



СРЫВНОЙ ФЛАТТЕР КАК ОДИН ИЗ МЕХАНИЗМОВ ВОЗБУЖДЕНИЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ ЛИНИЙ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧИ

П.С. Ланда

В настоящей статье рассматриваются автоколебания проводов, вызванные срывом вихрей с их поверхности (так называемый срывной флаттер).

Ключевые слова: Срывной флаттер, ветровой резонанс, дорожка Кармана, автоколебания.

Введение

Известно, что при определенных условиях провода линий электропередачи начинают совершать колебания большой амплитуды, имеющие довольно сложный характер. Эти колебания возникают как в безветренную погоду, так и при наличии ветра. Один из механизмов возбуждения автоколебаний в безветренную погоду связан с нагревом проводов протекающим по ним электрическим током. Этот механизм получил название термомеханического [1, 2]. Он связан с взаимодействием механических колебаний провода с колебаниями его температуры. Возбуждение колебаний проводов при наличии ветра можно объяснить целым рядом причин. По-видимому, наиболее существенной из них является случайное воздействие на провод нерегулярных порывов ветра, вызывающих непрерывное возбуждение собственных колебаний провода. В качестве одной из других возможных причин можно указать на явление так называемого срывного флаттера, возникающего из-за взаимодействия колебаний провода с обтекающими его вихрями. Известно, что срывной флаттер является причиной многих технических катастроф, наиболее известной из которых является разрушение Такомакского моста, произошедшее в 1940 году. Процесс этого разрушения детально описан в целом ряде книг, например, в [3, 4].

С глубокой древности известно, что при обтекании протяженных тел потоком воздуха или жидкости тела начинают издавать звуки. Эти звуки получили название «эоловы тона». По мере развития науки было выяснено, что эти звуки вызваны колебаниями обтекаемых тел, обусловленными образованием за обтекаемым телом

приблизительно периодической вихревой структуры. Эта структура была названа по имени одного из главных своих исследователей «дорожкой Кармана» [5]. Возникновение дорожки Кармана за обтекаемым телом при определенных условиях приводит к возбуждению интенсивных автоколебаний этого тела. Явление возбуждения таких автоколебаний мы будем называть срывным флаттером¹, несмотря на то, что в некоторых книгах (см., например, [6, 7]) различают срывной флаттер, когда колебания аэродинамических сил порождаются колебаниями тела, и вынужденные колебания – «ветровой резонанс», когда дорожка Кармана существует и при обтекании неподвижного тела. Мы объединяем оба явления одним названием, потому что полагаем, что механизм возбуждения обоих типов колебаний одинаковый. Заметим только, что при определении срывного флаттера, даваемого в [6], он может возбуждаться только жестко, что в принципе вполне возможно, но не отмечается ни в одной из известных работ.

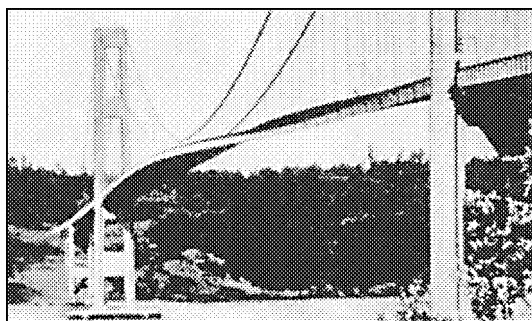


Рис. 1. Кадр из фильма о катастрофе Такомакского моста, демонстрирующий его состояние за полчаса до разрушения [3, 4]

Чаще всего срывной флаттер (в нашем, более общем, понимании) возникает в случае, когда одна из собственных частот колебаний тела приблизительно равна или кратна частоте срыва вихрей с этого же тела, когда оно неподвижно. Колебания типа срывного флаттера наблюдались неоднократно у многих подвесных мостов, стальных заводских труб, винтов вертолетов, перископов подводных лодок, лопаток компрессоров, турбин в турбореактивных двигателях, опущенных с кораблей тро-

сов в океане и т.п. [3, 4, 6, 8–10]. По-видимому, колебания этого типа являются одними из основных при раскачивании проводов при наличии ветра. Экспериментальные исследования срывного флаттера и снимки ряда катастроф, связанных с этим явлением (например, кадр из фильма о катастрофе Такомакского моста, демонстрирующий его состояние за полчаса до разрушения [3, 4] (рис. 1, заимствованный из [4]), показывают, что преобладающими при флаттере являются крутильные колебания тела, а изгибная составляющая является малой. Этим срывной флаттер существенно отличается от значительно более широко известного изгибно-крутильного флаттера, являвшегося основной причиной катастроф самолетов на заре их появления [11]. Однако, как показано в работе [12], учет даже очень малых изгибных колебаний может существенно изменить критическую скорость и характер срывного флаттера.

Следует заметить, что теоретических работ, связанных с явлением срывного флаттера, очень мало, а последовательная строгая теория просто отсутствует. По-видимому, это объясняется большой сложностью проблемы и тем, что при полете самолетов этот вид флаттера встречается редко [6]. В детальной монографии [6] написано: «Классический тип флаттера связан с потенциальным потоком и обычно, но не обязательно, включает взаимодействие двух или более степеней свободы.

¹Заметим, что термин «флаттер» происходит от английского слова «flutter», что означает «дрожание».

Неклассический тип флаттера, который до сих пор трудно анализировать на чисто теоретической основе, может иметь место при сорванном потоке, периодических срывах потока с прилеганием его вновь...»². По нашему мнению, основная трудность теории срывного флаттера лежит в строгом описании спутной струи позади обтекаемого тела, возникающей при срыве вихрей. В той или иной мере срывной флаттер рассматривается в книгах [3, 4, 6–10, 14–16].

В большинстве имеющихся работ явление срывного флаттера объясняют как возникновение вынужденных резонансных колебаний под действием периодической силы, вызванной срывом вихрей и имеющей заданную частоту, зависящую от скорости потока, размеров и формы обтекаемого тела. Частота этой силы определяется из условия постоянства так называемого числа Струхала [17]. В первую очередь, такое объяснение вступает в противоречие с известными экспериментальными данными относительно возникновения срывного флаттера достаточно длинных тросов, обтекаемых течениями, имеющими различную скорость в разных точках троса. Это противоречие связано с тем, что срывной флаттер не является вынужденными колебаниями, а представляет собой единый автоколебательный процесс. Поскольку сам процесс срыва вихрей по многим признакам является автоколебательным [1], а обтекаемое тело представляет собой колебательную нагрузку с одной или несколькими собственными частотами, то явление срывного флаттера, по-видимому, должно быть подобно процессу автоколебаний в системе, содержащей как активные, так и пассивные колебательные элементы. Классическим примером такой системы является генератор с дополнительным колебательным контуром [18–21].

К признакам, указывающим на автоколебательный характер процесса срыва вихрей с обтекаемого тела, можно отнести следующие.

- Пульсации скорости и давления в дорожке Кармана имеют довольно узкий спектр с ярко выраженным максимумом на частоте, соответствующей числу Струхала $St \approx 0.2$.

- Процесс срыва вихрей с обтекаемого тела может быть синхронизован, если возбудить колебания этого тела на некоторой заданной частоте, приблизительно равной или кратной частоте срыва вихрей с неподвижного тела [22–26], причем характер зависимости частоты срыва вихрей с колеблющегося тела от расстройки между частотой колебаний тела и частотой срыва вихрей с неподвижного тела полностью совпадает с характером хорошо известной зависимости частоты синхронных колебаний генератора от расстройки между частотой свободных колебаний и частотой внешней силы [1]. Следует отметить, что, как и в генераторах, синхронизация может происходить не только на основной частоте, но и на ее гармониках и субгармониках.

Отметим, что на автоколебательный характер срывного флаттера было указано в работах [27, 28], где излагались результаты теоретических и экспериментальных исследований некоторых примеров срывного флаттера. Однако приведенная там теория не является достаточно строгой.

²Следует, правда, отметить, что термин «потенциальный поток» здесь является неудачным, потому что в потенциальном безграничном потоке идеальной жидкости никакого флаттера быть не может из-за равенства нулю всех аэродинамических сил (парадокс Даламбера) [13].

1. Основные уравнения

В настоящей работе мы рассмотрим явление срывного флаттера на простейшей модели колебаний упругого кругового цилиндра длины l , помещенного перпендикулярно потоку и закрепленного на концах (рис. 2). Обтекание кругового цилиндра рассмотрено в книгах [8, 15] и статьях [24, 29]. В [15] предполагается, что цилиндр поддерживается пружиной и демпфером. Как уже отмечалось, за обтекаемым цилиндром образуется вихревая дорожка Кармана [30], которая в диапазоне чисел Рейнольдса $40 < Re < 150$ является регулярной, а при $150 < Re < 300$ – турбулентной. При $300 < Re < 2 \cdot 10^5$ дорожка Кармана снова становится близкой к регулярной, но с турбулентными всплесками. Затем в некоторой области при

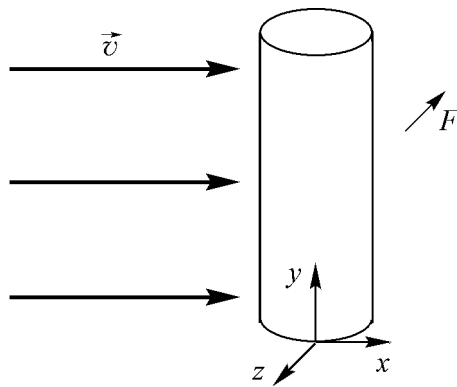


Рис. 2. Схематическое изображение колебаний упругого цилиндра длины l , происходящих вдоль оси z , при обтекании потоком в направлении оси x

$Re > 5 \cdot 10^6$ снова наблюдается доминирующая частота срыва вихрей [31]. Заметим, что такое чередование областей различного поведения при изменении параметра характерно для хаотических автоколебательных систем [1, 32]. В частности, область $300 < Re < 2 \cdot 10^5$, по-видимому, может рассматриваться как область перемежаемости. Сказанное лишний раз свидетельствует, что образование дорожки Кармана представляет собой автоколебательный процесс. Ниже мы будем рассматривать только область значений числа Рейнольдса, где срыв вихрей является близким к периодическому.

При срывном обтекании цилиндра в направлении оси x со скоростью V , одинаковой для всех сечений цилиндра³, на это сечение действуют периодическая (или близкая к периодической) подъемная сила $F_{kz}(t)$, направленная вдоль оси z , и сила лобового сопротивления $F_{rx}(t)$, направленная вдоль оси x навстречу потоку и представляющая собой сумму двух составляющих: не зависящей от времени (или медленно меняющейся со временем) и периодической (или близкой к периодической) с периодом, вдвое меньшим, чем период подъемной силы. В случае неподвижного цилиндра в широком диапазоне чисел Рейнольдса частота подъемной силы близка к частоте срыва вихрей с поверхности цилиндра ω_v , а частота силы лобового сопротивления близка к $2\omega_v$ [24, 29]. Разница периодов подъемной силы и силы лобового сопротивления возникает из-за того, что частота подъемной силы определяется расстоянием между вихрями только вдоль одной из сторон дорожки Кармана (2λ), тогда как частота силы лобового сопротивления определяется расстоянием между вихрями вдоль обеих сторон дорожки Кармана (λ) (рис. 3).

³Предположение о том, что все сечения цилиндра обтекаются с одинаковой скоростью, не принципиально. Задача может быть решена с использованием, например, метода Галеркина [33] и в случае, когда это предположение не выполняется.

Частота ω_v связана с числом Струхалия и скоростью обтекания выражением

$$\omega_v = \frac{2\pi St}{D} V, \quad (1)$$

где D – диаметр цилиндра. Эксперименты показывают, что при $40 < Re < 150$ число Струхалия растет, затем становится приблизительно постоянным и равным 0.2, а далее снова начинает расти. В области $2 \cdot 10^5 < Re < 5 \cdot 10^6$ вихревая дорожка является сильно турбулентной, так что число Струхалия определить невозможно. Далее, при $Re > 5 \cdot 10^6$, число Струхалия $St \approx 0.3$. Все сказанное отражено на рис. 4, заимствованном из [8].

Уравнения, позволяющие строго описать подъемную силу и силу лобового сопротивления в случае срывного обтекания, насколько нам известно, в литературе отсутствуют. В основном приводятся только выражения для их амплитуд и частоты [4, 8, 15, 24, 29].

Амплитуды сил $F_{kz}(t)$ и $F_{rx}(t)$ во всех известных книгах по аэроупругости (см., например, [8, с. 307]) находятся из соображений размерности. Соответствующие формулы можно записать в виде

$$A_{kz} = c_k(Re) S_{yz} \frac{\rho V^2}{2}, \quad A_{rx} = c_r(Re) S_{yz} \frac{\rho V^2}{2}, \quad (2)$$

где $c_k(Re)$ и $c_r(Re)$ – коэффициенты, зависящие от степени обтекаемости тела (чем хуже обтекаемость, тем больше значения c_k и c_r) и от числа Рейнольдса; S_{yz} – площадь проекции тела на плоскость yz , перпендикулярную направлению потока. Заметим, что коэффициент $c_r(Re)$ всегда много меньше, чем $c_k(Re)$, то есть переменная составляющая силы лобового сопротивления мала по сравнению с подъемной силой.

Для колеблющегося цилиндра к силам $F_{kz}(t)$ и $F_{rx}(t)$ следует добавить силы, связанные с нестационарностью обтекания. Эти силы определяют присоединенную массу цилиндра и дополнительный коэффициент затухания. Поэтому их учет, по-видимому, не имеет принципиального значения. Кроме того, в случае колеблющегося цилиндра коэффициенты $c_k(Re)$ и $c_r(Re)$ зависят от амплитуды колебаний.

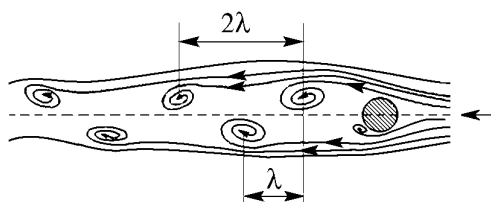


Рис. 3. Схематическое изображение дорожки Кармана при обтекании цилиндра

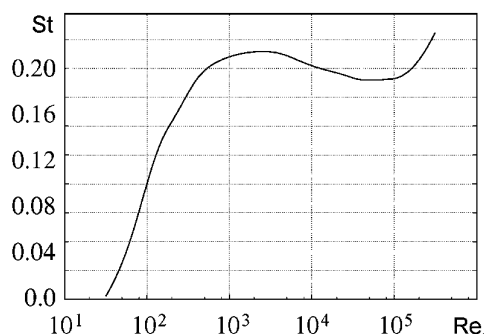


Рис. 4. Зависимость числа Струхалия от числа Рейнольдса при поперечном обтекании неподвижного цилиндра с круглым сечением

Рассматривая колеблющийся цилиндр как струну, запишем уравнения его колебаний вдоль осей x и z в виде

$$\begin{aligned} \rho_s \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u_x}{\partial t} - T \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} &= \frac{F_{rx}(t)}{A_{rx}}, \\ \rho_s \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u_z}{\partial t} - T \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} &= \frac{F_{kz}(t)}{A_{kz}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $u_x(y, t)$ и $u_z(y, t)$ – смещения цилиндра вдоль осей x и z , отнесенные к амплитудам A_{rx} и A_{kz} , соответственно; ρ_s – линейная плотность струны; T – натяжение струны; α – коэффициент затухания. Если цилиндр закреплен на концах, то граничные условия имеют вид

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0, \quad u_z(0, t) = 0, \quad u_z(l, t) = 0. \quad (4)$$

Принимая во внимание, что силы $F_{rx}(t)$ и $F_{kz}(t)$ отличны от нуля только при $0 \leq y \leq l$ и частота силы сопротивления вдвое больше частоты подъемной силы, представим $F_{rx}(t)$ и $F_{kz}(t)$ в виде

$$\begin{aligned} F_{rx}(t) &= A_{rx} \sum_{j=1}^{\infty} f_{rx}^{(j)}(t) \sin\left(\frac{2(2j-1)\pi}{l} y\right), \\ F_{kz}(t) &= A_{kz} \sum_{j=1}^{\infty} f_{kz}^{(j)}(t) \sin\left(\frac{(2j-1)\pi}{l} y\right), \\ (j &= 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$f_{rx}^{(j)}(t) = \frac{F_{rx}(t)}{2(2j-1)\pi A_{rx}}, \quad f_{kz}^{(j)}(t) = \frac{F_{kz}(t)}{(2j-1)\pi A_{kz}}.$$

Если частота срыва вихрей с колеблющегося цилиндра близка к n -й собственной частоте колебаний цилиндра, то в разложениях (5) можно оставить только по одному члену:

$$\begin{aligned} F_{kz}(t) &= A_{kz} f_{kz}^{(n)}(t) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{l} y\right), \\ F_{rx}(t) &= A_{rx} f_{rx}^{(2n)}(t) \sin\left(\frac{2(2n-1)\pi}{l} y\right). \end{aligned} \quad (6)$$

Решая далее уравнения (3) методом разложения по собственным функциям колебаний закрепленной на концах струны без затухания, то есть полагая

$$\begin{aligned} u_x(y, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} U_x^{(j)}(t) \sin\left(\frac{(4j-1)\pi}{l} y\right), \\ u_z(y, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} U_z^{(j)}(t) \sin\left(\frac{(2j-1)\pi}{l} y\right) \end{aligned}$$

и сохраняя в найденных разложениях тоже только по одному члену, для функций $U_z^{(n)}(t)$ и $U_x^{(2n)}(t)$ получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U_z}{dt^2} + 2\delta \frac{dU_z}{dt} + \omega_n^2 U_z &= \frac{f_{kz}^{(n)}(t)}{\rho_s}, \\ \frac{d^2 U_x}{dt^2} + 2\delta \frac{dU_x}{dt} + 4\omega_n^2 U_x &= \frac{f_{rx}^{(2n)}(t)}{\rho_s}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\delta = \alpha/(2\rho_s) \ll \omega_n$.

Из-за того, что частоты колебаний в направлениях x и z различны, суммарные колебания будут иметь довольно сложный характер. Более того, в диапазонах чисел Рейнольдса, где процесс срыва вихрей является случайным, они также будут случайными, что довольно часто наблюдается в реальных линиях электропередачи.

Как уже указывалось, процесс срыва вихрей по многим признакам имеет автоколебательный характер, обусловленный образованием за обтекаемым телом спутной струи. Поскольку какие-либо уравнения, позволяющие строго вывести выражения для сил $F_{kz}(y, t)$ и $F_{rx}(y, t)$ в литературе отсутствуют, для их вычисления мы будем использовать модельные уравнения автоколебаний. Используя модель автоколебаний в виде генератора ван дер Поля [1] и принимая во внимание экспериментальный факт, что колебания цилиндра могут синхронизовать срыв вихрей, запишем следующие уравнения для $f_{rx}(t)$ и $f_{kz}(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f_{kz}}{dt^2} - \mu \left(1 - 4f_{kz}^2\right) \frac{df_{kz}}{dt} + \omega_v^2 f_{kz} &= m_1 U_z, \\ \frac{d^2 f_{rx}}{dt^2} - \mu \left(1 - 4f_{rx}^2\right) \frac{df_{rx}}{dt} + 4\omega_v^2 f_{rx} &= m_2 U_x, \end{aligned} \quad (8)$$

где μ – малый параметр, $m_{1,2}$ – некоторые коэффициенты. Отметим, что члены $m_1 U_z$ и $m_2 U_x$ отвечают за синхронизацию срыва вихрей колебаниями цилиндра.

В стационарном режиме из уравнений (7) следует, что в случае неподвижного цилиндра имеем

$$F_{kz} = A_{kz} f_{kz} \approx A_{kz} \cos(\omega_v t), \quad F_{rx} = A_{rx} f_{rx} \approx A_{rx} \cos(2\omega_v t + \varphi), \quad (9)$$

где φ – некоторый сдвиг фаз. Заметим, что формулы (9) находятся в полном соответствии с выражениями для подъемной силы и силы лобового сопротивления, приведенными в работе [29].

Система уравнений (6), (7) описывает две независимых автоколебательных системы, каждая из которых обладает двумя степенями свободы. На языке радиофизики каждая автоколебательная система представляет собой генератор с дополнительным колебательным контуром, связанным с основным контуром через емкость.

Задача об автоколебаниях в подобном генераторе рассмотрена А.А. Андроновым и А.А. Виттом методом малого параметра Пуанкаре [18], С.П. Стрелковым качественными методами [19] и несколько позднее К.Ф. Теодорчиком [20], использовавшим энергетический метод. Заметим, что только К.Ф. Теодорчик рассмотрел генератор с емкостной связью между контурами. Во всех указанных работах задача

решалась в одночастотном приближении, то есть рассматривался только синхронный режим.

Рассмотрим систему, описываемую первыми из уравнений (6) и (7). Для приближенного решения этой системы используем метод усреднения, разработанный Н.Н. Боголюбовым [34] и развитый Ю.А. Митропольским [35]. Используем этот метод в форме, изложенной в [21]. Для этого перепишем уравнения (6), (7), введя условный малый параметр ε и безразмерное время $\tau = \omega t$, где ω – частота автоколебаний,

$$\begin{aligned} \ddot{f}_{kz} + f_{kz} &= \varepsilon \left[\left(1 - \frac{\xi^2}{\tilde{\omega}^2}\right) f_{kz} + \frac{\tilde{m}_1}{\tilde{\omega}^2} U_z + \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\omega}} \left(1 - 4f_{kz}^2\right) \dot{f}_{kz} \right], \\ \ddot{U}_z + U_z &= \varepsilon \left[\frac{f_{kz}(t)}{\rho_s \omega_n^2 \tilde{\omega}^2} + \left(1 - \frac{1}{\tilde{\omega}^2}\right) U_z - \frac{2\tilde{\delta}}{\tilde{\omega}} \dot{U}_z \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $\tilde{\mu} = \mu/\omega_n$, $\tilde{\delta} = \delta/\omega_n$, $\tilde{m}_1 = m_1/\omega_n^2$, $\xi = \omega_v/\omega_n$ – расстройка частот срыва вихрей и цилиндра, $\tilde{\omega} = \omega/\omega_n$ – расстройка между частотой автоколебаний ω и собственной частотой колебаний цилиндра, точки означают дифференцирование по безразмерному времени τ .

Перейдем в уравнениях (10) к новым переменным $A_{1,2}(\tau)$, $\varphi_{1,2}(\tau)$, определяемым уравнениями

$$\begin{aligned} f_{kz}(\tau) &= A_1(\tau) \cos(\tau + \varphi_1(\tau)), & \dot{f}_{kz}(\tau) &= -A_1(\tau) \sin(\tau + \varphi_1(\tau)), \\ U_z(\tau) &= A_2(\tau) \cos(\tau + \varphi_2(\tau)), & \dot{U}_z(\tau) &= -A_2(\tau) \sin(\tau + \varphi_2(\tau)). \end{aligned} \quad (11)$$

С учетом (11) уравнения (10) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 \cos \Phi_1 - A_1 \dot{\varphi}_1 \sin \Phi_1 &= 0, \\ -\left(\dot{A}_1 \sin \Phi_1 + A_1 \dot{\varphi}_1 \cos \Phi_1\right) &= \\ &= \varepsilon \left[\left(1 - \frac{\xi^2}{\tilde{\omega}^2}\right) A_1 \cos \Phi_1 - \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\omega}} \left(1 - 4A_1^2 \cos^2 \Phi_1\right) A_1 \sin \Phi_1 + \frac{\tilde{m}_1}{\tilde{\omega}^2} A_2 \cos \Phi_2 \right], \\ \dot{A}_2 \cos \Phi_2 - A_2 \dot{\varphi}_2 \sin \Phi_2 &= 0, \\ -\left(\dot{A}_2 \sin \Phi_2 + A_2 \dot{\varphi}_2 \cos \Phi_2\right) &= \\ &= \varepsilon \left[\left(1 - \frac{1}{\tilde{\omega}^2}\right) A_2 \cos \Phi_2 + \frac{2\tilde{\delta}}{\tilde{\omega}} A_2 \sin \Phi_2 + \frac{\tilde{m}_2}{\tilde{\omega}^2} A_1 \cos \Phi_1 \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где $\Phi_1 = \tau + \varphi_1$, $\Phi_2 = \tau + \varphi_2$, $\tilde{m}_2 = 1/(\rho_s \omega_n^2)$.

Согласно методу усреднения, в первом приближении нужно разрешить уравнения (12) относительно \dot{A}_1 , \dot{A}_2 , $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$ и усреднить полученные уравнения по быст-

рому времени τ . В результате получаем

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= \frac{\varepsilon}{2\tilde{\omega}} \left(\tilde{\mu}(1 - A_1^2)A_1 - \frac{\tilde{m}_1}{\tilde{\omega}} A_2 \sin \varphi \right), \\ \dot{A}_2 &= -\frac{\varepsilon}{2\tilde{\omega}} \left(2\tilde{\delta}A_2 - \frac{\tilde{m}_2}{\tilde{\omega}} A_1 \sin \varphi \right), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= -\frac{\varepsilon}{2A_1} \left[\left(1 - \frac{\xi^2}{\tilde{\omega}^2} \right) A_1 + \frac{\tilde{m}_1}{\tilde{\omega}^2} A_2 \cos \varphi \right], \\ \dot{\varphi}_2 &= -\frac{\varepsilon}{2A_2} \left[\left(1 - \frac{1}{\tilde{\omega}^2} \right) A_2 + \frac{\tilde{m}_2}{\tilde{\omega}^2} A_1 \cos \varphi \right], \end{aligned} \quad (14)$$

где $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ – разность фаз между колебаниями подъемной силы и колебаниями цилиндра.

В синхронном режиме все производные в уравнениях (13), (14) можно положить равными нулю. Тогда получим следующую систему уравнений для определения амплитуд A_1 , A_2 , разности фаз φ и относительной частоты синхронных автоколебаний $\tilde{\omega}$:

$$\tilde{\mu}(1 - A_1^2) - \frac{\tilde{m}_1}{\tilde{\omega}} \frac{A_2}{A_1} \sin \varphi = 0, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} 2\tilde{\delta} \frac{A_2}{A_1} - \frac{\tilde{m}_2}{\tilde{\omega}} \sin \varphi = 0, \quad 1 - \frac{\xi^2}{\tilde{\omega}^2} + \frac{\tilde{m}_1}{\tilde{\omega}^2} \frac{A_2}{A_1} \cos \varphi = 0, \\ \left(1 - \frac{1}{\tilde{\omega}^2} \right) \frac{A_2}{A_1} + \frac{\tilde{m}_2}{\tilde{\omega}^2} \cos \varphi = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Исключая из уравнений (16) отношение амплитуд A_2/A_1 , получаем

$$\tilde{\omega}(\tilde{\omega}^2 - \xi^2) + \frac{\tilde{m}_1\tilde{m}_2}{4\tilde{\delta}} \sin 2\varphi = 0, \quad (\tilde{\omega}^2 - 1) \operatorname{tg} \varphi + 2\tilde{\delta}\tilde{\omega} = 0. \quad (17)$$

Уравнения (17) удобно решать, записав их в виде

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \xi^2) \left((1 - \omega^2)^2 + 4\tilde{\delta}^2\omega^2 \right) + \tilde{m}_1\tilde{m}_2(1 - \omega^2) = 0, \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\tilde{\delta}\omega}{1 - \omega^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Вычислим теперь зависимости амплитуд автоколебаний от расстройки, используя уравнения (15) и (16). Из этих уравнений следует, что

$$A_1 = \sqrt{1 - \frac{\tilde{m}_1\tilde{m}_2}{2\tilde{\mu}\tilde{\delta}\tilde{\omega}^2} \sin^2 \varphi}, \quad A_2 = \frac{\tilde{m}_2}{2\tilde{\delta}\tilde{\omega}} A_1 \sin \varphi. \quad (19)$$

Подставляя сюда значения $\tilde{\omega}(\xi)$ и $\varphi(\xi)$, следующие из уравнений (17), находим зависимости A_1 и A_2 от ξ .

Примеры зависимостей $\omega/\omega_2 - 1$ и φ от $\xi - 1$ для $\delta/\omega_2 = 0.1$, $m_1m_2/\omega_2^4 = 0.05$ и $m_1m_2/\omega_2^4 = 0.15$ приведены на рис. 5. Из рис. 5, а видно, что при $\xi \leq \xi_{\text{cr}}$, то

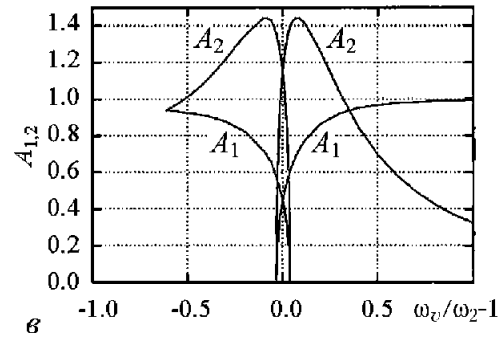
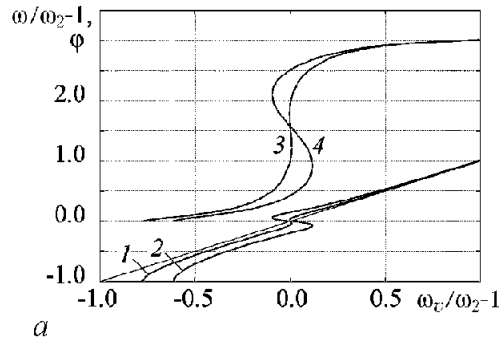


Рис. 5. Зависимости относительной частоты автоколебаний в синхронном режиме (1, 2) и разностей фаз между колебаниями подъемной силы и колебаниями цилиндра (3, 4) (а) и амплитуд автоколебаний подъемной силы A_1 и цилиндра A_2 (б, в) от расстройки между частотами срыва вихрей с неподвижного цилиндра и собственных колебаний цилиндра для $\delta/\omega_2 = 0.1$ и различных значений $m_1 m_2/\omega_2^4$: 0.05 (1, 3) (б) и 0.15 (2, 4) (в)

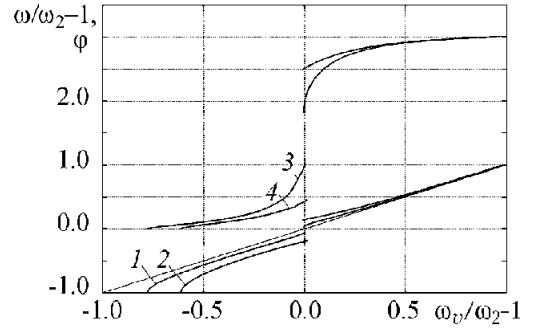
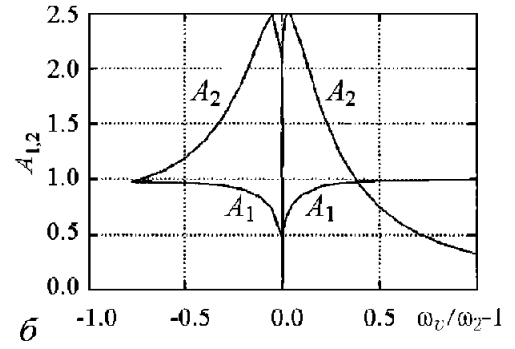


Рис. 6. Устойчивые участки зависимостей относительной частоты автоколебаний в синхронном режиме (1, 2) и разностей фаз между колебаниями подъемной силы и колебаниями цилиндра (3, 4) от расстройки между частотами срыва вихрей с неподвижного цилиндра и собственных колебаний цилиндра для $\delta/\omega_2 = 0.1$ и различных значений $m_1 m_2/\omega_2^4$: 0.05 (1, 3) и 0.15 (2, 4)

есть при относительно малых значениях частоты срыва вихрей с неподвижного цилиндра, синхронные автоколебания невозможны. Значение ξ_{cr} может быть найдено аналитически, исходя из первого уравнения (18). Оно равно $\xi_{cr} = \sqrt{m_1 m_2/\omega_n^4}$. При увеличении расстройки частота автоколебаний приближается к частоте колебаний генератора в отсутствие дополнительного контура, но не монотонно. В окрестности $\xi = 1$ происходит затягивание частоты, при котором частота автоколебаний зависит от начального значения частоты и от направления ее изменения. В этой области результаты качественно совпадают с изложенными в [20]. Вне области синхронизации, то есть при $\xi \leq \xi_{cr}$ одночастотный режим не существует, и автоколебания представляют собой биения. Вблизи границы области синхронизации частоту биений можно вычислить подобно тому, как это делается для генератора ван дер Поля (см., например, [21]).

Зависимости амплитуд колебаний в основном контуре A_1 и дополнительном A_2 , определяемые уравнениями (19), показаны на рис. 5, б и в. В области резонанса обе амплитуды имеют минимум, но по обе стороны минимума они изменяются по-разному: в основном контуре обе амплитуды монотонно нарастают, тогда как изменения амплитуд колебаний в дополнительном контуре имеют максимумы вблизи $\xi = 1$.

Приведенные на рис. 5 зависимости построены без учета устойчивости найденных решений. Уравнения (6), (7) позволяют провести исследование устойчивости. Устойчивые участки зависимостей, показанных на рис. 5, а, приведены на рис. 6. Мы видим, что за счет неустойчивости некоторые участки зависимостей, представленных на рис. 5, а, выпадают.

В заключение заметим, что найденный здесь эффект несуществования одночастотного режима автоколебаний не имеет места в случае индуктивно связанных контуров. По-видимому, именно этим можно объяснить тот факт, что этот эффект не нашел отражения в литературе. Следует отметить, что в работе К.Ф. Теодорчика этот эффект не был замечен.

Заключение

Итак, использование модельных уравнений для срыва вихрей с поверхности колеблющегося цилиндра позволяет рассчитать амплитуды и частоты автоколебаний, возникающих за счет срыва вихрей с поверхности упругого цилиндра, то есть решить задачу о срывном флаттере.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 06-08-0025а.

Библиографический список

1. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. Москва: Наука-Физматлит, 1997.
2. Ланда П.С. Автоколебания провода, нагреваемого электрическим током с учетом тензорезистивного эффекта // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 1. С. 19.
3. Rocard Y. Dynamique Générale des Vibrations. Paris, Masson et C^{ie}, Editeurs, 1949.
4. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. Москва, Наука, 1979.
5. Karman Th. von Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter in einer Flüssigkeit erfährt. Göttingen Nachrichten. 1911. P. 178; 1912. С. 186.
6. Бисплингхофф Р.Л., Эшли Х., Халфмэн Р.Л. Аэроупругость. Москва: ИЛ, 1958, стр. 14, 541.
7. Казакевич М.И. Аэродинамика мостов. Москва: Транспорт, 1987.
8. Фершинг Г. Основы аэроупругости. Москва: Машиностроение, 1984.
9. Гольденблат И.И. Современные проблемы колебаний и устойчивости инженерных сооружений. М.: Госстройиздат, 1947.
10. Рокар И. Неустойчивость в механике. М.: Ил, 1959.
11. Гроссман Е.П. Флаттер. Тр. ЦАГИ, 1937, № 284.
12. Halfman R.L., Johnson H.C., Haley S.M. Evaluation of high-angle-of-attack aerodynamic-derivative data and stall-flutter prediction techniques. N.A.C.A.T.N. p. 2533, 1951.
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
14. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956.

15. *Фын Я.Ц.* Введение в теорию аэроупругости. М.: Физматгиз, 1959.
16. *Девнин С.И.* Гидроупругость конструкций при отрывном обтекании. Л.: Судостроение, 1975.
17. *Strouhal V. von.* Über eine besondere Art der Tonerregung // Ann. Phys. 1878. Vol. 5, № 10. P. 216.
18. *Андронов А.А., Витт А.А.* К математической теории автоколебательных систем с двумя степенями свободы // ЖТФ. 1934. Т. 4, вып. 1. С. 122.
19. *Стрелков С.П., Скибарко А.П.* Качественное исследование процессов в генераторе по сложной схеме. К теории затягивания по Ван-дер-Полю // ЖТФ. 1934. Т. 4, вып. 1. С. 158.
20. *Теодорчик К.Ф.* Автоколебательные системы. М.: Гостехиздат, 1952.
21. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980.
22. *Richardson E.G.* Eolian Tones // Proc. Phys. Soc. Lond. 1923. Vol. 36. P. 53.
23. *Павлихина М.А., Смирнов Л.П.* Вихревой след при обтекании колеблющихся цилиндров. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 8. С. 124.
24. *Bishop R.E.D., Hassan A.Y.* The lift and drag forces on a circular cylinder oscillating in a flowing fluid // Proc. Royal Soc. (London). 1964. Vol. A277. P. 51.
25. *Блюмина Л.Х., Федяевский К.К.* Исследование влияния вынужденных колебаний цилиндра в воздушном потоке на механизм срыва вихрей // Известия АН СССР, МЖГ. 1969. № 1. С. 118.
26. *Федяевский К.К., Блюмина Л.Х.* Гидродинамика отрывного обтекания тел. М.: Машиностроение, 1977.
27. *Schnittger J.R.* The aerodynamic mechanism of vibrating compressor blades. Sc. D. Thesis, M.I.T., J. Aeronaut. Sci., 1953.
28. *Sisto F.* Stall flutter in cascades // J. of the Aeronaut. Sci. 1953. Vol. 20, № 9.
29. *Bishop R.E.D., Hassan A.Y.* The lift and drag forces on a circular cylinder in a flowing fluid // Proc. Royal Soc. (London). 1964. Vol. A277. P. 32.
30. *Karman Th.* Über den Mechanismus des Flüssigkeitsund Luftwiderstands // Phys. Z., Bd. 13. 1912. SS. 49–59.
31. *Roshko A.* Experiments on the the flow past a circular Cylinder at very high Reynolds number // J. Fluid Mech. 1961. Vol. 10. P. 345.
32. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
33. *Ланда П.С.* Автоколебания в распределенных системах. М.: Наука, 1983.
34. *Боголюбов Н.Н.* Теория возмущений в нелинейной механике. В сб. Ин-та строит. механики АН УССР. 1950. Т. 14. С. 9.
35. *Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наукова думка, 1971.

Поступила в редакцию 22.01.2009

STALL FLUTTER AS ONE OF MECHANISMS OF TRANSMISSION LINE SELF-OSCILLATIONS

P.S. Landa

Self-oscillations of wires caused by the vortex separation from the wire surface (so called stall flutter) are considered.

Keywords: Stall flutter, wind resonance, Karman wake, self-oscillations.

Ланда Полина Соломоновна – родилась в 1931 году в Киеве, окончила физический факультет МГУ в 1953 году. С 1956 года работает на физическом факультете МГУ. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1959) и доктора физико-математических наук в Горьковском госуниверситете (1972) в области теории колебаний и волн. Профессор, ведущий научный сотрудник МГУ. Область научных интересов – теория колебаний и волн, радиофизика, применение методов нелинейной динамики в различных областях науки. Автор и соавтор пяти монографий по колебаниям и волнам, в том числе монографии «Стохастические и хаотические колебания», переведенной на английский язык, а также монографии «Нелинейные колебания и волны в динамических системах», вышедшей в издательстве «Kluwer» (Голландия). Член Национального комитета по механике (Россия). Опубликовала много научных статей по направлениям, указанным выше. Член редакционной коллегии журналов «Chaos, Solitons and Fractals» и «Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика».

E-mail: landa@phys.msu.su

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
119899, Москва, ГСП В-234, Воробьевы горы, МГУ





МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ СИНХРОННЫХ РЕЖИМОВ В АНСАМБЛЯХ НЕИДЕНТИЧНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ:

Два элемента

А.К. Крюков, Г.В. Осипов, А.В. Половинкин

Изучается синхронизация в системе двух связанных неидентичных осцилляторов Бонхоффера–ван дер Поля. Доказано сосуществование двух синхронных режимов в системе. Рассмотрены механизмы возникновения и исчезновения синхронных режимов. Исследовано влияние флуктуаций на синхронные режимы. Обнаружено, что шум может приводить к следующим явлениям: срыву синхронизации и возникновению биений; флуктуационно-индуцированному устранению бистабильности; флуктуационно-индуцированной перемежаемости синхронных режимов без срыва синхронизации.

Ключевые слова: Синхронизация, мультистабильность, синхронный режим, численные методы, моделирование, стохастическая система, ФитцХью–Нагумо, Бонхоффер–ван дер Поля.

Введение

Коллективные эффекты играют серьезную роль в поведении больших ансамблей элементов, будь то биологические, механические, лазерные или электрические системы [1–6]. Однако изучение механизмов и закономерностей, обуславливающих такие эффекты, сразу на больших ансамблях (в общем случае – нелинейных систем) представляет собой чрезвычайно сложную задачу. Тем важнее случаи, когда то или иное явление, оказывающее влияние на поведение больших ансамблей, проявляется в полной мере и на относительно малом количестве элементов. К таким случаям относится и эффект мультистабильности (то есть сосуществования в фазовом пространстве множества аттракторов) в ансамблях неидентичных осцилляторов¹. Мультистабильность может иметь место в системах, состоящих как из малого числа (двух-трех) взаимосвязанных элементов, так и в больших ансамблях – цепочках и решетках. В этой работе рассматривается система из двух связанных осцилляторов Бонхоффера–ван дер Поля. Модель Бонхоффера–ван дер Поля – система

¹Ограничимся рассмотрением случая, когда мультистабильность является эффектом ансамбля. То есть мультистабильность возникает вследствие взаимодействия осцилляторов, для каждого из которых в отсутствие связи характерен единственный режим колебаний.

второго порядка, демонстрирующая множество эффектов, присутствующих в ансамблях нейроноподобных элементов. В работе рассматриваются сценарии возникновения и разрушения синхронных режимов, а также переключения между режимами под влиянием шумов.

1. Модель

Система Бонхоффера–ван дер Поля [13] (иногда называемая системой Фитц Хью–Нагумо) часто применяется для моделирования нейронных сетей и генераторов ритма сердца [14]. Динамика цепочки локально диффузионно связанных неидентичных осцилляторов Бонхоффера–ван дер Поля описывается уравнениями

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x}_j = x_j - \frac{x_j^3}{3} - y_j + \beta(x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}), \\ \dot{y}_j = (x_j + a_j), \\ j = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь β – параметр связи; ε – малая величина; a_j – параметр, отвечающий за период и симметрию колебаний; N – количество элементов.

2. Один элемент

Один элемент описывается системой уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = x - \frac{x^3}{3} - y = F(x, y), \\ \dot{y} = (x + a) = G(x, y), \\ |a| < 1. \end{cases} \quad (2)$$

Система (2) имеет неустойчивое состояние равновесия (фокус при $a > \sqrt{1 - 2\sqrt{\varepsilon}}$ или узел при $a < \sqrt{1 - 2\sqrt{\varepsilon}}$) и устойчивый предельный цикл. Малость параметра ε обуславливает наличие быстрых и медленных движений в элементе.

Типичный фазовый портрет для одного элемента показан на рис. 1, *а*. h_- и h_+ – устойчивые участки кривой медленных движений, h_0 – неустойчивый участок. Для удобства описания динамики участок предельного цикла, лежащий в окрестности h_- , будем называть пассивной фазой, участок в окрестности h_+ – активной фазой. Переход из пассивной фазы в активную и обратно будем называть спайком².

На рис. 1, *б* показан предельный цикл для рассмотренной далее упрощенной модели двух связанных элементов, в которой нелинейная функция в правой части (2) заменена кусочно-линейной аппроксимацией, а параметр ε положен равным нулю.

²Использование понятий спайка, а также пассивной и активной фаз обусловлено возможностью применения полученных результатов в нейробиологии.

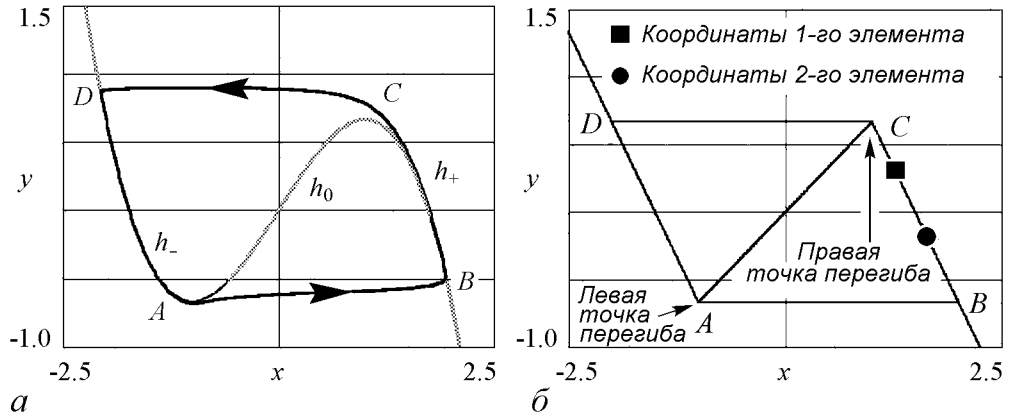


Рис. 1. *a* – Типичный фазовый портрет для одного элемента. Показана кривая медленных движений и предельный цикл. *б* – Взаимное расположение двух элементов на цикле в упрощенной модели (оба в активной фазе)

3. Два связанных элемента

Рассмотрим два связанных элемента Бонхоффера–ван дер Поля

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \dot{x}_1 = F(x_1, y_1) + \beta(x_2 - x_1), \\ \dot{y}_1 = (x + a_1), \\ \varepsilon \dot{x}_2 = F(x_2, y_2) + \beta(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_2 = (x + a_2), \\ F(x_j, y_j) = x_j - \frac{x_j^3}{3} - y_j, \quad j = 1, 2. \end{array} \right. \quad (3)$$

В компьютерных экспериментах было показано, что в этой системе при некоторых значениях параметров существуют два устойчивых предельных цикла. Первый соответствует синфазному синхронному режиму (осциллограмма приведена на рис. 2, *a*), второй – противофазному (осциллограмма на рис. 2, *б*). Будем считать, что два элемента синхронизованы синфазно, если для межспайкового интервала τ_{12} выполняется следующее неравенство: $\tau_{12} \equiv t_2 - t_1 \ll T$, где t_j – время перехода j -го элемента из пассивной фазы в активную, T – период синхронного режима. Если же $\tau_{12} \equiv t_2 - t_1 \sim T/2$, то элементы синхронизованы в противофазе. Реализация в системе того или иного синхронного режима зависит от начальных условий.

Для аналитического доказательства сосуществования синфазного и противофазного синхронных режимов в цепочке модель (3) можно упростить. Для этого нужно положить $\varepsilon = 0$ и заменить нелинейную функцию $F(x_j, y_j)$ на ее кусочно-

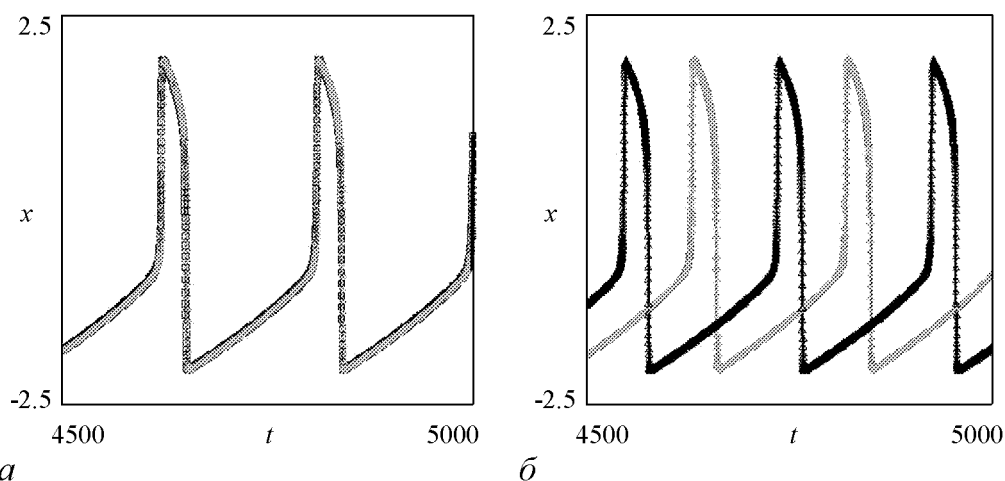


Рис. 2. Осциллограммы элементов $x_1(t)$, $x_2(t)$ в синфазном (а) и противофазном (б) режимах
линейную аппроксимацию

$$F = \begin{cases} \frac{-4}{3}x_j - 2 - y_j, & \text{для } x_j \leq -1, \\ \frac{2}{3}x_j - y_j, & \text{для } -1 < x_j < 1, \\ \frac{-4}{3}x_j + 2 - y_j, & \text{для } x_j \geq 1. \end{cases} \quad (4)$$

Тогда получим кусочно-линейную систему второго порядка

$$\begin{cases} 0 = F(x_1, x_2, y_1, y_2) + \beta(x_2 - x_1), \\ \frac{dy_1}{d\tau} = x_1 + a_1, \\ 0 = F(x_1, x_2, y_1, y_2) + \beta(x_1 - x_2), \\ \frac{dy_2}{d\tau} = x_2 + a_2. \end{cases} \quad (5)$$

Характерное поведение каждого из элементов показано на рис. 1, б. Динамику связанных элементов удобно рассматривать, отмечая их взаимное положение на ветвях h_{\pm} . Тогда в данной системе возможны четыре случая взаимного расположения элементов на цикле:

- 1) «+ +» – оба элемента находятся в активной фазе (этот случай показан на рис. 1, б);
- 2) «+ -» – первый элемент расположен в активной фазе, второй – в пассивной;
- 3) «- +» – первый элемент расположен в пассивной фазе, второй – в активной;
- 4) «- -» – оба элемента находятся в пассивной фазе.

Для каждого из этих случаев система (5) имеет аналитическое решение. Например, для случая «- +» решение выглядит так:

$$y_1^{-+}(t) = \left[\frac{1}{2}(y_1(t_0) - y_2(t_0)) + 2 - (a_1 - a_2)\bar{\beta} \right] \exp\left(-\frac{t - t_0}{2\bar{\beta}}\right) + \left[\frac{1}{2}(y_1(t_0) + y_2(t_0)) - \frac{2}{3}(a_1 + a_2) \right] \exp\left(-\frac{3t - t_0}{4}\right) - 2 - \hat{\beta}a_2 + \hat{\beta}a_1, \quad (6)$$

$$y_2^{-+}(t) = \left[\frac{1}{2}(y_2(t_0) - y_1(t_0)) - 2 + (a_1 - a_2)\bar{\beta} \right] \exp\left(-\frac{t - t_0}{2\bar{\beta}}\right) + \left[\frac{1}{2}(y_1(t_0) + y_2(t_0)) - \frac{2}{3}(a_1 + a_2) \right] \exp\left(-\frac{3t - t_0}{4}\right) + 2 - \hat{\beta}a_2 + \hat{\beta}a_1, \quad (7)$$

где $y_1(t_0), y_2(t_0)$ – начальные условия соответствующей кусочно-линейной аппроксимации, $\bar{\beta} = 2/3 + \beta$ и $\hat{\beta} = 4/3 + \beta$. Сшивая решения с различных временных интервалов, можно получить состояние системы в произвольный момент времени по заданным начальным условиям.

С использованием (6) и (7) было построено отображение разности $df(n+1) = y_2(t_{n+1}) - y_1(t_{n+1})$ в момент времени t_{n+1} (момент начала $(n+1)$ -го прохождения предельного цикла) от такой же разности в момент t_n (момент начала n -го прохождения предельного цикла). Наличие неподвижной точки такого отображения означает существование синхронного режима с соответствующей разностью df . Для различных значений параметра связи были численно построены данные отображения (рис. 3).

Как видно из рис. 3, при малой связи в системе существует два различных синхронных режима – синфазный ($y_2 - y_1 \approx 0$) и противофазный. При большой связи – только синфазный.

Для характеристики синхронного режима в исходной модели вычислялись частоты всех элементов. Частота элемента вычислялась как средняя частота генерации спайков в элементе.

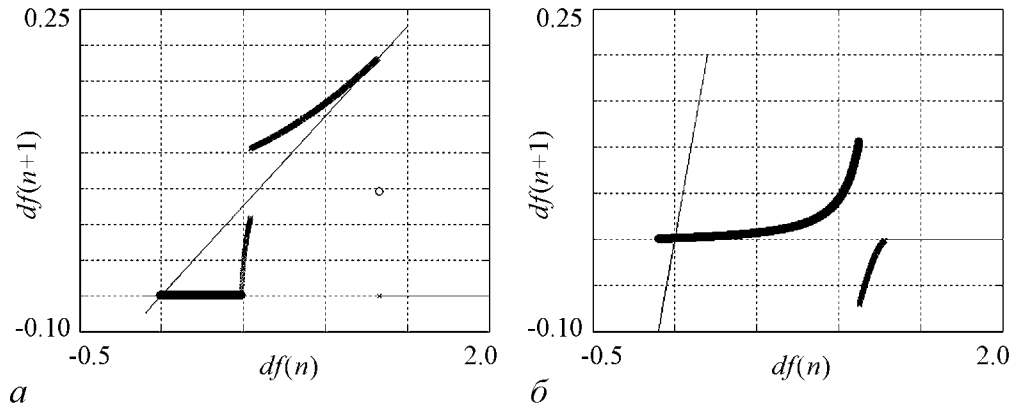


Рис. 3. Отображение разности df для слабой связи $\beta = 0.002$ (а) и сильной связи $\beta = 0.05$ (б) в системе двух элементов

Зависимость средних частот элементов исходной системы связанных осцилляторов Бонхоффера–ван дер Поля от параметра связи при синфазных и противофазных начальных условиях представлена на рис. 4. При слабой (но достаточной для синхронизации) связи оба эти режима устойчивы. Частота синфазного режима близка к частоте самого быстрого (высокочастотного) элемента цепочки и практически не зависит от параметра связи β . Частота противофазного синхронного режима при относительно слабой связи близка к собственной частоте самого низкочастотного элемента и уменьшается с увеличением связи. Численно показано, что, если параметр связи больше некоторого порогового значения, противофазный режим становится неустойчивым и в системе реализуется только синфазный синхронный режим.

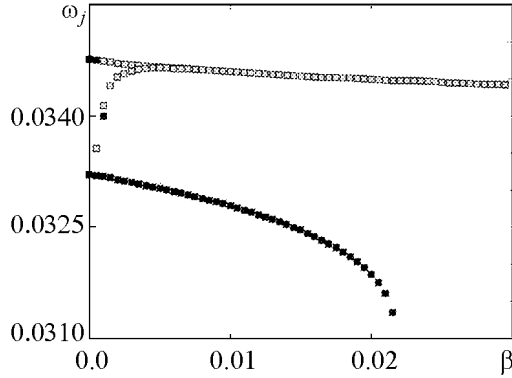


Рис. 4. Зависимость частот синхронизации от параметра связи при $a_1 = 0.995$, $a_2 = 0.985$, $\varepsilon = 0.02$ (серые точки соответствуют синфазным начальным условиям, черные – противофазным)

3.1. Возникновение и разрушение синхронных режимов. Рассмотрим детально механизмы возникновения и разрушения синхронных режимов в ансамбле двух связанных нелинейных осцилляторов типа (3) с увеличением параметра связи β в случае $a_1 = 0.995$, $\varepsilon = 0.02$ при $\Delta a = a_1 - a_2 = 0.001$ (случай относительно малых расстройок) и при $\Delta a = 0.01$ (случай относительно больших расстройок).

В обоих случаях существует критическое значение связи между элементами β_{\min}^1 такое, что при $\beta < \beta_{\min}^1$ в системе наблюдаются биения – разность времен прохождения характерных значений (например, максимумов) координатами $x_1(t)$ и $x_2(t)$ или $y_1(t)$ и $y_2(t)$ непрерывно дрейфует, изменяясь от нуля до максимального значения.

Анализ отображений Пуанкаре и характеристических показателей Ляпунова, проведенный с использованием [9], позволяет заключить, что при изменении β в пределах от 0 до β_{\min}^1 в системе реализуются различные сложные режимы. При этом в случае $\Delta a = 0.001$ (рис. 5, а) с точностью до вычислительной погрешности по-

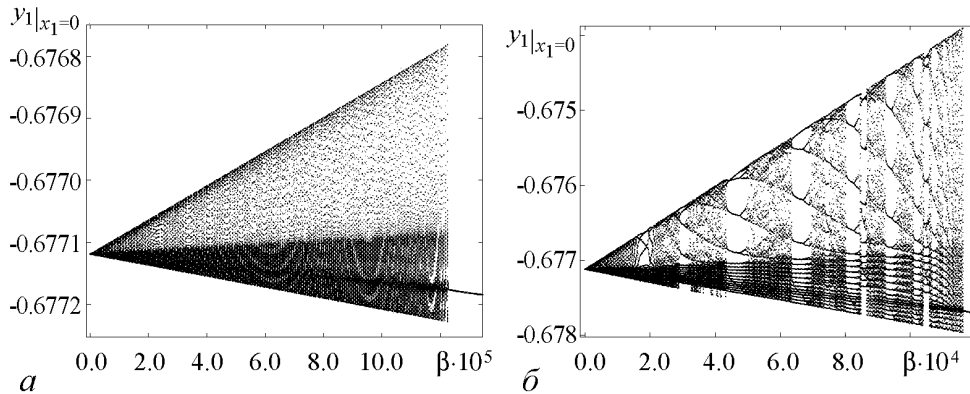


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма отображения Пуанкаре (значение y_1 при переходе элемента из пассивной фазы в активную при $x_1 = 0$ в зависимости от параметра β) в системе связанных нелинейных осцилляторов ван дер Поля в области фазовых биений $\beta < \beta_{\min}^1$; $\Delta a = 0.001$ (а) и 0.01 (б)

казателей Ляпунова можно сделать вывод о хаотическом характере наблюдаемых колебаний. В случае $\Delta a = 0.01$ (рис. 5, б) эти режимы являются достоверно хаотическими и перемежаются окнами $n : m$ синхронизации парциальных элементов.

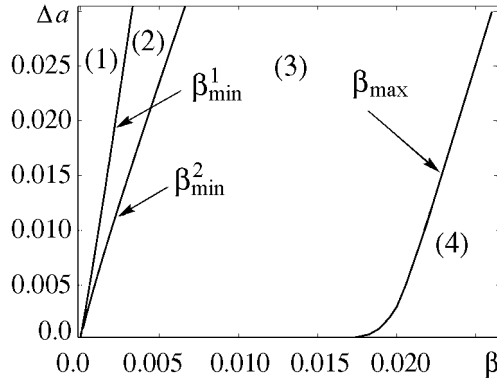


Рис. 6. Области: биений (1), моностабильности противофазного режима синхронизации (2), бистабильности противофазного и синфазного режимов (3), моностабильности синфазного режима синхронизации (4). Бифуркационные границы $\beta_{\min}^1(\Delta a)$, $\beta_{\min}^2(\Delta a)$, $\beta_{\max}(\Delta a)$

С приближением β снизу к значению β_{\min}^1 частота биений уменьшается, и при $\beta_{\min}^1 = 1.23 \cdot 10^{-4}$ (в случае $\Delta a = 0.001$) или при $\beta_{\min}^1 = 1.16 \cdot 10^{-3}$ (в случае $\Delta a = 0.01$) в системе возникает (с максимальным значением мультипликатора отображения Пуанкаре $\mu \cong +1$) устойчивый предельный цикл, соответствующий 1 : 1 противофазному режиму синхронизации элементов (рис. 6).

Интересно отметить, что непосредственно перед установлением этого режима большую часть времени осцилляторы колеблются в режиме, близком к противофазному, и только малая часть времени приходится на режим, близкий к синфазному, и на переходный процесс между двумя режимами (рис. 7).

При дальнейшем увеличении β вплоть до значений $\beta_{\min}^2 = 1.70 \cdot 10^{-4}$ (в случае $\Delta a = 0.001$) или при $\beta_{\min}^2 = 1.95 \cdot 10^{-3}$ (в случае $\Delta a = 0.01$) в системе рождается (при возникновении также с максимальным значением мультипликатора $\mu \cong +1$ отображения Пуанкаре) ещё один устойчивый предельный цикл, соответствующий уже синфазному режиму синхронизации и, таким образом, реализуется бистабильность синфазного и антифазного режимов синхронизации.

Отметим, что противофазный режим синхронизации возникает при меньших значениях параметра связи β по сравнению с синфазным. Данному факту можно

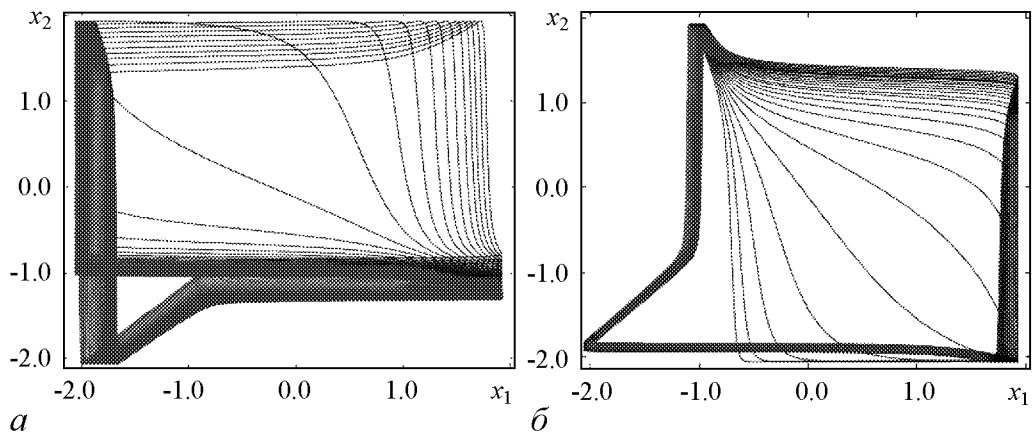


Рис. 7. Проекция фазовых траекторий на плоскость (x_1, x_2) в случае $\Delta a = 0.001$ и $\beta < \beta_{\min}^1$ на временных отрезках, соответствующих колебаниям, близким к противофазным – (а), и колебаниям, близким к синфазным – (б)

дать простую интерпретацию: за возникновение синхронизации «ответственно» линейное слагаемое $\beta(x_j - x_i), j \neq i$. В синфазном режиме типичные значения модуля разности $x_j - x_i$ меньше, чем в противофазном, поэтому для заметного воздействия на систему требуются бóльшие значения параметра β .

