

СО Д Е Р Ж А Н И Е

| | |
|--|-----|
| ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН | |
| <i>Неймарк Ю.И., Котельников И.В., Теклина Л.Г.</i> Новый подход к численному исследованию конкретных динамических систем методами распознавания образов и статистического моделирования | 3 |
| <i>Смирнов Д.А.</i> Выявление нелинейных связей между стохастическими осцилляторами по временным рядам | 16 |
| <i>Измайлов И.В., Пойзнер Б.Н.</i> Эксперименты с источником хаоса – радиотехническим устройством с квадратичным фазовым модулятором и интерференционным усилением квазигармонического сигнала. | 39 |
| <i>Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Станкевич Н.В.</i> Автономный генератор квазипериодических колебаний | 51 |
| <i>Кузнецов А.П., Емельянова Ю.П., Селезнев Е.П.</i> Синхронизация связанных автоколебательных осцилляторов с неидентичными параметрами | 62 |
| БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ | |
| <i>Астахов В.В., Коблянский С.А., Шабунин А.В.</i> Бифуркационный анализ режимов синхронизации и гашения колебаний в связанных генераторах с инерционной нелинейностью | 79 |
| НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ДЕЙСТВИИ | |
| <i>Павлова О.Н., Павлов А.Н.</i> Ритмические процессы авторегуляции почечного кровотока и их взаимодействие в форме модуляции колебаний | 98 |
| <i>Фрисман Е.Я., Неверова Г.П., Ревуцкая О.Л., Кулаков М.П.</i> Режимы динамики модели двухвозрастной популяции. | 113 |
| <i>Клочков Б.Н., Рейман А.М.</i> Нелинейные модели динамики кровоснабжения участка ткани | 131 |
| КОНФЕРЕНЦИИ. СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ. ШКОЛЫ | |
| Всероссийская научная школа-конференция для молодежи «Нелинейные феномены, хаос, критические явления и методы их исследования с помощью вейвлетного, кластерного и спектрального анализа в геоэкологических процессах», Саратов, 6–12 октября 2009 | 142 |
| <i>Егоров Е.Н., Иванов А.В., Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е., Яшков И.А.</i> Синергетика и геоэкология: опыт коэволюции. | 145 |
| IX Международная научно-техническая конференция «Актуальные проблемы электронного приборостроения», Саратов, 22–23 сентября 2010 | 150 |
| КНИЖНОЕ ОБОЗРЕНИЕ | |
| «...И поиск трудной простоты». <i>Сост. Д.И. Трубецков</i> | 152 |
| <i>Пойзнер Б.Н.</i> Способ бытия субъекта? – «Поиск трудной простоты» | 154 |
| ИЗ КНИГ И ЖУРНАЛОВ | |
| <i>Майнцер К.</i> Сложносистемное мышление: материя, разум, человечество. Новый синтез | 168 |

C O N T E N T S

| | |
|--|-----|
| APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATIONS AND WAVE THEORY | |
| <i>Neimark Yu.I., Kotel'nikov I.V., Teklina L.G.</i> New approach to numerical research of the concrete dynamic systems by methods of pattern recognition and statistical modelling | 3 |
| <i>Smirnov D.A.</i> Revealing nonlinear couplings between stochastic oscillators from time series | 16 |
| <i>Izmailov I.V., Poizner B.N.</i> Experiments with a source of chaos – a radio-electronic device with square-law phase modulator and interference amplification of quasi-harmonic signal | 39 |
| <i>Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Stankevich N.V.</i> Autonomous generator of quasi-periodic oscillations | 51 |
| <i>Kuznetsov A.P., Emelianova Yu.P., Seleznev E.P.</i> Synchronization in coupled self-sustained oscillators with non-identical parameters | 62 |
| BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS | |
| <i>Astakhov V.V., Koblyanskiy S.A., Shabunin A.V.</i> Bifurcation analysis of synchronization and amplitude death in coupled generators with inertial nonlinearity ... | 79 |
| NONLINEAR DYNAMICS IN ACTION | |
| <i>Pavlova O.N., Pavlov A.N.</i> Rhythmic processes of renal blood flow autoregulation and their interaction in the form of modulation of oscillations | 98 |
| <i>Frisman E.Ya., Neverova G.P., Revutskaya O.L., Kulakov M.P.</i> Dynamic modes of two-age population model | 113 |
| <i>Klochkov B.N., Reyman A.M.</i> Nonlinear models of blood supply dynamics in tissue area | 131 |
| CONFERENCES. MEETINGS. SYMPOSIA. SCIENTIFIC SCHOOLS | |
| All-Russian scientific school in the Saratov State University for young scientists «Nonlinear phenomena, chaos, critical situations and methods to study them with the help of the wavelet analysis, cluster analysis and spectral analysis in the geocological processes», Saratov, 6-12 October 2009 | 142 |
| <i>Egorov E.N., Ivanov A.V., Koronovskii A.A., Trubetskov D.I., Hramov A.E., Yashkov I.A.</i> Synergetics and geocology: ways of coevolution | 145 |
| IX International Scientific-Technical Conference in the Saratov State Technical University «Actual Problems of Electron Devices Engineering», Russian Federation, Saratov, 22-23 September 2010 | 150 |
| BOOK REVIEW | |
| «...And Search of Hard Simplicity» <i>D.I. Trubetskov</i> (ed.) | 152 |
| <i>Poizner B.N.</i> What is the Way of Subject's Being? | 154 |
| FROM BOOKS AND JOURNALS | |
| <i>Mainzer Klaus.</i> Thinking in Complexity. The Computational Dynamics of Matter, Mind, and Mankind | 168 |



НОВЫЙ ПОДХОД К ЧИСЛЕННОМУ ИССЛЕДОВАНИЮ КОНКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДАМИ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ И СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Ю.И. Неймарк, И.В. Котельников, Л.Г. Теклина

Частично реализован и апробирован новый подход к исследованию конкретных многомерных и многопараметрических динамических систем на основе вычисления фазовых траекторий и использования методов распознавания образов.

Ключевые слова: Динамические системы, численные методы, распознавание образов.

Введение

Рассматривается проблема численного исследования конкретных многомерных многопараметрических динамических систем, заданных системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Проблема старая. Еще в 1931 году академик А.А. Андронов на Всесоюзном съезде по теории колебаний в пленарном докладе «Математические проблемы теории колебаний» отмечал: «Результаты Пуанкаре и Биркгофа для размерности $n > 2$ сугубо не эффективны. Они дают известное представление о роде и характере движений, но не содержат в себе почти никаких данных для того, чтобы исследовать какие-нибудь частные дифференциальные уравнения, с которыми нам приходится иметь дело» – и призвал к поиску новых подходов к решению данной проблемы. Конечно, с тех пор ситуация изменилась. Получили развитие и аналитические, и численные методы исследования динамических систем. Но все же основным инструментом анализа большинства прикладных систем являются численные методы, несомненные успехи которых связаны, прежде всего, с появлением быстродействующих персональных компьютеров и разработкой профессиональных программных средств интегрирования и анализа дифференциальных уравнений. Однако до настоящего времени в основе численного исследования большинства прикладных систем лежит наблюдение за поведением траекторий в фазовом пространстве динамической системы на экране дисплея компьютера. Даже для двумерной системы и небольшого числа параметров такое исследование требует квалифицированной, длительной и трудоемкой работы. Для трехмерных систем это затруднительно, не говоря уже о динамических системах большей размерности со значительным

числом параметров. В связи с этим необходимо кардинальное изменение направлений исследования. Именно такое изменение имеет целью развитие принципиально новой методики численного исследования конкретных динамических систем.

1. Отличительные особенности нового подхода

В связи с тем, что изучение конкретных прикладных динамических моделей методами классической теории Пуанкаре, Биркгофа, Ляпунова, Андронова, Смейла и др. приводит к непреодолимым трудностям даже при использовании современных вычислительных средств, в настоящей работе предлагается новый подход к численному исследованию динамических систем, заданных системами обыкновенных дифференциальных уравнений достаточно высокого порядка с большим числом параметров. Этот подход имеет универсальный характер и основан на применении методов теории распознавания образов и статистического моделирования.

Развитие нового подхода потребовало коренной перестройки сложившихся взглядов и отказа от традиционных методов, а в основу его легли следующие идеи:

- переход от идеальных моделей к реальным и вычислимым, отвечающим современным вычислительным возможностям и потребностям физики и техники в исследовании конкретных динамических систем;
- необходимость упрощения задачи исследования, но с получением результатов, достаточных для подавляющего большинства прикладных проблем и задач;
- замена традиционных методов исследования достоверным математическим экспериментом с последующей обработкой результатов эксперимента методами распознавания образов.

Остановимся подробнее на двух отличительных особенностях нового подхода.

1.1. Концепция огрубленного численного исследования конкретных динамических систем. Теория динамических систем изучает идеальную математическую модель, выясняя, каковы ее возможные фазовые портреты, движения и бифуркации. Однако требования физики и техники напрямую относятся не к идеальной математической модели динамической системы, а к реальной и вычислимой. А вычислимость даже для конкретных фазовых траекторий не всегда имеет место. Более того, практически невычислимыми являются, например, фазовые портреты негрубых систем. Но то, что не вычислимо, как нам представляется, не может быть физически или технически значимым. При этом следует различать принципиальную и реальную вычислимости. Возможность численного исследования конкретных динамических систем ограничена реальной вычислимостью. Точное исследование идеальной динамической системы численными методами невозможно и неизбежно определенное огрубление в описании структуры фазового портрета динамической системы.

В основу концепции огрубленного численного исследования конкретных динамических систем положены реализуемые вычисления, необходимые ограничения и исходные данные, а именно:

- оператор динамической системы предполагается вычислимым;
- уточнены понятия устойчивости и неустойчивости, введены понятия малых и больших пространственных и временных величин для исследуемой динамической системы;

- выделены конечные области фазового пространства и пространства параметров, в которых проводится исследование, эти области должны быть указаны исходя из реальной задачи;

- огрубленное описание фазового портрета опирается лишь на реально вычисляемые особенности поведения фазовых траекторий исследуемой системы: наличие устойчивых состояний равновесия, устойчивых периодических движений, а также хаотических аттракторов, под которыми понимаются любые сложные установившиеся движения.

Результатом огрубленного численного исследования в фазовом пространстве динамической системы при заданных значениях параметров является построение огрубленного фазового портрета динамической системы для ограниченной области фазового пространства. Построение огрубленного фазового портрета при заданных значениях параметров состоит в определении и описании установившихся движений (аттракторов) и их областей притяжения, точнее, некоторых их частей, прилегающих к соответствующим аттракторам. Причем целью вычислений является получение не достоверных результатов, а статистически достоверных с заданной вероятностью $p < 1$, но определенно близкой к единице.

С изменением значений параметров возможно изменение и фазового портрета. В качестве характеристики изменения огрубленного фазового портрета в зависимости от значений параметров вводится понятие огрубленного параметрического портрета динамической системы для ограниченной области в пространстве параметров. Построение огрубленного параметрического портрета сводится к определению, хотя бы частичному, и описанию множества значений параметров, отвечающих различным видам фазовых портретов. При этом результаты должны быть статистически достоверны.

Итак, огрубленное численное исследование динамической системы предполагает построение огрубленных фазовых и параметрического портретов. Огрубленный фазовый портрет при заданных значениях параметров включает в себя только установившиеся движения (устойчивые состояния равновесия, устойчивые периодические движения и хаотические аттракторы) в некоторой ограниченной области фазового пространства и прилегающие к аттракторам части областей притяжения, определяемые с заданной статистической достоверностью. Огрубленный параметрический портрет состоит из соответствующих различным огрубленным фазовым портретам областей в пространстве параметров, имеющих достаточно простую конфигурацию и отвечающих заданной степени статистической достоверности.

Но даже огрубленное исследование для больших размерностей фазового и параметрического пространств требует очень квалифицированной и длительной работы, а подчас и практически невыполнимо. Для формализации и автоматизации такого исследования могут быть использованы идеи и методы теории распознавания образов.

1.2. Огрубленное численное исследование динамических систем как проблема распознавания образов. Исследовать динамическую систему – значит выяснить, каковы ее возможные движения, фазовые портреты и бифуркации. Изменяя начальные условия для построения траекторий при заданных значениях параметров, исследователь изучает движения системы и выясняет ее фазовый портрет, узнавая

на экране образы состояний равновесия, периодических движений, сепаратрис и т.п. Меняя значения параметров, исследователь наблюдает за изменением движений системы и тем самым изучает возможные ее бифуркации.

Таким образом, в основе исследования лежит эксперимент, состоящий в выборе некоторых значений параметров, в задании начальных условий для интегрирования системы дифференциальных уравнений и в построении для них фазовой траектории. Результат серии таких экспериментов – множество траекторий, отвечающих различным начальным условиям и разным наборам параметров. Эффективным математическим аппаратом для обработки, анализа и отыскания скрытых закономерностей в полученной статистической выборке являются методы распознавания образов, обладающие широкими адаптивными и оптимизационными возможностями и работающие в пространстве большой размерности. Если посмотреть на процесс исследования глазами специалиста по распознаванию образов, то становится очевидно, что построение фазового портрета – это распознавание различного вида движений в фазовом пространстве системы на основе обучающей выборки данных, представляющих собой массив отрезков фазовых траекторий (конечные многомерные временные ряды). Здесь распознаваемыми образами являются установившиеся движения (аттракторы), а построение параметрического портрета динамической системы связано с решением задачи распознавания фазовых портретов в пространстве параметров системы на основе данных о числе и характере аттракторов (тип аттрактора и его локализация в фазовом пространстве) в зависимости от значений параметров. Применение методов распознавания позволяет формализовать и автоматизировать процесс исследования в пространствах размерности $n \geq 3$, когда возможности человека ограничены.

Главная отличительная особенность задач распознавания при исследовании динамических систем состоит в том, что это – задачи распознавания с активным экспериментом, то есть обучающая выборка формируется исследователем в процессе решения поставленных задач. При этом возможности проведения эксперимента практически не ограничены, а временные затраты определяются сложностью интегрирования исследуемой системы. Как всякая задача с активным экспериментом, она требует планирования эксперимента. Под планированием эксперимента подразумевается выбор значений параметров и выбор начальных условий для интегрирования системы, а также задание длительности, шага дискретизации и точности счета при построении фазовой траектории. Цель планирования определяется конечной целью исследования и состоит в обеспечении требуемой точности результатов: определение и описание установившихся движений и областей их притяжения в фазовом пространстве, а также областей их существования в пространстве параметров системы.

Итак, основные особенности предлагаемого подхода связаны: *во-первых*, с упрощением задачи исследования в виде построения огрубленных портретов исследуемой конкретной динамической системы в фазовом пространстве и в пространстве параметров исследуемой системы; *во-вторых*, с переходом от классических методов исследования к достоверному эксперименту с привлечением методов распознавания образов и статистического моделирования для обработки и анализа результатов эксперимента как основы для формализации и, тем самым, возможной автоматизации процесса исследования.

2. Численное исследование конкретных динамических систем методами распознавания образов

Численное исследование динамической системы распадается на два этапа: построение огрубленного фазового портрета, характеризующего поведение траекторий в фазовом пространстве системы при заданных значениях параметров, и построение огрубленного параметрического портрета, характеризующего изменение огрубленного фазового портрета в зависимости от значений параметров. Остановимся подробнее на каждом из двух этапов исследования конкретной динамической системы методами распознавания образов.

2.1. Построение огрубленного фазового портрета динамической системы.

Численное исследование конкретной динамической системы в фазовом пространстве при заданных значениях параметров состоит в построении огрубленного фазового портрета и сводится к решению трех основных задач:

- определение вида и числа аттракторов в исследуемой динамической системе;
- описание и разделение аттракторов в фазовом пространстве;
- выделение областей притяжения для каждого из аттракторов.

Исследование динамических систем в фазовом пространстве базируется на решающих правилах распознавания трех типов фазовых траекторий, а именно: траекторий, стремящихся к состоянию равновесия; траекторий, стремящихся к предельному циклу; траекторий, принадлежащих хаотическим аттракторам. Эти решающие правила построены на основе анализа обширной статистической выборки, состоявшей из траекторий различных типов для разных и по своей природе, и по размерности фазового пространства динамических систем. Правила используют признаки, характеризующие устойчивость траекторий и описывающие поведение траекторий при приближении их к аттрактору, они едины для всех систем и представлены в работах [1,2].

Весь процесс построения фазового портрета при исследовании конкретных динамических систем можно представить в виде последовательного решения следующих задач анализа и распознавания данных.

1. Анализ отдельных фазовых траекторий с целью формирования признаков, информативных для решения задач распознавания [1,2].

2. Распознавание типа фазовой траектории по признакам, сформированным при решении задачи 1.

3. Определение вида и числа аттракторов для исследуемой динамической системы как задачи классификации на основе данных, полученных при решении задач 1 и 2.

4. Распознавание аттракторов с целью их описания и разделения в фазовом пространстве как задачи дискриминации образов, построенных в задаче 3.

5. Построение правила для принятия решения о принадлежности произвольной траектории к определенному аттрактору.

6. Выделение областей притяжения для каждого из аттракторов на основе выборки, сформированной с помощью результатов решения задач 3, 4 и 5.

Часть этих задач (3, 4, 6) направлена на непосредственное решение проблем, связанных с исследованием структуры фазового пространства динамической системы, а другие (1, 2, 5) имеют прикладное значение и необходимы для формирования обучающей выборки и автоматизации процесса исследования.

Все задачи решаются на основе множества данных, представляющих собой массив конечных отрезков фазовых траекторий (многомерные временные ряды). Пер-

вичная выборка создается случайным равномерным выбором начальных точек в заданной ограниченной области фазового пространства. В процессе исследования, ведущегося в адаптивном режиме, обучающая выборка расширяется и корректируется в зависимости от результатов решения текущих задач.

Результатом огрубленного численного исследования динамической системы в фазовом пространстве является определение структуры фазового портрета в виде некоторого множества аттракторов I_s (устойчивые состояния равновесия, многообразие устойчивых состояний равновесия, устойчивые периодические движения, хаотические аттракторы) и их областей притяжения $D(I_s)$. Все это в пределах принятых понятий малых и больших пространственно-временных величин для исследуемой системы, которые при необходимости могут быть уточнены и расширены. При этом в отношении областей притяжения указывается статистическая достоверность полученных результатов. С ростом используемого времени численных расчетов (с увеличением обучающей выборки) достоверность результатов приближается к единице.

Построение огрубленного фазового портрета позволяет перейти к следующему этапу исследования динамической системы – построению огрубленного параметрического портрета.

2.2. Построение огрубленного параметрического портрета динамической системы. В классической теории исследования динамических систем задача изучения зависимости структуры фазового пространства динамической системы от параметров, в отличие от исследования структуры фазового пространства, вообще не имеет разработанных подходов для динамических систем с большим числом параметров. Численное исследование конкретных динамических систем методами распознавания в пространстве параметров состоит в построении огрубленного параметрического портрета и сводится к решению следующих основных задач:

- 1) предварительный анализ с целью определения и описания возможных видов огрубленных фазовых портретов и, тем самым, установившихся движений (аттракторов) в исследуемой динамической системе;
- 2) формирование обучающей выборки для распознавания огрубленных фазовых портретов в пространстве параметров системы;
- 3) определение и описание множеств значений параметров, отвечающих различным типам огрубленных фазовых портретов;
- 4) построение бифуркационных портретов для сечений пространства параметров по заданным направлениям.

Остановимся коротко на каждой из решаемых задач.

База для решения первой задачи – огрубленные фазовые портреты, построенные для множества значений параметров, полученных случайным выбором в заданной ограниченной области параметрического пространства. Фазовый портрет характеризуется, прежде всего, видом и числом аттракторов (это признаки, информативные для всех математических моделей вне зависимости от их конкретного содержания), а также их локализацией в фазовом пространстве системы (информативность этих признаков определяется конкретным содержанием модели, для примера см. п. 3. 2).

Различные огрубленные фазовые портреты R_s – это распознаваемые образы в пространстве параметров. Для каждого из них формируется обучающая выборка, используемая для построения и описания методами распознавания элементов огрубленного параметрического портрета $Q(R_s)$, представляющих собой множества

значений параметров, отвечающих выделенным фазовым портретам R_s исследуемой динамической системы. При этом целью вычислений не является отыскание всего множества параметров, отвечающих определенному огрубленному фазовому портрету, а выделение лишь некоторого его подмножества относительно простой конфигурации, которое можно описать с помощью конечного числа параллелепипедов, сфер или эллипсоидов. При этом результаты должны быть статистически достоверны, т. е. вероятность получения фазового портрета R_s на выделенном множестве параметров $Q(R_s)$ не должна быть меньше заданного значения p_0 , достаточно близкого к единице.

При большом разнообразии фазовых портретов, а иногда и для целей прикладного исследования целесообразнее использовать в качестве распознаваемых образов не фазовые портреты, а различные виды установившихся движений (с учетом их локализации в фазовом пространстве) J_s в исследуемой системе. Для каждого из них определяются соответствующие им множества значений параметров $O(J_s)$. В этом случае фазовому портрету R_s , как совокупности различного вида установившихся движений $R_s = \bigcup_{k=1}^m J_{s_k}$, будет отвечать множество значений параметров

$$Q(R_s) = \left(\bigcap_{k=1}^m O(J_{s_k}) \right) \setminus \left(\bigcup_{k=m+1}^n O(J_{s_k}) \right),$$

где n – число всех выделенных в системе аттракторов.

При необходимости возможно провести уточнение параметрического портрета вплоть до построения бифуркационного портрета для выбранных сечений относительно небольшой размерности. Определение бифуркационных значений (кривых, поверхностей) требует довольно большого объема вычислений, который экспоненциально растет с увеличением размерности исследуемого сечения пространства параметров.

Как и построение огрубленного фазового портрета, построение огрубленного параметрического портрета динамической системы ведется в адаптивном режиме с расширением обучающей выборки в процессе решения на базе текущих результатов.

2.3. Методы решения задач распознавания. Все задачи распознавания, применяемые для исследования динамических систем – это задачи распознавания с активным экспериментом, когда обучающая выборка постоянно изменяется. Для решения таких задач используются оригинальные адаптивные методы, разработанные авторами. Применяются два хорошо дополняющих друг друга подхода к анализу данных: первый подход, статистический, на основе универсальной рекуррентной формы метода наименьших квадратов [3] и второй – логический, на основе оптимальных тупиковых нечетких тестов и синдромов [4,5]. Здесь указаны ссылки на общие методы распознавания. Многие из них адаптированы к решению рассматриваемой задачи. Разработаны и многочисленные специальные алгоритмы анализа и распознавания данных для исследования конкретных динамических систем. Для описания выделенных областей в фазовом и параметрическом пространствах используются алгоритмы, основанные на покрытии точек из обучающей выборки параллелепипедами (синдромальные решающие правила), сферами или эллипсоидами (метод ортогональных компонент на базе универсальной рекуррентной формы метода наименьших квадратов). Самыми удобными и легкими в интерпретации для исследователя являются синдромальные решающие правила, когда область притяжения описывается системой неравенств вида $a_i \leq x_i \leq b_i$ для всех переменных исследуемой системы.

Методы теории распознавания образов в сочетании со статистическим моделированием, применяемым при планировании эксперимента, дали возможность провести численное исследование и построить огрубленные фазовые и параметрические портреты как для известных, так и новых математических моделей, причем значительная часть этих исследований была проведена в автоматическом режиме.

3. Огрубленное исследование математической модели иммунного ответа организма на вторжение инфекции

Возможности предлагаемого подхода к исследованию динамических систем проиллюстрируем на примере исследования математической модели иммунного ответа организма на вторжение инфекции [6].

3.1. Представление математической модели. Иммунные системы животного и человека очень сложны, но, несмотря на всю сложность иммунного ответа организма на инфекцию, на первый план выступают три фактора: инфекция, ее размножение и влияние на организм, противодействие организма и возможности его реализации, зависящие от его состояния. Эти факторы можно количественно охарактеризовать тремя величинами: x , y и z – численностью инфекции, величиной противодействия организма и потенциалом организма. Инфекция, помимо своей численности x , характеризуется быстротой размножения в среде организма и подавляющим действием на него. Противодействие характеризуется своим количеством y и его эффективностью, быстротой и мощностью пополнения w , зависящими от организма и его потенциала z . Динамика иммунного ответа – изменение величин x , y , z , w – описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda x - \frac{axy}{1 + \alpha x} - \epsilon x^2, \\ \dot{y} &= \begin{cases} -\frac{bxy}{1 + \alpha x} + w = K, & \text{если } y > 0 \text{ или } y = 0, K \geq 0, \\ 0, & \text{если } y = 0, K < 0, \end{cases} \\ \dot{z} &= \begin{cases} \frac{c(z_0 - z)}{1 + \gamma x} - dy - e = F, & \text{если } z \geq 0 \text{ или } y = 0, F \geq 0, \\ 0, & \text{если } z = 0, F < 0, \end{cases} \\ \tau \dot{w} + w &= \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq x_0, \\ Bz(2z_0 - z)(x + \beta x^2), & \text{если } x > x_0. \end{cases} \end{aligned}$$

Параметрами системы являются коэффициенты эффективности указанных процессов и используемые в них пороги. В этих уравнениях: x_0 – порог чувствительности организма к инфекции; τ – временная задержка дополнительного иммунного ответа; z_0 – предельное значение потенциала организма ($z_0 \geq z \geq 0$); обращение z в ноль трактуется как полное истощение организма, ведущее к его гибели. Модель содержит 4 переменных и 14 параметров. Более полное описание ее можно найти в [6].

Аналитическими и численными методами была исследована упрощенная модель с двумя переменными x и y , полученная из исходной при условиях $z = \text{const}$ и $\tau = 0$ [6]. Исходная модель достаточно сложна для исследования традиционными методами. Далее приводятся результаты огрубленного исследования этой модели методами распознавания образов, основанными на применении аппарата оптимальных тупиковых нечетких тестов с построением синдромальных решающих правил распознавания.

3.2. Краткое изложение основных результатов исследования модели. Какие возможности для анализа предоставляют результаты огрубленного численного исследования математической модели? Прежде всего, выделенное множество аттракторов отвечает всем возможным исходам заболеваний. Фазовый портрет при заданных значениях параметров позволяет определить как возможные исходы заболевания (аттракторы), так и зависимость исхода заболевания от численности инфекции и исходного состояния организма (области притяжения аттракторов). Кроме того, путем анализа траекторий любого аттрактора (построить их легко, зная область его притяжения), определяются варианты течения заболеваний (например, выздоровление путем постепенного подавления инфекции или выздоровление через обострение, когда на некотором этапе заболевания наблюдается увеличение численности x). Параметрический портрет дает представление о зависимости течения и исхода заболеваний от характера инфекции и общего состояния организма, его способности противодействовать инфекции.

Перейдем к краткому изложению основных результатов исследования модели. Огрубленное численное исследование велось с заданной статистической достоверностью $p_0 = 0.99$. Конечный результат исследования – огрубленный параметрический портрет, полученный для заданных ограниченных областей фазового и параметрического пространств. Границы областей выбирались на этапе предварительного исследования, исходя из требования диссипативности системы в заданной области. Огрубленный параметрический портрет состоит из областей параметров, соответствующих выделенным 87 фазовым портретам. Каждая из областей описывается набором синдромов (параллелепипедов). Как уже было сказано в п. 2.2, фазовые портреты различаются видом и числом составляющих их аттракторов. В исследуемой модели выделены устойчивые состояния равновесия, многообразия устойчивых состояний равновесия и предельные циклы, хаотических и стохастических аттракторов в системе не обнаружено. Особенностью данной задачи является то, что аттракторы одного и того же типа дополнительно различаются и по их расположению в фазовом пространстве в том случае, если они отвечают разным исходам заболевания. Например, наличие устойчивого состояния равновесия (x^*, y^*, z^*, w^*) может свидетельствовать о совершенно разных исходах заболевания в зависимости от конкретных предельных значений фазовых переменных:

- $x^* = 0, y^* \geq 0, z^* \neq 0, w^* \geq 0$ означает выздоровление с полным уничтожением инфекции;
- $x^* = x_0, y^* \geq 0, z^* \neq 0, w^* \geq 0$ соответствует выздоровлению, но с сохранением численности инфекции на уровне порога чувствительности организма к инфекции (бациллоносительство);
- $x^* \geq x_0, y^* \neq 0, z^* \neq 0, w^* \neq 0$ отвечает хроническому заболеванию;
- $x^* \geq x_0, y^* = 0, z^* = 0, w^* = 0$ означает летальный исход от интоксикации;
- $x^* = 0, y^* \geq 0, z^* = 0, w^* = 0$ означает летальный исход в связи с полным истощением организма и др.

То же самое можно сказать и о многообразиях устойчивых состояний равновесия. Отметим, что наиболее часто встречаются многообразия вида $(x^* = 0, y \in [y_{\min}^*, y_{\max}^*], z \in [z_{\min}^*, z_{\max}^*], w^* = 0)$, $(x^* = 0, y \in [y_{\min}^*, y_{\max}^*], z^* \neq 0, w^* = 0)$ и $(x^* = 0, y \in [y_{\min}^*, y_{\max}^*], z^* = 0, w^* = 0)$. Первые два из них отвечают выздоровлению с полным подавлением инфекции, когда конечное состояние организма зависит от его начального состояния, а последнее многообразие означает летальный исход вследствие истощения организма, причем все эти многообразия являются линейными. Среди предельных циклов следует особо выделить циклы с изменением по x в некоторой окрестности порогового значения x_0 ($x_0 - \Delta_1 \leq x \leq x_0 + \Delta_2$), что соответствует рецидивирующему заболеванию.

С учетом отмеченных особенностей выделения аттракторов, в состав всех фазовых портретов входят в общей сложности 19 аттракторов. Построенные фазовые портреты включают в себя от 1 до 6 аттракторов: 6 портретов с одним аттрактором, 22 – с двумя, 32 – с тремя, 21 имеют по 4 аттрактора, 4 – по 5 и лишь 2 портрета имеют по 6 аттракторов.

Конкретизируя сказанное, приведем примеры полученных фазовых портретов и их представление в параметрическом портрете динамической системы.

3.3. Примеры огрубленных фазовых портретов. Для представления огрубленных фазовых портретов модели иммунного ответа организма на вторжение инфекции выберем фазовые портреты с достаточно большим числом аттракторов, которых не наблюдалось в упрощенной модели, описанной в [6], а именно: фазовые портреты с 3 и 4 аттракторами. С целью облегчения визуального анализа данных и для простоты изложения при описании областей фазового пространства (области притяжения аттракторов) или пространства параметров (область существования фазового портрета) параллелепипедами, полученными путем построения синдромальных решающих правил, мы ограничимся лишь одним наиболее представительным синдромом.

Примером огрубленного фазового портрета с 3 аттракторами является портрет с многообразием устойчивых состояний равновесия типа $(x^* = 0, y \in [y_{\min}^*, y_{\max}^*], z \in [z_{\min}^*, z_{\max}^*], w^* = 0)$ и двумя устойчивыми состояниями равновесия вида $(x^* \geq x_0, y^* \neq 0, z^* \neq 0, w^* \neq 0)$. Для состояния организма, характеризуемого значениями параметров $\lambda = 0.25, a = 1.0, \alpha = 1.0, \varepsilon = 0.01, b = 6.0, \tau = 1.0, B = 1.0, z_0 = 1.0, \beta = 0.1, x_0 = 1.0, c = 1.0, \gamma = 1.0, d = 0.05, e = 0.01$, фазовый портрет указывает на три возможных исхода заболевания:

- многообразие устойчивых состояний равновесия $(x^* = 0; 0.539 < y < 16.322; 0.174 < z < 0.963; w^* = 0)$ соответствует выздоровлению с полным подавлением инфекции, причем конечное состояние организма определяется его начальным состоянием;

- состояние равновесия $(x^* \approx 3.985, y^* \approx 1.049, z^* \approx 0.688, w^* \approx 5.031)$ отвечает хроническому заболеванию;

- состояние равновесия $(x^* \approx 22.252, y^* \approx 0.638, z^* \approx 0.026, w^* \approx 3.663)$, когда z^* очень мало, а x^* велико, означает тяжелую форму хронического заболевания с большой угрозой для жизни.

С заданной степенью статистической достоверности $p_0 = 0.99$ можно указать области фазового пространства, для которых имеют место приведенные выше исходы заболевания (части областей притяжения аттракторов):

- выздоровление достоверно наблюдается при $0 < x < 0.521, 2.901 < y < 8.777, 0.536 < z < 0.901, 0 < w < 1.273$;

- хроническое заболевание – при $0.988 < x < 6.800$, $0 < y < 3.918$, $0.506 < z < 0.990$, $0 < w < 8.840$;

- угроза жизни существует при численности инфекции $5.989 < x < 22.258$ и начальном состоянии организма $0.04 < y < 9.850$, $0 < z < 0.462$, $0.180 < w < 11.655$.

Как конечный результат исследования, на основе полученных данных на рис. 1 этот фазовый портрет представлен в проекции на плоскость $x0z$. Отрезки фазовых траекторий, стремящихся к трем разным аттракторам, изображены линиями с различными символами (треугольниками отмечены траектории, принадлежащие линейному многообразию, а звездочками и окружностями – траектории, стремящиеся к двум устойчивым состояниям равновесия).

Со статистической достоверностью $p_0 = 0.99$ аналогичный фазовый портрет наблюдается и в области параметров: $0.333 < \lambda < 0.351$, $1.061 < a < 1.132$, $0.917 < \alpha < 1.080$, $0.008 < \varepsilon < 0.010$, $5.755 < b < 6.267$, $0.901 < \tau < 0.953$, $1.047 < B < 1.117$, $1.162 < z_0 < 1.208$, $0.089 < \beta < 0.094$, $0.923 < x_0 < 1.016$, $0.917 < c < 1.006$, $0.861 < \gamma < 1.025$, $0.045 < d < 0.047$, $0.011 < e < 0.012$.

Другой пример огрубленного фазового портрета – портрет с четырьмя аттракторами: линейные многообразия устойчивых состояний равновесия вида $(x^* = 0, y \in [y_{\min}^*, y_{\max}^*], z \in [z_{\min}^*, z_{\max}^*], w^* = 0)$, $(x^* = 0, y \in [y_{\min}^*, y_{\max}^*], z^* \neq 0, w^* = 0)$ и $(x \in [x_{\min}^*, x_{\max}^*], y^* = 0, z^* = 0, w^* = 0)$, а также устойчивый предельный цикл. Для состояния организма, характеризуемого значениями параметров $\lambda = 0.2$, $a = 1.0$, $\alpha = 1.0$, $\varepsilon = 0.001$, $b = 4.0$, $\tau = 1.0$, $B = 1.0$, $z_0 = 1.0$, $\beta = 0.1$, $x_0 = 1.0$, $c = 1.0$, $\gamma = 1.0$, $d = 0.5$, $e = 0.01$, фазовый портрет указывает на четыре возможных исхода заболевания:

- выздоровление с полным подавлением инфекции (многообразие устойчивых состояний равновесия с изменением по переменным $x^* = 0$, $0.279 < y < 17.807$, $0.0996 < z < 0.976$, $w^* = 0$);

- рецидивирующее заболевание (предельный цикл с изменением по переменным $0.957 < x < 1.117$, $0.192 < y < 0.565$, $0.931 < z < 0.946$, $0.214 < w < 1.162$);

- летальный исход вследствие полного истощения организма (многообразие устойчивых состояний равновесия с изменением по переменным $x^* = 0$, $20.227 < y < 579.35$, $z^* = 0$, $w^* = 0$);

- смерть от интоксикации (многообразие устойчивых состояний равновесия с изменением по переменным $199.980 < x < 200.0$, $y^* = 0$, $z^* = 0$, $w^* = 0$).

Этот фазовый портрет в проекции на плоскость $x0z$ представлен на рис. 2

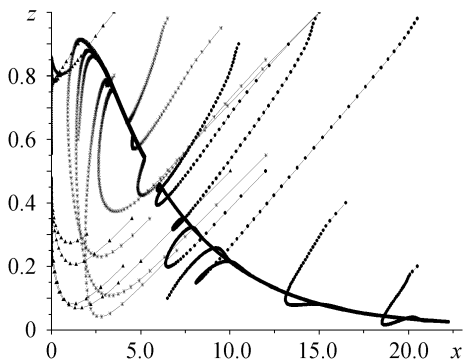


Рис. 1. Фазовый портрет с 3 аттракторами в проекции на плоскость $x0z$

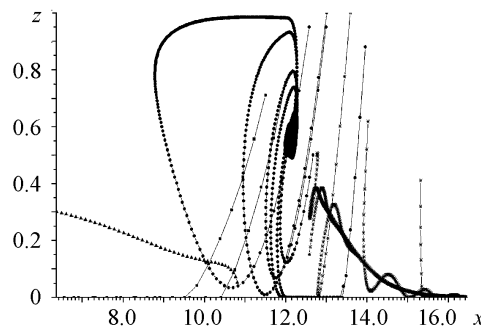


Рис. 2. Фазовый портрет с 4 аттракторами в проекции на плоскость $x0z$

(с логарифмическим масштабом по оси x). Треугольниками отмечены траектории, характеризующие процесс полного выздоровления; окружностями – траектории, соответствующие переходу к рецидивирующему заболеванию; квадратами и звездочками отмечены траектории, характеризующие течение заболеваний с летальным исходом (квадраты – смерть от истощения, звездочки – смерть от интоксикации).

Со статистической достоверностью $p_0 = 0.99$ аналогичный фазовый портрет наблюдается в области параметров: $0.1814 < \lambda < 0.2321$, $1.0196 < a < 1.1244$, $0.9476 < \alpha < 1.0762$, $0.0006 < \varepsilon < 0.0023$, $3.1998 < b < 4.0140$, $1.0095 < \tau < 1.1026$, $0.9570 < B < 1.1149$, $1.0241 < z_0 < 1.1194$, $0.0669 < \beta < 0.1774$, $0.9108 < x_0 < 1.0906$, $0.9632 < c < 1.0540$, $0.9392 < \gamma < 1.1166$, $0.3644 < d < 0.5224$, $0.0137 < e < 0.0251$.

3.4. Перспективы использования математической модели. Самое главное в результатах такого исследования – это возможности прогнозирования и выбора методов профилактики и лечения заболеваний. В идеале при автоматизации исследования процесс лечения может быть реализован путем управления этой динамической системой с целью возвращения ее в состояние здоровья и его поддержание.

Заключение

Предлагаемая работа имеет целью показать, что проблема исследования конкретных динамических систем может естественно и плодотворно рассматриваться как задача распознавания образов и что на этом пути возможно существенное продвижение в ее решении.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 08-01-00248.

