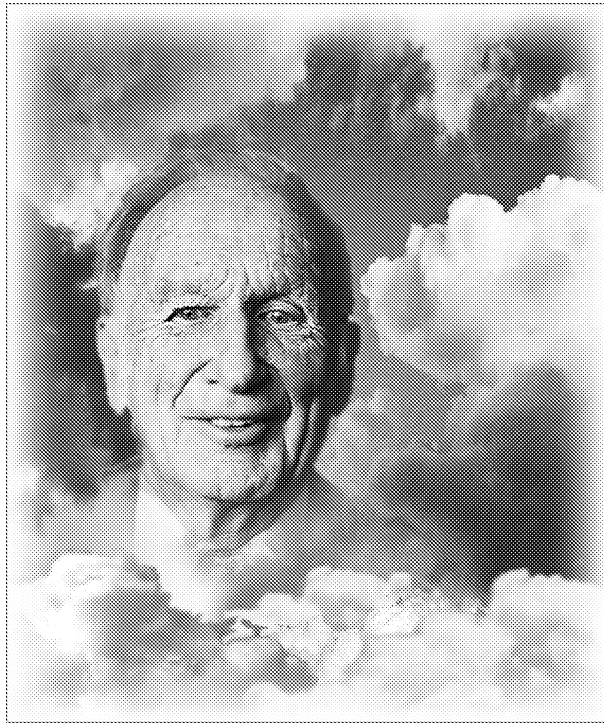
меты и даже планеты), с одной стороны, и удержание протонов в накопительных кольцах современных коллайдеров, с другой. Еще одним впечатляющим примером применения в астрономии разработанных Б.В. Чириковым идей и методов теории динамического хаоса служит установление им на основе известных из исторических летописей дат, зарегистрировавших двадцать восемь появлений кометы Галлея, закона ее движения и доказательство хаотического характера ее динамики. <...>

Начиная с середины 1970-х годов, Борис Валерианович опубликовал вместе со своими сотрудниками ряд пионерских работ, посвященных проявлениям динамического хаоса в поведении квантовых систем. Эти работы, заложившие основы нового научного направления – «квантового хаоса», сразу привлекли к себе широкое внимание. В них был поставлен и проанализирован ряд фундаментальных вопросов, связанных с принципом соответствия квантовой и классической теорий, и открыто явление квантового подавления диффузии, которое имеет много общих черт с широко известной андерсоновской локализацией в квазиодномерных неупорядоченных структурах. Тем самым была установлена нетривиальная связь между явлением динамического квантового хаоса и физикой неупорядоченных систем. Эффекты динамической локализации квантового хаоса ярко проявляются в детально исследованных Б.В. Чириковым с сотрудниками особенностях диффузионного фотоэффекта в микроволновом поле на ридберговских состояниях атома водорода. Предсказанные явления нашли позднее экспериментальное подтверждение.

Дальнейшему развитию концепции квантового псевдохаоса посвящен ряд работ Б.В. Чирикова, где можно найти обсуждение приложений теории к таким фундаментальным вопросам, как природа необратимости статистических законов и роль квантового измерения.

Характерная особенность научного стиля Бориса Валериановича – сочетание строгих аналитических методов и приближенных качественных оценок, основанных на как можно более простых, но адекватных решаемой проблеме моделях. В умении находить простейшие из возможных средств для решения весьма нетривиальных проблем Б.В. Чириков вряд ли имел себе равных. <...>