При $\beta = \beta_{\max} = 1.89 \cdot 10^{-2}$ (в случае $\Delta a = 0.001$) предельный цикл, соответствующий противофазному режиму синхронизации исчезает в результате ($\mu = -1$)-бифуркации (вследствие слияния с седловым предельным циклом двукратного периода). В случае $\Delta a = 0.01$ исчезновение предельного цикла, соответствующего противофазному режиму синхронизации, происходит при $\beta = \beta_{\max} = 2.17 \cdot 10^{-2}$ в результате ($\mu = +1$)-бифуркации и, таким образом, при $\beta > \beta_{\max}$ в любом случае в системе реализуется только синфазный режим синхронизации. Некоторые отличия случая относительно больших расстройек ($\Delta a = 0.01$) связаны также с тем, что цикл, соответствующий противофазному режиму синхронизации, при определенных значениях параметров может претерпевать бифуркацию удвоения периода, однако, с точки зрения существования мультистабильных синхронных режимов, данный факт не является существенным, так как фазовые траектории цикла удвоенного периода проходят в малой окрестности исходного противофазного цикла периода T , не нарушая при этом факт существования бистабильности. Интересно отметить, что линии $\beta_{\min}^1(\Delta a)$ и $\beta_{\min}^2(\Delta a)$ на плоскости $\beta, \Delta a$ близки к прямо пропорциональной зависимости, в то время как зависимость $\beta_{\max}(\Delta a)$ является, безусловно, нелинейной.

3.2. Смена динамических режимов в системе двух релаксационных осцилляторов в присутствии флуктуаций. Для анализа влияния флуктуаций (реально существующих в любых физических и биологических системах) на смену динамических режимов в ансамбле двух связанных релаксационных осцилляторов Бонхоффера–ван дер Поля при различных значениях параметра β численно исследовались статистические характеристики решений системы (8), которая отличается от (3) заменой времени и добавлением независимых источников белого гауссова шума $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ в правые части 1-го и 3-го уравнений,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - \frac{x_1^3}{3} - y_1 + \beta(x_2 - x_1) + \xi_1(t), \\ \dot{y}_1 &= \varepsilon(x_1 + a_1), \quad \langle \xi_i(t) \rangle = 0, \\ \dot{x}_2 &= x_2 - \frac{x_2^3}{3} - y_2 + \beta(x_1 - x_2) + \xi_2(t), \\ \dot{y}_2 &= \varepsilon(x_2 + a_1 - \Delta a), \quad \langle \xi_i(t)\xi_j(t + \tau) \rangle = D \delta_{ij} \delta(\tau), \end{aligned} \tag{8}$$

где D – интенсивность белого шума, δ_{ij} – символ Кронекера. Для фиксированных параметров ε, a_1 и Δa использовались те же значения, что и в п. 3.1: $\varepsilon = 0.02, a_1 = 0.995, \Delta a = 0.01$.

Как показали результаты численного счета, при наличии флуктуаций биения в системе двух связанных релаксационных осцилляторов и, соответственно, несоответствие средних периодов колебаний 1-го и 2-го осцилляторов сохраняются и при $\beta > \beta_{\min}^1$ (рис. 8, а, б).

Скорость возрастания среднего периода биений $\langle T_b \rangle$ с ростом параметра β тем выше, чем меньше интенсивность шума. Так, при $D = 10^{-8}$ величина $\langle T_b \rangle$ возраста-

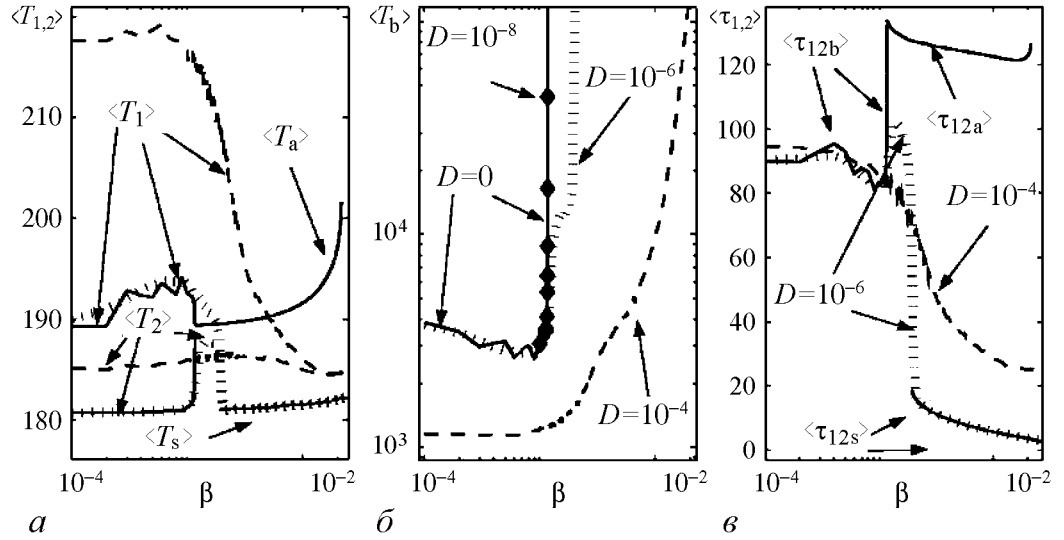


Рис. 8. Зависимости от параметра связи β средних периодов колебаний $\langle T_{1,2} \rangle$ первого и второго осцилляторов (а), среднего периода биений $\langle T_b \rangle$ (б), средней задержки $\langle \tau_{12} \rangle$ момента возникновения спайка второго осциллятора относительно момента возникновения спайка первого осциллятора (в) при различных интенсивностях флуктуаций D : 0 – детерминированный случай (сплошная линия); 10^{-8} (ромбы); 10^{-6} (поперечные штрихи); 10^{-4} (штриховая линия). $\langle T_s \rangle$, $\langle T_a \rangle$ – детерминированные периоды колебаний в синфазном и противофазном режиме синхронизации, соответственно. $\langle \tau_{12s} \rangle$, $\langle \tau_{12a} \rangle$ – детерминированные значения задержки в синфазном и противофазном режиме синхронизации, соответственно. В целях лучшей читаемости рисунков опущены зависимости $\langle T_{1,2}(\beta) \rangle$ и $\langle \tau_{12}(\beta) \rangle$ при $D = 10^{-8}$. Видно, что в случае $D = 10^{-6}$ при $\beta > \beta_{\min}^2$ зависимости $\langle T_{1,2}(\beta) \rangle$ и $\langle \tau_{12}(\beta) \rangle$ практически совпадают с соответствующими кривыми для детерминированного случая в синфазном режиме

ет до значений, превосходящих 10^5 при изменении β на практически неразличимом на рисунке интервале порядка 10^{-5} справа от β_{\min}^1 , при $D = 10^{-6}$ этот интервал увеличивается до значений порядка $\Delta\beta = 0.001$ и, наконец, при $D = 10^{-4}$ занимает практически всю область от β_{\min}^1 до β_{\max} (то есть включает диапазон значений β , в пределах которого реализуется бистабильность синфазного – противофазного режимов колебаний в отсутствие флуктуаций). Интересно отметить, что при наличии относительно больших флуктуаций ($D = 10^{-4}$) средние периоды колебаний как первого, так и второго осциллятора существенно возрастают (почти на 16% у осциллятора с параметром $a = 0.995$ при $\beta < 10^{-3}$). Данный эффект связан с существенным изменением скорости движения изображающей точки осциллятора при флуктуационно-индуцированном отклонении от детерминированной траектории в область более медленного движения. Он аналогичен известному эффекту задержки распада неустойчивого состояния системы [10, 11] под воздействием флуктуаций.

Происходящие под воздействием шума переключения между синфазным и противофазным режимами синхронизации проявляются не только в явлении биений, но и в изменении среднего временного интервала между моментами активации элементов (моментами перехода $x_1(t)$ и $x_2(t)$ через значение $x = 0$). На рис. 8, в изображена зависимость от силы связи β величины $\langle \tau_{12} \rangle$ – среднего значения разности τ_{12} момента перехода через 0 переменной $x_1(t)$ и предшествующего перехода через 0 переменной $x_2(t)$. В отсутствие флуктуаций четко различаются: линия, отражающая

однозначную зависимость $\langle \tau_{12} \rangle = \tau_{12b}$ в области биений $(0, \beta_{\min}^1)$, где значение τ_{12} меняется с течением времени от 0 до T_2 , поэтому $\langle \tau_{12} \rangle \simeq T_2/2$; кривая зависимости $\tau_{12}(\beta) = \tau_{12a}$ в области $(\beta_{\min}^1, \beta_{\max})$, где реализуется либо только противофазная синхронизация (при $\beta_{\min}^1 < \beta < \beta_{\min}^2$), либо бистабильность синхронных режимов (при $\beta_{\min}^2 < \beta < \beta_{\max}$); кривая зависимости $\tau_{12}(\beta) = \tau_{12s}$ в области $(\beta > \beta_{\min}^2)$, где реализуется либо бистабильность синхронных режимов (при $\beta_{\min}^2 < \beta < \beta_{\max}$), либо только синфазная синхронизация (при $\beta > \beta_{\max}$).

Как видно из рис. 8, *а, в*, переключения между сосуществующими режимами синхронизации, вызванные шумом малой интенсивности ($D \lesssim 10^{-6}$ для исследуемых значений детерминированных параметров) приводят к срыву менее устойчивого по отношению к флуктуациям противофазного режима синхронизации. В результате подавляющую часть времени реализуется более устойчивый синфазный режим синхронизации, что можно трактовать как флуктуационно-индуцированное устранение бистабильности шумом малой интенсивности. Отсутствие в случае $D = 10^{-6}$ уже при $\beta = 0.0025$ переключений между различными режимами синхронизации и, таким образом, высокую стабильность синхронного режима по отношению к слабым флуктуациям подтверждает гистограмма значений τ_{12} (рис. 9, *а*). Наоборот, флуктуации относительно большой интенсивности ($D \gtrsim 10^{-6}$) приводят к относительно быстрым срывам не только противофазного, но и более устойчивого синфазного режима синхронизации, как бы восстанавливая бистабильные свойства системы. При этом усредненная задержка τ_{12} между спайками 1-го и 2-го элементов имеет величину, промежуточную между соответствующими значениями для синфазного и антифазного режимов синхронизации. Интересно отметить, что эта задержка может сохранять некоторое промежуточное значение и при значениях параметров, соответствующих отсутствию бистабильности синхронных режимов в детерминированном случае (в области $\beta_{\min}^1 < \beta < \beta_{\min}^2$ при $D \gtrsim 10^{-6}$, а также при $\beta > \beta_{\max}$, $D \gtrsim 10^{-4}$).

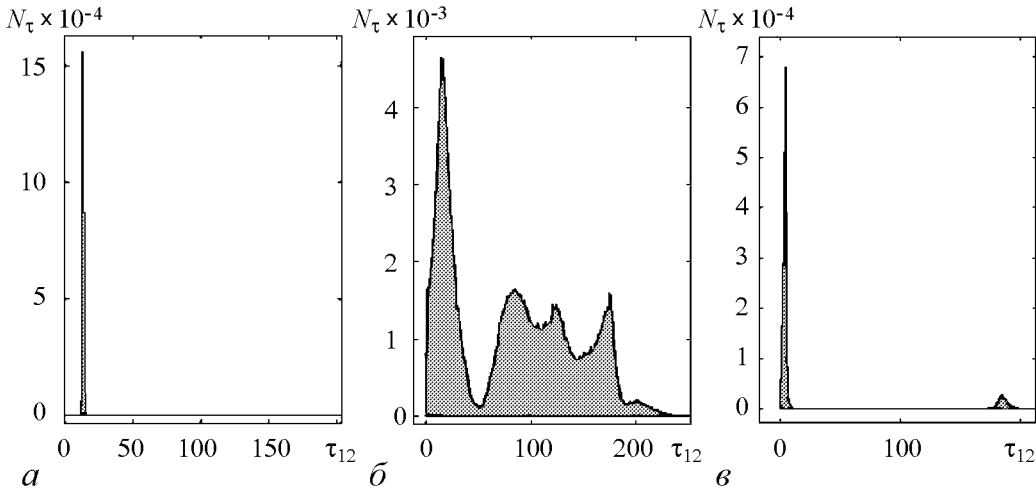


Рис. 9. Гистограммы значений задержки τ_{12} : при $D = 10^{-6}$ и $\beta = 0.0025$ (*а*); при $D = 10^{-6}$ и $\beta = 0.0014$ (*б*); при $D = 10^{-4}$ и $\beta = 0.0227$ (*в*)

Чтобы разобраться в причинах данного явления, были построены гистограммы значений τ_{12} при $\beta = \beta_1 = 0.0014$, $\beta_{\min}^1 < \beta_1 < \beta_{\min}^2$ в случае $D = 10^{-6}$ (рис. 9, б), и при $\beta = \beta_2 = 0.0227$, $\beta_2 > \beta_{\max}$ в случае $D = 10^{-4}$ (рис. 9, в). Как видно из этих рисунков, на гистограммах четко выделяются два максимума. Один из максимумов соответствует задержке τ_{12} , характерной для существующего устойчивого при данных значениях параметров в детерминированном случае режима синхронизации (противофазного при $\beta = \beta_1$ и синфазного при $\beta = \beta_2$). Другой максимум находится вблизи значения τ_{12} , характеризующего другой режим синхронизации при бифуркационных значениях параметров, связанных с исчезновением этого режима синхронизации (синфазного при $\beta = \beta_{\min}^2$ и противофазного при $\beta = \beta_{\max}$). Таким образом, при значениях параметров вне детерминированной области бистабильности синхронных режимов может наблюдаться индуцированная шумом бимодальность плотности вероятности распределения задержек τ_{12} , свидетельствующая о *флуктуационно-индуцированной перемежаемости режимов синхронизации*. При $\beta_{\min}^1 < \beta < \beta_{\min}^2$ флуктуационно-индуцированная перемежаемость сопровождается проскоками фазы и приводит, как уже отмечалось, к биениям. Однако в случае относительно большого шума ($D = 10^{-4}$) флуктуационно-индуцированная перемежаемость режимов синхронизации наблюдается и при $\beta > \beta_{\max}$, когда биения отсутствуют, и средние частоты 1-го и 2-го осцилляторов практически совпадают (рис. 8, а, б). То есть в данном случае, в отличие от индуцированных шумом биений при малых значениях β , происходят индуцированные шумом переходы между режимами без нарушения взаимной синхронизации осцилляторов.

Заключение

В ходе работы проанализирована система из двух связанных осцилляторов Бонхоффера–ван дер Поля. Экспериментально обнаружено, что при определенных значениях параметров в зависимости от начальных условий в системе могут устанавливаться синфазный и противофазный синхронные режимы. Аналитически доказано существование области параметров, соответствующих мультистабильности синхронных режимов. При сильной связи в системе реализуется только синфазный синхронный режим. При близких к нулю коэффициентах диффузионной связи β между элементами в ансамбле двух осцилляторов наблюдаются биения. При малых значениях параметра связи в системе возможны как хаотические колебания, так и $(n : m)$ -синхронизация (в узких диапазонах параметра β). При $\beta = \beta_{\min}^1$ происходит рождение противофазного режима, а при $\beta = \beta_{\min}^2 > \beta_{\min}^1$ – также и синфазного режима 1 : 1 синхронизации элементов.

При исследовании влияния флуктуаций на синхронные режимы обнаружено, что шум может приводить к срыву синхронизации и возникновению биений; к флуктуационно-индуцированному устранению бистабильности; к флуктуационно-индуцированной перемежаемости синхронных режимов без срыва синхронизации.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 08-02-01259-а, 08-02-92004 и 08-02-97049.

Библиографический список

1. *Maurer J. and Libchaber A.* // J.Phys (France) Lett. 1982. Vol. 41. P. 515.
2. *Brun E., Derighette B., Meier D., Holzner R., and Raveni M.* // J.Opt.Soc.Am. B. 1985. Vol. 2. P. 156.
3. *Dangoisse D., Glorieux P., and Hennequin D.* // Phys. Rev. A. 1987. Vol. 36. P. 4775.
4. *Thompson J.M.T. and Stewart H.B.* Nonlinear Dynamics and Chaos. Wiley, Chichester, 1986.
5. *Foss J., Longtin A., Mensour B., and Milton J.* // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76. P. 708.
6. *Simonotto E., Riani M., Seife C., Roberts M., Twitty J., and Moss F.* // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 1186.
7. *Bonhoeffer K.F.* // Naturwissenschaften. 1953. Vol. 40. P. 301.
8. *Torre V.* // J. Theor. Biol. 1976. Vol. 61. P. 55.
9. *Матросов В.В.* Динамика нелинейных систем. Программный комплекс для исследования нелинейных динамических систем с непрерывным временем. Н. Новгород, ННГУ, 2002.
10. *Mantegna R.N. and Spagnolo B.* // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 395, № 4. P. 563.
11. *Malakhov A.N. and Agudov N.V.* // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 60. P. 6333.

Поступила в редакцию 15.08.2008

После доработки 1.12.2008

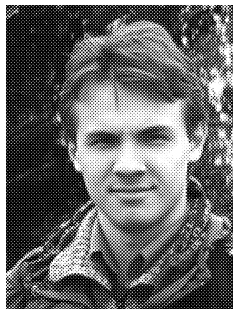
VARIETY OF SYNCHRONOUS REGIMES IN ENSEMBLES OF NONIDENTICAL OSCILLATORS:

Two coupled elements

A.K. Kryukov, G.V. Osipov, A.V. Polovinkin

We study synchronization of two coupled nonidentical Bonhoeffer–van der Pol oscillators. Coexistence of two different synchronous regimes is proved. Mechanisms of synchronous regimes origination and destruction are investigated. Fluctuations influence on synchronous regimes is considered. It is found that noise can cause: i) synchronization destruction and beating originations; ii) fluctuations-caused bistability destruction; iii) fluctuations-caused intermittency of synchronous regimes without synchronization destruction.

Keywords: Synchronization, multistability, synchronous regime, numerical methods, modeling, stochastic system, FitzHugh–Nagumo, Bonhoeffer–van der Pol.



Крюков Алексей Константинович – родился в 1984 году, окончил Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (2007). Аспирант кафедры теории управления и динамики машин факультета ВМК ННГУ. Область научных интересов: структуры синхронизации в нелинейных системах, моделирование динамики биологических сред. Стипендиат некоммерческого фонда «Династия» (2006). Имеет 12 публикаций (в соавторстве) в том числе 2 журнальных. Лауреат стипендии имени академика Г.А. Разуваева (2008).

E-mail: alkryukov@gmail.com

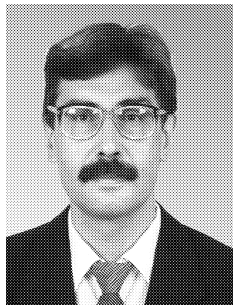
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23



Осипов Григорий Владимирович – родился в Горьком (1960), окончил Горьковский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (1982). В 1986–1988 годах учился в аспирантуре Научного совета по комплексной проблеме «Кибернетика» (НСК) АН СССР. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в НСК (1988) по математическому моделированию и доктора физико-математических наук в ННГУ (2004) по радиофизике. С 1988 года работает в ННГУ, с 2007 года в качестве заведующего кафедрой «Теории управления и динамики машин» факультета ВМК. Один из авторов монографий «Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации» и «Synchronization in oscillatory networks». Опубликовал 120 научных статей (в том числе 2 обзора) по теории колебаний и волн и математическому моделированию.

E-mail: osipov@vmk.unn.ru

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23



Половинкин Андрей Владимирович – родился в 1959 году, окончил Нижегородский государственный университет в 1981 году. Докторант кафедры математики радиофизического факультета ННГУ, кандидат физико-математических наук (1987). Область научных интересов: флуктуационно-индуцированные процессы в нелинейных системах и неоднородных средах. Соавтор свыше 40 научных и 5 учебно-методических работ. Участник российских и международных научных проектов.

E-mail: polovinkin@rf.unn.ru

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23



МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ СИНХРОННЫХ РЕЖИМОВ В АНСАМБЛЯХ НЕИДЕНТИЧНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ:

Цепочка и решетка связанных элементов

А.К. Крюков, Г.В. Осипов, А.В. Половинкин

Изучается синхронизация в одно- и двумерных ансамблях локально связанных неидентичных осцилляторов Бонхоффера–ван дер Поля. Доказано, что в малых ансамблях ($N \leq 4$) возможно сосуществование 2^{N-1} синхронных режимов. В цепочке из N элементов возможно сосуществование не менее 2^{N-1} устойчивых режимов глобальной синхронизации. Изучаются особенности кластерной синхронизации при слабой связи между элементами. Изучены синхронные режимы, обусловленные существованием волн, задающих общий ритм колебаний всем элементам ансамбля.

Ключевые слова: Синхронизация, мультистабильность, синхронный режим, численные методы, моделирование, ФитцХью–Нагумо, Бонхоффер–ван дер Поль.

Введение

В последнее время значительный интерес исследователей, работающих в области нелинейной динамики, привлечен к изучению поведения систем связанных нелинейных осцилляторов, обладающих свойством мультистабильности, то есть наличием в фазовом пространстве большого числа сосуществующих аттракторов. При этом установление того или иного движения в системе определяется начальными условиями. Мультистабильность обнаружена во многих электрических [1], лазерных [2, 3], механических [4] и биологических [5, 6] системах. В больших ансамблях в связи с наличием многих степеней свободы взаимодействие временных и пространственных масштабов приводит к возникновению нетривиальных коллективных эффектов – формированию пространственно-временных структур, распространению бегущих волн различной конфигурации, появлению пространственно-временного беспорядка и т.д. Одним из наиболее важных с точки зрения приложений и наиболее интенсивно изучаемых коллективных эффектов является синхронизация [7–9]. Наличие ряда сосуществующих различных синхронных режимов имеет важное значение в нейронных системах при сохранении и передаче информации, при распознавании образов и др. [10, 11]. Теоретические и экспериментальные результаты показывают,

что электрические и синаптические связи способны обеспечивать различные синхронные режимы – синфазные и противофазные (см. [12] и ссылки там).

Одна из наиболее популярных динамических систем, используемых при исследовании общих закономерностей поведения нейронных ансамблей, это система Бонхоффера–ван дер Поля [13]. Несмотря на ее сравнительную простоту, ансамбли таких систем демонстрируют широкий спектр коллективных явлений. В настоящей работе изучается синхронизация в одно- и двумерных ансамблях локально связанных неидентичных осцилляторов Бонхоффера–ван дер Поля.

1. Модель

Система Бонхоффера–ван дер Поля [13] (иногда называемая системой ФитцХью–Нагумо) описывается уравнениями

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x}_j = x_j - \frac{x_j^3}{3} - y_j + \beta(x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}), \\ \dot{y}_j = (x_j + a_j), \\ j = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь β – величина связи, ε – малый параметр, a_j – отвечает за период и симметрию колебаний, N – количество элементов.

В работе анализируется коллективная динамика системы (1) при граничных условиях «свободные концы»

$$\begin{cases} x_0(t) = x_1(t), \\ x_N(t) = x_{N+1}(t), \end{cases} \quad (2)$$

и при периодических граничных условиях

$$\begin{cases} x_j(t) = x_{j+N}(t), \\ \dot{x}_j(t) = \dot{x}_{j+N}(t), \end{cases} \quad (3)$$

Мультистабильность синхронных режимов в системе Бонхоффера–ван дер Поля обусловлена индивидуальной динамикой элементов: при $a_j < 1$ (но близком к 1) колебания получаются сильно асимметричными, вследствие этого в ансамбле присутствует мультистабильность синхронных режимов. Если $|a_j| \ll 1$, то есть, если асимметрия колебаний мала, то такой мультистабильности нет.

2. Три связанных элемента

Рассмотрим динамику цепочки из трех элементов с линейно распределенными значениями параметра a : $a_{j+1} = a_j - \Delta a$, что определяет монотонное распределение индивидуальных частот элементов.

При исследовании синхронизации в цепочке из трех элементов было обнаружено сосуществование четырех различных режимов глобальной синхронизации: синфазного режима и трех смешанных режимов. В смешанном режиме два элемента из трех колеблются синфазно, а третий – в противофазе к ним. Режим, при котором второй элемент колеблется в противофазе к первому и третьему, может рассматриваться как противофазный.

В цепочке из трех осцилляторов синфазный режим устанавливается на максимальной частоте среди всех синхронных режимов; она близка к частоте самого быстрого (высокочастотного) элемента ансамбля и практически не зависит от параметра связи β . В остальных синхронных режимах частота синхронизации уменьшается с увеличением связи.

Зависимость частот элементов от параметра связи для различных синхронных режимов представлена на рис. 1. Видно, что, если система находится в противофазном режиме и связь начинает увеличиваться, то после перехода параметра связи через некое критическое значение противофазный режим становится неустойчивым. В результате устанавливается либо синфазный режим, либо один из смешанных режимов, который при дальнейшем увеличении связи также станет неустойчивым, и система опять может перейти либо в синфазный режим, либо в другой смешанный режим. Таким образом, при увеличении параметра связи сначала исчезает противофазный режим, затем поочередно оба смешанных режима, и при сильной связи остается устойчивым только синфазный синхронный режим.

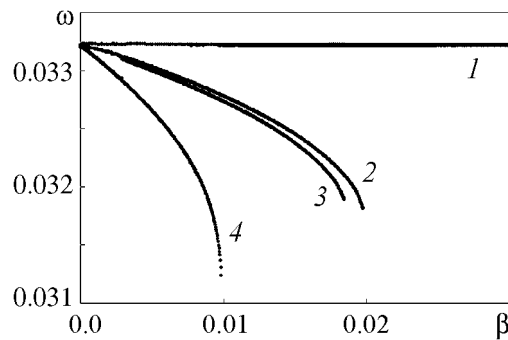


Рис. 1. Зависимость частот синхронизации от параметра связи при $a_1 = 0.995$, $\Delta a = 0.001$, $\varepsilon = 0.02$ (1 – синфазный синхронный режим, 2 и 3 – смешанные синхронные режимы, 4 – противофазный синхронный режим)

3. Четыре связанных элемента

Предположим, что в цепочке из K элементов возможно сосуществование M синхронных режимов. Присоединяем новый элемент к исходной цепочке. Этот элемент может быть синхронизован синфазно или противофазно с соседним. То есть получается $2M$ режимов (M в случае синфазной синхронизации нового элемента с соседним и еще M в случае противофазной синхронизации). Таким образом, полученные результаты в малых ансамблях ($N = 2$, $N = 3$) позволяют сделать вывод о существовании 2^{N-1} синхронных режимов.

Верность утверждения о существовании 2^{N-1} синхронных режимов показывают и эксперименты с четырьмя связанными элементами. В эксперименте параметры a_j были распределены линейно. Граничные условия выбраны периодическими. При одних и тех же значениях параметров было обнаружено восемь синхронных режимов, которые представлены на рис. 2.

Заметим, что получение 2^{N-1} синхронных режимов в системе из $N = 6$ или $N = 8$ ($2^{8-1} = 128$) элементов принципиально не отличается от случая с $N = 4$, за исключением объема и трудоемкости получения и представления результатов.

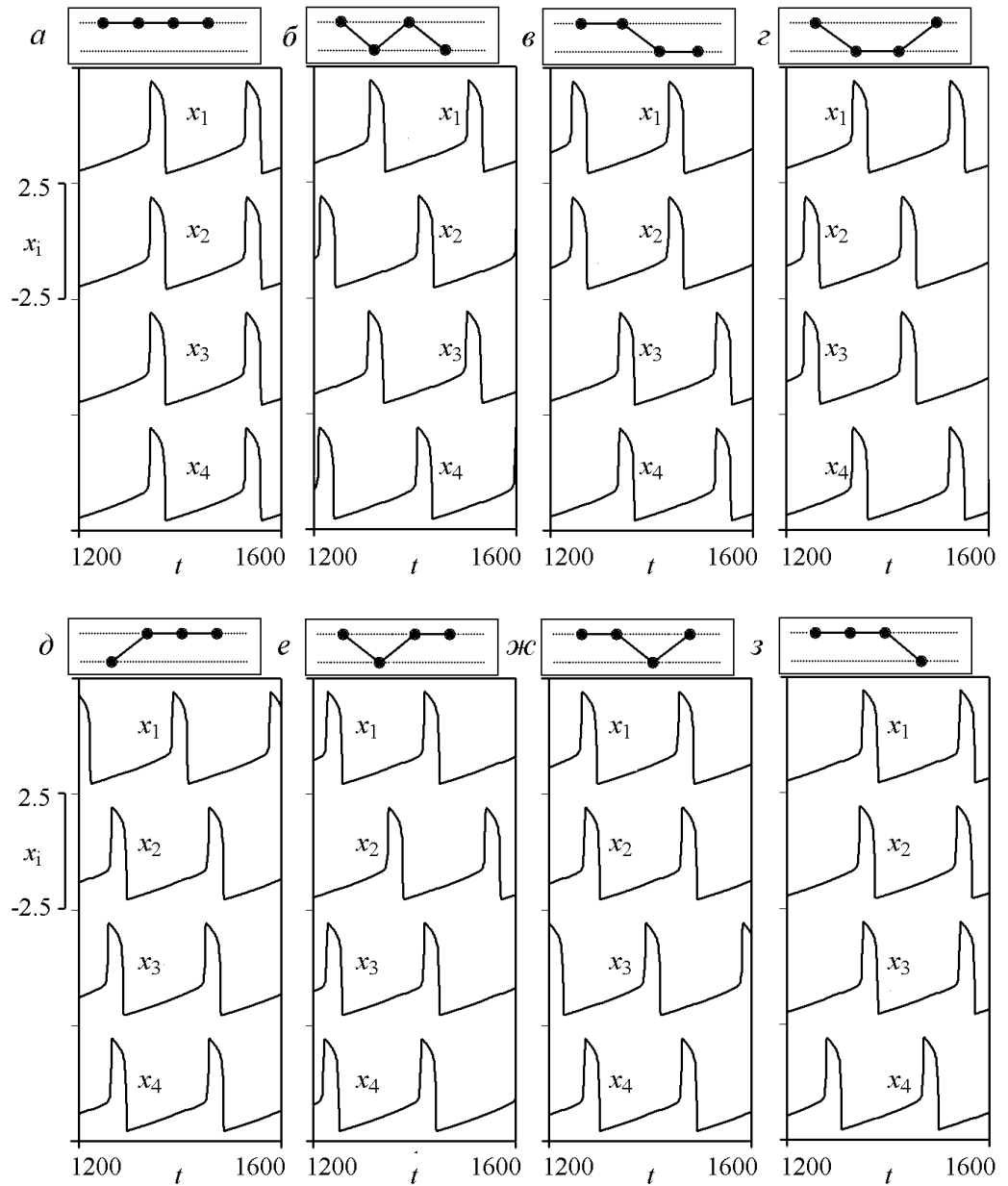


Рис. 2. Восемь устойчивых синхронных режимов в системе четырех связанных элементов: синфазный режим $\omega_a = 0.033131$ (а); противофазный режим, $\omega_b = 0.032255$ (б); смешанные режимы: $\omega_c = 0.032740$ (в), $\omega_z = 0.032744$ (г), $\omega_d = 0.032583$ (д), $\omega_e = 0.032613$ (е), $\omega_{ж} = 0.032633$ (ж), $\omega_z = 0.032661$ (з). Значения параметров: $\varepsilon = 0.02$, $a_1 = 0.995$, $\Delta = 0.00007$, $\beta = 0.0055$; периодические граничные условия

4. Цепочка связанных элементов

Для исследования синхронизации в больших ансамблях рассмотрена цепочка из пятидесяти связанных элементов. Проведена серия вычислительных экспериментов. Полученные результаты позволяют предположить что и в длинных цепочках при некоторых значениях параметров возможно сосуществование 2^{N-1} раз-

личных устойчивых режимов глобальной синхронизации. В численных экспериментах было найдено несколько таких режимов. Зависимость частот элементов от параметра связи в цепочке из пятидесяти элементов показана на рис. 3. В эксперименте для всех β начальные условия брались одинаковые (противофазные). Характер изменения частот синхронизации в цепочке из пятидесяти элементов аналогичен характеру изменения частот синхронизации в цепочке из трех элементов: частота синфазного режима не меняется при изменении связи, частоты смешанных и противофазного режима уменьшаются при увеличении связи. На этом же рисунке можно видеть различные синхронные режимы в цепочке.

В цепочке из 128 элементов с периодическими граничными условиями был обнаружен синхронный режим, имеющий более высокую частоту, чем синфазный синхронный режим. Этот режим обусловлен волной возбуждения, бегущей по кольцу элементов. Частота определяется периодом обращения волны. Характерные пространственно-временные диаграммы данного и синфазного режимов приведены на рис. 4.

Численно также установлено, что, если связь недостаточна для установления глобальной синхронизации, формируются группы соседних элементов, колеблющиеся с одинаковой частотой. Этот эффект известен как кластерная синхронизация [15]. При отсутствии связи каждый элемент колеблется с собственной частотой. При включении связи образуются группы элементов, внутри которых элементы

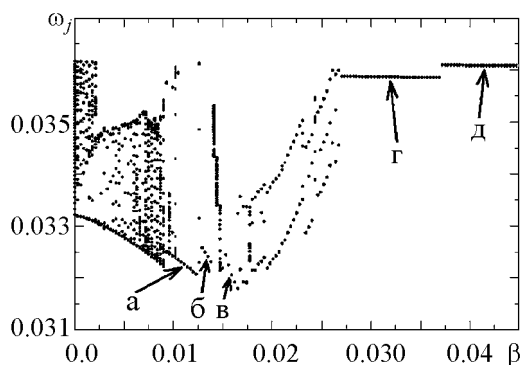


Рис. 3. Зависимость частот элементов от параметра связи; $a_1 = 0.995$, $\Delta a = 0.001$, $\varepsilon = 0.02$; а, б, в, г – смешанные синхронные режимы, д – синфазный синхронный режим

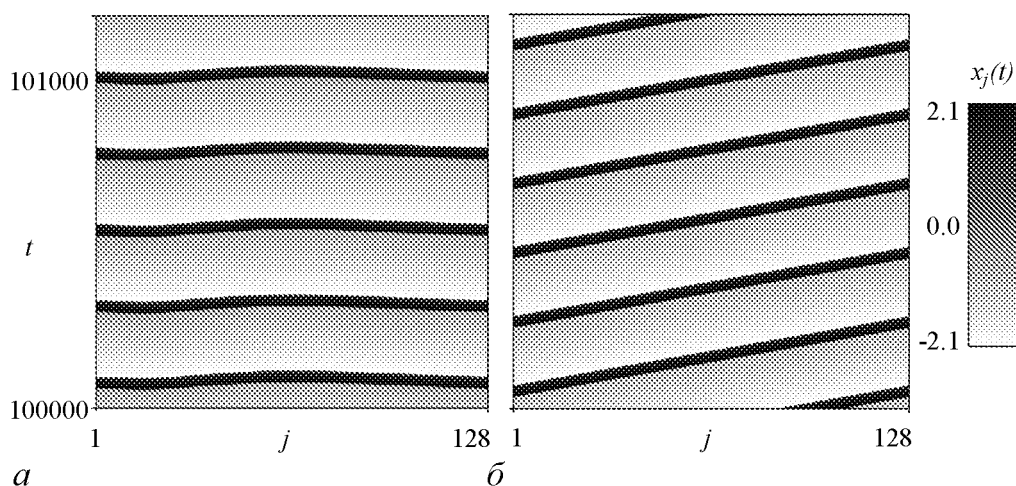


Рис. 4. Пространственно-временные диаграммы синфазного режима (а) и режима, обусловленного распространением волны возбуждения по цепочке элементов с периодическими граничными условиями (б)

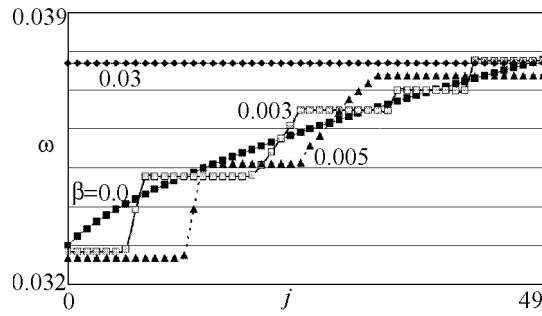


Рис. 5. Кластерная и глобальная синфазная синхронизация в цепочке из 50 элементов при $a_1 = 0.995$, $\Delta a = 0.001$, $\varepsilon = 0.02$ для различных β

совершают колебания с одной и той же частотой (кластеры синхронизации). При увеличении связи число кластеров сокращается, и при дальнейшем увеличении связи наступает глобальная синхронизация. Поскольку в представленном эксперименте глобальная синхронизация синфазная, то она устанавливается на частоте, близкой к индивидуальной частоте самого быстрого элемента (рис. 5).

5. Решетка связанных элементов

В двумерной решетке взаимодействующих элементов кроме уже описанных синхронных режимов могут возникать синхронные режимы, обусловленные существованием волн, реализующихся в двумерных средах. В решетке 100×100 элементов со свободными концами были обнаружены два режима, характеризующиеся распространением волны возбуждения в системе: режим с одной концентрической волной, распространяющейся от самого быстрого элемента в решетке, и режим, обусловленный существованием спиральной волны в решетке.

Характерное распределение $x_{ij}(t)$ в системе с синхронным режимом с одной концентрической волной показано на рис. 6, а. Частота этого режима совпадает с частотой самого быстрого элемента в решетке. В некотором смысле данный режим может быть назван синфазным режимом синхронизации.

Характерное распределение $x_{ij}(t)$ системы в режиме со спиральной волной показано на рис. 6, б. Ритм, задающийся этим режимом, выше частоты режима с концентрической волной, так как частота спиральной волны выше частоты самого быстрого элемента в решетке.

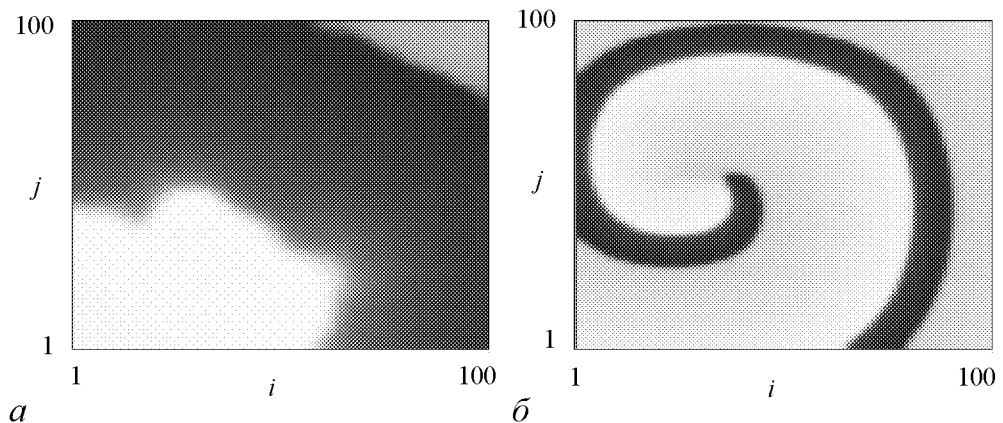


Рис. 6. Характерное распределение $x_{ij}(t)$ в синхронном режиме с одной концентрической волной (а). Характерное распределение $x_{ij}(t)$ в режиме с одной спиральной волной (б)

Заключение

На основании полученных результатов можно сделать вывод, что в ансамбле из N связанных автоколебательных элементов Бонхоффера–ван дер Поля при фиксированных значениях параметров может сосуществовать не менее 2^{N-1} различных режимов глобальной синхронизации. Сосуществование 2^{N-1} синхронных режимов было численно подтверждено для $N \leq 4$.

В цепочках с периодическими граничными условиями возможно существование режима, обусловленного волной возбуждения, бегущей по кольцу в системе и задающей ритм всем элементам цепочки. В решетке существует режим, при котором ритм задается спиральной волной. При малой связи в ансамблях элементов наблюдается кластерная синхронизация.

Многие теоретические и экспериментальные исследования показывают, что синхронизация играет ключевую роль в сетях автоколебательных элементов. Синхронизация лежит в основе преобразования информации в таких сетях. Рассмотренная мультистабильность синхронных режимов важна для понимания таких механизмов работы сетей, как хранение и распознавание изображений, выделение контуров изображений [16], визуальное восприятие [17], работа памяти [18], самоорганизация и структурообразование [19].

Данная работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 06-02-16596, 08-02-92004 и 08-02-97049.

Библиографический список

1. Maurer J. and Libchaber A. // J.Phys. Lett. (France) 1982. Vol. 41. P. 515.
2. Brun E., Derighette B., Meier D., Holzner R., and Raveni M. // J.Opt.Soc.Am. B. 1985. Vol. 2. P. 156.
3. Dangoisse D., Glorieux P., and Hennequin D. // Phys. Rev. A. 1987. Vol. 36. P. 4775.
4. Thompson J.M.T. and Stewart H.B. // Nonlinear Dynamics and Chaos. Wiley, Chichester, 1986.
5. Foss J., Longtin A., Mensour B., and Milton J. // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76. P. 708.
6. Simonotto E., Riani M., Seife C., Roberts M., Twitty J., and Moss F. // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 1186.
7. Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., and Kurths J. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
8. Mosekilde E., Maistrenko Yu., and Postnov D. World Scientific, Singapore, 2002.
9. Osipov G.V., Kurths J., and Zhou Ch. Springer, Berlin, 2007.
10. Sompolinsky H., Kanter I. // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 57. P. 2861.
11. Canavier C., Baxter D., Clark J. and Byrne J. // J. Neurophysiol. 1993. Vol. 69. P. 2252.
12. Rabinovich M.I., Varona P., Selverston A.I., and Abarbanel H.D.I. // Rev. of Modern Phys. 2006. Vol. 78. P. 1213.

13. *Bonhoeffer K.F.* // *Naturwissenschaften*. 1953. Vol. 40. P. 301.
14. *Torre V.* // *J.Theor.Biol.* 1976. Vol. 61. P. 55.
15. *Osipov G.V. and Sushchik M.M.* // *Phys.Rev.E.* 1998. Vol. 58. P. 7198.
16. *Macleod K., Bäcker A., and Laurent G.* // *Nature*. 1998. Vol. 395. P. 693.
17. *Ambiguity in Mind and Nature* / Eds P. Kruse and M. Stadler. New York. Springer-Verlag, 1995.
18. *Mensour B. and Longtin A.* // *Phys. Lett. A.* 1995. Vol. 205. P. 18.
19. *Beuter A., Milton J.G., Labrie C., and Glass L.* // *IEEE Systems Man Cybern*, 1989, 899.

Поступила в редакцию 15.08.2008

После доработки 1.12.2008

VARIETY OF SYNCHRONOUS REGIMES IN ENSEMBLES OF NONIDENTICAL OSCILLATORS:

Chain and lattice

A.K. Kryukov, G.V. Osipov, A.V. Polovinkin

We study synchronization in one- and two-dimensional ensembles of nonidentical Bonhoeffer–van der Pol oscillators. Small chains (number of elements $N \leq 4$) are proved to have not less than 2^{N-1} coexisting stable different synchronous regimes. The chain of N elements is supposed to have not less than 2^{N-1} synchronous regimes at the same values of parameters. Formation of synchronization clusters at weak coupling is shown. Regimes, provided by existing of waves, setting rhythm for all elements in ensemble, are investigated.

Keywords: Synchronization, multistability, synchronous regime, numerical methods, modeling, FitzHugh–Nagumo, Bonhoeffer–van der Pol.



АНАЛИЗ АТТРАКТОРОВ СТОХАСТИЧЕСКИ ВОЗМУЩЕННОЙ МОДЕЛИ «ХИЩНИК–ЖЕРТВА»

И.А. Башкирцева, Л.В. Карпенко, Л.Б. Ряшко

В работе рассматривается модель популяционной динамики «хищник–жертва» с насыщением хищника. Исследуются точки покоя и предельные циклы системы, проводится анализ их детерминированной устойчивости. Для исследования вероятностных свойств разброса случайных состояний вокруг аттракторов используется аппарат функции стохастической чувствительности. Демонстрируются возможности функции чувствительности в описании особенностей стохастических аттракторов модели «хищник–жертва».

Ключевые слова: Популяционная динамика, равновесия, предельные циклы, стохастическая чувствительность.

Введение

Исследование математических моделей, описывающих взаимодействие популяций, в настоящее время представляет собой классический раздел нелинейной динамики. Начиная с основополагающих работ А. Лотки и В. Вольтерры, качественная теория систем нелинейных дифференциальных уравнений является основным инструментом изучения динамики численности взаимосвязанных сообществ [1–4]. Исследования последних лет показали, что разнообразие, наблюдаемое в поведении нелинейных динамических систем, можно свести к анализу относительно простых режимов (равновесия, циклы) и их качественных преобразований – бифуркаций [5, 6]. Формальный анализ аттракторов соответствующей математической модели позволяет ответить на важные содержательные вопросы об особенностях динамики взаимодействующих популяций и спрогнозировать их поведение в будущем. Так, например, одним из наиболее стандартных переходов является бифуркация равновесие–цикл. Такой переход сопровождается потерей устойчивости простого аттрактора – равновесия и рождением нового, более сложного аттрактора – предельного цикла. Анализ устойчивости соответствующих режимов является здесь ключевым моментом в понимании механизма сложных явлений нелинейной динамики.

Функционирование динамических систем, как правило, происходит в условиях трудно контролируемых случайных возмущений [7]. Включение в модель случайных возмущений приводит к тому, что решение системы также становится случайным процессом. Исследование нелинейных систем в присутствии случайных возмущений было начато в [8] и продолжено в большом числе работ (см., например [9–13]).

Многочисленные экспериментальные и теоретические исследования показали, что случайные флуктуации могут вызывать неожиданные и интересные явления, наблюдаемые в электронных генераторах, лазерах, механических конструкциях, химических реакциях и биологических системах. Разнообразные индуцированные шумами переходы от простых равновесий через периодические режимы к более сложным хаотическим колебаниям являются центральной проблемой нелинейной стохастической динамики [9, 14–16]. Анализ взаимодействия шума и нелинейности является ключевым моментом для понимания причин и механизмов подобных переходов. Случайные возмущения в нелинейных системах могут вызвать такие разнообразные явления, как стохастический резонанс [17, 18], индуцированные шумами переходы [14], индуцированный шумом порядок [19, 20], индуцированный шумом хаос [21], порожденные шумом новые сложные структуры [22, 23], поддерживаемое шумами распространение фронтов [24]. Во многих работах индуцированные шумами явления трактуются и изучаются в русле нового направления – математической теории стохастических бифуркаций [25]. С точки зрения этой теории, стохастическая бифуркация есть качественное изменение формы стационарной плотности распределения стохастических аттракторов системы. Стохастический аттрактор – это решение стохастической системы, имеющее стационарную плотность распределения случайных состояний. При этом для всякого другого достаточно близкого решения соответствующая плотность распределения стабилизируется и сходится к этой стационарной. Конструкция стохастических аттракторов рассматривалась в [26–29].

Стохастические бифуркации исследовались для целого ряда систем, таких как бруселятор [30–32], осциллятор Дуффинга [33], ван-дер-Поля [34], Дуффинга–ван-дер-Поля [35, 36], Хопфа [37]. Хорошо известно, что фазовый портрет системы может значительно измениться под воздействием случайных возмущений. Вызванные шумами соответствующие деформации особенно ощутимы вблизи точек бифуркаций. Даже малые шумы вследствие высокой чувствительности аттракторов в зонах бифуркаций могут порождать значительные изменения в динамике системы [38, 39]. Анализ стохастической чувствительности аттракторов является важным новым направлением в исследовании индуцированных шумами переходов.

Полное вероятностное описание возможных в системе стохастических режимов дается с помощью функции плотности распределения, удовлетворяющей уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова. Непосредственное использование этого уравнения уже для систем двух взаимодействующих популяций весьма затруднительно. Важный для практики случай воздействия малых возмущений приводит к известным проблемам анализа уравнений с малыми коэффициентами при старших производных. В этой ситуации одним из наиболее распространенных приемов является прямое численное моделирование случайных траекторий с их последующей статистической обработкой.

В настоящее время развивается подход, позволяющий для искомым вероятностных характеристик стохастических аттракторов системы найти соответствующее приближение. Для систем с малыми случайными возмущениями в работе А.Д. Вентцеля и М.И. Фрейдлина [40] предложен метод, использующий конструкцию квазипотенциала. Для квазипотенциала вблизи аттрактора детерминированной системы может быть найдена [41] квадратичная аппроксимация, позволяющая в итоге получить асимптотику стационарной плотности в форме нормального распределе-

ния. При этом разброс случайных траекторий стохастической системы вокруг детерминированного аттрактора может быть описан с помощью функции стохастической чувствительности (ФСЧ). Данная функция была введена в работах [41, 42], где с ее помощью были исследованы особенности стохастических автоколебаний в моделях Брюсселятора и Лоренца.

В первой части данной работы излагаются необходимые теоретические сведения по анализу стохастических аттракторов общих нелинейных динамических систем. Для случаев стохастических равновесий и циклов вводится конструкция функции стохастической чувствительности, приводятся методы ее построения.

Во второй части работы детально рассмотрены возможности применения ФСЧ для анализа стохастических аттракторов модели «хищник–жертва», учитывающей явление насыщения хищника при росте численности жертвы. Эта модель известна благодаря появлению в ней структурно устойчивых автоколебаний – предельных циклов [43]. В работе проведен детальный сравнительный анализ детерминированной устойчивости и стохастической чувствительности аттракторов этой модели. Для стохастических равновесий и стохастических циклов исследованы особенности разброса случайных траекторий в фазовом пространстве и показано, как изменяются статистические характеристики этого разброса при вариации параметров системы.

1. Анализ стохастических равновесий и циклов

Рассмотрим детерминированную динамическую систему, заданную конечным числом нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad (1)$$

где $f(x)$ – достаточно гладкая n -мерная вектор-функция.

Предполагается, что система (1) имеет экспоненциально устойчивый аттрактор. Классическое исследование локальной устойчивости аттрактора к возмущению начальных данных предполагает переход к линейной системе первого приближения и анализ таких характеристик его устойчивости, как характеристические показатели или мультипликаторы.

Большинство реальных систем функционирует в условиях постоянного воздействия возмущений самой различной природы, так что характеристики детерминированной устойчивости могут оказаться слишком грубыми оценками, не дающими представления о устойчивости модели в реальных условиях. Для исследования динамической системы (1), находящейся под воздействием случайных помех, рассмотрим соответствующую стохастическую систему уравнений Ито

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon \sigma(x) \dot{w}, \quad (2)$$

где ε – параметр интенсивности возмущений; $\sigma(x)$ – достаточно гладкая $n \times n$ -матричная функция, задающая зависимость случайных возмущений от состояния системы; $w(t)$ – n -мерный стандартный винеровский процесс.

Под воздействием невырожденных шумов случайные траектории системы (2) покидают детерминированный аттрактор и образуют вокруг него некоторый пучок. В случае, когда вероятностное распределение случайных состояний в этом пучке

с течением времени стабилизируется, можно говорить о наличии у возмущенной системы *стохастического аттрактора*. Полное вероятностное описание стохастического аттрактора системы, находящейся под воздействием шума интенсивности ε , дается соответствующей стационарной плотностью распределения $p(x, \varepsilon)$.

Для вероятностного описания разброса случайных траекторий в системах с малыми стохастическими возмущениями был предложен подход [40], использующий некоторую специально конструируемую функцию Ляпунова – *квазипотенциал*

$$v(x) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln p(x, \varepsilon).$$

В случае малых шумов с помощью квазипотенциала можно записать асимптотику стационарной плотности распределения

$$p(x, \varepsilon) \approx K \exp \left(- \frac{v(x)}{\varepsilon^2} \right).$$

В задачах устойчивости, когда основное внимание уделяется поведению системы в малой окрестности, для квазипотенциала достаточно иметь лишь хорошее приближение вблизи аттрактора.

Мы будем анализировать характеристики детерминированной и стохастической устойчивости для двух видов аттракторов – равновесия и предельного цикла.

1.1. Равновесие. Пусть аттрактором системы (1) является точка покоя \bar{x} . В качестве характеристики детерминированной устойчивости точки покоя традиционно используется *характеристический показатель* $\Lambda = \max_i \operatorname{Re} \lambda_i$, где λ_i – собственные числа матрицы $F = \partial f / \partial x(\bar{x})$ системы первого приближения для (1). Точки покоя, имеющие наименьшие значения характеристического показателя, являются наиболее устойчивыми к начальным возмущениям.

Воздействие стохастических возмущений приводит к тому, что вокруг устойчивой точки покоя формируется облако случайных траекторий. Соответствующий стохастический аттрактор естественно называть *стохастическим равновесием*.

В данном случае для квазипотенциала вблизи равновесия \bar{x} детерминированной системы (1) используется квадратичная аппроксимация $v(x) \approx 1/2(x - \bar{x}, W^{-1}(x - \bar{x}))$, где (\cdot, \cdot) – скалярное произведение. Эта аппроксимация позволяет представить асимптотику стационарной плотности в форме нормального распределения

$$p(x, \varepsilon) \approx K \exp \left(- \frac{(x - \bar{x}, W^{-1}(x - \bar{x}))}{2\varepsilon^2} \right)$$

с ковариационной матрицей $\varepsilon^2 W$, характеризующей разброс случайных траекторий стохастической системы (2) вокруг равновесия \bar{x} .

Пусть $\eta_1 \geq \eta_2 \geq \dots \geq \eta_n \geq 0$ – собственные числа, а h_1, h_2, \dots, h_n – ортонормированный базис собственных векторов матрицы W . При невырожденных шумах значения η_i положительны. При этом величины $\varepsilon^2 \eta_i$ задают разброс (дисперсию) случайных траекторий в направлении векторов h_i .

В случае экспоненциальной устойчивости точки покоя \bar{x} , когда спектр матрицы F лежит в левой полуплоскости, матрица W является единственным решением алгебраического уравнения

$$FW + WF^T = -S, \quad (3)$$

где

$$F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}), \quad S = GG^\top, \quad G = \sigma(\bar{x}).$$

Матрица W , связывая интенсивность воздействия ε^2 с ковариацией $\varepsilon^2 W$ разброса случайных траекторий вокруг \bar{x} , играет роль матричного *коэффициента стохастической чувствительности* равновесия \bar{x} . В качестве общей скалярной характеристики чувствительности точки покоя удобно использовать величину $m = \max_i \eta_i$ – *показатель стохастической чувствительности*.

1.2. Предельный цикл. Теперь рассмотрим случай, когда аттрактором системы (1) выступает предельный цикл $\Gamma = \{\xi(t) | 0 \leq t < T\}$, задаваемый T -периодическим решением $\xi(t)$ системы (1).

Динамика малых отклонений, как и в случае точки покоя, определяется системой первого приближения

$$\dot{z} = F(t)z, \tag{4}$$

где $F = \partial f / \partial x(\xi(t))$ – T -периодическая матрица.

Классическими характеристиками устойчивости цикла являются мультипликаторы ρ_i – собственные числа матрицы монодромии $B = Z(T)$, где $Z(t)$ – фундаментальная матрица системы (4).

Один из мультипликаторов (пусть это будет ρ_1) всегда равен единице. Характеристикой детерминированной устойчивости цикла является число $\rho = \max_i \rho_i$ ($i = 2, \dots, n$), которое показывает, во сколько раз траектория приближается к циклу за один оборот при малом отклонении начальных данных.

Однако данная логика справедлива только лишь для возмущений, действующих на систему однократно, в некоторый начальный момент времени. Кроме того, мультипликаторы не позволяют различать и сравнивать по степени устойчивости разные участки цикла.

При воздействии стохастических шумов вокруг цикла формируется стационарно распределенный пучок случайных траекторий системы (2), лежащих в некоторой инвариантной для системы окрестности U . Соответствующий стохастический аттрактор будем называть *стохастическим циклом*.

Пусть Π_t – гиперплоскость, ортогональная циклу в точке $\xi(t)$ ($0 \leq t \leq T$). Через U_t обозначим окрестность точки $\xi(t)$, лежащую в Π_t : $U_t = U \cap \Pi_t$. Предполагается, что $U_t \cap U_s = \emptyset$ при $t \neq s$. Вероятностное описание случайных траекторий в пучке удобно связать со следующей вектор-функцией X_t . Значения X_t есть точки пересечения случайных траекторий нелинейной системы (2) с U_t . Вероятностное распределение траекторий в пучке с течением времени стабилизируется, поэтому случайная переменная X_t в окрестности U_t имеет некоторое стационарное распределение с плотностью $p_t(x, \varepsilon)$.

Для малых шумов с помощью соответствующей квадратичной аппроксимации квазипотенциала вблизи цикла можно записать экспоненциальную гауссову асимптотику [42]

$$p_t(x, \varepsilon) = K \exp \left(- \frac{(x - \xi(t))^\top W^+(t) (x - \xi(t))}{2\varepsilon^2} \right)$$

со средним значением $m_t = \xi(t)$ и ковариационной матрицей $D(t, \varepsilon) = \varepsilon^2 W(t)$ («+» – знак псевдообращения).

Это распределение, сосредоточенное в гиперплоскости Π_t , является сингулярным: $\text{rank} D(t, \varepsilon) \leq n - 1$. Для невырожденных шумов ($\det \sigma(x)|_\Gamma \neq 0$) имеем $\text{rank} D(t, \varepsilon) = n - 1$. Ковариационная матрица $D(t, \varepsilon)$ характеризует разброс точек пересечения случайных траекторий с гиперплоскостью Π_t .

Рассмотрим собственные значения $\eta_1(t) \geq \eta_2(t) \geq \dots \geq \eta_n(t) \geq 0$ и собственные векторы $h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t)$ матрицы $W(t)$. В силу вырожденности $W(t)$, собственное значение $\eta_n(t) \equiv 0$. Остальные собственные значения и соответствующие им собственные векторы характеризуют разброс пучка в гиперплоскости Π_t по величине и направлению. Матрица $W(t)$, играющая роль *коэффициента стохастической чувствительности* цикла, является решением системы [41]

$$\begin{aligned} \dot{W} &= F(t)W + WF^\top(t) + P(t)S(t)P(t), \\ W(t+T) &= W(t), \\ W(t)r(t) &= 0, \quad r(t) = f(\xi(t)), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t)), \quad S(t) = G(t)G^\top(t), \quad G(t) = \sigma(\xi(t)), \\ P(t) &= P_{f(\xi(t))}, \quad P_r = I - \frac{rr^\top}{r^\top r}. \end{aligned}$$

Здесь P_r – матрица проектирования на подпространство, ортогональное вектору $r \neq 0$. Эта система, благодаря экспоненциальной устойчивости предельного цикла, имеет единственное решение. Необходимые теоретические сведения по решению системы (5) приведены в [42].

В случае цикла на плоскости ($n = 2$) матрица стохастической чувствительности $W(t)$ и проекционная матрица $P(t)$ имеют ранг, равный единице, и представимы в виде

$$W(t) = \mu(t)P(t), \quad P(t) = p(t)p^\top(t).$$

Здесь $p(t)$ – нормированный вектор, ортогональный касательному вектору $f(\xi(t))$, а значит и циклу Γ в точке $\xi(t)$; $\mu(t) > 0$ – T -периодическая скалярная функция, задающая разброс пучка по нормали $p(t)$ к циклу, – *функция стохастической чувствительности* (ФСЧ).

Функция $\mu(t)$ является решением [41] краевой задачи

$$\dot{\mu} = a(t)\mu + b(t), \quad \mu(0) = \mu(T)$$

с T -периодическими коэффициентами

$$a(t) = p^\top(t)(F^\top(t) + F(t))p(t), \quad b(t) = p^\top(t)S(t)p(t)$$

и может быть найдена в явном виде

$$\mu(t) = g(t)(c + h(t)), \quad (6)$$

где

$$g(t) = \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right), \quad h(t) = \int_0^t \frac{b(s)}{g(s)}ds, \quad c = \frac{g(T)h(T)}{1 - g(T)}.$$

Функция стохастической чувствительности определена в точках цикла Γ и характеризует на различных участках этого цикла разброс пучка случайных траекторий. Эта функция позволяет сравнивать степень чувствительности разных частей цикла к стохастическим помехам и предсказывать тонкие эффекты случайных воздействий.

В анализе чувствительности предельного цикла к случайным возмущениям важную роль играет величина $m = \max_{[0;T]} \mu(t)$, которую мы будем называть *показателем стохастической чувствительности* цикла [15]. Эта величина является удобной характеристикой цикла в целом.

2. Аттракторы модели «хищник–жертва»

Модель популяционной динамики «хищник–жертва» с насыщением хищника задается следующей двумерной нелинейной системой [43]:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - a \frac{x}{1+x} y - \gamma x^2, \\ \dot{y} = b \frac{x}{1+x} y - y, \end{cases} \quad (7)$$

где x – плотность популяции жертвы, y – плотность популяции хищников, a – удельная скорость потребления популяцией хищника популяции жертвы при единичной плотности обеих популяций, b/a – коэффициент переработки потребленной хищником биомассы жертвы в свою собственную биомассу, γ – коэффициент ограниченности ресурса, потребляемого жертвами. Параметры a , b и γ положительны. Система имеет биологический смысл только при неотрицательных значениях координат x и y .

В отсутствие жертв популяция хищников экспоненциально вымирает – этой ситуации отвечает положение равновесия $M_1 = (0; 0)$. В отсутствие хищников плотность популяции жертв стабилизируется к значению, равному $1/\gamma$, – такой ситуации соответствует равновесие $M_2 = (1/\gamma; 0)$.

Кроме этих двух вырожденных положений равновесия, в системе также существует единственное невырожденное, отвечающее сосуществованию хищников и жертв. Оно соответствует точке покоя

$$M_3 \left(\frac{1}{b-1}; \frac{b}{a} \cdot \frac{b-\gamma-1}{(b-1)^2} \right).$$

Для сохранения биологического смысла этого равновесия требуются некоторые дополнительные ограничения: $b > 1$ и $\gamma < b - 1$. Мы будем изучать динамику системы в окрестности этого положения равновесия.