Библиографический список

1. Котельников И.В. Синдромальные процедуры распознавания для исследования фазового пространства конкретных многомерных динамических систем // Математические методы распознавания образов. Доклады конференции ММРО-13. М.: МАКС Пресс, 2007. С. 146.
2. Неймарк Ю.И., Теклина Л.Г. Анализ фазовых траекторий многомерных динамических систем методами распознавания на основе одномерных временных рядов // Математические методы распознавания образов. Доклады конференции ММРО-13. М.: МАКС Пресс, 2007. С. 191.
3. Неймарк Ю.И., Теклина Л.Г. Новые технологии применения метода наименьших квадратов. Учебное пособие. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского государственного университета, 2003.
4. Kotelnikov I.V. A syndrome recognition method based on optimal irreducible fuzzy tests // Pattern Recognition and Image Analysis. 2001. Vol. 11, № 3. P. 553.
5. Kotelnikov I.V. Cluster analysis of multidimensional objects based on optimal irreducible fuzzy tests and syndromes // Pattern Recognition and Image Analysis. 2004. Vol. 14, № 3. P. 361.
6. Неймарк Ю.И. Математические модели в естествознании и технике. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского государственного университета, 2004.

*Нижегородский государственный
университет*

*Поступила в редакцию 2.11.2009
После доработки 25.01.2010*

**NEW APPROACH TO NUMERICAL RESEARCH
OF THE CONCRETE DYNAMIC SYSTEMS BY METHODS
OF PATTERN RECOGNITION AND STATISTICAL MODELLING**

Yu.I. Neimark, I.V. Kotel'nikov, L.G. Teklina

In the present work the new approach to numerical research of the concrete multi-dimensional and multiparametric dynamic systems is submitted. The offered approach, in part realized and approved, is based on computer calculation of phase trajectories and on use of pattern recognition methods.

Keywords: Dynamic systems, numerical methods, pattern recognition.

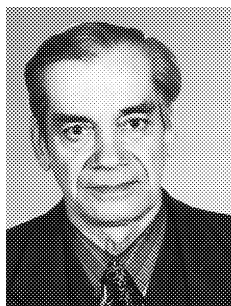


Неймарк Юрий Исаакович – доктор технических наук, профессор Нижегородского государственного университета, заслуженный деятель науки Российской Федерации, лауреат научных премий имени А.А. Андропова и Н. Винера, член Национального комитета России по теоретической и прикладной механике. Область научных интересов: теория колебаний, теория динамических систем, теория управления, математическое моделирование и кибернетика. Автор 10 монографий, 5 из которых переведены на английский, испанский и польский языки, более 400 научных работ и 20 изобретений.

603005, Нижний Новгород, ул. Ульянова, 10

НИИПМК

E-mail: neymark@pmk.unn.ru



Котельников Игорь Вячеславович – окончил Горьковский государственный университет (1959). С 1972 года работает в Научно-исследовательском институте прикладной математики и кибернетики. Старший научный сотрудник. Научные интересы включают оптимальные тупиковые нечеткие тесты и синдромы и нахождение на их основе логических закономерностей в статистических выборках многомерных объектов. Автор более 40 научных работ.

603005, Нижний Новгород, ул. Ульянова, 10

НИИПМК

E-mail: neymark@pmk.unn.ru



Теклина Лариса Григорьевна – окончила Горьковский государственный университет в 1971 году. Старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и кибернетики Нижегородского государственного университета, кандидат физико-математических наук, автор более 40 научных работ по теоретической кибернетике и математическому моделированию.

603005, Нижний Новгород, ул. Ульянова, 10

НИИПМК

E-mail: neymark@pmk.unn.ru



ВЫЯВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СВЯЗЕЙ МЕЖДУ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ОСЦИЛЛЯТОРАМИ ПО ВРЕМЕННЫМ РЯДАМ

Д.А. Смирнов

Рассматривается задача выявления и количественной оценки нелинейных направленных связей между стохастическими осцилляторами. Предложены характеристики связи и методика их оценки по временным рядам. Аналитически получено выражение для уровня статистической значимости вывода о наличии связи, что позволяет делать надежные заключения при анализе относительно коротких сигналов. Эффективность подхода демонстрируется в численных экспериментах на примерах осцилляторов с различными свойствами и различными видами функций связи.

Ключевые слова: Оценка связей, связанные осцилляторы, нелинейный анализ временных рядов, фазовая динамика, статистические выводы.

Введение

При анализе сложных систем различной природы очень важен вопрос о наличии и характере взаимодействий (связей) между их подсистемами. В частности, структура и интенсивность связей в ансамбле колебательных систем определяет возможность их синхронизации, что является предметом многочисленных исследований (см., например, [1–5]). В последние годы активно исследуются возможности выявления направленных связей по временным рядам [6–16], что актуально при исследовании колебаний в сердечно-сосудистой системе [8,17–20] и почках [21,22], процессов переноса информации в нейронных сетях [23–30] и пр.

Один из наиболее чувствительных методов оценки связи между двумя осцилляторами был предложен в [6]. Он основан на моделировании фазовой динамики и применим в случае достаточно длинных временных рядов (несколько сотен характерных периодов) или малых шумов. В работе [7] метод обобщен на случай более коротких временных рядов и существенных шумов за счет специальных поправок и эмпирически найденного порогового значения характеристики связи, соответствующего 95%-й доверительной вероятности вывода о наличии связи. Метод нашел применения в нейрофизиологии [31] и климатологии [32]. Он был далее развит в

работе [33], где предложены модифицированные характеристики связи и получено аналитическое выражение для доверительной вероятности, с которой можно сделать вывод о наличии связи. Однако оба упомянутых способа улучшения метода ориентированы на конкретную форму используемой эмпирической модели, а именно, на связи, описываемые членами невысокого порядка в уравнениях фазовой динамики. Они не пригодны для выявления нелинейных воздействий произвольной сложности.

Выявление нелинейности зачастую важно для того, чтобы понять физический механизм взаимодействия. Кроме того, нелинейность связей может существенно влиять на динамику [34]. Поэтому в данной работе развитый в [33] метод (п. 1.1) обобщается для оценки нелинейных связей любого порядка (п. 1.2). Применимость новых оценок связи в случае достаточно коротких временных рядов и осцилляторов с различными свойствами иллюстрируется в численном эксперименте (раздел 2). Выводы представлены в Заключении.

1. Количественные характеристики направленных связей и их оценки

Основная идея подхода – оценить, насколько сильно зависит будущая эволюция фазы одной системы от текущего значения фазы другой системы. Формализм представлен ниже.

1.1. Характеристики первого порядка и их оценки

1.1.1. Теоретические характеристики. Фазовая динамика слабо связанных автоколебательных систем (детерминированных, в отсутствие связи периодических) с хорошей степенью точности [35] описывается системой дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} d\phi_1/dt &= \omega_1 + a_1 \sin(\phi_2 - \phi_1), \\ d\phi_2/dt &= \omega_2 + a_1 \sin(\phi_1 - \phi_2), \end{aligned} \quad (1)$$

где ω_k – собственные частоты осцилляторов, a_k – коэффициенты связи ($k = 1, 2$). Если осцилляторы слабо возмущаются шумом, то модель может быть обобщена [36] и записана в виде системы стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} d\phi_1/dt &= \omega_1 + a_1 \sin(\phi_2 - \phi_1) + \xi_1(t), \\ d\phi_2/dt &= \omega_2 + a_1 \sin(\phi_1 - \phi_2) + \xi_2(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\xi_k(t)$ – независимые источники белого шума с нулевым средним и автоковариационными функциями $\langle \xi_k(t)\xi_k(t') \rangle = \sigma_{\xi_k}^2 \delta(t - t')$, параметр σ_{ξ_k} характеризует интенсивность шума.

Пусть величины σ_{ξ_k} и $|a_k|$ достаточно малы, так что вклад соответствующих слагаемых в уравнении (2) в приращение фазы $\Delta\phi_k(t) = \phi_k(t + \tau) - \phi_k(t)$ мал по сравнению с «линейным приращением» $\omega_k\tau$, где τ – конечный интервал порядка характерного периода колебаний или больше. Тогда можно от уравнений (2) перейти к разностным уравнениям, что требуется при дальнейшей работе с дискретными временными рядами. Этот переход достигается путем интегрирования уравнений (2) на интервале длиной τ , что дает

$$\begin{aligned} \Delta\phi_1(t) &= w_1 + \alpha_1 \cos(\phi_2(t) - \phi_1(t)) + \beta_1 \sin(\phi_2(t) - \phi_1(t)) + \varepsilon_1(t), \\ \Delta\phi_2(t) &= w_2 + \alpha_2 \cos(\phi_1(t) - \phi_2(t)) + \beta_2 \sin(\phi_1(t) - \phi_2(t)) + \varepsilon_2(t), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\varepsilon_k(t)$ – шумы с нулевым средним и дисперсиями $\sigma_{\varepsilon_k}^2 = \sigma_{\xi_k}^2 \tau$. Их автокорреляционные функции (АКФ) $\gamma_k(l) = \langle \varepsilon_k(t)\varepsilon_k(t+l) \rangle / \sigma_{\varepsilon_k}^2$ линейно спадают от единицы до нуля на интервале временных лагов $0 \leq l \leq \tau$ и равны нулю при $l > \tau$. Эти свойства следуют из того, что при малости шумов и связи имеет место [7,33]

$$\varepsilon_k(t) \approx \int_t^{t+\tau} \xi_k(t') dt'.$$

Сила воздействия j -го осциллятора на k -й ($j \rightarrow k$) определена в [33] из следующих соображений. Рассмотрим статистические свойства приращения фазы $\Delta\phi_k$ – левой части уравнений (3). Ее среднее значение $\langle \Delta\phi_k \rangle = w_k \approx \omega_k \tau$. Из-за влияния шума и другого осциллятора величина $\Delta\phi_k$ флуктуирует около среднего значения (модуляция периода колебаний). При слабой связи стационарное вероятностное распределение «свернутых» фаз ($\phi_1 \bmod 2\pi, \phi_2 \bmod 2\pi$) является практически равномерным в квадрате $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$. Значит, функции-слагаемые в правой части (3) (это $1, \cos(\phi_j - \phi_k)$ и $\sin(\phi_j - \phi_k)$) взаимно ортогональны в этой области, то есть $\langle \cos(\phi_j - \phi_k) \sin(\phi_j - \phi_k) \rangle = 0$ и т.д., где угловые скобки означают математическое ожидание (усреднение по указанной равномерной вероятностной мере). Возведение в квадрат обеих частей уравнения (3) и усреднение показывает, что дисперсия $\Delta\phi_k$ – это сумма двух слагаемых

$$\sigma_{\Delta\phi_k}^2 = c_{j \rightarrow k} + \sigma_{\varepsilon_k}^2, \quad (4)$$

где величина

$$c_{j \rightarrow k} = \frac{1}{2} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \quad (5)$$

названа *силой воздействия* $j \rightarrow k$.

Таким образом, согласно выражениям (4) и (5) интенсивность флуктуаций приращения фазы $\Delta\phi_k$ представлена в виде суммы двух независимых факторов – влияния шума и другого осциллятора. Это дает ясный физический смысл величине $c_{j \rightarrow k}$.

1.1.2. Статистические оценки. На практике уравнения (3) неизвестны, а имеются временные ряды от двух систем – $\{x_1(t_1), \dots, x_1(t_{N_x})\}$ и $\{x_2(t_1), \dots, x_2(t_{N_x})\}$, где x_k – наблюдаемые, $t_i = i\Delta t$, Δt – интервал выборки, N_x – длина ряда. Чтобы оценить силу связи $c_{j \rightarrow k}$, рассчитывают фазы колебаний $\{\phi_1(t_1), \dots, \phi_1(t_N)\}$ и $\{\phi_2(t_1), \dots, \phi_2(t_N)\}$ с помощью известных методов [37,38] и оценивают коэффициенты модели (3) путем минимизации среднего квадрата ошибки

$$\begin{aligned} S(w_k, \alpha_k, \beta_k) &= \\ &= \frac{1}{N - \tau / \Delta t} \sum_{i=1}^{N - \tau / \Delta t} (\Delta\phi_k(t_i) - w_k - \alpha_k \cos(\phi_j(t_i) - \phi_k(t_i)) - \beta_k \sin(\phi_j(t_i) - \phi_k(t_i)))^2. \end{aligned}$$

Таким образом, оценки коэффициентов $\hat{w}_k, \hat{\alpha}_k, \hat{\beta}_k$ есть $\arg \min_{w_k, \alpha_k, \beta_k} S(w_k, \alpha_k, \beta_k)$. В качестве оценки величины $c_{j \rightarrow k}$ можно использовать $\hat{c}_{j \rightarrow k} = (1/2) (\hat{\alpha}_k^2 + \hat{\beta}_k^2)$.

Если временной ряд очень длинный, то $\hat{w}_k, \hat{\alpha}_k, \hat{\beta}_k$ практически совпадают с истинными значениями w_k, α_k, β_k , а значит, и $\hat{c}_{j \rightarrow k} = c_{j \rightarrow k}$. Однако на практике чаще встречаются ряды весьма умеренной длины. При этом $\hat{w}_k, \hat{\alpha}_k, \hat{\beta}_k$ уже не равны в точности истинным значениям коэффициентов, так что необходимо указать вероятную величину погрешности оценок. Уровень статистической значимости (вероятность случайной ошибки) вывода о наличии воздействия $j \rightarrow k$, то есть вы-

вода о том, что $c_{j \rightarrow k} > 0$, рассчитывается следующим образом. При гипотезе отсутствия связи ($c_{j \rightarrow k} = 0$) случайные величины $\hat{\alpha}_k$ и $\hat{\beta}_k$ являются независимыми и одинаково распределенными по нормальному закону с нулевым средним и некоторой дисперсией $\sigma_{\hat{\alpha}_k}^2$. Следовательно, величина $\chi_{j \rightarrow k}^2 = (\hat{\alpha}_k^2 + \hat{\beta}_k^2) / \sigma_{\hat{\alpha}_k}^2$ распределена при этом по закону «хи-квадрат» с двумя степенями свободы. Ее функция распределения $\Phi_2(x)$ табулирована (см., например, [39]). Обозначим $\hat{\chi}_{2,1-p}^2$ такое число, что $\Phi_2(\hat{\chi}_{2,1-p}^2) = 1 - p$, то есть $(1 - p)$ -квантиль распределения. Если оказывается, что $\chi_{j \rightarrow k}^2 > \hat{\chi}_{2,1-p}^2$, то можно опровергнуть гипотезу об отсутствии связи на уровне значимости p . Чем меньше p , тем надежнее вывод. Обычно значение $p = 0.05$ считается соответствующим достаточно высокой надежности. Величина $\sigma_{\hat{\alpha}_k}^2$ неизвестна, но вместо нее можно использовать оценку, полученную в [7],

$$\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}_k}^2 = \frac{2\hat{\sigma}_{\varepsilon_k}^2}{N} \left(1 + 2 \sum_{l=1}^{\tau/\Delta t} \left(1 - \frac{l}{\tau/\Delta t} \right) \cos \left(\frac{(\hat{w}_k + \hat{w}_j) l}{\tau/\Delta t} \right) \exp \left(- \frac{l (\hat{\sigma}_{\varepsilon_k}^2 + \hat{\sigma}_{\varepsilon_j}^2)}{2\tau/\Delta t} \right) \right),$$

где оценка дисперсии шума $\hat{\sigma}_{\varepsilon_k}^2 = \min_{w_k, \alpha_k, \beta_k} S(w_k, \alpha_k, \beta_k)$. Таким образом, уровень значимости, на котором можно сделать вывод о наличии воздействия $j \rightarrow k$, оценивается как $p_{j \rightarrow k} = 1 - \Phi_2(\chi_{j \rightarrow k}^2)$. Формула для оценки $\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}_k}^2$ получена при предположении о том, что АКФ шума ε_k линейно спадает до нуля на интервале $[0, \tau]$. Это единственный момент, где используется предположение о свойствах шума, но он важен, так как иначе нельзя оценить погрешности оценок связи.

1.2. Характеристики более высокого порядка и их оценки

1.2.1. Теоретические характеристики. Основное внимание в данной работе направлено на случай нелинейностей более высокого порядка в уравнениях фазовой динамики. А именно, функции связи в уравнениях (1) и (2) могут зависеть не только от разности фаз из-за сильной нелинейности исследуемых систем и их взаимных воздействий. В последнем случае необходимо рассматривать более общую модель фазовой динамики [37]

$$\begin{aligned} d\phi_1/dt &= \omega_1 + G_1(\phi_1, \phi_2) + \xi_1(t), \\ d\phi_2/dt &= \omega_2 + G_2(\phi_2, \phi_1) + \xi_2(t), \end{aligned} \tag{6}$$

где функции G_k 2π -периодичны по обоим аргументам. Они определяют взаимодействие осцилляторов и собственную нелинейность их динамики. Как и в предыдущем случае, можно перейти к следующим разностным уравнениям при условии малости шумов $\xi_k(t)$ и величин $|G_k|$:

$$\begin{aligned} \Delta\phi_1(t) &= F_1(\phi_1(t), \phi_2(t), \mathbf{a}_1) + \varepsilon_1(t), \\ \Delta\phi_2(t) &= F_2(\phi_2(t), \phi_1(t), \mathbf{a}_2) + \varepsilon_2(t), \end{aligned} \tag{7}$$

где F_k – тригонометрические многочлены вида

$$F_k(\phi_k, \phi_j, \mathbf{a}_k) = w_k + \sum_{(m,n) \in \Omega_k} (\alpha_{k,m,n} \cos(m\phi_k - n\phi_j) + \beta_{k,m,n} \sin(m\phi_k - n\phi_j)), \tag{8}$$

где $k = 1, 2$; $\mathbf{a}_k = (w_k, \{\alpha_{k,m,n}, \beta_{k,m,n}\}_{(m,n) \in \Omega_k})$ – векторы коэффициентов; Ω_k – диапазон суммирования, то есть набор пар значений m и n , определяющих, какие слагаемые присутствуют в многочлене. При близких частотах колебаний осцилляторов члены с $m = n = 1$ являются следствием линейной связи вида $k_{2 \rightarrow 1} x_2$ или $k_{2 \rightarrow 1}(x_2 - x_1)$. Члены с $n = 2$ могут отражать воздействие, квадратичное по координате влияющего осциллятора, например, $k_{2 \rightarrow 1} x_2^2$. Возможны и различные комбинации, так что связь в уравнениях фазовой динамики может описываться набором одночленов различных порядков с $n \neq 0$. Наибольшее влияние на динамику оказывают резонансные члены, то есть соответствующие $m/n \approx \omega_j/\omega_k$ в уравнении для k -го осциллятора. Однако нерезонансные слагаемые тоже могут быть важны [34].

Ниже предлагается определить силу воздействия $j \rightarrow k$ по аналогии с подходом [33] и выводится аналитическая формула для уровня значимости в рассматриваемом нелинейном случае. Рассмотрим вновь статистические свойства приращения фазы $\Delta\phi_k$ (в левой части уравнений (7)) при условиях слабой связи между осцилляторами, слабой нелинейности и малого шума. Среднее значение $\langle \Delta\phi_k \rangle = w_k \approx \omega_k \tau$. Стационарное вероятностное распределение «свернутых» фаз ($\phi_1 \bmod 2\pi, \phi_2 \bmod 2\pi$) является вновь равномерным в квадрате $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$, а слагаемые в многочлене F_k при равномерной плотности распределения являются взаимно ортогональными функциями в этой области. Поэтому возведение в квадрат обеих частей (7) и усреднение дает

$$\langle (\Delta\phi_k)^2 \rangle = w_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{(m,n) \in \Omega_k} (\alpha_{k,m,n}^2 + \beta_{k,m,n}^2) + \sigma_{\varepsilon_k}^2. \quad (9)$$

Слагаемые в (9), соответствующие $n \neq 0$, описывают воздействие j -го осциллятора на k -ый. Обозначим их сумму $c_{j \rightarrow k}$ и назовем ее силой воздействия $j \rightarrow k$

$$c_{j \rightarrow k} = \frac{1}{2} \sum_{(m,n) \in \Omega_k, n \neq 0} (\alpha_{k,m,n}^2 + \beta_{k,m,n}^2). \quad (10)$$

Остальные слагаемые определяют нелинейность индивидуальной фазовой динамики. Обозначим их b_k

$$b_k = \frac{1}{2} \sum_{(m,n) \in \Omega_k, n=0} (\alpha_{k,m,n}^2 + \beta_{k,m,n}^2). \quad (11)$$

Поскольку $\langle \Delta\phi_k \rangle = w_k$, дисперсия приращения фазы $\sigma_{\Delta\phi_k}^2 = \langle (\Delta\phi_k)^2 \rangle - \langle \Delta\phi_k \rangle^2$ определяется следующими тремя слагаемыми:

$$\sigma_{\Delta\phi_k}^2 = b_k + c_{j \rightarrow k} + \sigma_{\varepsilon_k}^2. \quad (12)$$

Величину $c_{j \rightarrow k}$ можно по-разному нормировать. Во-первых, $c_{j \rightarrow k}/w_k^2$ показывает силу воздействия по сравнению с линейным приращением фазы, то есть интенсивность модуляции периода колебаний за счет воздействия j -го осциллятора. Эта величина всегда много меньше единицы при условии малости связи. Во-вторых, $c_{j \rightarrow k}/\sigma_{\Delta\phi_k}^2$ показывает долю флуктуаций величины $\Delta\phi_k$, обусловленную воздействием j -го осциллятора. Эта величина меньше единицы, но может почти достигать ее, если фазовая

нелинейность и шум малы по сравнению с оцениваемым воздействием. В-третьих, $c_{j \rightarrow k} / \sigma_{\varepsilon_k}^2$ показывает силу воздействия j -го осциллятора по сравнению с воздействием шума.

Введенная характеристика связи зависит от параметра τ – временного масштаба. На различных временных масштабах относительные роли шума и воздействия j -го осциллятора могут быть различны. Так, влияние белого шума или шума, время автокорреляции которого много меньше характерного периода колебаний осцилляторов T , преобладает при $\tau \ll T$. С ростом τ растет роль остальных слагаемых в (12), но при очень больших τ вновь доминирует шум, так как зависимость приращения фазы от ее текущих значений пропадает. Таким образом, при промежуточных значениях τ влияние одного осциллятора на другой проявляется наиболее сильно. Практика показывает, что целесообразно брать в качестве τ величину основного периода колебаний T [6,7]. Если собственные периоды колебаний двух осцилляторов T_1 и T_2 сильно различаются, то можно рассматривать характеристики связи при двух значениях τ . В разделе 2 для краткости приводятся результаты только для одного значения τ : $\tau = (T_1 + T_2)/2$ в случае близких T_1 и T_2 или $\tau = \min\{T_1, T_2\}$, если T_1 и T_2 сильно различаются.

1.2.2. Статистические оценки. Чтобы реализовать предложенный формализм при анализе временного ряда, зададим достаточно большой набор одночленов в (8), чтобы он содержал все слагаемые, необходимые для описания исследуемого взаимодействия. Согласно методу наименьших квадратов минимизируем

$$S(\mathbf{a}_k) = \frac{1}{N - \tau/\Delta t} \sum_{i=1}^{N-\tau/\Delta t} (\Delta\phi_k(t_i) - F_k(\phi_k(t_i), \phi_j(t_i), \mathbf{a}_k))^2.$$

Тогда $\hat{\sigma}_{\varepsilon_k}^2 = \min_{\mathbf{a}_k} S(\mathbf{a}_k)$ и $\hat{\mathbf{a}}_k = \arg \min_{\mathbf{a}_k} S(\mathbf{a}_k)$ – оценки дисперсии шума и коэффициентов многочлена F_k , соответственно. Оценки характеристик связи получим аналогично (5)

$$\hat{c}_{j \rightarrow k} = \frac{1}{2} \sum_{(m,n) \in \Omega_k, n \neq 0} \left(\hat{\alpha}_{k,m,n}^2 + \hat{\beta}_{k,m,n}^2 \right). \quad (13)$$

Как и в п. 1.1, величина $\hat{c}_{j \rightarrow k}$ всегда неотрицательна. Даже при отсутствии связи между осцилляторами, то есть $c_{j \rightarrow k} = 0$, оценка $\hat{c}_{j \rightarrow k}$ почти наверное принимает значения, большие нуля. Таким образом, достоверный вывод о наличии воздействия $j \rightarrow k$ нельзя сделать из условия $\hat{c}_{j \rightarrow k} > 0$. Его можно сделать, только если $\hat{c}_{j \rightarrow k}$ «существенно» больше нуля. Для получения количественного критерия, найдем закон распределения $\hat{c}_{j \rightarrow k}$ при отсутствии связи и нелинейности, то есть для системы (6) с $G_1 \equiv G_2 \equiv 0$. В этом случае оценки всех коэффициентов $\hat{\alpha}_{k,m,n}, \hat{\beta}_{k,m,n}$ статистически независимы друг от друга и распределены одинаково по нормальному закону с нулевым средним [7]. Их дисперсии обозначим $\sigma_{\hat{\alpha}_{k,m,n}}^2$. Учитывая, что сумма квадратов M независимых нормально распределенных с нулевым средним и единичной дисперсией величин распределена по закону «хи-квадрат» с M степенями свободы, получим, что величина $\chi_{j \rightarrow k}^2 = \sum_{m,n(n \neq 0)} \frac{\hat{\alpha}_{k,m,n}^2 + \hat{\beta}_{k,m,n}^2}{\sigma_{\hat{\alpha}_{k,m,n}}^2}$ распределена по закону «хи-квадрат» с M_k степенями свободы, где M_k – количество слагаемых в

выражении (13). Значение $\chi_{j \rightarrow k}^2$ можно рассчитать по временному ряду, если вместо дисперсии $\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}_{k,m,n}}^2$ подставить оценку [7]

$$\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}_{k,m,n}}^2 = \frac{2\hat{\sigma}_{\varepsilon_k}^2}{N} \left(1 + 2 \sum_{l=1}^{\tau/\Delta t} \left(1 - \frac{l}{\tau/\Delta t} \right) \cos \left(\frac{l(m\hat{w}_k + n\hat{w}_j)}{\tau/\Delta t} \right) \exp \left(-\frac{l(m^2\hat{\sigma}_{\varepsilon_k}^2 + n^2\hat{\sigma}_{\varepsilon_j}^2)}{2\tau/\Delta t} \right) \right).$$

Таким образом, получен критерий для того, чтобы судить о статистической значимости вывода о наличии воздействия $j \rightarrow k$. А именно, если величина $\chi_{j \rightarrow k}^2$, рассчитанная по временному ряду, превосходит $(1 - p)$ -квантиль распределения «хи-квадрат» с M_k степенями свободы, то вывод можно сделать на уровне значимости p , то есть вероятность случайного ошибочного обнаружения связи не превосходит p . Функция распределения для закона «хи-квадрат» с M_k степенями свободы Φ_{M_k} табулирована [39]. Зная ее, можно оценить уровень значимости, на котором $\chi_{j \rightarrow k}^2$ отлична от нуля, по формуле $\hat{p}_{j \rightarrow k} = 1 - \Phi_{M_k}(\chi_{j \rightarrow k}^2)$.

Сравнивать силы воздействия $j \rightarrow k$ при различных условиях непосредственно по величинам $\hat{c}_{j \rightarrow k}$ (13) не удастся, так как последние являются смещенными оценками истинных значений $c_{j \rightarrow k}$ (10), что можно показать аналогично [7], то есть $\langle \hat{c}_{j \rightarrow k} \rangle > c_{j \rightarrow k}$, где угловые скобки означают математическое ожидание. Чтобы исключить это смещение (систематическую ошибку), достаточно вычесть из квадрата оценки каждого коэффициента в (13) ее дисперсию аналогично [7]. Полученную несмещенную оценку обозначим

$$\hat{C}_{j \rightarrow k} = \frac{1}{2} \sum_{m,n (n \neq 0)} \left(\hat{\alpha}_{k,m,n}^2 + \hat{\beta}_{k,m,n}^2 - 2\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}_{k,m,n}}^2 \right). \quad (14)$$

Суммируя, отмечу, что предложенные оценки и формула для уровня значимости применимы при следующих условиях.

1) Хорошо определены фазы колебаний. Это имеет место в случае узкополосного спектра мощности сигналов, когда можно применять любой из известных методов расчета фазы, например, с использованием преобразования Гильберта [37]. Для более сложных сигналов введение фаз должно быть обеспечено с помощью специальных подходов. В примерах раздела 2 фазы хорошо определены и эта проблема подробно не обсуждается.

2) Слабая зависимость между фазами осцилляторов, то есть почти равномерное распределение «свернутой» разности фаз на отрезке $(0, 2\pi)$. Это условие можно контролировать, рассчитывая по временному ряду обобщенные коэффициенты фазовой синхронизации $\hat{\rho}_{m,n} = \left| \langle e^{i(m\phi_1(t) - n\phi_2(t))} \rangle_t \right|$, где m, n – положительные целые числа. Предложенные оценки связи применимы для данного ряда, если $\hat{\rho}_{m,n} < \rho_c$ для всех m, n из множества Ω_k . Если $\hat{\rho}_{m,n} > \rho_c$ для некоторой пары индексов m, n , то временной ряд не пригоден для оценки направленных связей. Если рассматриваются осцилляторы с близкими собственными частотами, то для них большое значение может принимать только $\hat{\rho}_{1,1}$. Эта величина обозначается далее просто $\hat{\rho}$. Пороговое значение $\rho_c = 0.45$ подобрано эмпирически на эталонных примерах (см. раздел 2).

3) Шум ε_k имеет АКФ, линейно спадающую от единицы до нуля на интервале временных лагов $[0, \tau]$ и равную нулю при больших лагах. Для проверки следует

оценить АКФ остаточных ошибок – слагаемых в формуле для $S(\hat{a}_k)$. Эксперименты показывают (см. раздел 2), что для временного ряда длиной 100 периодов колебаний достаточно, чтобы абсолютная величина оценки АКФ не превышала примерно 0.2 при лагах, больших τ .

4) Слабая индивидуальная нелинейность и слабый шум. Первое нужно для равномерности распределения разности фаз. Второе – для правомерности перехода от (6) к (7) с гауссовыми шумами ε_k . Эти условия можно сформулировать как $\hat{\sigma}_{\varepsilon_k} \ll \hat{w}_k$ и $\sqrt{\hat{b}_k} \ll \hat{w}_k$. Во всех численных экспериментах в разделе 2 выполнялись соотношения $\hat{\sigma}_{\varepsilon_k} < 0.2\hat{w}_k$ и $\sqrt{\hat{b}_k} < 0.1\hat{w}_k$, чего оказывалось достаточно. Далее это условие подробнее не комментируется.

2. Численный эксперимент

Применимость предложенных оценок в случае временных рядов умеренной длины показана ниже в численных экспериментах для эталонных осцилляторов с различными свойствами. В п. 2.1 описана методика исследования, в пп. 2.2–2.5 – результаты расчетов для фазовых осцилляторов (п. 2.2), осцилляторов ван дер Поля (п. 2.3), систем Ресслера (п. 2.4) и систем Морриса–Лекара, являющихся моделью динамики нейрона (п. 2.5).

2.1. Методика исследования

В качестве эталонных примеров для тестирования предложенных оценок используются системы стохастических дифференциальных уравнений с различными видами нелинейности и силами связей. Уравнения численно интегрируются методом Эйлера с достаточно малым шагом h : $h = 0.01$ в пп. 2.2 и 2.3, $h = 0.001$ в п. 2.4, $h = 0.1$ в п. 2.5. Для корректного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений нужно указать, в каком смысле понимается стохастический интеграл вида $\int g(x(t))d\xi(t)$, где x – одна из переменных, ξ – белый шум, который входит в уравнения в виде слагаемого $g(x) \cdot \xi$ с гладкой функцией g . Допустимы различные варианты: интеграл Ито, интеграл Стратоновича, обобщенный стохастический интеграл, которые различаются при $g(x) \neq \text{const}$ [40]. Однако во всех примерах, рассмотренных ниже, включая уравнения (6), используется $g(x) \equiv 1$. При этом различные трактовки стохастического интеграла совпадают, так что согласно методу Эйлера в разностной схеме используется стохастическое слагаемое $\sigma_\xi \sqrt{h} \cdot \varepsilon_n$, где ε_n – последовательность независимых гауссовых случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией.

Интервал выборки задается так, чтобы обеспечить примерно 10 точек на характерном периоде колебаний в пп. 2.2–2.4 ($\Delta t = 0.6$) и 25 точек на периоде в п. 2.5 ($\Delta t = 1.0$). Соответственно, величина τ для оценки связей принимается равной $\tau = 10\Delta t$ (пп. 2.2–2.4) и $\tau = 25\Delta t$ (п. 2.5). Для каждой системы и каждого набора параметров генерируется большой ансамбль из N_s временных рядов, чтобы исследовать статистические свойства предложенных оценок связи. Во всех примерах принимается $N_s = 100$, если не указано другое значение. Начальные условия для получения различных временных рядов в ансамбле выбираются в соответствии

со стационарной плотностью распределения вектора состояния. Длина каждого временного ряда составляет примерно 100 характерных периодов, то есть $N = 1000$ в пп. 2.2–2.4, и $N = 2500$ в п. 2.5. Эту умеренную длину [7] уместно использовать как базовый случай. Зависимость результатов от N обсуждается кратко. По каждому ряду рассчитываются оценки связи и делаются выводы о том, обнаружено ли воздействие $j \rightarrow k$ (положительный вывод) на заданном уровне значимости p или нет (отрицательный). Результаты расчетов представлены в основном для $p = 0.05$.

Обозначим $Q_{j \rightarrow k}$ – число положительных выводов. Частота их появления $v_{j \rightarrow k} = Q_{j \rightarrow k}/N_s$. Положительные выводы могут быть как «правильными» (если на самом деле есть воздействие $j \rightarrow k$), так и «ошибочными» (в противном случае). В каждом примере проверяется два обстоятельства. *Во-первых*, предложенные оценки можно считать применимыми только в тех случаях, когда частоты ошибочных положительных выводов не превышают заявленного уровня значимости: для всех пар (j, k) таких, что $c_{j \rightarrow k} = 0$, должно выполняться $v_{j \rightarrow k}(p) < p$ с точностью до флуктуаций, определяющихся конечным размером ансамбля N_s . Эти флуктуации оцениваются следующим образом. Частота $v_{j \rightarrow k}$ – это оценка вероятности $P_{j \rightarrow k}$ вывода о наличии воздействия $j \rightarrow k$. По теореме Муавра–Лапласа величина $v_{j \rightarrow k}$ при большом N_s распределена по нормальному закону со средним $P_{j \rightarrow k}$ и дисперсией $P_{j \rightarrow k}(1 - P_{j \rightarrow k})/N_s$. В частности, 95%-й интервал для $v_{j \rightarrow k}$ имеет вид $P_{j \rightarrow k} \pm 1.96 \sqrt{P_{j \rightarrow k}(1 - P_{j \rightarrow k})/N_s}$. Поскольку вероятность ошибочных выводов $P_{j \rightarrow k}$ должна быть равна заявленному уровню значимости p , то $v_{j \rightarrow k}$ должна попадать в 95%-й интервал $p \pm 1.96 \sqrt{p(1 - p)/N_s}$. Применимость методики отвергается из-за высокой частоты ошибочных выводов, если оказывается, что $v_{j \rightarrow k} > p + 1.96 \sqrt{p(1 - p)/N_s}$. *Во-вторых*, желательна максимальная чувствительность метода. Ее характеристика – частота правильных положительных выводов, то есть вероятность обнаружения существующих связей по отдельной временной реализации. Оценки сил воздействий и частот $v_{j \rightarrow k}$ рассчитываются для трех последовательно усложняющихся модельных функций (8): 1) «линейная» связь, то есть набор индексов Ω_k , содержащий только $m = n = 1$; 2) допускается квадратичная нелинейность связи, то есть в Ω_k есть пары индексов $m = n = 1$, $m = 2$, $n = 1$ и $m = 1$, $n = 2$; 3) допускается квадратичная или кубическая нелинейность связи, то есть в Ω_k есть пары индексов $m = n = 1$, $m = 2$, $n = 1$, $m = 1$, $n = 2$, $m = 3$, $n = 1$ и $m = 1$, $n = 3$. Обозначим $|\Omega_k|$ – размер множества Ω_k . Тогда в первом случае $|\Omega_k| = 1$, то есть Ω_k содержит одну пару индексов, во втором – $|\Omega_k| = 2$, в третьем – $|\Omega_k| = 3$. Всегда принимается $\Omega_1 = \Omega_2$. Число степеней свободы закона «хи-квадрат», используемого при оценке значимости выводов равно $M_k = 2 |\Omega_k|$.

2.2. Фазовые осцилляторы

Первый пример – фазовые осцилляторы (6) при различных видах и силах связи, соотношениях частот, интенсивностях шума.

2.2.1. Несвязанные фазовые осцилляторы. Случай несвязанных осцилляторов $G_k \equiv 0$ почти полностью соответствует теоретическим условиям применимости оценок. Однако они с гарантией применимы асимптотически, поэтому представляет интерес проверка практических результатов для рядов умеренной длины. Так, для

параметров $\sigma_{\varepsilon_k}^2 = 0.04$, $\omega_1 = 1.1$, и $\omega_2 = 0.9$ результаты представлены на рис. 1. АКФ остаточных ошибок, оцененная по одному временному ряду (рис. 1, *a*), соответствует ожидаемой «треугольной» форме. Анализ ансамбля из $N_s = 1000$ рядов показывает, что величина $\hat{\rho}$ всегда не превышает 0.15, то есть весьма мала. На рис. 1, *b* показаны частоты положительных выводов о наличии связи для оценок с «линейной» моделью $|\Omega_k| = 1$ в зависимости от уровня значимости p . Как и требуется, $v_{2 \rightarrow 1}$ и $v_{1 \rightarrow 2}$ не превышают p . Те же результаты наблюдаются для моделей с $|\Omega_k| = 2$ и $|\Omega_k| = 3$ (не показаны).