© Памяти Бориса Валериановича Чирикова. УФН. 2008. Т. 178, № 4. С. 447

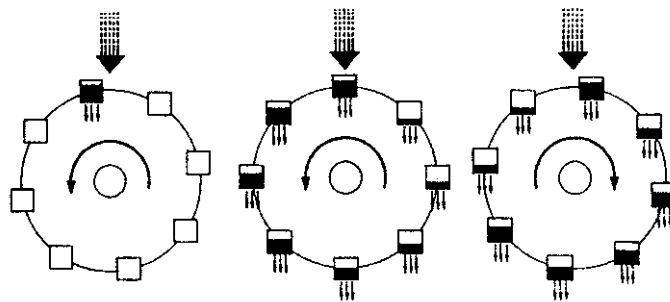


## ЭДВАРД НОРТОН ЛОРЕНЦ

23.05.1917–16.04.2008

16 апреля в США в возрасте 90 лет умер от рака математик и метеоролог Эдвард Лоренц, один из основоположников современной теории динамического хаоса. Его имя известно каждому, кто занимается нелинейной динамикой, а двукрылый аттрактор Лоренца стал графическим символом нашей науки. Приводим отрывок из книги Джеймса Глейка «Хаос», в которой описывается модель, предложенная Лоренцем для объяснения возникновения динамической неустойчивости в простейшей механической системе.

«...Первая хаотическая система, обнаруженная Эдвардом Лоренцем, точно соответствует механическому устройству – водяному колесу, которое может вести себя удивительно сложным образом. Вращающееся колесо имеет те же свойства, что и вращающиеся в процессе конвекции цилиндры жидкости: колесо похоже на их поперечные сечения. Обе системы регулируются (поток воды или теплоты), и обе рассеивают энергию. Жидкость утрачивает теплоту; вода выливается из черпаков колеса. Долгосрочное поведение обеих систем зависит от того, насколько велика управляющая ими энергия. Вода наливается сверху с постоянной скоростью. Если скорость ее небольшая, верхний черпак никогда не становится полным, трение не преодолевается и колесо не поворачивается. (Подобное явление наблюдается в жидкости: если теплоты не достаточно, чтобы преодолеть вязкость,



жидкость останется неподвижной.) С увеличением скорости водяного потока колесо начинает двигаться под тяжестью верхнего черпака (слева) и даже вращаться с постоянной скоростью (в центре). Однако при чрезмерной скорости воды (справа)



вращение колеса может стать хаотичным из-за нелинейных воздействий, появившихся в системе. Черпаки, проходя под водяным потоком, наполняются в зависимости от того, насколько быстро вращается колесо. При быстром вращении колеса им не хватает времени, чтобы наполниться. (Так же и жидкости в быстровращающихся конвекционных завитках недостает времени, чтобы поглотить теплоту.) Кроме того, емкости могут начать двигаться в обратную сторону, не заполнившись водой. В результате полные черпаки на движущейся вверх стороне колеса способны замедлить вращение всей системы, а затем вызвать ее поворот в обратную сторону. Фактически Лоренц обнаружил, что в течение длительных периодов времени вращение может менять свое направление несколько раз, никогда не достигая постоянной скорости и никогда не повторяясь каким-либо предсказуемым образом...»

© Джемс Глейк. Хаос: Создание новой науки. Пер. с англ. М. Нахмансона, Е. Барашковой. СПб.: Амфора, 2001. 398 с.

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*  
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина*  
Оформление художника *Д.В. Соколова*  
Оригинал-макет подготовлен  
*И.А. Пономаревой, О.Н. Строгановой*  
в пакете *L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X*

Подписка на 2008 год осуществляется  
по каталогу Агентства Роспечать  
«Газеты. Журналы», индекс 73498  
и по договору между Подписчиком  
(юридическим или физическим лицом)  
и Издателем (Саратовским государственным университетом)

Стоимость подписки на 2008 год 450 руб. (6 номеров)  
Заявки на заключение договора принимаются  
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012, Саратов, Астраханская, 83  
Тел./факс: (845-2) 52-38-64  
E-mail: and@nonlin.sgu.ru

Распространение журнала осуществляется  
редакцией журнала по адресной системе

Сдано в набор 3.04.08. Подписано к печати 25.04.08  
Формат 70x108/16. Бумага «Снегурочка». Печать трафаретная  
Усл. печ. л. 14,35(10,25). Уч.-изд. л. 14,0. Тираж 200. Заказ 402

Отпечатано на ризографе GR 3750 редакции журнала

© Редакция журнала  
«Известия вузов. ПНД», 2008  
© Оформление художника  
Д.В. Соколова, 2008