2.1. Равновесие. Характер поведения системы (7) вблизи точки покоя M_3 можно исследовать с помощью системы первого приближения с матрицей

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{b} \left(1 - \gamma \frac{b+1}{b-1}\right) & -\frac{a}{b} \\ \frac{b-\gamma-1}{a} & 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Собственные числа матрицы F имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{b} \left(1 - \gamma \frac{b+1}{b-1}\right) \pm \sqrt{\Delta} \right],$$

где

$$\Delta = \gamma^2 \left(\frac{1}{b} \cdot \frac{b+1}{b-1} \right)^2 + \gamma \frac{2}{b} \left(2 - \frac{1}{b} \cdot \frac{b+1}{b-1} \right) + \frac{1}{b^2} + \frac{4}{b} - 4.$$

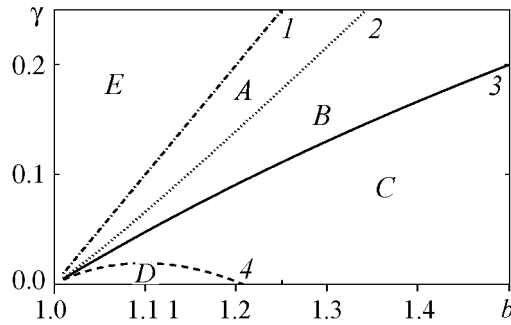


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма системы (1) для точки покоя M_3

Отметим, что параметр a не влияет на собственные числа матрицы (8). Зафиксируем значение $a = 2$ и в дальнейшем будем изучать динамику системы (7) в зависимости от параметров b и γ .

По результатам анализа собственных значений λ_1 и λ_2 в плоскости параметров b и γ получена бифуркационная диаграмма (рис. 1).

В зонах A и B точка покоя M_3 устойчива (зона A — устойчивый узел, B — устойчивый фокус). Зона A ограничена прямой $\gamma = b - 1$ (граница 1) и кривой $\gamma = \delta(b)$ (граница 2), где

$$\delta(b) = \frac{b-1}{b+1} + 2b \left(\frac{b-1}{b+1} \right)^2 \left(\sqrt{\frac{2b}{b-1}} - 1 \right).$$

При переходе из зоны B в зону C через границу 3, задаваемую соотношением $\gamma = (b-1)/(b+1)$, равновесие M_3 теряет устойчивость (зона C — неустойчивый фокус, зона D — неустойчивый узел).

Зоны C и D разделяет граница 4, задаваемая соотношением

$$\gamma = \frac{b-1}{b+1} - 2b \left(\frac{b-1}{b+1} \right)^2 \left(\sqrt{\frac{2b}{b-1}} + 1 \right).$$

В зоне E фазовый портрет — седло. Потеря устойчивости точки покоя в зонах C и D сопровождается рождением предельного цикла. При этом граница 3 изображает точки бифуркации Андронова–Хопфа.

Иследуем чувствительность равновесия M_3 к возмущениям начальных данных в зоне $A \cup B$, где оно устойчиво.

Характеристический показатель Λ системы (7) в зоне A равен

$$\Lambda = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{b} \left(1 - \gamma \frac{b+1}{b-1} \right) + \sqrt{\Delta} \right],$$

а в зоне B

$$\Lambda = \frac{1}{2b} \left(1 - \gamma \frac{b+1}{b-1} \right).$$

Наименьшие значения характеристического показателя в зоне $A \cup B$, при каждом фиксированном значении параметра b , достигаются на границе 2 ($\gamma = \delta(b)$), разделяющей зоны A устойчивого узла и B устойчивого фокуса. В точках этой кривой характеристический показатель задаётся формулой $\Lambda = \Lambda(b) = (b-1)/(b+1) \left(1 - \sqrt{2b/(b-1)} \right)$. При движении вдоль границы 2, при $b \rightarrow +\infty$, характеристический показатель $\Lambda(b)$ убывает и стабилизируется: $\Lambda(b) \rightarrow 1 - \sqrt{2}$ (см. ниже п. 2.2).

Рассмотрим наряду с детерминированной системой (7) соответствующую стохастически возмущенную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x - a \frac{x}{1+x} y - \gamma x^2 + \varepsilon \dot{w}_1, \\ \dot{y} = b \frac{x}{1+x} y - y + \varepsilon \dot{w}_2, \end{cases} \quad (9)$$

где ε – интенсивность шумов, w_1 и w_2 – стандартные независимые винеровы процессы.

2.2. Стохастическое равновесие. Состояния стохастической системы (9) в окрестности равновесия M_3 изображены на рис. 2. Как видно из рисунка, разброс состояний вдоль разных направлений существенно различается и зависит от параметров системы.

Детальное описание разброса может быть получено с помощью матрицы стохастической чувствительности W – решения уравнения (3). Для равновесия M_3 си-

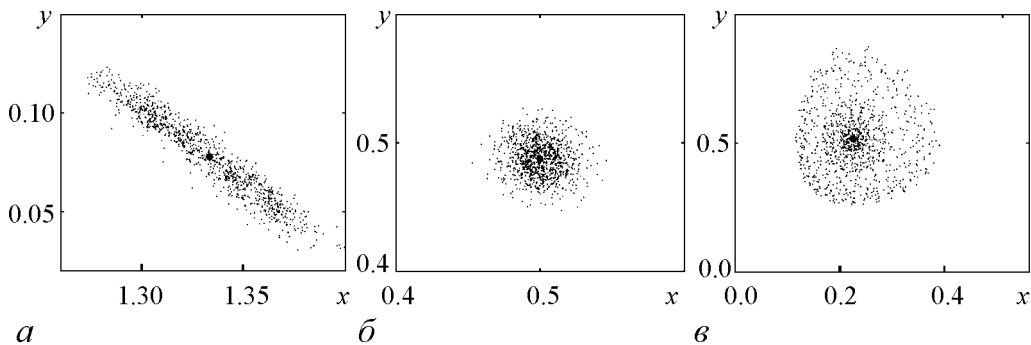


Рис. 2. Разброс случайных состояний системы (9) для $\gamma = 0.7$, $\varepsilon = 0.005$ и различных значений b : $a - 1.75$, $b - 3.0$, $в - 5.0$

стемы (9) решением уравнения (3) является матрица

$$W = \frac{1}{2g'_x} \begin{pmatrix} \frac{f'_y - g'_x}{f'_x} & -1 \\ -1 & \frac{f_x'^2 - f'_y g'_x + g_x'^2}{f'_x f'_y} \end{pmatrix},$$

где

$$f(x, y) = x - a \frac{x}{1+x} y - \gamma x^2, \quad g(x, y) = b \frac{x}{1+x} y - y, \quad x = \frac{1}{b-1}, \quad y = \frac{b}{a} \cdot \frac{b-\gamma-1}{(b-1)^2}.$$

Характеристики стохастической чувствительности – собственные числа η_1 и η_2 матрицы W – задают разброс случайных траекторий в направлении соответствующих собственных векторов. Графики функций $\eta_1(b)$ и $\eta_2(b)$ при $\gamma = 0.7$ представлены на рис. 3 (сплошные линии).

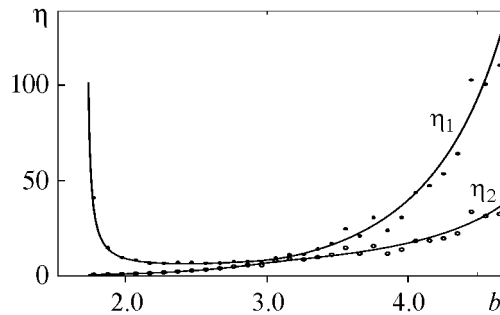


Рис. 3. Стохастическая чувствительность равновесия M_3 : $\eta_{1,2}$ (сплошные линии) и $\tilde{\eta}_{1,2}$ (дискретные значения) при $b \in (1.75, 5)$, $\gamma = 0.7$, $\varepsilon = 0.005$

Характер поведения функций $\eta_1(b)$ и $\eta_2(b)$ на рассматриваемом интервале неоднороден. В середине интервала они близки друг к другу, а на концах интервала существенно отличаются.

Как уже было сказано, собственные числа η_1 и η_2 матрицы W описывают разброс случайных траекторий в направлении собственных векторов h_1 и h_2 . Проследим, как связано изменение значений функций $\eta_1(b)$ и $\eta_2(b)$ с изменением формы соответствующего облака случайных состояний системы (см. рис. 2 и рис. 3).

При приближении параметра b к бифуркационному значению $b = 1.7$ (граница I – граница устойчивости точки M_3) старшее из собственных чисел η_1 устремляется в бесконечность, а младшее η_2 стремится к нулю. Соответственно, облако случайных траекторий значительно вытягивается в одном направлении и сжимается в направлении, перпендикулярном к нему (рис. 2, а).

При $b = 3$ собственные числа достаточно малы и отличаются незначительно, и облако имеет практически круглую форму и небольшой размер (рис. 2, б).

Когда же параметр b приближается к другому бифуркационному значению $b = 17/3$ (граница устойчивости 3), оба собственных числа устремляются в бесконечность, но с различной скоростью. Как видно из рис. 2, в, облако имеет большой размер и сильнее вытянуто в одном из направлений.

По результатам прямого численного моделирования случайных состояний системы (9) были найдены собственные значения $\tilde{\eta}_1$ и $\tilde{\eta}_2$ матрицы эмпирической чувствительности

$$\tilde{W} = \frac{1}{\varepsilon^2} D(\varepsilon),$$

где $D(\varepsilon)$ – эмпирическая ковариационная матрица случайных состояний системы (9). На рис. 3 значения $\tilde{\eta}_1$ обозначены звездочками, а $\tilde{\eta}_2$ – кружочками. Как видим, значения эмпирической чувствительности $\tilde{\eta}_1$ и $\tilde{\eta}_2$ хорошо совпадают с η_1 и η_2 .

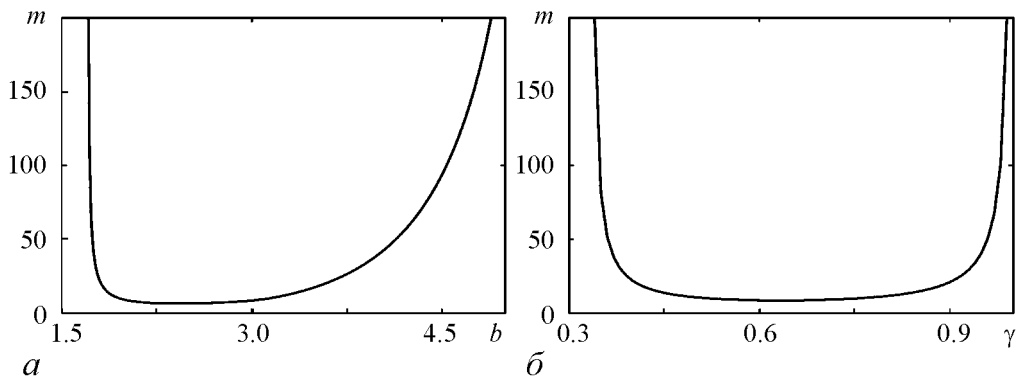


Рис. 4. Показатель $m(b, \gamma)$ стохастической чувствительности равновесия M_3 в сечениях: $b \in (1.75, 6)$, $\gamma = 0, 7$ (а); $\gamma \in (0.35, 1)$, $b = 2$ (б)

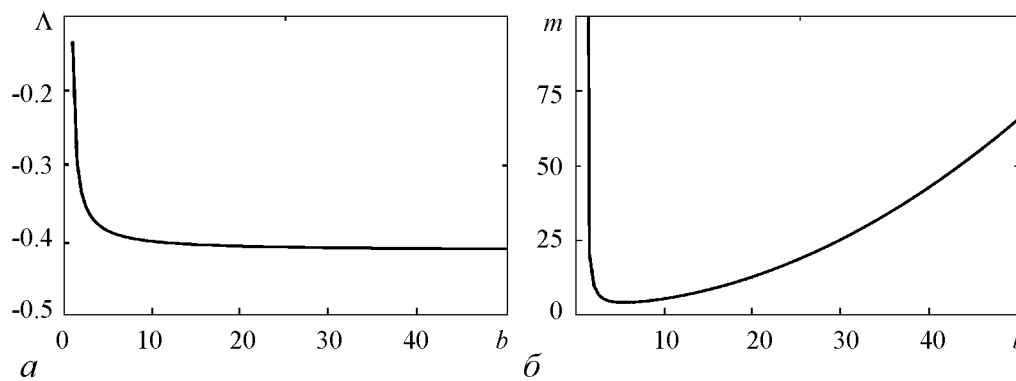


Рис. 5. Характеристики устойчивости равновесия M_3 при $\gamma = \delta(b)$: a – характеристический показатель; \bar{b} – показатель стохастической чувствительности

Показатель $m = \max(\eta_1, \eta_2)$ служит общей характеристикой стохастической чувствительности точки покоя. Графики зависимости функции m от параметров b и γ приведены на рис. 4.

В области $A \cup B$ функция m имеет абсолютный минимум при $b = 4.05$, $\gamma = 1.945$, равный $m_{\min} = 3.4207$. Точка покоя при таких параметрах b и γ является наименее чувствительной к стохастическим возмущениям.

Напомним, что с точки зрения детерминированной теории, степень устойчивости точки M_3 , определяемая соответствующим характеристическим показателем, в области $A \cup B$ тем выше, чем дальше мы продвигаемся вдоль границы $\gamma = \delta(b)$, при $b \rightarrow +\infty$ (рис. 5, а). Показатель же стохастической чувствительности m в этом направлении неограниченно растет ($m \rightarrow +\infty$) (рис. 5, б).

Как видно из проведенных исследований, детерминированный и стохастический анализ дают нам принципиально разные результаты. Тот факт, что в присутствии шума характеристические показатели не могут служить хорошим критерием устойчивости, отмечался и в [44].

2.3. Предельный цикл. Рассмотрим динамику модели (7) в зоне $C \cup D$, где вокруг неустойчивого равновесия M_3 существует устойчивый предельный цикл Γ . Основной характеристикой детерминированной устойчивости цикла является мультипликатор $\rho = \rho_2$, так как $\rho_1 \equiv 1$.

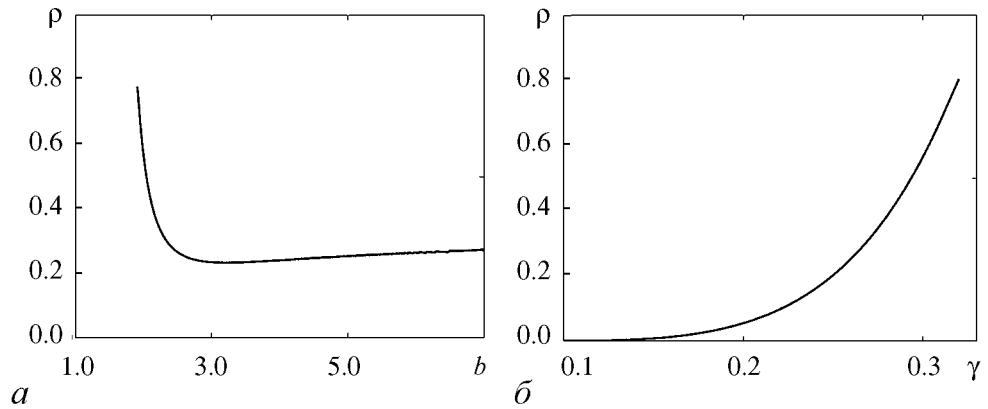


Рис. 6. Мультипликатор $\rho(b, \gamma)$ в сечениях: $b \in (2, 7)$, $\gamma = 0.3$ (а); $\gamma \in (0.1, 0.32)$, $b = 2$ (б)

Графики зависимости ρ от параметров b и γ приведены на рис. 6. С точки зрения мультипликатора, наиболее устойчивыми являются предельные циклы, соответствующие значениям γ , близким к нулю. Такие циклы наименее чувствительны к однократному начальному возмущению.

2.4. Стохастический цикл. В присутствии стохастических шумов вокруг цикла формируется стационарно распределенный пучок случайных траекторий. На рис. 7 изображен стохастический цикл, образованный случайными траекториями системы (9). Как видно, разброс траекторий вдоль невозмущенного детерминированного цикла неоднороден. Соответствующий перепад дисперсии представлен на рис. 8, где изображена кривая стохастической функции чувствительности $\mu(t)$ и дискретные значения соответствующей эмпирической функции чувствительности $\tilde{\mu}(t)$, найденные прямым численным моделированием случайных траекторий системы (9) для цикла с параметрами $a = 2$, $b = 2$, $\gamma = 0.3$. Хорошее совпадение значений $\mu(t)$ и $\tilde{\mu}(t)$ позволяет в дальнейшем анализе особенностей разброса случайных траекторий вдоль цикла использовать функцию стохастической чувствительности $\mu(t)$. Экстремумы функции $\mu(t)$ хорошо передают неравномерность разброса траекторий при движении вдоль цикла.

Графики, демонстрирующие поведение показателя стохастической чувствительности m в зависимости от параметров b и γ , представлены на рис. 9. Как ви-

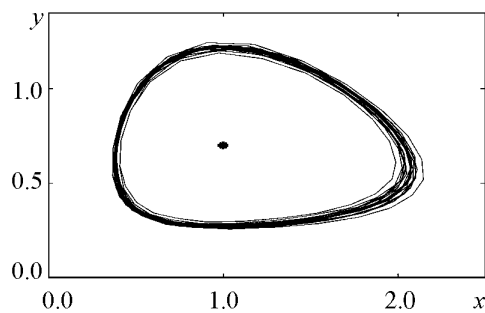


Рис. 7. Предельный цикл системы (8) и случайные траектории системы (9) при $b = 2$, $\gamma = 0.3$, $\varepsilon = 0.005$

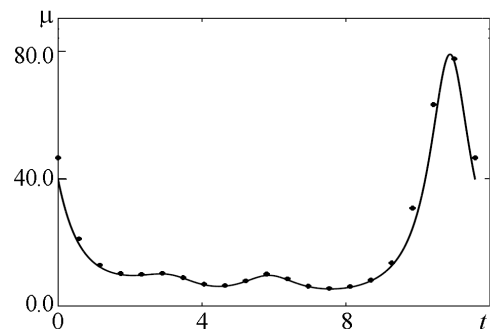


Рис. 8. Стохастическая чувствительность цикла системы (9) при $b = 2$, $\gamma = 0.3$

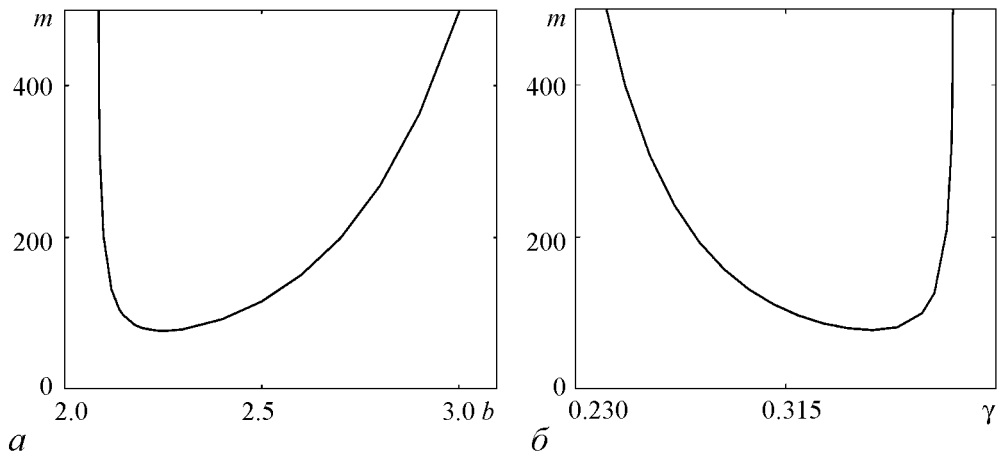


Рис. 9. Зависимость m от b и γ : $b \in (1.9, 2.7)$, $\gamma = 0.3$ (а); $\gamma \in (0.25, 0.32)$, $b = 2$ (б)

дим, при вариации параметров показатель стохастической чувствительности цикла существенно меняется. Минимум функции $m(b, \gamma)$ в области $C \cup D$ достигается при $b = 2.25$, $\gamma = 0.35$ и равен $m_{\min} = 77.39$. Стохастический цикл системы (9) при таких параметрах является наименее чувствительным в области $C \cup D$ к случайным возмущениям.

Связь изменения показателя стохастической чувствительности с конфигурацией стохастических циклов для $\gamma = 0.35$ можно проследить на рис. 10. Между внешним ($b = 3.2$) и внутренним ($b = 2.08$) стохастическими циклами располагается более узкий цикл ($b = 2.25$), соответствующий минимуму показателя стохастической чувствительности.

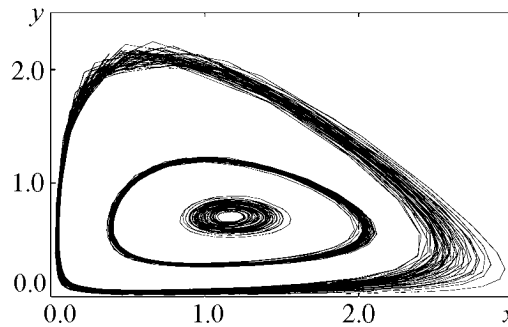


Рис. 10. Стохастические циклы системы (9) для $\gamma = 0.35$, $\varepsilon = 0.005$ при $b = 2.08$ (внутренний); $b = 2.25$ (средний); $b = 3.2$ (внешний)

Сравнивая рис. 6 и рис. 9, можно отметить, что результаты детерминированного и стохастического анализа предельных циклов (как и выше рассмотренных равновесий) принципиально различаются. При стремлении $\gamma \rightarrow 0$ значение показателя стохастической чувствительности $m \rightarrow \infty$, в то время как мультипликатор $\rho \rightarrow 0$. Это означает, что предельные циклы, наиболее устойчивые к детерминированным возмущениям начальных данных, имеют высокую стохастическую чувствительность.

Заключение

В настоящей работе рассмотрены вопросы анализа устойчивости и чувствительности регулярных аттракторов (равновесий и циклов) нелинейных динамических систем, находящихся под воздействием случайных возмущений. Под воздействием шумов случайные траектории системы покидают детерминированный ат-

трактор и образуют вокруг него некоторый пучок – стохастический аттрактор. Для стохастических равновесий и циклов излагаются необходимые теоретические сведения по аппроксимации и исследованию соответствующих вероятностных распределений, использующие конструкцию функции стохастической чувствительности.

В работе на примере классической модели популяционной динамики «хищник–жертва», учитывающей явление насыщения хищника при росте численности жертвы, проведен сравнительный анализ детерминированной устойчивости и стохастической чувствительности соответствующих аттракторов – устойчивого равновесия и предельного цикла. На основе разработанного авторами метода функции стохастической чувствительности получено параметрическое описание особенностей разброса случайных состояний вокруг равновесия, отражающего стационарный режим сосуществования взаимодействующих популяций, в присутствии случайных возмущений. Стохастическая чувствительность равновесия задается 2×2 -матрицей. Ее собственные числа и векторы достаточно наглядно определяют пространственную ориентацию и размер облака случайных состояний.

В работе проиллюстрирована связь изменения собственных чисел матрицы чувствительности с изменением формы соответствующего облака случайных состояний системы при вариации параметров. Если значения собственных чисел существенно различны, то облако случайных траекторий значительно вытянуто в направлении старшего собственного вектора. Если собственные числа отличаются незначительно, то облако имеет практически круглую форму. При увеличении собственных чисел размер облака увеличивается. Старшее собственное значение служит общей характеристикой стохастической чувствительности точки покоя. В работе получены значения параметров системы, при которых равновесие является наименее чувствительным к стохастическим возмущениям.

В случае цикла функция стохастической чувствительности одномерна и характеризует разброс случайных траекторий в каждой точке цикла по направлению нормали. Для стохастических циклов системы «хищник–жертва» в работе построены соответствующие функции стохастической чувствительности и исследована их зависимость от параметров системы. При вариации параметров показатель стохастической чувствительности цикла существенно меняется. В пространстве параметров найден минимум показателя стохастической чувствительности, при котором цикл системы является наименее чувствительным к случайным возмущениям.

Показано, что чувствительность к шуму не определяется только лишь традиционно используемыми показателями Ляпунова траектории на аттракторе. Для исследуемой популяционной модели значения параметров, при которых детерминированная система максимально устойчива к начальному возмущению, могут в то же время соответствовать максимальной чувствительности системы к шуму. Полученные в работе результаты характеризуют введенную функцию стохастической чувствительности как достаточно простую и наглядную конструкцию, позволяющую отслеживать тонкие эффекты воздействия случайных возмущений на равновесия и циклы нелинейных систем.

Работа частично поддержана грантами РФФИ 07-01-96079урал, 09-01-00026, 09-08-00048 и Федерального агентства по образованию 2.1.1/2571.

Библиографический список

1. Колмогоров А.Н. Качественное изучение математических моделей динамики популяций // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1972, вып. 25. С. 100.
2. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978.
3. Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. М.: Наука, 1985.
4. Turchin P. Complex population dynamics: A theoretical/empirical synthesis, Princeton University Press, 2003.
5. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Институт компьютерных исследований, 2002.
6. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
7. Музычук О.В. Вероятностные характеристики системы «хищник–жертва» со случайно изменяющимися параметрами // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 2–3. С. 80.
8. Понтрягин Л.С., Андронов А.А., Витт А.А. О статистическом рассмотрении динамических систем // ЖЭТФ. 1933. Т. 3, вып. 3. С. 165.
9. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.
10. Рытов С.М. Введение в стохастическую радиофизику. М.: Наука, 1976.
11. Диментберг М.Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980.
12. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
13. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
14. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987. С. 400.
15. Landa P.S., McClintock P.V.E. Changes in the dynamical behavior of nonlinear systems induced by noise // Physics Reports. 2000. Vol. 323. P. 1.
16. Lindner B., Garcia-Ojalvo J., Neiman A., Schimansky-Geier L. Effects of noise in excitable systems // Physics Reports. 2004. Vol. 392. P. 321.
17. Gammaitoni L. et al. Stochastic resonance // Rev. Mod. Phys. 1998. Vol. 70. P. 223.
18. McDonnell M.D., Stocks N.G., Pearce C.E.M., Abbott D. Stochastic resonance: From suprathreshold stochastic resonance to stochastic signal quantization. Cambridge University Press, 2008.
19. Matsumoto K., Tsuda I. Noise induced order // J. Stat. Phys. 1983. Vol. 31. P. 87.
20. Gassmann F. Noise-induced chaos-order transitions // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 55. P. 2215.
21. Gao J.B., Hwang S.K., Liu J.M. When can noise induce chaos? // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 82. P. 1132.
22. Zaks M.A., Sailer X., Schimansky-Geier L., Neiman A.B. Noise induced complexity: From subthreshold oscillations to spiking in coupled excitable systems // Chaos. 2005. Vol. 15. P. 026117.

23. *Agez G., Glorieux P., Taki M., Louvergneaux E.* Two-dimensional noise-sustained structures in optics: Theory and experiments // *Phys. Rev. A.* 2006. Vol. 74. P. 043814.
24. *Clerc M.G., Falcon C., Tirapegui E.* Front propagation sustained by additive noise // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 74. P. 011303.
25. *Arnold L.* Random Dynamical Systems. Springer-Verlag, 1998.
26. *Бланк М.Л.* Конечномерные стохастические аттракторы бесконечномерных динамических систем // *Функц. анализ и его прил.* 1986. 20:2. С.54.
27. *Бланк М.Л.* Малые возмущения хаотических динамических систем // *Успехи мат. наук.* 1989. Т. 44, Вып. 6(270). С. 3.
28. *Scheutzow M.* Comparison of various concepts of a random attractor: A case study // *Arch. Math.* 2002. Vol. 78. P. 233.
29. *Schmalfluss B.* The random attractor of the stochastic Lorenz system // *ZAMP.* 1997. Vol. 48. P. 951.
30. *Lefever R., Turner J.* Sensitivity of a Hopf bifurcation to external multiplicative noise // *Fluctuations and Sensitivity in Equilibrium Systems* / ed. by W. Horsthemke and D.K. Kondepudi. Berlin: Springer. 1984. P. 143.
31. *Lefever R., Turner J.* Sensitivity of a Hopf bifurcation to multiplicative colored noise // *Phys. Rev. Lett.* 1986. Vol. 56. P. 1631.
32. *Arnold L., Bleckert G., Schenk-Hoppe K.* The stochastic Brusselator: Parametric noise destroys Hopf bifurcation // *Stochastic Dynamics.* Bremen. 1997. P. 71. New-York: Springer, 1999.
33. *Malick K., Marcq P.* Stability analysis of noise-induced Hopf bifurcation // *Eur. Phys. J.* 2003. Vol. 36. P. 119.
34. *Leung H.K.* Stochastic Hopf bifurcation in a biased van der Pol model // *Physica A.* 1998. Vol. 254. P. 146.
35. *Namachchivaya N.Sri.* Hopf bifurcation in the presence of both parametric and external stochastic excitations // *J. Appl. Mech.* 1988. Vol. 110. P. 923.
36. *Schenk-Hoppe K.R.* Bifurcation scenarios of the noisy Duffing–van der Pol oscillator // *Nonlinear Dynamics.* 1996. Vol. 11. P. 255.
37. *Bashkirtseva I., Ryashko L., Schurz H.* Analysis of noise-induced transitions for Hopf system with additive and multiplicative random disturbances// *Chaos, Solitons and Fractals.* 2009. Vol. 39. P. 7.
38. *Bashkirtseva I. A., Ryashko L. B.* Sensitivity analysis of the stochastically and periodically forced Brusselator // *Physica A.* 2000. Vol. 278. P. 126.
39. *Fedotov S., Bashkirtseva I., Ryashko L.* Stochastic dynamo model for subcritical transition // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 73. P. 066307.
40. *Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.
41. *Башкирцева И.А., Ряшко Л.Б.* Метод квазипотенциала в анализе чувствительности автоколебаний к стохастическим возмущениям // *Изв.вузов.Прикладная нелинейная динамика.* 1998. Т. 6, № 5. С. 19.
42. *Башкирцева И.А., Ряшко Л.Б.* Метод квазипотенциала в исследовании локальной устойчивости предельных циклов к случайным возмущениям // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2001. Т. 9, № 6. С. 104.

43. *Rosenzweig M.L., MacArthur R.H.* Graphical representation and stability conditions of predator-prey interactions// *Amer. Natur.* 1963. Vol. 97. P. 209.
44. *Paladin G., Serva M., Vulpiani A.* Complexity in dynamical systems with noise // *Phys. Rev. Letters.* 1995. Vol. 74, № 1. P. 66.

*Поступила в редакцию 25.01.2008
После доработки 7.03.2009*

ANALYSIS OF ATTRACTORS FOR STOCHASTICALLY FORCED «PREDATOR–PREY» MODEL

I.A. Bashkirtseva, L.V. Karpenko, L.B. Ryashko

We consider the population dynamics model «predator–prey». Equilibria and limit cycles of system are studied from both deterministic and stochastic points of view. Probabilistic properties of stochastic trajectories are investigated on the base of stochastic sensitivity function technique. The possibilities of stochastic sensitivity function to analyse details and thin features of stochastic attractors are demonstrated.

Keywords: Population dynamics, equilibria, limit cycles, stochastic sensitivity.



Башкирцева Ирина Адольфовна – родилась в 1965 году, окончила Уральский госуниверситет (1987), кандидат физико-математических наук (1997), доцент кафедры математической физики Уральского госуниверситета. Область научных интересов – асимптотический анализ и численное моделирование нелинейных стохастических систем.

E-mail: irina.bashkirtseva@usu.ru
Уральский государственный университет
620083, Екатеринбург, Ленина, 51



Карпенко Лариса Владимировна – родилась в 1985 году, окончила Уральский госуниверситет (2008), аспирант кафедры математической физики Уральского госуниверситета. Область научных интересов – стохастические модели популяционной динамики.

E-mail: slayer-13@mail.ru
Уральский государственный университет
620083, Екатеринбург, Ленина, 51



Ряшко Лев Борисович – родился в 1953 году, окончил Уральский госуниверситет (1975), доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики Уральского госуниверситета. Область научных интересов – устойчивость, стабилизация и управление стохастическими системами. Автор ряда статей по данной тематике.

E-mail: lev.ryashko@usu.ru
Уральский государственный университет
620083, Екатеринбург, Ленина, 51



ИЗМЕНЕНИЕ СПЕКТРА СИГНАЛА ЛАЗЕРНОГО ПОЛУПРОВОДНИКОВОГО АВТОДИНА ПРИ ФОКУСИРОВКЕ ИЗЛУЧЕНИЯ

Д.А. Усанов, А.В. Скрипаль, К.С. Авдеев

Проведено моделирование автодинного сигнала при различных уровнях обратной связи, влияющих на измерение параметров вибраций отражателя, и различных значениях мощности возвращаемого в лазер излучения. Показано, что при увеличении степени фокусировки лазерного автодина с вибрирующим отражателем происходит обогащение спектра автодинного сигнала.

Ключевые слова: Полупроводниковый лазер, автодинное детектирование, измерение вибраций, спектр сигнала, оптическая обратная связь.

1. В работах [1–5] показана возможность применения полупроводникового лазерного автодина для измерения параметров вибраций объектов, выполняющих роль отражателя, в широком диапазоне амплитуд (от одного нанометра до сотен микрон). Область применения таких измерителей могла бы быть существенно расширена, если было бы возможно проводить измерения с высокой степенью локальности. Это позволило бы, в частности, измерять параметры вибраций микрообъектов. Наиболее простой путь повышения локальности измерений состоит в использовании сфокусированного излучения. Ясно, что при повышении степени фокусировки может изменяться уровень обратной связи в лазерном автодине, и как следствие происходит изменение (обогащение) спектра автодинного сигнала, связанное с его нелинейным искажением.

Исследование влияния степени фокусировки излучения лазерного автодина и связанного с ним изменения уровня обратной связи на спектр автодинного сигнала и возможность его использования для измерения нановибраций отражателя составляет цель настоящей работы.

2. Традиционно известная оптическая схема полупроводникового лазера с внешней оптической обратной связью была детально исследована в классических работах Р. Лэнга и К. Кобаяши [6]. Ими была предложена модель, в которой лазерный диод описывается системой дифференциальных уравнений для амплитуды и фазы элек-

ромагнитного поля и концентрации носителей заряда,

$$\frac{d}{dt}E^*(t) = i\omega(N)E^*(t) + \frac{1}{2} \left(G(N) - \frac{1}{\tau_p} \right) E^*(t) + zE^*(t - \tau), \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}N(t) = J - \frac{N(t)}{\tau_s} - G(N)E^2(t). \quad (2)$$

Здесь

$$E^*(t) = E(t) \exp(i\omega_0 t + i\Phi(t)), \quad (3)$$

$E(t)$ – амплитуда комплексного электрического поля $E^*(t)$ внутри лазерного резонатора; $\omega(N)$ – частота генерации лазера с обратной связью; $G(N)$ – параметр усиления моды; τ_p – время жизни фотонов в диодном резонаторе; z – коэффициент обратной связи; τ – время обхода внешнего резонатора длиной L ; $N(t)$ – концентрация носителей в активной области диода; J – число носителей, инжектируемых в единицу объема за единицу времени (величина, пропорциональная току инжекции); τ_s – время жизни носителей, обусловленное спонтанной рекомбинацией; ω_0 – резонансная частота собственного резонатора лазерного диода; $\Phi(t)$ – фаза оптических колебаний поля.

Вклад от возврата части излучения описывает третий член в правой части уравнения (1), в котором коэффициент обратной связи в пренебрежении многократными отражениями может быть представлен в виде [6]

$$z = \frac{(1 - R^2)(r/R)}{\tau_{in}}, \quad (4)$$

где r – коэффициент отражения от внешнего зеркала, R – коэффициент отражения грани лазерного диода, τ_{in} – время обхода излучением диодного резонатора

$$\tau_{in} = \frac{2L_d\eta}{c}, \quad (5)$$

L_d и η – соответственно длина и показатель преломления активной области полупроводникового лазера, c – скорость света.

Используя линейное приближение для параметра усиления $G(N)$ и функции оптической частоты $\omega(N)$ (см. [6]) вблизи порога генерации можно получить два дифференциальных уравнения, описывающих динамику излучения в составном лазерном резонаторе,

$$\frac{d}{dt}E(t) = \frac{1}{2}G_N\Delta N(t)E(t) + zE(t - \tau)\cos\Delta(t), \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = \frac{1}{2}\alpha G_N\Delta N(t) - z\frac{E(t - \tau)}{E(t)}\sin\Delta(t), \quad (7)$$

где α – коэффициент уширения линии генерации, G_N – производная от параметра усиления по концентрации, $\Delta(t) = \omega_0\tau + \Phi(t) - \Phi(t - \tau)$ – набег фазы волны для лазера с обратной связью за время τ обхода внешнего резонатора, $\omega_0\tau$ – стационарный набег фазы для уединенного лазера.

Выражение для линейризованной мощности в режиме стационарной генерации, с учетом того, что фазовое уравнение

$$\omega_0 = \omega + z\sqrt{1 + \alpha^2} \sin(\omega\tau + \arctg \alpha) \quad (8)$$

обладает множеством решений [6], соответствующих множеству мод внешнего резонатора, можно записать в виде [3] суммы постоянной составляющей P_1 и переменной P_2 , зависящей от частоты лазерного излучения и времени обхода внешнего резонатора

$$\tilde{P} = P_1 + P_2 \cos(\omega\tau). \quad (9)$$

Зададим время обхода внешнего резонатора в виде гармонической функции времени t

$$\tau = \tau_0 + \tau_a \sin(\Omega t + \varepsilon). \quad (10)$$

Тогда выражение (9) для переменной нормированной мощности автодинного сигнала в режиме слабой обратной связи с учетом (8) для $C \leq 1$ преобразуется к виду

$$P(t) = \cos(\omega_0\tau_0 + \omega_0\tau_a \sin(\Omega\tau + \varepsilon) - C \sin(\omega\tau_0 + \omega\tau_a \sin(\omega\tau + \varepsilon) + \psi)), \quad (11)$$

где C – параметр внешней оптической связи, $\tau_0 = 2L/c$ – время обхода лазерным излучением внешнего резонатора с неподвижным отражателем, L – расстояние до внешнего отражателя, $\tau_a = 2\xi/c$ – амплитудное значение изменения времени обхода, ξ и Ω – амплитуда и частота колебаний внешнего отражателя, ε – начальная фаза.

Выражение (11) описывает нормированную мощность автодинного сигнала, формируемого при колебаниях внешнего отражателя, где параметр внешней оптической связи определяется по формуле $C = \tau_0 z \sqrt{1 + \alpha^2}$. Для описания спектра автодинного сигнала в режиме слабой обратной связи $C \leq 1$ может быть использовано представление в виде разложения в ряд по функциям Бесселя

$$P(t) = \cos \theta J_0(\sigma) + 2 \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\sigma) \cos [2n\omega t + \varepsilon] - \\ - 2 \sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(\sigma) \cos [(2n-1)\omega t + \varepsilon]. \quad (12)$$

Первое слагаемое в (12) представляет собой постоянную составляющую автодинного сигнала. Амплитуда гармоник высших порядков определяется величиной σ , входящей в разложение и связанной с амплитудой колебания объекта соотношением $\sigma = 4\pi\xi/\lambda$.

Отношение спектральных составляющих зависит от амплитуды колебания объекта. В качестве подтверждения приведены спектры сигналов, полученных при различных амплитудах колебаний объектов (рис. 1).

Для определения амплитуды колебаний объекта автодинный сигнал при $C \leq 1$ может быть представлен также в виде разложения в ряд Фурье

$$P(t) = 1/2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} \cos(2n\Omega t) - b_{2n} \sin(2n\Omega t)) - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} \cos((2n-1)\Omega t) - b_{2n-1} \sin((2n-1)\Omega t)). \quad (13)$$

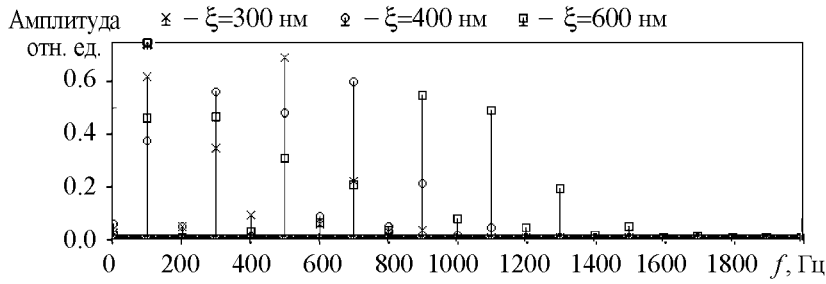


Рис. 1. Спектры сигналов полученных при различных амплитудах ξ колебаний объектов

Введем спектральные коэффициенты c_n следующим образом:

$$c_{2n} = 2J_{2n}(\sigma) \cos \theta = \begin{cases} \frac{a_{2n}}{\cos(2n\varepsilon)}, & |a_{2n}| > |b_{2n}|, \\ \frac{b_{2n}}{\sin(2n\varepsilon)}, & |a_{2n}| < |b_{2n}| \end{cases} \quad (14)$$

для четных номеров и

$$c_{2n-1} = 2J_{2n-1}(\sigma) \sin \theta = \begin{cases} \frac{-a_{2n-1}}{\sin((2n-1)\varepsilon)}, & |a_{2n-1}| > |b_{2n-1}|, \\ \frac{b_{2n-1}}{\cos((2n-1)\varepsilon)}, & |a_{2n-1}| < |b_{2n-1}| \end{cases} \quad (15)$$

для нечетных номеров. Коэффициенты c_{2n} и c_{2n-1} пропорциональны четным и нечетным спектральным составляющим сигнала, соответственно; a_n и b_n – коэффициенты разложения в ряд Фурье. Значение ε при использовании коэффициентов a_n и b_n с четными номерами находится по формуле: $\varepsilon = 1/(2n) \arctg(b_{2n}/a_{2n})$; при использовании коэффициентов a_n и b_n с нечетными номерами находится по формуле: $\varepsilon = 1/(2n-1) \arctg(-a_{2n-1}/b_{2n-1})$.

Отметим, что спектральные коэффициенты c_n могут иметь как положительное, так и отрицательное значение в зависимости от величин σ и θ .

Используя отношения выражений (14), (15) для четных или нечетных спектральных коэффициентов c_{2n-1} и c_{2n} , получим уравнение для определения амплитуды вибрации отражателя следующего вида:

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{J_n\left(\frac{4\pi\xi}{\lambda}\right)}{J_{n+1}\left(\frac{4\pi\xi}{\lambda}\right)}. \quad (16)$$

Решение уравнения (16) не зависит от стационарного набега фазы автодинного сигнала θ , что делает удобным применение данного метода для нанометровых амплитуд колебаний объектов. В случае, если в спектре автодинного сигнала наблюдается только 3 спектральных составляющих, применим так называемый « J_1/J_3 – метод» определения амплитуды вибраций отражателя по 1-й и 3-й гармоникам спектра ав-

тодинного сигнала [7]. С его помощью выражение (16) преобразуется к виду

$$\frac{c_1}{c_3} = \frac{J_1\left(\frac{4\pi\xi}{\lambda}\right)}{J_3\left(\frac{4\pi\xi}{\lambda}\right)}. \quad (17)$$

Как видно из (17), отношение 1-й и 3-й спектральных составляющих зависит только от амплитуды колебаний отражателя.

3. Обладая высоким коэффициентом усиления и малой добротностью, полупроводниковый лазерный автодин очень чувствителен к изменению уровня внешней оптической связи. В работе Giuliani G. с соавторами [8] приведена следующая классификация режимов работы полупроводниковых лазеров с внешней оптической обратной связью:

- $C < 0.1$ – режим очень слабой обратной оптической связи, функция автодинного сигнала $U(t)$ совпадает по форме с функцией интерференционного сигнала в системе с развязкой от источника излучения (симметричная форма) ;
- $0.1 < C \leq 1$ – режим слабой обратной оптической связи, функция $U(t)$ приобретает небольшие искажения и отклонения от симметричной формы;
- $1 < C < 4.6$ – режим умеренной обратной оптической связи, функция $U(t)$ имеет три решения в каждый момент времени, автодинная система становится бистабильной с двумя устойчивыми решениями и одним нестабильным;
- $C > 4.6$ – режим сильной обратной оптической связи, функция $U(t)$ имеет пять решений в каждый момент времени, в автодинной системе может наступать коллапс когерентности.

На рис. 2 и 3 приведены результаты расчета временной зависимости автодинных сигналов (11) для значений внешней оптической обратной связи $C = 0.2$, $C = 0.6$, $C = 1.0$ и соответствующие спектры. Моделирование проводилось при гармонических колебаниях внешнего отражателя с амплитудой $\xi = 300$ нм. Из анализа результатов проведенного моделирования следует, что с увеличением уровня внешней оптической обратной связи спектр переменной составляющей автодинного сигнала искажается тем больше, чем выше уровень обратной связи.

Из анализа спектров соответствующих автодинных сигналов следует, что с увеличением уровня обратной связи происходит обогащение спектра и изменение величин всех гармоник по сравнению с гармониками спектра автодинного сигнала для $C \ll 1$. Такое обогащение может наблюдаться по мере увеличения степени фокусировки пучка в плоскости отражателя, так как с увеличением степени фокусировки уменьшается доля рассеянного излучения, и, соответственно, увеличивается мощность возвращенного сигнала.

Моделирование проводилось также для амплитуды колебаний $\xi = 600$ нм при различных уровнях внешней оптической обратной связи. На рис. 4 приведены спектры автодинного сигнала при уровнях внешней оптической обратной связи $C = 0.2$, $C = 0.6$, $C = 1.0$. Из анализа вида полученных спектров автодинного сигнала следует, что с увеличением уровня внешней оптической обратной связи происходит специфическое обогащение спектра автодинного сигнала. Однако, как известно [3], обогащение спектра автодинного сигнала происходит и при увеличении амплитуды

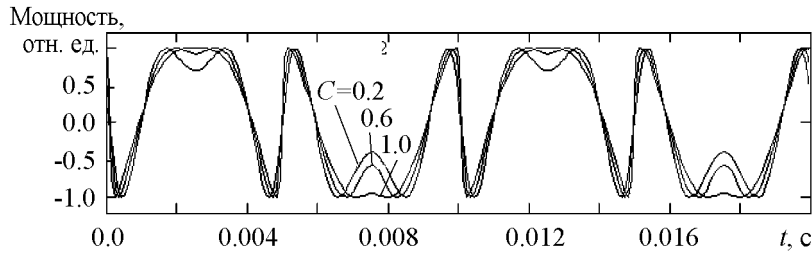


Рис. 2. Результаты расчета временной зависимости автодинных сигналов (11) при различных уровнях внешней оптической обратной связи C и амплитуде колебания объекта ξ

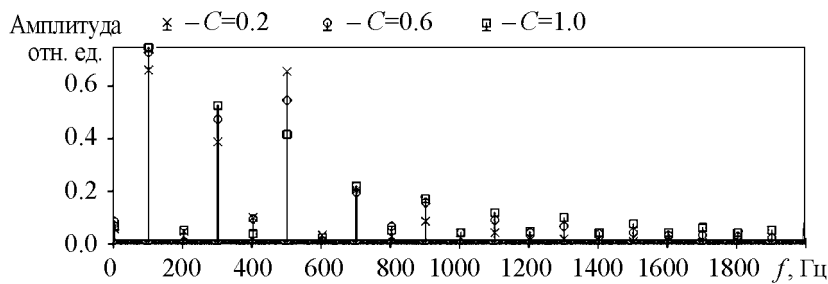


Рис. 3. Спектры автодинных сигналов при различных уровнях внешней оптической обратной связи C и амплитуде колебания объекта $\xi = 300$ нм

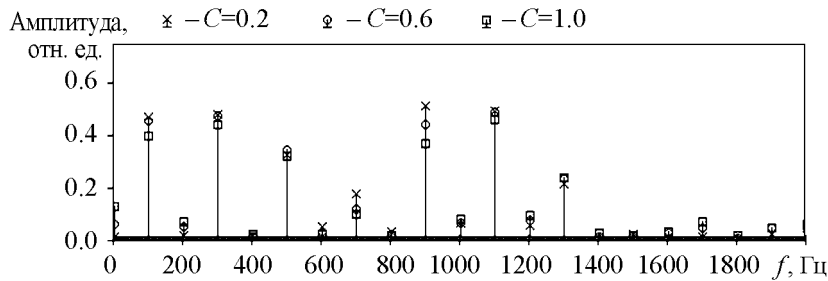


Рис. 4. Спектры автодинных сигналов при различных уровнях внешней оптической обратной связи и амплитуде колебания объекта $\xi = 600$ нм

колебаний внешнего отражателя и неизменном низком уровне оптической обратной связи. То есть, для режима $0.1 < C < 1.0$ обогащение спектра автодинного сигнала, которое может происходить при фокусировке вследствие увеличения уровня обратной связи и связанных с этим нелинейных искажений, можно ошибочно интерпретировать как увеличение амплитуды колебаний объекта в режиме низкой обратной связи, в особенности, когда истинный диапазон амплитуды колебаний объекта неизвестен.

В связи с этим возникают трудности в определении амплитуды колебаний внешнего отражателя по отношению гармоник из-за возможности совпадения это-

го отношения для определенных значений изменения амплитуды колебаний объекта $\Delta\xi$ и изменения уровня обратной связи ΔC . В качестве примера на рис. 5 приведены результаты расчета, иллюстрирующие изменение отношения 1-й и 3-й спектральных составляющих при различных уровнях обратной связи (амплитуда колебаний

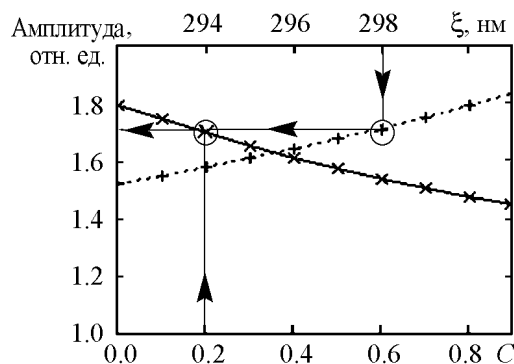


Рис. 5. «Косые крестики» – отношения 1-й и 3-й спектральных составляющих при различных уровнях обратной связи (амплитуда колебаний отражателя $\xi = 300$ нм); «прямые крестики» – отношения 1-й и 3-й спектральных составляющих при различных амплитудах колебания объекта (уровень обратной связи $C \ll 1$). «Кружочками» обозначены точки совпадения отношений амплитуд спектральных составляющих

отражателя 300 нм) и изменение отношения 1-й и 3-й спектральных составляющих при различных амплитудах колебания объекта ($C \ll 1$). Приведенные на рис. 5 зависимости построены по десяти точкам для значений C в диапазоне 0.001–0.9 и для значений ξ в диапазоне 292–301 нм. Очевидно, что значения отношения спектральных составляющих для некоторых комбинаций величин ξ и C могут совпадать. В частности, из проведенного моделирования следует, что равенство отношений 1-й и 3-й спектральных составляющих (и соответствующее равенство амплитуд колебаний объекта) выполняется при амплитуде колебаний 300 нм ($C = 0.2$) и амплитуде колебаний 298 нм ($C \ll 1$) (см. рис. 5, выделенные точки).

4. Для объяснения обнаруженных закономерностей интересно провести исследование изменения спектра интерференционного сигнала с ростом амплитуды колебаний и спектра автодинного сигнала с ростом уровня обратной связи.

Отличительной особенностью спектра автодинного сигнала при $C \ll 1$ является увеличение номера спектральной составляющей с максимальной амплитудой с ростом амплитуды колебания объекта ξ , при этом наблюдается небольшое уменьшение амплитуды спектральных составляющих младших порядков (см. рис. 1).

Принципиально иной характер изменения спектра наблюдается с ростом уровня обратной связи. Обогащение спектра идет за счет увеличения спектральных составляющих, амплитуды которых значительно меньше амплитуды максимальной спектральной составляющей. При этом номер гармоники с максимальной амплитудой практически не изменяет своего значения.

Форма автодинного сигнала с ростом уровня обратной связи изменяется таким образом, что спектр автодинного сигнала приобретает характер, соответствующий прямоугольному импульсу, в связи с этим обогащение спектра автодинного сигнала происходит за счет гармоник высших порядков (см. рис. 3). Таким образом, изменение спектра автодинного сигнала с ростом амплитуды колебаний и с ростом внешней оптической обратной связи имеют различный характер, обусловленный различием наблюдаемых физических эффектов.

5. Представляет интерес определить величину погрешности измерений, вызванную изменением степени фокусировки, и связанный с этим изменением уровень внешней оптической обратной связи.

Полученные значения амплитуды колебания объекта ξ « J_1/J_3 -методом» приведены в Таблице. Из Таблицы видно, что в « J_1/J_3 -методе» с ростом уровня внешней оптической обратной связи погрешность определения амплитуды вибрации растет. Однако такая зависимость не является фатальной. Как будет показано ниже, нам удалось подобрать режим работы лазерного автодина, при котором среднее значение измеренной амплитуды вибраций практически не зависит от его фокусировки.

Исследования проводились с использованием полупроводникового лазерного автодина на лазерном диоде RLD-650(5) на квантоворазмерных структурах с дифракционно-ограниченной одиночной пространственной модой с длиной волны 652 нм. Мощность излучения лазерного автодина определялась измерителем мощности ИМО-2Н и составляла 1.97 мВт. Внешний отражатель приводился в колебательное движение на звуковой частоте 200 Гц. Лазерный диод находился в теплоотводящем корпусе, в котором была расположена микролинза с фокусным расстоянием 15 мм. Излучение лазера фокусировалось в плоскости внешнего отражателя, расположенного на расстоянии 65 мм от лазера. Степень фокусировки изменялась путем изменения расстояния до отражателя при одновременном контроле диаметра пучка лазерного излучения. Изменением положения отражателя добивались максимально значения протектированного сигнала на встроенном с обратной стороны лазера фотодиоде. Полученное таким образом расстояние до внешнего отражателя соответствовало сфокусированному пучку с диаметром $d_1 = 200$ мкм. Затем увеличением расстояния до внешнего отражателя на 7.5 и 16 мм добивались уменьшения степени фокусировки, при этом диаметр пучка увеличивался до значений $d_2 = 500$ и $d_3 = 1000$ мкм, соответственно.

Таблица

Результаты определения амплитуд колебаний
внешнего отражателя по спектру автодинного сигнала

Задаваемое значение ξ , нм	Уровень обратной связи	Значение ξ , найденное по « J_1/J_3 – методу», нм	Погрешность найденного значения ξ по « J_1/J_3 – методу», %
300	$C \ll 1$	300	0
	$C = 0.2$	298	0.8
	$C = 0.6$	293	2.5
	$C = 1$	288	3.9
600	$C \ll 1$	600	0
	$C = 0.2$	598	0.3
	$C = 0.6$	595	0.8
	$C = 1$	586	2.3

6. Для оценки влияния степени шероховатости на результат определения амплитуды вибраций лазерным автодином, нами были проведены измерения вибрации 5 аттестованных образцов «шероховатости поверхности сравнения» класса от 10 до 14 со значением параметра шероховатости R_a (среднее арифметическое отклонение профиля поверхности) от 0.16 до 0.025 мкм. Измерения проводились при одинаковом вибрационном возбуждении и фиксированном значении фокусировки на каждом образце по 5 раз. В результате измерений определялось среднее значение амплитуды для всех образцов с различными параметрами шероховатости, которое в нашем случае было равно 115 нм. Разброс результатов измерений по каждому образцу составил в среднем 6 нм, что совпадает со средним отклонением по всем образцам шероховатости в целом. Полученные результаты свидетельствуют о том, что шероховатость поверхности для используемых значений R_a не оказывает значительного влияния на результаты измерений амплитуды колебаний объекта полупроводниковым лазерным автодином.

7. С целью определения влияния степени фокусировки на точность измерения нановибрации были проведены многократные измерения амплитуды колебаний внешнего отражателя по спектру автодинного сигнала полупроводникового лазера при различных расстояниях до внешнего отражателя и одной и той же амплитуде колебаний (рис. 6).

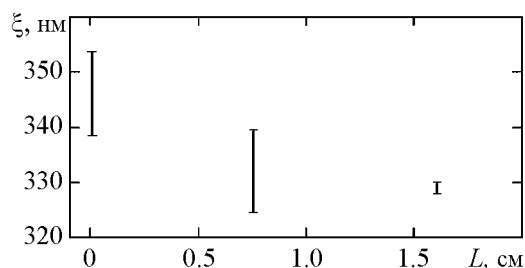


Рис. 6. Результаты расчета амплитуды колебаний внешнего отражателя по спектрам автодинных сигналов полупроводникового лазера с мощностью излучения 1.97 мВт при изменении расстояния L до внешнего отражателя. Значком «I» обозначен разброс значений амплитуд, полученных с использованием результатов многократных измерений

значений амплитуд вибраций при $\xi_{\text{сред}} = 332$ нм. В случае наибольшей степени фокусировки автодинного сигнала ($d_1 = 200$ мкм), кроме разброса измеряемой амплитуды вибраций, наблюдается также увеличение значения средней величины амплитуды вибраций $\xi_{\text{сред}} = 344$ нм. Различие в значениях измеряемых амплитуд при повторных измерениях может быть объяснено влиянием нестабильности во времени длины волны и, соответственно, фазы излучения полупроводникового лазерного автодина.

Таким образом, при изменении расстояния до отражателя использование сфокусированного пучка полупроводникового лазерного автодина приводит к зависимости результатов измерений параметров вибраций от степени фокусировки, при этом

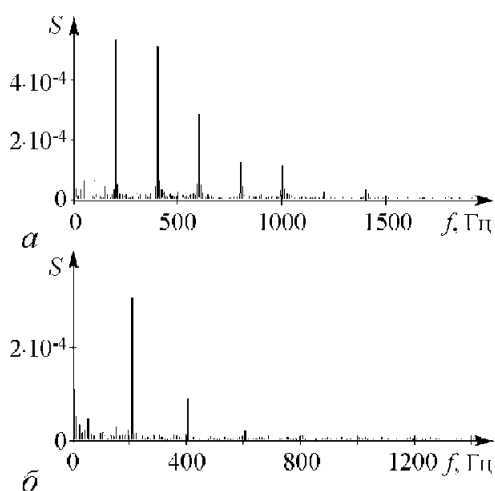


Рис. 7. Спектры автодинных сигналов для различных мощностей излучения полупроводникового лазера: a – 1.97 мВт, b – 0.81 мВт

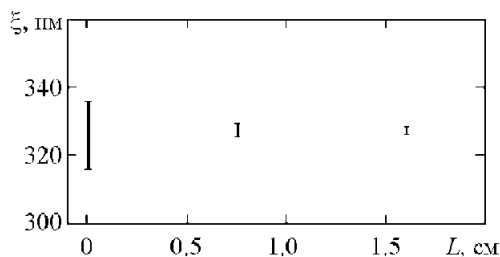


Рис. 8. Результаты расчета амплитуды колебаний ξ внешнего отражателя по спектрам автодинных сигналов полупроводникового лазера с мощностью излучения 0.81 мВт при различных расстояниях L до внешнего отражателя

погрешность измерений может достигать значительных величин. Фактором, влияющим на результаты измерений параметров вибраций отражателя, может быть изменение уровня внешней оптической обратной связи при фокусировке излучения полупроводникового лазерного автодина, обусловленное происходящим при этом увеличением уровня мощности излучения, возвращающегося от отражателя и воздействующего на лазерный диод.

Низкочастотный спектр автодинного сигнала также зависит и от тока накачки лазерного диода, который изменяет мощность излучения лазера. С приближением тока питания к пороговому значению уменьшается уровень мощности отраженного излучения, возвращаемого в резонатор лазера. В режиме работы лазерного автодина, близком к пороговому, мощность излучения полупроводникового лазера составила 0.81 мВт. На рис. 7 приведены спектры автодинных сигналов для различных мощностей излучения полупроводникового лазера. Как видно из приведенных спектров, наименьшие изменения в спектре автодинного сигнала, обусловленные влиянием изменения уровня внешней оптической обратной связи, наблюдаются при малой мощности излучения полупроводникового лазера, соответствующей близким к пороговому значению тока накачки лазерного диода.

На рис. 8 приведены результаты измерений амплитуды колебаний внешнего отражателя по спектру автодинного сигнала полупроводникового лазера при тех же расстояниях до внешнего отражателя, что и в предыдущем случае, но в режиме работы лазерного автодина, близком к пороговому (мощность излучения 0.81 мВт). Видно, что при увеличении степени фокусировки также увеличивается разброс определяемого значения амплитуды вибраций внешнего отражателя. Однако среднее значение амплитуды вибраций изменяется незначительно: $\xi_{\text{сред}} = 328$ нм.

8. Таким образом, показано, что при увеличении степени фокусировки может происходить обогащение спектра автодинного сигнала, увеличивается разброс определяемого значения амплитуды вибраций внешнего отражателя при проведении

многократных повторных измерений. При изменении режима работы полупроводникового лазерного автодина, в частности, при приближении тока к пороговому значению несколько уменьшается разброс результатов измерений амплитуды вибраций, а среднее значение амплитуды вибраций практически не зависит от степени фокусировки лазерного луча.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Министерства образования и науки РФ и гранта Российского фонда фундаментальных исследований № 05-08-17924а.

Библиографический список

1. Donati S., Giuliani G., Merlo S. Laser diode feedback interferometer for measurements of displacements without ambiguity // IEEE J. Quantum Electron. 1995. Vol. 31, № 1. P. 113.
2. Усанов Д.А., Скрипаль А.В. Измерение нанометровых вибраций полупроводниковым лазером на квантоворазмерных структурах, работающим в автодинном режиме // Письма в ЖТФ. 2003. № 9. С. 51.
3. Усанов Д.А., Скрипаль Ал.В., Скрипаль Ан.В. Физика полупроводниковых радиочастотных и оптических автодинов. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2003. 312 с.
4. Усанов Д.А., Скрипаль А.В., Камышанский А.С. Измерение скорости нанометровых перемещений по спектру автодинного сигнала лазера на квантоворазмерных структурах // Письма в ЖТФ. 2004. № 7. С. 77.
5. Olesen H., Osmundsen J.H., Tromborg B. Nonlinear dynamics and spectral behavior for an external cavity laser // IEEE J. Quantum Electron. 1986. Vol. 22. P. 762.
6. Lang R., Kobayashi K. External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties // IEEE J. Quantum Electron. 1980. Vol. QE-16. P. 347.
7. Pernick B.J. Self-consistent and direct reading laser homodyne measurement technique // Appl. Opt. 1973. Vol.12, № 3. P. 607.
8. Giuliani G., Norgia M., Donati S. and Bosch T. Laser diode self-mixing technique for sensing application // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. 2002. Vol. 4. S283.