Трудности могут возникать при таких параметрах осцилляторов, когда оценки $\hat{\rho}$ часто принимают достаточно большие значения, то есть эмпирическое распределение разности фаз для отдельного временного ряда не является «почти равномерным». Это имеет место при уменьшении расстройки частот, что иллюстрирует рис. 2 для оценок с $|\Omega_k| = 1$, где $\omega_1 = 1 + \Delta\omega$, $\omega_2 = 1 - \Delta\omega$. Так, при $\Delta\omega = 0$ значения $\hat{\rho}$ иногда превышают величину 0.5. На рис. 2, *a* показана доля временных рядов n_0 , для которых $\hat{\rho} < 0.45$. При больших расстройках $n_0 = 1$, а при малых уменьшается. На рис. 2, *b* представлены частоты положительных выводов $v_{j \rightarrow k}$ без контроля условия $\hat{\rho} < \rho_c$ для уровня значимости $p = 0.05$, а пунктиром показан допустимый уровень ошибок. При $\Delta\omega$ частота ошибочных выводов для одного направления до-

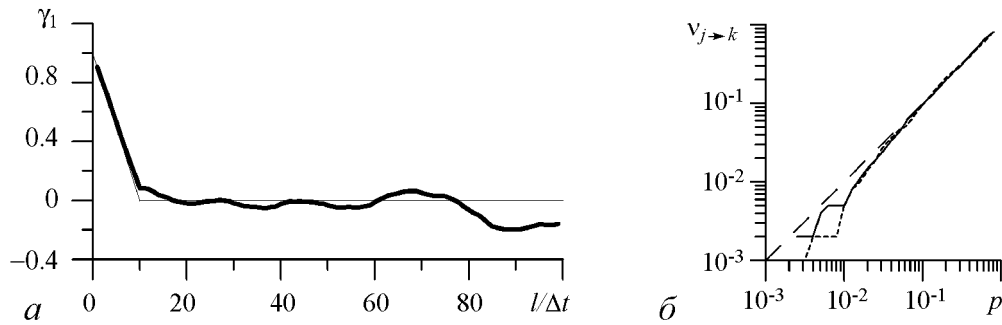


Рис. 1. Несвязанные фазовые осцилляторы: *a* – АКФ остаточных ошибок ε_1 – оцененная по временному ряду (жирная линия) и теоретическая (тонкая линия); *b* – частоты положительных выводов о наличии воздействия $2 \rightarrow 1$ (сплошная линия) и $1 \rightarrow 2$ (пунктирная линия), полученные по ансамблю из 1000 временных рядов, обе частоты не превышают заданного уровня значимости p (штриховая линия)

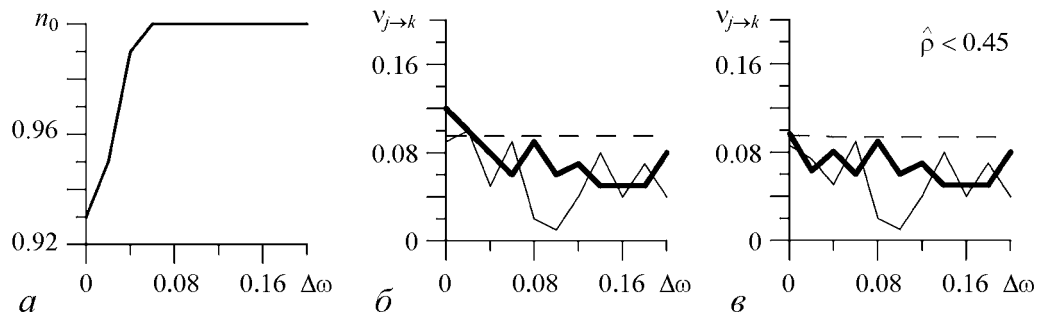


Рис. 2. Несвязанные фазовые осцилляторы. Результаты оценивания с $|\Omega_k| = 1$ в зависимости от расстройки частот: *a* – доля временных рядов с $\hat{\rho} < 0.45$ в ансамбле из 100 рядов; *b* – частоты ошибочных положительных выводов $2 \rightarrow 1$ (жирная линия) и $1 \rightarrow 2$ (тонкая линия) и допустимый уровень ошибки (штриховая линия); *в* – то же, что на рис. *b*, но при дополнительном условии $\hat{\rho} < 0.45$. Результаты оценивания с $|\Omega_k| = 2$ и $|\Omega_k| = 3$ аналогичны (не показаны)

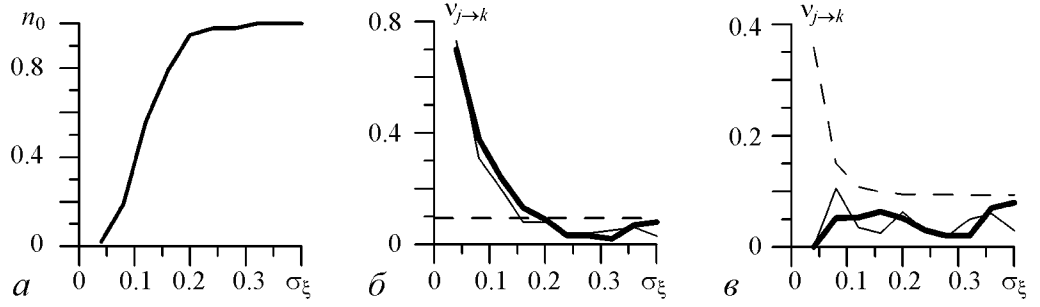


Рис. 3. Несвязанные фазовые осцилляторы. Результаты оценивания с $|\Omega_k| = 1$ в зависимости от уровня шума: a – доля временных рядов с $\hat{\rho} < 0.45$ в ансамбле из 100 рядов; b – частоты ошибочных положительных выводов $2 \rightarrow 1$ (жирная линия) и $1 \rightarrow 2$ (тонкая линия) и допустимый уровень ошибки (штриховая линия); c – то же, что на рис. b , при дополнительном условии $\hat{\rho} < 0.45$. Результаты оценивания с $|\Omega_k| = 2$ и $|\Omega_k| = 3$ аналогичны (не показаны)

стигает 0.12, что больше допустимого уровня. Если делать положительные выводы только при $\hat{\rho} < \rho_c$, то можно снизить вероятность ошибок, так как при достаточно малом ρ_c лучше выполняется условие равномерного распределения разности фаз. В данном случае оказалось, что следует принять ρ_c равным 0.45, чтобы обеспечить даже условную частоту ошибочных выводов $\nu_{j \rightarrow k} = Q_{j \rightarrow k} / (n_0 N_s)$ не более допустимого уровня $p + 1.96 \sqrt{p(1-p)} / (n_0 N_s)$ при любом $\Delta\omega$ (рис. 2, b). Знаменатель $n_0 N_s$ – это количество временных рядов, удовлетворяющих условию $\hat{\rho} < \rho_c$. Условная частота ошибочных выводов не меньше полной частоты, так что требование ее малости строже, чем требование малости величины $Q_{j \rightarrow k} / N_s$.

Доля рядов с большими $\hat{\rho}$ растет при уменьшении $\sigma_{\xi_k}^2$ и малой расстройке частот, например, при $\Delta\omega = 0$. Результаты представлены на рис. 3 для $|\Omega_k| = 1$, где вновь показано, что условие $\hat{\rho} < 0.45$ дает условную частоту ошибочных положительных выводов не более допустимого уровня. Подбор ρ_c был проведен и для всех примеров рассмотренных ниже. Значение $\rho_c = 0.45$ оказалось достаточным во всех случаях, так что ниже все результаты приводятся только для оценивания с использованием критерия $\hat{\rho} < 0.45$. Для ошибочных выводов ниже представлена их условная частота, а не полная.

2.2.2. Связанные фазовые осцилляторы. Рассмотрим связанные фазовые осцилляторы (6) с $\omega_1 = 1.1$, $\omega_2 = 0.9$, $\sigma_{\xi_k}^2 = 0.04$ и однонаправленной связью $2 \rightarrow 1$, то есть $G_2 = 0$. Начнем с «первого порядка» нелинейности: $G_1(\phi_2, \phi_1) = k_{2 \rightarrow 1} \sin(\phi_2 - \phi_1)$. Положительные выводы о наличии влияния $1 \rightarrow 2$ ошибочны и для применимости методики их вероятность должна быть не более p . Выводы о наличии связи $2 \rightarrow 1$ при $k_{2 \rightarrow 1} > 0$ правильные, так что желательна их максимальная вероятность. Условие на АКФ остаточных ошибок ε_k выполняется, так как она аналогична рис. 1, a (не показана).

Рис. 4 иллюстрирует результаты оценивания при увеличении коэффициента связи $k_{2 \rightarrow 1}$. Доля рядов с $\hat{\rho} < 0.45$ уменьшается с ростом $k_{2 \rightarrow 1}$ (рис. 4, a). Однако частота ошибочных выводов $\nu_{1 \rightarrow 2}$ остается не более допустимой при любом $k_{2 \rightarrow 1}$ (рис. 4, b). Это имеет место для любого из трех различных $|\Omega_k|$. Частота правильных выводов здесь и во всех примерах ниже рассчитывается в отношении ко всему размеру ансамбля: $\nu_{2 \rightarrow 1} = Q_{2 \rightarrow 1} / N_s$ без деления на n_0 , то есть это оценка полной вероятности обнаружения воздействия (не условной). При малых $k_{2 \rightarrow 1}$ чувстви-

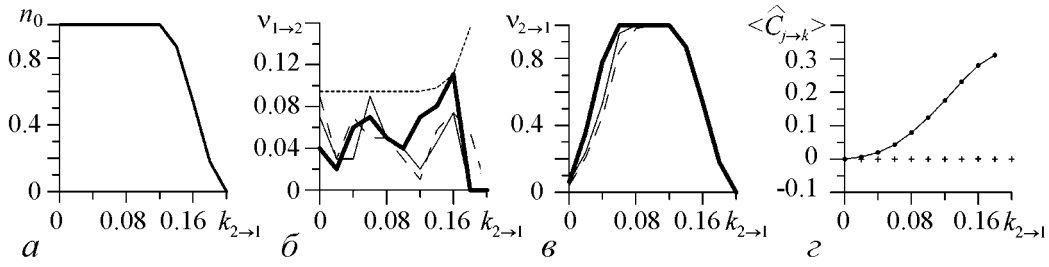


Рис. 4. Оценка однонаправленной связи между фазовыми осцилляторами в случае функции связи $G_1(\phi_2, \phi_1) = k_{2 \rightarrow 1} \sin(\phi_2 - \phi_1)$: a – доля временных рядов с $\hat{\rho} < 0.45$ в ансамбле из 100 рядов; \bar{b} – частоты ошибочных выводов о наличии воздействия $1 \rightarrow 2$ (жирная линия – для $|\Omega_k| = 1$, тонкая – для $|\Omega_k| = 2$, штриховая – для $|\Omega_k| = 3$, пунктир – допустимый уровень ошибки); $\bar{в}$ – частоты правильных выводов о наличии воздействия $2 \rightarrow 1$ (те же обозначения, что и на рис. \bar{b}); $\bar{г}$ – средние значения оценок сил воздействия $2 \rightarrow 1$ (кружки, соединенные линией), и $1 \rightarrow 2$ (крестики)

ность метода растет с ростом $k_{2 \rightarrow 1}$ (рис. 4, $\bar{в}$). При этом чувствительность выше для меньшего $|\Omega_k|$. Это ожидаемый результат, так как связь между осцилляторами в данном примере описывается многочленом вида $\sin(\phi_1 - \phi_2)$ и отражается уже моделью с $|\Omega_k| = 1$. Увеличение $|\Omega_k|$ приводит только к появлению «лишних» оцениваемых коэффициентов, то есть к росту дисперсии оценок без улучшения описания динамики исходной системы. Это и является причиной снижения процента статистически значимых выводов о наличии воздействия. Использование критерия $\hat{\rho} < 0.45$ ведет к отсеиванию некоторых временных рядов ансамбля и снижает чувствительность метода при больших $k_{2 \rightarrow 1}$. Средние по ансамблю значения оценок $\hat{C}_{j \rightarrow k}$ показаны на рис. 4, $\bar{г}$. Сила существующего воздействия $\hat{C}_{2 \rightarrow 1}$ растет квадратично с ростом $k_{2 \rightarrow 1}$ (кружки). Это ожидаемый результат, так как по определению (10) эта характеристика есть сумма квадратов коэффициентов связи. Оценка $\hat{C}_{1 \rightarrow 2}$ в среднем равна нулю (крестики). Величины $\langle \hat{C}_{j \rightarrow k} \rangle$ одинаковы для всех $|\Omega_k|$ и их графики полностью накладываются друг на друга на рис. 4, $\bar{г}$.

На рис. 5 и 6 аналогично представлены результаты для связи, заданной нерезонансными членами $G_1(\phi_2, \phi_1) = k_{2 \rightarrow 1} \sin(2\phi_2 - \phi_1)$ и $G_1(\phi_2, \phi_1) = k_{2 \rightarrow 1} \sin(3\phi_2 - \phi_1)$, соответственно. Это связи более высокого порядка нелинейности, прочие параметры осцилляторов те же. Отличие этих случаев в том, что $\hat{\rho}$ даже не превышает величины 0.15, так что можно использовать все временные ряды ансамбля для оценивания (рис. 5, a и 6, a). Частота ошибочных выводов не превышает допустимой при использовании любого $|\Omega_k|$ (рис. 5, $\bar{б}$ и 6, $\bar{б}$). Вероятность правильных выводов для связи $\sin(2\phi_2 - \phi_1)$ равна нулю при использовании модели с низким порядком нелинейности $|\Omega_k| = 1$ (рис. 5, $\bar{в}$). Для $|\Omega_k| = 2$ и $|\Omega_k| = 3$ чувствительность метода растет с ростом $k_{2 \rightarrow 1}$. При этом для $|\Omega_k| = 3$ она ниже, так как модель фазовой динамики содержит лишние члены по сравнению с $|\Omega_k| = 2$. Величина $\hat{C}_{1 \rightarrow 2}$ в среднем равна нулю для всех моделей (не показана). Среднее значение $\hat{C}_{2 \rightarrow 1}$ представлено на рис. 5, $\bar{г}$. Для $|\Omega_k| = 1$ эта величина равна нулю (жирная линия), так как модель не может описать связь более высокого порядка нелинейности. Для двух других моделей $\langle \hat{C}_{2 \rightarrow 1} \rangle$ одинакова и демонстрирует ожидаемую квадратичную зависимость от $k_{2 \rightarrow 1}$ (тонкая линия). Аналогично, связь $\sin(3\phi_2 - \phi_1)$ обнаруживается только при использовании $|\Omega_k| = 3$, а более простые модели не могут ее «почувствовать» (рис. 6, $\bar{в}$, $\bar{г}$).

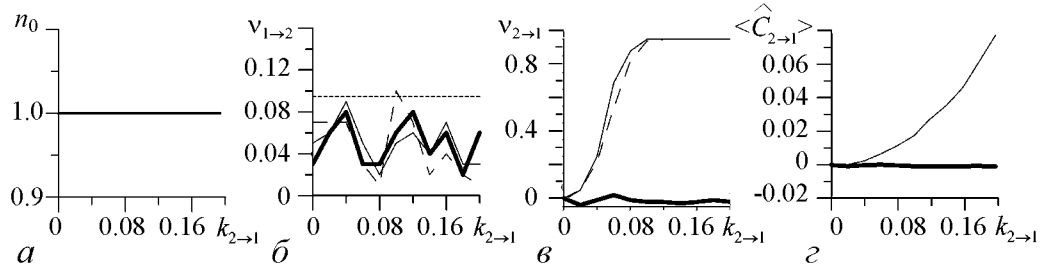


Рис. 5. Оценка однонаправленной связи между фазовыми осцилляторами в случае функции связи $G_1(\phi_2, \phi_1) = k_{2 \rightarrow 1} \sin(2\phi_2 - \phi_1)$: a – доля временных рядов с $\hat{\rho} < 0.45$ в ансамбле из 100 рядов; b – частоты ошибочных выводов о наличии воздействия $1 \rightarrow 2$ (жирная линия – для $|\Omega_k| = 1$, тонкая – для $|\Omega_k| = 2$, штриховая – для $|\Omega_k| = 3$, пунктир – допустимый уровень ошибки); v – частоты правильных выводов о наличии воздействия $2 \rightarrow 1$ (те же обозначения, что и на рис. b); z – среднее по ансамблю значение оценки силы воздействия $2 \rightarrow 1$ для модели с $|\Omega_k| = 1$ (жирная линия) и $|\Omega_k| = 2$ (тонкая линия). Для $|\Omega_k| = 3$ график в точности такой же, как для $|\Omega_k| = 2$

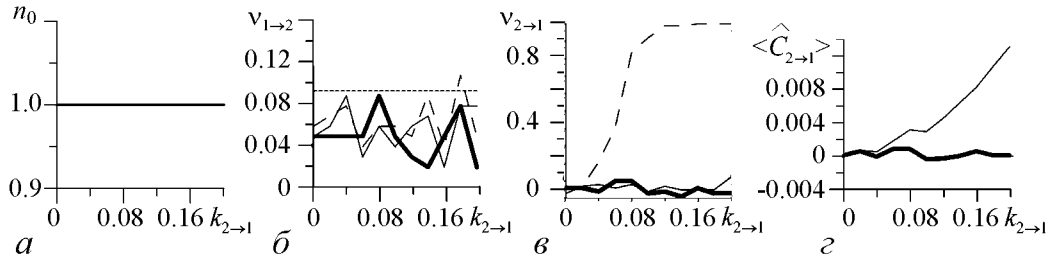


Рис. 6. Оценка однонаправленной связи между фазовыми осцилляторами в случае функции связи $G_1(\phi_2, \phi_1) = k_{2 \rightarrow 1} \sin(3\phi_2 - \phi_1)$: a – доля временных рядов с $\hat{\rho} < 0.45$ в ансамбле из 100 рядов; b – частоты ошибочных положительных выводов о наличии воздействия $1 \rightarrow 2$ (жирная линия – для $|\Omega_k| = 1$, тонкая – для $|\Omega_k| = 2$, штриховая – для $|\Omega_k| = 3$, пунктир – допустимый уровень ошибки); v – частоты правильных положительных выводов о наличии воздействия $2 \rightarrow 1$ (те же обозначения, что и на рис. b); z – среднее по ансамблю значение оценки силы воздействия $2 \rightarrow 1$ для модели с $|\Omega_k| = 1$ (жирная линия) и $|\Omega_k| = 3$ (тонкая линия). Для $|\Omega_k| = 2$ график такой же, как для $|\Omega_k| = 1$

Аналогичные результаты получены при соотношении частот примерно равном 1:2 и 1:3 и различных порядках нелинейности связи, при однонаправленном воздействии в любую сторону и при двунаправленной связи. Во всех случаях предложенные оценки применимы. При этом результаты сохраняются при уменьшении длины ряда до 50 характерных периодов, и только еще меньшая длина ряда приводит к большему числу ошибочных выводов из-за недостаточной статистики (графики не показаны).

Заметим, что в случае двунаправленной связи трудности оценивания меньше, поскольку ошибочных положительных выводов не существует из-за наличия воздействий в обе стороны, а опасность есть только в получении смещенных оценок сил воздействия. Однако при достаточно слабых связях (что контролируется по величине $\hat{\rho}$) оценки $\hat{C}_{j \rightarrow k}$ оказываются несмещенными. Графики аналогичны полученным в статье [7, рис. 3] и здесь не приводятся. То же наблюдение имеет место и для других осцилляторов. Поэтому ниже иллюстрируется только более сложный случай однонаправленной связи, где нужно контролировать частоту ошибочных выводов о наличии воздействий.

2.3. Осцилляторы ван дер Поля

Обратимся к примерам, где ситуация усложняется из-за необходимости расчета фаз по временным рядам и изменения свойств осцилляторов, в частности, свойств шумов ε_k в уравнениях фазовой динамики. Так, однонаправленно связанные осцилляторы ван дер Поля задавались уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} - (0.2 - x_1^2) \frac{dx_1}{dt} + \omega_1^2 x_1 &= \xi_1 + k_{2 \rightarrow 1} g(x_2), \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} - (0.2 - x_2^2) \frac{dx_2}{dt} + \omega_2^2 x_2 &= \xi_2, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\xi_{1,2}$ – независимые источники белого шума, $g(x_2)$ – функция связи.

В отсутствие шумов осцилляторы демонстрируют автоколебания с круговыми частотами $\omega_{1,2}$, и для каждого отдельного осциллятора справедливо приближение медленно меняющихся (по сравнению с периодом колебаний) амплитуд. При этом фазовая динамика описывается уравнениями фазовых осцилляторов (6) с $G_k = 0$. Наличие связи отражается в появлении дополнительных членов в уравнении фазовой динамики для первого осциллятора. Если $g(x_2) = x_2$, то получим $G_1(\phi_1, \phi_2) \propto k_{2 \rightarrow 1} \sin(\phi_2 - \phi_1)$, учитывая, что при отсутствии шума $x_2 \propto \exp(i\phi_2(t))$. Если $g(x_2) = x_2^2$, то есть $g \propto \exp(i2\phi_2(t))$, получим связь более высокого порядка нелинейности: $G_1(\phi_1, \phi_2) \propto k_{2 \rightarrow 1} \sin(2\phi_2 - \phi_1)$. Аналогично, при $g(x_2) = x_2^3 - 3x_2/4$ имеем $g \propto \exp(i3\phi_2(t))$ и $G_1(\phi_1, \phi_2) \propto k_{2 \rightarrow 1} \sin(3\phi_2 - \phi_1)$.

При сильных шумах $\xi_{1,2}$ амплитуды колебаний осцилляторов заметно флуктуируют, то есть не являются медленно меняющимися. Поэтому все рассуждения применимы только приближенно. Такой случай и рассмотрим в качестве теста для предложенных оценок связи. Параметры осцилляторов $\sigma_\xi = 0.2$, $\omega_1 = 1.05$, коэффициент связи меняется от 0 до 0.2, связь резонансная, что обеспечивается различными порядками нелинейности для различных ω_2 :

- 1) $\omega_2 = 0.95$ (соотношение частот $\omega_1 : \omega_2$ примерно 1:1) и $g(x_2) = x_2$,
- 2) $\omega_2 = 0.5$ (соотношение частот примерно 2:1) и $g(x_2) = x_2^2$,
- 3) $\omega_2 = 0.35$ (соотношение частот примерно 3:1) и $g(x_2) = x_2^3 - 3x_2/4$.

Фазы рассчитывались по сигналам $x_{1,2}(t)$ с помощью преобразования Гильберта. Рис. 7, а показывает, что, несмотря на заметные флуктуации амплитуды, чередование максимумов и минимумов сигнала с основным периодом четко видно, так что фазы хорошо определены. АКФ остаточных ошибок ε_k имеет требуемую форму (рис. 7, б).

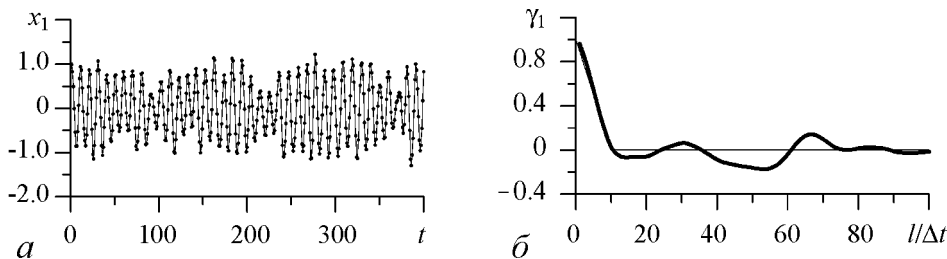


Рис. 7. Осцилляторы ван дер Поля (15): а – фрагмент временной реализации первого осциллятора при отсутствии связи; б – АКФ остаточных ошибок ε_1 – оценка (жирная линия) и требуемая теоретически (тонкая линия)

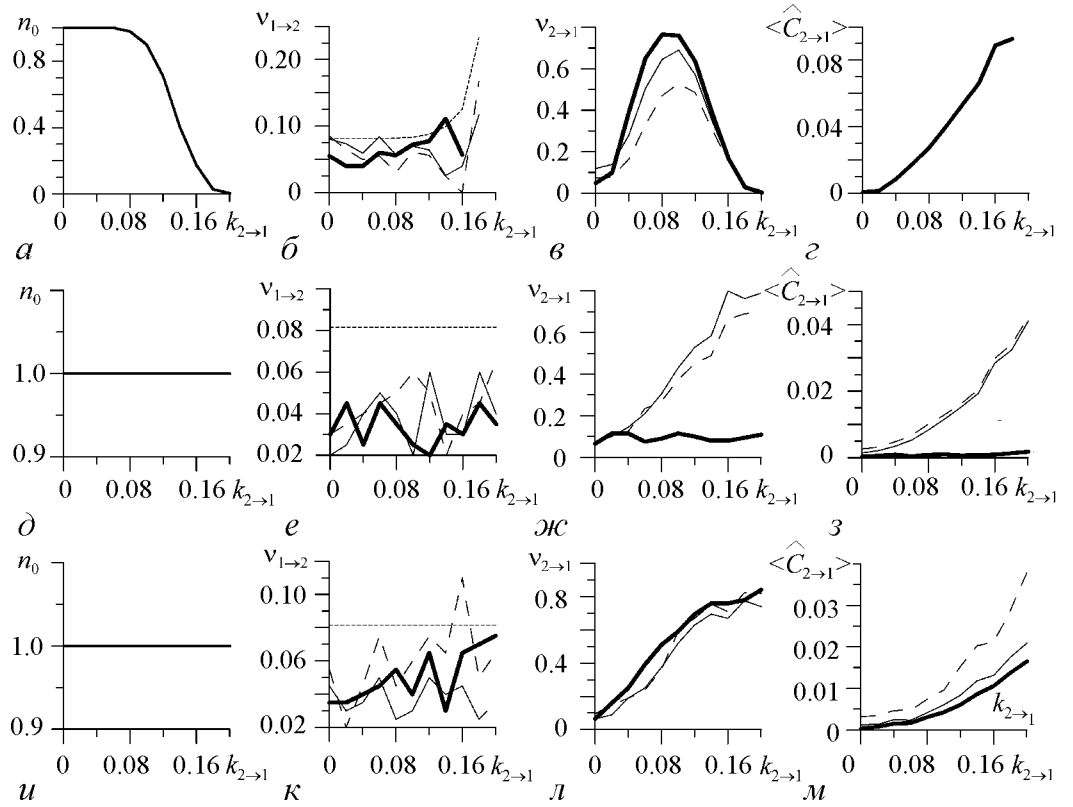


Рис. 8. Оценка однонаправленной связи между осцилляторами ван дер Поля (15). Первая строка – для функции связи $g(x_2) = x_2$, вторая – для $g(x_2) = x_2^2$, третья – для $g(x_2) = x_2^3 - 3x_2/4$. Первый столбец – доля временных рядов с $\hat{\rho}_{m,n} < 0.45$ в ансамбле из 100 рядов. Второй – частоты ошибочных выводов о наличии воздействия $1 \rightarrow 2$ (жирная линия – для $|\Omega_k| = 1$, тонкая – для $|\Omega_k| = 2$, штриховая – для $|\Omega_k| = 3$, пунктир – допустимый уровень ошибки). Третий – частоты правильных выводов о наличии воздействия $2 \rightarrow 1$. Четвертый – среднее по ансамблю значение оценки силы воздействия $2 \rightarrow 1$ для модели с $|\Omega_k| = 1$ (жирная линия), $|\Omega_k| = 2$ (тонкая линия), и $|\Omega_k| = 3$ (штриховая линия)

Результаты оценивания, демонстрирующие применимость методики, представлены на рис. 8. Первый столбец показывает долю рядов с $\hat{\rho} < 0.45$ для линейной связи (рис. 8, а), $\hat{\rho}_{1,2} < 0.45$ для квадратичной (рис. 8, д) и $\hat{\rho}_{1,3} < 0.45$ для кубической (рис. 8, и). Всегда частота ошибочных выводов не более допустимой (рис. 8, второй столбец) для любого $|\Omega_k|$. При этом во втором случае (рис. 8, е) на длине временного ряда укладывается только 50 характерных периодов второго осциллятора, а в третьем (рис. 8, к) – 30 периодов. Тем не менее, методика не дает большего числа ошибок, что иллюстрирует ее применимость даже для таких коротких рядов. Вероятность обнаружения существующей связи растет с ростом $k_{2 \rightarrow 1}$ (рис. 8, третий столбец). В первом случае достаточно $|\Omega_k| = 1$, а большие значения лишь снижают чувствительность (рис. 8, в, з). Во втором случае лучше всего $|\Omega_k| = 2$, тогда как $|\Omega_k| = 1$ не обнаруживает квадратичную связь (рис. 8, ж, з). В третьем случае кубическая связь приводит к тому, что в уравнениях фазовой динамики есть и линейные и кубические члены. Поэтому методика для $|\Omega_k| = 1$ и $|\Omega_k| = 3$ примерно одинаково чувствительна (рис. 8, л). Причина состоит в том, что кубическая модель лучше описывает нелинейность (это показывают и оценки силы связи на рис. 8, м), но содержит больше оцениваемых коэффициентов. Сов-

местное влияние этих двух факторов приводит к той же чувствительности, что и для $|\Omega_k| = 1$. Использование $|\Omega_k| = 2$ в основном снижает чувствительность, так как квадратичные члены в уравнении фазовой динамики отсутствуют или очень малы (см. рис. 8, м).

2.4. Системы Ресслера

Системы Ресслера также рассматривались с однонаправленной связью

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= -\omega_1 y_1 - z_1, \\ dy_1/dt &= \omega_1 x_1 + a y_1 + k_{2 \rightarrow 1} g(y_2) + \xi_1, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} dz_1/dt &= b + (x_1 - c) z_1, \\ dx_2/dt &= -\omega_2 y_2 - z_2, \\ dy_2/dt &= \omega_2 x_2 + a y_2 + \xi_2, \end{aligned} \quad (17)$$

$$dz_2/dt = b + (x_2 - c) z_2,$$

где $\xi_{1,2}$ – независимые источники белого шума, $g(y_2)$ – функция связи. Выбирались такие значения a , b , c , при которых осцилляторы (при $\sigma_\xi = 0$ и $k_{2 \rightarrow 1} = 0$) демонстрируют колебания с основными частотами $\omega_{1,2}$ в режиме спирального хаоса. Результаты анализа этих систем оказываются во многом схожими с предыдущими примерами. Поэтому далее представлены иллюстрации для $\omega_1 = 1.05$, $\omega_2 = 0.95$, $g(y_2) = y_2$ и следующих ситуаций:

- 1) $a = 0.2$, $b = 0.2$, $c = 6.1$ [41] и $\sigma_\xi = 0.1$,
- 2) $a = 0.398$, $b = 2.0$, $c = 4.0$ [42] и $\sigma_\xi = 0.2$, $g(y_2) = y_2$.

При отсутствии шумов $\xi_{1,2}$ в (16) фазовую динамику систем Ресслера можно описать уравнениями фазовых осцилляторов (6), где шумы $\xi_{1,2}$ в (6) присутствуют как результат влияния хаотически меняющихся амплитуд. Эти шумы не белые, что дает примеру новизну по сравнению с предыдущими.

При анализе рассматривались сигналы $x_{1,2}$. Фазы хорошо определены (рис. 9, а и 10, а) и рассчитывались с помощью преобразования Гильберта. АКФ остаточных ошибок ε_k для *первого набора параметров* имеет почти требуемую форму, хотя и не совсем: АКФ принимает значение 0.4 при некоторых лагах, больших τ (рис. 9, б). Однако такое отклонение оказывается допустимым, так как результаты оценивания вполне аналогичны представленным выше (рис. 9, в–е): методика не дает ошибочных выводов сверх допустимой величины (см. рис. 9, з); слишком большое значение $|\Omega_k|$ приводит к снижению чувствительности (см. рис. 9, д, е).

Для *второго набора параметров* несмотря на хорошо определенную фазу, АКФ остаточных ошибок ε_k сильно отличается от требуемой «треугольной» функции (рис. 10, б). Величина АКФ достигает 0.8 для многих лагов, значительно больших τ . Как результат, число ошибочных выводов о наличии воздействия $1 \rightarrow 2$ гораздо больше допустимого (рис. 10, з), то есть методика не применима. Таким образом, выполнение условия на АКФ остаточных ошибок оказывается весьма существенным.

Связь по переменной y в данном примере – это аналог связи по dx/dt для осцилляторов ван дер Поля, что можно увидеть, если записать уравнение для d^2x/dt^2 , исключив y из первого уравнения системы Ресслера. Это также отличает данный пример от предыдущего. Связь по x проверялась таким же образом, результаты оказались аналогичны (не показаны).

В работе выборочно проверялись возможности использования не «одинаковых» переменных для введения фаз. Например, x_1 для первой системы и y_2 или z_2 (вместо x_2) – для второй. Результаты оказываются вполне аналогичными. При использовании y_2 значения фазы ϕ_2 , рассчитанные с помощью преобразования Гильберта, только сдвигаются на $\pi/2$ по сравнению с фазами, рассчитанными по сигналу x_2 , что не влияет на характеристики связи. Координата z_2 демонстрирует поведение импульсного характера, поэтому для расчета фазы предпочтительнее пороговый метод (см. в п. 2.5). Он дает фазу, которая является нелинейной функцией величины ϕ_2 , полученной по сигналу x_2 . Но эта нелинейная функция очень близка к линейной $H(\phi_2) \approx \phi_2 + \text{const}$, то есть значения фазы слабо меняются и все результаты оценивания остаются теми же самыми (не показаны).

2.5. Системы Мориса–Лекара

Наконец, рассмотрим пример систем с «импульсным» характером воздействия. Это системы Мориса–Лекара [43], моделирующие динамику нейрона,

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= I_1 - g_l(x_1 - V_l) - g_K y_1(x_1 - V_K) - g_{Ca} m_\infty(x_1 - V_{Ca}) + k_{2 \rightarrow 1} f(x_1, x_2), \\ \frac{dy_1}{dt} &= \lambda(x_1)(w_\infty(x_1) - y_1) + \xi_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= I_2 - g_l(x_2 - V_l) - g_K y_2(x_2 - V_K) - g_{Ca} m_\infty(x_2 - V_{Ca}), \\ \frac{dy_2}{dt} &= \lambda(x_2)(w_\infty(x_2) - y_2) + \xi_2,\end{aligned}\tag{18}$$

где $m_\infty(x) = (1 + \tanh((x - V_1)/V_2))/2$, $w_\infty(x) = (1 + \tanh((x - V_3)/V_4))/2$, $\lambda(x) = (\cosh((x - V_3)/2V_4))/3$, $V_1 = -0.1$, $V_2 = 0.15$, $V_3 = 0.1$, $V_4 = 0.145$, $V_l = -0.5$, $V_K = -0.7$, $V_{Ca} = 1.0$, $g_l = 0.5$, $g_K = 2.0$, $g_{Ca} = 1.33$, $I_1 = I_2 = 0.075$. При отсутствии шума и связи системы демонстрируют периодические автоколебания [44,45]. Введение слабого шума с $\sigma_\xi = 0.005$ слабо возмущает эти периодические колебания [46]. Связь пороговая, что имитирует свойства взаимодействия нейронов: $f(x_1, x_2) = (1 - x_1) \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1 + \exp(-x_2/0.1)} \right)$, $x_2 > 0$, $f(x_1, x_2) = 0$, $x_2 \leq 0$. Фазовая динамика таких «нейроноподобных» систем может приближенно описываться уравнениями фазовых осцилляторов (6), но свойства шумов в них аналитически получить не удастся, а связь может быть существенно нелинейной и задаваться даже дельта-функцией [45], поскольку импульсный характер обнаруживают временные реализации (рис. 11, а).

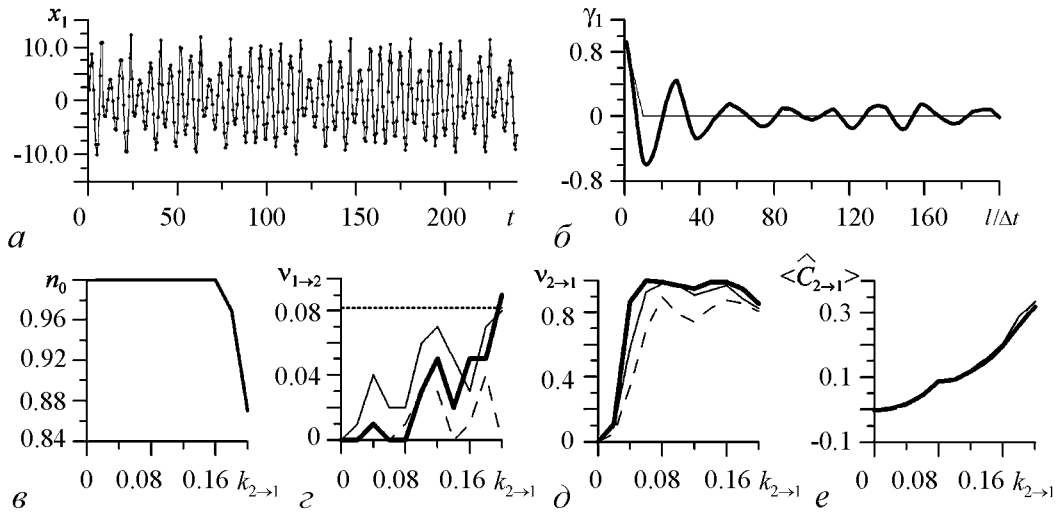


Рис. 9. Системы Ресслера (16), первый набор параметров: a – фрагмент временной реализации первого осциллятора при отсутствии связи; b – АКФ остаточных ошибок ε_1 – оценка (жирная линия) и требуемая теоретически (тонкая линия); c – доля временных рядов с $\hat{\rho} < 0.45$ в ансамбле из 100 рядов; d – частоты ошибочных выводов о наличии воздействия $1 \rightarrow 2$ (жирная линия – для $|\Omega_k| = 1$, тонкая – для $|\Omega_k| = 2$, штриховая – для $|\Omega_k| = 3$, пунктир – допустимый уровень ошибки); e – частоты правильных выводов о наличии воздействия $2 \rightarrow 1$; f – среднее по ансамблю значение оценки силы воздействия $2 \rightarrow 1$ для $|\Omega_k| = 1$ (жирная линия), $|\Omega_k| = 2$ (тонкая линия), и $|\Omega_k| = 3$ (штриховая линия сливается с тонкой)

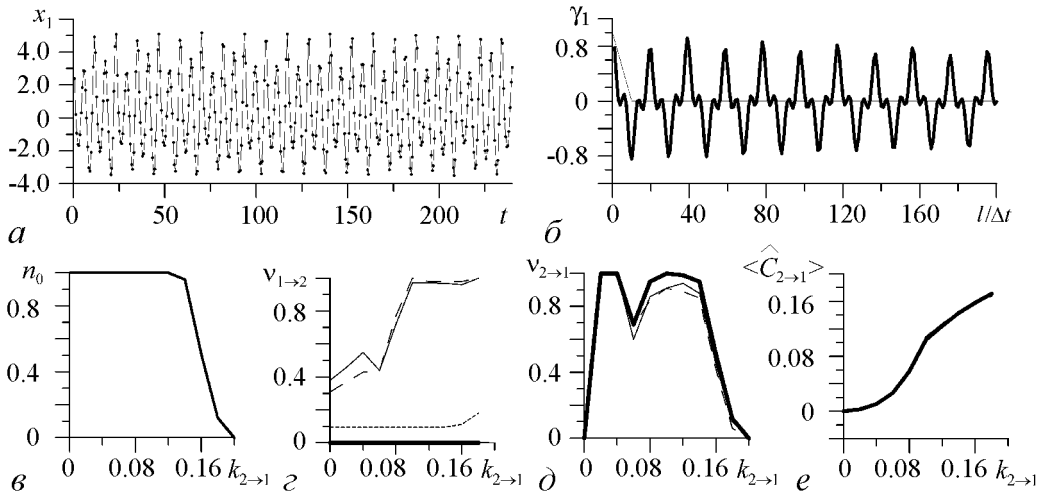


Рис. 10. Системы Ресслера (16), второй набор параметров, те же обозначения, что на рис. 9: a – фрагмент временной реализации; b – АКФ остаточных ошибок ε_1 ; c – доля рядов с $\hat{\rho} < 0.45$ в ансамбле из 100 рядов; d – частоты ошибочных выводов о наличии воздействия $1 \rightarrow 2$; e – частоты правильных положительных выводов о наличии воздействия $2 \rightarrow 1$; f – среднее по ансамблю значение оценки силы воздействия $2 \rightarrow 1$ (для всех $|\Omega_k|$ одинаково)

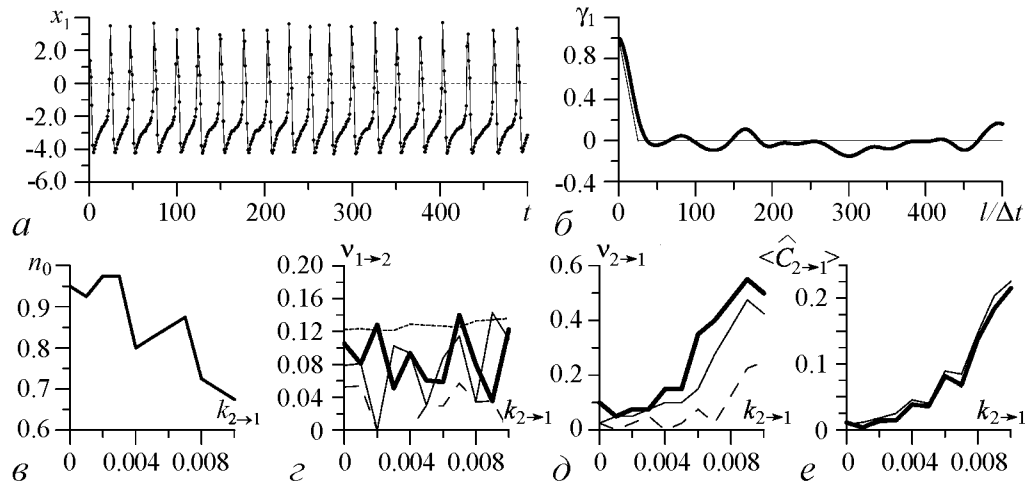


Рис. 11. Системы Мориса–Лекара (17), те же обозначения, что на рис. 9, 10: *a* – фрагмент временной реализации, пунктиром показан уровень $x_1 = 0$ для введения фазы; *b* – АКФ остаточных ошибок ε_1 ; *c* – доля временных рядов с $\hat{\rho} < 0.45$ в ансамбле из 100 рядов; *d* – частоты ошибочных выводов о наличии воздействия $1 \rightarrow 2$; *e* – частоты правильных выводов о наличии воздействия $2 \rightarrow 1$; *e* – среднее по ансамблю значение оценки силы воздействия $2 \rightarrow 1$ (для $|\Omega_k| = 2$ и $|\Omega_k| = 3$ совпадают)

При анализе рассматривались сигналы $x_{1,2}$. Фазы рассчитывались с помощью линейной интерполяции: фаза сигнала линейно нарастает на 2π между двумя последовательными пересечениями реализацией $x_k(t)$ оси абсцисс (см. рис. 11, *a*, пунктирная линия) снизу вверх. Фазы хорошо определены [46]. Оказывается, что АКФ остаточных ошибок ε_k имеет требуемую форму (рис. 11, *b*), так что это теоретическое условие применимости методики выполняется.