Поступила в редакцию 30.05.2008

После доработки 26.03.2009

SPECTRUM OF SEMICONDUCTOR LASER AUTODYNE AT FOCUSING RADIATION

D.A. Usanov, An.V. Skripal, K.S. Avdeev

Simulation of autodyne signal at different feedback level influence on measurement of parameters of vibrating reflector has been performed at different values of optical power

radiation returned in laser resonator. It has been shown that the spectrum of autodyne signal is enrichment when focusing level is increased.

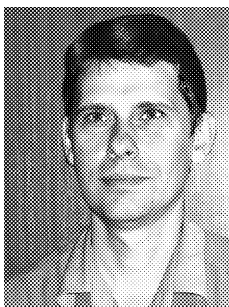
Keywords: Semiconductor laser, autodyne detection, vibration measurement, signal spectrum, optical feedback.



Усанов Дмитрий Александрович – родился в 1943 году, доктор физико-математических наук, профессор, проректор по НИР СГУ, заведующий кафедрой физики твердого тела, академик МАН ВШ, РАЕН. Область научных интересов: твердотельная, микро- и нанoeлектроника, радиофизика, медицинская физика. Опубликовал более 200 статей по указанным выше направлениям.

E-mail: UsanovDA@info.sgu.ru

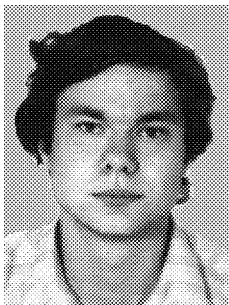
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83



Скрипаль Анатолий Владимирович – родился в 1960 году, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой медицинской физики СГУ. Область научных интересов: биомедицинская физика, лазерная физика, физика магнитных жидкостей, нанотехнологии. Опубликовал более 100 статей по указанным выше направлениям.

E-mail: skripalav@info.sgu.ru

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83



Авдеев Кирилл Сергеевич – родился в Саратове (1983), окончил Саратовский госуниверситет (2005). Аспирант третьего года. Научные интересы: твердотельная электроника, в частности, полупроводниковые лазеры. Автор ряда работ по исследованию автодинного детектирования в полупроводниковых лазерах.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83



УПРАВЛЕНИЕ ХАОСОМ В СИСТЕМЕ ИКЕДЫ

Упрощенная модель в виде точечного отображения

Н.М. Рыскин, О.С. Хаврошин

Рассматривается метод управления хаосом в кольцевом резонаторе, содержащем среду с кубической фазовой нелинейностью (система Икеды). Метод основан на введении дополнительного кольца обратной связи, параметры которого подбираются таким образом, чтобы спектральные компоненты сигнала на основной частоте, прошедшие по двум ветвям обратной связи, оказывались в фазе, а на паразитных частотах – в противофазе, и таким образом подавляли бы друг друга. В пределе, когда дисперсией нелинейной среды можно пренебречь, для описания динамики системы получено точечное отображение, являющееся модификацией известного отображения Икеды. Приведены результаты аналитического и численного исследования этого отображения при различных значениях управляющих параметров. Показано, что предложенный метод позволяет подавить автомодуляционные колебания и обеспечить устойчивость периодических режимов в широком диапазоне параметров.

Ключевые слова: Управление хаосом, кольцевой нелинейный резонатор, запаздывающая обратная связь, точечное отображение, бифуркация.

Введение

В последнее время интерес привлекает проблема управления хаосом. Впервые это понятие было сформулировано в работе [1], где была выдвинута идея стабилизации неустойчивых периодических орбит путем малых контролируемых воздействий. Таким образом, можно реализовать устойчивое периодическое поведение в той области параметров, где в отсутствие управления динамика является хаотической. Позднее были предложены другие методы управления, в частности, метод Пирагаса или так называемая автосинхронизация запаздывающей обратной связью [2]. Суть этого метода состоит во введении дополнительной обратной связи (ОС) с временем задержки, примерно равным периоду движения, которое желательно стабилизировать. Метод Пирагаса завоевал наибольшую популярность ввиду своей конструктивной простоты. В дальнейшем он развивался во многих работах (см., например, обзор [3]). В частности, в работе [4] этот метод был обобщен на случай

стабилизации неустойчивых положений равновесия. В этом случае время запаздывания должно быть примерно равно характерному периоду нарастающих колебаний малых возмущений неустойчивого состояния. Интересная модификация метода Пирагаса для подавления автомодуляции в микроволновом электронном автогенераторе обратной волны рассматривалась в работе [5], где было предложено модулировать ток электронного пучка протектированным выходным сигналом, поступающим на модулирующий электрод по цепи внешней обратной связи со специально подобранным временем запаздывания. В отличие от исходного метода Пирагаса, время задержки определяется не периодом неустойчивого движения, а периодом автомодуляции, который существенно больше. Это облегчает стабилизацию высокочастотных колебаний.

В настоящей работе предложено обобщение метода Пирагаса для управления пространственно-временным хаосом в распределенных системах с запаздыванием. Применение метода продемонстрировано на примере системы Икеды [6], которая представляет собой кольцевой резонатор, содержащий отрезок среды с кубической фазовой нелинейностью и возбуждаемый внешним гармоническим сигналом. Данная система играет большую роль, в особенности – в нелинейной оптике (нелинейный кольцевой интерферометр), где является базовой моделью при изучении многих нелинейных эффектов, таких как мультистабильность, оптическая турбулентность, образование диссипативных структур [6–8]. Наиболее подробно результаты исследований нелинейной динамики различных модификаций системы Икеды, а также разнообразные возможности ее практического применения отражены в недавно вышедшей монографии [7].

На рис. 1, *a* изображена схема системы Икеды, которую мы, следуя традиции, приводим в нелинейно-оптическом варианте [7, 8]. В этом случае нелинейный элемент NL представляет собой диэлектрик, диэлектрическая проницаемость которого квадратичным образом зависит от амплитуды поля, а резонатор образован зеркалами M_{1-4} . Первые два зеркала характеризуются коэффициентами отражения $R_{1,2}$, которые, вообще говоря, являются комплексными, остальные зеркала считаются полностью отражающими. Однако подчеркнем, что математические модели, которые анализируются в данной работе, носят достаточно общий характер и справедливы для кольцевых нелинейных резонаторов различной физической природы. Например, в микроволновом диапазоне интерес представляют аналогичные кольцевые системы на основе ферритовых пленок.

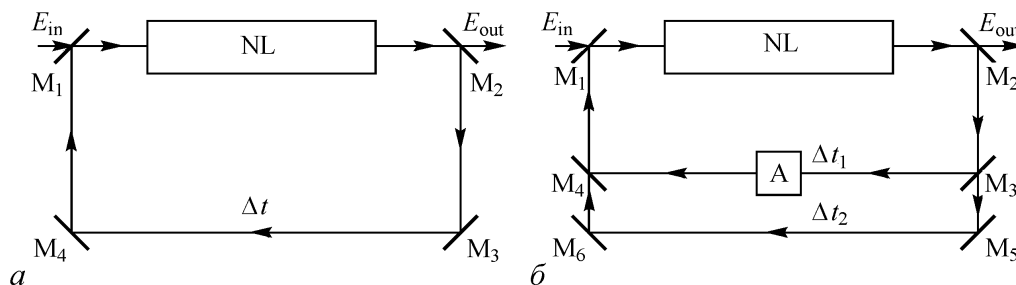


Рис. 1. Схема кольцевого нелинейного резонатора (системы Икеды) с одним (*a*) и двумя (*б*) кольцами обратной связи. NL – нелинейный элемент, A – поглотитель, M_1 – M_6 – зеркала

Как известно [8–11], в среде с дисперсией и кубичной фазовой (керровской) нелинейностью распространение квазимонохроматической волны вида

$$A(x, t) \exp [i (\omega_0 t - k_0 x)]$$

($A(x, t)$ – медленно меняющаяся комплексная амплитуда сигнала, ω_0 и k_0 – частота и волновое число несущей волны) можно описать нелинейным уравнением Шрёдингера (НУШ)

$$i \left(\frac{\partial A}{\partial t} + V \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\omega_0''}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \beta |A|^2 A = 0, \quad (1)$$

где $V = d\omega/dk$ – групповая скорость, $\omega_0'' = d^2\omega/dk^2$ – параметр дисперсии групповой скорости, β – параметр нелинейности.

Предполагая, что резонатор возбуждается гармоническим входным сигналом вида $E_{in} = \text{Re} [A_{in} \exp (i\omega_{in}t)]$ с комплексной амплитудой A_{in} и частотой ω_{in} , можно записать следующее граничное условие для сигнала, прошедшего по цепи ОС [7, 8, 12]:

$$A(0, t) = A_{in} e^{i\omega t} + R A(l, t - \Delta t). \quad (2)$$

Здесь $\omega = \omega_{in} - \omega_0$ – отстройка частоты внешнего сигнала от несущей частоты, l – протяженность нелинейной среды, Δt – время прохождения сигнала по цепи ОС, R – комплексный параметр ОС, который нетрудно выразить через коэффициенты отражения зеркал как $R = R_1 R_2$. Далее будем представлять его в виде $R = \rho \exp (i\psi)$, где, очевидно, $0 < \rho < 1$.

Таким образом, математическая модель системы Икеды описывается НУШ (1) с запаздывающим граничным условием (2). Это распределенная система с бесконечным числом степеней свободы. В работе [12] изучалась нелинейная пространственно-временная динамика данной системы, в частности, возникновение автомодуляции излучения и переходы к хаосу по мере увеличения интенсивности возбуждающего сигнала. Отметим, что, если пренебречь дисперсией ($\omega_0'' = 0$), систему можно описать существенно более простой моделью: известным дискретным отображением Икеды [6–8, 12, 13]

$$A_{n+1} = A_{in} + \rho A_n e^{i(\varphi + |A_n|^2)}. \quad (3)$$

Здесь $A_n = A(x=0, t=n\tau)$ – комплексная амплитуда сигнала в n -й момент дискретного времени, $\tau = \Delta t + l/V$, $\varphi = \psi + \omega l/V$ – линейный набег фазы волны за время прохода по резонатору. Динамика этого отображения хорошо изучена (см., например, [8, 13]). Как известно, когда амплитуда входного сигнала превышает некоторое критическое значение, стационарный режим становится неустойчивым, и возникает автомодуляция с периодом 2τ (неустойчивость Икеды). При дальнейшем увеличении A_{in} происходит переход к хаосу, причем основным сценарием является последовательность бифуркаций удвоения периода.

Предлагаемая в настоящей работе схема управления хаосом в системе Икеды основана на введении дополнительной цепи обратной связи (рис. 1, б). Сигнал, прошедший через одну ветвь, получает временную задержку Δt_1 , а через вторую – Δt_2 .

В первую цепь ОС также включен дополнительный поглотитель A с коэффициентом поглощения k . В этом случае граничное условие (2) перепишется в виде

$$A(0, t) = A_{\text{in}} e^{i\omega t} + R_1 R_2 [k R_3 R_4 A(l, t - \Delta t_1) + T_3 T_4 A(l, t - \Delta t_2)], \quad (4)$$

где R_{1-4} , T_{1-4} – коэффициенты отражения и пропускания соответствующих зеркал (см. рис. 1, б). Зеркала $M_{5,6}$ полагаются полностью отражающими. Если выбрать коэффициент поглощения k таким образом, чтобы

$$k = \frac{\sqrt{(1 - |R_3|^2)(1 - |R_4|^2)}}{1 - |R_3||R_4|},$$

соотношению (4) можно придать вид

$$A(0, t) = A_{\text{in}} e^{i\omega t} + \rho [(1 - r) e^{i\psi_1} A(l, t - \Delta t_1) + r e^{i\psi_2} A(l, t - \Delta t_2)], \quad (5)$$

где введен параметр $r = 1 - |R_3 R_4|$.

Подбирая правильным образом разность между временами задержки Δt_1 и Δt_2 , а также фазы обратной связи $\psi_{1,2}$, можно добиться того, чтобы компоненты сигнала на частоте ω поступали на вход нелинейной среды в фазе, а компоненты на частоте паразитной автомодуляции – в противофазе, подавляя друг друга. Это позволит стабилизировать режим одночастотных вынужденных колебаний на частоте внешнего воздействия. На практике параметры ρ , r , $\psi_{1,2}$, $\Delta t_{1,2}$ удобно варьировать, включая в кольцо ОС различные пассивные элементы: аттенюаторы, фазовращатели, линии задержки, которые для простоты на рис. 1 не показаны. Аналогичный метод был предложен нами ранее для подавления автомодуляции в ряде других систем с запаздыванием, в частности, в простой модели автогенератора с кубической нелинейностью [14] и в генераторе на основе лампы бегущей волны [15].

Отметим, что динамика системы Икеды с двумя контурами ОС рассматривалась ранее (см. [7] и цитированную там литературу). Однако основное внимание уделялось вопросам, существенным для ее применения в хаотических системах связи, таким как расширение диапазона параметров, в котором возникают хаотические колебания, и увеличение размерности хаотического аттрактора. Использование дополнительной ОС для стабилизации одночастотных колебаний подробно не исследовалось, хотя такая возможность отмечалась в [7].

В настоящей работе анализируется предложенная схема управления хаосом и обосновывается выбор параметров, позволяющий подавить автомодуляцию, в случае пренебрежимо малой дисперсии, когда систему удастся приближенно описать при помощи точечного отображения. При этом можно получить дискретное отображение, являющееся обобщением (3), которое будем называть модифицированным отображением Икеды. Проводится теоретический анализ устойчивости стационарных состояний, которым соответствуют неподвижные точки отображения. Показано, что введение дополнительной ОС позволяет подавить бифуркации удвоения периода и переход к хаосу. Приведены результаты численного моделирования, хорошо согласующиеся с теорией. В последующей работе будут приведены результаты исследования динамики системы Икеды на основе пространственно-временной распределенной модели, описываемой НУШ (1) с запаздывающим граничным условием (5).

1. Метод управления хаосом

Рассмотрим модель кольцевого нелинейного резонатора с двумя цепями ОС, которая описывается НУШ (1) с запаздывающим граничным условием (5). В режиме одночастотных колебаний на частоте внешнего воздействия ω имеем

$$A(x, t) = A_0(x) e^{i\omega t}.$$

При этом соотношение (5) примет вид

$$A_0(0) = A_{\text{in}} + \rho \left((1-r) e^{i(\psi_1 - \omega \Delta t_1)} + r e^{i(\psi_2 - \omega \Delta t_2)} \right) A_0(l). \quad (6)$$

Если выбрать фазы $\psi_{1,2}$ так, чтобы они удовлетворяли соотношению

$$\psi_1 = 2\pi n + \psi_2 + \omega (\Delta t_1 - \Delta t_2), \quad (7)$$

из уравнения (6) получим

$$\begin{aligned} A_0(0) &= A_{\text{in}} + \rho (1-r + r e^{i(\psi_2 - \psi_1 + \omega(\Delta t_1 - \Delta t_2))}) A_0(l) e^{i(\psi_1 - \omega \Delta t_1)} = \\ &= A_{\text{in}} + \rho e^{i(\psi_1 - \omega \Delta t_1)} A_0(l). \end{aligned}$$

Это выражение совпадает с тем, что можно получить из граничного условия (2) для системы с одной цепью ОС в случае одночастотного сигнала. Следовательно, введение второй цепи ОС не изменяет характеристики режима одночастотных вынужденных колебаний, то есть управление является невозможным.

Теперь рассмотрим колебания в режиме автомодуляции. Представим $A(x, t)$ в виде

$$A(x, t) = [A_0(x) + a_+(x) e^{i\Omega t} + a_-(x) e^{-i\Omega t}] e^{i\omega t},$$

то есть будем считать, что в спектре появляются два модуляционных сателлита с частотами $\omega \pm \Omega$ и амплитудами $a_{\pm}(x)$. Тогда из граничного условия (5) на частоте ω вновь будем иметь соотношение (6), а на частотах сателлитов получим

$$a_{\pm}(0) = \rho \left[(1-r) e^{i(\psi_1 - (\omega \pm \Omega) \Delta t_1)} + r e^{i(\psi_2 - (\omega \pm \Omega) \Delta t_2)} \right] a_{\pm}(l).$$

С учетом условия (7) это соотношение можно переписать в виде

$$a_{\pm}(0) = \rho \left[1 - r + r e^{\pm i\Omega(\Delta t_1 - \Delta t_2)} \right] a_{\pm}(l) e^{i(\psi_1 - (\omega \pm \Omega) \Delta t_1)}. \quad (8)$$

Если теперь подобрать разность между временами задержки $\Delta t_{1,2}$ так, чтобы

$$\Omega (\Delta t_2 - \Delta t_1) = 2\pi m + \pi, \quad (9)$$

то уравнение (8) примет вид

$$a_{\pm}(0) = \rho (1 - 2r) a_{\pm}(l) e^{i(\psi_1 - (\omega \pm \Omega) \Delta t_1)}.$$

Отсюда видно, что при таком выборе параметров обратная связь на частотах сателлитов ослабляется. Это обусловлено тем, что компоненты сигнала на этих частотах, проходящие через различные каналы ОС, поступают на вход нелинейной среды в противоположных фазах и, следовательно, подавляют друг друга. Если выбрать $r = 1/2$, это приведет к полному разрыву цепи обратной связи на модуляционных частотах. Таким образом, выбирая параметры цепей ОС в соответствии с соотношениями (7), (9), можно осуществить подавление автомодуляции, в то время как амплитуда основной спектральной составляющей не изменяется.

2. Вывод модифицированного отображения Икеды

Как уже отмечалось, если пренебречь дисперсией групповой скорости ($\omega_0'' = 0$) в НУШ (1), для описания динамики системы можно получить точечное отображение, которое будем называть модифицированным отображением Икеды. В отсутствие дисперсии уравнение (1) принимает вид

$$i(A_t + VA_x) + \beta |A|^2 A = 0$$

и имеет следующее решение:

$$A(l, t) = A\left(0, t - \frac{l}{V}\right) \exp\left[\frac{i\beta l}{V} \left|A\left(0, t - \frac{l}{V}\right)\right|^2\right]. \quad (10)$$

Далее без ограничения общности будем считать, что несущая частота выбрана равной частоте входного сигнала, так что $\omega = 0$. Подставив (10) в граничное условие (5), найдем

$$\begin{aligned} A(0, t) = & A_{\text{in}} + \rho(1-r)e^{i\psi_1} A\left(0, t - \frac{l}{V} - \Delta t_1\right) \exp\left[\frac{i\beta l}{V} \left|A\left(0, t - \frac{l}{V} - \Delta t_1\right)\right|^2\right] + \\ & + \rho r e^{i\psi_2} A\left(0, t - \frac{l}{V} - \Delta t_2\right) \exp\left[\frac{i\beta l}{V} \left|A\left(0, t - \frac{l}{V} - \Delta t_2\right)\right|^2\right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Обозначим $\tau = \Delta t_1 + l/V$. Поскольку автомодуляция в отображении Икеды возникает с периодом $T = 2\tau$ [6, 8, 13], время задержки сигнала во второй цепи ОС необходимо подобрать следующим образом:

$$\Delta t_2 = 2\Delta t_1 + \frac{l}{V}. \quad (12)$$

С учетом (12) уравнение (11) принимает вид

$$\begin{aligned} A(0, t) = & A_{\text{in}} + \rho(1-r) A(0, t - \tau) \exp\left[i\psi_1 + \frac{i\beta l}{V} |A(0, t - \tau)|^2\right] + \\ & + \rho r A(0, t - 2\tau) \exp\left[i\psi_2 + \frac{i\beta l}{V} |A(0, t - 2\tau)|^2\right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Обозначим $A_n = A(0, t = n\tau)$ и выполним перенормировку

$$A \rightarrow A\sqrt{\frac{\beta l}{V}}, \quad A_{\text{in}} \rightarrow A_{\text{in}}\sqrt{\frac{\beta l}{V}}.$$

Тогда (13) примет вид дискретного отображения

$$A_{n+1} = A_{\text{in}} + \rho(1-r) A_n e^{i(\psi_1 + |A_n|^2)} + \rho r A_{n-1} e^{i(\psi_2 + |A_{n-1}|^2)}. \quad (14)$$

В соответствии с условием (7) фазы $\psi_{1,2}$ выберем следующим образом:

$$\psi_1 = 2\pi n + \psi_2.$$

Подставляя это соотношение в (14) и опуская индекс у ψ_1 , окончательно получаем

$$A_{n+1} = A_{\text{in}} + \rho e^{i\psi} \left[(1-r) A_n e^{i|A_n|^2} + r A_{n-1} e^{i|A_{n-1}|^2} \right]. \quad (15)$$

Таким образом, для описания динамики системы Икеды с двумя кольцами ОС в случае пренебрежимо малой дисперсии мы получили дискретное точечное отображение (15). Это отображение является четырехмерным, так как переменная A_n является комплексной. При $r = 0$ оно переходит в отображение Икеды (3).

3. Анализ характеристического уравнения

Исследуем на устойчивость режимы стационарных колебаний на частоте внешнего сигнала. Им соответствуют решения в виде неподвижных точек для отображения (15). В этом случае $A_n \equiv A_0 = \text{const}$, и из (15) получаем трансцендентное уравнение

$$A_0 = \frac{A_{\text{in}}}{1 - \rho \exp \left[i \left(\psi + |A_0|^2 \right) \right]}. \quad (16)$$

Уравнение (16) совпадает с аналогичным соотношением для отображения Икеды, и это вновь подтверждает, что при правильном выборе параметров управление является невозмущающим.

Без ограничения общности амплитуду входного сигнала A_{in} можно считать чисто вещественной. Тогда, умножая соотношение (16) на комплексно-сопряженное, получим выражение для интенсивности сигнала $I = |A_0|^2$

$$I = \frac{A_{\text{in}}^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\psi + I)}. \quad (17)$$

Проведем анализ этих решений на устойчивость. Для этого запишем амплитуду сигнала в виде

$$A_n = A_0 + \xi_n,$$

где ξ_n – малое возмущение, $|\xi_n| \ll 1$. В этом случае, считая что $\xi_{n+1} = \mu \xi_n = \mu^2 \xi_{n-1}$, где μ – мультипликатор, после подстановки в (15) и линеаризации получим характеристическое уравнение четвертого порядка

$$\mu^4 - 2\mu^2 \rho (\mu(1-r) + r) (\cos \Phi - I \sin \Phi) + \rho^2 (\mu(1-r) + r)^2 = 0, \quad (18)$$

где

$$\Phi = \psi + I. \quad (19)$$

Характеристическое уравнение (18) можно разложить на множители

$$\left[\mu^2 \left(G + \sqrt{G^2 - 1} \right) - \rho (\mu(1-r) + r) \right] \cdot \left[\mu^2 \left(G - \sqrt{G^2 - 1} \right) - \rho (\mu(1-r) + r) \right] = 0, \quad (20)$$

где

$$G = \cos \Phi - I \sin \Phi. \quad (21)$$

Таким образом, характеристическое уравнение можно разрешить относительно μ и проанализировать возможные неустойчивости.

Заметим, что, поскольку $G = G(\psi, \rho, A_{\text{in}})$, если мы проведем на плоскости параметров ψ, A_{in} линии, на которых $G = \text{const}$, корни характеристического уравнения вдоль этих линий также будут оставаться постоянными. Это обстоятельство позволяет построить на плоскости параметров линии различных бифуркаций.

а) Линии складки (касательной бифуркации). Эти линии ограничивают область, в которой имеется мультистабильность, то есть одним и тем же значениям параметров соответствует несколько возможных значений A_0 , причем одно из решений всегда является неустойчивым. Поскольку касательной бифуркации соответствует значение $\mu = 1$ (см., например, [13]), из характеристического уравнения (20) находим, что

$$G = \frac{1 + \rho^2}{2\rho}. \quad (22)$$

Подставив выражение (22) в (21), найдем

$$I = -\frac{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \Phi}{2\rho \sin \Phi}.$$

Отметим, что параметр r в эти уравнения не входит, то есть линии складок не изменяются по сравнению с отображением Икеды (3). Теперь с помощью соотношений (17) и (19) можно найти уравнение линии $\mu = 1$ на плоскости ψ, A_{in} в параметрическом виде

$$A_{\text{in}}^2 = I(1 + \rho^2 - 2\rho \cos \Phi) = -\frac{(1 + \rho^2 - 2\rho \cos \Phi)^2}{2\rho \sin \Phi}, \quad (23)$$

$$\psi = \Phi - I = \Phi + \frac{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \Phi}{2\rho \sin \Phi}. \quad (24)$$

б) Линии бифуркации удвоения периода. Эти линии определяют границы возникновения неустойчивости Икеды. Положив в характеристическом уравнении $\mu = -1$ и действуя аналогично предыдущему случаю, получим

$$G = \frac{1 + \rho^2 (2r - 1)^2}{2\rho (2r - 1)}, \quad (25)$$

$$I = -\frac{1 + \rho^2 (2r - 1)^2 - 2\rho (2r - 1) \cos \Phi}{2\rho (2r - 1) \sin \Phi}. \quad (26)$$

Из соотношений (17) и (19) с учетом (26) находим параметрическое представление для линии $\mu = -1$ на плоскости параметров:

$$A_{\text{in}}^2 = -\frac{(1 + \rho^2 - 2\rho \cos \Phi) \left(1 + \rho^2 (2r - 1)^2 - 2\rho (2r - 1) \cos \Phi\right)}{2\rho (2r - 1) \sin \Phi}, \quad (27)$$

$$\psi = \Phi + \frac{1 + \rho^2 (2r - 1)^2 - 2\rho (2r - 1) \cos \Phi}{2\rho (2r - 1) \sin \Phi}. \quad (28)$$

Анализируя эти соотношения, можно показать, что при увеличении r области периодических режимов увеличиваются. Тем самым достигается стабилизация периодического поведения при более высоких уровнях мощности входного сигнала. В частности, очевидно, что при $r = 1/2$ пороговые значения A_{in} и ψ в (27), (28) обращаются в бесконечность, то есть бифуркация удвоения периода отсутствует.

в) *Линия возникновения квазипериодического поведения.* В отличие от двумерного отображения Икеды (3), четырехмерное модифицированное отображение (15) может демонстрировать квазипериодическое поведение. Для исходной системы (кольцевого нелинейного резонатора) это означает возникновение автомодуляционной неустойчивости с периодом, отличным от 2τ . Из уравнения (20), очевидно, имеем

$$\mu(1 - r) + r = \frac{\mu^2}{\rho} \left(G \pm \sqrt{G^2 - 1} \right). \quad (29)$$

Квазипериодичность возникает при пересечении парой комплексно-сопряженных мультипликаторов единичной окружности на комплексной плоскости μ . Положим в (29) $\mu = \exp(i\theta)$, где θ – число вращения [13]. Приравняв аргументы левой и правой частей (29), получим

$$\frac{(1 - r) \sin \theta}{r + (1 - r) \cos \theta} = \tan 2\theta,$$

что после элементарных преобразований позволяет найти очень простое выражение для числа вращения

$$r = \frac{1}{1 - 2 \cos \theta}$$

или

$$\cos \theta = \frac{r - 1}{2r}. \quad (30)$$

Отметим, что, поскольку параметр r может принимать значения между нулем и единицей, квазипериодическое поведение возможно только при $r > 1/3$, а число вращения лежит в диапазоне $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$.

Подставив найденное соотношение для θ в (29) и приравняв модули левой и правой частей, получим

$$r = \frac{1}{\rho} \left| G \pm \sqrt{G^2 - 1} \right|.$$

Разрешим это соотношение относительно G :

$$G = -\frac{1 + \rho^2 r^2}{2\rho r}, \quad (31)$$

что после подстановки в (21) дает

$$I = \frac{1 + \rho^2 r^2 + 2\rho r \cos \Phi}{2\rho r \sin \Phi}. \quad (32)$$

Тогда из соотношений (17) и (19) находим параметрическое представление для линии $\mu = \exp \theta$ на плоскости параметров:

$$A_{\text{in}}^2 = \frac{(1 + \rho^2 - 2\rho \cos \Phi)(1 + \rho^2 r^2 + 2\rho r \cos \Phi)}{2\rho r \sin \Phi}, \quad (33)$$

$$\psi = \Phi - \frac{1 + \rho^2 r^2 + 2\rho r \cos \Phi}{2\rho r \sin \Phi}. \quad (34)$$

Видно, что при $r = 1/3$, то есть при минимальном значении параметра, при котором возникает квазипериодическое движение, эта линия совпадает с (27), (28). Таким образом, хотя с увеличением r линия удвоения периода на плоскости ψ , A_{in} продолжает подниматься вверх, при $r > 1/3$ границей устойчивости одночастотных колебаний является уже не она, а линия возникновения квазипериодичности (33), (34). Максимальный эффект стабилизации одночастотного режима достигается при $r = 1/3$. При $r > 1/3$, хотя частота $\omega = \pi/\tau$, которая возбуждается при неустойчивости Икеды, подавляется, возникает другой механизм неустойчивости. Аналогичный результат был получен нами при исследовании управления хаосом при помощи дополнительной обратной связи в других системах с запаздыванием [14]. Соотношения (26) или (32) позволяют определить максимальную интенсивность колебаний в резонаторе, при которой стационарный режим еще устойчив.

На рис. 2 приведены теоретические линии различных бифуркаций на плоскости параметров при различных значениях r , построенные согласно приведенным выше соотношениям. Так как эти кривые являются периодическими по параметру ψ с периодом 2π , приведен только один период. Хорошо видно, как при увеличении r линии $\mu = -1$, показанные на рис. 2 сплошными кривыми, смещаются вверх, то есть режимы одночастотных колебаний становятся устойчивыми при все больших значениях интенсивности входного сигнала. При $r > 1/3$ появляются линии $\mu = \exp i\theta$, показанные пунктиром. С ростом r они опускаются вниз. Линия складки показана штриховой линией. Жирным выделена линия $\mu = -1$ при $r = 1/3$, когда область устойчивости одночастотного режима максимальна.

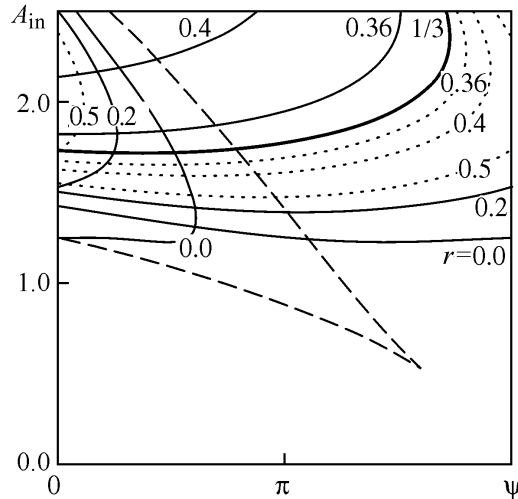


Рис. 2. Линии $\mu = -1$ (сплошные кривые), $\mu = \exp i\theta$ (пунктир) и $\mu = 1$ (штрих) на плоскости параметров ψ , A_{in} при $\rho = 0.5$ и различных значениях параметра r (указаны на рисунке вблизи соответствующих кривых)

4. Приближение низкодобротного резонатора

Как известно (см., например, [16]), отображение Икеды можно существенно упростить, уменьшив число независимых параметров, если считать, что $\rho \ll 1$, то есть добротность резонатора мала. Применим это приближение к отображению (15). Когда добротность резонатора мала, амплитуда колебаний незначительно отличается от амплитуды внешнего сигнала. Тогда можно положить $A_n \approx A_{\text{in}} + \tilde{A}_n$, где $|\tilde{A}_n| \ll A_{\text{in}}$, и приближенно переписать отображение (15) в виде

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{n+1} \approx \rho e^{i\psi} & \left[(1-r) A_{\text{in}} \exp \left[iA_{\text{in}}^2 + iA_{\text{in}} (\tilde{A}_n + \tilde{A}_n^*) \right] + \right. \\ & \left. + r A_{\text{in}} \exp \left[iA_{\text{in}}^2 + iA_{\text{in}} (\tilde{A}_{n-1} + \tilde{A}_{n-1}^*) \right] \right]. \end{aligned}$$

Здесь знак «*» обозначает операцию комплексного сопряжения. Сложив это выражение с комплексно-сопряженным и введя вместо \tilde{A}_n новую вещественную переменную

$$x_n = \psi + A_{\text{in}}^2 + A_{\text{in}} (\tilde{A}_n + \tilde{A}_n^*),$$

получим двумерное вещественное отображение

$$x_{n+1} = \varphi + \lambda [(1-r) \cos x_n + r \cos x_{n-1}]. \quad (35)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\varphi = \psi + A_{\text{in}}^2, \quad \lambda = 2\rho A_{\text{in}}^2. \quad (36)$$

Обратим внимание, что число независимых параметров сократилось на единицу.

При $r = 0$ отображение (35) переходит в известное одномерное \cos -отображение, которое хорошо изучено (см., например, [16]). Оно представляет самостоятельный интерес, так как возникает при описании гибридных – электрооптической ([8], гл. 3) и акустооптической [17] – систем с запаздыванием. Соответственно, отображение (35) может рассматриваться как модель управления хаосом в подобных системах.

Проанализируем устойчивость неподвижных точек отображения (35) аналогично тому, как это было сделано для модифицированного отображения Икеды в п. 3. Неподвижные точки удовлетворяют уравнению

$$x_0 = \varphi + \lambda \cos x_0. \quad (37)$$

Зададим малое возмущение этого решения, подставим в (35) и линеаризуем. В результате после ряда несложных операций придем к следующему характеристическому уравнению для мультипликатора μ :

$$\mu^2 + \lambda\mu(1-r) \sin x_0 + \lambda r \sin x_0 = 0, \quad (38)$$

корни которого есть

$$\mu = -\frac{\lambda(1-r)\sin x_0}{2} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2(1-r)^2\sin^2 x_0}{4} - \lambda r \sin x_0}. \quad (39)$$

Аналогично тому, как это было сделано для модифицированного отображения Икеды в п. 3, построим границы различных бифуркаций на плоскости параметров φ , λ . Для линий складки (касательной бифуркации), положив в (39) $\mu = 1$, после ряда несложных преобразований с учетом (37) найдем выражения, задающие линию складки на плоскости параметров в параметрическом виде

$$\lambda = -\frac{1}{\sin x_0}, \quad (40)$$

$$\varphi = x_0 + \operatorname{ctg} x_0. \quad (41)$$

Как и в п. 3, параметр r в эти соотношения не входит.

Для линии бифуркации удвоения периода, полагая $\mu = -1$ и действуя аналогично предыдущему случаю, находим

$$\lambda = \frac{1}{(1-2r)\sin x_0}, \quad (42)$$

$$\varphi = x_0 - \frac{\operatorname{ctg} x_0}{1-2r}. \quad (43)$$

Видим, что при увеличении r пороговое значение параметра λ увеличивается и при $r = 1/2$ стремится к бесконечности.

Наконец, найдем границу бифуркации Неймарка–Сакера. В этом случае $\mu = \exp(\pm i\theta)$ и, следовательно, из выражения (39) находим, что

$$\cos \theta = -\frac{\lambda(1-r)\sin x_0}{2}, \quad (44)$$

$$\sin \theta = \sqrt{\lambda r \sin x_0 - \frac{\lambda^2(1-r)^2\sin^2 x_0}{4}}. \quad (45)$$

Возводя (44), (45) в квадрат и складывая, получаем

$$\lambda = \frac{1}{r \sin x_0}. \quad (46)$$

Подставив это соотношение в (37), также получаем

$$\varphi = x_0 - \frac{\operatorname{ctg} x_0}{r}. \quad (47)$$

Кроме того, отметим, что подстановка (46) в (44) приводит к соотношению (30), то есть бифуркация Неймарка–Сакера, как и прежде, имеет место только при $r > 1/3$.

Итак, мы получили выражения, задающие линии различных бифуркаций на плоскости параметров φ , λ в параметрическом виде. Можно убедиться, что эти выражения получаются непосредственным переходом к пределу $\rho \ll 1$ в соответствующих соотношениях п. 3. Кроме того, отметим, что в данном случае нетрудно выразить связь между φ и λ в явном виде, однако в дальнейшем эта связь нам не понадобится.

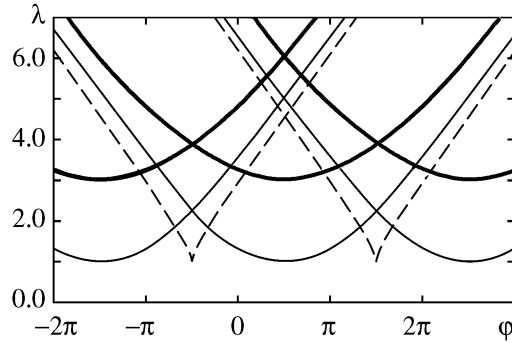


Рис. 3. Границы устойчивости одночастотного режима для отображения (35) на плоскости параметров φ , λ . Показаны линии $\mu = -1$ при $r = 0$ (тонкие сплошные кривые) и $r = 1/3$ (жирные сплошные кривые), а также линии складки $\mu = 1$ (штриховые линии)

Линии бифуркации удвоения периода на плоскости φ , λ , то есть границы устойчивости одночастотного режима, построенные согласно соотношениям (42),(43) при $r = 0$, показаны на рис. 3. При увеличении r эти линии поднимаются вверх. При $r = 1/3$ от них ответвляются линии бифуркации Неймарка–Сакера, которые с ростом r опускаются вниз. Как и в случае, рассмотренном в п. 3 (см. рис. 2), можно считать, что максимальное повышение порога автомодуляции достигается при $r = 1/3$. Соответствующие кривые показаны на рис. 3 жирными линиями.

Кроме того, показаны линии складки, ограничивающие область мультистабильности, которые построены согласно формулам (40), (41). Сравнивая выражения (42) при $r = 1/3$ и при $r = 0$, видим, что пороговое значение параметра λ повышается в три раза. Соответственно, это означает, что пороговое значение амплитуды внешнего сигнала повышается в $\sqrt{3}$ раз (см. (36)). Также, исходя из определения параметра λ , нетрудно видеть, что все бифуркационные значения A_{in} с уменьшением добротности резонатора будут возрастать пропорционально $\rho^{-1/2}$.

5. Результаты численного моделирования

Результаты теоретического анализа устойчивости стационарных состояний подтверждаются прямым численным моделированием отображения (15). На рис. 4 приведены карты динамических режимов на плоскости параметров ψ , A_{in} при различных значениях r . Оттенками серого показаны области циклов различных периодов, соответственно обозначенные цифрами, белым цветом – области хаотического или квазипериодического движения. Рис. 4 свидетельствует о том, что при введении дополнительной цепи обратной связи в отображении Икеды происходит сдвиг областей одночастотных колебаний в сторону увеличения амплитуды возбуждающего сигнала. На этом рисунке также нанесены линии касательной бифуркации, бифуркации удвоения периода и бифуркации Неймарка–Сакера, построенные согласно теоретическим формулам, приведенным в п. 3. Они полностью согласуются с численными результатами.

При $r > 1/3$ между циклами периодов один и два возникает область квазипериодического движения (рис. 4, $z-e$). Таким образом, хотя порог бифуркации удвое-

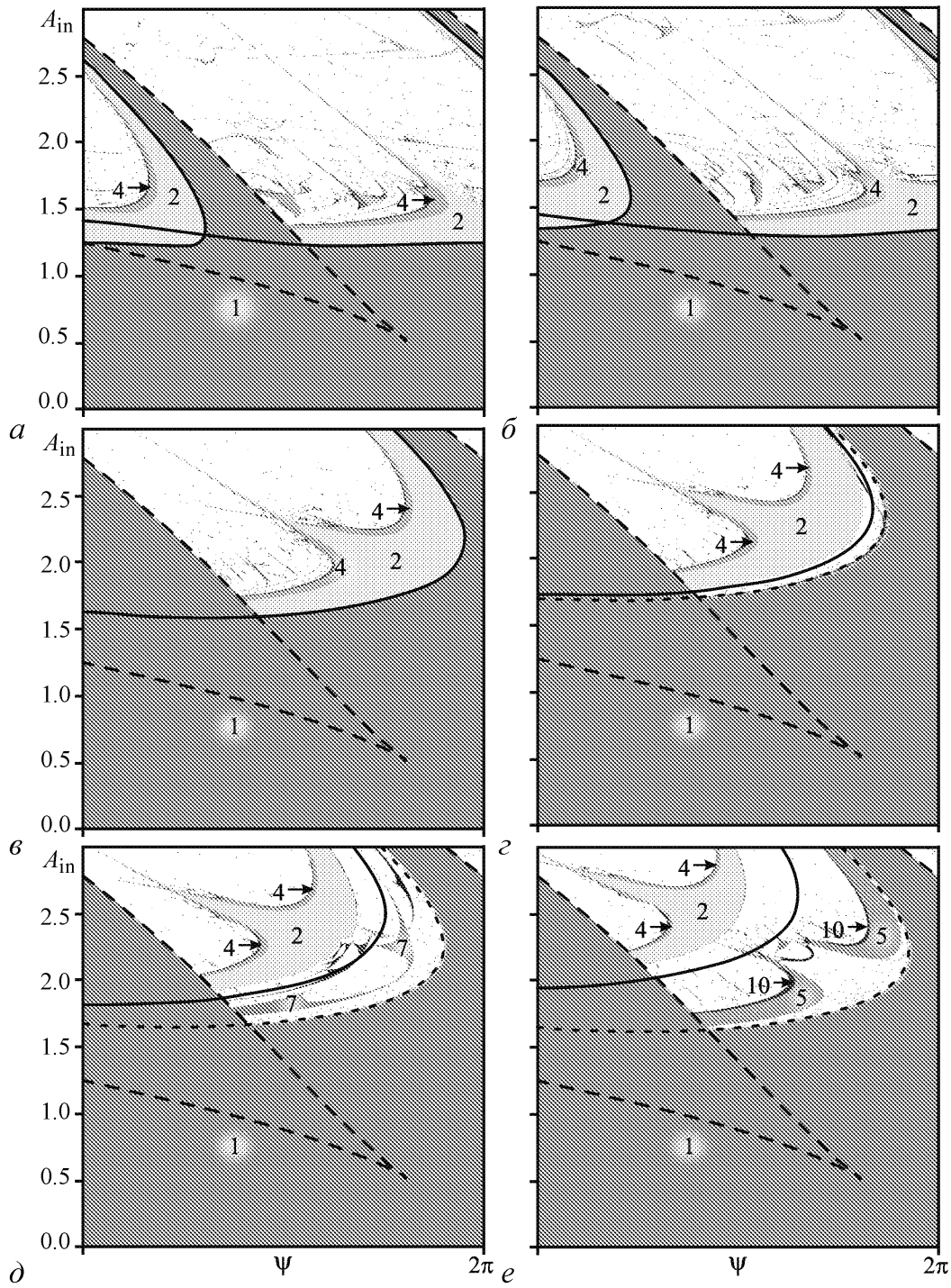


Рис. 4. Карты динамических режимов отображения (15) на плоскости параметров ψ , A_{in} при $\rho = 0.5$; $r = 0$ (а), 0.1 (б), 0.3 (в), 0.34 (г), 0.36 (д) и 0.38 (е). Оттенками серого обозначены области циклов разных периодов, белым – области квазипериодического или хаотического движения. Линия $\mu = -1$ – сплошная кривая, $\mu = \exp i\theta$ – пунктир, $\mu = 1$ – штриховая линия

ния периода продолжает сдвигаться вверх, интересующий нас стационарный режим становится неустойчивым, но теперь уже в результате бифуркации рождения тора. С ростом r порог этой бифуркации сдвигается вниз, то есть область квазипериодического движения расширяется. При движении внутри нее по плоскости параметров могут происходить переходы к хаосу через разрушение квазипериодического движения. Сверху к области квазипериодичности примыкает область цикла периода 2, причем переход к этому циклу от квазипериодического или хаотического режима происходит через перемежаемость.

Внутри области квазипериодичности заметны многочисленные сложноустроенные языки синхронизации. Однако их устройство отличается от известной картины для систем с бифуркацией Неймарка–Сакера, где они отходят от линии бифуркации в точках, в которых число вращения принимает рациональные значения. В данном же случае число вращения не меняется вдоль линии бифуркации. Это объясняется тем, что представленные на рис. 4 карты динамических режимов фактически представляют собой сечения четырехмерного пространства параметров плоскостями ψ , A_{in} при различных значениях r . В этих сечениях линии, на которых число вращения рационально, оказываются примерно параллельными линии $\mu = \exp i\theta$ и, соответственно, языки синхронизации вытянуты вдоль них. Изучение этой картины представляет самостоятельный интерес и требует дополнительного исследования, тогда как основную цель настоящей работы составляет изучение вопроса об устойчивости одночастотного режима колебаний.

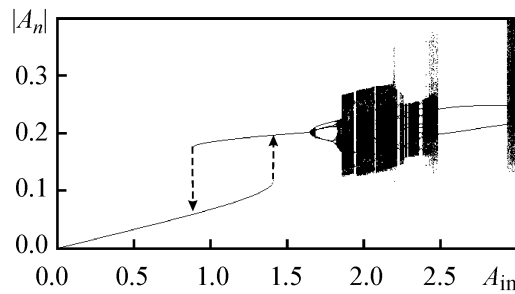


Рис. 5. Однопараметрическая бифуркационная диаграмма для отображения (15) при $\rho = 0.5$, $r = 0.38$, $\psi = \pi$

Более наглядно представить себе поведение системы при увеличении амплитуды внешнего сигнала позволяет представленная на рис. 5 бифуркационная диаграмма, построенная для случая, которому соответствует рис. 4, *e*, с наследованием начальных условий вдоль линии $\psi = \pi$. На диаграмме отложены значения $|A_n|$ при различных значениях амплитуды воздействия A_{in} . Видны жесткие переходы с одной ветви передаточной характеристики на другую, область квазипериодического движения при $1.65 < A_{in} < 1.68$, резонанс 1:5 и

переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума на базе этого цикла ($A_{in} \approx 1.82$). Далее наблюдается обширная область квазипериодических режимов, в которой видны многочисленные окна периодического поведения. При $A_{in} \approx 2.47$ наблюдается переход через перемежаемость к циклу периода 2.

Как следует из приведенных в п. 3 рассуждений, максимальный порог автомодуляции должен достигаться при $r = 1/3$. При $r < 1/3$ потеря устойчивости происходит в результате бифуркации удвоения периода, при $r > 1/3$ – в результате бифуркации Неймарка–Сакера. Аналогичное поведение характерно и для других систем с запаздыванием [14]. Однако в системе Икеды в зависимости от других управляющих параметров форма области устойчивости режима одночастотных колебаний может иметь более сложный вид. Рассмотрим приведенные на рис. 6 карты

динамических режимов на плоскости параметров r, A_{in} , построенные при различных значениях параметра ψ . Как и на рис. 4, на них наложены линии различных бифуркаций, построенные согласно аналитическим формулам, полученным в п. 3. Как видно из рис. 6, *a*, при $\psi = 0$ линии $\mu = -1$ и $\mu = \exp(\pm i\theta)$ не пересекаются, так что имеются две изолированные друг от друга области нестационарного поведения, а область устойчивости ограничена сверху линией касательной бифуркации, которая в данном случае представляет собой горизонтальную прямую, поскольку условия касательной бифуркации не зависят от r (см. п. 3). Таким образом, в данном случае можно, выбирая параметр $r \sim 0.3 \div 0.4$, получить одночастотные колебания в широком диапазоне изменения интенсивности внешнего сигнала. Максимальное значение A_{in} увеличивается более чем в два раза по сравнению с системой с одним контуром ОС.

Иную форму принимает область устойчивости при $\psi < -0.27\pi$, когда линии $\mu = -1$ и $\mu = \exp(\pm i\theta)$ начинают пересекаться (рис. 6, *б, в*). Обратим внимание,

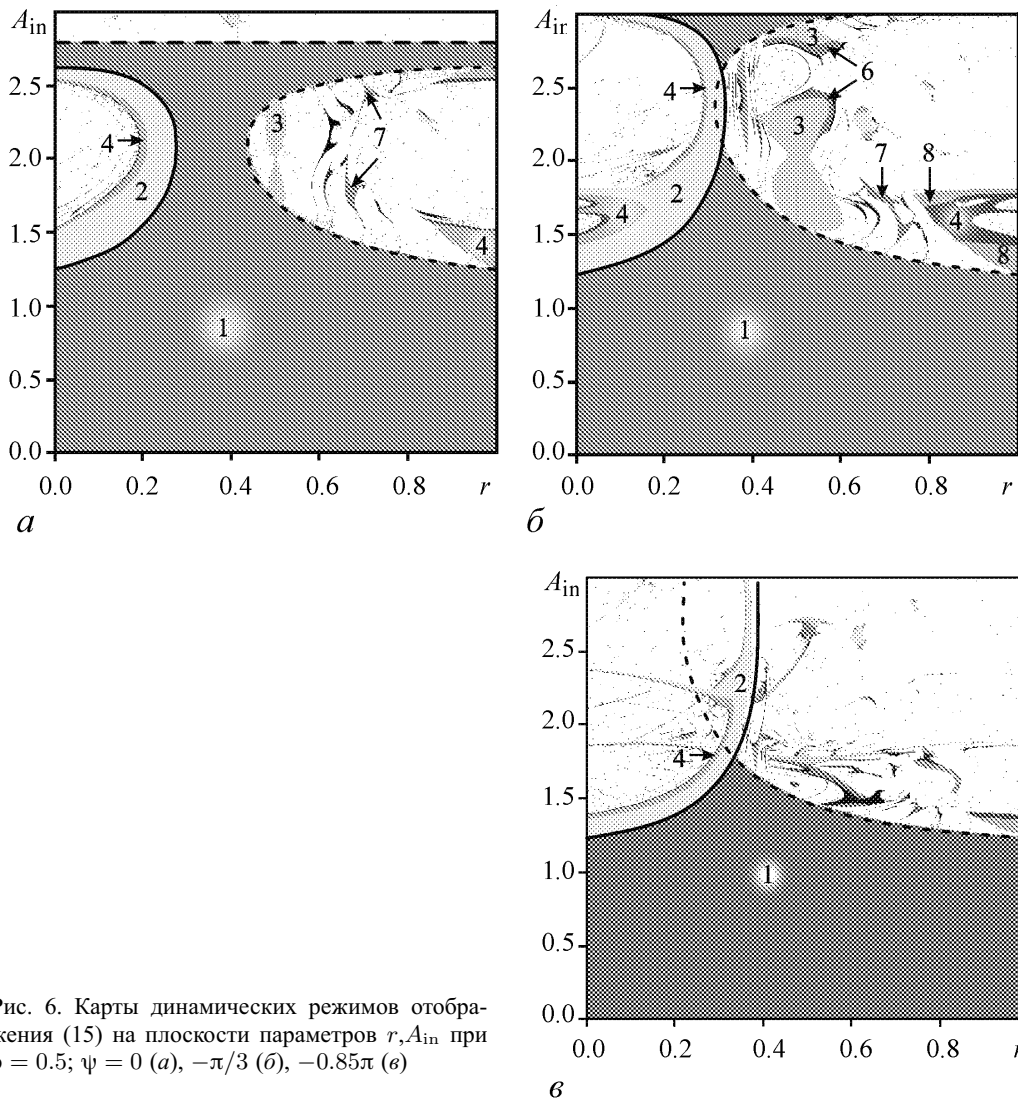


Рис. 6. Карты динамических режимов отображения (15) на плоскости параметров r, A_{in} при $\rho = 0.5$; $\psi = 0$ (*a*), $-\pi/3$ (*б*), -0.85π (*в*)

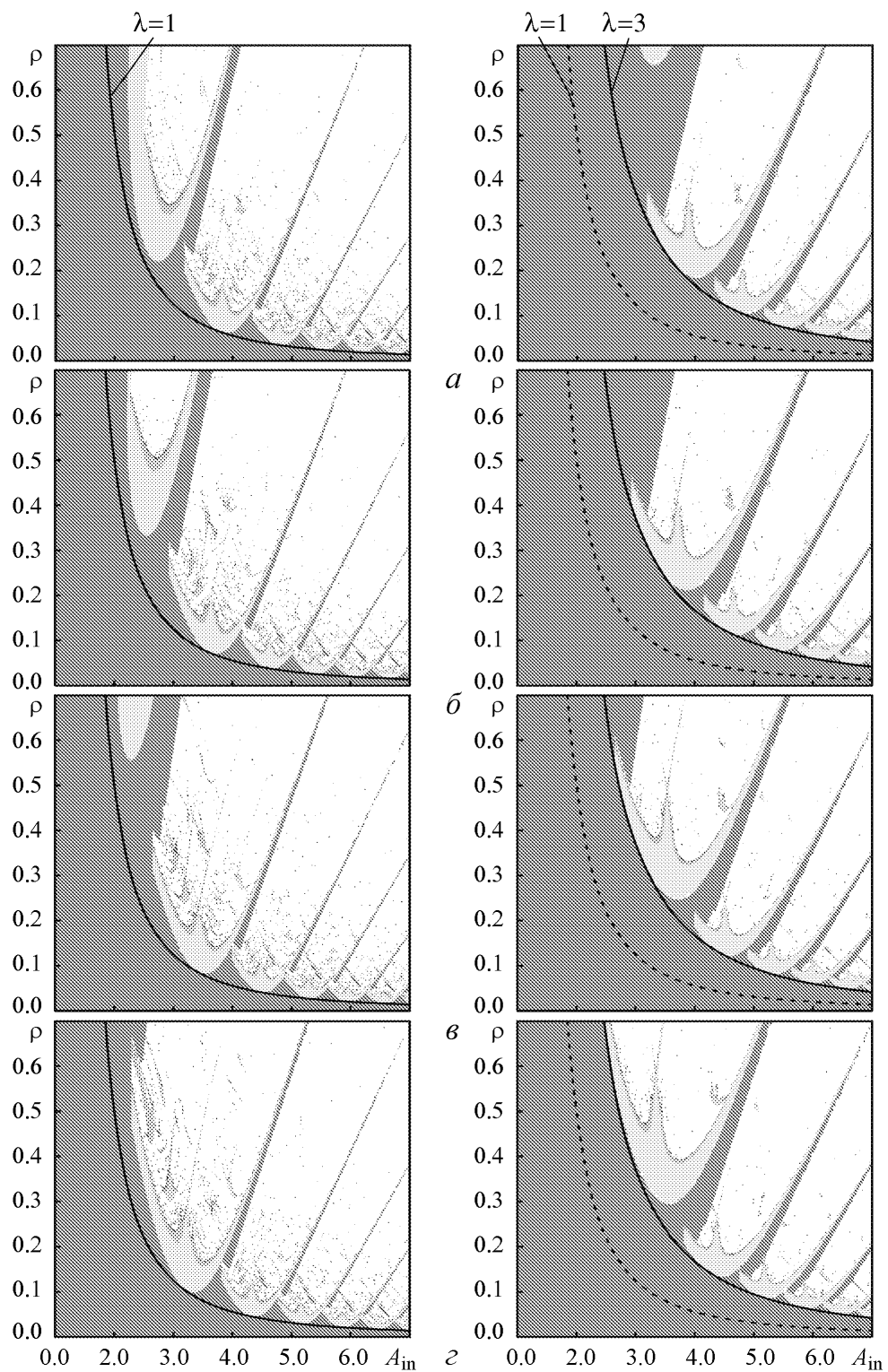


Рис. 7. Карты динамических режимов отображения (15) на плоскости параметров A_{in} , ρ при $r = 0$ (левая колонка) и $r = 1/3$ (правая колонка) для $\psi = 0$ (а), $\pi/3$ (б), $2\pi/3$ (е) и π (з)

что точки пересечения всегда расположены при $r = 1/3$. Область устойчивости разбивается на две, причем с уменьшением ψ верхняя область сдвигается в сторону больших A_{in} и становится все более узкой. Граница нижней области приобретает вид, характерный для других систем с запаздыванием [14], с максимумом при $r = 1/3$. Тем не менее и в этом случае можно достаточно существенно повысить порог автомодуляции.

Наконец, обсудим вопрос о зависимости порога автомодуляции от добротности резонатора. На рис. 7 приведены карты динамических режимов на плоскости параметров A_{in} , ρ при различных значениях фазы ψ , рассчитанные для значений $r = 0$ (слева) и $r = 1/3$ (справа). Для наглядности на этих рисунках нанесены кривые $\lambda = 1$ и $\lambda = 3$, где λ определяется формулой (36). Границы автомодуляции в точках минимума опираются на эти кривые в случае, когда справедливо приближение низкодобротного резонатора (см. п. 4).

Карты имеют очевидную самоподобную структуру. Действительно, в приближении низкодобротного резонатора переход к параметрам λ , φ (36) делает карту динамических режимов периодической по параметру φ . Соответственно, на плоскости параметров исходного отображения существует структура характерных «ячеек», в которых наблюдается нестационарное поведение. Как видно из рис. 7, при изменении фазы ψ первая «ячейка» постепенно сдвигается вверх и исчезает, а на ее место приходит вторая, и т.д. Основываясь на рис. 7, можно примерно оценить границу справедливости приближения низкодобротного резонатора как $\rho < 0.3$. Отметим, что, как следует из [16], приближение низкодобротного резонатора хорошо работает, начиная уже со второй «ячейки», что вполне согласуется с полученными нами результатами.

Таким образом, подтверждается сделанный в п. 4 вывод, что при достаточно малых ρ предложенный метод управления хаосом позволяет повысить порог автомодуляции по параметру A_{in} примерно в $\sqrt{3}$ раз. В области больших ρ ситуация более сложная, так как там может происходить описанная выше трансформация плоскости параметров, когда границей автомодуляции служит уже не линия бифуркации удвоения периода, а линия складки. В этом случае при определенных параметрах можно добиться значительно большего увеличения порога автомодуляции (например, при $\rho > 0.45$ в случае, которому соответствует рис. 7, б).

Отметим также, что мы не рассматриваем область $\rho \approx 1$, когда система близка к консервативной и ее динамика носит особенно сложный характер (см., например, [18]). В частности, имеют место чрезвычайно длительные переходные процессы, сосуществование аномально большого числа аттракторов и т.д.

Заключение

В данной работе на примере одной из наиболее известных моделей нелинейной динамики – системы Икеды – рассмотрен метод управления хаосом в системах с запаздыванием, являющийся модификацией известного метода Пирагаса. Метод основан на введении дополнительной цепи обратной связи, параметры которой подбираются таким образом, чтобы спектральные компоненты сигнала на основной ча-

стоте, прошедшие по двум ветвям цепи ОС, оказывались в фазе, а на паразитных частотах – в противофазе, и таким образом подавляли бы друг друга. В случае, когда дисперсия пренебрежимо мала, показано, что динамику системы можно приближенно описать при помощи четырехмерного точечного отображения, являющегося обобщением известного отображения Икеды. Проведен теоретический анализ устойчивости неподвижных точек этого отображения, позволивший аналитически построить линии возникновения различных бифуркаций (удвоения периода, Неймарка–Сакера, касательной бифуркации) на плоскостях управляющих параметров. Представлены результаты численного моделирования, хорошо согласующиеся с теорией. Показано, что при определенных значениях параметров удастся значительно расширить область устойчивости одночастотных колебаний.

В случае, когда пренебрегать эффектами дисперсии нельзя, необходимо обратиться к исследованию пространственно-временной распределенной модели, описываемой НУШ (1) с запаздывающим граничным условием (5). Результаты такого исследования будут приведены в последующей работе. Они показывают, что при достаточно слабой дисперсии хорошо работает приближенное описание на основе точечного отображения. Более сложный характер носит динамика системы в случае сильной дисперсии, когда нестационарное поведение, в основном, обусловлено не неустойчивостью Икеды, а модуляционной неустойчивостью [8, 12]. Тем не менее и в этом случае введение дополнительной обратной связи с соответствующим образом подобранными параметрами позволяет подавить автомодуляцию и стабилизировать режим одночастотных колебаний.

Авторы благодарны А.П. Кузнецову и С.П. Кузнецову за полезные дискуссии.

Работа выполнена при поддержке программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/1738). Работа Н.М. Рыскина поддержана также фондом некоммерческих программ «Династия».

Библиографический список

1. Ott E., Grebogi C., Yorke J.A. Controlling chaos // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64, № 11. P. 1196.
2. Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback // Phys. Lett. A. 1992. Vol. 170. P. 421.
3. Just W., Benner H., Schoell E. Control of chaos by time-delayed feedback: A survey of theoretical and experimental aspects // In: B. Kramer (Ed.), Advances in Solid State Physics. Vol. 43, Springer, Berlin, 2003. P. 589.
4. Hoevel P., Schoell E. Control of unstable steady states by time-delayed feedback methods // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72, № 4. 046203.
5. Долов А.М., Кузнецов С.П. Применение методики контроля хаоса для устранения автомодуляции в лампе обратной волны // ЖТФ. 2003. Т. 73, № 8. С. 139.
6. Ikeda K., Daido H., Akimoto O. Optical turbulence: chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45, № 9. P. 709.