Результаты оценивания связи (рис. 11, *c–e*) аналогичны представленным выше примерам. Несмотря на сложный вид функции связи в исходных уравнениях (19) и ее неизвестную форму в модели (6) или (7), наличие и интенсивность связи адекватно определяются.

Заключение

В работе предложены новые характеристики направленной связи между осцилляторами и их оценки по временным рядам, основанные на идее моделирования фазовой динамики. В отличие от ранее использовавшихся, предложенные характеристики пригодны в случае произвольного порядка нелинейности связей. Аналитически выведено выражение для уровня статистической значимости, на котором делается вывод о наличии воздействий. Это важно для приложений, так как обеспечивает заданную надежность при работе с относительно короткими зашумленными временными рядами.

Представлены количественные условия применимости методики на практике: хорошо определенные фазы колебаний, невысокая степень синхронности сигналов, ограничения на корреляционные свойства и интенсивность шумов в уравнениях фазовой динамики. Работоспособность методики показана в численных экспериментах на эталонных осцилляторах. Показано, что для описания более высокого порядка

нелинейности требуется использовать более сложную модель фазовой динамики. Однако использование сложной модели без необходимости только снижает чувствительность метода.

Строго говоря, развитый формализм применим асимптотически, но эксперименты показывают, что практические приложения возможны для рядов умеренной длины. В работе рассматривались в основном ряды длиной 100 характерных периодов, этого оказалось достаточно во всех случаях. Более того, для рассмотренных простых моделей фазовой динамики (описывающих линейные, квадратичные или кубические члены воздействия) длина ряда может быть уменьшена до 30–50 характерных периодов, что иллюстрируют некоторые представленные примеры. Однако для еще более сложных моделей, содержащих много членов более высоких порядков, минимальная требуемая длина ряда должна быть больше и растет с ростом сложности модели. Детальное количественное исследование закона этого роста заняло бы слишком много времени. Кроме того, следует ожидать, что на практике чаще нужно извлекать информацию из небольших объемов данных, для чего придется ограничиваться использованием невысоких порядков нелинейности в моделях. Если все же требуется использовать модель очень высокого порядка, то необходимо провести предварительные численные тесты и установить требования на минимальную длину ряда.

В заключение отметим, что эффективность методики показана для осцилляторов с различными свойствами (фазовые осцилляторы, осцилляторы ван дер Поля, системы Ресслера, системы Мориса–Лекара), то есть различными функциями связи и свойствами шумов в уравнениях фазовой динамики. Это свидетельствует о ее значительной степени общности и возможности широкого практического использования.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 08-02-00081), программ РАН и Министерства образования и науки РФ.

Библиографический список

1. Пиковский А.С., Розеблум М.Г., Куртс Ю. Синхронизация: фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
2. Tass P.A. Phase resetting in medicine and biology – stochastic modelling and data analysis. Berlin: Springer, 1999.
3. Boccaletti S., Kurths J., Osipov G., Valladares D., Zhou C. The synchronization of chaotic systems // Phys. Rep. 2002. Vol. 366. P. 1.
4. Mosekilde E., Maistrenko Yu., Postnov D. Chaotic Synchronization. Applications to Living Systems. Singapore: World Scientific, 2002.
5. Balanov A., Janson N., Postnov D., Sosnovtseva O. Synchronization: From Simple to Complex. Berlin: Springer-Verlag, 2008.
6. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S. Detecting direction of coupling in interacting oscillators // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64, 045202(R).
7. Smirnov D.A., Bezruchko B.P. Estimation of interaction strength and direction from short and noisy time series // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 68, 046209.

8. *Palus M., Stefanovska A.* Direction of coupling from phases of interacting oscillators: An information-theoretic approach // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 67, 055201.
9. *Kralemann B., Cimponeriu L., Rosenblum M., Pikovsky A., Mrowka R.* Uncovering interaction of coupled oscillators from data // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 76, 055201.
10. *Kralemann B., Cimponeriu L., Rosenblum M., Pikovsky A., Mrowka R.* Phase dynamics of coupled oscillators reconstructed from data // *Phys. Rev. E.* 2008. Vol. 77, 066205.
11. *Baccala L.A., Sameshima K.* Partial directed coherence: a new concept in neural structure determination // *Biological Cybernetics*, 2001. Vol. 84. P. 463.
12. *Ancona N., Marinazzo D., Stramaglia S.* Radial basis function approach to nonlinear Granger causality of time series // *Phys. Rev. E.* 2004. Vol. 70, 056221.
13. *Schreiber T.* Measuring information transfer // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 85. P. 461.
14. *Verdes P.F.* Assessing causality from multivariate time series // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 72, 026222.
15. *Hlavackova-Schindler K., Palus M., Vejmelka M., Bhattacharya J.* Causality detection based on information-theoretic approaches in time series analysis // *Phys. Rep.* 2007. Vol. 441. P. 1.
16. *Vejmelka M., Palus M.* Inferring the directionality of coupling with conditional mutual information // *Phys. Rev. E.* 2008. Vol. 77, 026214.
17. *Rosenblum M.G., Cimponeriu L., Bezerianos A., Patzak A., Mrowka R.* Identification of coupling direction: Application to cardiorespiratory interaction // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 65, 041909.
18. *Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I., Gridnev V.I., Bodrov M.B., Bespyatov A.B.* Synchronization between main rhythmic processes in the human cardiovascular system // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 68, 041913.
19. *Luchinsky D.G., Millonas M.M., Smelyanskiy V.N., Pershakova A., Stefanovska A., McClintock P.V.* Nonlinear statistical modeling and model discovery for cardiorespiratory data // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 72, 021905.
20. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D.* Detection of synchronization from univariate data using wavelet transform // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 75, 056207.
21. *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.H., Marsh D.J.* Double-wavelet approach to study frequency and amplitude modulation in renal autoregulation // *Phys. Rev. E.* 2004. Vol. 70, 031915.
22. *Pavlov A.N., Sosnovtseva O.V., Pavlova O.N., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H.* Characterizing multimode interaction in renal autoregulation // *Physiological Measurements*, 2008. Vol. 29. P. 945.
23. *Eguia M.C., Dawson S.P., Mindlin G.B.* Information transmission and recovery in neural communications channels // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 62. P. 7111.
24. *Kiemel T., Gormley K., Guan L., Williams T., Cohen A.* Estimating the strength and direction of functional coupling in the lamprey spinal cord // *J. Computational Neuroscience*. 2003. Vol. 15. P. 233.

25. *Blinowska K.J., Kus R., Kaminski M.* Granger causality and information flow in multivariate processes // *Phys. Rev. E.* 2004. Vol. 70, 050902(R).
26. *Pereda E., Quiñan Quiroga R., Bhattacharya J.* Nonlinear multivariate analysis of neurophysiological signals // *Progress in Neurobiology.* 2005. Vol. 77. P. 1.
27. *Brea J., Russell D.F., Neiman A.B.* Measuring direction in the coupling of biological oscillators: A case study for electroreceptors of paddlefish // *Chaos.* 2006. Vol. 16, 026111.
28. *Schelter B., Winterhalder M., Eichler M., Peifer M., Hellwig B., Guschlbauer B., Luecking C., Dahlhaus R., Timmer J.* Testing for directed influences among neural signals using partial directed coherence // *J. Neurosci. Methods.* 2005. Vol. 152. P. 210.
29. *Wang S., Chen Y., Ding M., Feng J., Stein J.F., Aziz T.Z., Liu X.J.* Revealing the dynamic causal interdependence between neural and muscular signals in Parkinsonian tremor // *J. Franklin Institute.* 2007. Vol. 344. P. 180.
30. *Osterhage H., Mormann F., Wagner T., Lehnertz K.* Measuring the directionality of coupling: Phase versus state space dynamics and application to EEG time series // *Int. J. Neural Syst.* 2007. Vol. 17. P. 139.
31. *Smirnov D.A., Barnikol U.B., Barnikol T.T., Bezruchko B.P., Hauptmann C., Buehrle C., Maarouf M., Sturm V., Freund H.-J., Tass P.A.* The generation of Parkinsonian tremor as revealed by directional coupling analysis // *Europhys. Lett.* 2008. Vol. 83, 20003.
32. *Mokhov I.I., Smirnov D.A.* El Nino Southern Oscillation drives North Atlantic Oscillation as revealed with nonlinear techniques from climatic indices // *Geophysical Research Letters.* 2006. Vol. 33, 024557.
33. *Smirnov D.A., Bezruchko B.P.* Detection of couplings in ensembles of stochastic oscillators // *Phys. Rev. E.* 2009. Vol. 79, 046204.
34. *Kori H., Kuramoto Y.* Slow switching in globally coupled oscillators: robustness and occurrence through delayed coupling // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 63, 046214.
35. *Kuramoto Y.* *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence.* Berlin: Springer-Verlag, 1984.
36. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* Phase synchronization in regular and chaotic systems // *Int. J. Bifurc. Chaos.* 2000. Vol.10, № 10. P. 2291.
37. *Gabor D.* *Theory of communication* // *J. Inst. Elect. Eng. (London).* 1946. Vol. 93. P. 429.
38. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J., Schaefer C., Tass P.A.* Phase synchronization: from theory to data analysis // *Neuro-informatics. Handbook of Biological Physics.* Edited by F. Moss and S. Gielen. New York: Elsevier Science, 2001. P. 279.
39. *Kendall M.C., Stuart A.* *The advanced theory of statistics.* New York: Hafner, 1979.
40. *Никитин Н.Н., Разевиг В.Д.* Методы цифрового моделирования стохастических дифференциальных уравнений и оценка их погрешностей // *Журнал выч. математики и мат. физики.* 1978. Т. 18, № 1. С. 106.

41. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Окрокверцхов Г.А., Стрелкова Г.И.* Статистические свойства динамического хаоса // УФН. 2005. Т. 175. С. 163.
42. *Thompson J.M.T. and Stewart H.B.* Nonlinear Dynamics and Chaos. New York: Wiley, 1987.
43. *Morris C., Lecar H.* Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber // Biophys. J. 1981. Vol. 35. P. 193.
44. *Izhikevich E.M.* Neural excitability, spiking and bursting // Int. J. Bifurc. Chaos. 2000. Vol. 10. P. 1171.
45. *Ermentrout G.B., Kopell N.* Oscillator death in systems of coupled neural oscillators // SIAM J. Appl. Math. 1990. Vol. 50. P. 125.
46. *Smirnov D., Schelter B., Winterhalder M., Timmer J.* Revealing direction of coupling between neuronal oscillators from time series: Phase dynamics modeling versus partial directed coherence // Chaos. 2007. Vol. 17, 013111.

*Саратовский филиал ИРЭ
им. В.А. Котельникова РАН*

*Поступила в редакцию 29.09.2009
После доработки 3.03.2010*

REVEALING NONLINEAR COUPLINGS BETWEEN STOCHASTIC OSCILLATORS FROM TIME SERIES

D.A. Smirnov

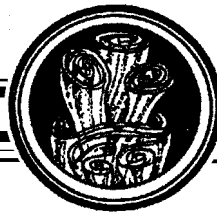
The problem of detection and quantitative characterization of nonlinear directional couplings between stochastic oscillators is considered. Coupling characteristics and a technique for their estimation from time series are suggested. An analytic expression for a statistical significance level of the conclusion about coupling presence is derived that allows a reliable inference from relatively short signals. Performance of the approach is demonstrated in numerical experiments with diverse individual properties of oscillators and different kinds of coupling functions.

Keywords: Coupling estimation, coupled oscillators, nonlinear time series analysis, phase dynamics, statistical inference



Смирнов Дмитрий Алексеевич – родился в 1977 году, окончил факультет нелинейных процессов Саратовского госуниверситета (1999), защитил кандидатскую диссертацию (2001). Старший научный сотрудник СФИРЭ РАН. Опубликовал более 40 статей в научных журналах и 2 монографии (в соавторстве). Область научных интересов: теория колебаний и волн, теория динамических систем, анализ временных рядов, математическое моделирование сложных систем по данным наблюдений.

410019, Саратов, ул. Зеленая, д. 38
СФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: smirnovda@info.sgu.ru, smirnovda@yandex.ru



**ЭКСПЕРИМЕНТЫ С ИСТОЧНИКОМ ХАОСА –
РАДИОТЕХНИЧЕСКИМ УСТРОЙСТВОМ С КВАДРАТИЧНЫМ
ФАЗОВЫМ МОДУЛЯТОРОМ И ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫМ
УСИЛЕНИЕМ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА**

И.В. Измайлов, Б.Н. Пойзнер

Экспериментально реализован модифицированный радиоэлектронный аналог нелинейного кольцевого интерферометра. Устройство представляет особый класс источников колебаний или волн, чей принцип действия основан на интерференционном усилении сигнала обратной связи входным сигналом. Проведены лабораторные эксперименты, показано сходство их результатов с данными численного моделирования. Обнаружены перемежаемость, хаотические, регулярные, статические режимы. Выдвинут тезис об управляемой нелинейности динамических систем.

Ключевые слова: Интерференционное усиление, запаздывающая обратная связь, бифуркация, хаос, перемежаемость, статическое состояние, управляемая нелинейность.

Введение

В предыдущей статье авторов [1] были предложены структурные схемы и математические модели устройств, принцип действия которых основан на интерференционном усилении сигнала обратной связи входным сигналом. Одно из устройств является радиоэлектронным аналогом кольцевого интерферометра с керровской нелинейностью (то есть системы Икеды [2]), второе – модификацией радиоэлектронного аналога. В ходе компьютерного моделирования процессов в нем обнаружены перемежаемость, хаотические, регулярные, статические режимы. Отметим, что кольцевой интерферометр с керровской нелинейностью и его математическая модель оказываются одним из «эталонных» сюжетов теории хаотических автоколебаний [2–10].

Содержание данной статьи отражает итоги очередного этапа исследований, который предусматривал практическое осуществление модификации радиоэлектронного аналога нелинейного кольцевого интерферометра (НКИ), а затем проведение

цикла лабораторных экспериментов. Их цель – проверить полученные в [1] основные теоретические выводы относительно работоспособности и характеристик этого устройства как специфического источника регулярных и хаотических колебаний или волн.

Очевидно, что возможности численного моделирования несравнимо богаче, чем лабораторного эксперимента. Смонтированное нами радиоэлектронное устройство соответствует математической модели (3) в [1], а по своей структуре – схеме на рис. 2 в [1], но с учетом наличия CR -фильтра между блоками «А» и «А²», как говорилось в [1].

1. Экспериментальное исследование модификации функционального аналога НКИ

В схеме на рис. 2 в [1] генератор (играющий роль источника гармонических колебаний) имеет частоту $\omega = 144$ МГц. Модификация функционального аналога НКИ выполнена с использованием транзисторов и операционных усилителей, а линией задержки служит отрезок коаксиального кабеля (марки RG-6) длиной 200 м. Естественно, меру его (не)соответствия модели задают отклонения свойств реальных блоков установки от расчетных в модели.

Перечислим значения основных параметров устройства и доверительные интервалы при их измерении. Время релаксации τ_n можно изменять в пределах 0.01645...0.141 мкс (погрешность его определения $\pm 7\%$), что соответствует граничным частотам RC -фильтра 9.68...1.13 МГц. Время $\tau_{ФВЧ} = 17$ мкс $\pm 7\%$, что соответствует граничной частоте CR -фильтра 9.32 кГц. Отношение этих времен $\tau_{ФВЧ}/\tau_n = 1038...121.1$. Время запаздывания в кабеле t_e имеет порядок 1 мкс (тогда относительное запаздывание $t_e/\tau_n = 60.79...7.09$). Значения коэффициента нелинейности K_a можно изменять в пределах 0...632 рад (погрешность его определения $\pm 15\%$). Минимальная величина $\gamma \equiv 2\gamma_a = 0.239$ ($\pm 5\%$), а максимальная -0.395 ($\pm 5.4\%$). Фазовая задержка в контуре обратной связи $\omega t_e = 72.2^\circ \pm 6^\circ$. Модулятор обеспечивает сдвиг фаз θ от 0 до, по крайней мере, величины 1.47π (но не может превышать 2π). В дальнейших экспериментах значение $\tau_n = 0.01645$ мкс ($f_{гр\ n} = 9.68$ МГц, $\tau_{ФВЧ}/\tau_n = 1038$, $t_e/\tau_n = 60.79$), $\gamma_a = 0.1635$.

В динамическом диапазоне работы фазовращателя (по входу управления) характеристика перемножителя выражается зависимостью: $U_{ВЫХ} = 72.54В^{-1}(\pm 10\%)U_{ВХ}^2 - 2.23(\pm 18\%)U_{ВХ} + 0.034(\pm 7.6\%)$ В со средней погрешностью 1.3 мВ. Присутствие линейного слагаемого обуславливает наличие соответствующего («линейного») коэффициента K_l нелинейности, отражающего вклад этого слагаемого в величину фазового набегу θ : $|K_l| \leq |-42.5|$ рад ($\pm 20\%$). В электрооптике коэффициент K_l называли бы «покельсовским». Но оказывается, что он достаточно мал по сравнению с «керровским» коэффициентом K : $|K_l|/K \approx 0.067$.

Эксперимент, как и численное моделирование в [1], демонстрирует устойчивость статического состояния: $\theta = 0$, $U_c = A$ даже при максимальных значениях K . Поэтому нередко после включения электропитания установки для получения динамических режимов требуется внести возмущение, скажем, прикоснуться к некоторым узлам радиоэлектронной схемы.

Перейдем к описанию и анализу экспериментальных данных. Сигналы зарегистрированы цифровым осциллографом (Le Croy 62XS), затем обработаны в цифровой форме (отфильтрованы виртуальным RC -фильтром с частотой среза 6 МГц), построены временные реализации и фазовые портреты переменной составляющей A_{\sim} амплитуды A . При построении временных реализаций время t измеряется относительно некоторого условного момента t_0 (начала отсчета времени), меняющегося от реализации к реализации.

Рис. 1 и 2 демонстрируют закономерность получения (квази)периодических сигналов в реализованном устройстве при высоких значениях коэффициента нелинейности K_a : 616 и 530. На них и далее – при наличии градаций серого цвета – более темные участки соответствуют более длительному пребыванию системы в окрестности данной точки (в фазовом пространстве). В момент своего возникновения сигналы A_{\sim} имеют один характерный вид (рис. 1, a и z , 2, b), а далее – через последователь-

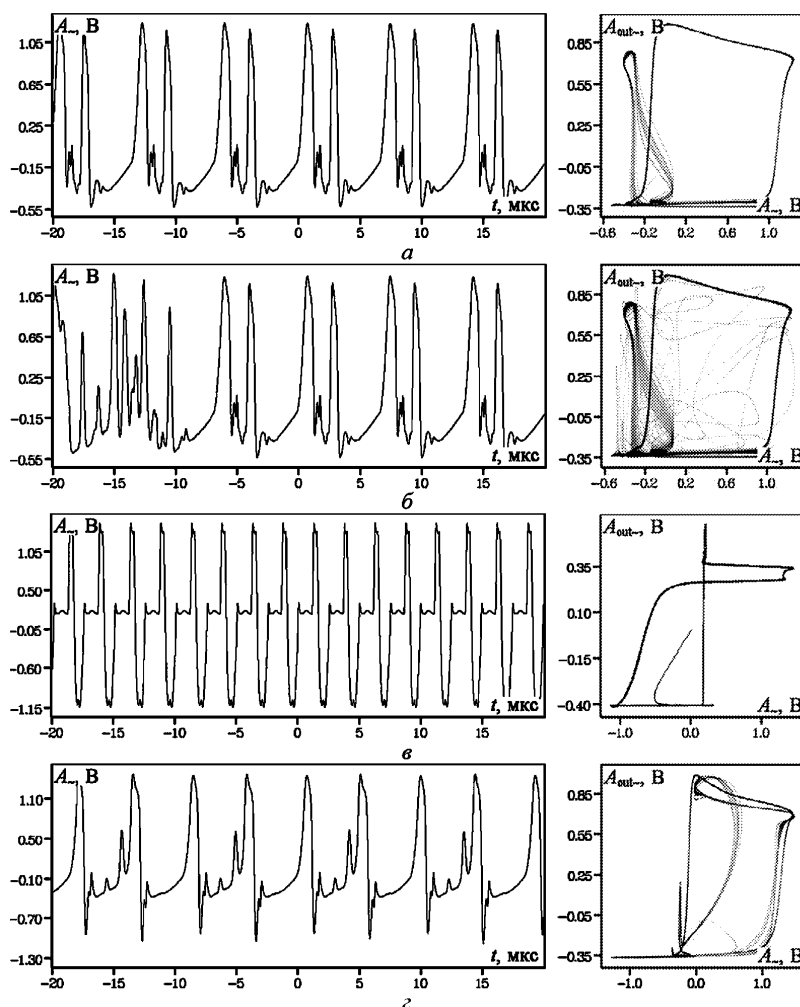


Рис. 1. Квазирегулярная динамика переменной составляющей A_{\sim} амплитуды A при $K_a = 616$ в разные периоды времени, отстоящие друг от друга на величины: $t_{0\text{ в}} - t_{0\text{ а}} = 13$ с, $t_{0\text{ з}} - t_{0\text{ б}} = 414$ с (6.9 мин) при первом включении (a – $в$) и спустя 75 с после повторного включения питания установки (z)

ность «сбоев» ритма (рис. 1, б, 2, а) – они преобразуются к своему финальному виду (рис. 1, в, 2, в). Переход к финальному периодическому режиму занимает весьма длительный промежуток времени, около 1 мин. В единицах времени «полного» установления процесса ($3 \cdot \tau_{ФВЧ} + t_e$) это составляет около $3.3 \cdot 10^6$.

Нетривиальная динамика в устройстве начинается при уменьшении коэффициента нелинейности до уровня $K_a = 241$ и менее (рис. 3 и 4). На увеличенных фрагментах (рис. 3, в и 4, в) нетрудно различить практически инвариантные малые участки временных реализаций.

Дальнейшее снижение значения K_a до величины 213 делает возможным возникновение режима перемежаемости (рис. 5–8). Структуру хаотических, ламинарных и квазипериодических стадий перемежаемости, а также переходы между ними иллюстрируют рис. 6, 7, в, 8, г. Увеличенный фрагмент начальной стадии разрушения квазипериодического процесса (рис. 7, в) выглядит как явление удвоения периода, а далее – возникновения 4-цикла. Динамика, подобная той, что на рис. 5–8, сохраняется еще не менее 3 минут после стадии, представленной на рис. 8.

Дальнейшее уменьшение K_a до значения 179 (рис. 9) приводит к перемежаемости, в составе которой не обнаруживаются квазипериодические стадии, а есть только хаотические и ламинарные. Пропорции между временами существования последних изменяются во времени.

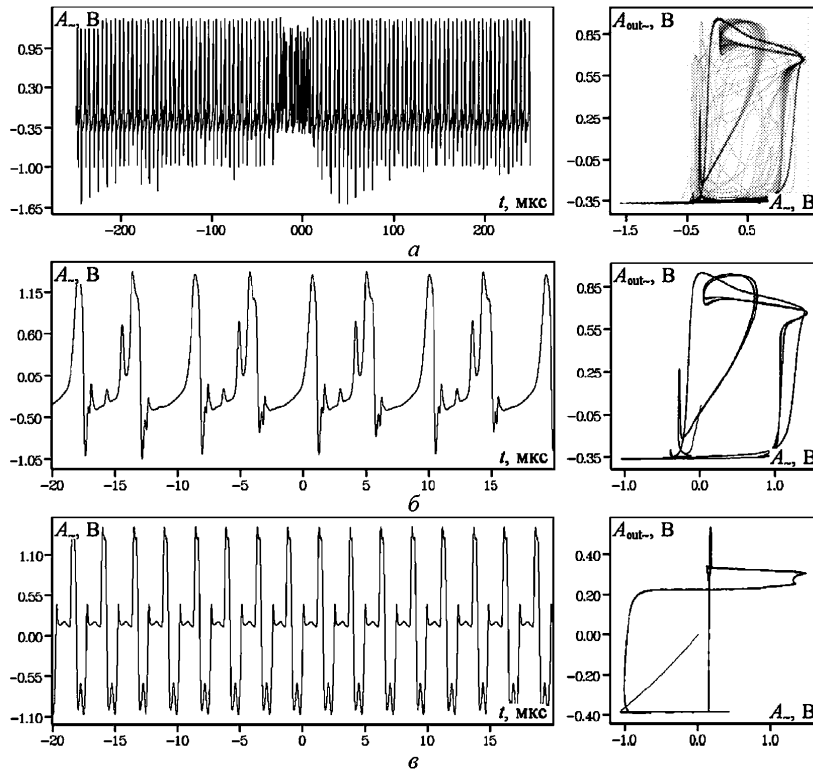


Рис. 2. Динамика переменной составляющей A_{\sim} амплитуды A при $K_a = 530$ в разные периоды времени: $t_{0\delta} - t_{0a} = 15$ с для первого включения (а, б) и спустя приблизительно 2 минуты после повторного включения (в)

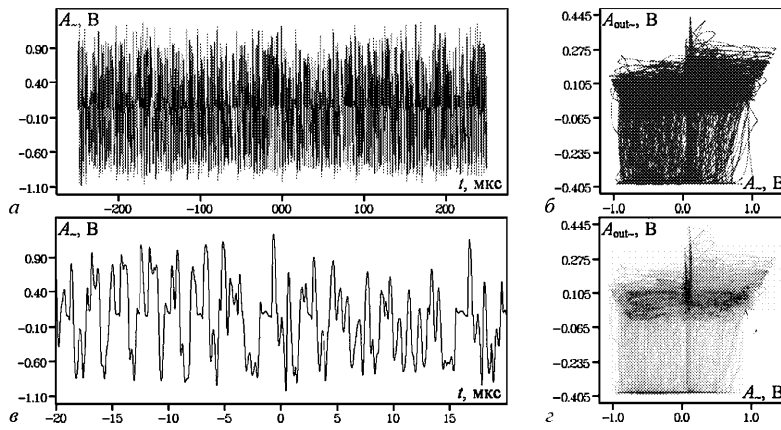


Рис. 3. Хаотическая динамика переменной составляющей A_{\sim} амплитуды при $K_a = 241$ в период времени, отстоящий от момента включения не менее чем на 3 мин. На рис. в – увеличенный фрагмент рис. а. Фазовый портрет (б) представлен с помощью градаций серого цвета (г) и соответствует интервалу времени рис. а

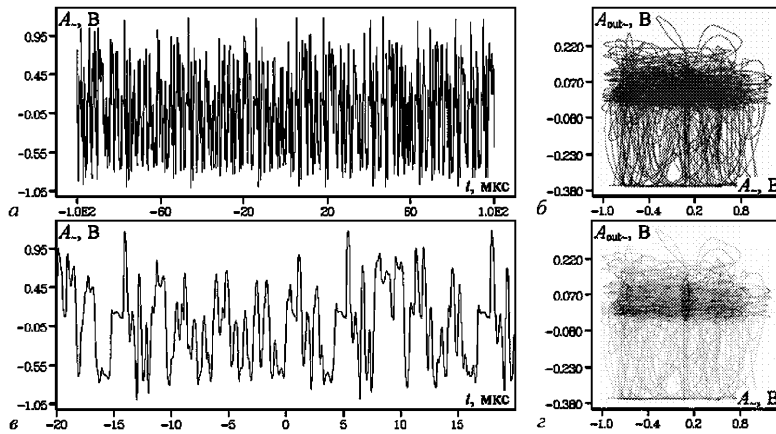


Рис. 4. Хаотическая динамика переменной составляющей амплитуды при $K_a = 235$ в период времени, отстоящий от момента включения не менее чем на 1 мин. На рис. в – увеличенный фрагмент рис. а. Фазовый портрет (б) представлен с помощью градаций серого цвета (г) и соответствует интервалу времени рис. а

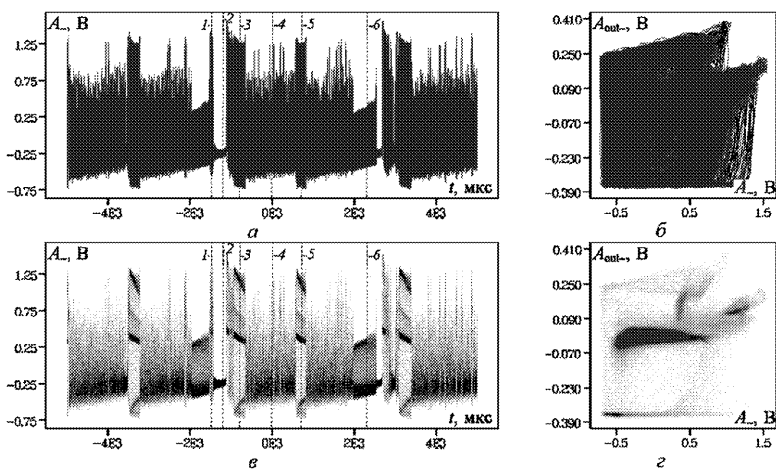


Рис. 5. Перемежаемость в динамике переменной составляющей A_{\sim} амплитуды A при $K_a = 213$. На рис. в, г – представлены с помощью градаций серого цвета временная реализация и фазовый портрет, соответствующие рис. а и б

Понижение K_a (до 153) приводит к исчезновению ламинарной фазы, следовательно, и перемежаемости (рис. 10), а также к возможности возврата системы в статическое состояние: $\theta = 0$, $U_c = A$. Но после повторного включения установки хаотическая динамика восстанавливается.

При дальнейшем уменьшении коэффициента нелинейности ($K_a = 137$) не исключено повторение перемежаемости, но без ламинарной стадии (рис. 11, 12), а финалом ее эволюции снова оказывается статическое состояние системы.

При $K_a \leq 49$ в экспериментах не удалось возмутить систему и перевести ее в динамический режим. Вероятно, при этих значениях K_a существует лишь единственный аттрактор: устойчивое статическое состояние, когда $\theta = 0$, $U_c = A$.

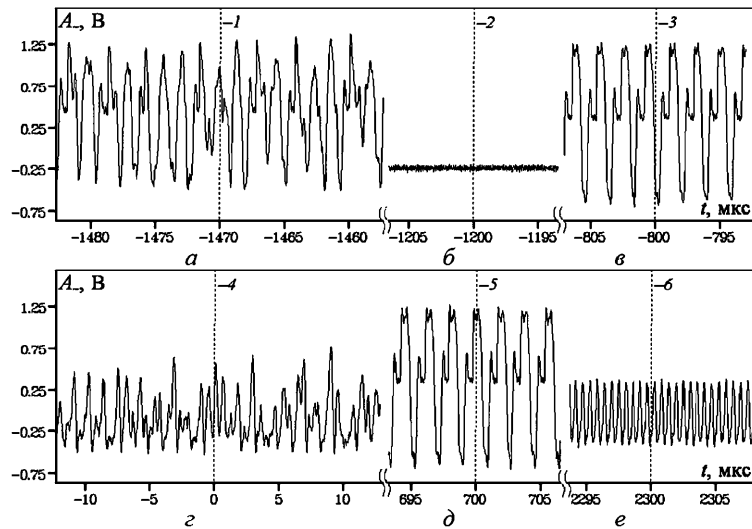


Рис. 6. Увеличенные фрагменты временных реализаций на рис. 5 ($K_a = 213$) в окрестностях точек, обозначенных вертикальными нумерованными пунктирами: 1 (а), 2 (б), 3 (в), 4 (г), 5 (д), 6 (е)

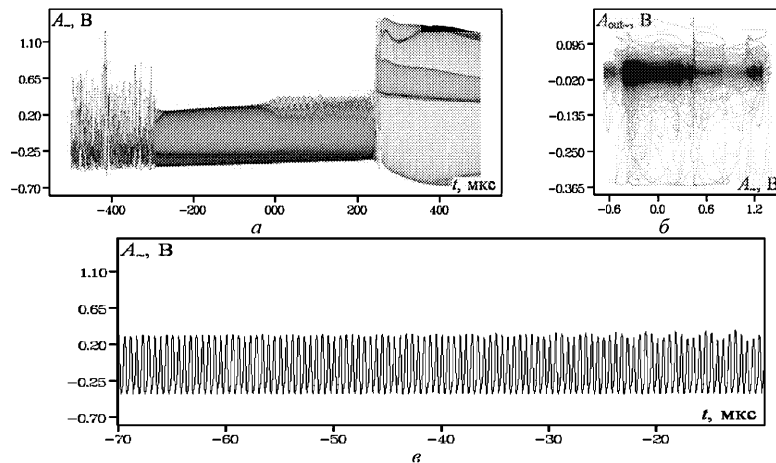


Рис. 7. Временная реализация переменной составляющей амплитуды с продолжительным квазипериодическим режимом (а), соответствующий ей фазовый портрет (б) и увеличенный фрагмент начальной стадии разрушения квазипериодического процесса (в) при $K_a = 213$. Этот период времени отстоит на интервал $t_{0 \text{ рис. 7}} - t_{0 \text{ рис. 5}} = 53$ с от периода рис. 5

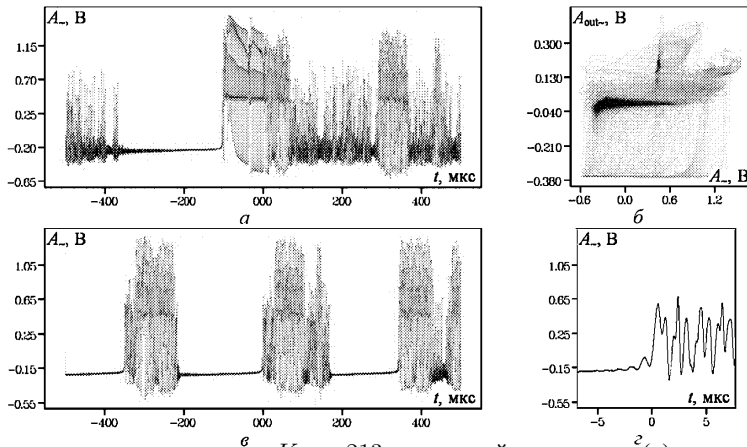


Рис. 8. Эволюция перемежаемости при $K_a = 213$: временной реализации (а) соответствует фазовый портрет (б); последующий этап (в) и его детализация (с). Эти периоды времени отстоят от периода рис. 5 на интервалы t_0 рис. 8, а - t_0 рис. 5 = 62 с и t_0 рис. 8, в - t_0 рис. 5 = 76 с. Подобный характер динамики сохраняется еще не менее 3 мин.