7. *Измайлов И.В., Лячин А.В., Пойзнер Б.Н.* Детерминированный хаос в моделях кольцевого нелинейного интерферометра. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007.
8. *Розанов Н.Н.* Оптическая бистабильность и гистерезис в распределенных нелинейных системах. М.: Наука, 1997.
9. *Dodd R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Morris H.S.* Solitons and Nonlinear Wave Equations, Academic Press, London, 1984.
10. *Рыскин Н.М., Трубецков Д.И.* Нелинейные волны. М.: Наука, Физматлит, 2000.
11. *Островский Л.А., Потапов А.И.* Введение в теорию модулированных волн. М.: Физматлит, 2003.
12. *Балякин А.А., Рыскин Н.М., Хаврошин О.С.* Нелинейная динамика модуляционной неустойчивости в распределенных резонаторах под внешним гармоническим воздействием // Изв. вузов. Радиофизика. 2007. Т. 50, № 9. С. 800.
13. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001.
14. *Емельянов В.В., Рыскин Н.М., Хаврошин О.С.* Подавление автомодуляции в автогенераторе с запаздыванием при помощи методики управления хаосом // Радиотехника и электроника. 2009. Т. 54, № 6. С. 719.
15. *Ryskin N.M., Khavroshin O.S.* Suppressing self-modulation instability in a delayed feedback traveling wave tube oscillator using controlling chaos technique // IEEE Trans. Electron Devices. 2008. Vol. 55, № 2. P. 662.
16. *Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.* Динамические системы разных классов как модели нелинейного осциллятора с импульсным воздействием // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 2. С. 31.
17. *Valee R., Delisle C., Chrostowski J.* Noise versus chaos in acousto-optic bistability // Phys. Rev. A. 1984. Vol. 30, № 1. P. 336.
18. *Кузнецов А.П., Савин А.В., Савин Д.В.* Отображение Икеды: от диссипативного к консервативному случаю // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 2. С. 94.

Поступила в редакцию 4.09.2008

CONTROLLING CHAOS IN IKEDA SYSTEM

Symplified discrete map model

N.M. Ryskin, O.S. Khavroshin

Method of controlling chaos in a ring cavity containing a media with cubic phase nonlinearity (Ikeda system) is considered. The proposed method is based on introduction of an additional feedback loop with parameters chosen so that the fundamental frequency components after passing through different feedback loops appear in phase, while the most unstable sidebands appear in antiphase, thus suppressing each other. In the weak dispersion limit a discrete map is derived that is a modification of the well-known Ikeda map. The results of analytic investigation and numerical simulation of this map in a broad range

of parameters are presented. It is shown that the suggested method allows suppression of self-modulation and stabilization of periodic regimes.

Keywords: Controlling chaos, nonlinear ring-loop resonator, delayed feedback, return map, bifurcation.



Рыскин Никита Михайлович – родился в 1966 г. в Саратове. Окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1991). Защитил кандидатскую (1996) и докторскую (2005) диссертации. С 1997 г. работает на факультете нелинейных процессов СГУ, в настоящее время – профессор кафедры нелинейной физики. Область научных интересов – нелинейная динамика распределенных систем, нелинейные волны и солитоны, вакуумная сверхвысокочастотная электроника и микроэлектроника. Имеет более 100 научных публикаций по указанным выше направлениям, в том числе учебные пособия «Нелинейные волны» (в соавторстве с Д.И. Трубецковым; М.: Физматлит, 2000) и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и С.П. Кузнецовым; М.: Физматлит, 2002, 2005).

E-mail: RyskinNM@info.sgu.ru
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83



Хаврошин Олег Сергеевич – родился 19 октября 1983 года в г. Луцк, Волынской области, Украина. Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (2006). В настоящее время обучается в аспирантуре кафедры нелинейной физики СГУ. Область научных интересов – управление хаосом в радиофизических системах с запаздыванием.

E-mail: jktufdmail@mail.ru
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83



УПРАВЛЕНИЕ ХАОСОМ В СИСТЕМЕ ИКЕДЫ

Пространственно-временная модель

Н.М. Рыскин, О.С. Хаврошин

Метод управления хаосом в кольцевом резонаторе, содержащем среду с кубической фазовой нелинейностью (система Икеды), предложенный в работе [1], рассматривается в рамках распределенной пространственно-временной модели, которая описывается нелинейным уравнением Шрёдингера с граничным условием, содержащим запаздывание. Приведены результаты численного моделирования, подтверждающие эффективность предложенного метода. В случае, когда дисперсия нелинейной среды мала, полученные результаты хорошо согласуются с приближенной теорией, основанной на точечном отображении [1]. В случае сильной дисперсии, когда нестационарное поведение системы, в основном, обусловлено модуляционной неустойчивостью, динамика носит более сложный характер, что связано с процессами конкуренции различных собственных мод резонатора. Показано, что подбором параметров управляющей цепи обратной связи удается подавить автомодуляционные колебания и обеспечить устойчивость периодических режимов в широком диапазоне параметров.

Ключевые слова: Управление хаосом, кольцевой нелинейный резонатор, запаздывающая обратная связь, нелинейное уравнение Шрёдингера, модуляционная неустойчивость.

Введение

В работе [1] была предложена схема управления хаосом в системе Икеды, которая представляет собой кольцевой резонатор, содержащий отрезок среды с кубической фазовой нелинейностью, замкнутый в кольцо цепью обратной связи (ОС) с задержкой [2–4]. Резонатор возбуждается внешним гармоническим сигналом. Метод основан на введении дополнительной цепи обратной связи, параметры которой подбираются таким образом, чтобы спектральные компоненты сигнала на основной частоте, прошедшие по двум ветвям цепи ОС, оказывались в фазе, а на паразитных частотах – в противофазе, и таким образом подавляли бы друг друга. Математическая модель системы Икеды (см. [1] и цитированную там литературу) описывается нелинейным уравнением Шрёдингера (НУШ)

$$i \left(\frac{\partial A}{\partial t} + V \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\omega_0''}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \beta |A|^2 A = 0, \quad (1)$$

которое является основной моделью распространения огибающей квазигармонической волны в нелинейной среде с дисперсией [5–7], с запаздывающим граничным условием

$$A(0, t) = A_{\text{in}} e^{i\omega t} + \rho \left[(1 - r) e^{i\psi_1} A(l, t - \Delta t_1) + r e^{i\psi_2} A(l, t - \Delta t_2) \right]. \quad (2)$$

Здесь $A(x, t)$ – медленно меняющаяся комплексная амплитуда сигнала; V – групповая скорость; ω_0'' – параметр дисперсии групповой скорости; β – параметр нелинейности; l – протяженность нелинейной среды; A_{in} и ω – амплитуда и частота внешнего сигнала; $\Delta t_{1,2}$ и $\psi_{1,2}$ – времена задержки и набег фазы сигнала в соответствующей цепи ОС; ρ – параметр, характеризующий глубину обратной связи; r определяет соотношение амплитуд сигналов в первой и второй цепи ОС. Последние два параметра удовлетворяют условиям $0 < \rho < 1$, $0 < r < 1$. При $r = 0$ имеем обычную систему Икеды с единственным контуром обратной связи [4, 8].

Как показано в [1], при выборе параметров $\psi_{1,2}$ и $\Delta t_{1,2}$ в соответствии с соотношениями

$$\psi_1 = 2\pi n + \psi_2 + \omega(\Delta t_1 - \Delta t_2), \quad (3)$$

$$\Omega(\Delta t_2 - \Delta t_1) = 2\pi m + \pi \quad (4)$$

(ω – частота основного сигнала, Ω – частота паразитной модуляции), компоненты сигнала на основной частоте после прохождения двух ветвей ОС оказываются в фазе, а на паразитных частотах $\omega \pm \Omega$ – в противофазе. Таким образом, можно осуществить подавление автомодуляции и стабилизировать режим периодических колебаний на частоте внешнего воздействия.

Анализ предложенной схемы управления хаосом в [1] проводился на основе точечного отображения

$$A_{n+1} = A_{\text{in}} + \rho e^{i\psi} \left[(1 - r) A_n e^{i|A_n|^2} + r A_{n-1} e^{i|A_{n-1}|^2} \right], \quad (5)$$

следующего из (1), (2) в случае, когда можно пренебречь дисперсией. Здесь A_n – комплексная амплитуда сигнала в n -й момент дискретного времени $t_n = n\tau$, где $\tau = \Delta t_1 + l/V$. При $r = 0$ (5) переходит в отображение Икеды, которое относится к числу эталонных моделей нелинейной динамики и хорошо изучено [3, 4]. Результаты теоретического анализа и численного моделирования показали возможность эффективного подавления режимов автомодуляции и значительного расширения диапазона параметров, в котором устойчивы периодические колебания.

Однако анализ на основе отображения (5) носит приближенный характер. В настоящей работе рассматривается управление пространственно-временной динамикой в исходной распределенной системе, которая описывается НУШ (1) с запаздывающим граничным условием (2). Как было показано в работе [8], данная система демонстрирует два различных сценария поведения. В случае слабой дисперсии динамика системы во многом аналогична поведению отображения Икеды. В частности, период автомодуляции приблизительно равен 2τ , а с увеличением амплитуды внешнего воздействия наблюдается сценарий перехода к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. При сильной дисперсии, если выполнен критерий Лайтхилла $\beta\omega_0'' > 0$ [5–7], автомодуляция обусловлена модуляционной неустойчивостью. В этом случае период автомодуляции определяется не временем запаздывания τ , а частотой, для которой инкремент модуляционной неустойчивости принимает

максимальное значение, а переход к хаосу с увеличением A_{in} происходит, в основном, через разрушение квазипериодического движения.

Отметим, что, как было показано в работах [9, 10], модуляционная неустойчивость может быть либо абсолютной, либо конвективной. В первом случае автомодуляция возникает в среде без внешней обратной связи. Физическая причина появления абсолютной неустойчивости заключается в том, что при достаточно большой амплитуде сигнала диапазон неустойчивых возмущений расширяется и начинает захватывать область волновых чисел, где групповая скорость отрицательна, что приводит к возникновению внутренней распределенной обратной связи [9, 10]. Необходимо, однако, учитывать, что принципиальную роль в данном случае играет присутствие волн с отрицательной групповой скоростью, то есть абсолютная неустойчивость возможна лишь в окрестности критической частоты. Ниже мы будем рассматривать случай, когда неустойчивость является конвективной, что имеет место при выполнении условия [9, 10]

$$\beta |A_0|^2 < \frac{V^2}{2\omega_0''} + \omega, \quad (6)$$

где A_0 – амплитуда стационарного состояния. В дальнейшем значения управляющих параметров всегда выбираются таким образом, что условие (6) выполняется.

1. Методика численного моделирования

Численное интегрирование НУШ (1) проводилось с помощью конечно-разностной схемы типа «предиктор–корректор». Пусть известны значения поля в узлах пространственной сетки в некоторый момент времени $A_j^n = A(t = n\Delta t; x = j\Delta x)$. Здесь Δt и Δx – шаги дискретизации по времени и координате, соответственно. На первом этапе (предиктор) находятся значения поля в промежуточный момент времени $A_j^{n+1/2}$. При этом используется чисто неявная схема вида

$$\begin{aligned} \frac{A_j^{n+1/2} - A_j^n}{\Delta t/2} = & -V \cdot \frac{A_j^{n+1/2} - A_{j-1}^{n+1/2}}{\Delta x} + \\ & + \frac{i\omega_0''}{2} \cdot \frac{A_{j+1}^{n+1/2} - 2A_j^{n+1/2} + A_{j-1}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + i\beta \left| A_j^{n+1/2} \right|^2 A_j^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Разностное уравнение (7) решается методом правой прогонки. При этом в нелинейное слагаемое вначале подставляется значение $\left| A_j^n \right|$, а затем решение уточняется с помощью итераций. Затем по полученным значениям $A_j^{n+1/2}$ рассчитывается поле в момент времени $(n+1)\Delta t$:

$$\begin{aligned} \frac{A_j^{n+1} - A_j^n}{\Delta t} = & -V \cdot \frac{A_j^{n+1/2} - A_{j-1}^{n+1/2}}{\Delta x} + \\ & + \frac{i\omega_0''}{2} \cdot \frac{A_{j+1}^{n+1/2} - 2A_j^{n+1/2} + A_{j-1}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + i\beta \left| A_j^{n+1/2} \right|^2 A_j^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Поскольку правые части у выражений (7) и (8) совпадают, последнее существенно упрощается

$$A_j^{n+1} = 2A_j^{n+1/2} - A_j^n. \quad (9)$$

Получившаяся конечно-разностная схема имеет второй порядок точности как по координате, так и по времени и является безусловно устойчивой (см., например, [11]). Точность расчетов контролировалась уменьшением шага по координате и времени; большинство расчетов проводилось при $\Delta t = 0.005$, $\Delta x = 0.1$.

Граничные и начальные условия ставятся следующим образом. Начальное распределение поля вдоль системы предполагается нулевым. На левой границе граничное условие ставится в соответствии с соотношением (2) с той лишь разницей, что для исключения резких скачков поля внешний сигнал полагается плавно нарастающим во времени по закону $A_{\text{in}}(t) \exp(i\omega t)$. Чтобы исключить эффекты отражения и реализовать режим однонаправленного распространения, граничное условие справа ставится в виде так называемых поглощающих слоев, то есть считается, что интересующая нас область имеет некоторую конечную длину l , а при $x > l$ в уравнение (1) искусственно вводится затухание с коэффициентом $\gamma(x)$, зависящим от координаты. Соответственно, уравнение (1) в области $x > l$ принимает вид

$$i \left(\frac{\partial A}{\partial t} + V \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\omega_0''}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \beta |A|^2 A + i\gamma(x) A = 0. \quad (10)$$

Существуют различные способы выбора зависимости $\gamma(x)$; здесь предполагается, что коэффициент диссипации нарастает по закону $\gamma = \gamma_0 \sigma^{g(x-l)}$. Константы γ_0 , σ и g , так же как и количество поглощающих слоев, подбираются эмпирически. Основное требование состоит в том, чтобы обеспечить быстрое затухание возмущения, прошедшего в поглощающие слои, и отсутствие видимых отражений от границы раздела. Для уменьшения отражений следует уменьшать γ_0 и одновременно увеличивать протяженность поглощающих слоев. Большинство расчетов проводилось при $\gamma_0 = 0.01$, $\sigma = e$, $g = 1.03$, а длина поглощающей области выбиралась равной l .

Как известно (см., например, [5, 6]) НУШ (1) является полностью интегрируемой системой и имеет бесконечный набор сохраняющихся величин (интегралов движения). Некоторым из них удается придать четкий физический смысл. В частности, следует выделить интеграл вида

$$N = \int_x |A|^2 dx = \text{const}, \quad (11)$$

который имеет смысл энергии волны или, если использовать аналогию с квантовой механикой, – числа квазичастиц. Важным достоинством используемой разностной схемы является то, что она сохраняет интеграл (11), точнее, его дискретный аналог $\sum_j |A_j^n|^2$.¹

¹Сказанное относится к задаче с нулевыми или с периодическими граничными условиями. В случае, рассматриваемом в настоящей работе, присутствует приток энергии от внешнего источника и диссипация на правой границе, поэтому система уже не является интегрируемой и величина (11) не сохраняется.

2. Результаты численного моделирования

2.1. Случай слабой дисперсии. Рассмотрим вначале случай слабой дисперсии ($\omega_0'' = 0.01$). Остальные параметры выберем следующим образом: параметры обратной связи $\rho = 0.5$, $\Delta t_1 = 15$, $\psi_1 = 0$, частота входного сигнала $\omega = 0$,² параметр нелинейности $\beta = 1$, групповая скорость $V = 1$, протяженность нелинейной среды $l = 5$. Поскольку в случае слабой дисперсии автомодуляция возникает в результате неустойчивости Икеды и имеет период, примерно равный 2τ [4, 8], где $\tau = \Delta t_1 + l/V = 20$, из (4) получаем, что время задержки во второй цепи ОС следует выбирать $\Delta t_2 = \Delta t_1 + \tau = 35$. Что касается фазы ψ_2 , то в случае $\omega = 0$ в соответствии с формулой (3) ее можно выбрать равной ψ_1 .

Результаты численного моделирования показывают, что в отсутствие управления автомодуляция возникает при $A_{in} \approx 0.55$. На рис. 1 приведены временная зависимость выходного сигнала $A_{out} = |A(x=l)|$, фазовый портрет и спектр сигнала при достаточно существенном превышении порога автомодуляции ($A_{in} = 0.66$). Как видно, в данном случае имеет место достаточно глубокая периодическая модуляция. Зависимость выходного сигнала от времени имеет вид последовательности почти прямоугольных импульсов, а период автомодуляции $T \approx 2\tau = 40$, то есть эта ситуация достаточно хорошо описывается точечным отображением (5). Добавление слабой управляющей ОС позволяет подавить автомодуляцию, что демонстрирует рис. 1, в. В этом случае по окончании достаточно короткого переходного процесса осцилляции огибающей затухают и устанавливается режим одночастотных вынужденных колебаний на частоте внешнего воздействия.

Хотя формально предлагаемый метод рассчитан на подавление какой-то определенной паразитной частоты, стабилизировать одночастотный режим удастся не только в случае периодической автомодуляции, но и для более сложных режимов, включая хаотические колебания со сплошным спектром (рис. 2). Соответственно, при этом потребовалось увеличить глубину дополнительной ОС, а установление стационарного режима происходит после достаточно длительного переходного процесса.

На рис. 3 приведены границы области устойчивости на плоскости параметров r , A_{in} , рассчитанные при двух различных значениях фаз обратной связи (при данных значениях параметров в соответствии с формулой (3) фазы в первой и второй цепях ОС следует выбирать одинаковыми, $\psi_1 = \psi_2$). На этих же рисунках нанесены теоретические границы устойчивости для отображения (5), построенные по формулам, полученным в [1] (ср. рис. 6, а, б в [1]). При этом, поскольку отображение записано в несколько иной нормировке переменных, значения амплитуды воздействия, приведенные в [1], следует перенормировать в соответствии с формулой

$$A_{in} \rightarrow A_{in} \left(\frac{\beta l}{V} \right)^{-1/2}. \quad (12)$$

²Напомним, что переменная A имеет смысл медленно меняющейся амплитуды волны. Поэтому условие $\omega = 0$ означает, что частота входного сигнала выбирается в точности равной несущей частоте волны.

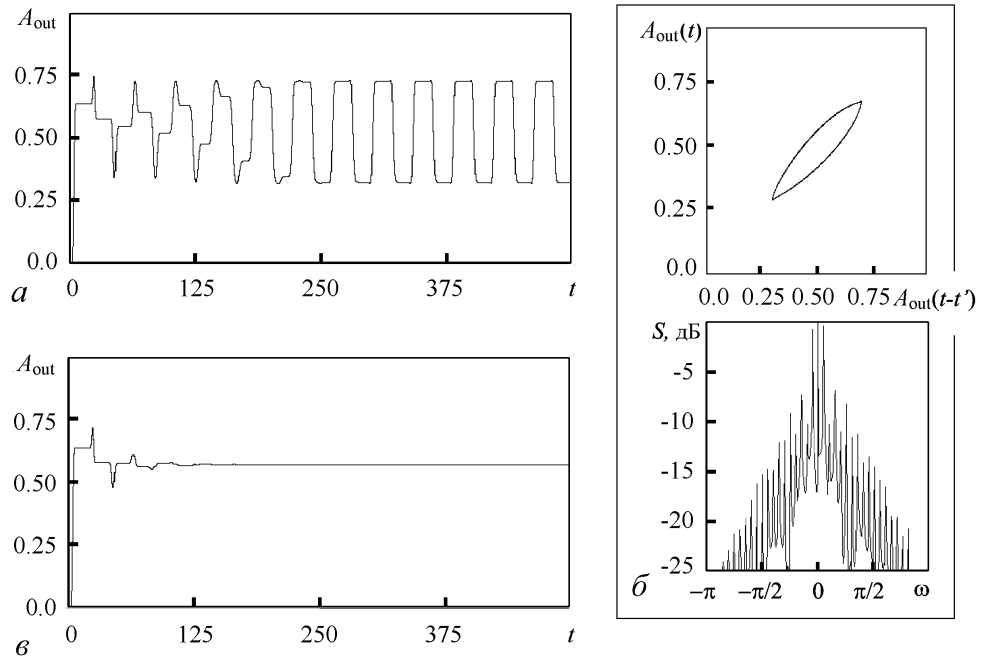


Рис. 1. *a* – Зависимость амплитуды выходного сигнала от времени; *б* – фазовый портрет и спектр в режиме глубокой периодической автомодуляции при следующих значениях параметров: $A_{in} = 0.66$, $\omega = 0$, $V = 1$, $\omega_0'' = 0.01$, $\beta = 1$, $\rho = 0.5$, $\Delta t_1 = 15$, $\psi_1 = 0$, $r = 0$. *в* – Зависимость амплитуды выходного сигнала от времени при добавлении управляющей цепи обратной связи с параметрами $r = 0.2$, $\psi_2 = 0$, $\Delta t_2 = 35$

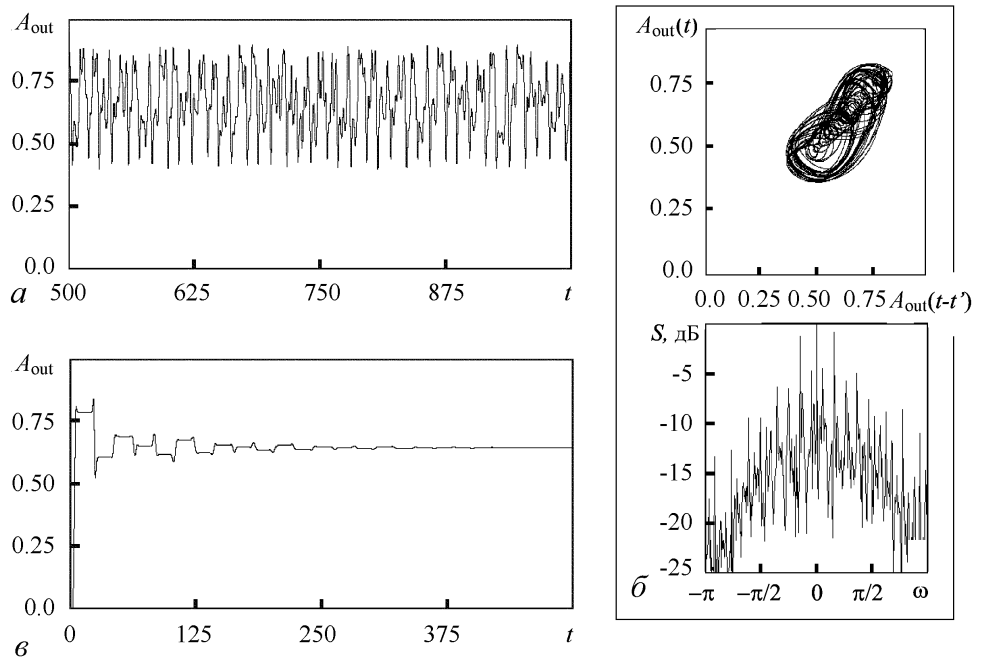


Рис. 2. *a* – Зависимость амплитуды выходного сигнала от времени; *б* – фазовый портрет и спектр в хаотическом режиме при $A_{in} = 0.9$. *в* – Зависимость амплитуды выходного сигнала от времени при добавлении управляющей цепи обратной связи с $r = 0.33$. Остальные параметры те же, что на рис. 1

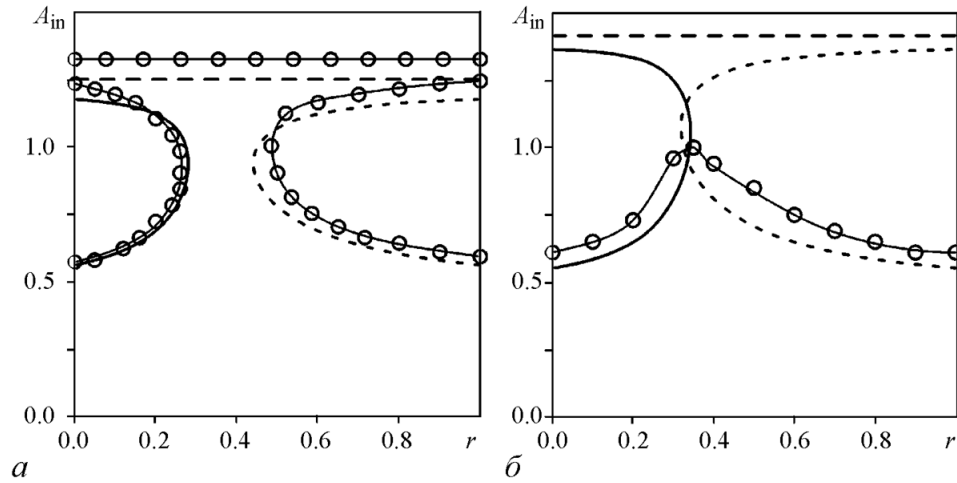


Рис. 3. Границы области устойчивости одночастотного режима на плоскости параметров r , A_{in} для пространственно-временной модели (кружки) при $\psi_{1,2} = 0$ (а) и $\psi_{1,2} = -\pi/3$ (б). Остальные параметры те же, что на рис. 1, 2. Также приведены границы бифуркаций удвоения периода (жирная сплошная линия), Неймарка–Сакера (пунктир) и касательной бифуркации (штриховая линия) для отображения (5)

Напомним, что бифуркация удвоения периода для отображения соответствует возникновению автомодуляции с периодом 2τ для пространственно-временной модели, бифуркация Неймарка–Сакера – автомодуляции с периодом, отличным от 2τ , а касательная бифуркация – жесткому переходу на другую ветвь передаточной характеристики системы [8].

Результаты достаточно хорошо согласуются между собой, хотя границы, рассчитанные для пространственно-временной модели, лежат несколько выше. В частности, в зависимости от значений фаз $\psi_{1,2}$ область устойчивости на плоскости параметров может иметь различную структуру. При $\psi_{1,2} > -0.27\pi$ на плоскости параметров имеются две изолированные области неустойчивости (рис. 3, а). В левой области период автомодуляции примерно равен 2τ , а с увеличением A_{in} переход к хаосу происходит через последовательность бифуркаций удвоения периода. В правой области период автомодуляции отличен от 2τ и меняется вдоль границы, а переход к хаосу происходит в результате разрушения квазипериодического движения. Сверху область устойчивости ограничена линией касательной бифуркации, которая представляет собой горизонтальную прямую. При $\psi_{1,2} < -0.27\pi$ граница устойчивости имеет более простой вид с единственным максимумом при $r \approx 0.33$ (рис. 3, б). Как и для отображения, существует еще одна область устойчивости, примыкающая снизу к линии касательной бифуркации, однако она расположена при несколько бóльших A_{in} и на рис. 3, б не показана. Эта область имеет вид очень узкой полосы, наибольшая ширина которой составляет $1.51 < A_{in} < 1.55$ при $r = 0.33$.

Таким образом, полученные результаты позволяют сделать вывод, что в случае слабой дисперсии динамика системы достаточно адекватно описывается упрощенной моделью в виде точечного отображения, по крайней мере, в интересующей нас области устойчивости одночастотного режима (ср. [8]).

2.2. Случай сильной дисперсии. Теперь рассмотрим случай сильной дисперсии ($\omega_0'' = 1$, параметры ω , V , β , l , ρ , Δt_1 , ψ_1 те же, что и в предыдущем случае). Эту ситуацию уже нельзя описать с помощью точечного отображения. Как показыва-

ет линейный анализ неустойчивости [8], при достаточно высокой амплитуде колебаний в резонаторе возбуждаются неустойчивые возмущения с частотами, отстоящими от частоты входного сигнала ω на величину

$$\Omega_n = \frac{\pi n}{\Delta t_1 + l/v_g}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (13)$$

где v_g – групповая скорость на соответствующей частоте. Для моды с номером $n = 1$, если заменить v_g на групповую скорость на несущей частоте V , получим частоту неустойчивости Икеды $\Omega = \pi/\tau$. Однако при сильной дисперсии v_g уже может достаточно сильно отличаться от V . Частота и волновое число связаны нелинейным дисперсионным соотношением, следующим из (1):

$$\omega = kV + \frac{\omega_0'' k^2}{2} - \beta |A_0|^2. \quad (14)$$

Здесь A_0 – амплитуда колебаний в резонаторе на основной частоте. Отсюда получаем выражение для групповой скорости, зависящей от частоты и амплитуды

$$v_g(\omega, A_0) = \frac{\partial \omega}{\partial k} = V + \omega_0'' k(\omega, A_0)$$

или, если разрешить (14) относительно k ,

$$v_g = \sqrt{V^2 + 2(\omega + \beta |A_0|^2)}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (13), получим уравнение для собственных частот

$$\Omega_n = \frac{\pi n}{\Delta t_1 + \frac{l}{\sqrt{V^2 + 2(\Omega_n + \beta |A_0|^2)}}}. \quad (16)$$

Здесь учтено, что мы рассматриваем случай, когда несущая частота полагается равной нулю, что несколько упрощает дело. Уравнение (16) можно переписать в виде кубического уравнения относительно Ω_n и решить численно.

В отличие от случая слабой дисперсии, на стадии возникновения автомодуляции в первую очередь возбуждается мода, имеющая частоту, ближайшую к частоте, на которой инкремент модуляционной неустойчивости максимален [8]. Как правило, это частота достаточно удалена от частоты Ω_1 , и частота автомодуляции оказывается заметно выше, чем при неустойчивости Икеды. Соответственно, параметры дополнительной цепи ОС надо подбирать таким образом, чтобы подавить эту частоту.

Рассмотрим подавление автомодуляции при $A_{in} \approx 0.31$, что близко к порогу ее возникновения. На рис. 4, а, б приведены зависимости амплитуды выходного сигнала от времени и спектры для системы с одной цепью ОС ($r = 0$). Видно, что автомодуляция связана с возбуждением моды с $n = 4$, имеющей частоту $\Omega_4 = 0.32\pi$. Здесь и далее собственные частоты занумерованы в соответствии с формулой (13), причем они с хорошей степенью точности удовлетворяют уравнению (16). На рис. 4, а

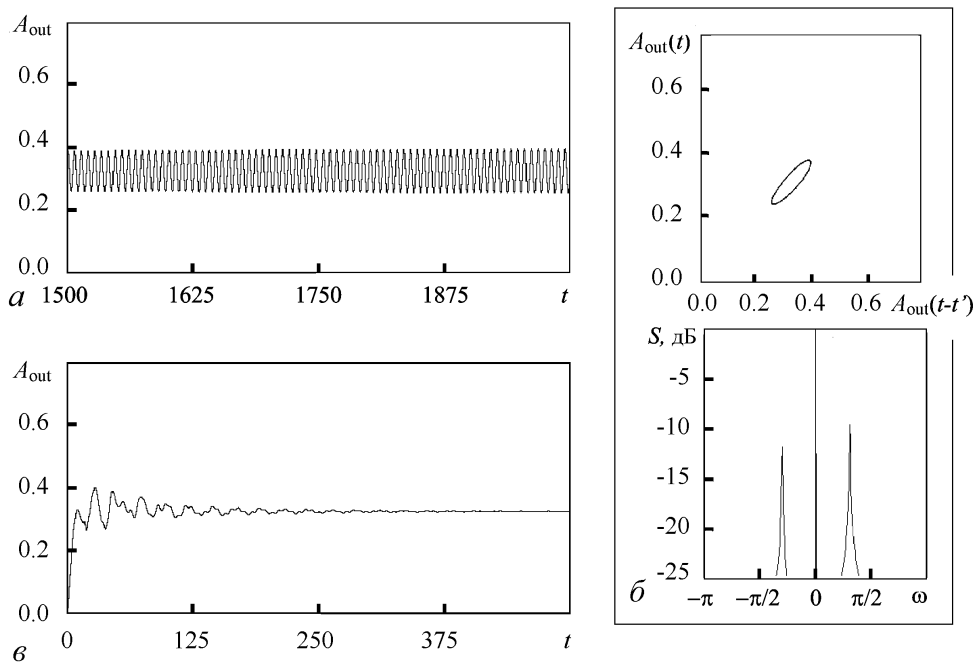


Рис. 4. *a* – Зависимость амплитуды выходного сигнала от времени; *б* – фазовый портрет и спектр в режиме автомодуляции при $A_{in} = 0.31$ в случае сильной дисперсии ($\omega_0'' = 1$). *в* – Зависимость амплитуды выходного сигнала от времени при добавлении управляющей цепи обратной связи с $r = 0.1$, $\Delta t_2 = 18.3$. Остальные параметры те же, что на рис. 1

показан участок временной реализации, соответствующий установившемуся режиму, однако следует отметить, что установлению колебаний предшествует достаточно длительный переходный процесс (порядка 1500 единиц безразмерного времени). Вначале возбуждается мода с $n = 1$, затем постепенно возбуждаются моды, все дальше отстоящие от основной частоты, среди которых доминирует мода с $n = 4$, которая в конце концов подавляет все остальные моды в процессе конкуренции и устанавливается режим периодической автомодуляции.

Определим параметры управляющей цепи ОС. Поскольку $\omega = 0$, фазу ψ_2 по-прежнему следует выбирать равной ψ_1 . Время задержки Δt_2 определим из (4), полагая $\Omega \approx 0.3\pi$, $m = 0$, что дает $\Delta t_2 \approx 18.3$. Как видно из рис. 4, *в*, при таких параметрах происходит эффективное подавление автомодуляции уже при достаточно малой глубине управляющей ОС.

Однако с ростом амплитуды воздействия ситуация усложняется. Рассмотрим случай, когда $A_{in} = 0.35$. При этом автомодуляция становится квазипериодической (рис. 5, *a, б*), что связано с возбуждением еще одной независимой спектральной составляющей, частота которой близка к собственной частоте $\Omega_1 \approx 0.09\pi$.

Применение ОС с временем задержки $\Delta t_2 \approx 18.3$ по-прежнему позволяет подавить частоту Ω_4 , однако остается составляющая на частоте Ω_1 . В результате устанавливается режим периодической автомодуляции (рис. 5, *в*). Хотя глубина модуляции значительно уменьшается по сравнению с рис. 5, *a*, добиться полного ее подавления и установления периодического режима не удастся ни при каких значениях параметра r . Чтобы преодолеть указанную трудность, следует выбрать время задержки таким образом, чтобы условие (4) выполнялось, хотя бы приближенно, для обеих собственных частот. В частности, если выбрать $\Delta t_2 = 25$, оно удовлетворяет-

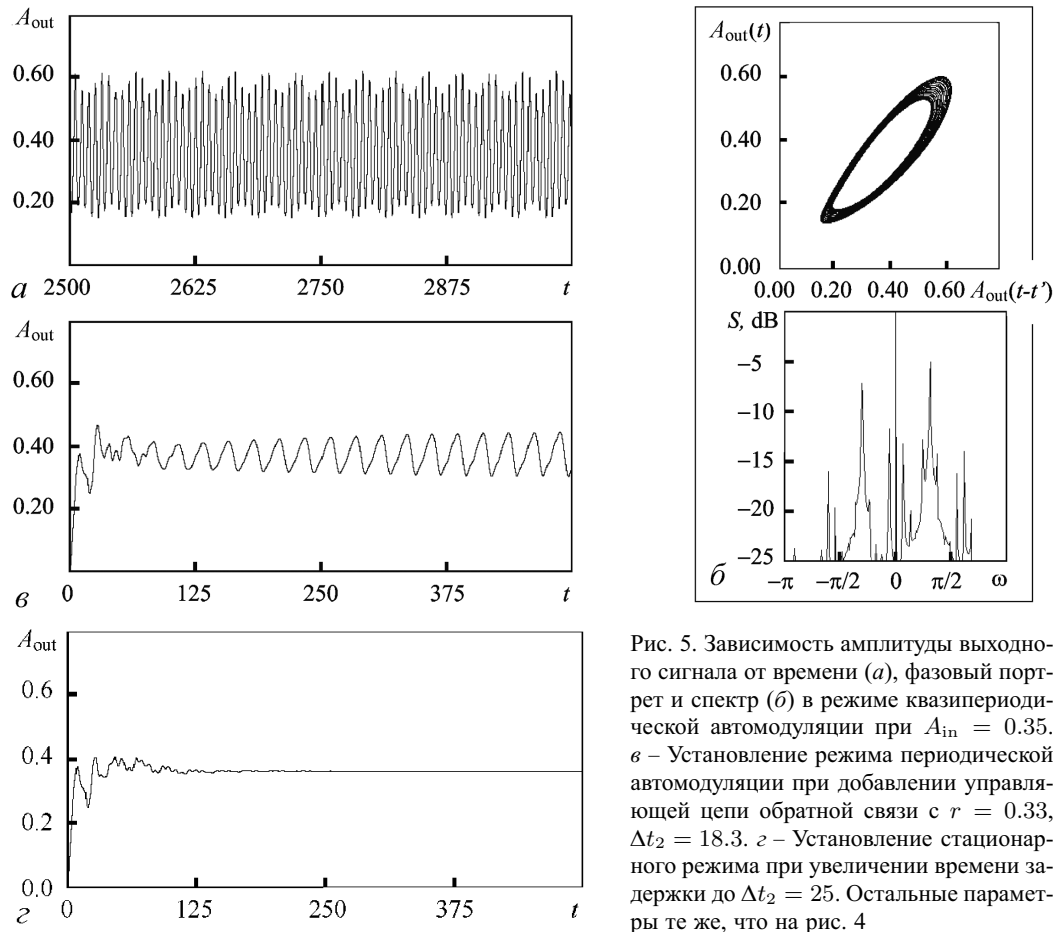


Рис. 5. Зависимость амплитуды выходного сигнала от времени (а), фазовый портрет и спектр (б) в режиме квазипериодической автомодуляции при $A_{in} = 0.35$. в – Установление режима периодической автомодуляции при добавлении управляющей цепи обратной связи с $r = 0.33$, $\Delta t_2 = 18.3$. г – Установление стационарного режима при увеличении времени задержки до $\Delta t_2 = 25$. Остальные параметры те же, что на рис. 4

ся для частоты $\Omega = 0.1\pi$ при $m = 0$ и для $\Omega = 0.3\pi$ при $m = 3$. Как показывает рис. 5, г, при этом обеспечивается полное подавление автомодуляции.

При данных значениях параметров удается стабилизировать режим одночастотных колебаний вплоть до значений $A_{in} \approx 0.47$, что соответствует хаотическим колебаниям. После этого, хотя частоты Ω_1 и Ω_4 по-прежнему подавляются, начинается возбуждение моды с $n = 3$. Добиться дальнейшего повышения порога автомодуляции можно, вновь изменив время задержки таким образом, чтобы подавить частоту $\Omega_3 \approx 0.24\pi$. В частности, численное моделирование показывает, что если увеличить время задержки до $\Delta t_2 = 30$, когда условие (4) выполняется для частоты $\Omega_3 \approx 0.2\pi$ при $m = 1$, удается подавить хаотические колебания при $A_{in} = 0.55$. Установление колебаний происходит после очень длительного переходного процесса, в ходе которого происходит медленное затухание моды с $n = 4$, что иллюстрирует рис. 6.

В целом исследования показывают, что при сильной дисперсии подавление автомодуляции представляет собой существенно более сложную задачу, чем в случае слабой дисперсии. Это обусловлено тем, что наряду с характерным временем τ циркуляции сигнала по кольцу ОС появляется еще один независимый временной масштаб, связанный с модуляционной неустойчивостью. Очевидно, что чем больше τ , то есть чем больше мод попадают в полосу модуляционной неустойчивости, тем

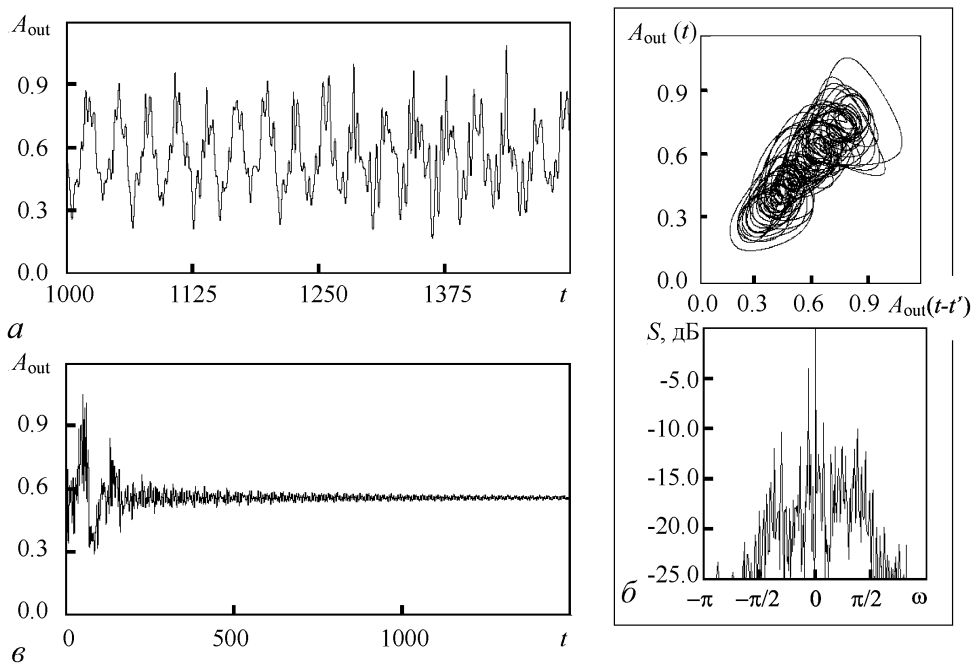


Рис. 6. Зависимость амплитуды выходного сигнала от времени (а), фазовый портрет и спектр (б) в хаотическом режиме при $A_{in} = 0.55$. в – Установление стационарного режима при добавлении управляющей цепи обратной связи с $r = 0.5$, $\Delta t_2 = 30$. Остальные параметры те же, что на рис. 4, 5

труднее обеспечить устойчивость одночастотного режима колебаний. Тем не менее подбором параметров цепи управляющей ОС удастся повысить порог автомодуляции примерно в два раза.

Заключение

В данной работе предложенная в [1] схема управления хаосом в системе Икеды исследована в рамках пространственно-временной модели, которая описывается нелинейным уравнением Шрёдингера с запаздывающим граничным условием. Результаты численного моделирования показали, что при достаточно слабой дисперсии хорошо работает приближенное описание на основе точечного отображения [1]. В случае сильной дисперсии, когда нестационарное поведение системы, в основном, обусловлено модуляционной неустойчивостью, динамика носит более сложный характер, что связано с процессами конкуренции различных собственных мод резонатора. Тем не менее и в этом случае соответствующий подбор времени задержки в управляющей цепи обратной связи позволяет стабилизировать режим одночастотных колебаний в достаточно широкой области параметров. В частности, удается подавить не только многочастотные режимы периодической и квазипериодической автомодуляции, но и хаотические колебания со сплошным спектром.

Авторы благодарны А.П. Кузнецову и С.П. Кузнецову за полезные дискуссии.

Работа выполнена при поддержке программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/1738). Работа Н.М. Рыскина поддержана также фондом некоммерческих программ «Династия».

Библиографический список

1. Рыскин Н.М., Хаврошин О.С. Управление хаосом в системе Икеды. Упрощенная модель в виде точечного отображения // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 2. С. 66.
2. Ikeda K., Daido H., Akimoto O. Optical turbulence: chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45, № 9. P. 709.
3. Измайлов И.В., Лячин А.В., Пойзнер Б.Н. Детерминированный хаос в моделях кольцевого нелинейного интерферометра. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007.
4. Розанов Н.Н. Оптическая бистабильность и гистерезис в распределенных нелинейных системах. М.: Наука, Физматлит, 1997.
5. Dodd R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Morris H.S. Solitons and Nonlinear Wave Equations, Academic Press, London, 1984.
6. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны. М.: Наука, Физматлит, 2000.
7. Островский Л.А., Потапов А.И. Введение в теорию модулированных волн. М.: Физматлит, 2003.
8. Балякин А.А., Рыскин Н.М., Хаврошин О.С. Нелинейная динамика модуляционной неустойчивости в распределенных резонаторах под внешним гармоническим воздействием // Изв. вузов. Радиофизика. 2007. Т. 50, № 9. С. 800.
9. Балякин А.А., Рыскин Н.М. Смена характера модуляционной неустойчивости вблизи критической частоты // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30, № 5. С. 6.
10. Balyakin A.A., Ryskin N.M. Modulation instability in a nonlinear dispersive medium near cut-off frequency // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2004. Vol. 7, № 1. P. 34.
11. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, Физматлит, 1989.

Поступила в редакцию 4.09.2008

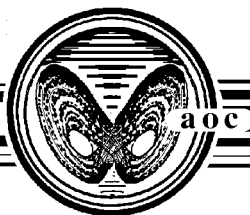
CONTROLLING CHAOS IN IKEDA SYSTEM

Spatio-temporal model

N.M. Ryskin, O.S. Khavroshin

The method for controlling chaos in a ring resonator filled with a medium with cubic phase nonlinearity (Ikeda system), suggested in [1], is investigated within the framework of a distributed spatio-temporal model described by a Nonlinear Schrödinger Equation with time-delayed boundary condition. Numerical results are presented which confirm the capability of the suggested method. For the case of weakly dispersive nonlinear medium, the results are in good agreement with the approximate theory based on the return map [1]. In the case of strong dispersion, when the non-stationary behavior is determined mainly by the modulation instability, the dynamics is more complicated due to competition of different resonator eigenmodes. It is demonstrated, that proper adjustment of the control feedback parameters allows suppressing self-modulation oscillations and provides stable single-frequency operation in a broad range of parameters.

Keywords: Controlling chaos, nonlinear ring-loop resonator, delayed feedback, Nonlinear Schrödinger equation, modulation instability.



ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ ХАОС В НЕЛИНЕЙНО СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРАХ ЛАНДАУ–СТЮАРТА С МЕДЛЕННОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ ПАРАМЕТРОВ

Л.В. Тюрюкина, А.С. Пиковский

Рассмотрена хаотическая динамика системы, состоящей из четырех нелинейно связанных идентичных осцилляторов типа Ландау–Стюарта. Осцилляторы возбуждаются поочередно парами, в силу периодического изменения параметра, ответственного за бифуркацию рождения предельного цикла. Показано, что в зависимости от выбора вида связи между осцилляторами в сечении Пуанкаре для разности фаз парных осцилляторов получаются разные варианты отображения типа отображения Бернулли. Исследовано несколько примеров системы с разными видами связи, отвечающих «минимальному» и «максимальному» хаосу.

Ключевые слова: Связанные осцилляторы, гиперболический аттрактор, хаотическая динамика.

Введение

Одним из перспективных направлений в нелинейной динамике является исследование вопроса о возможности реализации гиперболических хаотических аттракторов, примером которых служат такие математические конструкции, как аттрактор Плыкина, соленоид Смейла–Вильямса и др. [1–5], в физических системах. В последние годы появился ряд работ, в которых приводятся примеры систем, допускающих физическую реализацию, у которых в сечении Пуанкаре имеет место гиперболический аттрактор указанного выше типа. Так, в работах [6, 7] была предложена система, состоящая из двух связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля, в которых при отношении рабочих частот 1:2 осуществляется попеременная генерация подсистем благодаря принудительной относительно медленной вариации параметра, ответственного за бифуркацию рождения предельного цикла, а возбуждение по очереди передается от одного осциллятора к другому. Для этой системы была выполнена компьютерная проверка известных из математической литературы достаточных условий наличия гиперболического аттрактора [8, 9]. Было показано, что в 4-мерном фазовом пространстве отображения Пуанкаре, описывающего изменение состояния системы за период воздействия, наблюдается хаотический гиперболический аттрактор типа соленоида Смейла–Вильямса, а фаза колебаний одного из осцилляторов, определенная на последовательных стадиях возбуждения осциллятора, подчиняется отображению Бернулли.

Другие варианты подобных систем на основе автономных и неавтономных осцилляторов обсуждаются в работах [10–15]. Общий принцип, положенный в основу функционирования этих систем, состоит в манипуляции фазами колебаний при передаче возбуждения между парциальными осцилляторами, которые становятся активными попеременно, с тем чтобы трансформация фаз отвечала итерациям отображения с хаотической динамикой. Такого рода системы могут быть реализованы на практике в различных областях физики, например в электронике, лазерной физике, механике, акустике, нелинейной оптике и т.д. В настоящей работе рассматривается еще один пример системы, сконструированной на основе указанного выше принципа, состоящей из четырех идентичных осцилляторов типа Ландау–Стюарта, описываемых в терминах комплексных амплитуд. Генерация осцилляторов происходит попеременно, но парами, при этом возбуждение передается от одной пары осцилляторов к другой по определенному правилу. Связь между осцилляторами осуществляется резонансным образом: из сигналов «активной» пары формируются сигналы на частоте колебаний, которые воздействуют на «пассивную» пару во время перехода последней через бифуркацию рождения предельного цикла и навязывают ей соответствующие фазы. Как следствие, отображение типа отображения Бернулли получается не для фазы колебаний какого-либо осциллятора, а для разности фаз парных осцилляторов. Кроме того, как показано в работе, в зависимости от выбора правила, по которому передается возбуждение от одной пары осцилляторов к другой, будут получаться разные отображения.

1. Исходная система: вывод отображения для разности фаз

Рассмотрим следующую систему, состоящую из четырех связанных осцилляторов Ландау–Стюарта с периодической модуляцией управляющего параметра, ответственного за бифуркацию рождения предельного цикла, описываемых в терминах комплексных амплитуд:

$$\frac{da_1}{dt} = a_1(\gamma_0 + \gamma_1 \cos(\Omega t) - |a_1|^2) + \varepsilon a_3^\alpha (a_4)^{1-\alpha}, \quad (1)$$

$$\frac{da_2}{dt} = a_2(\gamma_0 + \gamma_1 \cos(\Omega t) - |a_2|^2) + \varepsilon a_3^\beta (a_4)^{1-\beta}, \quad (2)$$

$$\frac{da_3}{dt} = a_3(\gamma_0 - \gamma_1 \cos(\Omega t) - |a_3|^2) + \varepsilon a_1^\chi (a_2)^{1-\chi}, \quad (3)$$

$$\frac{da_4}{dt} = a_4(\gamma_0 - \gamma_1 \cos(\Omega t) - |a_4|^2) + \varepsilon a_1^\delta (a_2)^{1-\delta}. \quad (4)$$

Здесь a_1 , a_2 , a_3 и a_4 – комплексные медленно меняющиеся амплитуды осцилляторов (для обозначения комплексно-сопряженной амплитуды осцилляторов далее используется символ «*»); γ_0 – управляющий параметр, ответственный за бифуркацию Андронова–Хопфа; γ_1 и Ω – соответственно амплитуда и частота периодической модуляции управляющего параметра; ε – параметр связи, принятый для простоты изложения одинаковым для всех осцилляторов. Параметры α , β , χ , δ представляют собой целые числа, описывающие нелинейную связь между осцилляторами. При этом мы

ввели обозначение

$$a^\alpha = \begin{cases} a^\alpha, & \alpha > 0, \\ (a^*)^\alpha, & \alpha < 0. \end{cases} \quad (5)$$

В результате, как нетрудно видеть, общая «степень» силы, действующей на каждый осциллятор, равна единице, что соответствует приложению резонансной силы на частоте колебаний.

Наша цель – получить преобразования фаз колебаний, которые есть не что иное, как аргументы комплексных амплитуд a_k . Рассмотрим динамику системы (1)–(4), следуя методологии, развитой в работе [6]. Периодическая модуляция управляющего параметра приводит к тому, что осцилляторы попарно проходят через активную и пассивную стадии. А именно, на первом полупериоде модуляции амплитуды первого и второго осцилляторов велики (считаем, что осцилляторы находятся в активной стадии – генерируют колебания), а амплитуды третьего и четвертого осцилляторов малы (осцилляторы находятся в пассивной стадии – не генерируют колебания). На втором полупериоде осцилляторы меняются местами. Тогда каждые полпериода происходит передача фаз от одной пары осцилляторов к другой. Пусть на первом полупериоде модуляции управляющего параметра (период модуляции параметра $T = 2\pi/\Omega$) активны первый и второй осцилляторы. Для них можно записать $\varphi_1 = \arg(a_1)$ и $\varphi_2 = \arg(a_2)$. Через полпериода начинают генерировать третий и четвертый осцилляторы, получая в качестве «затравки» сигналы от первого и второго осцилляторов вида $a_1^\chi(a_2)^{1-\chi}$ и $a_1^\delta(a_2)^{1-\delta}$. В соответствии с правилом (5), фазы этих сигналов есть $\chi\varphi_1 + (1-\chi)\varphi_2$ и $\delta\varphi_1 + (1-\delta)\varphi_2$. Эти фазы передаются осцилляторам (3), (4), для фаз которых получаем

$$\begin{pmatrix} \varphi'_3 \\ \varphi'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi & 1-\chi \\ \delta & 1-\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Еще через полпериода начнут генерировать первый и второй осцилляторы, получив в качестве «затравки» сигналы от третьего и четвертого, $a_3^\alpha(a_4)^{1-\alpha}$ и $a_3^\beta(a_4)^{1-\beta}$. Если фазы третьего и четвертого осцилляторов на момент передачи сигнала были φ_3 и φ_4 , то для фаз первого и второго осцилляторов будет верно

$$\begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

В итоге, через период модуляции, для фаз первого и второго осцилляторов получим

$$\begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi & 1-\chi \\ \delta & 1-\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Здесь φ'_1 и φ'_2 – фазы первого и второго осцилляторов в момент времени $t = (n+1)T$, а φ_1 и φ_2 – в момент времени $t = nT$. Выражение (7) можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 1 - \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi & 1 - \chi \\ \delta & 1 - \delta \end{pmatrix} \quad (10)$$

– матрица 2×2 . Эта матрица имеет два собственных числа μ , которые можно найти, используя выражение

$$\mu_{1,2} = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\frac{S^2}{4} - J}, \quad (11)$$

где S и J – след и якобиан матрицы M , соответственно. Тогда легко показать, что одно из собственных чисел матрицы M будет равно единице, а второе, определяющее «степень» хаотизации системы, будет определяться по формуле

Таблица

Значения собственного числа μ
и отвечающие ему наборы коэффициентов $\alpha, \beta, \chi, \delta$

μ	Коэффициенты $\alpha, \beta, \chi, \delta$							
1	-2 -1 -2 -1;	-2 -1 -1 0;	-2 -1 0 1;	-2 -1 1 2;	-1 -2 -1 -2;	-1 -2 0 -1;	-1 -2 1 0;	
	-1 -2 2 1;	-1 0 -2 -1;	-1 0 -1 0;	-1 0 0 1;	-1 0 1 2;	0 -1 -1 -2;	0 -1 0 -1;	
	0 -1 1 0;	0 -1 2 1;	0 1 -2 -1;	0 1 -1 0;	0 1 0 1;	0 1 1 2;	1 0 -1 -2;	
	1 0 0 -1;	1 0 1 0;	1 0 2 1;	1 2 -2 -1;	1 2 -1 0;	1 2 0 1;	1 2 1 2;	
	2 1 -1 -2;	2 1 0 -1;	2 1 1 0;	2 1 2 1				
2	-2 -1 -2 0;	-2 -1 -1 1;	-2 -1 0 2;	-2 0 -2 -1;	-2 0 -1 0;	-2 0 0 1;	-2 0 1 2;	
	-1 -2 0 -2;	-1 -2 1 -1;	-1 -2 2 0;	-1 0 -2 0;	-1 0 -1 1;	-1 0 0 2;	-1 1 -2 -1;	
	-1 1 -1 0;	-1 1 0 1;	-1 1 1 2;	0 -2 -1 -2;	0 -2 0 -1;	0 -2 1 0;	0 -2 2 1;	
	0 -1 0 -2;	0 -1 1 -1;	0 -1 2 0;	0 1 -2 0;	0 1 -1 1;	0 1 0 2;	0 2 -2 -1;	
	0 2 -1 0;	0 2 0 1;	0 2 1 2;	1 -1 -1 -2;	1 -1 0 -1;	1 -1 1 0;	1 -1 2 1;	
	1 0 0 -2;	1 0 1 -1;	1 0 2 0;	1 2 -2 0;	1 2 -1 1;	1 2 0 2;	2 0 -1 -2;	
	2 0 0 -1;	2 0 1 0;	2 0 2 1;	2 1 0 -2;	2 1 1 -1;	2 1 2 0		
3	-2 -1 -2 1;	-2 -1 -1 2;	-2 1 -2 -1;	-2 1 -1 0;	-2 1 0 1;	-2 1 1 2;	-1 -2 1 -2;	
	-1 -2 2 -1;	-1 0 -2 1;	-1 0 -1 2;	-1 2 -2 -1;	-1 2 -1 0;	-1 2 0 1;	-1 2 1 2;	
	0 -1 1 -2;	0 -1 2 -1;	0 1 -2 1;	0 1 -1 2;	1 -2 -1 -2;	1 -2 0 -1;	1 -2 1 0;	
	1 -2 2 1;	1 0 1 -2;	1 0 2 -1;	1 2 -2 1;	1 2 -1 2;	2 -1 -1 -2;	2 -1 0 -1;	
	2 -1 1 0;	2 -1 2 1;	2 1 1 -2;	2 1 2 -1				
4	-2 -1 -2 2;	-2 0 -2 0;	-2 0 -1 1;	-2 0 0 2;	-2 2 -2 -1;	-2 2 -1 0;	-2 2 0 1;	
	-2 2 1 2;	-1 -2 2 -2;	-1 0 -2 2;	-1 1 -2 0;	-1 1 -1 1;	-1 1 0 2;	0 -2 0 -2;	
	0 -2 1 -1;	0 -2 2 0;	0 -1 2 -2;	0 1 -2 2;	0 2 -2 0;	0 2 -1 1;	0 2 0 2;	
	1 -1 0 -2;	1 -1 1 -1;	1 -1 2 0;	1 0 2 -2;	1 2 -2 2;	2 -2 -1 -2;	2 -2 0 -1;	
	2 -2 1 0;	2 -2 2 1;	2 0 0 -2;	2 0 1 -1;	2 0 2 0			
6	-2 0 -2 1;	-2 0 -1 2;	-2 1 -2 0;	-2 1 -1 1;	-2 1 0 2;	-1 1 -2 1;	-1 1 -1 2;	
	-1 2 -2 0;	-1 2 -1 1;	-1 2 0 2;	0 -2 1 -2;	0 -2 2 -1;	0 2 -2 1;	0 2 -1 2;	
	1 -2 0 -2;	1 -2 1 -1;	1 -2 2 0;	1 -1 1 -2;	1 -1 2 -1;	2 -1 0 -2;	2 -1 1 -1;	
	2 -1 2 0;	2 0 1 -2;	2 0 2 -1					
8	-2 0 -2 2;	-2 2 -2 0;	-2 2 -1 1;	-2 2 0 2;	-1 1 -2 2;	0 -2 2 -2;	0 2 -2 2;	
	1 -1 2 -2;	2 -2 0 -2;	2 -2 1 -1;	2 -2 2 0;	2 0 2 -2			
9	-2 1 -2 1;	-2 1 -1 2;	-1 2 -2 1;	-1 2 -1 2;	1 -2 1 -2;	1 -2 2 -1;	2 -1 1 -2;	
	2 -1 2 -1							

$$\mu = (\alpha - \beta)(\chi - \delta). \quad (12)$$

Если теперь отображения (8) переписать так, чтобы в явном виде выразить зависимость φ'_1 и φ'_2 от φ_1 и φ_2 , то легко показать, что для разности фаз первого и второго осцилляторов через период модуляции будет выполняться отображение

$$(\varphi'_1 - \varphi'_2) = \mu(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (13)$$

Аналогично можно получить и отображение для разности фаз третьего и четвертого осцилляторов через период модуляции управляющего параметра

$$(\varphi'_3 - \varphi'_4) = \mu(\varphi_3 - \varphi_4). \quad (14)$$

Отметим, что формулы (13) и (14) представляют собой отображения типа отображения Бернулли и будут с ним совпадать в случае $\mu=2$.

Очевидно, что в зависимости от выбора коэффициентов α , β , χ и δ отличное от единицы собственное число μ матрицы M , заданное формулой (12), будет принимать различные целые значения. Причем, если коэффициенты изменяются в диапазоне от $-m$ до m , то число μ будет лежать в диапазоне от $-(2m)^2$ до $(2m)^2$. При этом каждому набору коэффициентов будет отвечать свой вариант системы (1)–(4). В таблице приведены наборы коэффициентов α , β , χ и δ для некоторых (положительных) значений числа μ . Вычисления проводились по формуле (12), а коэффициенты менялись в диапазоне от -2 до 2 . Из таблицы видно, что наибольшее число наборов коэффициентов получается для случая $\mu = 2$, а для некоторых значений μ , например 5 и 7, таких наборов нет вообще.

В следующем разделе мы приведем несколько вариантов системы (1)–(4), отвечающих соответственно небольшому ($\mu=2$) и достаточно большому ($\mu=9$) значениям собственного числа матрицы M . В первом случае будем говорить, что рассматривается система с «минимальным» хаосом, в во втором – с «максимальным».

2. Примеры системы, демонстрирующей «минимальный» и «максимальный» хаос

Теперь приведем несколько примеров системы (1)–(4), в которых выбраны определенные комбинации коэффициентов α , β , χ и δ (выделены жирным в таблице). Начнем со случая «минимального» хаоса, когда собственное число матрицы M равно двум. Одна из подходящих комбинаций будет $\alpha = -1$, $\beta=1$, $\chi=0$ и $\delta=1$. В этом случае система (1)–(4) примет вид

$$\frac{da_1}{dt} = a_1(\gamma_0 + \gamma_1 \cos(\Omega t) - |a_1|^2) + \varepsilon a_4^2 a_3^*, \quad (15)$$

$$\frac{da_2}{dt} = a_2(\gamma_0 + \gamma_1 \cos(\Omega t) - |a_2|^2) + \varepsilon a_3, \quad (16)$$

$$\frac{da_3}{dt} = a_3(\gamma_0 - \gamma_1 \cos(\Omega t) - |a_3|^2) + \varepsilon a_2, \quad (17)$$

$$\frac{da_4}{dt} = a_4(\gamma_0 - \gamma_1 \cos(\Omega t) - |a_4|^2) + \varepsilon a_1. \quad (18)$$

Отображения для разности фаз парных осцилляторов, определенных в моменты времени $(n + 1)T$ и nT , согласно формулам (13) и (14), будут иметь вид

$$(\varphi'_1 - \varphi'_2) = 2(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (19)$$

$$(\varphi'_3 - \varphi'_4) = 2(\varphi_3 - \varphi_4). \quad (20)$$

Исследуем систему (15)–(18) более подробно. На рис. 1 представлены зависимости от времени величин a_{12} и a_{34} , вычисленных по формулам

$$a_{12} = |a_1| + |a_2|, \quad (21)$$

$$a_{34} = |a_3| + |a_4|, \quad (22)$$

и представляющих собой суммы амплитуд парных осцилляторов, для системы (15)–(18). Из рисунка видно, что осцилляторы действительно генерируют хаотические колебания попеременно: минимум величины a_{12} отвечает максимуму a_{34} и наоборот. На рис. 2 представлены зависимости от времени фаз φ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) осцилляторов, образующих систему (15)–(18), и численно построенное отображение

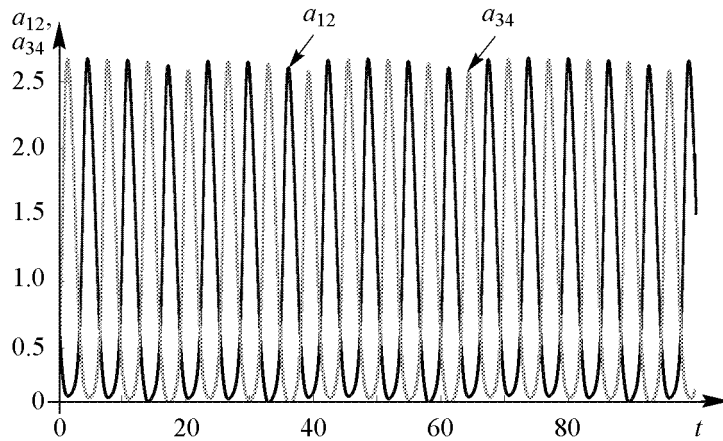


Рис. 1. Зависимости суммы амплитуд первого и второго a_{12} (черный цвет) и третьего и четвертого a_{34} (серый цвет) осцилляторов от времени для системы (15)–(18). Зависимости построены для $\gamma_0 = 0.2$, $\gamma_1 = 2$, $\Omega = 1$ и $\varepsilon = 0.05$

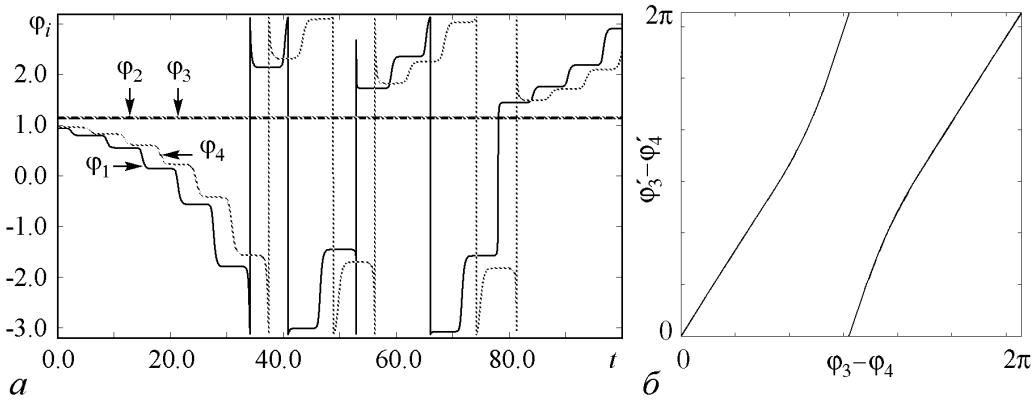


Рис. 2. Зависимости фаз φ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) осцилляторов от времени, полученные при численном решении системы (15)–(18) (а) и численно построенное отображение для разности фаз третьего и четвертого осцилляторов, определенных в моменты времени $t_n = nT$ (б). Иллюстрации построены для $\gamma_0 = 0.2$, $\gamma_1 = 2$, $\Omega = 1$ и $\varepsilon = 0.05$. Скачки фаз на рис. а носят фиктивный характер и связаны со способом определения фаз ($0 \leq \varphi_i \leq 2\pi$)

для разности фаз третьего и четвертого осцилляторов. Фазы определялись в сечении Пуанкаре, заданном условием $t_n = nT$, и вычислялись по следующей формуле:

$$\varphi_i = \begin{cases} \arctan\left(\frac{-y_i}{x_i}\right), & x_i > 0, \\ \arctan\left(\frac{-y_i}{x_i}\right) + \pi, & x_i < 0, \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (23)$$

Здесь x_i и y_i – действительная и мнимая части комплексной амплитуды a_i , соответственно. Из рисунка видно, что фазы первого и четвертого осцилляторов также меняются во времени довольно сложным образом, а вот фазы второго и третьего осцилляторов принимают постоянное значение равное $\varphi_2 = \varphi_3 = 1.1565\dots$ (рис. 2, а). При этом, однако, отображение для разности фаз третьего и четвертого осцилляторов (рис. 2, б) качественно эквивалентно отображению Бернулли и совпадает с формулой (19). Отметим, что, если бы мы численно построили отображение для разности фаз первого и второго осцилляторов, то оно было бы аналогично рис. 2, б. И, наконец, на рис. 3 представлен аттрактор четвертого осциллятора и его увеличенный фрагмент. На увеличенном фрагменте хорошо видно, что аттрактор имеет канторово-подобную структуру, характерную для гиперболических аттракторов, описываемых отображением Бернулли. Отметим, что аттрактор, так же как и отображение для разности фаз, строится в сечении Пуанкаре, заданном условием $t_n = nT$.

Описанная выше динамика фаз второго и третьего осцилляторов позволяет переписать систему (15)–(18), оставив лишь два уравнения – для первого и четвертого осцилляторов

$$\frac{da_1}{dt} = a_1(\gamma_0 + \gamma_1 \cos(\Omega t) - |a_1|^2) + \varepsilon a_4^2 a_3^*, \quad (24)$$

$$\frac{da_4}{dt} = a_4(\gamma_0 - \gamma_1 \cos(\Omega t) - |a_4|^2) + \varepsilon a_1. \quad (25)$$

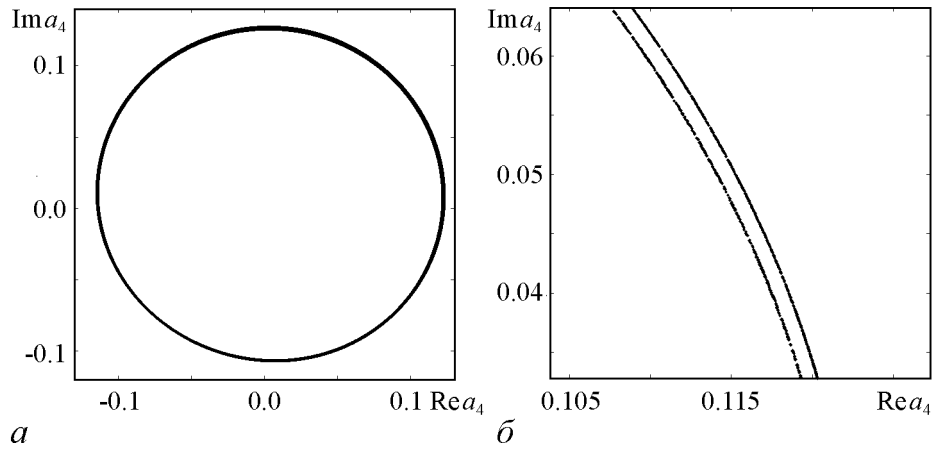


Рис. 3. Аттрактор четвертого осциллятора системы (15–18) (а) и его увеличенный фрагмент (б). Координаты осциллятора определялись в моменты времени $t_n = nT$. Аттрактор построен для $\gamma_0 = 0.2$, $\gamma_1 = 2$, $\Omega = 1$ и $\varepsilon = 0.05$

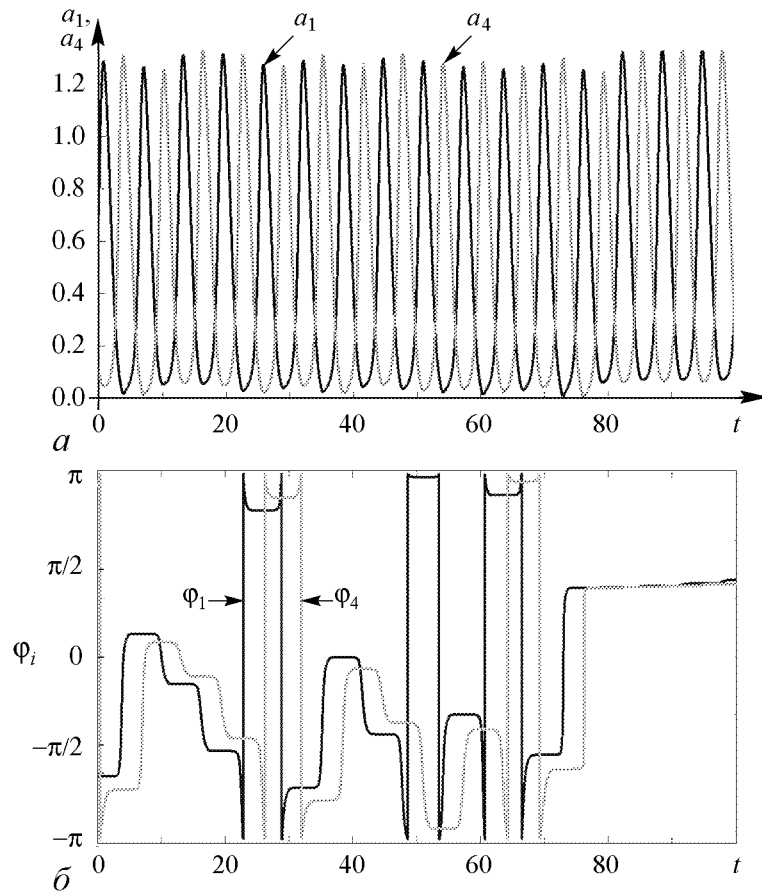


Рис. 4. Зависимости амплитуд (а) и фаз (б) осцилляторов (24), (25) от времени. Зависимости построены для $\gamma_0 = 0.2$, $\gamma_1 = 2$, $\Omega = 1$, $\varepsilon = 0.05$. Используются следующие обозначения: черным цветом обозначены характеристики осциллятора (24), а серым – осциллятора (25). Скачки фаз на рис. б носят фиктивный характер и связаны со способом определения фазы

При этом переменную a_3 положим равной некоторой комплексной константе, такой чтобы $|a_3| = 1$. Пусть, например, $a_3 = \cos \varphi + i \sin \varphi$, где $\varphi = \varphi_2 = \varphi_3 = 1.1565$. Отметим, что система (24), (25) весьма близка модели, рассмотренной в работе [6]. Однако в нашем случае осцилляторы имеют одну и ту же собственную частоту и разные коэффициенты связи. На рис. 4 представлены зависимости амплитуд и фаз осцилляторов от времени, а на рис. 5 – численно построенное отображение для фазы, вычисленной в моменты времени $t_n = nT$, и аттрактор осциллятора, заданного уравнением (25). (Заметим, что отображение для фазы и аттрактор осциллятора (24) будут качественно эквивалентны рис. 5.) Все иллюстрации построены для тех же значений параметров, что и в предыдущем случае. Отметим, что иллюстрации системы (15)–(18) и системы (24), (25) демонстрируют хорошее соответствие (сравним рис. 4 с рис. 1 и рис. 2, *a* и рис. 5 с рис. 2, *b* и рис. 3), что позволяет сделать вывод, что система (24), (25) может служить адекватной аппроксимацией системы (15)–(18). Однако следует отметить, что численно построенное отображение для фазы осциллятора (24) слегка отличается от отображения для разности фаз осцилляторов (17) и (18): оно совпадает с отображением Бернулли с точностью до сдвига на постоянную величину (рис. 5, *a*). Это обусловлено комплексностью коэффициента взаимодействия ϵa_3^* в (24). Кроме того, аттрактор осциллятора (18) демонстрирует более сильное сжатие в поперечном направлении (сравним рис. 3, *a* и рис. 5, *b*); это, по-видимому, связано с заменой зависящей от времени переменной a_3^* на постоянную.

Если вернуться к вопросу о своеобразном поведении фаз осцилляторов (16), (17) (см. рис. 2, *a*), то, по-видимому, оно определено видом связи между осцилляторами, то есть тем, какие значения принимают коэффициенты α , β , χ и δ . Так, например, если мы выберем другой набор коэффициентов, то качественно динамика рассматриваемой модели не изменится: осцилляторы будут генерировать хаотические колебания попеременно; отображение для разности фаз парных осцилляторов будет представлять отображение Бернулли, описываемое формулами (19) и (20) и т.д. А вот индивидуальное поведение фаз осцилляторов изменится. На рис. 6 приведены

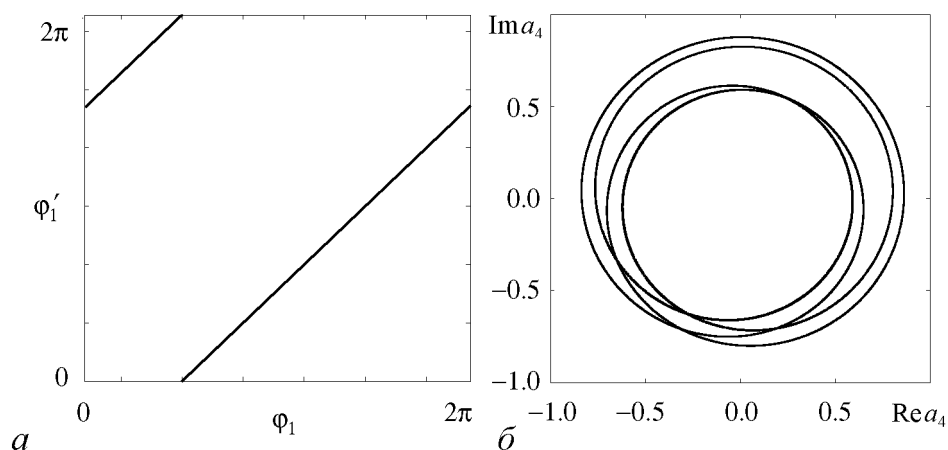


Рис. 5. Численно построенное отображение для фазы осциллятора (25), определенной в моменты времени $t_n = nT$ (*a*) и аттрактор того же осциллятора (*b*). Иллюстрации построены для $\gamma_0 = 0.2$, $\gamma_1 = 2$, $\Omega = 1$ и $\epsilon = 0.05$

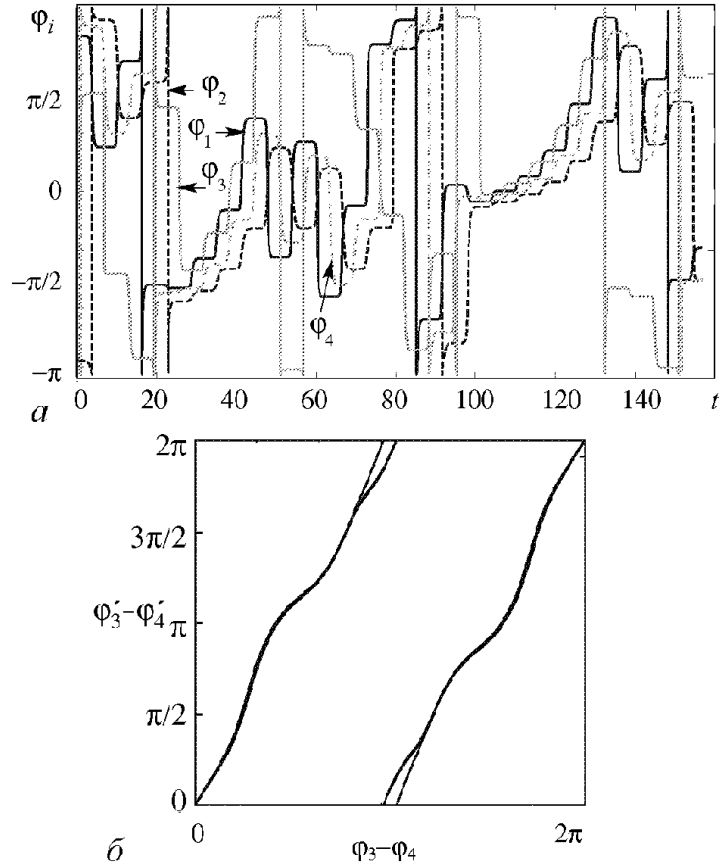


Рис. 6. Зависимости фаз φ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) осцилляторов от времени, полученные при численном решении системы (26)–(29) (а) и численно построенное отображение для разности фаз третьего и четвертого осцилляторов, определенных в моменты времени $t_n = nT$ (б). Иллюстрации построены для $\gamma_0 = 0.2$, $\gamma_1 = 2$, $\Omega = 1$ и $\varepsilon = 0.05$. На рис. а используются следующие обозначения: черный сплошной график отвечает зависимости φ_1 от времени, черный пунктирный – φ_2 , серый сплошной – φ_3 , серый пунктирный – φ_4 . Скачки фаз на рис. б носят фиктивный характер и связаны со способом определения фаз ($0 \leq \varphi_i \leq 2\pi$)

соответствующие зависимости фаз осцилляторов от времени и численно построенное отображение для разности фаз третьего и четвертого осцилляторов для $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $\chi = 2$ и $\delta = 1$. В этом случае система (1)–(4) примет вид

$$\frac{da_1}{dt} = a_1(\gamma_0 + \gamma_1 \cos(\Omega t) - |a_1|^2) + \varepsilon a_3^2 a_4^*, \quad (26)$$

$$\frac{da_2}{dt} = a_2(\gamma_0 + \gamma_1 \cos(\Omega t) - |a_2|^2) + \varepsilon a_4, \quad (27)$$

$$\frac{da_3}{dt} = a_3(\gamma_0 - \gamma_1 \cos(\Omega t) - |a_3|^2) + \varepsilon a_1^2 a_2^*, \quad (28)$$

$$\frac{da_4}{dt} = a_4(\gamma_0 - \gamma_1 \cos(\Omega t) - |a_4|^2) + \varepsilon a_1. \quad (29)$$

Сопоставив рис. 6 с рис. 2, мы видим, что теперь фазы всех четырех осцилляторов изменяются во времени. Кроме того, несмотря на то, что в обоих примерах

численно полученное отображение для разности фаз парных осцилляторов описывается формулой (20) и представляет собой отображение Бернулли, во втором случае вид отображения существенно отличается от прямой линии и демонстрирует небольшое расщепление (рис. 6, б). В первом случае это не наблюдалось.

Теперь рассмотрим случай «максимального» хаоса ($\mu=9$). Одна из подходящих комбинаций коэффициентов будет $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\chi = 2$ и $\delta = -1$. В этом случае система (1)–(4) примет вид

$$\frac{da_1}{dt} = a_1(\gamma_0 + \gamma_1 \cos(\Omega t) - |a_1|^2) + \varepsilon a_3^2 a_4^*, \quad (30)$$

$$\frac{da_2}{dt} = a_2(\gamma_0 + \gamma_1 \cos(\Omega t) - |a_2|^2) + \varepsilon a_4^2 a_3^*, \quad (31)$$

$$\frac{da_3}{dt} = a_3(\gamma_0 - \gamma_1 \cos(\Omega t) - |a_3|^2) + \varepsilon a_1^2 a_2^*, \quad (32)$$

$$\frac{da_4}{dt} = a_4(\gamma_0 - \gamma_1 \cos(\Omega t) - |a_4|^2) + \varepsilon a_2^2 a_1^*. \quad (33)$$

Отображение для разности фаз парных осцилляторов, согласно приведенным в первом разделе выкладкам, будут

$$(\varphi'_1 - \varphi'_2) = 9(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (34)$$

$$(\varphi'_3 - \varphi'_4) = 9(\varphi_3 - \varphi_4). \quad (35)$$

На рис. 7 и рис. 8 соответственно приведены зависимости величин a_{12} и a_{34} , вычисленных по формулам (21), (22), и фаз φ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) осцилляторов (30)–(33) от времени, а также численно построенное отображение для разности фаз третьего

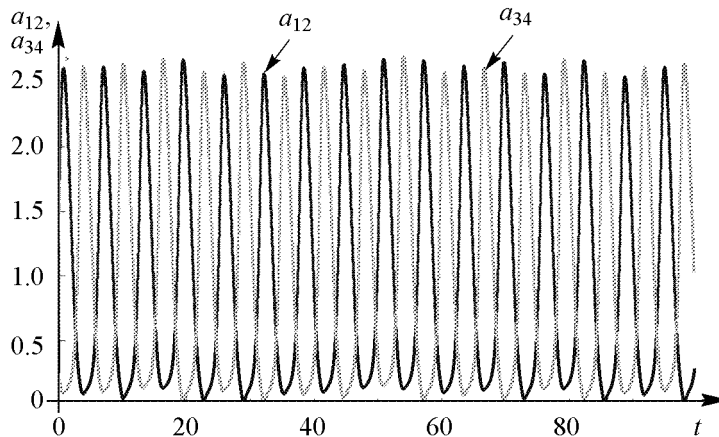


Рис. 7. Зависимости суммы амплитуд первого и второго a_{12} (черный цвет) и третьего и четвертого a_{34} (серый цвет) осцилляторов от времени для системы (30)–(33). Зависимости построены для $\gamma_0 = 0.2$, $\gamma_1 = 2$, $\Omega = 1$ и $\varepsilon = 0.05$

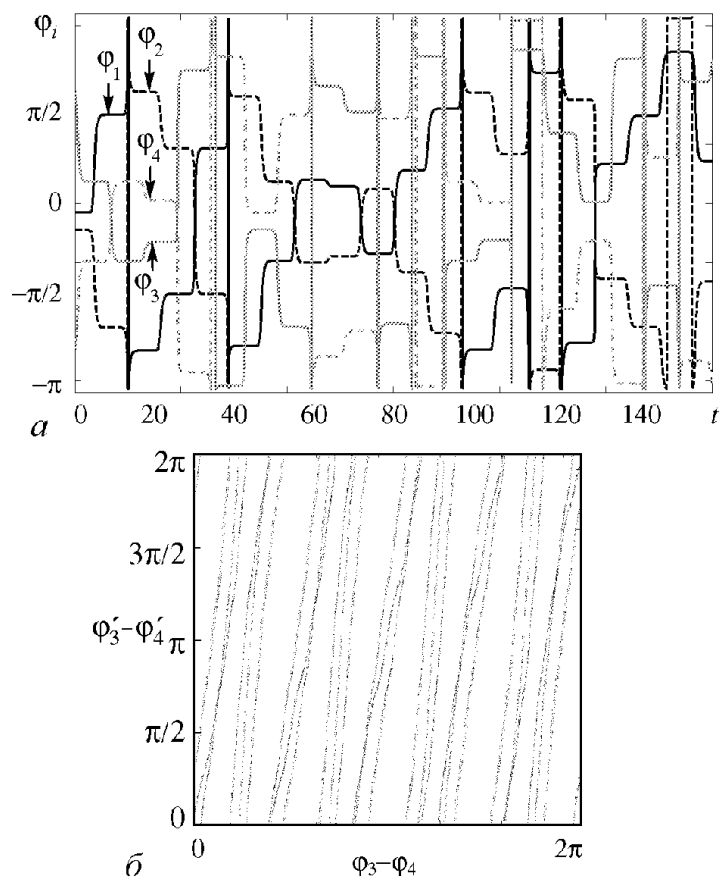


Рис. 8. Зависимости фаз φ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) осцилляторов от времени, полученные при численном решении системы (30)–(33) (а) и численно построенное отображение для разности фаз третьего и четвертого осцилляторов, определенных в моменты времени $t_n = nT$ (б). Иллюстрации построены для $\gamma_0 = 0.2$, $\gamma_1 = 2$, $\Omega = 1$ и $\varepsilon = 0.05$. На рис. а используются следующие обозначения: черный сплошной график отвечает зависимости φ_1 от времени, черный пунктирный – φ_2 , серый сплошной – φ_3 , серый пунктирный – φ_4 . Скачки фаз на рис. б носят фиктивный характер и связаны со способом определения фаз ($0 \leq \varphi_i \leq 2\pi$)

и четвертого осцилляторов. Как и ранее, фазы определялись в сечении Пуанкаре, заданном условием $t_n = nT$, и вычислялись по формуле (23). Из рисунков видно, что, как и в случае «минимального» хаоса, осцилляторы демонстрируют хаотические колебания попеременно (рис. 7), а отображение для разности фаз третьего и четвертого осциллятора представляет собой отображение типа отображения Бернулли и совпадает с формулой (35) (рис. 8, б). Кроме того, между графиками зависимости фаз осцилляторов от времени есть довольно заметное сходство. Так, фазы первого и второго (или третьего и четвертого) осцилляторов изменяются одинаковым образом, причем $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_3 + \varphi_4 = \text{const}$ как следствие симметричного выбора коэффициентов α , β , χ и δ .

Однако есть и ряд отличий. Основное из них состоит в том, что, если в случае «минимального» хаоса отображение для разности фаз осцилляторов представляло собой два отрезка, демонстрирующих лишь незначительное расщепление, то в слу-

чае «максимального» хаоса численно построенное отображение для разности фаз осцилляторов демонстрирует существенное расщепление отрезков. Причем практически каждый отрезок расщепился на три части.

Заключение

Таким образом, в работе проведено исследование системы, состоящей из четырех идентичных осцилляторов типа Ландау–Стюарта, описываемых в терминах комплексных амплитуд, для которой генерация осцилляторов происходит попеременно, но парами, при этом возбуждение передается от одной пары осцилляторов к другой по определенному правилу. Особенностью системы является строго резонансная связь: возбуждающая сила имеет несущую частоту, совпадающую с частотой колебаний осцилляторов. Было показано, что для системы такого вида отображение типа отображения Бернулли получается не для фазы колебаний какого-либо осциллятора, а для разности фаз парных осцилляторов. При этом в зависимости от выбора правила, по которому передается возбуждение от одной пары осцилляторов к другой (в зависимости от набора коэффициентов), получаются различные виды отображения. Конкретный вид отображения зависит от величины отличного от единицы собственного числа μ матрицы, определяющей правило передачи возбуждения между осцилляторами. А именно число отрезков в получаемом отображении совпадает с указанным собственным числом μ . Были исследованы конкретные примеры систем для случая собственных чисел $\mu=2$ и $\mu=9$. Было показано, что в обоих случаях система демонстрирует гиперболический хаос, а численно полученное отображение для разности фаз парных осцилляторов совпадает с предсказанным теоретически. Однако, как показало исследование, чем большее значение принимает величина μ , тем на больше частей расщепляется отображение для разности фаз.

И, наконец, отметим, что, если система уравнений в терминах комплексных амплитуд представляет собой аппроксимацию какой-либо модели*, то следует говорить о свойствах частично гиперболических аттракторов, так как в этом случае будет иметь место разрушение симметрии относительно фазового сдвига, присущей рассмотренной модели. Однако этот вопрос требует отдельного исследования.

Авторы благодарят профессора С.П. Кузнецова за внимание к работе и полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ-ННИО 08-02-91963.

Библиографический список

1. *Синай Я.Г.* Стохастичность динамических систем // В кн. Нелинейные волны. М.: Наука, 1979, 192 с.
2. *Shilnikov L.* Mathematical problems of nonlinear dynamics: A Tutorial // Int. J. of Bif. & Chaos. 1997. Vol. 7, № 9. P. 1353.
3. *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем / Пер. с англ. М.: Факториал, 1999. 768 с.

*Например, решение системы дифференциальных уравнений методом медленно меняющихся амплитуд.

4. Гукенхеймер Дж., Холмс П. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.: Ижевск: Ин-т компьютерных исследований. 2002. 559 с.
5. Анищенко В.С. и др. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003.
6. Kuznetsov S.P. Example of a physical system with a hyperbolic attractor of a Smale–Williams type // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 95. P. 144101.
7. Кузнецов С.П., Селезнев Е.П. Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла–Вильямса // *ЖЭТФ.* 2006. Вып. 129, № 2. С. 400.
8. Кузнецов С.П., Сатаев И.П. Проверка устойчивости гиперболичности хаотического аттрактора в системе связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2006. Т. 14, № 5. С. 3.
9. Kuznetsov S.P., Sataev I.R. Hyperbolic attractor in a system of coupled non-autonomous van der Pol oscillators: Numerical test for expanding and contracting cones // *Physics Letters A.* 2007. Vol. 365, № 1–2. P. 97.
10. Isaeva O.B., Jalnina A.Yu. and Kuznetsov S.P. Arnold’s cat map dynamics in a system of coupled nonautonomous van der Pol oscillators // *Phys. Rev. E.* 2006, № 74. P. 046207.
11. Купцов П.В., Кузнецов С.П. О феноменах, сопровождающих переход к режиму синхронного хаоса в связанных неавтономных осцилляторах, представленных уравнениями для комплексных амплитуд // *Нелинейная динамика.* 2006, № 2. С. 307.
12. Isaeva O.B., Kuznetsov S.P. and Osbaldestin A.H. A system of alternately excited coupled non-autonomous oscillators manifesting phenomena intrinsic to complex analytical maps // *Physica D.* 2008, № 237. P. 873.
13. Kuznetsov S.P., Pikovsky A.S. Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors // *Physica D.* 2007, № 232. P. 87.
14. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Пиковский А.С., Тюрюкина Л.В. Хаотическая динамика в системах связанных неавтономных осцилляторов с резонансным и нерезонансным механизмом передачи возбуждения // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2007. Т. 15, № 6. С. 75.
15. Kuznetsov S.P., Pikovsky A.S. Hyperbolic chaos in the phase dynamics of a Q-switched oscillator with delayed nonlinear feedbacks // *Europhysics Letters.* 2008, № 28. P. 10013.

Поступила в редакцию 11.01.2009

HYPERBOLIC CHAOS IN A SYSTEM OF NONLINEAR COUPLED LANDAU-STUART OSCILLATORS

L.V. Turukina, A. Pikovsky

Chaotic dynamics of a system of four nonlinear coupled non-identical Landau-Stuart oscillators is considered. Subsystems are activated alternately by pairs due to a

slow variation of their parameters responsible for the Andronov–Hopf bifurcation. It is shown, that system dynamics depends of coupling type. Different types of phase map (Bernoulli type map) are obtained in Poincaré section depending of coupling. Some systems with different type of coupling corresponded to «maximum» and «minimum» chaos are investigated.

Keywords: Coupled oscillators, hyperbolic attractor, chaotic dynamics.

Тюрюкина Людмила Владимировна – родилась в 1977 году. Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, доцент базовой кафедры динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов – динамический хаос, критические явления на пороге хаоса, сложная динамика нелинейных осцилляторов и автоколебательных систем с внешним периодическим воздействием в контексте сопоставления различных подходов к их описанию, синхронизация короткими импульсами и управление неустойчивыми режимами посредством коротких импульсов. Автор более 50 научных публикаций, из них около 20 статей в российских и зарубежных журналах. Лауреат стипендии Президента РФ для студентов и аспирантов. В 2001 и 2002 годах получила персональные гранты РФФИ для молодых исследователей. Принимает участие в работе международных научных коллективов.

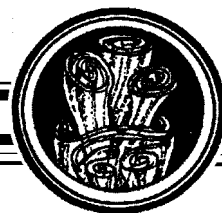


E-mail: lvtur@rambler.ru
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
410019, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38.

Пиковский Аркадий Самуилович – родился в Горьком (1956), окончил Горьковский государственный университет (1977). После окончания работал в Институте прикладной физики АН, затем в университетах Вуппертала и Потсдама. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (ГГУ, 1982). Область научных интересов – нелинейная динамика, статистическая физика и теория хаоса.



E-mail: pikovsky@uni-potsdam.de
Department of Physics and Astronomy, Potsdam University
14476 Potsdam-Golm, Germany



ИНДУЦИРОВАННЫЕ ШУМОМ БИФУРКАЦИИ В БИСТАБИЛЬНОМ ГЕНЕРАТОРЕ

Т.Е. Вадивасова, А.С. Захарова, В.С. Анищенко

В работе исследуется бистабильный генератор под воздействием аддитивного белого и цветного шума. Установлены индуцированные шумом бифуркации, состоящие в качественном изменении стационарного распределения амплитуды колебаний. В области бимодального распределения как для белого, так и для цветного шума, имеет место эффект когерентного резонанса.

Ключевые слова: Влияние шума, стохастическая бифуркация, бистабильный осциллятор, когерентный резонанс.

Введение

Исследование влияния случайных воздействий (шума) на нелинейные динамические системы является одним из актуальных и интенсивно развивающихся направлений в нелинейной динамике. В общем случае шум может приводить к двум типам эффектов: индуцированному шумом сдвигу бифуркаций, имеющих место в детерминированной системе, в область других значений управляющих параметров и возникновению новых типов поведения и новых бифуркаций (фазовых переходов), не наблюдавшихся в отсутствие шума [1]. Поскольку любая реальная система неизбежно находится под действием внутренних и внешних источников шума, без учета такого рода эффектов понять результаты экспериментов зачастую становится просто невозможно. Известно достаточно много примеров, когда шум приводит к качественной перестройке поведения системы [2–7]. Однако в целом вызванные шумом нелинейные эффекты исследованы далеко не полностью.

Индуцированные шумом бифуркации представляют особый интерес, так как показывают возможность управлять поведением динамической системой с помощью шумового воздействия. Интенсивность шума служит бифуркационным параметром динамической системы. По-видимому, роль бифуркационного параметра могут играть и другие статистические характеристики шума (среднее значение, дисперсия, ширина спектра и т.д.). При рассмотрении индуцированных шумом бифуркаций, как и вообще бифуркаций в динамических системах с шумом (стохастических бифуркаций), важно дать определение самого понятия «бифуркация». Согласно подходам, изложенным в [1] и [8], одним из возможных критериев стохастической бифуркации является качественное изменение стационарного вероятностного распределения,

например переход от унимодального распределения к бимодальному. В [8] такие бифуркации названы стохастическими бифуркациями Р-типа (феноменологическим бифуркациям). Изменение закона распределения влечет за собой изменение и других статистических характеристик поведения системы, наблюдаемых экспериментально.

Целью данной работы является исследование индуцированных шумом Р-бифуркаций в классической модели автогенератора с жестким возбуждением. Рассматривается воздействие как белого гауссова, так и цветного ограниченного шума, строятся бифуркационные линии на плоскости параметров (для случая белого шума) и анализируется взаимосвязь бифуркаций с эффектом когерентного резонанса в бистабильном генераторе [9].

1. Исследуемая модель

Исследуемая модель представляет собой классический бистабильный автогенератор ван дер Поля, находящийся под действием аддитивного шума

$$\ddot{x} - (\varepsilon + x^2 - x^4)\dot{x} + x = \xi(t), \quad (1)$$

где $\xi(t)$ – случайная сила, ε – параметр управления режимом генерации. Рассматривались два вида случайного воздействия: а) белый гауссов шум $\xi(t) = \sqrt{2D}n(t)$; б) цветной ограниченный шум $\xi(t) = C \cos \Phi(t)$, где $\dot{\Phi} = \omega_1 + \sqrt{2D}n(t)$, C , ω_1 – постоянные, $n(t)$ – нормированный источник гауссова белого шума: $\langle n(t)n(t+\tau) \rangle = \delta(\tau)$, $\langle n(t) \rangle = 0$. Параметр D задает интенсивность белого шума. Модель (б) представляет собой гармонический шум с постоянной амплитудой C и спектральной плотностью мощности в виде лоренциана с максимумом на частоте ω_1 (частота случайного воздействия). Интенсивность белого шума D в этом случае определяет полуширину спектральной линии на уровне половинной мощности.

В отсутствие шума при условии $-1/8 < \varepsilon < 0$ система (1) характеризуется бистабильным поведением. На фазовой плоскости существуют два аттрактора – устойчивый фокус в начале координат и устойчивый предельный цикл. Последний возникает при $\varepsilon = -1/8$ в результате седло-узловой бифуркации циклов. Фокус теряет устойчивость при $\varepsilon = 0$ в результате субкритической бифуркации Андронова–Хопфа.

2. Воздействие белого гауссова шума

В квазигармоническом режиме при слабом шуме с помощью замены переменных

$$\begin{aligned} x(t) &= a(t) \cos(t + \varphi(t)), \\ \dot{x}(t) &= -a(t) \sin(t + \varphi(t)) \end{aligned} \quad (2)$$

и усреднения уравнения генератора за период автоколебаний приходим к уравнениям для медленных (в масштабе $1/(2\pi)$) переменных – мгновенной амплитуды $a(t)$ и флуктуаций фазы $\varphi(t)$.

В случае воздействия белого шума на систему (1) стохастические уравнения для амплитуды и фазы автоколебаний имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{a^2}{8} - \frac{a^4}{16} \right) a + \frac{D}{2a} + \sqrt{D}n_1(t), \\ \dot{\varphi} &= \frac{\sqrt{D}}{a}n_2(t),\end{aligned}\quad (3)$$

где $n_1(t)$ и $n_2(t)$ – независимые нормированные источники гауссова белого шума. Как следует из (3), амплитуда устойчивого цикла при $D = 0$ определяется по формуле $a = \sqrt{1 + \sqrt{1 + 8\varepsilon}}$.

Бистабильный автогенератор (1) с адитивным белым гауссовым шумом и его укороченная модель (3) исследованы в [10]. Основное внимание было уделено частоте вызванных шумом переключений генератора между двумя областями – окрестностью точки равновесия и окрестностью предельного цикла. Изменения закона распределения и спектра колебаний с ростом интенсивности шума в [10] не рассматривались.

При $D \neq 0$ плотность вероятности мгновенной амплитуды $a(t)$ удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова [11, 12]

$$\frac{\partial p(a, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial a} \left[\left(\frac{\varepsilon a}{2} + \frac{a^3}{8} - \frac{a^5}{16} + \frac{D}{2a} \right) p(a, t) \right] + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 p(a, t)}{\partial a^2}. \quad (4)$$

Стационарное решение (4) имеет вид

$$p(a) = Na \exp \left[-\frac{1}{48D} a^2 (a^4 - 3a^2 - 24\varepsilon) \right], \quad (5)$$

где N нормировочная константа. Экстремумы распределения (5) являются корнями следующего уравнения

$$f(a_m) = a_m^6 - 2a_m^4 - 8\varepsilon a_m^2 - 8D = 0. \quad (6)$$

Значение интенсивности шума D , при котором изменяется число экстремумов стационарного распределения амплитуды (число вещественных неотрицательных корней уравнения (6)) будем называть бифуркационным, имея в виду стохастическую бифуркацию Р-типа.

Из графиков функции $f(a_m)$, представленных на рис. 1, *a*, видно, что такие бифуркации имеют место, так как при изменении D меняется число пересечений графика функции с осью абсцисс. Отметим, что графики, приведенные на рис. 1, получены при $\varepsilon = -0.13$, то есть вне области бистабильности системы без шума, хотя и вблизи седло-узловой бифуркации циклов. На рис. 1, *б* приведены графики стационарного распределения амплитуды, рассчитанные по формуле (5) при $\varepsilon = -0.13$ и различных значениях интенсивности шума. Нормировочная константа N определялась численно.

Как следует из приведенных на рис. 1 результатов, при малой интенсивности шума имеется только один вещественный положительный корень уравнения (6), соответствующий единственной точке пересечения кривой $f(a_m)$ и оси абсцисс в области $a_m > 0$ (кривая 1 на рис. 1, *a*). При этом распределение амплитуды имеет только

один максимум, расположенный в окрестности нуля (кривая 1 на рис. 1, б). Дело в том, что при слабом шуме фазовая траектория в основном находится в окрестности устойчивого фокуса, где нелинейными эффектами можно пренебречь. Соответственно, распределение амплитуды близко к релеевому. При увеличении интенсивности шума фазовая траектория все чаще оказывается далеко от начала координат, и нелинейность системы проявляется всё сильнее. При этом траектория подолгу остается в той области, где при $\varepsilon \geq -1/8$ находится устойчивый предельный цикл. Вид распределения с ростом интенсивности шума эволюционирует. Значение $D \approx 0.005$ является бифуркационным. При достижении этого значения возникают два новых вещественных положительных корня уравнения (6) (кривая 2 на рис. 1, а) и происходит стохастическая бифуркация Р-типа: переход от унимодального распределения к бимодальному (кривая 2 на рис. 1, б). В случае достаточно сильного шума траектория редко попадает в окрестность устойчивого фокуса и при $D \approx 0.0202$ происходит вторая стохастическая бифуркация, но уже приводящая к исчезновению пары экстремумов (кривая 3 на рис. 1, а). В результате распределение амплитуды снова становится унимодальным, но максимум распределения смещается в сторону больших амплитуд (кривая 3 на рис. 1, б).

На рис. 2 представлены графики функции $f(a_m)$ и стационарные распределения амплитуды, полученные в случае $\varepsilon = -0.12$, то есть в области бистабильности

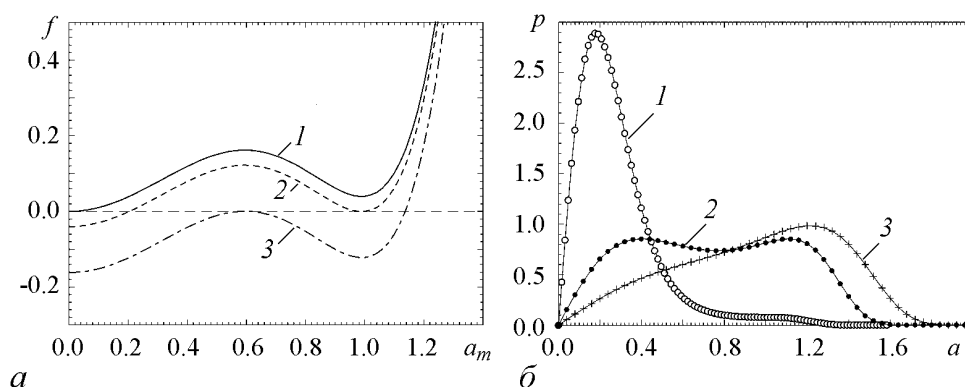


Рис. 1. а – график функции $f(a_m)$ (см. (6)) при $\varepsilon = -0.13$ и различных значениях интенсивности шума D : 1 – $1 \cdot 10^{-5}$, 2 – 0.005, 3 – 0.0202; б – стационарное распределение амплитуды при $\varepsilon = -0.13$ и различных значениях интенсивности шума D : 1 – 0.004, 2 – 0.015, 3 – 0.05

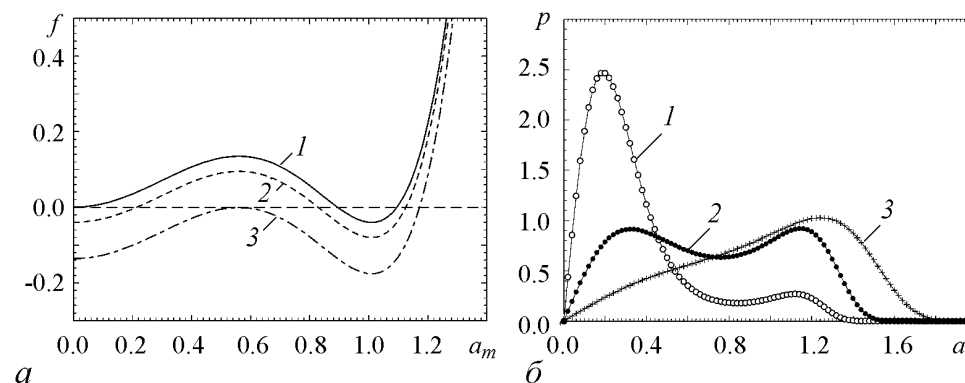


Рис. 2. а – график функции $f(a_m)$ (см. (6)) при $\varepsilon = -0.12$ и различных значениях интенсивности шума D : 1 – $1 \cdot 10^{-5}$, 2 – 0.005, 3 – 0.0169; б – стационарное распределение амплитуды при $\varepsilon = -0.12$ и различных значениях интенсивности шума D : 1 – 0.004, 2 – 0.01, 3 – 0.05

системы без шума, но вблизи седло-узловой бифуркации циклов. Они похожи на кривые, приведенные на рис. 1, но имеется одно отличие – отсутствует бифуркация, приводящая к возникновению второго максимума распределения $p(a)$. Распределение амплитуды является бимодальным при сколь угодно малой интенсивности шума (кривые 1 на рис. 2). Это связано с бистабильностью нешумящего генератора при $\varepsilon = -0.12$. С ростом интенсивности шума происходит перераспределение высоты максимумов. Первый максимум, соответствующий окрестности фокуса, уменьшается, а второй, приходящийся на область предельного цикла – увеличивается. При некотором значении D они имеют равную высоту (кривые 2 на рис. 2). При $D \approx 0.0169$ происходит бифуркация, приводящая к исчезновению пары экстремумов (кривая 3 на рис. 2, а) после чего распределение имеет только один максимум в области больших амплитуд (кривая 3 на рис. 2, б).

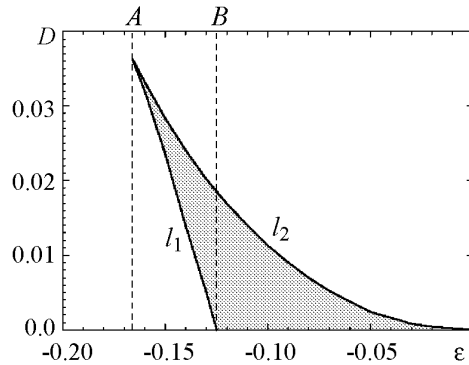


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма автогенератора (3) на плоскости управляющих параметров (ε, D) : l_1 – линия, на которой при увеличении интенсивности шума D возникает второй максимум распределения амплитуды; l_2 – линия, на которой при увеличении интенсивности шума D исчезает второй максимум распределения амплитуды; область, выделенная серым цветом, – область бимодального распределения амплитуды. Пунктирной линией A отмечено значение $\varepsilon = -1/6$, определяющее границу бимодальности по параметру ε . Пунктирной линией B отмечена граница бистабильности по параметру ε для генератора без шума

На рис. 3 приведены линии стохастических Р-бифуркаций в автогенераторе (3) на плоскости управляющих параметров (ε, D) . Область, отмеченная серым цветом, есть область, в которой стационарное распределение амплитуды является бимодальным. Бимодальное распределение для генератора с шумом служит аналогом бистабильности в нешумящем генераторе. При этом область бимодальности и область бистабильности не совпадают из-за индуцированных шумом бифуркаций. Так, при достаточно сильном шуме в бистабильном генераторе наблюдается переход к унимодальному распределению (на линии l_2). Напротив, вне области бистабильности в интервале $-1/6 < \varepsilon < -1/8$ при некоторых значениях интенсивности шума (между l_1 и l_2) имеет место бимодальное распределение.

Как показывает компьютерное моделирование, в системе (1) с белым гауссовым шумом наблюдается эффект, подобный когерентному резонансу: с ростом интенсивности шума ширина спектральной линии колебаний сначала уменьшается, а затем снова возрастает. Этот эффект был впервые описан в [9], где приведены результаты физического эксперимента с лазерным генератором и численно исследуется модель, аналогичная (3). Однако эволюция спектра не сопоставлялась с индуцированными шумом бифуркациями вероятностного распределения. Проведенные нами исследования показывают, что эффект сужения спектра, по-видимому, связан с бимодальным распределением амплитуды колебаний, поскольку минимальная ширина спектральной линии соответствует приблизительно середине области бимодального распределения (где два максимума имеют примерно одинаковую высоту). Следует отметить, что указанное поведение спектра колебаний наблюдается не только в области индуцированной шумом бимодальности, но и при $\varepsilon < -1/8$, где в отсутствие шума сосуществуют два аттрактора. На рис. 4 приведены спектры мощности колеба-

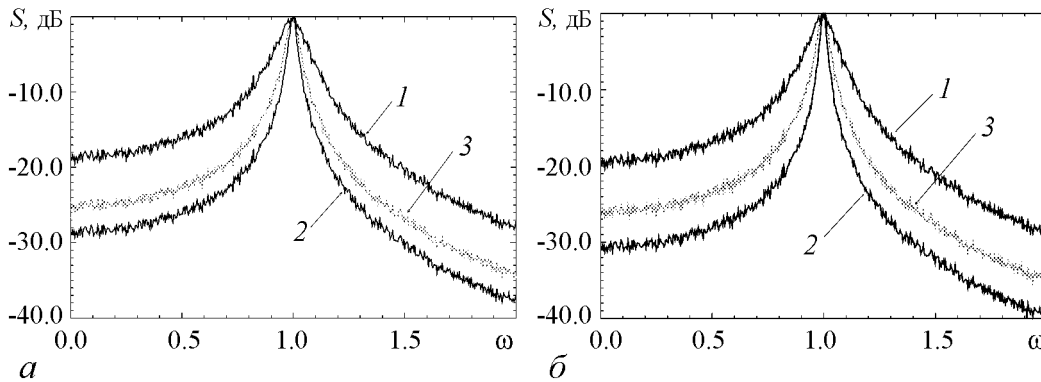


Рис. 4. Фрагменты нормированного спектра мощности колебаний при различных значениях параметра ε и интенсивности белого шума D : $a - \varepsilon = -0.13$, $1 - 0.001$, $2 - 0.01$, $3 - 0.025$; $b - \varepsilon = -0.12$, $1 - 0.001$, $2 - 0.01$, $3 - 0.025$

ний в системе (1) для двух значений ε – слева и справа от границы бистабильности, отмеченной на рис. 3 пунктирной линией B . В обоих случаях спектры, полученные при воздействии белого шума различной интенсивности, практически идентичны и отчетливо демонстрируют эффект, подобный когерентному резонансу.

3. Воздействие цветного ограниченного шума

В случае воздействия цветного шума, используя замену переменных (2) и усреднение за период автоколебаний, можно от системы (1) перейти к следующим стохастическим уравнениям для амплитуды и разности фаз:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{a^2}{8} - \frac{a^4}{16} \right) a - \frac{C}{2\omega_1} \sin(\theta), \\ \dot{\theta} &= \Delta - \frac{C}{2a\omega_1} \cos(\theta) - \sqrt{2D}n(t), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\theta = [t + \varphi(t) - \Phi(t)]$ – мгновенная разность фаз автогенератора и воздействия, $\Delta = (1 - \omega_1)$ – параметр расстройки, $n(t)$ – нормированный источник гауссова белого шума. Нами рассматривался случай синхронного воздействия, то есть частота спектрального максимума шума предполагается равной частоте автоколебаний ($\Delta = 0$).

Для системы (7) нельзя рассматривать амплитудное уравнение отдельно от фазового, и аналитический расчет стационарного распределения вероятностей $p(a, \theta)$ затруднителен. По этой причине стационарное распределение амплитуды $p(a)$ находилось путем интегрирования системы (7) и дальнейшей статистической обработки данных.

Зафиксируем параметр D , задающий ширину спектральной линии шумового воздействия, и будем менять его амплитуду C . Стационарные распределения амплитуды колебаний в генераторе при $\varepsilon = -0.13$, полученные для различных значений C , приведены на рис. 5. При небольшой амплитуде шума распределение $p(a)$ имеет один максимум (кривая 1), соответствующий малым колебаниям в окрестности состояния равновесия, однако амплитуда колебаний, при которой наблюдается максимум распределения, на порядок больше амплитуды воздействия C . При увеличе-

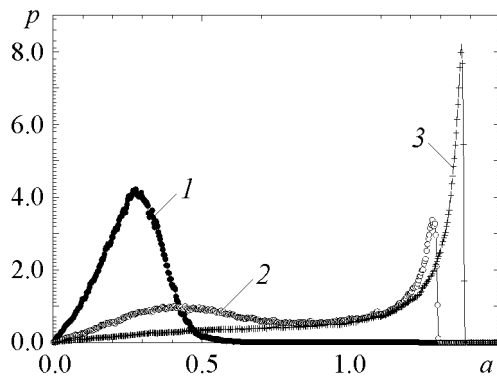


Рис. 5. Стационарные распределения амплитуды при $D = 0.1$ и различных значениях амплитуды шума C : 1 – 0.05, 2 – 0.08, 3 – 0.15

действием цветным шумом также сохранится. Действительно, расчеты, проведенные для системы (1) с цветным ограниченным шумом при $\epsilon = -0.13$, показывают, что для заданной ширины спектра шума существует значение амплитуды шума C , при которой ширина спектра колебаний генератора минимальна (рис. 6). Эффект когерентного резонанса проявляется более отчетливо для шума с большей шириной спектра (рис. 6, a). С уменьшением ширины спектра шума (с уменьшением параметра D) изменение ширины спектра колебаний становится менее заметным. Воздействие цветного шума на генератор при $\epsilon = -0.12$ приводит к аналогичным результатам.

нии C происходит индуцированная шумом бифуркация и появляется второй максимум распределения, связанный с уходами траектории в область автоколебаний (кривая 2). Затем, при больших амплитудах шума, первый максимум распределения исчезает (кривая 3).

Таким образом, при синхронном воздействии на генератор цветного, ограниченного по амплитуде шума наблюдаются те же стохастические бифуркации, что и в случае белого шума. По этой причине можно ожидать, что эффект когерентного резонанса при воз-

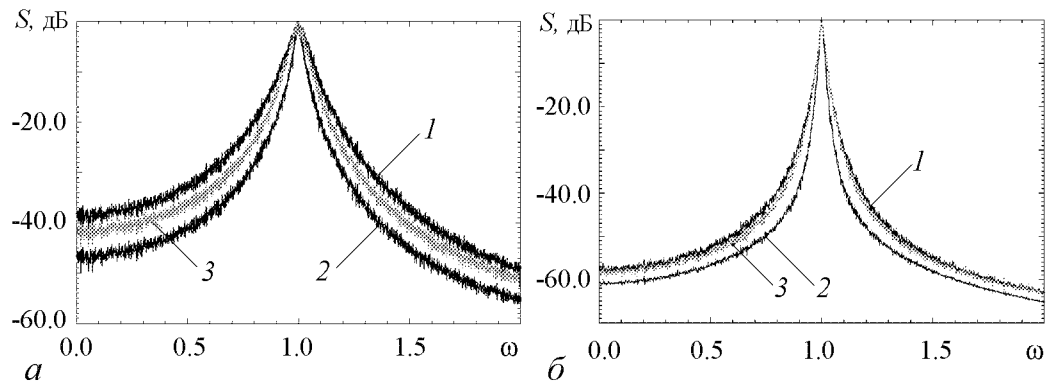


Рис. 6. Фрагменты нормированного спектра мощности колебаний при различных значениях ширины спектра (параметр D) и амплитуды цветного шума C : $a - D = 0.1$, 1 – 0.05, 2 – 0.08, 3 – 0.15; $b - D = 0.01$, 1 – 0.01, 2 – 0.05, 3 – 0.15

Выводы

Проведенные исследования показывают, что в окрестности границы бистабильности, которая в отсутствие шума соответствует седло-узловой бифуркации предельных циклов, автогенератор является особенно чувствительным к воздействию аддитивного шума. Такая чувствительность определяется наличием стохастических бифуркаций Р-типа, качественно меняющих вид стационарного распределения амплитуды колебаний. В области бистабильности детерминированной системы шум приводит к унимодальному распределению, то есть уничтожает бистабильность. Вне

этой области шум, напротив, вызывает переход к бимодальному распределению, то есть индуцирует бистабильность.

Область бимодального распределения связана с эффектом сужения спектральной линии колебаний. Наименьшая ширина спектральной линии колебаний приблизительно соответствует середине этой области. Данный эффект подобен явлению когерентного резонанса, однако природа его пока не ясна. На сегодняшний день мы не можем указать причину, почему спектральная линия колебаний сужается в середине области бимодального распределения амплитуды. Не исследован вопрос о связи ширины спектра со статистикой переключений между двумя областями фазового пространства. Не ясно также, как может повлиять на указанный эффект неизохронность системы. Выяснение этих вопросов требует дальнейших исследований.

Все отмеченные эффекты шумового воздействия являются грубыми по отношению к статистическим характеристикам этого воздействия и наблюдаются как для белого гауссова шума, так и для цветного шума с ограниченной амплитудой.

Данная работа выполнена при поддержке МОРФ в рамках программы «Развитие потенциала высшей школы».

Библиографический список

1. *Хорстхемке В., Лефевр Р.* Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987.
2. *Bulsara A.R., Schieve W.C., Gragg R.F.* Phase transitions induced by white noise in bistable optical systems // *Phys. Lett. A.* 1978. Vol. 68. P. 294.
3. *Анищенко В.С., Сафонова М.А.* Индуцированное шумом экспоненциальное разбегание фазовых траекторий в окрестности регулярных аттракторов // *Письма в ЖТФ.* 1986. Т. 12, № 12. С. 740.
4. *Sigeti D., Horsthemke W.* Pseudo-regular oscillations induced by external noise // *J.Stat.Phys.* 1989. Vol. 54. P. 1217.
5. *Schimansky-Geier L., Herzel H.* Positive Lyapunov exponents in the Kramers oscillator // *Journal of Statistical Physics.* 1993. Vol. 70. P. 141.
6. *Armbruster D., Stone E., Kirk V.* Noisy heterodinic networks // *Chaos.* 2003. Vol. 13, № 1. P. 71.
7. *Finn J.M., Tracy E.R., Cooke W.E. and Richardson A.S.* Noise stabilised random attractor // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 73. P. 026220(12).
8. *Arnold L.* Random Dynamical System. Springer, Berlin, 2003.
9. *Ushakov O.V., Wunsche H.-J., et al.* Coherence resonance near a Hopf bifurcation // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 95, 123903(4).
10. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980.
11. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.
12. *Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.
13. *Pikovsky A., Kurths J.* Coherence resonance in a noisy driven excitable system // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78. P. 775.

Поступила в редакцию 25.06.2008

После доработки 3.03.2009

NOISE-INDUCED BIFURCATIONS IN BISTABLE OSCILLATOR

T.E. Vadivasova, A.S. Zakharova, V.S. Anishchenko

We investigate bistable oscillator under the influence of additive, white and colored, noise. We have found noise-induced bifurcations that consist in a qualitative change of stationary distribution of oscillations amplitude. In the region of bimodal distribution the effect of coherent resonance takes place both for white and colored noise.

Keywords: Noise influence, stochastic bifurcation, bistable oscillator, coherent resonance.



Вадивасова Татьяна Евгеньевна – родилась в 1958 году. Окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981), доктор физико-математических наук. В настоящее время – профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических осцилляторов, явление фазовой мультистабильности взаимодействующих хаотических систем, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, статистические характеристики динамического хаоса, роль флуктуаций в нелинейных системах и др. Автор более 60 публикаций в отечественной и зарубежной печати, включая 3 монографии.

E-mail: tanya@chaos.ssu.runnet.ru

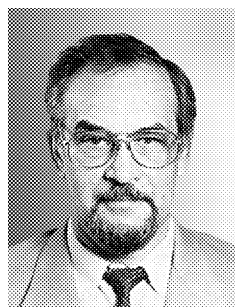
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
410012, Саратов, Астраханская, 83



Захарова Анна Сергеевна – инженер учебной лаборатории кафедры радиофизики и нелинейной динамики. Область научных интересов: теория динамического хаоса, статистические характеристики хаоса, стохастические процессы в нелинейных системах, влияние случайного воздействия на динамику нелинейных систем. Имеет 9 научных публикаций по данному направлению.

E-mail: Zakharova-as@mail.ru

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
410012, Саратов, Астраханская, 83



Анищенко Вадим Семенович – родился в 1943 году. Окончил физический факультет СГУ (1966). Защитил диссертацию на звание кандидата физико-математических наук (1970) и доктора физико-математических наук (1986). С 1988 года – заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. С 1979 и по настоящее время работает в области исследования нелинейной динамики и стохастических процессов в нелинейных системах. Является автором более 300 научных работ, среди которых 7 монографий на русском и английском языках и 4 учебника. Неоднократно читал лекции в ведущих вузах Германии в качестве приглашенного профессора. Член-корреспондент РАЕН, заслуженный деятель науки РФ (1995), Соросовский профессор, лауреат премии Фонда Александра Гумбольдта (1999).

E-mail: wadim@chaos.ssu.runnet.ru

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
410012, Саратов, Астраханская, 83



ОСЦИЛЛЯТОРНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И СПОНТАННЫЕ ПОДПороГОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СЕТИ ДИФФУЗИОННО СВЯЗАННЫХ КАЛЬЦИЕВЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

В.Б. Казанцев, А.В. Воробьёв

Работа посвящена исследованию динамики сети взаимодействующих астроцитов – глиальных клеток мозга, способных генерировать химические сигналы активности – кальциевые импульсы. Астроциты, подобно нервным клеткам (нейронам), формируют сети, где взаимодействие между клетками осуществляется через так называемые щелевые контакты (в англ. gap junctions). Такие контакты представляют собой специальные каналы, по которым химически активные вещества диффундируют между клетками. Как считается, кальциевые сигналы в астроцитах могут регулировать эффективность синаптической передачи в близлежащих нейронных клетках. В работе исследуются процессы возникновения колебательной активности в одномерной сети диффузионно связанных астроцитов. Динамика отдельной клетки описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений 3-го порядка, полученной на основе детального описания кинетики биохимических преобразований в клетке (Де Янг и Кайзер, 1992; Ли и Ринцель, 1994; Уллах и др., 2006). Рассматриваемая модель сети при учете диффузионной связи представляет собой трехкомпонентную дискретную систему типа «реакция–диффузия» с одной диффундирующей переменной. Установлено, что существует критическое значение коэффициента диффузии, превышение которого приводит к появлению осцилляторной неустойчивости на частотах 0.1 Гц и генерации спонтанных квазисинусоидальных колебаний малой (0.05 мкмоль) амплитуды. Получен соответствующий спектр собственных значений, анализ которого показывает, что при дальнейшем увеличении коэффициента связи в сети возникает мультичастотный режим, что приводит, в частности, к модуляции амплитуды квазисинусоидальных колебаний и спонтанной генерации кальциевых импульсов.

Ключевые слова: Кальциевые сигналы, подпороговые колебания, диффузионная неустойчивость, астроцит.