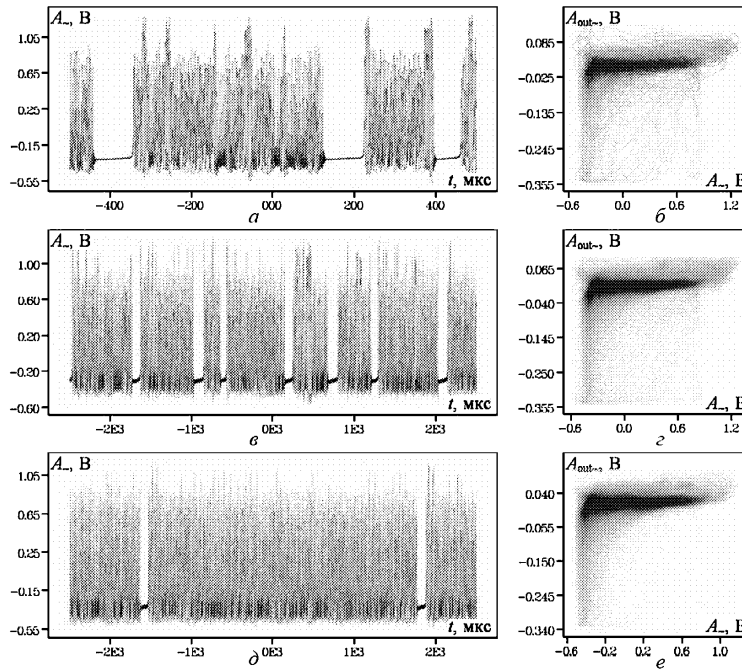


Рис. 9. Перемежаемость при $K_a = 179$, демонстрирующая различные пропорции ламинарной и хаотической стадии. Временные реализации (а, в, д) и фазовые портреты (б, г, е) относятся к периодам времени, отстоящим друг от друга на интервалы: $t_0 в - t_0 а = 11$ с и $t_0 д - t_0 в = 75$ с

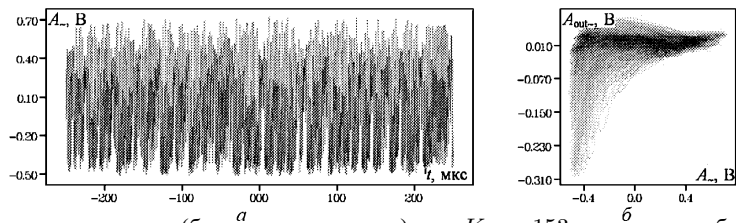


Рис. 10. Хаотическая динамика (без перемежаемости) при $K_a = 153$, ведущая приблизительно через 1 мин. к возвращению системы в статическое состояние. После повторного включения хаотическая динамика восстанавливается

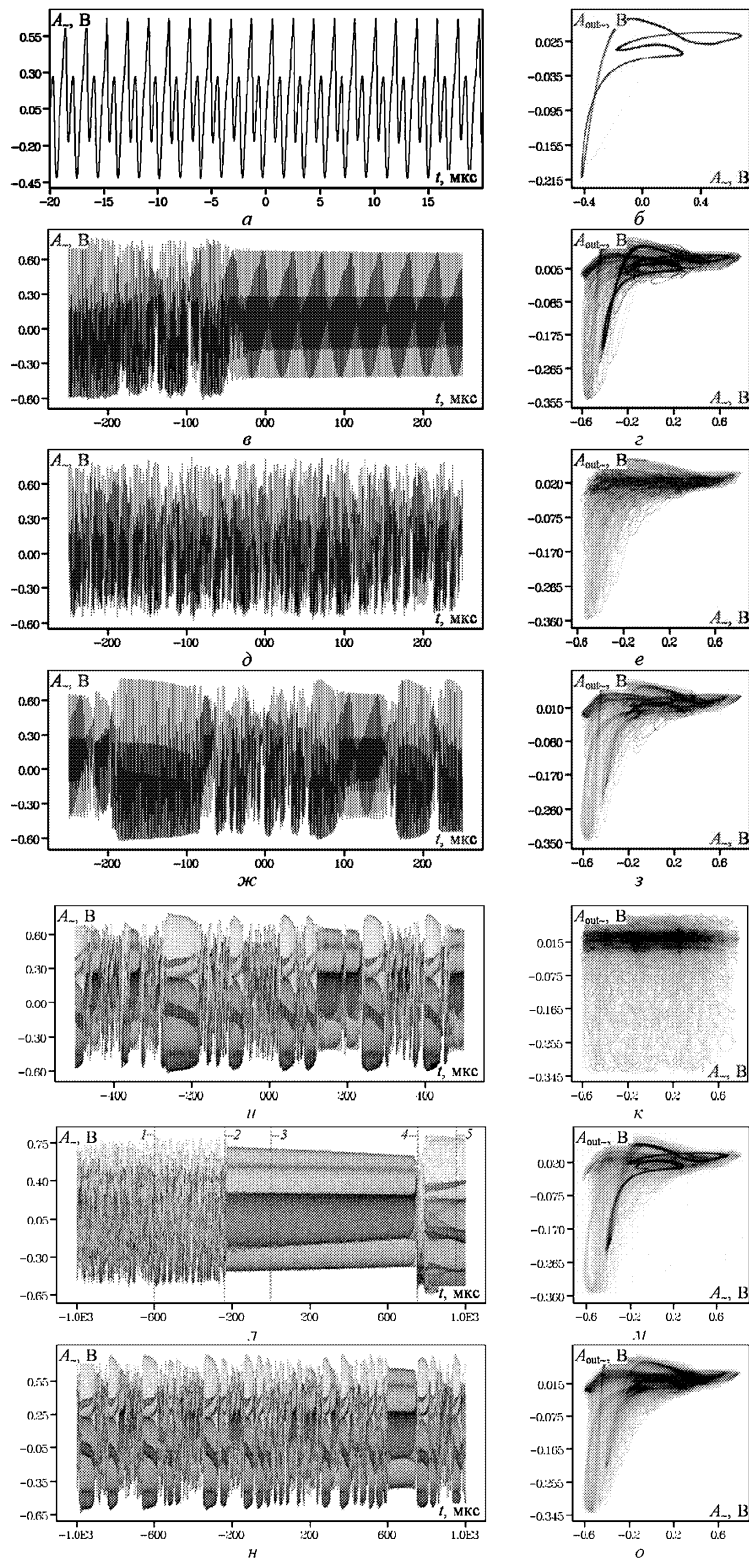


Рис. 11. Переमेжаемость при $K_a = 137$, ведущая приблизительно через 2.9 мин. к возвращению системы в статическое состояние. Регулярный процесс, формирующийся вслед за включением питания (а), и его фазовый портрет (б). Смена типов сложного поведения (в-о) в разные периоды времени, отстоящие друг от друга на величины: $t_{0 в} - t_{0 а} = 9$ с, $t_{0 д} - t_{0 в} = 8$ с, $t_{0 ж} - t_{0 д} = 8$ с, $t_{0 и} - t_{0 ж} = 70$ с, $t_{0 л} - t_{0 и} = 38$ с, $t_{0 н} - t_{0 л} = 28$ с

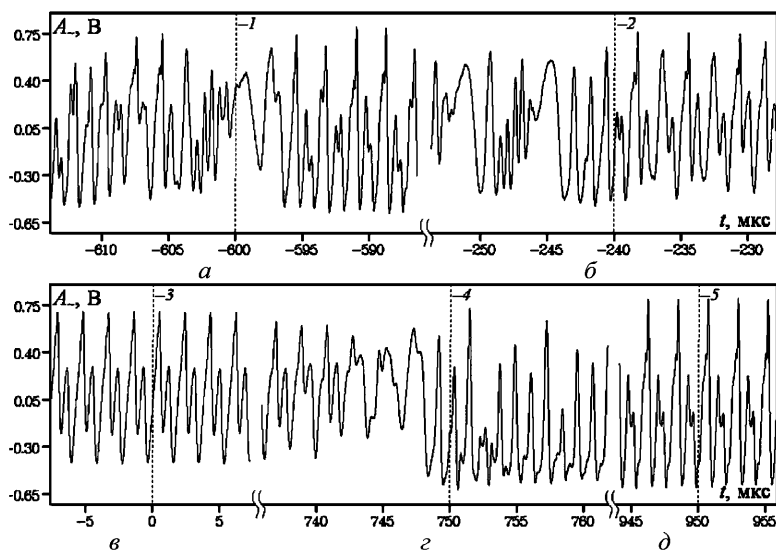


Рис. 12. Увеличенные фрагменты временных реализаций на рис. 11, л ($K_a = 137$) в окрестностях точек, обозначенных вертикальными нумерованными пунктирами: 1 (а), 2 (б), 3 (в), 4 (г), 5 (д)

Кажется парадоксальным отсутствие хаотической динамики при больших значениях коэффициента нелинейности ($K_a = 616$, $K_a = 530$) и ее возникновение лишь при уменьшении его до $K_a \approx 241$. Это противоречие снимается, если вспомнить о явлении *ограничения* (или *насыщения*) *нелинейности* [7; 10, с. 52, 162–163]. В нашем случае (устройстве) оно обусловлено ограниченным динамическим диапазоном фазового модулятора по входу управления. Значения K_a , приводимые в работе, – это уровень нелинейности в режиме малого сигнала, точнее, в режиме малых величин переменной составляющей A_{\sim} амплитуды несущего колебания (малых глубин модуляции несущего колебания). Высокие значения K_a провоцируют систему к более глубокой модуляции, что выводит сигнал управления фазового модулятора за границы его динамического диапазона. А реализуется ли это ограничение, зависит не только от K_a , но и от самого динамического режима, который возник бы в «идеальной» системе, то есть без ограничения нелинейности. Степень реального результирующего влияния его в принципе можно оценить длительностью пребывания системы за границами динамического диапазона.

Заключение

Систематизированы экспериментальные данные о поведении переменной составляющей амплитуды огибающей высокочастотного сигнала в модифицированном радиоэлектронном аналоге кольцевого интерферометра с керровской нелинейностью. Они доказывают осуществимость регулярных и хаотических режимов динамики в устройстве, представленном на рис. 2 в [1].

Сравним результаты вычислительных [1] и лабораторных экспериментов. Несмотря на существенное различие параметров виртуальной и реальной систем,

Сопоставление результатов численного моделирования
и лабораторного эксперимента

| Моделирование | Эксперимент | Комментарий |
|------------------------|----------------------------|---|
| Рис. 5 в [1] | Рис. 11, <i>в, ж, и, н</i> | Хаотическая динамика с чертами перемежаемости, но без ламинарной стадии |
| Рис. 6 в [1] | Рис. 1, 2 | При больших значениях коэффициента нелинейности K_α возможны периодические колебания |
| Рис. 7, <i>б</i> в [1] | Рис. 6, <i>в</i> | «Хаос смещающегося предельного цикла» versus квазипериодическая стадия перемежаемости |
| Рис. 8, 9 в [1] | Рис. 5, 8, 9 | Перемежаемость с (квази)ламинарной фазой |

имеют место черты сходства в их поведении (таблица). Кроме того, можно усмотреть сходство в морфологии временных реализаций, обсуждавшихся выше и на графиках рис. 2, 7, 8, 16 в статье [11] о режимах в автогенераторах с частотно-фазовым управлением.

Анализ результатов моделирования [1] и лабораторного эксперимента дает основание ожидать, что радиотехническая система на рис. 2 в [1] послужит прецедентом нелинейно-динамического устройства, располагающего к диверсификации, а тем самым – к порождению разнообразных по своим свойствам источников регулярных и хаотических режимов динамики.

По мнению авторов, открывается новое направление исследований: установление зависимости вида нелинейности от формы и амплитуды сигнала $V_{вх}(t)$ – совсем не обязательно гармонического и даже периодического. По оценкам авторов, выбором вида сигнала $V_{вх}(t)$ возможно формировать в динамической системе нелинейность желаемого типа. Это открывает перспективу неограниченной диверсификации динамических систем, наделяемых тем или иным характером нелинейности. Причем в принципе осуществима и система с эволюционирующей – непрерывно и/или дискретно – нелинейностью. Тогда, вероятно, нелинейность обретает статус особой динамической переменной [12].

Авторы признательны профессору Саратовского государственного университета С.П. Кузнецову за стимулирующее внимание к теме работы.

Библиографический список

1. *Измайлов И.В., Поызнер Б.Н.* Хаос в радиотехническом устройстве с квадратичным фазовым модулятором и интерференционным усилением квазигармонического сигнала: модель и вычислительный эксперимент // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 1. С. 61.

2. Ikeda K. Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by ring cavity system // Opt. Comm. 1979. Vol. 30. №2. P. 257.
3. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
4. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М: Физматлит, 2001.
5. Carmon T., Buljan H., Segev M. Spontaneous pattern formation in a cavity with incoherent light // Optics Express. 2004. Vol. 12, №15. P. 3481.
6. Новые физические принципы оптической обработки информации / Под ред. С.А. Ахманова, М.А. Воронцова. М.: Наука, 1990.
7. Розанов Н.Н. Оптическая бистабильность и гистерезис в распределенных нелинейных системах. М.: Наука, 1997.
8. Рыскин Н.М., Хаврошин О.С. Управление хаосом в системе Икеды: упрощенная модель в виде точечного отображения // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, №2. С. 66.
9. Рыскин Н.М., Хаврошин О.С. Управление хаосом в системе Икеды: пространственно-временная модель // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, №2. С. 87.
10. Измайлов И.В., Лячин А.В., Поизнер Б.Н. Детерминированный хаос в моделях нелинейного кольцевого интерферометра. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007.
11. Пономаренко В.П. Динамические режимы и нелинейные эффекты в автогенераторах с частотно-фазовым управлением // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16. №6. С. 18.
12. Измайлов И.В., Поизнер Б.Н. Генерация нелинейности для увеличения разнообразия систем с динамической и статической неустойчивостью // Изв. вузов. Физика. 2010, № 2. С. 18.

Томский государственный
университет

Поступила в редакцию 16.06.2009
После доработки 5.09.2009

EXPERIMENTS WITH A SOURCE OF CHAOS – A RADIO-ELECTRONIC DEVICE WITH SQUARE-LAW PHASE MODULATOR AND INTERFERENCE AMPLIFICATION OF QUASI-HARMONIC SIGNAL

I.V. Izmailov, B.N. Poizner

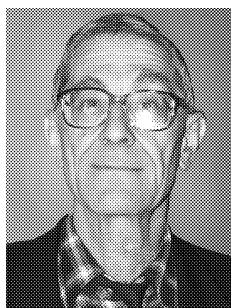
A modified radio-electronic analog of the nonlinear ring cavity is realized in laboratory. The device represents a special class of oscillations or waves sources. An operation principle of the sources is based on interference amplification of feedback signal by an input signal. A laboratory experiments are performed, the likeness of their results and simulation data is shown. An intermittency, chaos, regular, static modes are detected. A thesis on controlled nonlinearity of dynamical systems is suggested.

Keywords: Interference amplification, delayed feedback, bifurcation, chaos, intermittency, static state, controlled nonlinearity.



Измайлов Игорь Валерьевич – родился в Алма-Ате (1976), окончил Томский государственный университет (ТГУ, 1999). Учился в аспирантуре (1999–2002) и докторантуре (2006–2009) ТГУ. Работает в ТГУ старшим научным сотрудником радиофизического факультета. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ТГУ (2002). Ведёт исследования, ориентированные на выявление новых синергетических феноменов и закономерностей нелинейной динамики в системах различной природы, на применение их в радиофизических и оптических устройствах (обработки и защиты информации, адаптивной, сингулярной оптики, функциональной электроники). Опубликовал три монографии и одно учебное пособие с грифом УМО (в соавторстве). Автор 85 научных статей по направлениям, указанным выше (из них 35 – в рецензируемых журналах).

634050, Томск, пр. Ленина, 36
ТГУ, РФФ, каф. квантовой электроники и фотоники
E-mail:izmi@elefot.tsu.ru



Поизнер Борис Николаевич – родился в Томске (1941), окончил радиофизический факультет Томского государственного университета. Защитил кандидатскую диссертацию по теории колебаний и волн (1970), профессор кафедры квантовой электроники и фотоники ТГУ. Читает лекции по нелинейной оптике, лазерной технике, основам синергетики, социальной информатике. Автор и соавтор более 400 публикаций, 10 изобретений, 17 учебных пособий и монографий по физике лазеров, процессам самоорганизации и хаотизации в оптических, радиофизических, социокультурных системах, проблемам вузовской педагогики и (само)образования, науковедению и культурологии. Заслуженный работник высшей школы РФ (2005). Учёный секретарь диссертационного совета Д 212.267.04 при ТГУ. Действительный член Организации российских библиофилов.

634050, Томск, пр. Ленина, 36
ТГУ, РФФ, каф. квантовой электроники и фотоники
E-mail:pznr@elefot.tsu.ru



АВТОНОМНЫЙ ГЕНЕРАТОР КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Н.В. Станкевич

Вводится в рассмотрение простая трехмерная автономная система, в которой реализуются квазипериодические автоколебания, соответствующие аттрактору в виде двумерного тора. Представлены компьютерные иллюстрации квазипериодической динамики: фазовые портреты, спектры Фурье, графики показателей Ляпунова. Продемонстрировано существование языков Арнольда на плоскости параметров и переход от квазипериодической динамики к хаосу через разрушение инвариантной кривой в сечении Пуанкаре.

Ключевые слова: Аттрактор, тор, квазипериодические колебания, показатель Ляпунова.

Введение

Квазипериодические колебания встречаются во многих динамических системах в природе и технике, включая радиофизику и электронику [1–5]. Следует отметить также отношение квазипериодических колебаний к задачам, обсуждаемым в нейродинамике и биохимии, в связи с механизмами активности, ответственной за формирование и сосуществование медленных и быстрых осцилляций, так называемых берстов и спайков. Некоторые из этих механизмов могут приводить к квазипериодическому поведению, соответствующему аттракторам в виде торов [6–8]. Вопросы, связанные с квазипериодическим поведением, находятся в центре внимания известных фундаментальных работ Колмогорова, Арнольда, Мозера [9], а также Ландау и Хопфа [10–11]. В рамках подхода Ландау–Хопфа объяснение механизма турбулентности основано на идее последовательного включения при увеличении числа Рейнольдса все большего количества невзаимодействующих периодических движений с несоизмеримыми частотами. Это заключение было подвергнуто критике Рюэлем и Такенсом [12], утверждавшим, что в системах с последовательно возникающими в результате бифуркаций колебательными составляющими, типичными могут быть только квазипериодические движения с размерностью не более трех, а затем возникает странный аттрактор. Известны, однако, примеры модельных систем, для которых численные расчеты указывают на сохранение торов достаточно высокой размерности (см., например, [13]).

С другой стороны, понимание перехода к сложной динамике согласно сценарию Ландау–Хопфа или Рюэля–Такенса невозможно без четкого представления о картине квазипериодических режимов низкой размерности. Например, такие задачи, как синхронизация двухчастотных квазипериодических колебаний или взаимная синхронизация трех автоколебательных элементов, нельзя считать до конца решенными, поскольку они являются емкими и многоплановыми [14–22]. В серии недавних работ [14–22] обсуждаются новые интересные связанные с этим кругом проблем аспекты, в частности, особенности синхронизации резонансных циклов, лежащих на торе. Авторы обсуждают бифуркационные механизмы рождения трехчастотных торов в возбуждаемой системе, иллюстрируя свои результаты в рамках радиофизического эксперимента.

В свете перечисленных проблем для более глубокого исследования квазипериодической динамики и сценариев ее трансформации при изменении параметров желательно иметь простые модели самой низкой размерности фазового пространства, демонстрирующие соответствующий тип поведения. Некоторые, хотя далеко не все, аспекты могут быть изучены на основе неавтономных систем, образующих все же отдельный, довольно специальный класс. Что касается *автономных* моделей низкой размерности с квазипериодическим поведением, то в литературе они представлены далеко не в достаточной степени. Например, в работах [23–25] рассматриваются системы, включающие элемент с негладкой (кусочно-линейной) характеристикой. Такой характер нелинейности приводит к тому, что для них реализуются свои, специфические бифуркации [26]. Несколько примеров рассмотрены в работе [27], однако они не представляются убедительными, так как квазипериодическая динамика наблюдается при весьма специальном выборе параметров¹, и не выявлена характерная картина языков Арнольда, обычно сопутствующая квазипериодическим режимам. В работах [21,22] был сделан существенный шаг в реализации простейшей базовой модели с автономной квазипериодической динамикой. Авторами предложена система в виде модификации радиофизического генератора Анищенко–Астахова с квазипериодическим поведением, но ее размерность $N = 4$, что выше минимально необходимой для существования аттрактора в виде двумерного тора. Другая четырехмерная модель обсуждается в [28].

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы сформулировать и исследовать простой пример *автономной* системы, которая в широкой области параметров демонстрирует квазипериодические колебания и сопутствующие эффекты, и притом характеризуется *минимальной* необходимой для их реализации размерностью фазового пространства $N = 3$.

1. Принцип действия и математическая модель генератора квазипериодических колебаний

В качестве исходного пункта рассуждений обратимся к функциональной схеме хорошо известного релаксационного автогенератора [29] (рис. 1). Система содержит накопительный элемент – конденсатор, который постепенно заряжается через сопро-

¹Например, утверждается возможность квазипериодической динамики в классической системе Ресслера при фиксированном значении параметра $p = 2.000011$, в то время как порог бифуркации седло-узел составляет точно $p = 2$. Даже если этот результат не является численным артефактом, столь специальные значения параметров не представляются типичными.

тивление от источника напряжения, а затем быстро разряжается через «пороговый» элемент, типа неоновой лампы. Этот элемент должен иметь два порога: один для зажигания, другой для гашения. Когда напряжение на конденсаторе, уменьшаясь, достигает уровня гашения, пороговый элемент выключается, и конденсатор начинает снова заряжаться, что ведет к повторению цикла.

Предположим теперь, что в качестве порогового элемента используется колебательная система – автогенератор, для которого управляющим параметром выступает выходная переменная накопительного элемента. Пусть автогенератор характеризуется жестким возбуждением. Тогда наряду с порогом возбуждения колебаний по управляющему параметру имеется также порог, более низкий, для срыва колебаний. В системе должны возникать релаксационные колебания, сопровождаемые циклами зарядки и разрядки накопительного элемента, на фоне которых происходят автоколебания генератора.

Рассмотрим следующую модельную систему уравнений, которая использует описанный физический механизм:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda + z + x^2 - \frac{1}{2}x^4)\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0, \\ \dot{z} &= \mu - x^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь x – обобщенная координата, относящаяся к автоколебательному элементу; ω_0 – его рабочая частота. Множитель перед производной \dot{x} содержит параметр λ , характеризующий глубину положительной обратной связи в автогенераторе, нелинейный член x^2 , стимулирующий возбуждение колебаний, и член x^4 , отвечающий за насыщение при больших амплитудах. Нелинейность, соответствующая комбинации двух последних членов, обеспечивает жесткое возбуждение автогенератора, обусловленное присутствием субкритической бифуркации Андронова–Хопфа. Параметр λ входит в уравнение вместе с аддитивной добавкой z , которая характеризует состояние накопительного элемента. Эволюция переменной z во времени задается вторым уравнением (1). При малых амплитудах автоколебаний $|x| \ll 1$ переменная z будет нарастать во времени по линейному закону со скоростью μ . При больших амплитудах автоколебаний правая часть уравнения становится отрицательной, и величина z начинает быстро уменьшаться.

Таким образом, система в целом имеет два независимых временных масштаба. В качестве одного фигурирует характерное время восстановления состояния накопительного элемента $\tau \sim \mu^{-1}$, а в качестве другого – основной период колебаний автогенератора $T = 2\pi/\omega_0$. Соотношение между ними можно задавать произвольно, так что следует ожидать, что система способна генерировать самоподдерживающиеся квазипериодические колебания.

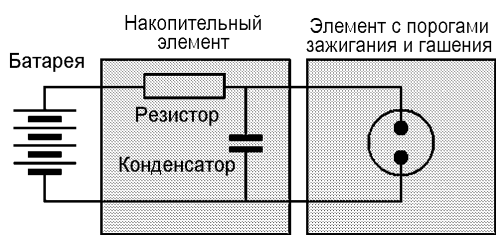


Рис. 1. Схема генератора релаксационных колебаний, содержащая накопительный элемент (цепочка RC) и элемент, имеющий порог возбуждения и срыва активности (например, неоновая лампа)

2. Иллюстрации квазипериодической динамики

Обратимся к компьютерному моделированию динамики системы и сопоставлению результатов расчетов с качественными оценками. В расчетах для получения решения системы (1) использовался метод Рунге–Кутты четвертого порядка.

Если собственный период автогенератора много меньше характерного времени релаксационного процесса $T \ll \tau$, то система совершает быстрые осцилляции с периодом $T = 2\pi/\omega_0$ на фоне медленных процессов накопления энергии со временем $\tau \sim \mu^{-1}$. В качестве примера такой режим при значениях $\omega_0 = 2\pi$, $\mu = 0.3$ проиллюстрирован на рис. 2, *a*. На рисунке представлены временные реализации переменных $x(t)$ и $z(t)$. Генерация в этом случае носит характер сравнительно редких «всплесков» с быстро осциллирующим заполнением. Такой вид колебаний позволяет охарактеризовать обсуждаемый режим как режим пульсирующей генерации.

Такой режим оказывается очень удобным с точки зрения понимания и описания динамики системы. На графике временных зависимостей на рис. 2, *a* можно различить четыре периодически повторяющихся стадии процесса. Интервал *A* соответствует стадии зарядки накопительного элемента. Переменная z увеличивается, в то время как колебания в автогенераторе затухают. Когда величина z становится положительной, перейден порог самовозбуждения, и система вступает в стадию *B*.

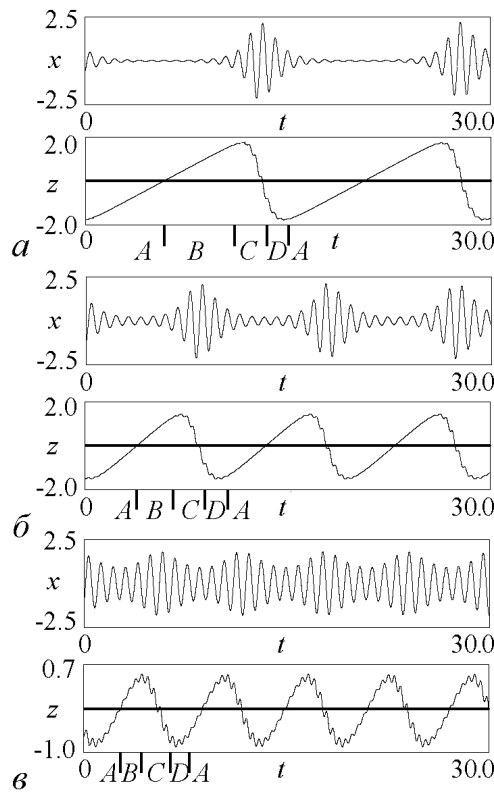


Рис. 2. Реализации автоколебательного процесса в системе (1) при $\lambda = 0$, $\omega_0 = 2\pi$ и различных значениях μ : *a* – 0.3, *b* – 0.5, *v* – 0.9

Здесь амплитуда в автоколебательном элементе нарастает и достигает наивысшего уровня, соответствующего предельному циклу, который имел бы место в системе со стационарным источником энергии. Отметим, что процесс начинается не с нулевой амплитуды, а с остаточных колебаний, сохранившихся от предыдущей стадии затухания. В интервале *C* имеет место уменьшение переменной z из-за относительно большого среднего значения члена x^2 во втором уравнении. В некоторый момент переменная z становится отрицательной, но за счет жесткой природы возбуждения осциллятора автоколебания продолжают до тех пор, пока не будет достигнут порог гашения колебаний. Тогда система переходит в стадию *D*, где имеет место срыв автоколебаний и быстрое уменьшение амплитуды. Далее процесс, состоящий из таких же стадий *A*, *B*, *C*, *D*, повторяется снова и снова (см. рис. 2, *a*).

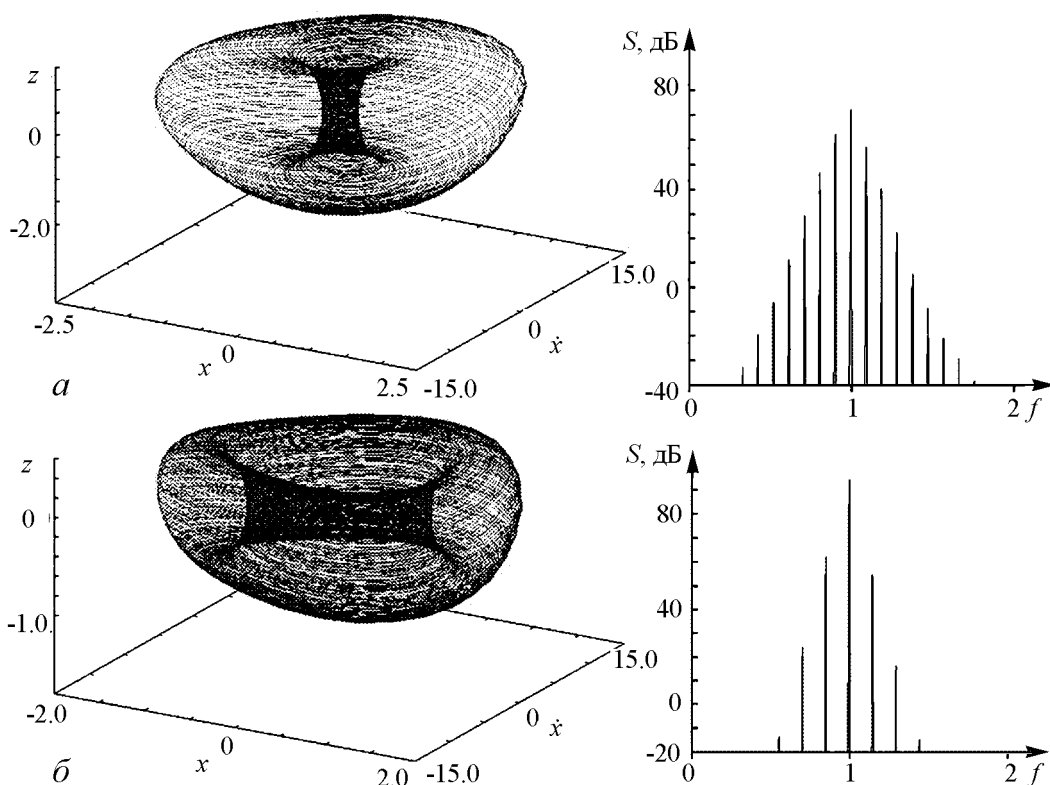


Рис. 3. Фазовые портреты и спектры Фурье системы (1) при $\lambda = 0$, $\omega_0 = 2\pi$ и различных значениях μ : $a - 0.5$, $b - 0.9$

При увеличении параметра μ , ответственного за скорость релаксационного процесса, характерные масштабы времени системы $T = 2\pi/\omega_0$ и $\tau \sim \mu^{-1}$ сближаются. При этом период биений уменьшается, и вид временных реализаций все более приближается к традиционному для квазипериодических колебаний виду (рис. 2, б, в).

В трехмерном фазовом пространстве системы (x, \dot{x}, z) при подходящем выборе параметров можно наблюдать аттрактор в виде тора. На рис. 3 представлены портреты аттракторов в фазовом пространстве системы и спектры Фурье генерируемого сигнала. Спектры Фурье для таких режимов выглядят точно так, как это должно быть для квазипериодических колебаний: они содержат дискретное множество равно удаленных друг от друга частотных компонент. Амплитуда компонент уменьшается вправо и влево от главной спектральной составляющей, которая соответствует основной частоте автоколебательного элемента. Расстояние между соседними компонентами определяется частотой релаксационных колебаний и увеличивается с ростом параметра μ .

На рис. 4 приводятся графики зависимости трех показателей Ляпунова от параметра μ , определяющего характерное время накопительного элемента. На рисунке представлены: P – периодические режимы, C – хаотические, QR – квазипериодические; цифры 1, 2, 3 означают порядковые номера показателей Ляпунова. Расчеты проведены с помощью алгоритма Бенеттина на основе численного решения уравнений (1) и трех комплектов уравнений в вариациях с выполнением ортогонализации и нормализации векторов возмущения на каждом медленном периоде колебательного процесса [30,31].

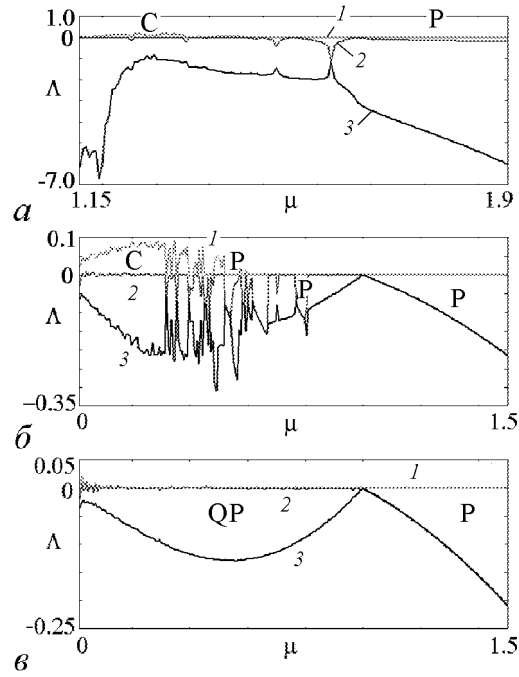


Рис. 4. Спектры показателей Ляпунова в зависимости от параметра μ при $\lambda = 0$ и различных значениях ω_0 : $a - 1.5$; $б - 2.7$; $в - 2\pi$

Ситуация, когда один показатель Ляпунова нулевой (с точностью до погрешности вычислений), а два других отрицательные, соответствует устойчивым периодическим режимам автоколебаний. Квазипериодическим режимам отвечают ситуации, когда два показателя нулевые, а третий отрицательный. Можно видеть, что при $\omega_0 = 2.7$ квазипериодические режимы локализованы в области больших значений параметра μ (рис. 4, б). С ростом собственной частоты автоколебательного элемента при $\omega_0 = 2\pi$ квазипериодические режимы доминируют (рис. 4, в).

В определенных областях можно наблюдать хаотическое поведение, характеризующееся одним положительным, одним нулевым и одним отрицательным показателями.

3. Устройство плоскости управляющих параметров

На рис. 5, а показана карта динамических режимов системы (1) на плоскости параметров (ω_0, μ) , определяющих ее характерные временные масштабы. На рис. 5, б дан ее увеличенный фрагмент. Карта построена следующим образом [30]. При проведении расчетов выполнялось сканирование плоскости параметров с достаточно малым шагом по двум координатным осям. В каждой точке устойчивый режим колебаний анализировался с помощью численного построения сечения Пуан-

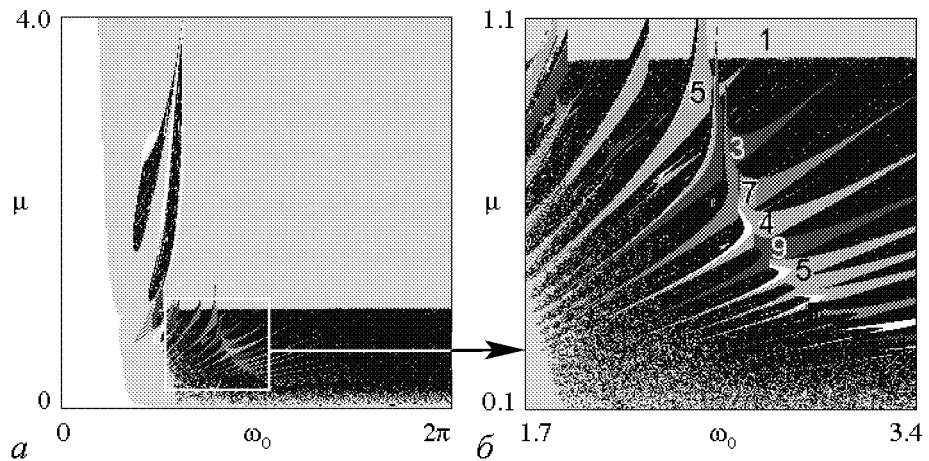


Рис. 5. Карта (а) и ее увеличенный фрагмент (б) динамических режимов системы (1) при $\lambda = 0$. Цифры отвечают периодам циклов в сечении Пуанкаре плоскостью $x = 0, y > 0$

каре [30,32] в плоскости $x = 0$. При этом определялось количество точек пересечения фазовой траектории с этой плоскостью. Полученное число интерпретировалось как период режима. Таким образом, простому предельному циклу отвечает период 1, двухоборотному – период 2 и т.д. Каждая точка плоскости окрашивалась в свой оттенок серого цвета. Основные периоды режимов, определенные в сечении Пуанкаре, указаны соответствующими цифрами. Непериодические режимы (включая квазипериодическую динамику и хаос) показаны черным цветом. Белым цветом обозначены области, для которых изображающая точка уходит на бесконечность.

Можно видеть, что при малых значениях ω_0 в системе наблюдается неограниченный рост динамических переменных. С увеличением ω_0 ($\omega_0 > 1.0$) при $\mu > 1.0$ единственное решение – это устойчивый предельный цикл. Соответствующая область на карте обозначена цифрой 1. Это основной предельный цикл системы, на основе которого возникают более сложные режимы. При уменьшении параметра μ этот цикл претерпевает бифуркацию Неймарка–Сакера, в результате которой в системе становятся возможными устойчивые двухчастотные торы, которым отвечают квазипериодические режимы.

В области $\mu < 1.0$ на увеличенном фрагменте карты рис. 5, б можно видеть многочисленные области различных периодических режимов, которые образуют систему языков Арнольда. Хорошо просматривается линия начала перекрытия этих языков. Правее этой линии имеют место квазипериодические режимы, а левее – области хаоса.

В области значений параметра $1.0 < \omega_0 < 3.0$ с уменьшением параметра μ наблюдается переход к хаосу через разрушение квазипериодических колебаний. На рис. 6

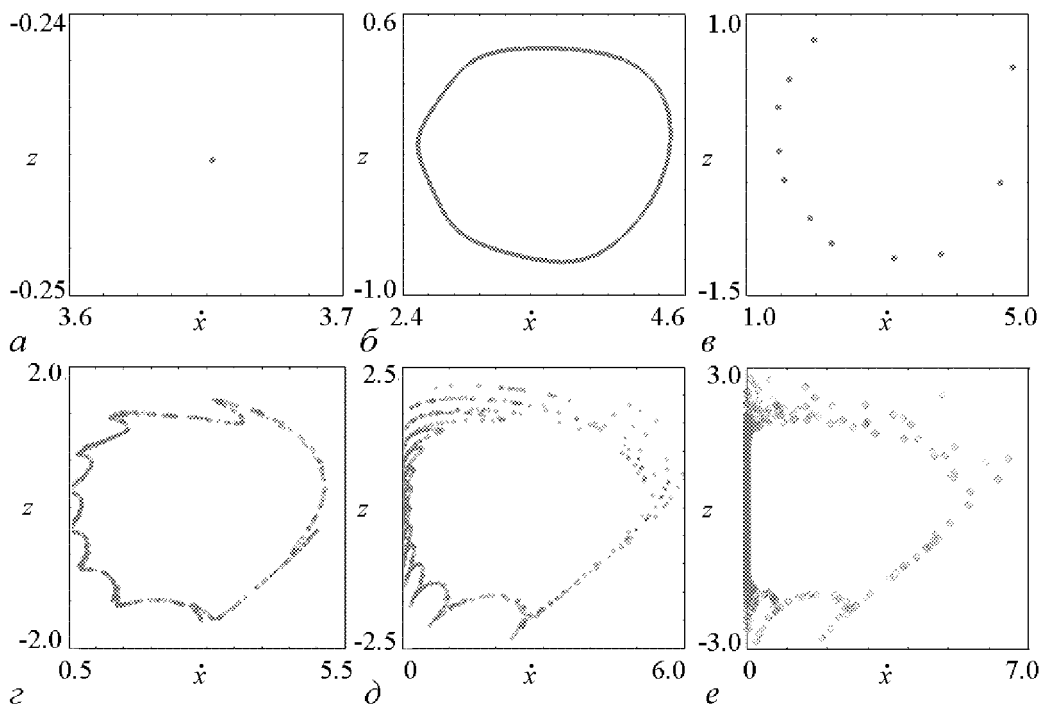


Рис. 6. Аттракторы системы (1) в сечении Пуанкаре плоскостью $x = 0, \dot{x} > 0$ при $\lambda = 0, \omega_0 = 2.7$ и различных значениях параметра μ : а – 1.1; б – 0.9; в – 0.7; г – 0.5; д – 0.3; е – 0.1

приводятся портреты аттракторов в сечении Пуанкаре при $\omega_0 = 2.7$ и различных значениях параметра μ , которые возникают по ходу реализации такого сценария. При $\mu = 1.1$ на рис. 6, *а* можно видеть неподвижную точку в сечении Пуанкаре, отвечающую основному предельному циклу системы. При $\mu = 0.9$ на рис. 6, *б* представлена инвариантная кривая, являющаяся сечением эргодического тора. При $\mu = 0.7$ наблюдается резонансный цикл периода 11 на этой инвариантной кривой (рис. 6, *в*). Затем кривая теряет гладкость (рис. 6, *г*) и все больше разрушается (рис. 6, *д, е*). При этом в системе происходит возникновение хаотических колебаний.