Введение

Исследование динамических процессов возникновения структур или паттернов активности в нелинейных распределенных системах становится в последние годы одним из наиболее интенсивно развивающихся направлений нелинейной физики колебаний и волн. Ярким приложением этих исследований являются процессы генерации и преобразования сигналов в сетях мозга, лежащие в основе его функциональной активности и когнитивных функций [1–5]. Нервные клетки мозга способны

генерировать электрические импульсы возбуждения (потенциалы действия), которые передаются по сети за счет межнейронных связей. Эти процессы достаточно полно описаны с помощью динамических моделей различной степени сложности, от простейших триггерных сетей до сложных уравнений типа Ходжкина–Хаксли, детально учитывающих динамику ионных токов через клеточную мембрану нейрона [5]. Однако кроме нейронов в мозге существует большое количество глиальных клеток (астроциты, микроглия, миелоновые клетки и др.), которые обеспечивают поддержание жизнедеятельности нейронных систем. Интенсивные исследования физиологов последних десяти лет свидетельствуют о том, что кроме поддерживающей роли глиальные клетки, в частности астроциты, способны влиять на нейронную активность за счет синтеза нейроактивных веществ (нейропередатчиков, нейромедиаторов), выбрасываемых в межклеточное пространство и захватываемых рецепторами нейрональных клеток [6]. Кроме того, было показано, что астроциты также формируют сети и их химическая активность может существенно зависеть от коллективных эффектов за счет транспорта активных веществ между клетками. На уровне отдельных клеток астроциты, в отличие от нейронов, не обладают свойством электрической возбудимости – пороговой генерации электрических импульсов, поскольку не имеют потенциал-зависимых ионных каналов. Однако они способны генерировать импульсы внутриклеточной концентрации кальция (кальциевые импульсы или кальциевые колебания). Эти процессы могут быть описаны с помощью детального анализа кинетики биохимических преобразований внутри клетки [7]. Модель в этом случае представляет собой многомерную систему нелинейных дифференциальных уравнений, построенных аналогично формализму Ходжкина–Хаксли. Эти уравнения в некоторых случаях (в пренебрежении быстрыми процессами релаксации и при аппроксимации некоторых переменных их равновесными значениями) могут быть сведены к нелинейным системам второго [8] или третьего порядка [9]. Анализ этих моделей показывает, что при изменении контрольного параметра равновесная концентрация кальция становится неустойчивой и через бифуркацию Андронова–Хопфа происходит рождение устойчивого предельного цикла, описывающего колебания внутриклеточного кальция. В данной работе мы будем использовать трехкомпонентную модель клетки [9], переменными в которой являются: концентрация кальция в цитозоли, доля открытых кальциевых каналов эндоплазматического ретикула (ЭР), являющегося источником кальция внутри клетки, и концентрация внутриклеточного посредника инозитол 1,4,5-трисфосфата (IP_3). Взаимодействие между астроцитами осуществляется посредством диффузии IP_3 через щелевые контакты, проницаемость которых для IP_3 существенно выше, чем для остальных молекул и ионов в клетке [10]. Одним из эффектов такого взаимодействия, исследованным ранее [9], является синхронизация (синфазная и антифазная) кальциевых колебаний в двух взаимодействующих клетках, подтвержденная экспериментально. Среди известных результатов по исследованию кальциевых сигналов в глиальных клетках и нейронах необходимо также упомянуть распространение кальциевых волн в диффузионных моделях IP_3 чувствительных клеток [11], кальциевые колебания и волны, индуцированные глутаматом [9], нейрон-астроцитарное взаимодействие и формирование так называемого тройственного синапса [12, 13] и др. [6]. Отметим, что процессы коллективной динамики взаимодействия астроцитов в больших сетях до настоящего времени практически не исследованы.

В данной работе рассмотрен эффект возникновения осцилляторной неустойчивости и генерации спонтанных квазисинусоидальных колебаний за счет диффузии IP_3 в модели одномерной сети взаимодействующих астроцитов. Модель представляет собой дискретный аналог трехкомпонентной системы «реакция–диффузия» с одним диффундирующим компонентом (IP_3). При отсутствии связи каждый из астроцитов находится в устойчивом состоянии равновесия и генерирует кальциевый импульс только при достаточно большом внешнем воздействии (например, в ответ на химическую стимуляцию глутаматом [9]). Мы покажем, что при введении диффузионной связи равновесная концентрация кальция становится неустойчивой при превышении критического значения коэффициента связи. Это соответствует переходу комплексной пары характеристических корней через мнимую ось и возникновению спонтанных квазисинусоидальных колебаний. Дальнейшее увеличение диффузии приводит к переходу в неустойчивую область целой части спектра и формированию многочастотного осцилляторного паттерна. Амплитуда кальциевых колебаний при этом растет и может достигнуть порога возбуждения, что приводит к спонтанной генерации кальциевых импульсов в отдельных клетках сети.

1. Модель

Рассмотрим модель одномерной сети локально связанных астроцитов, схематически представленную на рис. 1. Учет только локальных связей по внутриклеточной IP_3 -диффузии обоснован недавними экспериментальными исследованиями [14], которые показывают, что астроциты занимают «неперекрывающиеся территории» и, следовательно, эффективно взаимодействуют только с ближайшими соседями¹.

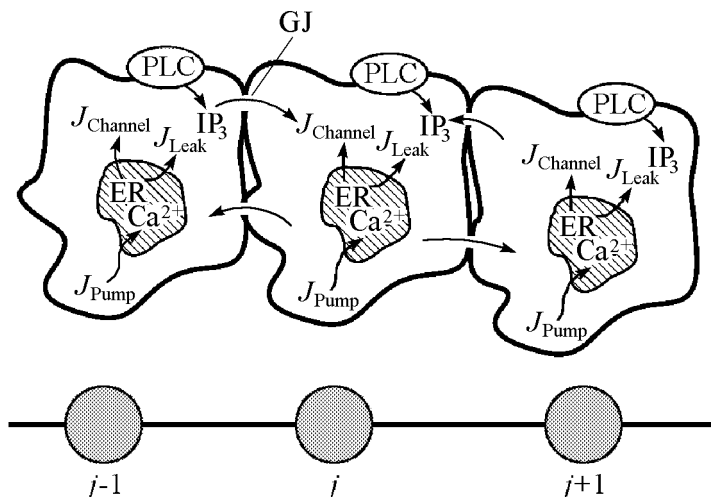


Рис. 1. Одномерная сеть взаимодействующих кальциевых осцилляторов – астроцитов. PLC – phospholipase C; GJ – щелевой контакт; ER – эндоплазматический ретикулум. Стрелками показаны направления внутриклеточных токов активных веществ

¹Второй механизм взаимодействия астроцитов, допускающий нелокальные взаимодействия через внеклеточную диффузию АТФ [6], в данной работе не рассматривается.

Динамика сети из N элементов описывается следующей многомерной системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_j}{dt} = J_{IP_3}(x_j, y_j) + k_{IP_3}(x_{j-1} - 2x_j + x_{j+1}), \\ \frac{dy_j}{dt} = J_{Ca}(x_j, y_j, z_j), \\ \frac{dz_j}{dt} = H_{Ca}(x_j, y_j, z_j), \\ j = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (1)$$

Переменная $x_j = [IP_3]$ описывает концентрацию посредника IP_3 , изменения которой определяются внутриклеточными преобразованиями $J_{IP_3}(x_j, y_j)$ и межклеточной диффузией с коэффициентом k_{IP_3} . Переменная $y_j = [Ca^{2+}]$ описывает концентрацию кальция в цитозоли и определяется суммарным током кальция, $J_{Ca}(x_j, y_j, z_j)$. Переменная z_j определяет долю открытых кальциево-зависимых каналов эндоплазматического ретикулума с функцией инактивации $H_{Ca}(x_j, y_j, z_j)$. Выражения для функций правых частей (1) имеют вид [7, 9, 12]

$$\begin{aligned} J_{IP_3}(x_j, y_j) &= v_4 \left(\frac{y_j + (1 - \alpha)k_4}{y_j + k_4} \right) - \frac{1}{\tau_r} (x_j - [IP_3]^*), \\ J_{Ca}(x_j, y_j, z_j) &= J_{Channel} - J_{Pump} + J_{Leak} + J_{in} - J_{out}, \\ H_{Ca}(x_j, y_j, z_j) &= \frac{z_\infty - z_j}{\tau_z}. \end{aligned} \quad (2)$$

Первое слагаемое в J_{IP_3} описывает синтез IP_3 за счет так называемого PLC- δ механизма. Изменение внутриклеточной концентрации кальция J_{Ca} определяется током кальция через IP_3 -зависимые каналы мембраны ЭР (см. рис. 1)

$$J_{Channel} = v_1 x_j^3 y_j^3 z_j^3 \frac{(c_0 - (c_1 + 1) y_j)}{((x_j + d_1)(y_j + d_5))^3},$$

активным током кальция, создаваемым АТФ-зависимыми насосами, закачивающими кальций обратно в ЭР,

$$J_{Pump} = v_3 \left(\frac{y_j^2}{k_3^2 + y_j^2} \right),$$

током утечки

$$J_{Leak} = v_2 (c_0 - (c_1 + 1) y_j)$$

и токами кальция через плазматическую мембрану астроцита

$$\begin{aligned} J_{in} &= v_5 + v_6 \frac{x_j^2}{k_2^2 + x_j^2}, \\ J_{out} &= k_1 y_j. \end{aligned}$$

Функция инактивации кальциевых каналов ЭР z_∞ и время релаксации τ_z определяются следующими выражениями:

$$z_\infty = \frac{Q_2}{Q_2 + y_j},$$

$$\tau_z = \frac{1}{a_2(Q_2 + y_j)},$$

$$Q_2 = d_2 \left(\frac{x_j + d_1}{x_j + d_3} \right).$$

Константы и параметры, входящие в выражения для функций правых частей, определяются кинетикой биохимических преобразований [7]. В соответствии с экспериментальными данными исследования культуры астроцитов [9], зафиксируем значения констант, перечисленные в таблице. Выберем в качестве контрольных параметры v_4 и k_{IP_3} , определяющие динамику диффундирующей переменной. Предполагаем, что на границах сети (см. рис. 1) выполнены граничные условия «нулевого потока»:

$$x_0 = x_1, \quad x_{N+1} = x_N. \quad (3)$$

Как было показано в предыдущих исследованиях [7, 9], динамика изолированной клетки, $k_{IP_3} = 0$, сравнительно проста. При $v_4 < v_4^{AH}$ система имеет единственное устойчивое состояние равновесия. При $v_4 = v_4^{AH}$ в результате бифуркации Андронова–Хопфа мягко рождается устойчивый предельный цикл, соответствующий внутриклеточным колебаниям кальция.

2. Возникновение осцилляторной неустойчивости в сети астроцитов

Рассмотрим теперь динамику системы при введении диффузионной связи, $k_{IP_3} > 0$. Состояние равновесия каждого из элементов определяет пространственно-однородное состояние равновесия сети. Координаты этого состояния по соответствующим компонентам $x_j = x^*$, $y_j = y^*$, $z_j = z^*$ ($j = 1, 2, \dots, N$) определяются следующим нелинейным уравнением:

$$\frac{v_1 \left(\frac{v_4 \tau_r (y^* + (1 - \alpha)k_4)}{y^* + k_4} + [IP_3]^* \right)^3 y^{*3} a_2^2 d_2^3 (c_0 - (c_1 + 1)y^*)}{(y^* + d_5)^3 \left(\left(\frac{v_4 \tau_r (y^* + (1 - \alpha)k_4)}{y^* + k_4} + [IP_3]^* \right) (y^* + d_2) + d_3 y^* + d_1 d_2 \right)^3} - \frac{v_3 y^{*2}}{y^{*2} + k_3^2} + v_2 (c^* - (c_1 + 1)y^*) = 0. \quad (4)$$

Таблица

Параметры модели

Параметр	Значение
c_0	2.0 мкмоль
c_1	0.185
v_1	6 с ⁻¹
v_2	0.11 с ⁻¹
v_3	2.2 мкмоль·с ⁻¹
v_5	0.025 мкмоль·с ⁻¹
v_6	0.2 мкмоль·с ⁻¹
k_1	0.5 с ⁻¹
k_2	1.0 мкмоль
k_3	0.1 мкмоль
a_2	0.14 мкмоль ⁻¹ · с ⁻¹
d_1	0.13 мкмоль
d_2	1.049 мкмоль
d_3	0.9434 мкмоль
d_5	0.082 мкмоль
α	0.8
τ_r	7.143 с
$[IP_3]^*$	0.16 мкмоль
k_4	1.1 мкмоль

Численное решение уравнения (4) показывает, что в диапазоне изменения переменных ($x_j, y_j, z_j > 0$) и для выбранных значений констант (см. таблицу) оно имеет единственное решение.

2.1. Спектр собственных значений состояния равновесия. Для определения устойчивости пространственно-однородного состояния сети в многомерном фазовом пространстве линеаризуем систему (1) в окрестности этого состояния. Для малых возмущений вида

$$x_i - x^* = A_i e^{\lambda t}, \quad y_i - y^* = B_i e^{\lambda t}, \quad z_i - z^* = C_i e^{\lambda t} \quad (5)$$

амплитуды $A_i, B_i, C_i \ll 1$ удовлетворяют следующей системе однородных линейных уравнений:

$$\begin{cases} A_i (J'_{IP_{3x}} - 2k_{IP_3} - \lambda) + B_i J'_{IP_{3y}} + C_i J'_{IP_{3z}} + A_{i-1} k_{IP_3} + A_{i+1} k_{IP_3} = 0, \\ A_i J'_{Ca_x} + B_i (J'_{Ca_y} - \lambda) + C_i J'_{Ca_z} = 0, \\ A_i H'_{Ca_x} + B_i H'_{Ca_y} + C_i (H'_{Ca_z} - \lambda) = 0, \\ A_0 = A_1, \quad A_{N+1} = A_N, \end{cases} \quad (6)$$

где $J'_{IP_{3x,y,z}}, J'_{Ca_x,y,z}, H'_{Ca_x,y,z}$ – частные производные функций правых частей (1) по соответствующим переменным. Исключая B_i и C_i из (6), легко получить

$$A_i \left(J'_{IP_{3x}} - 2k_{IP_3} - \lambda + J'_{IP_{3y}} \frac{H'_{Ca_x} J'_{Ca_z} - J'_{Ca_x} (H'_{Ca_z} - \lambda)}{(J'_{Ca_y} - \lambda)(H'_{Ca_z} - \lambda) - J'_{Ca_z} H'_{Ca_y}} \right) + k_{IP_3} (A_{i-1} + A_{i+1}) = 0. \quad (7)$$

Введем обозначение

$$S = \frac{1}{k_{IP_3}} \left(J'_{IP_{3x}} - 2k_{IP_3} - \lambda + J'_{IP_{3y}} \frac{H'_{Ca_x} J'_{Ca_z} - J'_{Ca_x} (H'_{Ca_z} - \lambda)}{(J'_{Ca_y} - \lambda)(H'_{Ca_z} - \lambda) - J'_{Ca_z} H'_{Ca_y}} \right). \quad (8)$$

Тогда (6) переписется в виде

$$\begin{cases} (S + 1)A_1 + A_2 = 0, \\ SA_i + A_{i-1} + A_{i+1} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, N - 1, \\ (S + 1)A_N + A_{N-1} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Для нахождения спектра собственных значений системы (9) воспользуемся техникой, предложенной в [15] для цепочечных систем с локальной диффузионной связью. Характеристический определитель для (9) можно записать в виде

$$Q_N(S) = \begin{vmatrix} S+1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & S & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & S+1 \end{vmatrix}. \quad (10)$$

После преобразований Q_N можно представить в виде

$$Q_N(S) = (S+1)((S+1)T_{N-2}(S) - T_{N-3}(S)) - (S+1)T_{N-3}(S) + T_{N-4}(S), \quad (11)$$

где $T_N(S)$ – «симметричный» определитель

$$T_N(S) = \begin{vmatrix} S & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & S & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & S \end{vmatrix}, \quad (12)$$

для которого справедливо следующее рекуррентное уравнение:

$$T_N(S) = ST_{N-1}(S) - T_{N-2}(S). \quad (13)$$

Используя (13), можно записать

$$Q_N(S) = (S+2)T_{N-1}(S). \quad (14)$$

Тогда корни характеристического уравнения $Q_N(S) = 0$ будут определяться уравнениями

$$S = -2, \quad T_{N-1}(S) = 0. \quad (15)$$

Согласно рекуррентному соотношению (13), определитель $T_N(S)$ можно выразить через многочлены Чебышева второго рода, корни которых известны [16]. Для уравнения $T_{N-1}(S) = 0$ они имеют вид

$$S = 2 \cos\left(\frac{\pi k}{N}\right), \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (16)$$

Для учёта корня $S = -2$ доопределим k значением $k = N$. Выражая S через параметры системы (1), получаем характеристическое уравнение в виде

$$\begin{aligned} & \lambda^3 - \lambda^2(J'_{IP_{3x}} - k_{IP_3}(S+2) + J'_{Ca_y} + H'_{Ca_z}) + \\ & + \lambda(J'_{Ca_y}H'_{Ca_z} - J'_{Ca_z}H'_{Ca_y} + (J'_{IP_{3x}} - k_{IP_3}(S+2))(J'_{Ca_y} + H'_{Ca_z}) - J'_{IP_{3y}}J'_{Ca_x}) - \\ & - (J'_{IP_{3y}}H'_{Ca_x}J'_{Ca_z} - J'_{IP_{3y}}J'_{Ca_x}H'_{Ca_z} + (J'_{IP_{3x}} - k_{IP_3}(S+2))(J'_{Ca_y}H'_{Ca_z} - J'_{Ca_z}H'_{Ca_y})) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Кубическое уравнение (17) определяет $3N$ собственных значений пространственно-однородного состояния сети астроцитов.

2.2. Анализ спектра собственных значений. Исследуем расположение корней уравнения (17) на комплексной плоскости λ в зависимости от контрольных параметров. Спектр состоит из N действительных отрицательных значений, не меняющих знак при изменении контрольных параметров v_4, k_{IP_3} , и $2N$ комплексно-сопряженных корней. При $v_4 < v_4^{AH}$ и $k_{IP_3} < k_{IP_3}^*(v_4)$, где $k_{IP_3}^*(v_4)$ – некоторое критическое значение, весь спектр находится слева от мнимой оси и состояние равновесия является устойчивым (рис. 2, а). При значении коэффициента связи выше $k_{IP_3}^*(v_4)$ пара комплексно-сопряженных корней переходит через мнимую ось (рис. 2, б).

В многомерном фазовом пространстве происходит бифуркация Андронова–Хопфа и мягко рождается устойчивый предельный цикл². Ему соответствует возникновение в сети малых квазисинусоидальных колебаний внутриклеточного кальция с частотой $f_1 \approx \text{Im } \lambda_1 / 2\pi$. Дальнейшее увеличение параметра k_{IP_3} соответствует последовательному переходу комплексно-сопряженных пар в неустойчивую область (рис. 2, в, з). В сети формируется многочастотный режим с $f_i \approx \text{Im } \lambda_i / 2\pi$, $i = 1, 2, \dots, N$. Зависимость действительной части собственных значений спектра от коэффициента связи представлена на рис. 3, а. Таким образом, в системе происходит каскад локальных бифуркаций, определяемых последовательностью бифуркационных параметров $k_1^{*+}, k_2^{*+}, \dots, k_M^{*+}$, где $M = M(v_4) < N$ – максимальное число неустойчивых пар в спектре и, соответственно, частот, зависящее от параметра v_4 . Отметим, что речь идет о частотах собственных неустойчивых мод в линейном приближении, которое справедливо только при достаточно малых амплитудах колебаний сети. При сравнительно больших значениях k_{IP_3} в спектре происходит каскад обратных переходов $k_1^{*-}, k_2^{*-}, \dots, k_M^{*-}$, при котором собственные значения

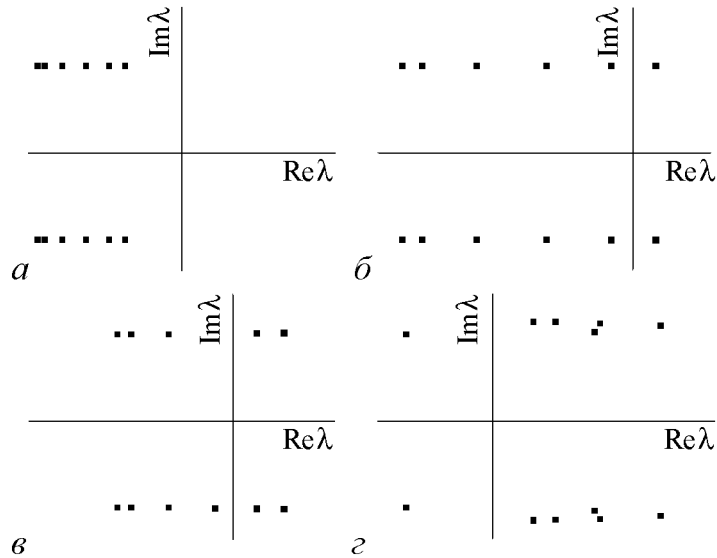


Рис. 2. Расположение комплексно-сопряженных корней спектра (17) пространственно-однородного состояния равновесия сети для $N = 6$ на комплексной плоскости. Параметры: а – $k_{IP_3} = 0.012$ мкмоль, б – $k_{IP_3} = 0.023$ мкмоль, в – $k_{IP_3} = 0.032$ мкмоль, з – максимальный «порядок» неустойчивости $M = 5$, $k_{IP_3} = 0.8$ мкмоль. Остальные параметры приведены в таблице

²Сценарий мягкого рождения автоколебаний (первая ляпуновская величина отрицательна) будет проиллюстрирован ниже плавной монотонной зависимостью амплитуды от параметра.

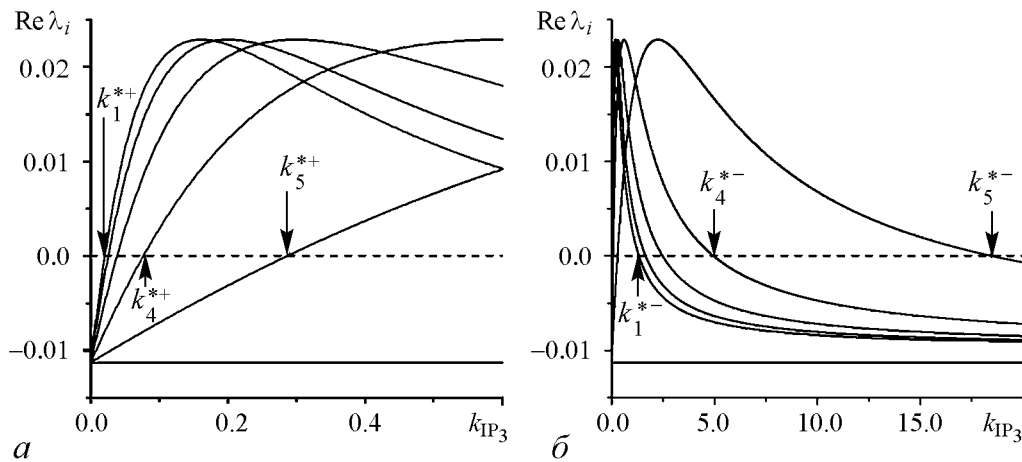


Рис. 3. Зависимость действительных частей собственных значений спектра (17) от коэффициента связи k_{IP_3} . Стрелками показаны соответствующие бифуркационные значения параметров. *a* – Переход собственных значений через ноль при сравнительно малых значениях k_{IP_3} . *б* – Возврат собственных значений в устойчивую область при больших значениях коэффициента связи

возвращаются в устойчивую область и, соответственно, количество неустойчивых «мод» (колебаний на собственных частотах в линейном приближении) уменьшается, а при $k > k_M^{*-}$ пространственно-однородное состояние сети вновь становится устойчивым (рис. 3, б).

3. Спонтанная колебательная активность сети астроцитов

3.1. Малые квазисинусоидальные колебания. Исследуем колебания сети астроцитов, возникновение которых при увеличении коэффициента связи предсказывает теоретический анализ, с помощью численного моделирования уравнений (1). При параметрах связи ниже первого критического значения k_1^{*+} весь спектр находится слева от мнимой оси и все возмущения затухают к устойчивому пространственно-однородному состоянию сети (рис. 4, а). При $k_1^{*+} < k_{IP_3} < k_2^{*+}$ в системе существует единственный устойчивый предельный цикл, что соответствует квазисинусоидальным колебаниям элементов сети, амплитуда которых и частота (близкая к $f_1 \approx 0.1$ Гц) не меняется во времени (рис. 4, б). Отметим, что амплитуда колебаний монотонно спадает при приближении к границам сети. В случае существования в спектре нескольких неустойчивых значений при $k_{IP_3} > k_1^{*+}$ характер колебаний сети становится более сложным (рис. 4, в). Амплитуда колебаний становится медленно модулированной функцией времени. Этот эффект можно объяснить следующим образом. В линейном приближении несколько собственных значений в спектре определяют развитие неустойчивости по нескольким собственным направлениям (многообразиям – в многомерном фазовом пространстве) – «собственным модам». При достаточно малой амплитуде колебаний формирование колебательного паттерна можно трактовать как результат слабого нелинейного взаимодействия собственных мод, что ведет, в частности, к появлению комбинационных частот в спектре. Поскольку частоты неустойчивых мод достаточно близки между собой, наличие медленной огибающей соответствует сравнительно малой разностной частоте, $\Delta f \ll f_1$.

3.2. Генерация кальциевых импульсов. Появление амплитудной модуляции при развитии неустойчивости и взаимодействии нескольких неустойчивых мод является принципиально важным для появления кальциевых импульсов – выбросов сравнительно большой амплитуды. Эти импульсы возникают спонтанно в различных элементах сети (рис. 4, *з*), стимулируя передачу возбуждения к соседним элементам за счет диффузионной связи. Эффект связан, с одной стороны, с возбудимыми свойствами локального элемента сети – генерации кальциевого отклика при наложении достаточно сильного внешнего возмущения. С другой стороны, модуляция амплитуды приводит к повышению размаха колебаний в определенных элементах сети и достижению порога генерации кальциевых импульсов в определенные моменты времени. Таким образом, взаимодействие элементов сети за счет диффузионной связи и появление спонтанных *подпороговых* колебаний, фактически, обеспечивает снижение эффективного порога возбуждения и, следовательно, возможность межэлементной «передачи» возбуждения. Отметим, что особенностью генерации и передачи импульсов при наличии подпороговых колебаний является также определенный временной масштаб генерации импульсов (в англ. *timing*), поскольку возбуждение происходит только на максимумах квазисинусоидальных подпороговых возмущений. Этот временной масштаб составляет для сети астроцитов примерно 10 секунд. Обратный переход через последовательность бифуркационных значений k_M^{*-} соответствует возвращению собственных значений в устойчивую область, уменьшению числа неустойчивых мод и приводит к снижению характерной амплитуды спонтанных колебаний. Как следствие, сеть возвращается в режим подпороговых колебаний с подавлением импульсной генерации.

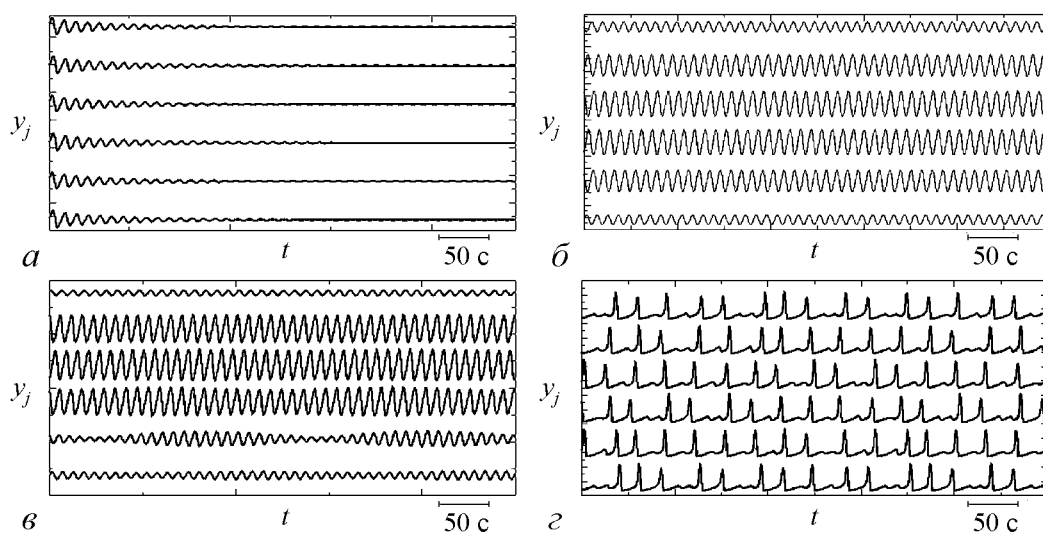


Рис. 4. Характерный вид кальциевых колебаний в цепочке при различных значениях коэффициента диффузии $k_{ГР_3}$ (мкмоль): 0.012 – затухающие колебания в окрестности устойчивого фокуса (*а*); 0.023 – квазисинусоидальные подпороговые колебания (*б*); 0.032 – амплитудная модуляция в многочастотном режиме (*в*); 0.8 – генерация кальциевых импульсов на пиках подпороговых колебаний (*з*). Остальные параметры приведены в таблице

3.3. Характеристики колебаний. Исследуем характеристики кальциевых сигналов, возникающих в сети астроцитов вследствие осцилляторной неустойчивости. Рассмотрим сначала представление колебаний в многомерном фазовом пространстве системы (1). При $k_{IP_3} < k_1^{*+}$ состояние равновесия является устойчивым фокусом (рис. 5, а). При превышении критического значения, согласно проведенному теоретическому анализу, в фазовом пространстве системы (1) рождается устойчивый предельный цикл малой амплитуды, проекция которого на плоскость переменных (x_i, y_i) представлена на рис. 5, б. Предельный цикл располагается в окрестности интегрального многообразия состояния равновесия (плоскость в линейном приближении), которое при $k_1^{*+} < k_{IP_3} < k_2^{*+}$ является седло-фокусом с размерностью устойчивого многообразия $\dim W_1^s = 3N - 2$ и неустойчивого – $\dim W_1^u = 2$. Отметим, что в проекции на плоскости переменных других элементов сети амплитуда цикла будет спадать при приближении к границам. При переходе через следующее бифуркационное значение k_1^{*+} вторая пара корней переходит через мнимую ось и размерность неустойчивого многообразия возрастает, $\dim W_2^u = 4$. Поскольку предельный цикл расположен вблизи многообразия W_1^u , то этот переход будет соответствовать потере устойчивости предельного цикла и рождению в многомерном пространстве тора. Движения на этом торе отвечают режиму биений, проекция которых на плоскость переменных (x_i, y_i) представлена на рис. 5, в. Режим генерации кальциевых импульсов, возникающий при дальнейшем увеличении k_{IP_3} характеризует возбудимые свойства сети астроцитов (рис. 5, г). Кальциевым импульсам соответ-

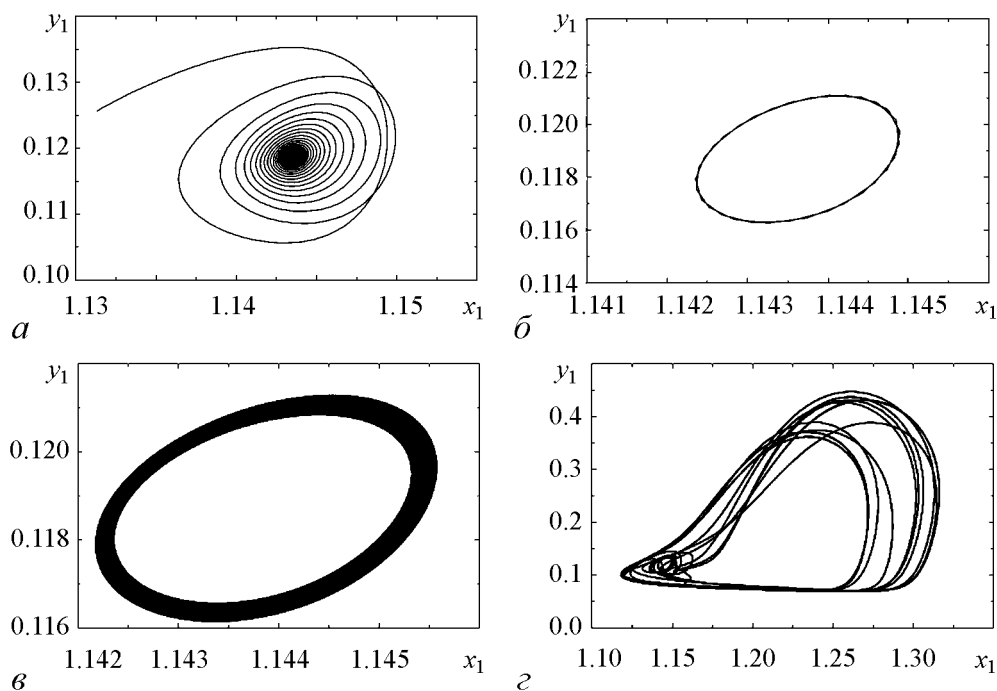


Рис. 5. Проекция фазового пространства системы (1) на плоскость (x_1, y_1) , отвечающие различным значениям коэффициента диффузионной связи k_{IP_3} между элементами (мкмоль): 0.012 – устойчивый фокус (а); 0.023 – устойчивый предельный цикл (б); 0.032 – режим биений (в); 0.8 – режим импульсной генерации (г). Остальные параметры приведены в таблице

ствуют характерные выбросы траекторий в проекции на плоскость соответствующего элемента в область более высоких концентраций кальция. Динамика фазовых траекторий в этом случае напоминает спонтанную генерацию импульсов в возбудимых системах типа ФитцХью–Нагумо при воздействии внешних периодических или шумовых возмущений [17].

Наличие возбудимых свойств в генерации кальциевых сигналов в сети астроцитов характеризует рис. 6, *a*, иллюстрирующий зависимость средней амплитуды колебаний сети от коэффициента диффузии k_{IP_3} . При увеличении k_{IP_3} выше первого бифуркационного значения происходит плавное увеличение средней амплитуды колебаний, что свидетельствует о мягком рождении предельного цикла в многомерном пространстве. При достижении порога генерации кальциевых импульсов амплитуда скачком возрастает и далее становится ограниченной, что является еще одной характеристикой сети астроцитов как возбудимой системы. Колебания на профиле амплитуды выше порога соответствуют различному числу импульсов, возникающих на фиксированном интервале времени. Другим словами, импульсы появляются не на каждом пике подпороговых колебаний (см. рис. 4, *z*), и характер их генерации является нерегулярным. Это свойство иллюстрирует бифуркационная диаграмма рис. 6, *б*, на котором представлена зависимость наблюдаемых величин межимпульсного интервала (в англ. interspike interval, ISI) для всех элементов сети от коэффициента диффузии k_{IP_3} . Наряду со сравнительно малыми интервалами (один-два периода подпороговых колебаний), являющимися наиболее вероятными (наибольшая плотность точек на диаграмме), в элементах возможны сравнительно большие интервалы эволюции в подпороговом режиме без генерации.

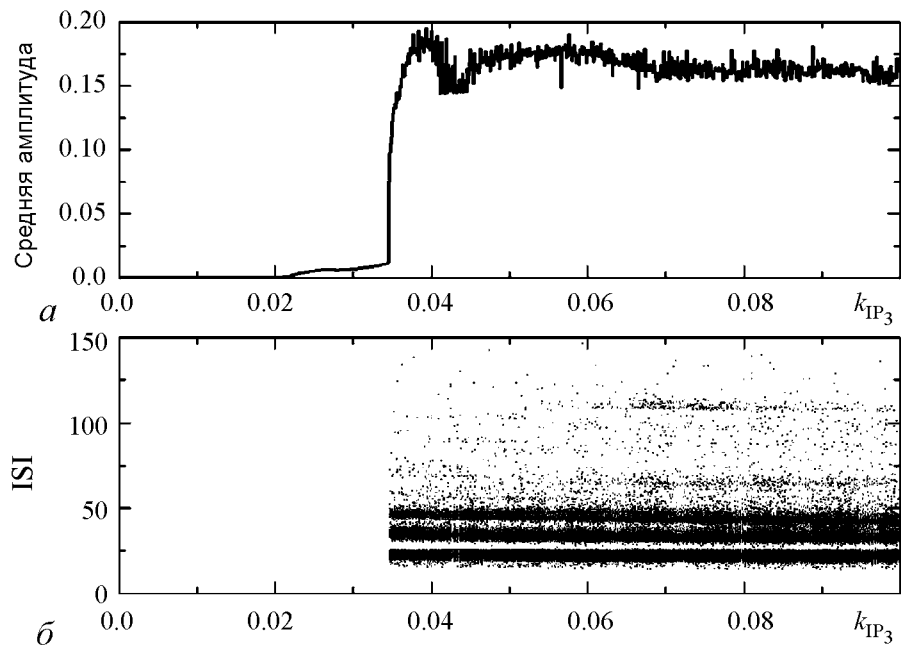


Рис. 6. *a* – Средняя амплитуда колебаний цепочки при различных значениях коэффициента связи k_{IP_3} между элементами. Резкое увеличение амплитуды при достижении коэффициентом k_{IP_3} значения 0.0346 мкмоль соответствует появлению кальциевых импульсов. *б* – Бифуркационная диаграмма наблюдаемых в $N = 6$ элементах сети интервалов следования кальциевых импульсов в зависимости от коэффициента связи

Заключение

В работе проведено исследование коллективной динамики сети диффузионно-связанных кальциевых генераторов, моделирующих активность глиальных клеток мозга – астроцитов. Отметим наиболее важные его результаты.

- Локальная диффузионная связь в сети взаимодействующих кальциевых осцилляторов (астроцитов) приводит к неустойчивости однородного распределения концентрации внутриклеточного кальция. Потеря устойчивости происходит через бифуркацию Андронова–Хопфа.

- Неустойчивость имеет осцилляторный характер и выражается в возникновении спонтанных квазисинусоидальных коллективных колебаний элементов.

- Динамика неустойчивости характеризуется наличием последовательностей критических (бифуркационных) значений, соответствующих переходам (прямому и обратному) собственных значений спектра состояния равновесия через мнимую ось. Эти переходы соответствуют появлению (исчезновению) многочастотных осцилляторных режимов сети, характеризуемых медленной (по сравнению с периодом колебаний) модуляцией амплитуды.

- На пиках подпороговых колебаний возможна спонтанная генерация кальциевых импульсов сравнительно большей по отношению к подпороговым колебаниям амплитуды.

Возникновение подпороговых колебаний вследствие неустойчивости характеризует два важных свойства динамики сети астроцитов. С точки зрения элемента сети подпороговые колебания, возникающие за счет диффузии IP_3 , фактически снижают эффективный порог генерации импульсов (см. рис. 4, z). Более того, такая генерация вследствие коллективного взаимодействия обладает характерным временным масштабом (в англ. *timing*), определяемым периодом подпороговых колебаний. Наличие такого сравнительно медленного масштаба у глиальных сетей может оказывать существенное влияние на временные характеристики регуляции активности основных сигнальных клеток мозга – нейронов. Заметим также, что неустойчивость и подпороговые колебания в сети астроцитов (1) были получены в биологически релевантном диапазоне изменения контрольных параметров, выбранных согласно проведенным ранее экспериментальным исследованиям.

С точки зрения динамики систем типа «реакция–диффузия» обнаруженная неустойчивость принципиально отличается от известных авторам сценариев для классических моделей такого типа. Основными отличиями являются: появление неоднородного по пространству осцилляторного паттерна с малым (порядка расстояния между элементами) пространственным масштабом и наличие последовательности бифуркационных значений, соответствующих формированию многочастотных колебательных режимов.

Работа поддержана грантами РФФИ (08-02-00724, 06-02-16137), грантом Президента Российской Федерации (МД-4602.2007.2), Фондом содействия отечественной науке, Программой Президиума РАН «Молекулярная и клеточная биология».

Библиографический список

1. Николлс Дж., Мартин Р., Валлас Б. Фукс П. От нейрона к мозгу. М.: Изд-во УРСС. 2003. 672 С.
2. Рубин А.Б. Биофизика: В 2 т. М.: Книжный дом «Университет», 2000. 486 с.

3. Principles of Neural Science / Eds. E.R. Kandel, J.H. Schwartz, T.M. Jessell. Third Edition. Prentice-Hall Intern. Inc. 1991. 1135 p.
4. *Scott A.* Neuroscience: a mathematical primer. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
5. *Izhikevich E.M.* Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting, MIT Press, 2007.
6. *Verkhratsky A., Butt A.* Glial Neurobiology, Wiley, 2007.
7. *De Young G.W., Keizer J.* A single-pool inositol 1,4,5-trisphosphate-receptor-based model for agonist-stimulated oscillations in Ca^{2+} concentration //Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1992. Vol. 89. P. 9895.
8. *Li Y., Rinzel J.* Equations for InsP_3 receptor-mediated $[\text{Ca}^{2+}]_i$ oscillations derived from a detailed kinetic model: a Hodgkin–Huxley-like formalism //J. Theor. Biol. 1994. Vol. 166. P. 461.
9. *Ullah G., Jung P., Cornell-Bell A.H.* Anti-phase calcium oscillations in astrocytes via inositol (1, 4, 5)-trisphosphate regeneration //Cell Calcium. 2006. Vol. 39. P. 197.
10. *Bennett M.V.L., Jorge E.C., Bukauskas F.F., Sáez J.C.* New roles for astrocytes: Gap junction hemichannels have something to communicate //Trends in Neurosciences. 2003. Vol. 26, № 11. P. 610.
11. *Timofeeva Y., Coombes S.* Wave bifurcation and propagation failure in a model of Ca^{2+} release // J. Math. Biol. 2003. Vol. 47, № 3. P. 249.
12. *Nadkarni S., Jung P.* Spontaneous oscillations of dressed neurons: a new mechanism for epilepsy? // Phys. Rev. Lett. 2003. Vol. 91. P. 268101.
13. *Volman V., Ben-Jacob E., Levine H.* The astrocyte as a gatekeeper of synaptic information transfer // Neural Comp. 2007. Vol. 19. P. 303.
14. *Halassa M.M., Fellin T., Takano H., Dong J.-H., Haydon P.G.* Synaptic islands defined by the territory of a single astrocyte // J. Neurosci. Vol. 27, № 24. P. 6473.
15. *Nekorkin V.I., Velarde M.G.* Synergetic Phenomena in Active Lattices. Berlin: Springer, 2002.
16. CRC Standard Mathematical Tables and Formulae / Ed. D. Zwillinger. Boca Raton, FL: CRC Press, 1995.
17. *Makarov V.A., Nekorkin V.I., Velarde M.G.* Spiking behavior in a noise-driven system combining oscillatory and excitatory properties // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 86, № 15. P. 3431.

*Поступила в редакцию 22.10.2008
После доработки 1.02.2009*

OSCILLATORY INSTABILITY AND SPONTANEOUS SUBTHRESHOLD OSCILLATIONS IN A NETWORK OF DIFFUSIVELY COUPLED CALCIUM OSCILLATORS

V.B. Kazantsev, A.V. Vorobiev

The paper is devoted to the investigation of the dynamics of a network of interacting astrocytes. The astrocytes represent brain glial cells capable to generate chemical activity signals (calcium pulses). Similarly to nerve cells (neurons) the astrocytes form networks

of interacting units coupled by means of gap junctions. The junctions represent special protein channels providing the diffusion of chemically active species between neighboring cells. It is believed that calcium signals in astrocytes can regulate the efficiency of synaptic transmission in neighboring neuronal cells. In the present paper we investigate the processes of oscillatory activity generation in a one-dimensional network of coupled astrocytes. The dynamics of local cell is described by the third order nonlinear differential equation system that has been obtained from the detailed description of biochemical kinetics in the cell (de Young and Keizer, 1992; Li and Rinzel, 2003; Ullah, et al., 2006). The model accounting for the diffusive coupling represent a three-component reaction-diffusion network with single diffusing component. It is proven that there exists a critical value of diffusion coefficient above which the oscillatory instability at 0.1 Hz frequency develops and spontaneous low-amplitude quasisinusoidal oscillations (of 0.05 μM) appear. Corresponding eigenvalue spectrum is obtained and analyzed. It is found that further increase of the coupling coefficients leads to the appearance of multi-frequency mode with the modulation of the oscillation amplitude and spontaneous calcium pulse generation.

Keywords: Calcium signals, subthreshold oscillations, diffusive instability, astrocyte.



Казанцев Виктор Борисович – родился в Дзержинске, Горьковской области (1973), окончил радиофизический факультет ННГУ (1996). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1999), доктора физико-математических наук (2006). В настоящее время является заведующим лабораторией «Нелинейных процессов в живых системах» Института прикладной физики РАН и заведующим кафедрой нейродинамики и нейробиологии на биологическом факультете ННГУ им. Н.И. Лобачевского в Нижнем Новгороде. Область научных интересов – теория колебаний и волн, структуры и волны в многоэлементных сетевых системах, нейродинамика. Имеет более 70 научных публикаций.

E-mail: vkazan@neuron.appl.sci-nnov.ru

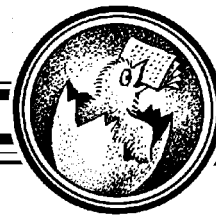
Институт прикладной физики РАН
603950, Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46



Воробьев Артем Викторович – родился в Горьком (1987). Студент магистратуры радиофизического факультета Нижегородского государственного университета им. Лобачевского по направлению «Радиофизические методы в нейробиологии». Область научных интересов – динамика нейроно-глиальных систем, вычислительная математика. Имеет 4 научные публикации.

E-mail: art.vorobiev@gmail.com

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23



ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ ДИОДА ПИРСА*

А.В. Тутов

В работе последовательно рассмотрены особенности вывода дисперсионного уравнения для различных моделей диода Пирса.

Ключевые слова: Диод Пирса, дисперсионное уравнение, влияние постоянного однородного магнитного поля.

Введение

Диодом Пирса будем называть систему, состоящую из двух плоских сеток-электродов, в область между которыми инжектируется пучок электронов. Причем межэлектродный промежуток заполнен положительным ионным фоном, плотность заряда которого по величине равна невозмущенной плотности заряда электронного потока. Ранее было проведено несколько исследований возникновения неустойчивости в этой системе. Д. Пирс [1] получил дисперсионное соотношение для случая одномерного потока в системе с неограниченными поперечными размерами и неподвижными ионами. В последующих исследованиях модель усложнялась, чтобы приблизиться к реальным системам. В работе [2] учтена возможность столкновения электронов; в [3] – возможность поперечного движения электронов в системе с неограниченными поперечными размерами. В данной работе исследовалась неустойчивость Пирса в системе с неограниченными поперечными размерами при наличии постоянного магнитного поля, параллельного электронному потоку. Очевидно, что такое поле может влиять только на электроны, имеющие поперечную компоненту скорости. Поэтому за основу была принята модель, предложенная в [3], с внесенным магнитным полем.

1. Случай поперечного движения электронов с учетом влияния постоянного магнитного поля

Выбранная для исследования модель описывается системой трех уравнений: уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad (1)$$

*Работа доложена на школе-семинаре «Нелинейные дни в Саратове для молодых» в октябре 2008 года.

уравнением движения

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = \frac{e}{m} \vec{E} + \frac{e}{m} [\vec{v} \vec{B}] \quad (2)$$

и уравнением Пуассона

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \quad (3)$$

где \vec{v} , ρ – вектор скорости и плотность объемного заряда электронов; e , m – заряд и нерелятивистская масса электрона; \vec{E} – вектор напряженности электрического поля; \vec{B} – вектор индукции магнитного поля.

Для решения системы проведем линеаризацию: $\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}$, $\vec{v} = \vec{v}_0 + \tilde{v}$, $\operatorname{div} \vec{v}_0 = 0$, $\operatorname{grad} \rho_0 = 0$, считая, что $\tilde{\rho} \ll \rho_0$, $|\tilde{v}| \ll |\vec{v}_0|$. Полагая, что все переменные величины изменяются во времени как $e^{-j\omega t}$, получим

$$\left\{ \begin{array}{l} -j\omega\tilde{\rho} + jk_x\rho_0\tilde{v}_x + jk_y\rho_0\tilde{v}_y + \rho_0\frac{\partial\tilde{v}_z}{\partial z} + v_0\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial z} = 0, \\ -j\omega\tilde{v}_x + v_0\frac{\partial\tilde{v}_x}{\partial z} = -j\eta k_x\varphi - B\eta\tilde{v}_y, \\ -j\omega\tilde{v}_y + v_0\frac{\partial\tilde{v}_y}{\partial z} = -j\eta k_y\varphi + B\eta\tilde{v}_x, \\ -j\omega\tilde{v}_z + v_0\frac{\partial\tilde{v}_z}{\partial z} = -\eta\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -4\pi\tilde{\rho}, \end{array} \right. \quad (4)$$

здесь $\eta = e/m$.

Введем дифференциальный оператор $\Delta = (-j\omega + v_0\partial/\partial z)$ и будем считать, что потенциал $\varphi \sim e^{-jk_x x - jk_y y}$ ($k_{x,y}$ – постоянные распространения). Тогда систему можно переписать в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\tilde{\rho} = -jk_x\rho_0\tilde{v}_x - jk_y\rho_0\tilde{v}_y - \rho_0\frac{\partial\tilde{v}_z}{\partial z}, \quad (a) \\ \Delta\tilde{v}_x = -j\eta k_x\varphi - B\eta\tilde{v}_y, \quad (б) \\ \Delta\tilde{v}_y = -j\eta k_y\varphi + B\eta\tilde{v}_x, \quad (в) \\ \Delta\tilde{v}_z = -\eta\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad (г) \\ k_x^2\varphi + k_y^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 4\pi\tilde{\rho}. \quad (д) \end{array} \right. \quad (5)$$

В дальнейшем символ « \sim » у малых приращений скорости и плотности опущен для упрощения записи. Применяв дифференциальный оператор, из уравнения (б) системы (5) получаем

$$\Delta^2 v_x = -j\eta k_x \Delta\varphi - \omega_c \Delta v_y,$$

где $\omega_c = B\eta$ – циклотронная частота.

Подставляя Δv_y в полученное уравнение, имеем

$$(\Delta^2 + \omega_c^2) v_x = -j\eta k_x \Delta\varphi + j\eta \omega_c k_y \varphi.$$

Аналогично

$$(\Delta^2 + \omega_c^2) v_y = -j\eta k_y \Delta\varphi - j\eta \omega_c k_x \varphi.$$

Таким образом,

$$v_x = \frac{j\eta(-k_x\Delta + k_y\omega_c)}{(\Delta^2 + \omega_c^2)}\varphi, \quad (6)$$

$$v_y = -\frac{j\eta(k_y\Delta + k_x\omega_c)}{(\Delta^2 + \omega_c^2)}\varphi, \quad (7)$$

$$v_z = -\frac{\eta}{\Delta} \frac{\partial\varphi}{\partial z}. \quad (8)$$

С учетом (6)–(8) из уравнения (а) системы (5) находим

$$\rho = \frac{\omega_p^2}{4\pi\Delta^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \frac{\omega_p^2 k^2}{4\pi(\Delta^2 + \omega_c^2)}\varphi,$$

где $\omega_p^2 = 4\pi\eta\rho_0$ (ω_p – плазменная частота), $k^2 = k_x^2 + k_y^2$, и из уравнения (д) получаем

$$\left(1 + \frac{\omega_p^2}{\Delta^2}\right) \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\Delta^2 + \omega_c^2}\right) k^2\varphi = 0 \quad (9)$$

или после преобразования

$$\Delta^2 [\Delta^2 + \omega_c^2] \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \omega_p^2 [\Delta^2 + \omega_c^2] \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \Delta^2 [\Delta^2 + \omega_c^2] k^2\varphi - \Delta^2 \omega_p^2 k^2\varphi = 0. \quad (10)$$

Раскрывая операторы, получим дифференциальное уравнение шестого порядка для потенциала в виде

$$\begin{aligned} &v_0^4 \frac{\partial^6\varphi}{\partial z^6} - 4j\omega v_0^3 \frac{\partial^5\varphi}{\partial z^5} + (\omega_c^2 v_0^2 - 6\omega^2 v_0^2 + \omega_p^2 v_0^2 - k^2 v_0^4) \frac{\partial^4\varphi}{\partial z^4} + \\ &+ (4j\omega^3 v_0 - 2j\omega_c^2 \omega v_0 - 2j\omega\omega_p^2 v_0 + 4j\omega v_0^3 k^2) \frac{\partial^3\varphi}{\partial z^3} + \\ &+ (\omega^4 - \omega_c^2 \omega^2 + \omega_c^2 \omega_p^2 - \omega_p^2 \omega^2 + 6k^2 \omega^2 v_0^2 - \omega_c^2 k^2 v_0^2 - \omega_p^2 k^2 v_0^2) \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \\ &+ (2j\omega_c^2 \omega k^2 - 4j\omega^3 k^2 v_0 + 2jv_0 \omega_p^2 \omega k^2) \frac{\partial\varphi}{\partial z} + (\omega_c^2 \omega^2 k^2 + \omega_p^2 \omega^2 k^2 - \omega^4 k^2) \varphi = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Это линейное однородное дифференциальное уравнение, решение которого в общем виде есть

$$\varphi = \sum_{i=1}^6 C_i e^{k_i z}, \quad (12)$$

где $C_i = \text{const}$. Из уравнения (д) системы (5), используя (12), получаем

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^6 (k^2 - k_i^2) C_i e^{k_i z}. \quad (13)$$

Далее, применив к уравнению (а) системы (5) дифференциальный оператор Δ , найдем

$$\Delta^2 \rho = -jk_x \rho_0 \Delta v_x - jk_y \rho_0 \Delta v_y - \rho_0 \frac{\partial}{\partial z} (\Delta v_z).$$

Подставляя уравнения (б), (в) и (г) системы (5) в полученное выше соотношение, имеем

$$k_x v_y - k_y v_x = \frac{4\pi \Delta^2 \rho - \omega_p^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k^2 \omega_p^2 \varphi}{4\pi j \rho_0 \omega_c}. \quad (14)$$

Умножим уравнение (б) системы (5) на k_y , а (в) – на k_x , и вычтем из полученного второго уравнения первое. Тогда

$$\Delta (k_x v_y - k_y v_x) = \omega_c (k_x v_x + k_y v_y). \quad (15)$$

Из уравнений (14) и (15) можно получить систему двух уравнений

$$\begin{cases} k_x v_y - k_y v_x = \frac{1}{4\pi j \rho_0 \omega_c} \left(4\pi \Delta^2 \rho - \omega_p^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k^2 \omega_p^2 \varphi \right), \\ k_x v_x + k_y v_y = \frac{1}{4\pi j \rho_0 \omega_c^2} \Delta \left(4\pi \Delta^2 \rho - \omega_p^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k^2 \omega_p^2 \varphi \right). \end{cases} \quad (16)$$

Из системы уравнений (16) легко найти выражения для компонент скорости

$$v_x = \frac{\eta}{j\omega_p^2 \omega_c k^2} \sum_{i=1}^6 \left[\left(k_y - k_x \frac{(-j\omega + k_i v_0)}{\omega_c} \right) \times \right. \\ \left. \times (v_0^2 k_i^2 - 2j\omega v_0 k_i + \omega_p^2 - \omega^2) (k^2 - k_i^2) C_i e^{k_i z} \right], \quad (17)$$

$$v_y = \frac{\eta}{j\omega_p^2 \omega_c k^2} \sum_{i=1}^6 \left[\left(k_x - k_y \frac{(-j\omega + k_i v_0)}{\omega_c} \right) \times \right. \\ \left. \times (v_0^2 k_i^2 - 2j\omega v_0 k_i + \omega_p^2 - \omega^2) (k^2 - k_i^2) C_i e^{k_i z} \right]. \quad (18)$$

Далее воспользуемся уравнениями (а) и (г) системы (5). Комбинация их дает

$$j\omega v_z = \eta \frac{\partial \varphi}{\partial z} - v_0 \left(\frac{\Delta \rho}{\rho_0} + jk_x v_x + jk_y v_y \right). \quad (19)$$

После подстановки в (19) соотношений (12), (13), (17) и (18) и упрощения получим

$$v_z = \frac{\eta}{j\omega_c^2 \omega_p^2 \omega k^2} \sum_{i=1}^6 \left[\omega_c^2 \omega_p^2 k^2 k_i - v_0 \omega_c^2 k^2 (k^2 - k_i^2) (-j\omega + v_0 k_i) - \right. \\ \left. - v_0 (2k_x k_y \omega_c + jk^2 \omega - k^2 k_i v_0) (v_0^2 k_i^2 - 2j\omega v_0 k_i + \omega_p^2 - \omega^2 - 2j\omega v_0 k_i) \times \right. \\ \left. \times (k^2 - k_i^2) \right] C_i e^{k_i z}. \quad (20)$$

С учетом выведенных выше соотношений граничные условия для $z = 0$ и $z = L$, где L – расстояние между электродами, могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned}
\varphi|_{z=0} = 0, \quad \sum_{i=1}^6 C_i &= 0, \\
\varphi|_{z=L} = 0, \quad \sum_{i=1}^6 C_i e^{k_i L} &= 0, \\
\rho|_{z=0} = 0, \quad \sum_{i=1}^6 (k^2 - k_i^2) C_i &= 0, \\
v_x|_{z=0} = 0, \quad \sum_{i=1}^6 [(k_y \omega_c - k_x (-j\omega + k_i v_0)) (v_0^2 k_i^2 - 2j\omega v_0 k_i + \omega_p^2 - \omega^2) \times \\
&\quad \times (k^2 - k_i^2) C_i] = 0, \\
v_y|_{z=0} = 0, \quad \sum_{i=1}^6 [(k_x \omega_c - k_y (-j\omega + k_i v_0)) (v_0^2 k_i^2 - 2j\omega v_0 k_i + \omega_p^2 - \omega^2) \times \\
&\quad \times (k^2 - k_i^2) C_i] = 0, \\
v_z|_{z=0} = 0, \quad \sum_{i=1}^6 [\omega_c^2 \omega_p^2 k^2 k_i - v_0 \omega_c^2 k^2 (k^2 - k_i^2) (-j\omega + v_0 k_i) - \\
&\quad - v_0 (2k_x k_y \omega_c + jk^2 \omega - k^2 k_i v_0) (v_0^2 k_i^2 - 2j\omega v_0 k_i + \omega_p^2 - \omega^2) \times \\
&\quad \times (k^2 - k_i^2) C_i] = 0.
\end{aligned} \tag{21}$$

Если теперь взять детерминант системы (21) и приравнять его нулю, то получим дисперсионное уравнение задачи. Однако аналитически его решить не удастся, поскольку для этого нам необходимы значения параметров k_i , но их можно получить только численными методами.

Рассмотрим переход полученного решения к случаям, рассмотренным в [1] и [3]. Отсутствие магнитного поля эквивалентно условию $\omega_c = 0$. После применения к уравнению (11) оператора, обратного оператору Δ^2 , легко получить следующее дифференциальное уравнение для потенциала:

$$v_0^2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} - 2j\omega v_0 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} + (\omega_p^2 - \omega^2 - k^2 v_0^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2j\omega k^2 v_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + (\omega^2 - \omega_p^2) k^2 \varphi = 0. \tag{22}$$

При подстановке $\varphi \sim e^{pz}$ приходим к характеристическому уравнению

$$v_0^2 p^4 - 2j\omega v_0 p^3 + (\omega_p^2 - \omega^2 - k^2 v_0^2) p^2 + 2j\omega k^2 v_0 p + (\omega^2 - \omega_p^2) k^2 = 0$$

или

$$(v_0^2 p^2 - 2j\omega v_0 p + \omega_p^2 - \omega^2) (p^2 - k^2) = 0. \tag{23}$$

Тогда $k_1 = j(\omega + \omega_p)/v_0$, $k_2 = j(\omega - \omega_p)/v_0$, $k_3 = k$, $k_4 = -k$.

Таким образом, выражение для потенциала имеет вид

$$\varphi = C_1 e^{j \frac{\omega + \omega_p}{v_0} z} + C_2 e^{j \frac{\omega - \omega_p}{v_0} z} + C_3 e^{kz} + C_4 e^{-kz}. \tag{24}$$

Представление решения в виде (12) справедливо для линейного уравнения с постоянными коэффициентами любого порядка. Следовательно, все выкладки также справедливы для любого порядка дифференциального уравнения.

Кроме того, в случае $\omega_c = 0$ последнее уравнение системы (21) является линейной комбинацией двух предыдущих уравнений. Таким образом, из граничных условий мы можем получить три уравнения

$$\begin{aligned}\varphi|_{z=0} &= 0, & C_1 + C_2 + C_3 + C_4 &= 0, \\ \varphi|_{z=L} &= 0, & C_1 e^{j\frac{\omega+\omega_p}{v_0}L} + C_2 e^{j\frac{\omega-\omega_p}{v_0}L} + C_3 e^{kL} + C_4 e^{-kL} &= 0, \\ \rho|_{z=0} &= 0, & \left(k^2 v_0^2 + (\omega + \omega_p)^2\right) C_1 + \left(k^2 v_0^2 + (\omega - \omega_p)^2\right) C_2 &= 0.\end{aligned}$$

Следует отметить, что в точности к такому же результату пришли авторы работы [3]. Однако последнее условие относительно скорости v_z не может быть получено исходя из развитого выше подхода. Его следует получить из системы уравнений (4), разумеется, упрощенной, то есть при $\omega_c = 0$. Имеем

$$v_z(0) = 0 - \frac{(\omega + \omega_p)}{\omega_p v_0} C_1 + \frac{(\omega - \omega_p)}{\omega_p v_0} C_2 - \frac{k}{(k v_0 - j\omega)} C_3 - \frac{k}{(k v_0 + j\omega)} C_4 = 0.$$

Равенство нулю детерминанта системы граничных условий даст нам следующее дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned}(e^{2kL} - 1) k^4 v_0^4 + j \left(e^{k+j\frac{\omega-\omega_p}{v_0}L} - e^{k+j\frac{\omega+\omega_p}{v_0}L} \right) k^3 v_0^3 \omega_p + \\ + (e^{2kL} - 1) \omega^2 (\omega^2 - \omega_p^2) + (e^{2kL} - 1) k^2 v_0^2 (2\omega^2 - \omega_p^2) + \\ + j k v_0 \omega_p \left[\left(e^{k+j\frac{\omega-\omega_p}{v_0}L} - e^{k+j\frac{\omega+\omega_p}{v_0}L} \right) \omega^2 - \right. \\ \left. - 2 \left(1 + e^{2kL} - e^{k+j\frac{\omega-\omega_p}{v_0}L} - e^{k+j\frac{\omega+\omega_p}{v_0}L} \right) \omega_p \omega + \right. \\ \left. + \left(e^{k+j\frac{\omega-\omega_p}{v_0}L} - e^{k+j\frac{\omega+\omega_p}{v_0}L} \right) \omega_p^2 \right] = 0,\end{aligned}\tag{25}$$

которое совпадает с полученным в работе [3].