При увеличении параметра ω_0 , то есть в правой части карты на рис. 5, *а*, хаотические режимы исчезают и остаются только квазипериодические, по крайней мере, на уровне достигаемой в наших расчетах степени разрешения. Это хорошо видно на графиках показателей Ляпунова (см. рис. 4, *в*). В этом случае в сечении Пуанкаре наблюдается замкнутая инвариантная кривая, а физически это отвечает режимам пульсирующей генерации.

Заключение

В работе предложена простая модель автономного генератора квазипериодических колебаний с двумя независимыми частотами, то есть с аттрактором в виде тора, вложенного в трехмерное фазовое пространство. Такая система легко может быть реализована, как электронное устройство. Помимо непосредственно квазипериодических режимов, в расчетах продемонстрированы другие характерные сопутствующие явления, в том числе внутренний резонанс, соответствующий языкам Арнольда на плоскости параметров, и переход от квазипериодической динамики к хаосу через разрушение инвариантной кривой в сечении Пуанкаре. Данная модель представляется интересной в методическом отношении и может использоваться для иллюстрации квазипериодических колебаний в компьютерных практикумах и учебных курсах, освещающих проблемы нелинейной динамики.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 09-02-00426 и программы «Развитие научного потенциала высшей школы» № 2.1.1/1738.

Библиографический список

1. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 494 с.
2. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 360 с.
3. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997. 495 с.
4. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971. 896 с.
5. Glazier J.A. and Libchaber A. Quasi-Periodicity and Dynamical Systems: An Experimentalist's view. IEEE Trans // Circuits and Systems. 1988. Vol. 35, № 7. P. 790.

6. *Izhikevich E.M.* Neural excitability, spiking and bursting // International J. of Bifurcation and Chaos. 2000. Vol. 10, № 6. P. 1171.
7. *Straube R., Flockerzi D., Müller S.C., and Hauser M.J.B.* Origin of bursting pH oscillations in an enzyme model reaction system // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72. 066205.
8. *Shilnikov A. and Kolomiets M.* Methods of the qualitative theory for the Hindmarsh-Rose model: A case study. A tutorial // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2008. Vol. 18, № 8. P. 2141.
9. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. Москва: Изд-во URSS, 2003. 416 с.
10. *Ландау Л.Д.* К проблеме турбулентности // ДАН СССР. 1944. Т. 44, № 8. P. 339.
11. *Hopf E.* A mathematical example displaying the features of turbulence // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1948. Vol. 1. P. 303.
12. *Рюэль Д., Такенс Ф.* О природе турбулентности. В сб. Странные аттракторы, под ред. Синая Я.Г. и Шильникова Л.П. М.: Мир, 1981. С. 117.
13. *Tavakol R., Tworkovsky A.* An example of quasiperiodic motion on T^4 // Phys. Lett. A. 1984. Vol. 100, № 6. P. 273
14. *Анищенко В.С., В.В. Астахов, Вадивасова Т.Е., Стрелкова Г.И.* Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008. 144 стр.
15. *Anishchenko V., Nikolaev S., and Kurths J.* Bifurcational mechanisms of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // CHAOS. 2008. Vol. 18. 037123.
16. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Механизмы синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе // Нелинейная динамика. 2008. Т. 4, № 1. С. 39.
17. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Синхронизация квазипериодических колебаний с двумя частотами // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 2. С. 69.
18. *Anishchenko V., Astakhov S. and Vadivasova T.* Phase dynamics of two coupled oscillators under external periodic force // Europhysics Letters. 2009. Vol. 86. P. 30003.
19. *Анищенко В.С., Астахов С.В., Вадивасова Т.Е., Феоктистов А.В.* Численное и экспериментальное исследование внешней синхронизации двухчастотных колебаний // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 2. С. 237.
20. *Anishchenko V.S., Nikolaev S.M., Kurths J.* Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 76, 040101.
21. *Anishchenko V., Nikolaev S. and Kurths J.* Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasiperiodic motions // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 73, 056202.

22. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Генератор квазипериодических колебаний. Бифуркация удвоения двумерного тора // Письма ЖТФ. 2005. Т. 31, вып. 19. Р. 88.
 23. *Matsumoto T., Chua L., Tokunaga R.* Chaos via torus breakdown // IEEE Transactions on Circuits and Systems. 1987. Vol. 34, № 3. С. 240.
 24. *Егоров Е.Н., Короновский А.А., Храмов А.Е.* Структура бассейнов притяжения аттракторов генератора «TORUS» // Радиотехника и электроника. 2004. Vol. 49, № 6. Р. 720.
 25. *Nishiuchi Y., Ueta T. and Kawakami H.* Stable torus and its bifurcation phenomena in a simple three-dimensional autonomous circuit // Chaos, Solitons & Fractals. 2006. Vol. 27, № 4. Р. 941.
 26. *Zhusubaliyev Zh.T. and Mosekilde E.* Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems. World Scientific, New Jersey, London, Singapore, Hong-Kong, 2003. 372 p.
 27. *Genesio R. and Ghilardi C.* On the onset of quasi-periodic solutions in third-order nonlinear dynamical systems // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2005. Vol. 15, 3165.
 28. *Wu Wen-Juan W.-J., Chen Z.-Q., and Yuan Z.-Z.* Analysis of two-torus in a new four-dimensional autonomous system // Chinese Physics B. 2008. Vol. 17. Р. 1674.
 29. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания, 2-е изд. М.: Физматлит, 2005. 292 с.
 30. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
 31. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them // Meccanica. 1980. Vol. 15. Р. 9.
 32. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
- Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского* *Поступила в редакцию* *03.07.2009*
СФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН *После доработки* *16.11.2009*

AUTONOMOUS GENERATOR OF QUASIPERIODIC OSCILLATIONS

A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov, N.V. Stankevich

A simple autonomous three-dimensional system is introduced that demonstrates quasiperiodic self-oscillations and has as attractor a two-dimensional torus. The computing illustrations of quasiperiodic dynamics are presented: phase portraits, Fourier spectrums, graphics of Lyapunov exponents. The existing of Arnold tongues on the parametric plane and transition from quasiperiodic dynamics to chaos through destruction of invariant curve in the Poincare section are shown.

Keywords: Attractor, torus, quasiperiodic oscillations, Lyapunov exponent.

Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Лауреат гранта Президента Российской Федерации для молодых российских ученых – докторов наук. Лауреат персонального гранта Фонда содействия отечественной науки. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика». Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и Лицея прикладных наук СГУ, 10 учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002).



410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: apkuz@rambler.ru

Кузнецов Сергей Петрович – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). С 1988 – сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, в настоящее время – заведующий лабораторией теоретической нелинейной динамики. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиофизика. Профессор кафедры динамических систем. Автор учебно-научной монографии «Динамический хаос» и учебника «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 180 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под руководством С.П. Кузнецова защищены семь кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994–1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».



410019, Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН
им. В.А. Котельникова
E-mail: spkuz@rambler.ru

Станкевич Наталья Владимировна – родилась в 1985 году. С 2000 по 2002 год обучалась в Лицее прикладных наук. В 2002 году поступила в Саратовский госуниверситет на факультет нелинейных процессов. В 2007 году закончила университет с красным дипломом. В настоящее время аспирант факультета нелинейных процессов СГУ. Занимается исследованием особенностей синхронизации короткими импульсами в многомерных автоколебательных системах. Автор более 30 публикаций, в том числе 10 статей в российских и зарубежных журналах. В 2009 году получила поддержку Германской службы академических обменов (DAAD) и прошла стажировку в научной группе Аркадия Пиковского (г. Потсдам)



410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: stankevichnv@mail.ru



СИНХРОНИЗАЦИЯ СВЯЗАННЫХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С НЕИДЕНТИЧНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

А.П. Кузнецов, Ю.П. Емельянова, Е.П. Селезнев

Рассматривается синхронизация автоколебательных осцилляторов ван дер Поля в случае неидентичности по управляющим параметрам и уровню нелинейной диссипации. Показано, что в такой системе возможен эффект смены доминирующего осциллятора. Этот эффект приводит к характерной форме основного языка синхронизации. Представлены результаты экспериментов со связанными радиофизическими автогенераторами, которые подтверждают результаты, полученные численным моделированием и аналитическим исследованием в рамках фазового приближения.

Ключевые слова: Синхронизация, осциллятор ван дер Поля, гибель колебаний, карта динамических режимов.

Введение

Система связанных осцилляторов ван дер Поля является основной моделью нелинейной теории, которая демонстрирует явление взаимной синхронизации. Она интересна для исследователей как с точки зрения теории синхронизации, так и с точки зрения возможных приложений (см. монографию [1] и приведенные ниже ссылки). Система двух связанных осцилляторов ван дер Поля изучалась (см., например, [2–4]) для случая диссипативной связи между осцилляторами, [5–8] – для случая слабой инерционной (реактивной) связи, [9,10] – для сильной инерционной связи. Система связанных осцилляторов ван дер Поля использовалась при моделировании биологических и химических процессов [4,5,11–13]. В работах [6,14,15] было представлено описание системы с помощью фазового уравнения Адлера. Интерес к такой задаче, однако, не ослабевает, поскольку обнаруживаются все новые ее аспекты и новые колебательные эффекты.

Как с прикладной, так и с фундаментальной точки зрения, важно управлять режимами синхронизации связанных автоколебательных осцилляторов. В традиционной постановке задачи о связанных осцилляторах обычно предполагают осцилляторы различающимися лишь по величине их частотной расстройки. В работах

[14–16] обращено внимание на важность случая, когда взаимодействующие подсистемы характеризуются разными по величине параметрами, отвечающими за отрицательное трение в изолированных подсистемах. В работах [17,18] было показано, что для таких систем устройство плоскости параметров (частотная расстройка – величина связи) характеризуется существенными особенностями. На ней появляется новая, переходная область, разделяющая квазипериодические режимы и режим «гибели колебаний». В этом случае можно говорить о своеобразном режиме «широкополосной синхронизации», в основе которого лежит доминирование одного осциллятора над другим [17,18].

В настоящей статье показано, что неидентичность осцилляторов по другим параметрам позволяет существенно влиять на картину синхронизации. Будем считать различающимися параметры нелинейной диссипации, отвечающие за ограничение неустойчивости в системе. Оказывается, что, если уменьшать нелинейную диссипацию, ограничивающую амплитуду колебаний второго осциллятора, то можно добиться того, что при малой связи станет доминирующим уже этот осциллятор. В промежуточной по величине связи области оба осциллятора будут равноправны. Таким образом, в системе возможен эффект смены «лидирующего» осциллятора, который и исследован далее как численными методами, так и аналитическими в рамках фазового уравнения.

Предпринято также экспериментальное исследование возможности широкополосной синхронизации в системе связанных радиофизических генераторов ван дер Поля. Кроме того, экспериментально установлены особенности синхронизации автогенераторов с разной величиной нелинейной диссипации.

1. Неидентичность по управляющим параметрам

Используем следующую систему дифференциальных уравнений, описывающую взаимодействие двух неидентичных осцилляторов ван дер Поля:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - (\lambda_1 - \gamma_1 x^2) \frac{dx}{dt} + x + \mu \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \right) &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} - (\lambda_2 - \gamma_2 y^2) \frac{dy}{dt} + (1 + \delta)y + \mu \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь λ_1 и λ_2 – параметры, характеризующие отрицательное трение в автономных осцилляторах; γ_1 и γ_2 – параметры нелинейной диссипации; δ – частотная расстройка автономного второго осциллятора относительно первого; μ – коэффициент диссипативной связи.

Для изолированных осцилляторов на основе квазигармонического приближения [1,19] нетрудно получить оценку размеров предельных циклов осцилляторов¹:

$$R_1 \approx 2\sqrt{\frac{\lambda_1}{\gamma_1}}, \quad R_2 \approx 2\sqrt{\frac{\lambda_2}{\gamma_2}}. \quad (2)$$

Таким образом, регулируя параметры λ_1 , λ_2 , γ_1 и γ_2 , можно управлять относительным размером предельных циклов автономных осцилляторов. Один из этих

¹Формально она справедлива только для малых λ , но по порядку величины может использоваться и для $\lambda \approx 1$.

параметров, однако, может быть убран перенормировкой, так что далее полагаем $\gamma_1 = 1$ и $\gamma_2 = \gamma$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - (\lambda_1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x + \mu \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \right) &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} - (\lambda_2 - \gamma y^2) \frac{dy}{dt} + (1 + \delta)y + \mu \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Представим, прежде всего, результаты компьютерного исследования пространства параметров системы (3). Для этого используем метод карт динамических режимов [20]. В его рамках карты системы (3) строятся следующим образом. При проведении расчетов выполняется сканирование плоскости параметров (частотная расстройка δ – величина связи μ) с достаточно малым шагом по двум координатным осям. В каждой точке этой плоскости строится сечение Пуанкаре системы (3), которое, как известно, представляет собой некоторую поверхность в фазовом пространстве [20,21]. Поскольку исследуемая система характеризуется четырехмерным фазовым пространством (x, \dot{x}, y, \dot{y}) , в качестве сечения Пуанкаре будет выступать трехмерная гиперповерхность, заданная некоторым дополнительным условием, например, равенством нулю скорости второго осциллятора $\dot{y} = 0$. При этом учитываются траектории, пересекающие секущую поверхность только в одном направлении. В результате такой процедуры исходной дифференциальной системе оказывается поставленным в соответствие, фактически, некоторое дискретное отображение. Затем численно находится период цикла этого отображения. С этой целью определяется номер итерации, начиная с которой в численных расчетах последовательность точек в сечении Пуанкаре повторяется с некоторой фиксированной, но достаточно высокой точностью. В соответствии с определенным таким образом периодом каждая точка плоскости параметров окрашивалась в свой оттенок серого цвета. Для некоторых основных областей периоды циклов в сечении Пуанкаре обозначены цифрами на картах. Квазипериодические и хаотические режимы в сечении Пуанкаре периода не имеют, то есть изображающая точка в сечении не повторяет никогда своей траектории. На рисунках такие режимы обозначались белым цветом.

На рис. 1 показана полученная таким образом карта динамических режимов на плоскости (частотная расстройка δ – величина связи μ) для идентичных осцилляторов ван дер Поля (3). На ней видны следующие характерные области:

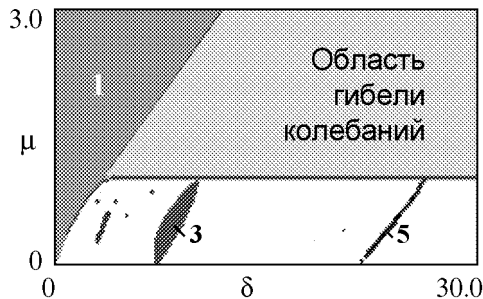


Рис. 1. Карта динамических режимов, построенная для системы (3) при $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\gamma = 1$

• основной язык синхронизации периода 1;

• область квазипериодических режимов со встроенной системой высших языков синхронизации;

• область эффекта «гибели колебаний» [1,2], которой отвечает устойчивость состояния равновесия в начале координат при наличии достаточно сильной диссипативной связи.

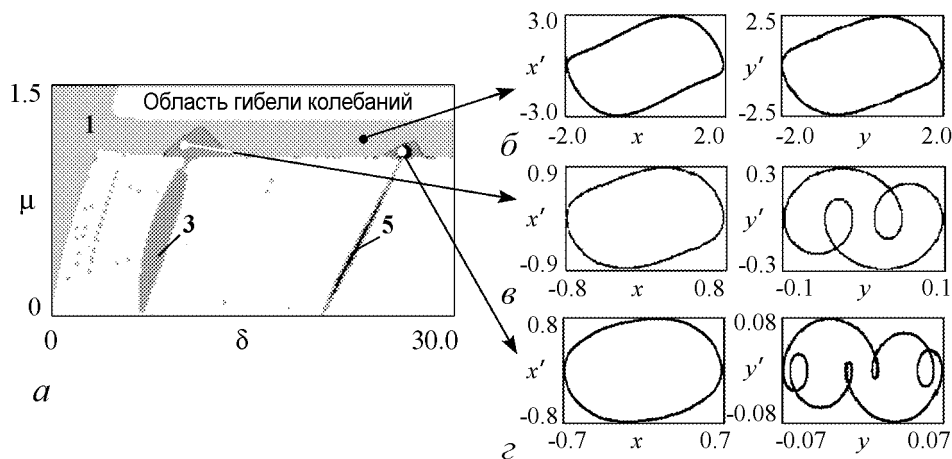


Рис. 2. Карта динамических режимов (а), построенная для системы (3) при $\lambda_1 = 1.25, \lambda_2 = 1, \gamma = 1$, и фазовые портреты в характерных точках плоскости параметров (б-з)

Различие значений управляющих параметров λ_1 и λ_2 связанных осцилляторов ван дер Поля приводит к изменению устройства плоскости параметров (δ, μ) . На рис. 2 представлена карта динамических режимов для неидентичных подсистем, когда $\lambda_1 = 1.25, \lambda_2 = 1$, а также несколько характерных фазовых портретов первого и второго осцилляторов.

Граница между областями гибели колебаний и квазипериодических режимов на рис. 2 уже является не линией, а представляет собой полосу конечной ширины по коэффициенту связи $\lambda_2 < \mu < \lambda_1$, безгранично простирающуюся в область возрастающей частотной расстройки. Если двигаться внутри этой полосы, увеличивая собственную частоту второго осциллятора, то можно наблюдать синхронные режимы, отличающиеся на фазовых портретах числом «оборотов» фазовой траектории второго осциллятора, что демонстрируют приведенные на рис. 2 фазовые портреты. Соответствующие области на карте выглядят как «размытые» вершины языков синхронизации.

Причина особого устройства области $\lambda_2 < \mu < \lambda_1$ на качественном уровне может быть объяснена следующим образом. В этом случае диссипативная связь достаточно велика, чтобы компенсировать возбуждение второго осциллятора. Первый же осциллятор остается все еще возбужденным. По этой причине он доминирует над вторым. В этом плане очень характерно соотношение масштабов на нижней паре фазовых портретов (рис. 2, з). Можно видеть, что размер предельного цикла первого осциллятора на порядок больше, чем второго.

2. Неидентичность по параметрам нелинейной диссипации

Перейдем теперь к случаю, когда осцилляторы являются неидентичными по параметрам нелинейной диссипации. Оценка (2) наводит на мысль рассмотреть случай, когда нелинейная диссипация второго осциллятора существенно меньше, чем первого. В этом случае размер его предельного цикла должен увеличиться, и осцилляторы могут оказаться равноправными даже при наличии заметной диссипативной связи.

На рис. 3, *a–в* представлены карты динамических режимов, построенные для системы (3) при $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ и разных значениях параметра нелинейной диссипации γ . Видно, что неидентичность по величине нелинейной диссипации приводит к существенным изменениям в устройстве плоскости параметров (частотная расстройка – величина связи). У языков синхронизации происходит образование выступов в сторону больших значений частотной расстройки. Размер выступа вдоль линии ча-

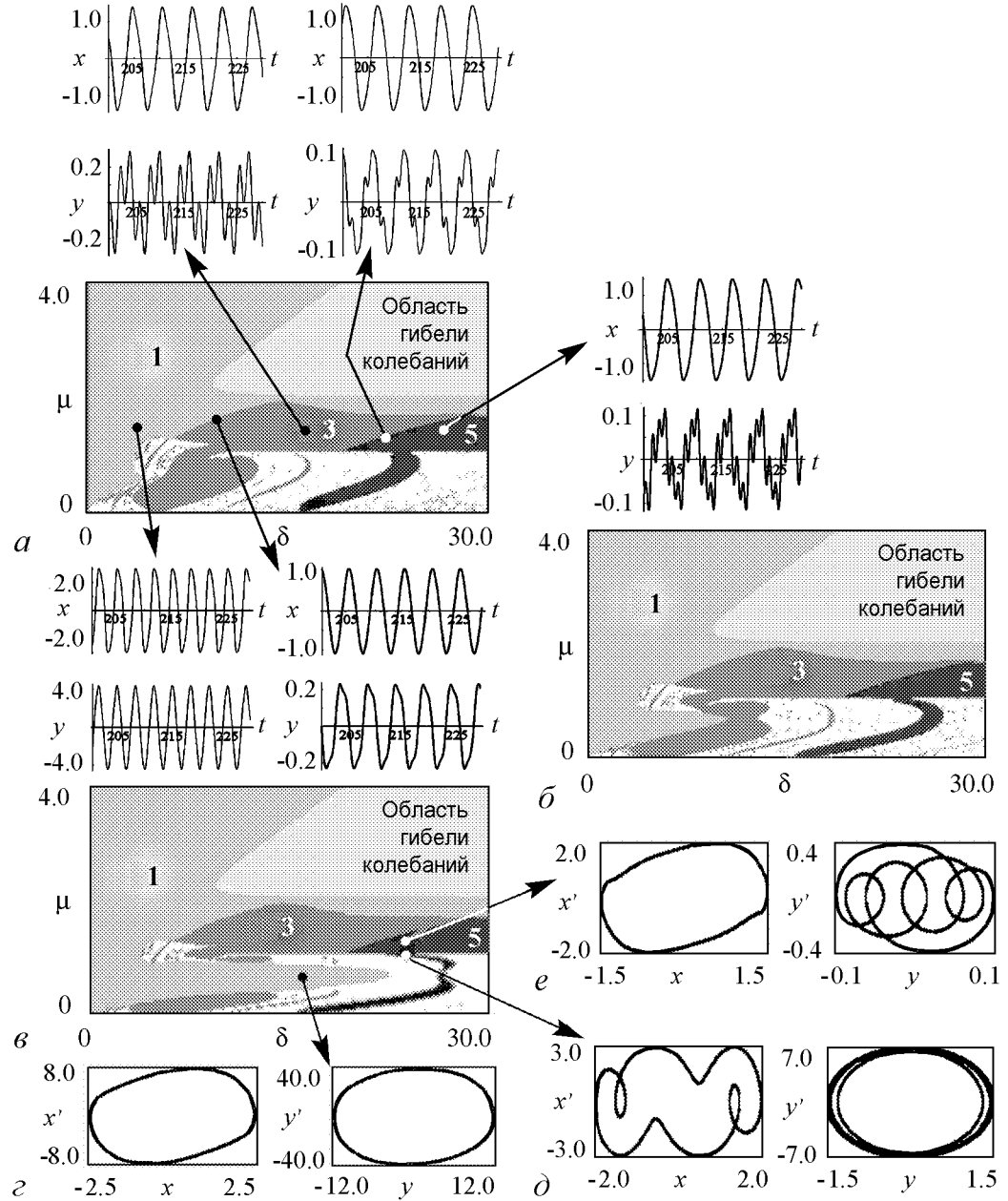


Рис. 3. Карты динамических режимов системы (3) при $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\gamma = 0.05$ (*a*), $\gamma = 0.02$ (*б*), $\gamma = 0.01$ (*в*). На вставках к рис. *a* – характерные реализации первого и второго осцилляторов в области $\mu > \lambda_2$. На вставках к рис. *в* – фазовые портреты в характерных точках плоскости параметров (*г–е*)

стотной расстройке увеличивается по мере уменьшения параметра γ . На рис. 3, б, в видно, что основной язык синхронизации (цифра 1 на карте) в области малой связи очень резко расширяется, а с ростом величины связи сильно уменьшается по ширине. При $\mu \approx \lambda_2$ граница области синхронизации снова уходит в область больших расстройек. В результате возникает специфическая форма границы основного языка синхронизации с «перетяжкой», напоминающая зеркально отраженную букву S.

Наблюдаемая картина имеет следующее физическое объяснение. В области малой связи различие осцилляторов по управляющим параметрам не существенно. Однако за счет очень малой относительной нелинейной диссипации второй осциллятор имеет гораздо больший размер предельного цикла, чем первый осциллятор, и доминирует над ним. В свою очередь, при переходе через линию $\mu = \lambda_2$ автоколебания второго осциллятора будут «погашены» за счет диссипативной связи. Теперь начнет доминировать первый осциллятор. В промежуточной области по величине связи осцилляторы могут быть равноправными.

Сказанное подтверждают фазовые портреты на рис. 3. На рис. 3, г можно видеть ситуацию, отвечающую колебаниям осцилляторов внутри характерного «выступа» основного языка синхронизации. При этом размер аттрактора второго осциллятора заметно больше, чем у первого (см. масштабы по осям координат). Таким образом, второй осциллятор доминирует. Эта картина как раз имеет место внутри S-образной области при небольшой связи. Рис. 3, д отвечает ситуации $\mu \approx \lambda_2$. Можно видеть, что размеры предельных циклов первого и второго осцилляторов примерно сравнялись. Тем не менее, имеется существенное отличие от аналогичных фазовых портретов на рис. 2, г, где существенно возмущенным выглядит фазовый портрет второго осциллятора, а фазовый портрет первого близок по форме к случаю изолированного осциллятора. На рис. 3, д имеет место противоположная ситуация. Далее, при смещении по величине связи внутрь полосы «широкополосной синхронизации» переходим от рис. 3, д к рис. 3, е. Теперь возмущенным выглядит фазовый портрет второго осциллятора, при этом его размер заметно уменьшился. Это означает, что в системе сменился «лидер» – теперь доминирует первый осциллятор.

3. Бифуркационный анализ неидентичных осцилляторов

Для более полного описания наблюдаемой картины представим также найденные численно линии основных бифуркаций системы (3) для $\gamma = 0.05$ и $\gamma = 0.015$ (рис. 4). Можно видеть, что в области $\mu < \lambda_2$ картина бифуркаций соответствует полученным картам динамических режимов. Для улучшения восприятия на рис. 4 цифры, обозначающие области периода 1 и 3, показаны в кружочках, цвет заполнения которых выбран таким же, как на картах динамических режимов этих периодов. На рис. 4, а можно видеть, что граница основного языка синхронизации при малых значениях связи определяется линией седло-узловой бифуркации SN, которая, однако, заканчивается в точке коразмерности два, R_1 (в точке резонанса 1 : 1, по терминологии [22]). Ее продолжает линия бифуркации Неймарка–Сакера NS, которая теперь ограничивает основную область синхронизации. Линия Неймарка–Сакера продолжается и при больших амплитудах, поворачивая в сторону больших частотных расстройек. При этом, однако, она состоит из отрезков, ограниченных точками R_1 .

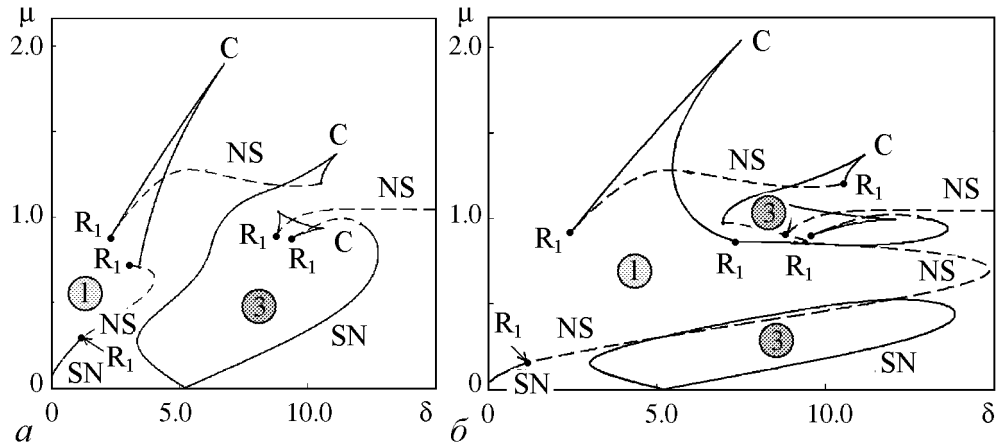


Рис. 4. Бифуркационные линии и точки системы (3) при $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\gamma = 0.05$ (а), $\gamma = 0.015$ (б); SN – линии седло-узловых бифуркаций, NS – линии бифуркаций Неймарка–Сакера, C – точки сборки, R_1 – точки резонанса 1 : 1

Переход от рис. 4, а к рис. 4, б иллюстрирует, как при уменьшении параметра неидентичности по нелинейной диссипации γ , величина «выступа» области основной синхронизации периода 1 увеличивается настолько, что она достигает языка периода 3. В результате последний распадается на две изолированных области – при малой и большой величине параметра связи. Эти же особенности видны и на картах динамических режимов рис. 3, б, в.

С другой стороны, имеющие место на картах режимов при $\mu > \lambda_2$ границы областей, обозначенных цифрами 1, 3, 5, не связаны с какими-либо бифуркациями. В то же время, при переходе из одной такой области в другую тип режима испытывает определенные перестройки. Этот факт иллюстрируют реализации $x(t)$ и $y(t)$ первого и второго осцилляторов на вставках на рис. 3, а. Можно видеть, что определенные формальным образом периоды колебаний² первого и второго осцилляторов совпадают, так что во всей этой полосе с этой точки зрения можно говорить о синхронизации с соотношением частот осцилляторов 1 : 1. Однако при переходе из областей, обозначенных на карте как 1, 3, 5, реализация второго осциллятора наряду с основным периодом демонстрирует заметные осцилляции с утроенной частотой, частотой в пять раз больше и т.д. Таким образом, в спектре колебаний второго осциллятора будут существенно проявляться и эти частотные составляющие, а не только основная частота. В этом особенность «переходной» области $\lambda_2 < \mu < \lambda_1$. На фазовых портретах, как мы отмечали, такие переходы связаны с появлением у аттрактора петель, которые пересекают ось $\dot{y} = 0$.

4. Анализ неидентичных осцилляторов в квазигармоническом приближении

Мы обсудили динамику системы в рамках исходной системы уравнений (3) и продемонстрировали, что в системе возможны режимы, связанные с доминированием одного осциллятора над другим и сменой лидирующего осциллятора при усло-

²Здесь они понимаются в традиционном смысле, то есть как временные периоды зависящих от времени функций.

вии неидентичности осцилляторов по управляющим параметрам λ_1, λ_2 и параметру нелинейной диссипации. Были рассмотрены случаи, когда параметры λ_1, λ_2 имеют величину порядка единицы. Рассмотрим теперь случай, когда эти параметры являются малыми. Это позволяет применить квазигармоническое приближение [1,19] и провести аналитическое рассмотрение. Мы покажем, что анализ в этом случае также выявляет характерные режимы доминирования разных осцилляторов.

Итак, пусть параметры λ_1, λ_2 малы. Вслед за [19] представим переменные в виде

$$x = \frac{1}{2}(ae^{it} + a^*e^{-it}), \quad y = \frac{1}{2}(be^{it} + b^*e^{-it}), \quad (4)$$

где $a(t)$ и $b(t)$ – комплексные амплитуды, медленно меняющиеся на фоне осциллирующего множителя e^{it} .

Вместо двух действительных функций $x(t)$ и $y(t)$ мы ввели две комплексные, поэтому их можно подчинить дополнительному условию [19]

$$\frac{1}{2}(\dot{a}e^{it} + \dot{a}^*e^{-it}) = 0, \quad \frac{1}{2}(\dot{b}e^{it} + \dot{b}^*e^{-it}) = 0. \quad (5)$$

Подставляя (4) в (3), умножая обе части на e^{-it} и отбрасывая быстроосциллирующие слагаемые, получаем следующие укороченные уравнения для комплексных амплитуд:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\lambda_1 a}{2} - \frac{|a|^2 a}{8} - \frac{\mu}{2}(a - b), \\ \frac{db}{dt} &= \frac{\lambda_2 b}{2} - \frac{\gamma |b|^2 b}{8} - \frac{\mu}{2}(b - a) + \frac{i\delta b}{2}. \end{aligned} \quad (6)$$

В случае $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ параметр λ может быть убран перенормировкой, так что динамика системы не зависит от его величины [14,16]. В нашем случае можно устранить перенормировкой только один из управляющих параметров, так что решение будет зависеть от отношения $\nu = \lambda_1/\lambda_2$. Введем следующую замену переменных и параметров:

$$a = 2\sqrt{\lambda_2}z, \quad b = 2\sqrt{\lambda_2}w, \quad t = 2\pi/\lambda_2, \quad \mu = \lambda_2\bar{\mu}, \quad \delta = \lambda_2\bar{\delta}. \quad (7)$$

Это приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &= \nu z - |z|^2 z - \mu(z - w), \\ \frac{dw}{d\tau} &= w - \gamma |w|^2 w - \mu(w - z) + i\delta w. \end{aligned} \quad (8)$$

Для сокращения записи черту над новыми нормированными параметрами опускаем. В полученных нормированных уравнениях (8) все параметры теперь можно полагать порядка единицы [16].

Получим теперь уравнения для действительных амплитуд и фаз осцилляторов. С этой целью полагаем $z = Re^{i\varphi_1}$ и $w = re^{i\varphi_2}$, где R, r и φ_1, φ_2 – действительные амплитуды и фазы. Вводя также относительную фазу осцилляторов $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$,

получим

$$\begin{aligned}\frac{dR}{d\tau} &= (\nu - \mu)R - R^3 + \mu r \cos \psi, \\ \frac{dr}{d\tau} &= (1 - \mu)r - \gamma r^3 + \mu R \cos \psi, \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= \delta - \mu \left(\frac{r}{R} + \frac{R}{r} \right) \sin \psi.\end{aligned}\tag{9}$$

Это обобщение известных уравнений квазигармонического приближения [1] на случай неидентичных осцилляторов.

Из стационарной системы уравнений (9) при условии малости слагаемых $\mu R \cos \psi$ и $\mu r \cos \psi$ получим оценки для установившихся амплитуд предельных циклов осцилляторов

$$R \approx \sqrt{\nu - \mu}, \quad r \approx \sqrt{\frac{1 - \mu}{\gamma}}.$$

Подставляя эти соотношения в фазовое уравнение системы (9), получаем уравнение Адлера для относительной фазы осцилляторов

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \delta - \mu \left(\sqrt{\frac{1 - \mu}{\gamma(\nu - \mu)}} + \sqrt{\frac{\gamma(\nu - \mu)}{1 - \mu}} \right) \sin \psi.\tag{10}$$

В стационарном случае

$$\delta = \mu \left(\sqrt{\frac{1 - \mu}{\gamma(\nu - \mu)}} + \sqrt{\frac{\gamma(\nu - \mu)}{1 - \mu}} \right) \sin \psi.\tag{11}$$

Отсюда при $\sin \psi = 1$ следует выражение для границы основного языка синхронизации:

$$\delta = \mu \sqrt{\frac{1 - \mu}{\gamma(\nu - \mu)}} + \mu \sqrt{\frac{\gamma(\nu - \mu)}{1 - \mu}}.\tag{12}$$

При этом должны выполняться условия $\mu < 1$ и $\mu < \nu$.

Для случая идентичных осцилляторов $\nu = 1$, $\gamma = 1$ из (10) получаем уравнение для относительной фазы осцилляторов

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \delta - 2\mu \sin \psi.\tag{13}$$

Это хорошо известный результат для диссипативно связанных идентичных осцилляторов [1]. Уравнение (13) позволяет определить границу основного языка синхронизации в этом случае³

$$\delta = 2\mu\tag{14}$$

На рис. 5 эта граница показана пунктиром.

Перейдем теперь к случаю неидентичных по управляющим параметрам осцилляторов. На рис. 5 сплошной линией показана найденная с помощью (12) граница

³В силу симметрии при анализе фазового уравнения будем рассматривать только область положительных расстройок δ .

основного языка синхронизации при $\nu = \lambda_1/\lambda_2 = 2$, $\gamma = 1$. У своего основания в области малой связи μ язык имеет традиционную форму «угла». Действительно, при малых μ из (12) получаем

$$\delta \approx \mu \sqrt{\frac{1}{\nu}} + \mu \sqrt{\nu} = \mu \left(\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} + \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \right). \quad (15)$$

Визуально языки синхронизации на рис. 5 имеют одинаковый наклон у своего основания. Это связано с тем, что множитель $\left(\sqrt{\lambda_2/\lambda_1} + \sqrt{\lambda_1/\lambda_2} \right)$ минимален при равенстве $\lambda_1 = \lambda_2$. Соответственно, он мало меняется при вариации отношения $\nu = \lambda_1/\lambda_2$. На самом деле, язык оказывается несколько более широким, чем в случае идентичных подсистем.

Наиболее существенные изменения наблюдаются в области больших значений расстройки δ . В этой области найденная с помощью соотношения (12) граница языка асимптотически стремится к линии $\mu = 1$. (В размерных переменных с учетом (7) это отвечает $\mu \rightarrow \lambda_2$.)

Добавим теперь неидентичность и по величине нелинейной диссипации. На рис. 6, а показана полученная с помощью (12) граница основного языка синхронизации при $\nu = \lambda_1/\lambda_2 = 2$, $\gamma = 0.01$. Она имеет характерный вид с «перетяжкой». Покажем, что такой вид границы обусловлен сменой лидирующего осциллятора.

Формула (12) содержит два слагаемых:

$$\delta = \delta_1(\mu) + \delta_2(\mu) = \mu \sqrt{\frac{\gamma(\nu - \mu)}{1 - \mu}} + \mu \sqrt{\frac{1 - \mu}{\gamma(\nu - \mu)}}. \quad (16)$$

Графики функций $\delta_1(\mu)$ и $\delta_2(\mu)$ показаны на рис. 6, б, так что кривая рис. 6, а в соответствии с (16) получается их суммированием по оси частотной расстройки.