Если теперь рассмотреть случай без поперечного движения электронов, то есть одномерный случай при $k = 0$, то, используя уравнение (22), находим следующее выражение для потенциала:

$$\varphi = Az + C_1 e^{j\frac{\omega+\omega_p}{v_0}z} + C_2 e^{j\frac{\omega-\omega_p}{v_0}z} + B,\tag{26}$$

где A, B, C_1, C_2 – постоянные. Такой же вид выражение для распределения потенциала имеет в работе Пирса [1].

Далее, используя уравнение Пуассона и применяя граничные условия, можно получить

$$\varphi = Az + Aj \frac{v_0}{2\omega_p} \frac{\omega - \omega_p}{\omega + \omega_p} \left[e^{-j\frac{\omega+\omega_p}{v_0}z} - 1 \right] - Aj \frac{v_0}{2\omega_p} \frac{\omega + \omega_p}{\omega - \omega_p} \left[e^{-j\frac{\omega-\omega_p}{v_0}z} - 1 \right].\tag{27}$$

Произведя замену $\omega x/v_0 = \theta$, $\omega_p x/v_0 = \theta_p$ и $A = K\omega^2/v_0$, имеем

$$\varphi = K\omega \left\{ \theta + \left(\frac{j}{2} \right) \left(\frac{\theta}{\theta_p} \right) \left[\frac{\theta - \theta_p}{\theta + \theta_p} \left(e^{-j(\theta+\theta_p)} - 1 \right) - \frac{\theta + \theta_p}{\theta - \theta_p} \left(e^{-j(\theta-\theta_p)} - 1 \right) \right] \right\}.\tag{28}$$

После учета граничного условия $\varphi(L) = 0$ приходим к дисперсионному уравнению

$$1 = \frac{j}{2\theta_p} \left[\frac{\theta + \theta_p}{\theta - \theta_p} \left(e^{-j(\theta - \theta_p)} - 1 \right) - \frac{\theta - \theta_p}{\theta + \theta_p} \left(e^{-j(\theta + \theta_p)} - 1 \right) \right]. \quad (29)$$

Это соотношение впервые было получено Джоном Пирсом в 1944 году в работе, положившей начало исследованиям диода, получившего его имя.

Заключение

Рассмотрена модель диода Пирса с неограниченными поперечными размерами и с внесенным магнитным полем. Учет влияния однородного постоянного магнитного поля на процессы в диоде существенно усложнил задачу. Полученное дисперсионное уравнение задачи решить аналитически не представляется возможным. Однако не исключается возможность численного расчета. Упрощение модели (рассмотрение частных случаев) приводит к уже известным теоретическим результатам.

Библиографический список

1. *Pierce J.R.* Limiting stable current in electron beams in the presence of ions // *J. Appl. Phys.* 1944. 15, 721.
2. *Frey J., Birdsall C.K.* Electron-stream diode instabilities with elastic collisions // *J. Appl. Phys.* 1965. 36, 2962.
3. *Иванов А.А., Путвинская Н.С.* Неустойчивость Пирса в системе с ограниченными размерами // *J. Tech. Phys.* 1975. Vol. XLV, № 8.

Поступила в редакцию 12.03.2009

DISPERSION EQUATION FOR VARIOUS MODELS OF PIERCE DIODE

A.V. Titov

Peculiarities of derivation of a dispersion equation for various models of Pierce diode have been sequentially considered in this paper.

Keywords: Pierce diode, dispersion equation, dependence on static uniform magnetic field.



Титов Алексей Владимирович – родился в Саратове (1988), окончил Лицей прикладных наук (2005). После окончания ЛПН поступил в Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского на факультет нелинейных процессов. В настоящее время является студентом 4 курса специальности «Радиофизика и электроника».

E-mail: titovAV88@gmail.com

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83



СИНХРОНИЗАЦИЯ РЕГУЛЯРНЫХ, ХАОТИЧЕСКИХ И СТОХАСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

В.С. Анищенко, В.В. Астахов, Т.Е. Вадивасова, Г.И. Стрелкова
Под общей редакцией проф. В.С. Анищенко

© В.С. Анищенко, В.В. Астахов, Т.Е. Вадивасова, Г.И. Стрелкова, 2008

© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008

М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. 144 с.

ISBN 978-5-93972-701-3

Книга посвящена систематическому изложению результатов теоретического, численного и экспериментального анализа эффектов синхронизации периодических, квазипериодических, хаотических и стохастических колебаний. Подробно излагается классическая теория синхронизации и обсуждаются пределы ее применимости к изучению эффекта синхронизации квазипериодических и непериодических колебаний. Книга может быть рекомендована в качестве учебного пособия по курсу «Нелинейная теория колебаний» для физико-математических специальностей университетов. Ориентирована на студентов старших курсов, аспирантов, молодых ученых и преподавателей. Книга включает 78 иллюстраций и список литературы, содержащий 134 наименования.

Оглавление

Предисловие

Глава 1. Синхронизация периодических автоколебаний

1.1. Введение. 1.2. Внешняя синхронизация генератора ван дер Поля. Укороченные уравнения для амплитуды и фазы. 1.3. Бифуркационный анализ системы укороченных уравнений. 1.4. Бифуркационный анализ неавтономного генератора ван дер Поля. 1.5. Выводы

Глава 2. Синхронизация автоколебаний в присутствии шума

2.1. Введение. 2.2. Вынужденная синхронизация зашумленных автоколебаний гармонической внешней силой. 2.3. Взаимная синхронизация квазигармонических автогенераторов в присутствии шума. 2.4. Выводы

Глава 3. Синхронизация квазипериодических колебаний

3.1. Введение. 3.2. Взаимная синхронизация двух симметрично связанных генераторов. Резонансный предельный цикл на двумерном торе. 3.3. Воздействие

внешней периодической силы на резонансный предельный цикл в системе связанных генераторов. 3.4. Основные бифуркации квазипериодических режимов при синхронизации резонансного предельного цикла. 3.5. Особенности синхронизации резонансных предельных циклов. 3.6. Синхронизация двухчастотных колебаний в автогенераторе квазипериодических колебаний. 3.7. Результаты экспериментальных исследований. 3.8. Внешняя синхронизация квазипериодических колебаний двухчастотным сигналом. 3.9. Экспериментальный анализ внешней синхронизации двухчастотного генератора квазипериодическим сигналом. 3.10. Выводы

Глава 4. Синхронизация хаоса

4.1. Введение. 4.2. Частотно-фазовая синхронизация хаотических автоколебаний. 4.3. Исследование вынужденной синхронизации генератора спирального хаоса в натурном эксперименте. 4.4. Частотно-фазовая синхронизация хаоса в присутствии шума. 4.5. Полная синхронизация взаимодействующих хаотических систем. 4.6. Количественные характеристики степени синхронности хаотических автоколебаний. 4.7. Выводы

Глава 5. Синхронизация стохастических колебаний

5.1. Введение. 5.2. Внешняя синхронизация процесса переключений в бистабильном осцилляторе под действием шума и периодического сигнала. 5.3. Внешняя стохастическая синхронизация триггера Шмита. 5.4. Внешняя и взаимная стохастическая синхронизация процессов переключений в хаотических системах. 5.5. Стохастическая синхронизация как индуцированный шумом порядок. 5.6. Выводы

Заключение

Литература

Предисловие

Синхронизация – одно из фундаментальных свойств нелинейных систем, которое заключается в установлении определенных соотношений между характерными временами, частотами или фазами колебаний парциальных систем в результате их взаимодействия. Эффект синхронизации, открытый Гюйгенсом [1] в XVII, веке играет огромную роль в природе и технике, что отражено в ряде монографий [2–16]. Большое влияние на создание теории синхронизации оказало развитие электронных средств связи в первой половине XX века. В связи с чем можно отметить известную работу ван дер Поля [17]. В дальнейшем была детально разработана ставшая классической теория синхронизации периодических автоколебаний [2–5, 9, 10, 13, 18–26], в том числе в присутствии шума [27–31]. Имеются работы (хотя и не в столь значительном количестве), посвященные синхронизации квазипериодических колебаний [32–35].

В рамках классической теории различают *вынужденную синхронизацию*, т.е. синхронизацию автоколебаний внешним сигналом, и *взаимную синхронизацию*, наблюдающуюся при взаимодействии двух автоколебательных систем. В обоих случаях проявляются одни и те же эффекты, связанные с двумя классическими механизмами синхронизации: захватом собственных частот (и, соответственно, фаз) колебаний или же подавлением одной из двух независимых частот.

Пусть $\Phi_1(t)$ и ω_1 – фаза и частота одного квазигармонического автогенератора, а $\Phi_2(t)$ и ω_2 – фаза и частота другого, связанного с ним автогенератора. Условия синхронизации формулируются как

$$m\Phi_1(t) - n\Phi_2(t) = \text{const} \quad (1)$$

и

$$m\omega_1 = n\omega_2, \quad (2)$$

где m и n – целые числа. Условия (1), (2) определяют эффект захвата фаз и частот, который должен выполняться в некоторой области значений управляющих параметров, называемой областью синхронизации. Простейший случай 1:1 ($m = n = 1$) соответствует основной области синхронизации или области синхронизации на основном тоне.

Явление синхронизации автоколебаний в рамках хорошо разработанной теории синхронизации периодических колебаний уже многие годы привлекает особое внимание исследователей. Отчасти это обусловлено важностью данного явления с точки зрения практических приложений. В качестве примера можно привести синхронизацию электронных часов внешним воздействием высокостабильного генератора, в результате которой обеспечивается высокая точность времени в системе транспорта. Синхронизация мощных генераторов периодических колебаний с помощью слабого воздействия от внешнего высокостабильного генератора позволяет существенно улучшить их характеристики, такие как стабильность частоты, флуктуации амплитуды и фазы и другие.

В последние годы интерес к эффекту синхронизации проявляют биологи, химики и даже представители социальных и экономических наук. Отмечено синхронное поведение взаимодействующих клеток живой ткани, ансамблей нейронов, биологических популяций и т.д. Однако весьма существенно при исследовании этих проблем то, что анализируемые колебательные процессы здесь не всегда являются строго периодическими. Естественно, возникают многие вопросы о применимости классической теории синхронизации к такого рода колебательным процессам.

С открытием и доказательством возможности существования хаотических (непериодических) колебаний как особых решений дифференциальных уравнений естественно возникла проблема синхронизации таких колебаний. Появилось большое количество публикаций по этой проблеме [36–46], однако более или менее общей теории синхронизации хаотических колебаний пока не создано. Этому есть весомые причины, обусловленные широким спектром различных характеристик хаотических колебаний, отсутствием единого понимания сути эффекта и наличием неопределенности понятий фазы и частоты хаотических колебаний.

Не так давно было обнаружено, что явление подобное синхронизации можно наблюдать в классе колебательных систем, не являющихся, строго говоря, автогенераторами. Речь идет о так называемых стохастических осцилляторах – нелинейных диссипативных системах, в которых колебания возникают под действием шума. Различают два типа стохастических осцилляторов: возбудимые осцилляторы и бистабильные осцилляторы. Для возбудимых систем характерна генерация импульсов в условиях, когда сигнал внешнего воздействия превышает некоторый пороговый уровень. В результате действия шума такая система совершает стохастические колебания, представляющие собой случайную последовательность импульсов. Биста-

бильный стохастический осциллятор – это нелинейная система с двумя устойчивыми состояниями. Присутствие шума приводит к случайным переключениям системы из одного состояния в другое. В обоих случаях колебания описываются статистическими характеристиками, такими как средняя частота импульсов зажигания или средняя частота переключений. Эффекты частичного (нестроого) захвата средних частот и мгновенных фаз колебаний в системах указанного типа исследовались в ряде работ [14, 47–50]. По сути дела, в такого рода системах речь должна идти о так называемой «стохастической синхронизации», то есть о синхронизации случайных колебательных процессов.

В предлагаемой вниманию читателя книге делается попытка дать ответ на вопрос: возможно ли использовать и, если необходимо, в некотором смысле обобщить классические представления о синхронизации периодических колебаний на случай более сложных, квазипериодических, хаотических и стохастических колебаний? Если да, то нужно четко сформулировать границы применимости идей классической теории синхронизации к более сложным типам автоколебаний и выделить те конкретные типы колебательных процессов, для которых можно конструктивно использовать классические представления.

Книга включает пять глав. *В первой главе* последовательно излагается классическая теория синхронизации квазигармонических колебаний на примере синхронизации генератора ван дер Поля. Описаны важные аспекты теории, которые используются в качестве основы при рассмотрении синхронизации более сложных колебаний. *Во второй главе* излагается теория синхронизации генераторов типа ван дер Поля в условиях внешнего аддитивного шумового воздействия. Изложение ведется на основе классических работ Р.Л. Стратоновича. *В третьей главе* приведены результаты исследований синхронизации квазипериодических колебаний на примере колебаний с двумя независимыми частотами. Обсуждаются особенности применимости идей и выводов классической теории к случаю автогенератора квазипериодических колебаний. *Четвертая глава* посвящена анализу эффектов синхронизации хаотических колебаний. Показано, что наиболее конструктивно идеи классической теории можно использовать применительно лишь к особому типу хаотических автоколебаний, отвечающих режиму фазо-когерентного хаотического аттрактора. Наконец, *пятая глава* посвящена описанию эффектов синхронизации стохастических автоколебаний. Рассматриваются колебания, индуцированные шумом в бистабильных системах, и хаотические переключения в динамических системах с кризисом аттракторов.

Особенностью предлагаемой книги является следующее. При изложении классической теории синхронизации большее, чем обычно принято в учебных пособиях, внимание уделялось анализу бифуркаций устойчивых и неустойчивых синхронных движений в моделях различного уровня сложности (фазовое уравнение, укороченные уравнения для амплитуды и фазы, уравнение неавтономного осциллятора ван дер Поля); все представленные в работе графические иллюстрации были получены авторами специально для этой книги или взяты из оригинальных публикаций авторов. При расчетах использовались компьютерные программы, созданные на кафедре радиофизики и нелинейной динамики Саратовского госуниверситета, а также специальные программные комплексы [51].

Настоящее пособие ориентировано на студентов, аспирантов и преподавателей вузов по специальностям, включающим изучение теории колебаний, и может быть рекомендовано в качестве учебного пособия по курсу теории колебаний.

В пособии использованы научные результаты авторов, полученные в рамках Программы Министерства образования и науки РФ «Развитие научного потенциала высшей школы». Авторы выражают благодарность дирекции Инновационного образовательного проекта СГУ за частичное финансирование работ по созданию настоящего пособия.

Авторы пользуются возможностью поблагодарить аспирантов кафедры С.М. Николаева и С.А. Коблянского за проведение ряда сложных компьютерных экспериментов. Мы также благодарны воспитанникам кафедры А.Б. Нейману, И.А. Хованову, А.Н. Сильченко, Б.В. Шульгину, которые являются авторами и соавторами ряда научных работ, использованных в книге.

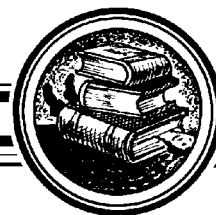
*В.С. Анищенко, В.В. Астахов,
Т.Е. Вадивасова, Г.И. Стрелкова*

Библиографический список к Предисловию

1. Х. Гюйгенс, *Три мемуара по механике* (Изд-во АН СССР, М., 1951).
2. А.А. Андронов, *Собрание трудов* (Изд-во АН СССР, Москва 1956).
3. К.Ф. Теодорчик, *Автоколебательные системы* (Гостехиздат, Москва 1952).
4. Т. Хаяси, *Нелинейные колебания в физических системах* (Мир, Москва 1968).
5. И.И. Блехман, *Синхронизация динамических систем* (Наука, Москва 1971).
6. Ю.М. Романовский, Н.В. Степанова, Д.С. Чернавский, *Математические модели в биофизике* (Наука, Москва 1975).
7. А.Г. Демьянченко, *Синхронизация генераторов гармонических колебаний* (Энергия, Москва 1976).
8. А.Т. Winfree, *The geometry of biological time* (Springer, New York 1980).
9. П.С. Ланда, *Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы* (Наука, Москва 1980).
10. И.И. Блехман, *Синхронизация в природе и технике* (Наука, Москва 1981).
11. Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations Waves and Turbulence* (Springer, Berlin 1984).
12. П.С. Ланда, *Нелинейные колебания и волны* (Наука, Москва 1997).
13. А. Пиковский, М. Розенблюм, Ю. Куртс, *Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление* (Техносфера, Москва 2003).
14. В.С. Анищенко, В.В. Астахов, Т.Е. Вадивасова, А.Б. Нейман, Г.И. Стрелкова, Л. Шиманский-Гайер, *Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах* (Изд-во Института компьютерных исследований, Москва, Ижевск, 2003).
15. E. Mosekilde, Yu. Maistrenko, D. Postnov, *Chaotic Synchronization. Applications to Living Systems* (World Scientific, Singapore 2002).
16. В. В. Матросов, В. Д. Шалфеев, *Динамический хаос в фазовых системах* (Изд-во ННГУ, Н.Новгород 2007).

17. B. Van-der-Poll, *Theory of the amplitude of free and forced triod vibration* (Radio Rev. 1920. Vol. 1. P. 701–710).
18. E.V. Appleton, *The automatic synchronization of triode oscillator Proc. of the Cambridge Philosophical Society* (Math. and Phys. Sciences. 1922. Vol. 21. P. 231–248).
19. А.А. Андронов, А.А. Витт, *К математической теории захватывания* (Журнал прикладной физики. 1930. Т. 7. С. 3–11).
20. А.Г. Майер, *К теории связанных колебаний двух самовозбужденных генераторов* (Уч. зап. ГГУ. 1935. Т. 2(5). С. 3–11).
21. В.И. Гапонов, *Два связанных генератора с мягким возбуждением* (ЖТФ. 1936. Т. 6, вып. 6. С. 801).
22. К.Ф. Теодорчик, *К теории синхронизации релаксационных автоколебаний* (ДАН СССР. 1943. Т. 40, вып. 2. С. 63–66).
23. Р.В. Хохлов, *К теории захватывания при малой амплитуде внешней силы* (ДАН СССР, 1954. Т. 97, вып. 3. С. 411–414).
24. И.И. Минакова, К.Ф. Теодорчик, *К теории синхронизации автоколебаний произвольной формы* (ДАН СССР. 1956. Т. 106, вып. 4. С. 658–660).
25. В.Н. Парыгин, *Взаимная синхронизация трех связанных автоколебательных генераторов в случае слабой связи* (Радиотехника и электроника. 1956. Т. 1, вып. 2. С. 197–204).
26. Г.М. Уткин, *Взаимная синхронизация генераторов на кратных частотах* (Радиотехника и электроника. 1957. Т. 2, вып. 1. С. 44–56).
27. Р.Л. Стратонович, *Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике* (Сов. радио, Москва 1961).
28. А.Н. Малахов, *Флуктуации в автоколебательных системах* (Наука, Москва 1968).
29. И.Г. Акопян, П.С. Ланда, *Синхронизация автоколебаний на обертонах при наличии шума* (Радиотехника и электроника. 1962. Т. 7, вып. 8. С. 1285–1293).
30. И.К. Костин, Ю.М. Романовский, *Флуктуации в системах многих связанных генераторов* (Вестник МГУ. Сер. физ. и астр. 1972. Т. 13, вып. 6. С. 698–705).
31. И.К. Костин, Ю.М. Романовский, *Взаимная синхронизация релаксационных генераторов в присутствии шума* (Изв. вузов. Радиофизика. 1975. Т. 18, вып. 1. С. 36–42).
32. П.С. Ланда, Н.Д. Таранкова, *Синхронизация генератора при модуляции его собственной частоты* (Радиотехника и электроника. 1976. Т. 21, вып. 2. С. 260–265).
33. В.Ф. Скупой, В.П. Копылов, *О синхронизации ЧМ-автогенератора* (Радиотехника и электроника. 1979. Т. 24, вып. 7. С. 1374–1379).
34. V. Anishchenko, S. Nikolaev, and J. Kurths, *Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasiperiodic motions* (Phys. Rev. E. 2006. Vol. 73. 056202).
35. В.С. Анищенко, С.М. Николаев, *Экспериментальное исследование синхронизации двухчастотных квазипериодических колебаний* (Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, вып. 6. С. 93–101).

36. H. Fujisaka, Y. Yamada, *Stability theory of synchronized motions in coupled oscillatory systems* (Progr. Theor. Phys. 1983. Vol. 69. P. 32–46).
37. A.S. Pikovsky, *On the interaction of strange attractors* (Z. Phys. B. 1984. Vol. 55. P. 149–154).
38. А.С. Пиковский, *Синхронизация фазы стохастических автоколебаний периодическим внешним сигналом* (Радиотехника и электроника. 1985. Т. 1. С. 1970–1974).
39. Ю.А. Кузнецов, П.С. Ланда, А.Ф. Ольховой, С.М. Перминов, *Амплитудный порог синхронизации как мера хаоса в стохастических автоколебательных системах* (ДАН СССР. 1985. Т. 281, вып. 2. С. 1164–1169).
40. В.С. Афраймович, Н.Н. Веричев, М.И. Рабинович, *Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах* (Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29, вып. 9. С. 1050–1060).
41. L. Pecora, T. Carroll, *Synchronization of chaotic systems* (Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64. P. 821–823).
42. В.С. Анищенко, Д.Э. Постнов, *Эффект захвата базовой частоты хаотических автоколебаний. Синхронизация странных аттракторов* (Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14, вып. 6. С. 569–573).
43. V.S. Anishchenko, T.E. Vadivasova, D.E. Postnov, M.A. Safonova, *Synchronization of chaos* (Int. J. of Bif. and Chaos. 1992. Vol. 2, no. 3. P. 633–644).
44. M.G. Rosenblum, A. Pikovsky, J. Kurths, *Phase synchronization of chaotic oscillations* (Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76(11). P. 1804–1807).
45. M.G. Rosenblum, A.S. Pikovsky, J. Kurths, *From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators* (Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 4193–4196).
46. N.F. Rulkov, M.M. Sushchik, L.S. Tsimring, H.D.I. Abarbanel, *Generalized synchronization of chaos in unidirectionally coupled chaotic systems* (Phys. Rev. E. 1995. Vol. 51. P. 980–995).
47. A.B. Neiman, *Synchronizationlike phenomena in coupled stochastic bistable systems* (Phys. Rev. E. 1994. Vol. 49. P.3484–3488).
48. B.V. Shulgin, A.B. Neiman, V.S. Anishchenko, *Mean switching frequency locking in stochastic bistable systems driven by periodic force* (Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 75. P. 4157–4160).
49. В.С. Анищенко, А.Б. Нейман, Ф. Мосс, Л. Шиманский-Гайер, *Стохастический резонанс: индуцированный шумом порядок* (Успехи физич. наук, 1999. Т. 42, вып. 1. С. 7–36).
50. S.K. Han, T.G. Yim, D.E. Postnov, O.V. Sosnovtseva, *Interacting coherence resonance oscillators* (Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 83(9). P.1771–1774).
51. E. Doedel, R.C. Paffenroth, T.F. Fairgrieve, Y.A. Kuznetsov, B.E. Oldeman, B. Sandstede, and X. Wang, *AUTO2000: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations (with HOMCONT)* (Technical report, Concordia University 2002).



Springer Series in Synergetics

Founding Editor H. Haken

SYNCHRONIZATION: FROM SIMPLE TO COMPLEX

Alexander Balanov, Natalia Janson,

Dmitry Postnov, Olga Sosnovtseva

© 2009 Springer-Verlag Berlin Heidelberg

ISBN 978-3-540-72127-7

e-ISBN 978-3-540-72128-4

The Springer Series in Synergetics was founded by Herman Haken in 1977. Since then, the series has evolved into a substantial reference library for the quantitative, theoretical and methodological foundations of the science of complex systems.

Through many enduring classic texts, such as Haken's *Synergetics and Information and Self-Organization*, Gardiner's *Handbook of Stochastic Methods*, Risken's *The Fokker Planck-Equation* or Haake's *Quantum Signatures of Chaos*, the series has made, and continues to make, important contributions to shaping the foundations of the field.

The series publishes monographs and graduate-level textbooks of broad and general interest, with a pronounced emphasis on the physico-mathematical approach.

Introduction

It would not be too much of an exaggeration to say that oscillations are one of the main forms of motion. They range from the periodic motion of planets to random openings of ion channels in cell membranes. They are observed at various levels of organization, have various origins and various properties. Since Newton's crack at the three-body problem and until just a few decades ago, the range of phenomena regarded as oscillations were limited to damped, periodic and quasiperiodic oscillations at best. A significant achievement of the second half of the 20th century is the admission of deterministic chaos and noise-induced rhythms as equals into the oscillation family.

Nature is not based on isolated individual systems. It is rich in connections, interactions and communications of different kinds that are complex beyond belief. With this, synchronization is the most fundamental phenomenon associated with oscillations. It is a direct and widely spread consequence of the interaction of different systems with each other. In most general terms, synchronization means that different systems adjust the time scales of their oscillations due to interaction, but there is a large variety of its manifestations and of the accompanying fascinating phenomena.

Anyone writing a book on synchronization is faced with two problems: on one hand, one has to deal with a huge amount of material on the particular aspects and effects; and on the other hand, there is a need to formulate a universal approach that would embrace all the particular cases. Fortunately, an essential contribution to the second problem has been made by Pikovsky, Rosenblum, and Kurths in their recent book (A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths, *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001)*, that has provided a contemporary view on synchronization as a universal phenomenon that manifests itself in the entrainment of rhythms of interacting self-sustained systems. This viewpoint is in agreement with the approach developed since the time of Huygens, and is completely shared by ourselves. In writing the present book we were motivated by the following considerations:

- Recently, a large variety of new synchronization phenomena were discovered that are inherent in complex (chaotic) systems, but do not occur in simple periodic oscillators. With the modern fascination for the beauty and the complexity of the new effects, there is a tendency to forget about the basic phenomena and theoretical results associated with «simply» periodic oscillations. This is largely due to the fact that not all involved in the studies of these phenomena, and especially younger researchers and students, have the respective education. It turns out to be difficult to recommend a book, which would consistently present, equation after equation, the most fundamental theoretical results on synchronization. Without such background, it is problematic to analyze the synchronization of irregular oscillations from the general viewpoint, and to avoid discovering «new» effects that often appear to be merely manifestations of the general principles in a particular situation.

- There is a number of fascinating aspects of synchronization (phase multistability, de-phasing, self-modulation, etc.), that are observed in a variety of systems and with various types of interaction, that have not been discussed yet in the framework of the general concept of synchronization.

In order to cover the above problems, our book contains two parts. The first part is a consistent and detailed description of the classical approach to forced and mutual synchronization that is based on frequency/phase locking and suppression of natural dynamics. It is oriented to the people not familiar with the fundamental results of synchronization theory obtained by a number of physicists and mathematicians, such as B. van der Pol, A.A. Andronov, A.A. Vitt, M.L. Cartwright, A.W. Gillies, P.J. Holmes, D.A. Rand, R.L. Stratonovich, V.I. Tikhonov, P.S. Landa, D.G. Aronson and co-authors, and published in their original works. It was our aim:

- To reproduce in every detail the derivations of the most fundamental results, which until now were given only schematically and presented a significant challenge for beginners because of the traditional brevity typical of the scientific works of the beginning and middle of the 20th century. We have made every effort to make the reading easy for non-experts, to reduce to the minimum the need to refer to other literature when following the calculations or the description of geometrical effects, and to exclude expressions like «It is easy to show». As a result, the lengths of the respective sections have increased substantially as compared to those in the original books and papers, but we believe it was worth doing this and hope that the readers will find this material helpful.

- To describe the same phenomena using different languages: the ones of physics and of mathematics. In the early experiments on synchronization, the latter was detected by means of listening to the volume of sound (organ pipes), visually observing the positions of pendulums (clocks), and later Lissajous figures and Fourier power spectra on the oscilloscopes (electric circuits). Thus, synchronization can be naturally understood in physical terms like power, frequency or phase. On the other hand, the systems that synchronize can be described by non-linear mathematical equations. Transitions that occur in coupled systems when their parameters change, can be

*А. Пиковский, М. Розенблум, Ю. Куртц. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. Москва: Техносфера, 2003. 496 с. (*Прим ред.*)

described in mathematical terms of bifurcation and stability theory. In this book we will analyze the phenomena of synchronization and the associated effects using both languages and making a clear connection between these different means of description.

- To generalize theoretical results to complex oscillations. An important achievement of modern oscillations theory is the recognition of the role of irregular oscillations that can be either deterministic or stochastic. We start by considering synchronization in simple periodic oscillators. Then we move to chaotic and stochastic oscillations and show that in spite of their complexity, they can synchronize according to the same mechanisms as periodic ones.

We will deem to have achieved our goal, if after reading this part the reader will be convinced that very different types of oscillations obey the same mechanisms of synchronization, although the particular manifestations can be different.

The second part is devoted to the general mechanisms and principles of synchronization, describing them with regard to the non-linear properties of the particular classes of systems and couplings. We discuss synchronization of anisochronous oscillations, when fast and slow motions along the trajectory give rise to additional phase-shifted coexisting regimes and thus change the bifurcational structure of the synchronization region. A separate chapter is devoted to the concept of phase multistability and its development in the systems that oscillate with complex waveform (essential for period-doubling and self-modulated oscillations) and have a particular structure of their phase space. The latter might include regions of fast and slow motion, closeness of the trajectories to some singular points, etc. (essential for bursting behavior). The concept of synchronization is extended to the systems with several time scales of either deterministic, or stochastic origin. Finally, we consider cooperative behavior of systems with a particular type of coupling through the primary resource supply and discuss their applications.

Contents

Preface

1. Introduction

Part I. General Mechanisms of Synchronization

2. General Remarks

2.1. What Are We Going to Talk About? 2.2. Topics to Consider. 2.3. Self-Sustained Oscillations: A Key Concept in Synchronization Theory. 2.3.1. Features of Self-Oscillations. 2.3.2. Features of Self-Oscillating Systems. 2.3.3. Modern Revisions of the Definition of a Self-Sustained System. 2.3.4. Self-Sustained Oscillations and Attractors. 2.3.5. Synchronization as a Control Tool. 2.4. Duality of the Description of Synchronization. 2.5. Oscillations Helping Each Other Out. 2.6. Terms of Bifurcations Theory

3. 1:1 Forced Synchronization of Periodic Oscillations

3.1. Phase of Quasiharmonic Oscillations. 3.2. Derivation of Truncated Equations for Phase Difference and Amplitude. 3.3. Amplitude of Unperturbed Oscillations at Small Non-linearity. 3.4. Analysis of Truncated Equations for Weak Forcing. 3.5. Derivation of Truncated Equations in Descartes Coordinates. 3.6. Analysis of Truncated Equations in Descartes Coordinates. 3.7. Synchronization Region from the Truncated Equations: Non-bifurcational Approach. 3.8. Fourier Power Spectra at Strong Forcing. 3.9. Phase Locking and Suppression: Numerical Simulation. 3.9.1. Phase Locking. 3.9.2. Suppression of Natural Dynamics. 3.10. Phase Locking and Suppression: Experiment. 3.10.1. Amplitudes from Oscilloscope. 3.11. Beat Frequency: Theory, Simulations and Experiment. 3.11.1. Theory. 3.11.2. Numerical Simulation. 3.11.3. Experiment

4. 1:1 Mutual Synchronization of Periodic Oscillations

4.1. Truncated Equations for Weakly Non-linear Oscillators. 4.2. Periodic Oscillators with Dissipative Coupling. 4.2.1. Symmetric Solutions. 4.2.2. Asymmetric Solutions. 4.2.3. Oscillation Death. 4.3. Dissipative Coupling: Numerical Simulation. 4.3.1. Locking. 4.3.2. Bifurcations. 4.3.3. Suppression. 4.4. Reactive Coupling. 4.4.1. Locking. 4.4.2. Suppression. 4.4.3. Bifurcations. 4.4.4. Phase Multistability. 4.5. Reactive Coupling and the Saddle Torus. 4.5.1. Hypothesized Structure of the Phase Space. 4.6. Generality of Bifurcational Transitions at Reactive Coupling. 4.7. Experiment. 4.7.1. Phase Locking. 4.7.2. Suppression. 4.8. Comparison of Synchronization Transitions in Forced and in Mutually Coupled Oscillators

5. Homoclinic Mechanism of Synchronization of Periodic Oscillations

5.1. Global Bifurcation. 5.1.1. Features of a Homoclinic Bifurcation of a Cycle. 5.2. Homoclinics Inside Synchronization Tongue? 5.3. How Homoclinics Leads to Synchronization. 5.4. Synchronization in a Bacteria-Viruses Model. 5.5. Summary

6. $n:m$ Synchronization of Periodic Oscillations

6.1. Important Definitions Relevant to $n : m$ Synchronization. 6.1.1. Poincaré Return Time. 6.1.2. Phase of Oscillations. 6.1.3. Phase of Oscillations via Poincaré Section. 6.1.4. Poincaré Winding (Rotation). Number. 6.1.5. Synchronization Order $n : m$. 6.2. 1:1 Forced Synchronization in Weakly Non-linear Oscillators. 6.2.1. 3:1 Phase (Frequency) Locking. 6.2.2. 3:1 Suppression of Natural Dynamics. 6.3. $n:m$ Synchronization in Strongly Non-linear Oscillators with Spiky Forcing. 6.3.1. 2:3 Phase (Frequency) Locking. 6.3.2. The Route to 2:3 Suppression. 6.4. Circle Map: Derivation. 6.4.1. Amplitude and Phase of Oscillations. 6.4.2. From Differential to Discrete Equation for Phase. 6.5. Circle Map: Properties. 6.6. Arnold Tongues. 6.7. $n:m$ Synchronization: Experiment. 6.8. Summary

7. 1:1 Forced Synchronization of Periodic Oscillations in the Presence of Noise

7.1. Introductory Comments on Random Processes. 7.1.1. One-Dimensional Probability Density, Mean and Variance. 7.1.2. Two-Dimensional Probability Density, Correlation and Covariance. 7.1.3. Stationary Process. 7.1.4. Correlation Time. 7.1.5. Correlation Between Two Different Processes. 7.1.6. Spectrum of a Wide-Sense Stationary Process. 7.2. Truncated Equations. 7.3. Simplification of the Fluctuational Terms in Truncated Equations. 7.4. Probability Density Distribution of the Phase Difference. 7.4.1. Case of $Q > 0$. 7.5. Bessel Functions. 7.6. Probability Density Distribution of the Phase Difference, Continued. 7.7. Mean Frequency of Forced Oscillations with Noise. 7.8. Interpretation of Phase Dynamics. 7.9. Phase Diffusion. 7.10. Full-Scale Biological Experiment. 7.11. Effects of Noise on the Spectrum of a Synchronized System. 7.11.1. Effect of Noise on the Spectrum of Oscillations Synchronized by Suppression

8. Chaos Synchronization

8.1. What Is Chaos? 8.1.1. Exponential Divergence of Phase Trajectories. 8.1.2. Chaos Properties in Terms of Phase Space. 8.1.3. Chaos Properties in Terms of Spectra. 8.2. What Does Synchronization of Chaos Encompass? 8.2.1. Chaos Synchronization: Different Manifestations. 8.2.2. Chaos Synchronization in a Classical Sense. 8.3. Phase and Basic Frequency of Chaotic Oscillations. 8.4. Forcing Chaos Periodically: What to Expect? 8.4.1. Phase Locking of Chaos. 8.4.2. Suppression of Chaos. 8.4.3. Any Other Options? 8.4.4. Interacting Chaotic Systems. 8.5. Synchronization of Chaos by Periodic Forcing. 8.5.1. Experiment. 8.5.2. Numerical Analysis. 8.6. Synchronization of Periodic Oscillations by Chaos. 8.6.1. Spectra. 8.6.2. Poincaré Sections. 8.6.3. Phase Difference. 8.6.4. Lyapunov Exponents. 8.7. Mutual Synchronization of Chaos. 8.7.1. Phase/Frequency Locking. 8.7.2. Suppression. 8.7.3. Phase Behavior. 8.8. Homoclinic Synchronization of Chaos. 8.9. Effects of Noise on a Synchronized Chaos. 8.9.1. Chaotic System Frequency-Locked by a Harmonic Signal. 8.9.2. Periodic System Suppressed by Chaotic Forcing. 8.10. Summary

9. Synchronization of Noise-Induced Oscillations

Stochastic Limit Cycle

9.1. Noise-Induced Oscillations. 9.2. Models. 9.2.1. Morris-Lecar Model. 9.2.2. Monovibrator Circuit. 9.3. Coherence Resonance Oscillator. 9.4. Frequency and Phase Locking. 9.4.1. Frequency Locking: Electronic Experiment. 9.4.2. Phase Locking: Coupled Morris-Lecar Models. 9.4.3. Phase Dynamics Inside the Synchronization Region: Electronic Experiment. 9.5. Synchronization via Suppression

10. Conclusions to Part I

Part II. Case Studies in Synchronization

11. Synchronization of Anisochronous Oscillators

11.1. Phase Velocity Field and Coupling Vector. 11.2. Effective Coupling Function. 11.2.1. Asymptotic Phase. 11.2.2. Effective Coupling Function. 11.3. Dephasing. 11.4. Examples of 2D Anisochronous Oscillators. 11.5. Synchronization near the Homoclinic Bifurcation. 11.5.1. Weak Coupling Limit. 11.5.2. Finite Coupling Strength. 11.5.3. Strong Coupling with Moderate μ . 11.5.4. Summary on Synchronization near Homoclinic Bifurcation. 11.6. Phase Locking Patterns of Coupled Fast-and-Slow Oscillators. 11.6.1. Antiphase Locking in Coupled FitzHugh-Nagumo Models. 11.6.2. Out-of-phase Synchronization via Slow Channels. 11.7. Synchronous Patterns in Coupled Morris-Lecar Models. 11.7.1. Model. 11.7.2. Overview of the Dynamics. 11.7.3. Structure of Arnold Tongue for Antiphase Solution. Chaotic Bursting and Torus Breakdown. 11.7.4. Crises at the Boundary of Quasiperiodic Regions. 11.7.5. Transition to In-phase Synchronization. 11.7.6. Mechanism of Torus Folding in the Vicinity of Unstable Orbit. 11.7.7. Remarks on Synchronization in Morris-Lecar Systems. 11.8. Summary

12. Phase Multistability

12.1. Period-Doubling Oscillations. 12.1.1. Dynamics of Coupled Rössler Systems. 12.1.2. Mapping Approach to Multistability. 12.2. Self-Modulated Oscillations. 12.2.1. Methods of Analysis. 12.2.2. Phase Dynamics of Coupled Oscillators. 12.3. Bursting Dynamics. 12.3.1. Simple Qualitative Approach to Phase Multistability. 12.3.2. Dynamics of Coupled Bursters. 12.3.3. Multistability Induced by Dephasing. 12.4. Summary

13. Synchronization in Systems with Complex Multimode Dynamics

13.1. Synchronization of Chaotic Systems with Fast and Slow Time Scales. 13.1.1. Single System with Two Time Scales. 13.1.2. Coupled Systems with Two Mode Dynamics. 13.1.3. Conclusions. 13.2. Generation and Synchronization of Oscillations with Several Noise-Induced Modes. 13.2.1. Description of Experiment. 13.2.2. Characterizing Collective Response by Spectra. 13.2.3. Mutually Coupled Excitable Units. 13.2.4. Three Coupled Excitable Units. 13.2.5. Two Mutually Coupled Excitable Units with Inhibitory Coupling. 13.3. Synchronization of Chaotic Systems with Denumerable Set of Equilibrium States. 13.4. Summary

14. Synchronization of Systems with Resource Mediated Coupling

14.1. Neural Synchronization via Potassium Signaling. 14.1.1. Model. 14.1.2. Identical Cells: Competing In-phase and Antiphase Synchronization. 14.1.3. Heterogeneous Cells: Dynamical Patterns. 14.2. Multimode Dynamics in Linear Array of Electronic Oscillators. 14.2.1. Model. 14.2.2. Clustering. 14.2.3. Intracluster Synchronization. 14.3. Cascaded Microbiological Oscillators. 14.3.1. Model. 14.3.2. Spatial Dynamics. 14.4. Synchronization Patterns in Kidney Autoregulation. 14.4.1. Vascular-Nephron Model. 14.4.2. Coupling-Induced Inhomogeneity. 14.5. Summary

15. Conclusions to Part II

And finally

References

Index



Изв. вузов «ПНД», т. 17, № 2, 2009

**ПАМЯТИ НАТАЛЬИ
АЛЕКСАНДРОВНЫ
ИРИСОВОЙ**

1922–2009



Умерла Наталья Александровна Ирисова – талантливый физик-экспериментатор, удивительный человек, обаятельная женщина. Наталья Александровна была тесно связана с Саратовским государственным университетом, с факультетом нелинейных процессов, с Лицеумом прикладных наук, с нашим журналом.

Её отчимом был академик Борис Алексеевич Введенский, что определило круг её жизненных интересов и круг общения. Она жила среди физиков и жила физикой. Вот ее подарок одному из авторов этой мемориальной статьи – книга Б.А. Введенского и А.Г. Аренберга «Радиоволноводы» (М.: ОГИЗ Гостехиздат, 1946, часть 1) с дарственной надписью, подтверждающей эти слова: «...на память от непосредственной свидетельницы написания этой книги».

А все начиналось в 1942 году в эвакуации, где ее случайно окликнул сотрудник ФИАН Бенцион Моисеевич Вул: «Наташа! А ты что здесь делаешь?». После нескольких вопросов он предложил ей поработать в его лаборатории, которая располагалась по соседству. Трудиться приходилось много, в сложных условиях, и наградой была собственная хлебная карточка и первый опыт работы.

По возвращении в Москву продолжилось занятие любимой физикой в качестве студентки МГУ. В студенческие годы она была не только свидетельницей, но и активной участницей жизни физического сообщества. Так, она помогла озвучить последние лекции Леонида Исааковича Мандельштама в 1944 году, который подвергался тогда гонениям в рамках борьбы с космополитизмом. Сергей Михайлович Рытов попросил её: «Наташа, пойдите в деканат, попросите, чтобы разрешили лекции. Вам как студентке и старосте группы не откажут». И не отказали.

После окончания МГУ в 1947 году началась работа в Лаборатории колебаний ФИАН, руководимой Л.И. Мандельштамом и Н.Д. Папалекси, а затем М.А. Леонтовичем.

Только что вернувшийся с фронта после тяжелых ранений в родной ФИАН молодой А.М. Прохоров впервые в нашей стране в 1948 году приступил к работе в новой области – радиоспектроскопии. Радиолокация, радиосвязь, телевидение требовали стабилизации частоты ламповых генераторов. В 1949 году в состав группы А.М. Прохорова вошли: М.Е. Жаботинский, аспиранты Н.Г. Басов и Н.А. Ирисова, два студента-дипломника из МГУ – А.И. Барчуков и Б.Д. Осипов и два студента-практиканта – В.Г. Веселаго и В.К. Конюхов. Они заложили начало того феномена, который потом получил название «радиофизическая культура Прохорова».

В 1951 году Наталья Александровна защищает кандидатскую диссертацию «Стабилизация частоты стандартного 3-сантиметрового клистрона спектральной линией газа». Участвует в создании измерителей молекулярных спектров поглощения для подбора активных сред первого квантового усилителя – лазера.

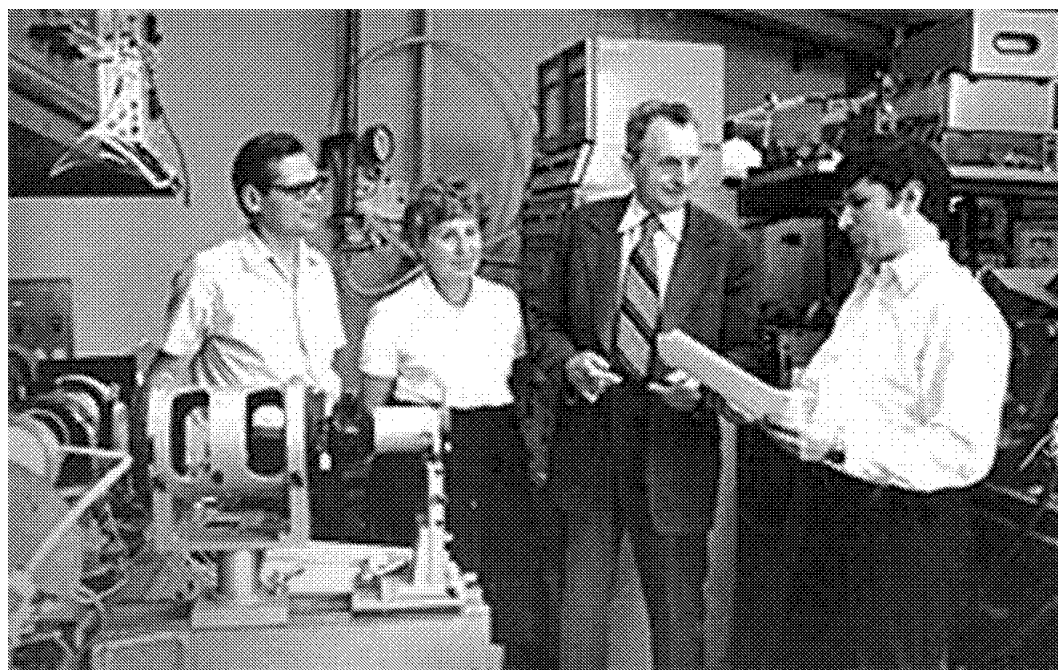


Рис. 1.

Е.А. Виноградов, Н.А. Ирисова, А.М. Прохоров, Г.В. Козлов – лауреаты Государственной премии СССР, 1980 год

Плодотворные годы работы в качестве заведующего сектором Лаборатории колебаний ФИАН СССР привели к присуждению в 1980 году Государственной премии СССР* «За создание и применение новой техники и методов субмиллиметровой спектроскопии» совместно с А.М. Прохоровым и сотрудниками ФИАН Е.А. Виноградовым и Г.В. Козловым. Позже Наталье Александровне была присвоена ученая степень доктора физико-математических наук и звание профессора.

Начиная с 1980-х годов, Наталья Александровна стала часто приезжать в Саратов для консультаций в Центральный научно-исследовательский институт измерительной аппаратуры (ЦНИИИА), постоянно участвовала в отраслевых совещаниях и конференциях. Наталья Александровна много сделала для становления ЦНИИИА.

Еще один пласт ее Саратовской жизни – Ученый Совет университета по защите докторских диссертаций, в состав которого она входила. Четкие и нестандартные вопросы, жесткие, но справедливые оценки диссертаций делали её центральной фигурой любой защиты. Если Наталья Александровна не считала работу достойной ученой степени, то в выступлении во время дискуссии до голосования она говорила: «Я буду голосовать против».

Наталья Александровна была великолепным рассказчиком. Надолго останутся в памяти слушателей наших «Нелинейных дней»** ее устные эссе о своем отчине Б.А. Введенском, о Нобелевских лауреатах, которых знала лично, о Тамме, Франке, Черенкове, Прохорове, Басове. На «Нелинейных днях» она собирала девочек, участниц школы-семинара, рассказывала им о непростой доле женщины-физика в мужском коллективе. Во время экзаменов в наш Лицей прикладных наук успокаивала волнующихся родителей, убеждая их в том, какие у них замечательные дети.

Она была веселым и остроумным человеком. Помнится её рассказ о приезде индийского физика Рамана в Москву. Времена были непростые, и жены физиков, что называется, «вылезали из кожи», чтобы угостить Нобелевского лауреата. А он не притронулся к яствам, поскольку, как оказалось, принадлежал той индийской касте, в которой еду должен готовить мужчина.

Естественными для её темперамента были дача и автомобиль, который она умело водила с юности.

В последние годы Наталья Александровна помимо научной работы выполняла с большой ответственностью обязанности ученого секретаря диссертационного Совета ИОФ РАН. Не счесть соискателей, которым своими мудрыми советами она помогала преодолеть диссертационный барьер.

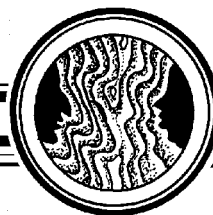
Наталья Александровна умела дружить, она любила людей, и её любили. Именно к ней относятся слова поэта:

«... не говори с тоской их нет, но с благодарностию – были».

*Чл.-корр. РАН Д.И. Трубецков
Доцент СГУ Н.Б. Трофимова*

*Газета «Правда». 7 ноября, 1980 г.

** «Нелинейные дни в Саратове для молодых» – ежегодная научная школа-семинар для школьников и студентов, проводимая факультетом нелинейных процессов СГУ.



«КАКИЕ ДАТЫ КРУГЛЫМИ НАЗВАТЬ?»

Д.И. Трубецков

Настоящая публикация – добавление к одноименной статье из журнала «Изв. вузов. ПНД», т. 16, № 3, 2008, с. 22.

1858 150 лет назад умер Роберт Броун (1733–1858), открывший беспорядочное движение малых частиц, взвешенных в жидкости или газе, происходящее под действием ударов молекул окружающей среды (броуновское движение).

1908 Еще один круглый юбилей – 100 лет со дня рождения Сергея Михайловича Рытова – одного из крупнейших специалистов в области радиофизики. В свое время академик А.Л. Минц дал такое определение радиофизики: «Радиофизика – это то, чем занимается Сергей Михайлович Рытов». Сам С.М. Рытов дал определение радиофизики, которое долгое время считалось классическим. Приведем его, цитируя книгу С.М. Рытова «Введение в статистическую радиофизику». М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1966, с. 8–9.

«Обычно к радиофизике относят радиоастрономию, радиоспектроскопию, электронику СВЧ, а также исследование электромагнитных свойств вещества, в особенности полупроводников, ферритов, плазмы и т.д. Но уже из этого перечня видно, что определение предмета радиофизики путем перечисления её составных частей представляет собой довольно безнадежное дело... По-видимому, более целесообразно выделить те направления, которые позволяют уточнить предмет радиофизики на каждом этапе её развития... Можно, по-видимому, считать, что радиофизика охватывает в основном два направления.

1) Изучение физических явлений, существенных для радиосвязи (в широком её понимании), т.е. для всех основных этапов всякой радиосвязи – генерации электромагнитных сигналов, излучения и распространения электромагнитных волн и, наконец, приема радиосигналов. Это направление можно назвать "физикой для радио".

2) Изучение методами и средствами радиотехники самых разнообразных физических (и не только физических) объектов – атомных ядер, молекул, живых организмов, земной атмосферы, небесных тел и т.д. Это, коротко говоря, "радио для физики".

Что же такое радиофизика сегодня? Ответ находим в книге Михаила Адольфовича Миллера «Избранные очерки о зарождении и взрослении радиофизики в горьковско-нижегородских местах». Н. Новгород: Изд-во ИПФ РАН, 1997, с. 47.

«Уже через 2–3 преемственных поколения (каждое примерно по семь-десять лет) радиофизика стала не просто "физикой для радио" и "радио для физики" (это образное определение принадлежит Сергею Михайловичу Рытову...), а вымахала за пределы, отпущенные ей при рождении: она проникла в акустику, гидро-, гео- и астрофизику, в газо- и плазмодинамику, в твердотель и, уж конечно, во все видимые и невидимые диапазоны частот электромагнетизма... Практически всюду используются радиофизические методы

исследований и диагностики. Выработалась даже своеобразная гордость принадлежности людей к радиофизической выучке. Радиофизика поставила нашему ни умом ни чувством не понятному обществу множество разумных тружеников, и они не хуже её самой проникают во все близкие и далекие работы и должности... Складывается (а может только еще прокрадывается) впечатление, что обучение людей любому думанию, чувствованию и деланию через Радиофизику весьма эффективно и что не так уж много в нашем распоряжении таких "наук-тренажеров".

Сергей Михайлович Рытов проводил исследования в области теории колебаний, акустики, распространения радиоволн, электродинамики, оптики, статистической радиофизики. Ему, в частности, принадлежит теория тепловых флуктуаций в электродинамике и строгое решение задачи об отражении волн от слоя с отрицательной диэлектрической проницаемостью. Знаменитые лекции Л.И. Мандельштама вышли под редакцией С.М. Рытова и во многом их издание его заслуга.

Сергей Михайлович трогательно относился к памяти своего учителя Л.И. Мандельштама и своего друга и коллеги М.Л. Левина. Чтобы убедиться в этом, достаточно обратиться к его воспоминаниям о них (см., например, С.М. Рытов. Академик Л.И. Мандельштам. В книге «Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие». М.: Наука, 1981, с. 8; С.М. Рытов. Л.И. Мандельштам и учение о модуляции. В книге «Академик Л.И. Мандельштам. К 100-летию со дня рождения». М.: Наука, 1979, с. 158; С.М. Рытов «К воспоминаниям о Левине». В книге «Михаил Львович Левин. Жизнь, воспоминания, творчество». Н. Новгород: ИПФРАН, 1998, с. 150).

1918 90 лет назад умер немецкий физик Карл Фердинанд Браун (1850–1918). Его исследования относятся к радиотехнике и радиофизике. В 1897 году Браун сконструировал катодную трубку, в которой движением электронов управляло магнитное поле. Трубка Брауна была предшественницей современных электроннолучевых трубок. 110 лет назад, в 1898 году он изобрел колебательный контур значительной емкости и с малым затуханием (цепь Брауна). В 1906 году Браун обнаружил одностороннюю проводимость серного цинка, перекиси свинца, карборунда и некоторых других полупроводников, что позволило ему создать кристаллический детектор. Он много занимался проблемой передачи радиосигналов. Им изобретено несколько типов антенн, в том числе рамочная антенна (1913). В 1909 году Браун вместе с Маркони был удостоен Нобелевской премии «за развитие беспроволочной телеграфии». У Брауна учились Л.И. Мандельштам, Н.Д. Папалекси, А.А. Эйхенвальд и др.

Норвежский физик и геофизик В.Ф. Бьеркнес объяснил возникновение циклонов из полярных фронтов и разработал методику составления метеорологических карт. Ранее, в 1904 году В.Ф. Бьеркнес разработал динамические методы предсказания погоды на основе математической обработки физических данных. Однако практическому применению этого метода препятствовала сложность вычислений. Метод Бьеркнеса был применен только в 1950 году на вычислительной машине ENIAC. Вильгельма Бьеркнеса считают основоположником современной метеорологии.

1938 Уже 70 лет как гигантский аксон обыкновенного кальмара стал рассматриваться в качестве нервного волокна. В этом году американский биофизик Кеннет Коул опубликовал первую работу (K.S. Cole and H.J. Curtis. Electrical impedance of nerve during activity. Nature, 1938, № 142, p. 209), в которой была приведена осциллограмма нервного импульса.

В статье «Какие даты круглыми назвать?» мы указывали, что в этом же году была опубликована статья Я.Б. Зельдовича и Д.А. Франк-Каменецкого, описывающая нелинейную диффузию при распространении пламени. По этому поводу Элвин

Скотт восклицает: «Можно только представить, какого прогресса достигла бы нейрофизиология, если бы эти ученые проявили интерес к проблеме проводимости нервных импульсов. ...Подобно тому, как это происходит с температурой пламени свечи, электрическое напряжение на мембране нервной клетки достигает максимума и постепенно спадает до величины, соответствующей покою» (Скотт Э. Нелинейная наука: рождение и развитие когерентных структур. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007, с. 30).

Обратимся вновь к Элвину Скотту (там же, с. 31), который отмечает следующее: «В том же 1938 году в Советском Союзе проводились исследования в другом направлении, мотивированном фундаментальной проблемой в физике твердого тела: нахождение связи между динамикой дислокации и пластической деформацией кристалла. Яков Френкель и Татьяна Конторова показали, что основным уравнением, описывающим движение дислокации, является следующее (Конторова Т.А., Френкель Я.И. К теории пластической деформации и двойникования // ЖЭТФ, 1938, 8, с. 89 (I часть), с. 1340 (II часть), с. 1349 (III часть)):

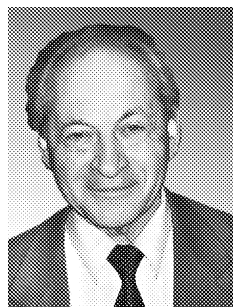
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sin u, \quad (*)$$

которое можно рассматривать как нелинейное обобщение линейного волнового уравнения ($u_{xx} - u_{tt} = 0$)...» Решение этого уравнения типа бегущей волны соответствует выражению для распространения дислокации

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[e^{\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}} \right],$$

где v – скорость дислокации. Далее Скотт пишет: «Френкель и Конторова были бы весьма удивлены, если бы прочитали работу Рудольфа Стурвальда (Steuerwald, Rudolf), которая была опубликована в 1936 году и содержала множество аналитических решений уравнения (*), которые вызвали интерес лишь спустя 40 лет [R. Steuerwald. Über Enneper'sche Flächen und Bäcklund'sche Transformation]//Abl. Bayerischen. Akad. Wiss. München, 1936, 1–105]».

Заметим, что уравнение (*) совпадает с нормализованным уравнением син-Гордона, решение которого обсуждается в основном тексте.



Трубецков Дмитрий Иванович – родился в Саратове (1938). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1965, СГУ) и доктора физико-математических наук (1978, СГУ) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ, профессор, член-корреспондент Российской академии наук, заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования. Научный руководитель Лицея прикладных наук и факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: вакуумная электроника и микроэлектроника сверхвысоких частот, теория колебаний и волн, нелинейная динамика, история науки. Автор более двадцати учебных пособий и монографий, а также более двухсот статей в периодической печати.

E-mail: Trubetskov@nonlin.sgu.ru

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского.
410012 Саратов, Астраханская, 83

ПРАВИЛА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ

Рукописи, объемом не более 16 стр. и 8 рис. принимаются в редакцию в 2 вариантах: бумажном и электронном.

1. **Бумажный вариант** должен быть напечатан через 1,5 интервала и распечатан в **2-х экз.** Если рисунки (только черно-белые!) не вставлены в текст, то они выполняются на отдельных страницах также в 2-х экз. Под рисунком указывается его номер, фамилии авторов, название статьи; подрисуночные подписи печатаются на отдельном листе и не должны дублировать внутритекстовое описание рисунка.

Требования к оформлению текста. На первой странице перед текстом статьи должны быть напечатаны: индекс УДК, название статьи, инициалы и фамилии авторов, краткая аннотация статьи с ключевыми словами, составленная по форме удобной для непосредственного включения ее в РЖ, издаваемые ВИНТИ.

К статье прилагаются в 1 экз.:

- перевод на английский язык названия статьи, инициалов и фамилий авторов, аннотации, **ключевых слов.**

- краткие сведения об авторах с фотографиями в графических форматах JPG, GIF и т.д., или сканированные с разрешением не менее 300dpi без дополнительной компьютерной обработки, **e-mail каждого автора и почтовый адрес организации.**

- *Краткие сведения об авторах составляются по следующей форме:*

Сидоров Петр Иванович – родился в 1938 году в Москве, окончил Московский физико-технический институт в 1961 году. После окончания МФТИ работает в ФИАН заведующим отделом. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1964) и доктора физико-математических наук (1977) в области теории колебаний и волн. Автор монографии «Детерминированный хаос и экономика» и учебника «Волны в экологии» (в соавторстве с...). Опубликовал 120 научных статей по направлениям, указанным выше. Лауреат Государственной премии СССР. Редактор журнала International Journal of Chaos Theory и член редакционной коллегии журнала «Физика и жизнь».

В библиографическом списке нумерация источников должна соответствовать очередности ссылок на них в тексте. В списке указываются:

а) для книг – фамилия автора, инициалы, название книги, город, издательство, год издания, том;

б) для журнальных статей – фамилия автора, инициалы, название статьи, название журнала, серия, год, том, номер, выпуск, первая страница статьи;

в) для депонированных статей – название статьи, инициалы, фамилия автора, название организации, в которой выполнена работа, город, год, объем статьи, название депонирующей организации, дата депонирования, регистрационный номер;

г) для препринта – фамилия автора, инициалы, название издания, полное название издающей организации, год, количество страниц;

д) для материалов конференций, школ, семинаров – фамилия автора, инициалы, название статьи, название издания, время и место проведения конференции, город, издательство, год, первая страница статьи.

В конце статьи авторы должны указать наименование программы, в рамках которой выполнена работа, или наименование фонда поддержки.

2. **Электронный вариант.** Статья оформляется с использованием макропакета $L^A_T E X 2\epsilon$. Рекомендуется пользоваться компилятором MiKTeX (MiKTeX2.4), так как именно им пользуются в редакции. В редакцию присылать только TEX-файл (с англ. аннотацией и ав. сведениями) без стилевых файлов и PDF статьи. Все иллюстрации, включенные в оригинал-макет, предоставляются в виде отдельных файлов, записанных в любом из форматов: TIFF, GIF, JPEG, EPS. Название файла должно соответствовать номеру рисунка в тексте.

В виде исключения принимаются статьи, подготовленные с помощью текстового редактора Microsoft Word (все формулы должны быть набраны при помощи Equation или MathType).

Все публикации в журнале, в том числе и публикации аспирантов, бесплатные.

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина*
Оформление художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, О.Н. Строгановой
в пакете *L^AT_EX*

Подписка на 2009 год осуществляется
по каталогу Агентства Роспечать
«Газеты. Журналы», индекс 73498,
и по договору между Подписчиком
(юридическим или физическим лицом)
и Издателем (Саратовским государственным университетом)

Стоимость подписки на 2009 год 600 руб. (6 номеров)
Заявки на заключение договора принимаются
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64
E-mail: and@nonlin.sgu.ru

Распространение журнала осуществляется
редакцией журнала по адресной системе

Сдано в набор 22.04.09. Подписано к печати 3.06.09
Формат 70x108/16. Бумага «Снегурочка». Печать трафаретная
Усл. печ. л. 14,35(10,25). Уч.-изд. л. 14,0. Тираж 200. Заказ 412

Отпечатано на ризографе GR 3750 редакции журнала

© Редакция журнала
«Известия вузов. ПНД», 2009
© Оформление художника
Д.В. Соколова, 2009