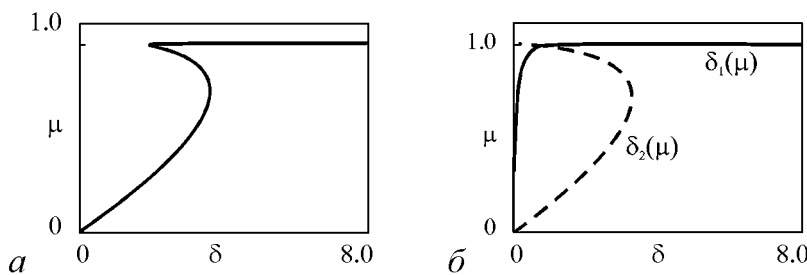


Рис. 6. Графики функций: $\delta(\mu)$ в соответствии с уравнением (16) (а); $\delta_1(\mu)$ в соответствии с уравнением (18) (сплошная линия) и $\delta_2(\mu)$ в соответствии с уравнением (19) (пунктирная линия) (б) при $\nu = 2$, $\gamma = 0.01$

Каждому из двух членов в (16) можно придать физическую интерпретацию. Действительно, «выключим» в (3) воздействие второго осциллятора на первый:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - (\lambda_1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x + \mu\frac{dx}{dt} &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} - (\lambda_2 - \gamma y^2)\frac{dy}{dt} + (1 + \delta)y + \mu\left(\frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Проводя для этого случая выкладки по приведенному выше образцу, без труда получаем выражение для границы основного языка синхронизации для системы (17):

$$\delta = \delta_1(\mu) = \mu\sqrt{\frac{\gamma(\nu - \mu)}{1 - \mu}}. \quad (18)$$

Таким образом, первое слагаемое в уравнении (16) отвечает ситуации, когда второй осциллятор не действует на первый, то есть первый доминирует. Граница языка (18) показана на рис. 6, б сплошной линией. Качественно она соответствует линии «б» на рис. 5 за тем лишь исключением, что язык у основания очень узкий за счет малой нелинейной диссипации второго осциллятора.

Совершенно аналогично можно показать, что случаю выключенного воздействия первого осциллятора на второй отвечает уравнение

$$\delta = \delta_2(\mu) = \mu\sqrt{\frac{1 - \mu}{\gamma(\nu - \mu)}}. \quad (19)$$

Таким образом, второе слагаемое в (16) соответствует доминированию второго осциллятора.

График функции $\delta_2(\mu)$ также показан на рис. 6, б пунктирной линией. Объясним его вид. В области малых μ

$$\delta_2(\mu) \approx \mu\sqrt{\frac{1}{\gamma\nu}} = \mu\sqrt{\frac{\lambda_2}{\gamma\lambda_1}}. \quad (20)$$

Эта оценка отвечает невозмущенным связью орбитам осцилляторов $R \approx \sqrt{\nu}$, $r \approx \sqrt{1/\gamma}$. При этом реализуется режим вынужденной синхронизации первого осциллятора сигналом второго, размер предельного цикла которого при малых γ очень велик. По этой причине форма языка у основания на плоскости (δ, μ) имеет вид традиционного «угла», но наклон его, в соответствии с (20), мал.

С ростом уровня связи начинает заметно уменьшаться орбита второго осциллятора, обращаясь в ноль при условии $\mu = 1$. В этом случае уже не проявляется заметный эффект синхронизации и, в соответствии с (19) и рис. 6, б (пунктирная линия), ширина области синхронизации стремится к нулю.

Суммарный график, учитывающий взаимное влияние осцилляторов, приведен на рис. 6, а. Можно видеть, как два описанных механизма синхронизации в сумме приводят к характерной границе языка с «перетяжкой». То есть, форма языка, действительно, связана со сменой доминирующего осциллятора при возрастании уровня диссипативной связи.

Таким образом, в случае малых управляющих параметров квазигармонический анализ также выявляет картину смены лидирующего осциллятора, что на плоскости параметров (частотная расстройка – величина связи) приводит к возникновению характерной «перетяжки» у основного языка синхронизации. При малых λ во всем диапазоне изменения величины связи границей языка является линия седло-узловой бифуркации. При λ порядка единицы, как мы видели в п. 3, с ростом связи она заменяется линией бифуркации Неймарка–Сакера.

5. Экспериментальная система с неидентичными управляющими параметрами

Перейдем теперь к описанию экспериментов. Исследованная схема связанных генераторов показана на рис. 7. Каждый генератор включает в себя колебательный контур, образованный катушкой индуктивности $L_{1,2}$ и конденсатором $C_{1,2}$, линейное отрицательное сопротивление ($-R_{1,2}$), которое обеспечивает возбуждение автоколебаний, и дополнительное сопротивление в виде шести полупроводниковых диодов, которое вносит необходимую нелинейность. Для создания отрицательного сопротивления использовался операционный усилитель. В качестве элемента связи используется переменный резистор R .

Продемонстрируем применимость уравнений ван дер Поля к данной системе. По закону Кирхгофа сумма токов в узлах, обозначенных U_1 и U_2 на рис. 7, равна нулю:

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \frac{U_2 - U_1}{R},$$

$$\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 + \tilde{I}_3 + \tilde{I}_4 = \frac{U_1 - U_2}{R}.$$
(21)

Здесь I_1 – ток через нелинейное сопротивление в первом генераторе, I_2 – ток через отрицательное сопротивление ($-R_1$), I_3 – ток через катушку индуктивности L_1 , I_4 – ток через конденсатор C_1 . Знаком «тильда» обозначены соответствующие токи во втором контуре.

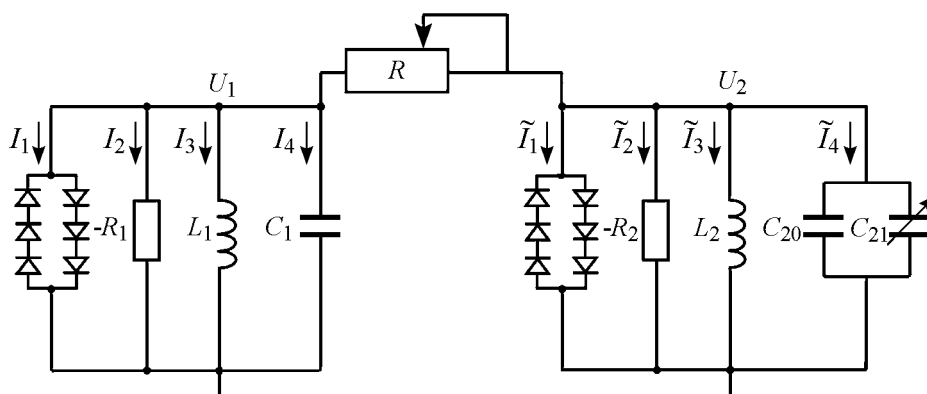


Рис. 7. Схема двух связанных автогенераторов с различными управляющими параметрами

Подставляя в соотношения (21) выражения для токов в каждой из ветвей цепи и дифференцируя соответствующие уравнения по времени, нетрудно получить

$$\begin{aligned} \frac{d^2U_1}{dt^2} - \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} - f'(U_1) \right) \frac{dU_1}{dt} + \frac{1}{C_1 L_1} U_1 &= \frac{1}{RC_1} \left(\frac{dU_2}{dt} - \frac{dU_1}{dt} \right), \\ \frac{d^2U_2}{dt^2} - \frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_2} - f'(U_2) \right) \frac{dU_2}{dt} + \frac{1}{C_2 L_2} U_2 &= \frac{1}{RC_2} \left(\frac{dU_1}{dt} - \frac{dU_2}{dt} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Для описания вольтамперной характеристики диода можно использовать выражение $f(U) = I_0(e^{U/\varphi} - 1)$, где I_0 – ток насыщения диода, $\varphi = kT/e$ – температурный потенциал, $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана, T – температура, $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд электрона. Три последовательно включенных диода будут описываться характеристикой $f(U) = I_0(e^{U/3\varphi} - 1)$, а система встречно-параллельных диодов – соотношением $f(U) = I_0(e^{U/3\varphi} - e^{-U/3\varphi})$. Разложим экспоненту в ряд до кубических членов:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3. \quad (23)$$

Тогда $f(U) = I_0 \left(\frac{2U}{3\varphi} + \frac{U^3}{81\varphi^3} \right)$ и $f'(U) = I_0 \left(\frac{2}{3\varphi} + \frac{U^2}{27\varphi^3} \right)$, а система (22) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2U_1}{dt^2} - \frac{1}{C_1} \left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{2I_0}{3\varphi} \right) - \frac{I_0}{27\varphi^3} U_1^2 \right] \frac{dU_1}{dt} + \frac{1}{L_1 C_1} U_1 &= \frac{1}{RC_1} \left(\frac{dU_2}{dt} - \frac{dU_1}{dt} \right), \\ \frac{C_2}{C_1} \frac{d^2U_2}{dt^2} - \frac{1}{C_1} \left[\left(\frac{1}{R_2} - \frac{2I_0}{3\varphi} \right) - \frac{I_0}{27\varphi^3} U_2^2 \right] \frac{dU_2}{dt} + \frac{1}{L_2 C_1} U_2 &= \frac{1}{RC_1} \left(\frac{dU_1}{dt} - \frac{dU_2}{dt} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Итак, мы имеем уравнения, аналогичные по структуре (3), но в размерной форме. Регулируя отрицательные сопротивления R_1 и R_2 , можно варьировать управляющие параметры отдельных автогенераторов. Величину связи можно менять, варьируя R , причем для сопоставления теории и эксперимента следует в качестве параметра связи использовать $1/R$.

В эксперименте $R_1 = -410$ Ом, $C_1 = 20$ нФ, $L_1 = L_2 = 0.947$ Гн. Общее сопротивление R меняется от 1 до 310 кОм, а емкость C_2 – от 1.05 до 21.8 нФ. Неидентичность генераторов достигается путем изменения отрицательного сопротивления второго генератора R_2 на небольшую величину от значения $R_1 = -410$ Ом. В качестве частотной расстройки используется параметр $\delta = C_1/C_2$.

Полученная экспериментально карта динамических режимов представлена на рис. 8. На ней присутствуют те же характерные области, что и на картах режимов, полученных с помощью численных методов: область основной синхронизации, язык синхронизации периода 3, области гибели колебаний и квазипериодических режимов. В случае неидентичных по величине отрицательного сопротивления генераторов граница между областью гибели колебаний и квазипериодических режимов из линии превращается в полосу конечной ширины по параметру связи, далеко простирающуюся в сторону увеличения частотной расстройки.

На рис. 8 представлены также фазовые портреты, построенные в характерных точках плоскости параметров, полученные с помощью электронного осциллографа.

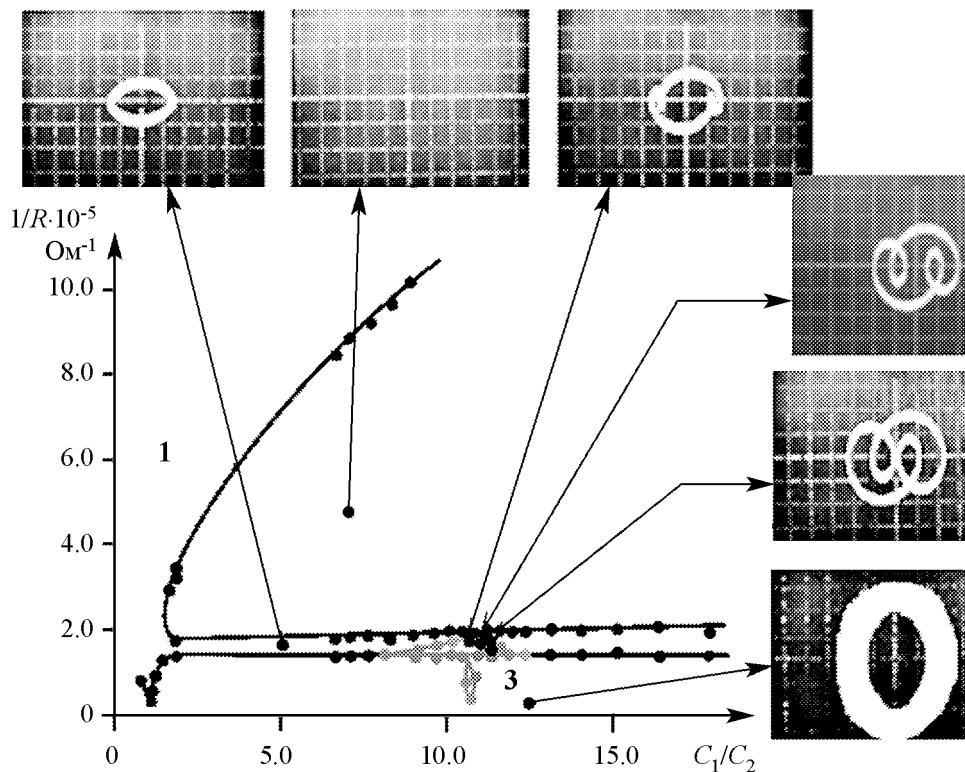


Рис. 8. Экспериментальная карта динамических режимов системы связанных автогенераторов с различными управляющими параметрами и фазовые портреты в характерных точках плоскости параметров, сфотографированные с экрана осциллографа

Внутри области гибели колебаний мы видим точку на экране осциллографа. Режиму, обозначенному на плоскости параметров цифрой 1, отвечает простой «однооборотный» предельный цикл. При продвижении внутри полосы на фазовом портрете второго генератора можно наблюдать характерное увеличение числа петель. Квазипериодический режим выглядит как «замазанный» предельный цикл. При этом полученная экспериментально карта на рис. 8 хорошо согласуется с полученной численно картой динамических режимов на рис. 2.

6. Экспериментальная система с неидентичными параметрами нелинейной диссипации

Для экспериментальной проверки результатов, полученных для неидентичных по параметру γ осцилляторов, необходимо обеспечить разный уровень нелинейной диссипации автогенераторов. Это достигалось включением разного количества диодов. В одном генераторе их было десять, а во втором – два. Тогда для вольт-амперной характеристики системы диодов

$$\begin{aligned} f_1(U) &= I_0(e^{U/5\varphi} - e^{-U/5\varphi}), \\ f_2(U) &= I_0(e^{U/\varphi} - e^{-U/\varphi}). \end{aligned} \quad (25)$$

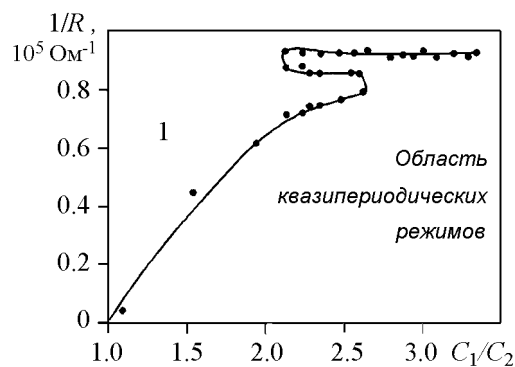


Рис. 9. Экспериментально полученная граница области основной синхронизации и квазипериодических режимов для автогенераторов с различными управляющими параметрами и неидентичных по уровню нелинейной диссипации

расстройка C_1/C_2 – уровень диссипативной связи $1/R$) показана на рис. 9. Можно видеть, что в эксперименте наблюдается характерная граница основного языка с «перетяжкой», выявленная как при численном исследовании системы (3), так и с помощью аналитического исследования в рамках квазигармонического приближения.

Разлагая в ряд, получим для производных

$$f'_1(U) = I_0 \left(\frac{2}{5\varphi} + \frac{U^2}{125\varphi^3} \right) + \dots,$$

$$f'_2(U) = I_0 \left(\frac{2}{\varphi} + \frac{U^2}{\varphi^3} \right) + \dots \quad (26)$$

Таким образом, отношение параметров нелинейной диссипации составляет $\gamma = 1/125 = 0.008$. Экспериментально полученная граница режима синхронизации автогенераторов с соотношением частот 1 : 1 и области квазипериодических режимов на плоскости (частотная

Заключение

Для понимания картины синхронизации автоколебательных осцилляторов важным является случай, когда осцилляторы различаются по величине параметров, управляющих бифуркацией Андронова–Хопфа и величиной нелинейной диссипации. В такой системе при наличии диссипативной связи возможно доминирование как первого, так и второго осцилляторов, а также ситуация постепенной смены доминирующего осциллятора при увеличении связи. Эти физические особенности системы существенным образом проявляются в устройстве плоскости (частотная расстройка – величина связи) осцилляторов. Отчасти эти особенности могут быть выявлены в квазигармоническом приближении, а также наблюдаются в экспериментах со связанными радиофизическими автогенераторами ван дер Поля.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 09-02-00707, а также гранта Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках Программы развития научного потенциала высшей школы № 2.1.1/1738.

Библиографический список

1. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация, фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 508 с.
2. Aronson D.G., Ermentrout G.B., Kopell N. Amplitude response of coupled oscillators // Physica D. 1990. Vol. 41. P. 403.
3. Cohen D.S., Neu J.C. Interacting oscillatory chemical reactors // Bifurcation theory

- and applications in the scientific disciplines / Ed. O. Gurel and O.E. Rössler. Ann. N.Y. Acad. Sci. 316. 1979. P. 332.
4. *Neu J.C.* Coupled chemical oscillators // SIAM J. appl. Math. 1979. Vol. 37, № 2. P. 307.
 5. *Minorsky N.* Nonlinear oscillators. Van Nostrand, 1962.
 6. *Rand R.H., Holmes P.J.* Bifurcation of periodic motions in two weakly coupled van der Pol oscillators // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1980. Vol. 15. P. 387.
 7. *Chakraborty T., Rand R.H.* The transition from phase locking to drift in a system of two weakly coupled van der Pol oscillators // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1988. Vol. 23, № 5/6. P. 369.
 8. *Chakraborty T.* Bifurcation analysis of two weakly coupled van der Pol oscillators. Doctoral thesis. Cornell University, 1986.
 9. *Storti D.W., Rand R.H.* Dynamics of two strongly coupled van der Pol oscillators // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1982. Vol. 17, № 3. P. 143.
 10. *Pastor-Diaz I., Lopez-Fraguas A.* Dynamics of two coupled van der Pol oscillators // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 52. P. 1480.
 11. *Pavlidis T.* Biological oscillators: The Mathematical Analysis. Academic press, 1973.
 12. *Poliashenko M., McKay S.R., Smith C.W.* Chaos and nonisochronism in weakly coupled nonlinear oscillators // Phys. Rev. A. 1991. Vol. 44. P. 3452.
 13. *Poliashenko M., McKay S.R., Smith C.W.* Hysteresis of synchronous – asynchronous regimes in a system of two coupled oscillators // Phys. Rev. A. 1991. Vol. 43. P. 5638.
 14. *Ivanchenko M.V., Osipov G.V., Shalfeev V.D., Kurths J.* Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators // Physica D. 2004. Vol. 189, № 1–2. P. 8.
 15. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И.* Особенности устройства пространства параметров двух связанных осцилляторов ван дер Поля–Дуффинга // Изв. Вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13, № 4. С. 3.
 16. *Кузнецов А.П., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В.* Связанные осцилляторы ван дер Поля и ван дер Поля–Дуффинга: фазовая динамика и компьютерное моделирование // Изв. Вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 4. С. 101.
 17. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И., Роман Ю.П.* Особенности синхронизации в системе связанных осцилляторов ван дер Поля, неидентичных по управляющему параметру // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33, вып. 15. С. 15.
 18. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И., Роман Ю.П.* Особенности синхронизации в системе неидентичных связанных осцилляторов ван дер Поля и ван дер Поля – Дуффинга. Широкополосная синхронизация // Изв. Вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 4. С. 3.
 19. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002. 292 с.
 20. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.

21. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
22. *Kuznetsov Yuri A.* Elements of applied bifurcation theory. New York: Springer, 1998. 593 p.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского,
СФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН*

Поступила в редакцию 22.07.2009

SYNCHRONIZATION IN COUPLED SELF-SUSTAINED OSCILLATORS WITH NON-IDENTICAL PARAMETERS

A.P. Kuznetsov, Yu.P. Emelianova, E.P. Seleznev

The particular properties of dynamics are discussed for dissipatively coupled van der Pol oscillators, non-identical in values of parameters controlling the Andronov–Hopf bifurcation and nonlinear dissipation. Possibility of a special synchronization regime in an infinitively long band between oscillator death and quasiperiodic areas is shown for such system. Non-identity of parameters of nonlinear dissipation results in specific form of the boundary of the main synchronization tongue, which looks like the mirror letter S. These physical features are partly revealed by means of quasiharmonic approximation and are observed in the experiments with coupled radio-electronic generators.

Keywords: Synchronization, van der Pol oscillator, oscillator death, dynamic regime chart.



Емельянова Юлия Павловна – родилась 17 февраля 1987 года в Венгрии г. Секешфехервар, окончила факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского с красным дипломом в 2009 году. Занимается научной работой под руководством профессора, д.ф.-м.н. А.П. Кузнецова с 2002 года. Научные интересы – исследование особенностей синхронизации в связанных осцилляторах ван дер Поля. Победитель студенческих научных конференций факультета нелинейных процессов СГУ, лауреат фонда поддержки фундаментальной физики «Династия» (2008), признана лучшим студентом ФНП в 2006/07 и 2007/08 учебных годах. Лауреат стипендии Президента РФ как «студент – отличник, проявивший выдающиеся способности в учебной и научной деятельности» (2008/09). Автор 17 публикаций, в том числе 5-ти статей в российских и международных журналах.

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

E-mail: yuliaem@gmail.com



Селезнев Евгений Петрович – родился в 1960 году в Саратове, окончил Саратовский государственный университет (1982). После окончания СГУ работает ведущим научным сотрудником Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1990) и доктора физико-математических наук (2006). Область научных интересов – радиофизика, экспериментальное исследование нелинейных явлений. Имеет более 120 научных публикаций.

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38

Саратовский филиал института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН

E-mail: evgenii_seleznev@mail.ru



БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ РЕЖИМОВ СИНХРОНИЗАЦИИ И ГАШЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ В СВЯЗАННЫХ ГЕНЕРАТОРАХ С ИНЕРЦИОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

В.В. Астахов, С.А. Коблянский, А.В. Шабунин

В работе представлены результаты исследования бифуркационных переходов к режимам синхронизации и гашения колебаний в системе двух диссипативно связанных генераторов с инерционной нелинейностью. Выявлено, что в исследуемой системе языки синхронизации могут быть двух типов: в одних имеется и область захвата, и область подавления, а в других - только область захвата. Показано, что при слабой неидентичности по параметру возбуждения языки, имеющие области подавления, объединяются и появляется возможность перехода из одного языка синхронизации в другой без бифуркаций устойчивого предельного цикла, то есть переходы между режимами синхронизации с разными числами вращения могут происходить эволюционным образом.

Ключевые слова: Синхронизация, широкополосная синхронизация, «амплитудная смерть».

Введение

Явления взаимной синхронизации и гашения колебаний (или «амплитудной смерти») в диссипативно связанных автоколебательных системах известны очень давно и наблюдаются в системах самой различной природы. Их описание и история открытий широко представлены и в научных монографиях, и в учебной литературе (см., например, [1–5]). Простейшей математической моделью связанных автоколебательных систем, которая охватывает не только явление синхронизации, но и эффект гашения, когда увеличение связи и расстройки по собственным частотам приводит к подавлению автоколебаний в каждом из генераторов, является система связанных укороченных уравнений ван дер Поля для комплексных амплитуд, которые также называются уравнениями Ландау–Стюарта [4, 6]. Детальное описание динамики этой системы можно найти в работах [4–9]. Явления синхронизации и гашения изучались не только в простейших базовых моделях, но и в более реалистичных системах различной природы. Так, например, гашение автоколебаний в связанных химических

системах рассматривалось в работе [10]. В работе [11] дан подробный бифуркационный анализ синхронных режимов (включая и эффект гашения колебаний) для модели химической системы с предельным циклом на фазовой плоскости. Исследования проводились для двух взаимодействующих колебательных систем в широкой (охватывающей языки синхронизации с различными числами вращения) области расстройек по собственным частотам.

Модели диссипативно связанных автоколебательных систем с одинаковыми параметрами возбуждения могут демонстрировать вырожденные бифуркации. Так, например, при выходе из области гашения автоколебаний наблюдается бифуркация, в результате которой из неподвижной точки рождается притягивающий двумерный тор и два седловых предельных цикла, расположенных вне тора. О таких нетипичных бифуркациях в диссипативно связанных генераторах ван дер Поля в виде системы укороченных уравнений для амплитуд и фаз и в виде полной системы связанных осцилляторов сообщалось, например, в работах [9], [12]. В этих работах было показано, что введение неидентичности по параметру возбуждения в парциальных генераторах устраняет вырожденную ситуацию. Бифуркационная линия, разделяющая область гашения от области квазипериодических колебаний, расщепляется на три: бифуркация Андронова–Хопфа для устойчивого состояния равновесия (рождение устойчивого предельного цикла), бифуркация Андронова–Хопфа для неустойчивого состояния равновесия (рождение седлового предельного цикла) и вторичная бифуркация Андронова–Хопфа (или бифуркация Неймарка–Сакера в отображении) рождения притягивающего двумерного тора из предельного цикла. Указанные результаты были получены при описании основного языка синхронизации (1 : 1).

В работах [13–17] были проведены детальные исследования режимов синхронизации и гашения автоколебаний в двух диссипативно связанных генераторах ван дер Поля и осцилляторах ван дер Поля–Дуффинга при различных значениях параметров возбуждения (как в области квазигармонических, так и ангармонических автоколебаний парциальных систем) и в широкой области расстройек по собственным частотам.

Для обозначения характерных режимов, наблюдающихся между областями гашения колебаний и квазипериодической динамики, в [15–17] был предложен термин «широкополосная синхронизация».

Вопросы о бифуркационных механизмах данных эффектов и перестройке структуры бифуркационных множеств, формирующих области синхронизации с различными числами вращения и области «амплитудной смерти», при переходе от случая идентичных по параметру возбуждения генераторов к случаю неидентичных остаются открытыми.

В данной работе представлены результаты исследования бифуркационных переходов к режимам синхронизации и гашения колебаний в системе двух диссипативно связанных генераторов с инерционной нелинейностью. Индивидуальный генератор имеет трехмерное фазовое пространство и два управляющих параметра, при вариации которых он способен демонстрировать суперкритическую бифуркацию Андронова–Хопфа и переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. Для двух связанных генераторов на плоскости управляющих параметров «коэффициент связи – расстройка по частоте» построены соответствующие линии бифуркационных значений как для случая идентичных по параметру возбуждения парциальных

генераторов, так и для случая слабой неидентичности. Показано, что в исследуемой системе языки синхронизации могут быть двух типов: в одних имеется и область захвата, и область подавления, а в других – только область захвата. При слабой неидентичности по параметру возбуждения языки, имеющие области подавления, объединяются и появляется возможность перехода из одного языка синхронизации в другой без каких-либо бифуркаций устойчивого предельного цикла. Переходы между режимами синхронизации с разными числами вращения могут происходить эволюционным образом. При проведении бифуркационного анализа динамики системы использовался пакет AUTO-2000 [18].

1. Исследуемая система

Рассмотрим бифуркационные механизмы синхронизации автоколебаний и амплитудной смерти в диссипативно связанных генераторах с инерционной нелинейностью в следующей форме:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= m_1 x_1 - p x_1 z_1 + p y_1 + \varepsilon (x_2 - x_1), \\
 \dot{y}_1 &= -x_1, \\
 \dot{z}_1 &= -g [z_1 - f(x_1)], \\
 \dot{x}_2 &= m_2 x_2 - x_2 z_2 + y_2 + \varepsilon (x_1 - x_2), \\
 \dot{y}_2 &= -x_2, \\
 \dot{z}_2 &= -g [z_2 - f(x_2)], \\
 f(x_{1,2}) &= \exp(x_{1,2}) - 1,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где $x_{1,2}$, $y_{1,2}$, $z_{1,2}$ – динамические переменные первой и второй подсистемы; $m_{1,2}$ – параметры, управляющие возбуждением автоколебаний в парциальных генераторах; g – параметр инерционности, который в наших исследованиях не менялся и был зафиксирован при $g = 0.2$; $p = \omega_1/\omega_2$ – параметр расстройки по собственным частотам парциальных генераторов; ε – коэффициент связи.

В отсутствие взаимодействия ($\varepsilon = 0$) в парциальных генераторах при отрицательных значениях параметра возбуждения ($m_{1,2}$) имеется единственное устойчивое состояние равновесия, расположенное в начале координат. При $m_{1,2} = 0$ состояние равновесия теряет устойчивость, происходит суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа. В системе мягко возбуждаются автоколебания, амплитуда которых растет пропорционально корню из надкритичности. При малых значениях параметра возбуждения наблюдаются квазигармонические автоколебания. Парциальный генератор при вариации управляющих параметров способен демонстрировать как периодические, так и хаотические автоколебания. Переход к хаосу осуществляется через каскад бифуркаций удвоения периода. Динамика генератора с инерционной нелинейностью в виде кусочной функции $f(x) = 0.25(|x| + x)^2$ детально описана в литературе (см., например, [19]). Генератор с нелинейностью в виде $f(x) = \exp(x) - 1$ ведет себя качественно аналогичным образом.

При положительной связи ε взаимодействующие генераторы (1) способны демонстрировать широкий спектр явлений, режимов и бифуркаций. В зависимости от управляющих параметров системы здесь наблюдаются явления синхронизации периодических и хаотических автоколебаний, явление фазовой мультистабильности, эффекты гашения колебаний. В данной работе рассматриваются явления синхронизации и гашения колебаний в широкой области значений параметров ε и p в случае, когда парциальные генераторы демонстрируют автоколебания периода один.

2. Бифуркационный анализ колебательных режимов в окрестности основной области синхронизации

2.1. Синхронизация при отсутствии расстройки по параметру возбуждения. Рассмотрим динамику взаимодействующих генераторов (1) без расстройки по параметру возбуждения при $m_1 = m_2 = m = 0.1$ в зависимости от величины связи ε и расстройки p . При указанных $m_{1,2}$ парциальные генераторы демонстрируют квазигармонические автоколебания. Вначале исследуем устойчивые и неустойчивые состояния системы и их бифуркации, относящиеся к основной области синхронизации 1 : 1.

На рис. 1 на плоскости параметров $(\varepsilon - p)$ построены бифуркационные линии устойчивых и неустойчивых предельных циклов и неподвижных точек, относящихся к основной области синхронизации. Синхронные автоколебания наблюдаются в областях A и B , которые окружают области квазипериодических колебаний C и области гашения автоколебаний D (или «амплитудной смерти»).

При значениях параметров из области A , ограниченной бифуркационными линиями l_{SN}, l'_{SN} и l_{SR} , в фазовом пространстве системы существуют неустойчивая неподвижная точка P_R , три седловых предельных цикла C_S, C_P, C_R и устойчивый предельный цикл C_N (рис. 2). Предельные циклы соответствуют синхронным движениям с разными сдвигами фаз между временными реализациями в парциальных генераторах. Устойчивый цикл C_N отвечает режиму синфазной синхронизации периодических автоколебаний

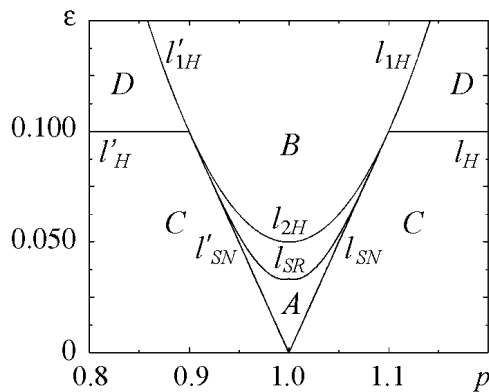


Рис. 1. Линии бифуркационных значений основной области синхронизации на плоскости управляющих параметров «коэффициент связи – расстройка по собственным частотам» при $m_1 = m_2 = 0.1$ и $g = 0.2$

строغو синфазные колебания наблюдаются при $p = 1$). Седловой цикл C_S соответствует неустойчивым противофазным колебаниям. При эволюции изображающей точки на седловых циклах C_R и C_P парциальные системы совершают колебания, сдвиг фаз между которыми лежит в пределах от 0 до π для C_R , и от π до 2π для C_P . Седловые циклы C_P и C_R располагаются в фазовом пространстве симметрично друг другу относительно цикла C_S , как видно из рис. 2, б.

Вычисление собственных значений неподвижной точки P_R показывает, что она является седлом (седло-

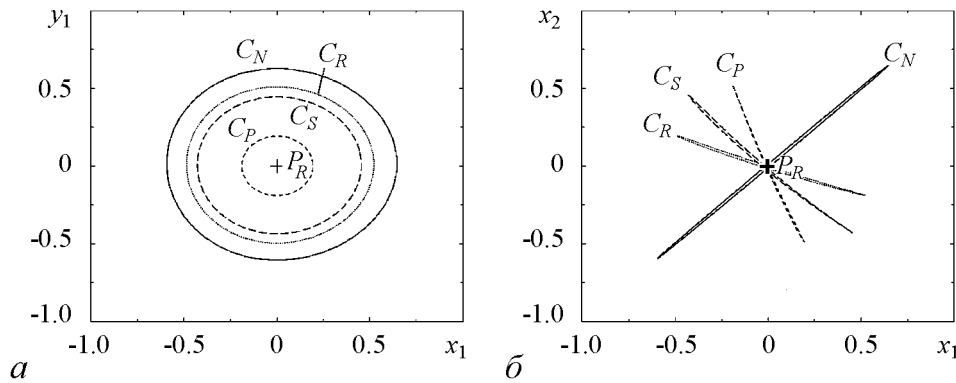


Рис. 2. Проекция фазового портрета на плоскость $(y_1 - x_1)$ (а) и на плоскость $(x_2 - x_1)$ (б) при значениях параметров $m_1 = m_2 = 0.1$, $g = 0.2$, $\varepsilon = 0.025$, $p = 1.001$. В фазовом пространстве существуют неустойчивая неподвижная точка P_R , седловые предельные циклы C_S , C_P , C_R и устойчивый предельный цикл C_N

фокусом), у которого две пары комплексно-сопряженных собственных значений с положительными действительными частями и два действительных отрицательных собственных значения. Из анализа мультипликаторов циклов следует, что седловые циклы C_P и C_R имеют трехмерные устойчивые многообразия и трехмерные неустойчивые многообразия, а седловой цикл C_S – четырехмерное устойчивое и двумерное неустойчивое многообразие. Неустойчивые многообразия седлового цикла C_S замыкаются на устойчивый цикл C_N , образуя притягивающий тор. То есть, резонансные циклы C_N и C_S лежат на двумерном торе. Проследим за бифуркациями этих предельных циклов и неподвижной точки на плоскости параметров $(\varepsilon - p)$.

На рис. 3 представлена бифуркационная диаграмма для предельных циклов и неподвижной точки в зависимости от параметра расстройки p при фиксированном значении коэффициента связи ε . На диаграмме по оси ординат отложены максимальные значения динамической переменной ($x_1 = x_{\max}$) соответствующих предельных циклов и неподвижной точки (для точки P_R динамические переменные равны нулю). В середине интервала синхронизации устойчивый цикл C_N и седловой C_S имеют по две пары комплексно-сопряженных мультипликаторов по модулю меньше единицы, и по одному действительному мультипликатору соответственно меньше и больше единицы. Седловые циклы C_R и C_P имеют по паре действительных больших единицы мультипликаторов, по паре комплексно-сопряженных по модулю меньших единицы и по одному действительному меньшему единицы мультипликатору. При выходе из области A с изменением расстройки p на линиях l_{SN} и l'_{SN} происходят бифуркации синхронного режима. Лежащие на торе устойчивый пре-

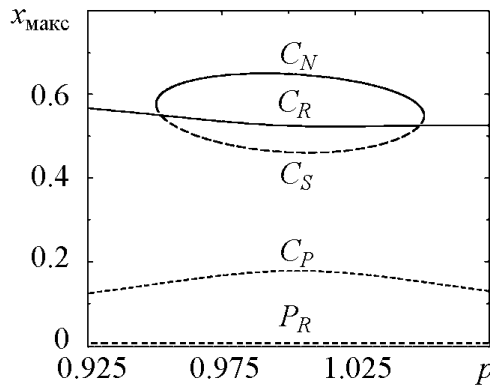


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма для предельных циклов и точки равновесия в зависимости от параметра расстройки p при фиксированных значениях параметров $m_1 = m_2 = 0.1$, $g = 0.2$, $\varepsilon = 0.025$

дельный цикл C_N и седловой цикл C_S сближаются друг с другом по мере приближения управляющего параметра p к бифуркационным линиям l_{SN} и l'_{SN} . На этих линиях они сливаются, по одному действительному мультипликатору принимают значение $+1$ и за точкой бифуркации (в области C на рис. 1) исчезают. Теперь в фазовом пространстве имеется притягивающий эргодический двумерный тор. Фазовые траектории покрывают его, нигде не замыкаясь. При эволюции изображающей точки на этом двумерном торе в системе наблюдается режим квазипериодических колебаний с двумя несоизмеримыми частотами. Седловые циклы C_R , C_P и неподвижная точка P_R при выходе из области синхронизации A с изменением расстройки p никаких бифуркаций не претерпевают и по-прежнему имеют трехмерные устойчивые и трехмерные неустойчивые многообразия. Таким образом, в области квазипериодических колебаний C фазовый портрет системы образуют притягивающий эргодический тор, седловые предельные циклы C_R и C_P и, расположенная в начале координат, неустойчивая неподвижная точка P_R .

Рассмотрим теперь, что происходит при увеличении связи ε . Зафиксируем $m = 0.1, p = 1.034$ и будем следить за бифуркациями указанных выше предельных множеств. Бифуркационная диаграмма представлена на рис. 4. При слабой связи в фазовом пространстве имеется притягивающий тор, седловые циклы C_P и C_R , неустойчивая неподвижная точка P_R . С увеличением ε при пересечении линии l_{SN} (см. рис. 1) на торе рождается устойчивый предельный цикл C_N и седловой цикл C_S . На бифуркационной диаграмме (рис. 4) это соответствует точке b_{SN} , из которой выходят две ветви. Сплошная линия образована значениями динамической переменной на устойчивом цикле C_N , а линия из длинных штрихов – значениями на седловом цикле C_S . При дальнейшем увеличении связи на линии l_{SR} плоскости параметров $(\varepsilon - p)$ (см. рис. 1) происходит субкритическая бифуркация вил. Седловые циклы C_P и C_R приближаются к седловому циклу C_S и на линии l_{SR} влипают в него. Выше точки бифуркации остается седловой предельный цикл C_S уже с другим характером устойчивости. Анализ мультипликаторов циклов показывает, что до точки бифуркации седловые циклы C_P и C_R имеют трехмерные устойчивые многообразия и трехмерные неустойчивые многообразия, а седловой цикл C_S – четырехмерные устойчивые и двумерные неустойчивые многообразия, последние замыкаются на устойчивый предельный цикл, образуя двумерный тор. За точкой субкритической бифуркации вил седловой цикл C_S превращается в седловой предельный цикл с трехмерными устойчивыми и трехмерными неустойчивыми многообразиями, что приводит к разрушению двумерного тора, на котором лежали резонансные циклы. На бифуркационной диаграмме рис. 4 точка бифуркации вил обозначена как b_p . При значениях коэффициента связи из области, ограниченной линиями l_{SR} и l_{2H} на плоскости параметров рис. 1, фазовый портрет системы образуют неустойчивая неподвижная точка P_R , седловой цикл C_S и устойчивый цикл C_N . Двумерного тора выше линии l_{SR} уже нет, он был разрушен в результате субкритической бифуркации вил седлового цикла C_S . С этой бифуркацией связан переход из области захвата A в область подавления B основного языка синхронизации на рис. 1. При дальнейшем увеличении ε радиус седлового предельного цикла C_S уменьшается, и на линии l_{2H} он стягивается в неустойчивую неподвижную точку P_R , происходит бифуркация Андронова–Хопфа. До бифуркации у неподвижной точки было две пары комплексно сопряженных собственных значений с положительными действительными частями

и два действительных отрицательных собственных значения; после бифуркации – пара с положительными действительными частями и пара с отрицательными, два действительных собственных значения остаются отрицательными и равными -0.2 .

При сильной связи, выше линии l_{2H} в области синхронизации B на рис. 1, в фазовом пространстве системы имеется устойчивый предельный цикл C_N и неустойчивая точка P_R . В этом случае увеличение расстройки p приводит к эффекту гашения автоколебаний (или «амплитудной смерти»). По мере увеличения расстройки по собственным частотам p амплитуда автоколебаний в каждом из генераторов плавно уменьшается до нуля. На рис. 5 представлена бифуркационная диаграмма для предельного цикла и неподвижной точки. При совпадении собственных частот парциальных генераторов ($p = 1$) радиус устойчивого предельного цикла C_N , отвечающий режиму синхронизации, имеет максимальное значение. С увеличением или уменьшением параметра расстройки p радиус предельного цикла плавно уменьшается, и на бифуркационных линиях l_{1H} и l'_{1H} (см. рис. 1) цикл стягивается в точку равновесия в начале координат. При переходе из области B в область D неподвижная точка P_R превращается из неустойчивого седло-фокуса в устойчивый фокус. Здесь имеет место суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа. В области D в фазовом пространстве системы имеется только устойчивая неподвижная точка P_R . Автоколебания в системе отсутствуют, взаимодействие привело к гашению колебаний, хотя каждый из парциальных генераторов при выключенной связи находится в возбужденном состоянии.

При переходе из области D в область B (см. рис. 1), например, при фиксированной связи ε с изменением расстройки p плавно возбуждаются периодические автоколебания. Однако при переходе из области D в область C , например, с уменьшением величины связи при фиксированной расстройке p в системе мягко возбуждаются квазипериодические автоколебания. Границей перехода от режима гашения к режиму квазипериодических колебаний являются бифуркационные линии l_H и l'_H . В области D перед линиями l_H и l'_H неподвижная точка P_R имеет две пары комплексно-сопряженных собственных значений с отрицательными действительными частями и

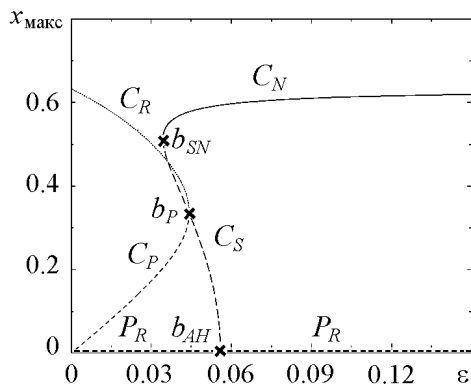


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма для предельных циклов и точки равновесия в зависимости от коэффициента связи ε при фиксированных значениях параметров $m_1 = m_2 = 0.1$, $g = 0.2$, $p = 1.034$

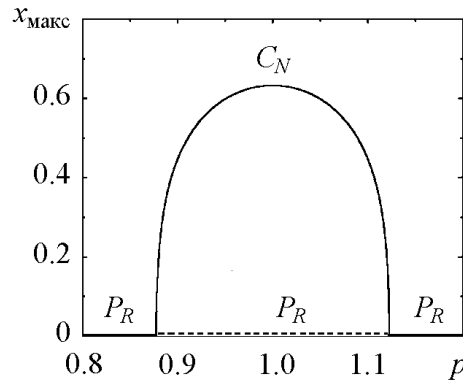


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма для предельного цикла и точки равновесия в зависимости от расстройки p при фиксированных значениях $m_1 = m_2 = 0.1$, $g = 0.2$ и $\varepsilon = 0.125$

два действительных отрицательных собственных значения. На линиях l_H и l'_H действительные части комплексно-сопряженных собственных значений обращаются в ноль (две пары чисто мнимых собственных значений), а ниже линий становятся положительными. В результате, в окрестности неподвижной точки P_R мягким образом рождаются притягивающий тор T и седловые циклы C_P и C_R . С уменьшением связи эти предельные множества (неподвижная точка, два предельных цикла и притягивающий тор) расходятся друг от друга.

Описанный бифуркационный переход рождения из неподвижной точки притягивающего тора и двух седловых циклов относится к числу вырожденных. Обусловлено это идентичностью парциальных генераторов, поскольку параметры возбуждения m_1 и m_2 равны. Идентичность по параметрам, управляющим бифуркацией рождения цикла в несвязанных генераторах, приводит не только к этой вырожденной ситуации, но и к бифуркации вил, которая происходит на линии l_{SR} основного языка синхронизации (см. рис. 1), и в которой участвуют седловые циклы C_S, C_P, C_R (см. бифуркационную диаграмму на рис. 4). Введение неидентичности генераторов по параметру m устраняет эти вырождения вполне определенным образом и приводит к типичным бифуркационным переходам.

2.2. Влияние расстройки по параметру возбуждения генераторов на бифуркационный механизм синхронизации и подавления колебаний. Рассмотрим динамику слабо неидентичных связанных генераторов в окрестности основного языка синхронизации более подробно. На рис. 6 на плоскости параметров $(\varepsilon - p)$ построены линии бифуркационных значений основной области синхронизации для слабо неидентичных генераторов. Здесь также как в идентичном случае, область синхронизации через захват обозначена буквой A , область синхронизации через подавление – B , область квазипериодических колебаний – C , область гашения колебаний – D . Видно, что слабая неидентичность приводит к существенному изменению структуры пространства параметров. На границе перехода между областями C и D появился канал, в котором существует устойчивый предельный цикл, отвечающий режиму синхронизации, в широком интервале расстроек по собственным частотам. Произошло частичное изменение характера бифуркационных переходов. Проанализируем эти изменения более детально.

В области A фазовый портрет системы такой же как и в предыдущем случае (см. рис. 2). Его образуют неустойчивая неподвижная точка P_R , седловые циклы C_P, C_R и резонансные циклы на торе – седловой C_S и устойчивый C_N . Выход из режима синхронизации при малом ε по-прежнему происходит на линиях l_{SN} и l'_{SN} через седло-узловые бифуркации циклов C_N и C_S . Здесь в фазовых портретах и бифуркационных переходах по сравнению с симметричным случаем никаких изменений не произошло.

Изменения в структуре пространства параметров наблюдаются в области больших значений ε . На рис. 7 представлена бифуркационная диаграмма для предельных циклов и точки равновесия с ростом коэффициента связи ε при малой фиксированной расстройке по частотам ($p = 1.034$). При слабой связи, левее точки b_{SN} (на рис. 6 ниже линии l_{SN}), имеется неустойчивая неподвижная точка P_R , два седловых цикла C_P, C_R и притягивающий двумерный тор. С увеличением ε в точке b_{SN} происходит бифуркация и на торе рождается пара циклов C_N и C_S . С дальнейшим ростом связи седловой цикл C_S с двумерными неустойчивыми и четырехмерными устойчивыми многообразиями сближается с другим седловым цик-

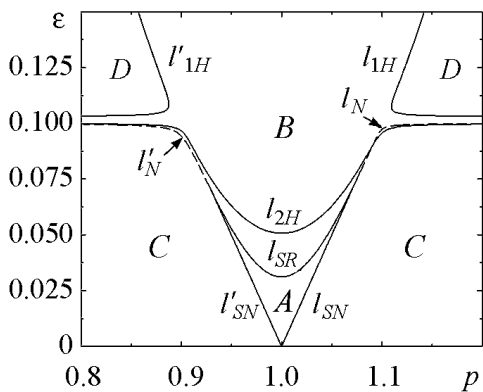


Рис. 6. Линии бифуркационных значений основной области синхронизации на плоскости управляющих параметров «коэффициент связи – расстройка по собственным частотам» при $m_1 = 0.105$, $m_2 = 0.1$, $g = 0.2$

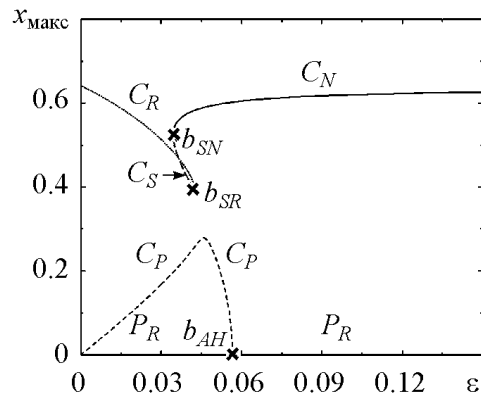


Рис. 7. Бифуркационная диаграмма для предельных циклов и точки равновесия в зависимости от коэффициента связи ε в случае расстройки генераторов по параметру возбуждения ($m_1 = 0.105$, $m_2 = 0.1$) и при фиксированных значениях $g = 0.2$, $p = 1.034$

лом C_R , у которого трехмерные устойчивые и трехмерные неустойчивые многообразия. В точке b_{SR} они сливаются и исчезают за бифуркационной точкой, что приводит к разрушению тора, на котором лежали резонансные циклы – устойчивый C_N и седловой C_S . Далее по параметру происходит еще одна бифуркация. Из рис. 7 видно, что с увеличением связи седловой цикл C_P вначале увеличивается в размере, а затем плавно уменьшается. В точке b_{AH} происходит бифуркация Андронова–Хопфа. Состояние равновесия P_R из неустойчивого седло-фокуса с двумя парами комплексно-сопряженных собственных значений с положительными действительными частями превращается в неустойчивый седло-фокус, у которого одна пара комплексно-сопряженных собственных значений с отрицательными действительными частями и одна с положительными. (Два оставшихся действительных и отрицательных собственных значения при данной бифуркации не меняются.) В области синхронизации B в фазовом пространстве имеется неустойчивая точка P_R и устойчивый предельный цикл C_N . Таким образом, небольшая расстройка по m привела к устранению бифуркации вил. Разрушение тора при переходе из области синхронизации через захват в область синхронизации через подавление происходит теперь в результате седло-седло бифуркации двух циклов C_S и C_R .

На рис. 8 представлена еще одна бифуркационная диаграмма для предельных циклов и точки равновесия в зависимости от коэффициента связи, но при большем значении параметра рас-

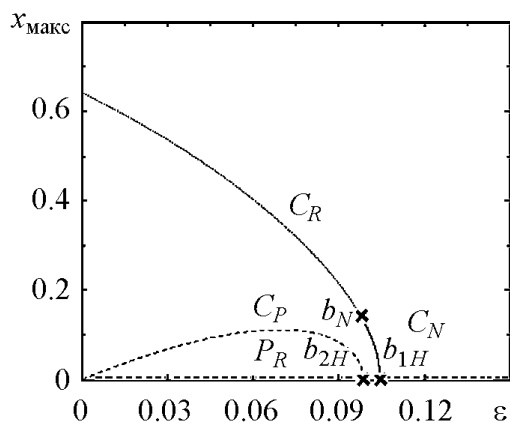


Рис. 8. Бифуркационная диаграмма для предельных циклов и точки равновесия в зависимости от коэффициента связи ε в случае расстройки генераторов по параметру возбуждения ($m_1 = 0.105$, $m_2 = 0.1$) и при фиксированном значении $g = 0.2$, $p = 1.12$

стройки p . Она наглядно описывает бифуркационный механизм эффекта гашения при переходе из области квазипериодических колебаний C в область гашения колебаний (или «амплитудной смерти») D . При слабой связи в фазовом пространстве существует двумерный притягивающий тор, седловые предельные циклы C_P, C_R и неустойчивое состояние равновесия P_R в начале координат. С ростом ε радиус седлового цикла C_P вначале нарастает, затем уменьшается и стягивается в неподвижную точку P_R . На бифуркационной диаграмме в точке b_{2H} происходит бифуркация Андронова–Хопфа. На плоскости параметров $(\varepsilon - p)$ рис. 6 это соответствует бифуркационной линии l_{2H} . После бифуркации у неподвижной точки имеется пара комплексно-сопряженных собственных значений с положительными действительными частями, пара с отрицательными и два действительных отрицательных собственных значения. В то же время с ростом ε размер седлового цикла C_R уменьшается и после точки b_N на бифуркационной диаграмме рис. 8 превращается из седлового в устойчивый предельный цикл, что соответствует бифуркации Неймарка–Сакера. Притягивающий двумерный тор стягивается в седловой предельный цикл C_R после чего он становится устойчивым. На рис. 6 это соответствует бифуркационной линии l_N . При ее пересечении режим квазипериодических колебаний сменяется режимом периодических автоколебаний. При дальнейшем увеличении связи радиус устойчивого предельного цикла уменьшается до нуля. Он стягивается к неустойчивой точке P_R , происходит бифуркация Андронова–Хопфа (точка b_{1H} на рис. 8), после которой состояние равновесия становится устойчивым. В системе наблюдается полное гашение автоколебаний.

3. Бифуркационный анализ колебательных режимов в окрестности областей синхронизации $n:m$

Мы проанализировали основную область синхронизации и ее окрестность при вариации параметров коэффициент связи ε и расстройки по собственным частотам p . В этом разделе исследуем структуру пространства управляющих параметров, учитывая режимы синхронизации с другими соотношениями частот, отличающимися от $1 : 1$, выявляя характерные фазовые портреты и их перестройки при плавном изменении параметров p и ε .

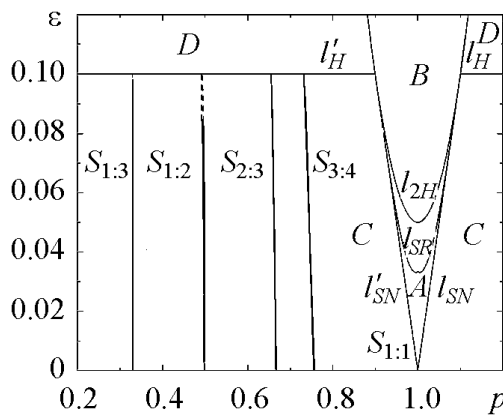


Рис. 9. Области синхронизации с различными числами вращения $S_{1:1}, S_{1:2}, S_{1:3}, S_{2:3}, S_{3:4}$ и гашения колебаний D на плоскости параметров $(\varepsilon - p)$ при фиксированных значениях $m_1 = m_2 = 0.1, g = 0.2$

3.1. Случай двух идентичных по параметру возбуждения генераторов. На рис. 9 показаны языки синхронизации с различными числами вращения справа от основной области $S_{1:1}$. Параметры парциальных генераторов имеют одинаковые значения параметров возбуждения, соответствующие квазигармоническим режимам генераторов в отсутствие связи ($\varepsilon = 0$). Видно, что по сравнению с основной ($S_{1:1}$) дополнительные области синхронизации ($S_{1:2}, S_{1:3}, S_{2:3}, S_{3:4}$) значительно уже и ограничены сверху областью гашения колебаний D . Внизу они опираются на

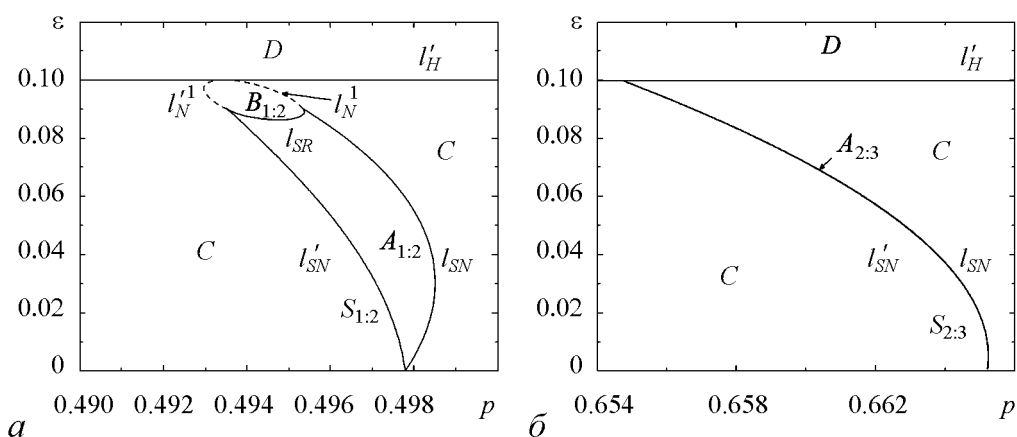


Рис. 10. *a* – язык синхронизации $S_{1:2}$, содержащий область захвата $A_{1:2}$ и область подавления $B_{1:2}$; *б* – язык синхронизации $S_{2:3}$, имеющий только область захвата $A_{2:3}$. Значения параметров $m_1 = m_2 = 0.1$, $g = 0.2$

линию $\varepsilon = 0$, а сверху – на линию l'_H , причем и сверху, и внизу границы каждой из областей сходятся в точку. По своей бифуркационной структуре указанные языки качественно различаются. В областях $S_{2:3}$ и $S_{3:4}$ реализуются режимы синхронизации только через захват, а в областях $S_{1:2}$ и $S_{1:3}$ – как через захват, так и через подавление.

На рис. 10, *a* и *б* показаны в увеличенном масштабе языки синхронизации $S_{1:2}$ и $S_{2:3}$, соответственно. Язык синхронизации $S_{1:2}$ состоит из области захвата $A_{1:2}$ и области подавления $B_{1:2}$. Область захвата $A_{1:2}$ ограничена линиями седло-узловых бифуркаций l_{SN} , l'_{SN} и l_{SR} . Область подавления $B_{1:2}$ ограничена линией седло-узловой бифуркации l_{SR} и линиями бифуркации Неймарка–Сакера l'_N , l_N . При уменьшении связи линии седло-узловых бифуркаций l_{SN} и l'_{SN} сходятся в точку на оси абсцисс $\varepsilon = 0$. При увеличении связи, ограничивающие область подавления, линии бифуркации Неймарка–Сакера l'_N и l_N сходятся в точку на линии l'_H , которая является границей области гашения колебаний D . Язык синхронизации $S_{2:3}$ имеет только область захвата $A_{2:3}$, которая ограничена линиями седло-узловых бифуркаций l_{SN} и l'_{SN} . Как при уменьшении, так и при увеличении связи они сходятся в точку и на линии $\varepsilon = 0$, и на линии l'_H .

На рис. 11 показаны проекции фазовых портретов для областей захвата $A_{1:2}$ и $A_{2:3}$. В обоих случаях фазовый портрет образован неустойчивым состоянием равновесия P_R , седловыми циклами C_P и C_R , а также резонансными циклами C_S и C_N , лежащими на двумерном торе. Предельный цикл C_N является устойчивым и отвечает режиму синхронизации. Предельный цикл C_S является седловым с двумерными неустойчивыми многообразиями, замкнутыми на устойчивый предельный цикл C_N , и четырехмерными устойчивыми многообразиями. Характер устойчивости и периоды седловых циклов C_P и C_R являются одинаковыми при постоянном значении связи ε во всех языках синхронизации. При изменении параметра расстройки p эти седловые циклы никаких бифуркаций не претерпевают. Резонансные циклы на торе C_N и C_S существуют только в области захвата языков синхронизации, при изменении расстройки по частоте исчезают и в разных языках синхронизации имеют разные периоды (см. рис. 11).

Проследим за перестройками режимов, представленных на рис. 11, *a*, по мере увеличения коэффициента связи ε при фиксированных значениях других параметров. На рис. 12, *a* представлена бифуркационная диаграмма для состояния равновесия и предельных циклов в зависимости от ε в сечении языка синхронизации $S_{1:2}$, на рис. 12, *b* показан ее увеличенный фрагмент.

При слабой связи (в области C , ниже линии l'_{SN} на плоскости параметров рис. 10, *a*) в фазовом пространстве существует неустойчивое состояние равновесия P_R , седловые циклы C_P, C_R и притягивающий двумерный тор, соответствующий режиму квазипериодических колебаний. Неподвижная точка P_R имеет два действительных, отрицательных собственных значения и две пары комплексно-сопряженных собственных значения с положительными действительными частями. Седловые предельные циклы C_P и C_R имеют трехмерные устойчивые и трехмерные неустойчивые многообразия. C_P рождается в результате бифуркации Андронова–Хопфа из неустойчивой точки P_R на линии $\varepsilon = 0$. Седловой цикл C_R окружен притягива-

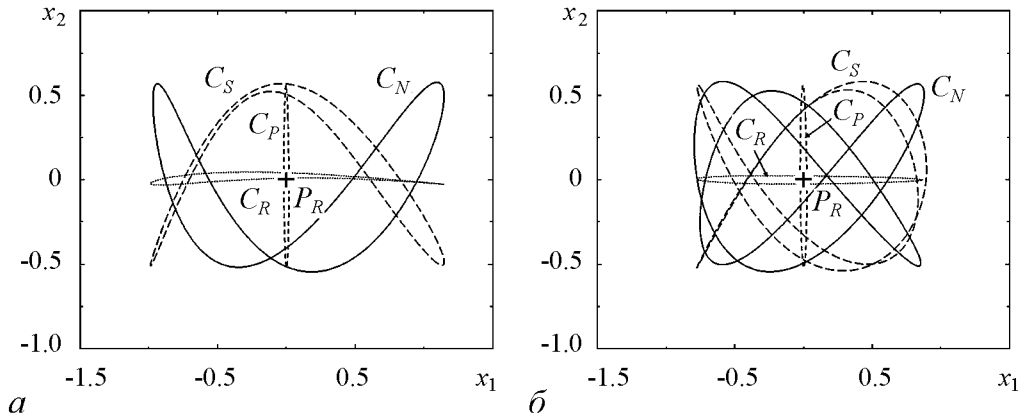


Рис. 11. Проекция фазового портрета: *a* – для языка синхронизации $S_{1:2}$ при $\varepsilon = 0.025$, $p = 0.498$, что соответствует области захвата $A_{1:2}$, и *b* – для языка синхронизации $S_{2:3}$, построенные при значениях параметров $\varepsilon = 0.025$, $p = 0.665$. Значения параметров возбуждения и инерционности оставались прежними $m_1 = m_2 = 0.1$, $g = 0.2$

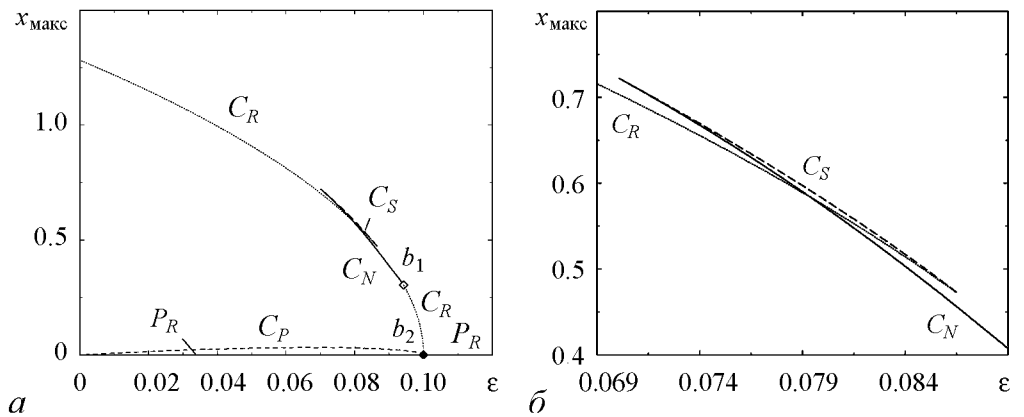


Рис. 12. *a* – бифуркационная диаграмма для состояния равновесия и предельных циклов в зависимости от коэффициента связи ε в сечении языка синхронизации $S_{1:2}$ ($p = 0.495$) при значениях параметров $m_1 = m_2 = 0.1$, $g = 0.2$; *b* – увеличенный фрагмент бифуркационной диаграммы на рис. *a*

ющим двумерным тором. С увеличением связи, при пересечении линии l'_{SN} (см. рис. 10, *a*) на торе рождается пара резонансных циклов: седловой C_S и устойчивой C_N . На бифуркационной диаграмме рис. 12 интервал значений параметра ε , в котором существуют резонансные циклы C_N и C_S , соответствует области синхронизации через захват. При дальнейшем увеличении связи происходит седло-седло бифуркация. Предельный цикл C_R с трехмерным устойчивым и трехмерным неустойчивым многообразиями сливается с седловым резонансным предельным циклом C_S , имеющим двумерное неустойчивое и четырехмерное устойчивое многообразия. Выше точки бифуркации они исчезают. Происходит разрушение двумерного тора, после чего в фазовом пространстве имеется устойчивый предельный цикл C_N , седловой цикл C_P и неустойчивая неподвижная точка P_R . На рис. 10, *a* это соответствует переходу из области захвата $A_{1:2}$ в область подавления $B_{1:2}$. Далее по параметру связи, на бифуркационной диаграмме в точке b_1 происходит бифуркация Неймарка–Сакера, цикл C_N теряет устойчивость и рождается притягивающий двумерный тор. Это соответствует выходу из языка синхронизации $S_{1:2}$ в область квазипериодических колебаний. В интервале значений связи, ограниченном точками b_1 и b_2 , фазовый портрет образуют неустойчивая точка P_R , седловые циклы C_R, C_P и притягивающий двумерный тор. При движении по бифуркационной диаграмме к точке b_2 тор и предельные циклы стягиваются в неподвижную точку P_R , происходит бифуркация, после которой состояние равновесия из неустойчивого превращается в устойчивое. В системе происходит гашение автоколебаний. На рис. 10, *a* это соответствует переходу в область D . Данный бифуркационный переход, когда тор и два цикла одновременно стягиваются в неподвижную точку, обусловлен идентичностью генераторов по параметру возбуждения и инерционности. Введение слабой расстройки по параметру возбуждения устраняет указанную вырожденную бифуркацию вполне определенным образом, что будет рассмотрено ниже.

При изменении коэффициента связи ε в сечении языка синхронизации $S_{2:3}$ происходят более простые перестройки фазового портрета (рис. 11, *b*). При любом значении p из окрестности $S_{2:3}$ (см. рис. 10, *b*) фазовый портрет образован неустойчивой неподвижной точкой P_R , седловыми циклами C_P, C_R и притягивающим двумерным эргодическим тором, отвечающим режиму квазипериодических колебаний. На границах области $S_{2:3}$ происходят седло-узловые бифуркации резонансных циклов C_S и C_N на торе. С увеличением связи, при пересечении линии l'_H происходит вырожденная бифуркация – седловые циклы и притягивающий двумерный тор стягиваются в неподвижную точку P_R , которая становится устойчивой и в системе наблюдается гашение автоколебаний.

Таким образом, в идентичных по параметрам возбуждения ($m_1 = m_2$) и инерционности ($g_1 = g_2$) взаимодействующих генераторах на плоскости управляющих параметров коэффициент связи ε и расстройка по собственным частотам p имеют области синхронизации с различными числами вращения и область гашения автоколебаний. Области синхронизации с числами вращения, отличающимися от $1 : 1$, ограничены по связи. Их границы сходятся в точку не только на оси абсцисс $\varepsilon = 0$, но и на границе l'_H области гашения автоколебаний. Языки синхронизации можно разделить на две группы. Одни из них содержат как область захвата, так и область подавления, а другие – только область захвата. Рассмотрим как трансформируется структура бифуркационного множества в пространстве управляющих параметров при введении расстройки по параметру возбуждения генераторов m_1 и m_2 .

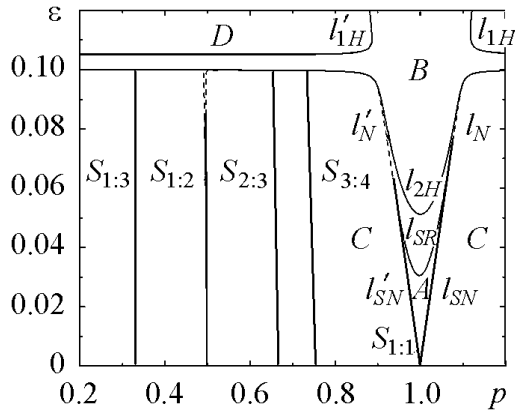


Рис. 13. Области синхронизации с различными числами вращения $S_{1:1}$, $S_{1:2}$, $S_{1:3}$, $S_{2:3}$, $S_{3:4}$ и область гашения D на плоскости параметров $(\epsilon - p)$ при фиксированных значениях параметров $m_1 = 0.105$, $m_2 = 0.1$, $g = 0.2$

рис. 13), а именно, l'_{1H} – линия бифуркации рождения устойчивого предельного цикла C_N из устойчивого состояния равновесия P_R ; l_{2H} – линия бифуркации рождения седлового предельного цикла C_P из неустойчивого состояния равновесия P_R ; l'_N – линия бифуркации рождения притягивающего двумерного тора из устойчивого предельного цикла C_N . В результате появился канал, который разделяет область квазипериодических колебаний C и область амплитудной смерти D , и в котором существует устойчивый предельный цикл C_N . При перемещении по каналу предельный цикл C_N никаких бифуркаций не претерпевает.

В предыдущем случае, при одинаковых значениях m_1 и m_2 (см. рис. 9), границы языков синхронизации сходились в точку и с уменьшением связи, и с ее увеличением. Все области синхронизации были замкнуты и переходы между синхронными движениями с различными числами вращения могли происходить только через бифуркации соответствующих устойчивых предельных циклов.

При слабой неидентичности (см. рис. 13) по m_1 и m_2 , языки синхронизации $S_{2:3}$ и $S_{3:4}$, состоящие только из области захвата, остаются замкнутыми. С увеличением связи их границы сходятся в точку на линии бифуркации рождения тора l'_N . В тоже время, языки синхронизации $S_{1:1}$, $S_{1:2}$, $S_{1:3}$, состоящие из области захвата и области подавления, объединяются и становятся открытыми. С увеличением связи их верхние границы не сходятся в точку. В результате устойчивый предельный цикл C_N можно «протянуть» из области захвата одного открытого языка синхронизации в область захвата другого открытого языка синхронизации без каких-либо бифуркаций цикла C_N . Переходы между режимами синхронизации с разными числами вращения можно осуществлять не бифуркационным, а плавным эволюционным образом.

На рис. 14 показаны открытая $S_{1:2}$ и замкнутая $S_{2:3}$ области синхронизации. Фазовые портреты в областях захвата $A_{1:2}$ и $A_{2:3}$ являются качественно такими же как в идентичном случае и представлены на рис. 11. Исследуем перестройки фазовых портретов в зависимости от коэффициента связи ϵ при фиксированных значениях p в сечениях языков синхронизации $S_{1:2}$ и $S_{2:3}$.

3.2. Влияние расстройки по параметру возбуждения генераторов на переходы к режимам синхронизации и гашения. Слабая неидентичность по параметрам возбуждения m_1 и m_2 приводит к существенным изменениям структуры множества бифуркационных линий в окрестности границы области гашения автоколебаний. На рис. 13 построены те же области, что и на рис. 9, практически при тех же значениях параметров, отличающихся всего лишь на 0.005 по одному параметру возбуждения. Видно, что слабая неидентичность приводит к расщеплению границы области гашения. Вместо одной линии l'_H (см. рис.9) появилось три бифуркационных линии (см.

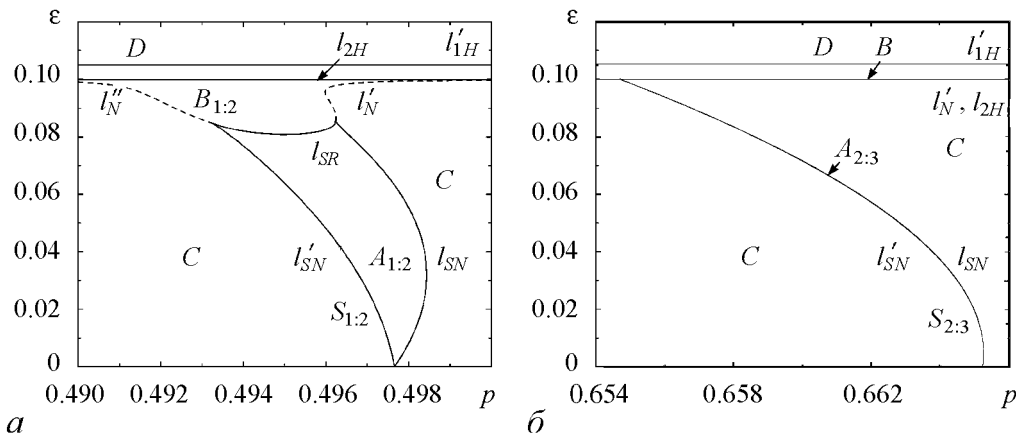


Рис. 14. *a* – язык синхронизации $S_{1:2}$, содержащий область захвата $A_{1:2}$ и область подавления $B_{1:2}$; *б* – язык синхронизации $S_{2:3}$, имеющий только область захвата $A_{2:3}$, построенные при значениях параметров $m_1 = 0.105$, $m_2 = 0.1$, $g = 0.2$ (с расстройкой по параметру возбуждения)

Границы области $S_{2:3}$ образуют линии седло-узловых бифуркаций, которые с ростом связи сходятся в точку на линии рождения тора l'_N . При движении по параметру связи ε здесь всегда происходит седло-узловая бифуркация на торе. Резонансные циклы C_N и C_S (см. рис. 11, б) сливаются и исчезают. С увеличением ε двумерный тор стягивается к седловому циклу C_R , который выше линии l'_N становится устойчивым. Другой седловой цикл C_P с ростом ε уменьшается и на линии l_{2H} впадает в неподвижную точку P_R . Это соответствует бифуркации Андронова–Хопфа, после которой состояние равновесия из седлового с четырехмерным неустойчивым многообразием превращается в седло с двумерным неустойчивым многообразием (остается одна пара комплексно-сопряженных собственных значений, имеющих положительные действительные части). В итоге, на плоскости параметров в канале, разделяющем область квазипериодических колебаний C и область «амплитудной смерти» D , фазовый портрет образуют устойчивый предельный цикл и неустойчивое состояние равновесия в виде седло-фокуса. При дальнейшем увеличении связи ε устойчивый предельный цикл стягивается в неподвижную точку, на линии l'_{1H} происходит бифуркация Андронова–Хопфа, после которой состояние равновесия становится устойчивым и автоколебания гасятся.

Рассмотрим перестройки фазового портрета из области захвата $A_{1:2}$ (см. рис. 11, а) при изменении коэффициента связи ε . На рис. 15 построены бифуркационные диаграммы для состояния равновесия и предельных циклов в сечении языка синхронизации $S_{1:2}$ и в его окрестности.

Для $p = 0.496$ (рис. 15, а) при слабой связи ($0 < \varepsilon \lesssim 0.05$) в фазовом пространстве существует неустойчивое состояние равновесия P_R , седловой цикл C_P и седловой цикл C_R , который окружен двумерным притягивающим тором. В системе наблюдаются квазипериодические колебания. С увеличением связи при входе в область захвата на торе происходит седло-узловая бифуркация, и появляются резонансные циклы C_N (устойчивый) и C_S (седловой). Далее при переходе из области захвата в область подавления происходит разрушение двумерного тора в результате бифуркации слияния и исчезновения седловых циклов C_S и C_R . Отвечающий режим синхронизации устойчивый предельный цикл C_N никаких бифуркаций не претерпевает. То есть с увеличением связи соответствующий режим синхронизации продолжает наблюдаться и в канале, разграничивающем область квазипериодиче-

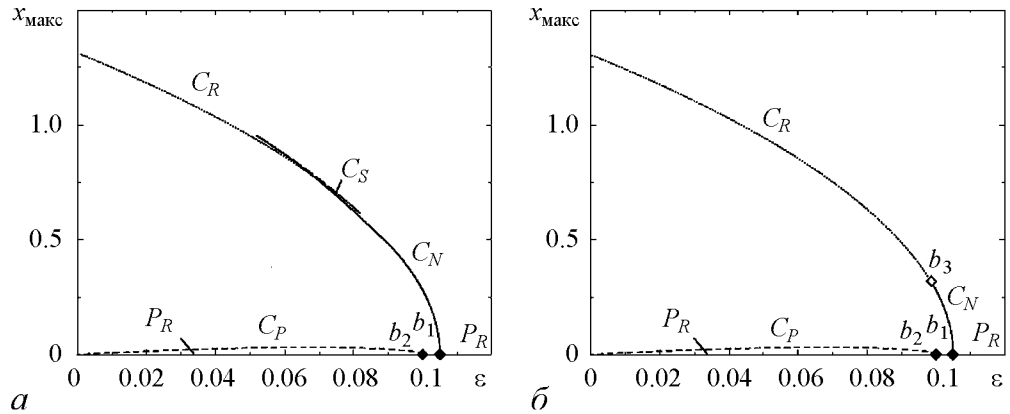


Рис. 15. Бифуркационные диаграммы для состояния равновесия и предельных циклов в зависимости от коэффициента связи ε в сечении языка синхронизации $S_{1:2}$ ($p = 0.496$) (а) и справа от него ($p = 0.499$) (б) при значениях параметров $m_1 = 0.105$, $m_2 = 0.1$, $g = 0.2$

ских колебаний и область «амплитудной смерти». Ширину этого канала определяют бифуркационные точки b_1 и b_2 . Это точки бифуркации Андронова–Хопфа рождения предельного цикла. При входе в канал сверху из устойчивого состояния равновесия P_R рождается устойчивый предельный цикл C_N , и далее при пересечении b_2 из неустойчивого состояния равновесия P_R рождается седловой предельный цикл C_P .

В окрестности языка $S_{1:2}$ для $p = 0.499$ (рис. 15, б) при вариации параметра связи седло-узловых бифуркаций на торе не наблюдается. Однако по мере увеличения ε отвечающий режиму синхронизации устойчивый предельный цикл C_N наблюдается в системе. Имеется переход от квазипериодических колебаний к периодическим, но происходит это в результате бифуркации Неймарка–Сакера. С увеличением связи при подходе к точке b_3 на бифуркационной диаграмме притягивающий двумерный тор стягивается к седловому циклу C_R . За точкой b_3 тор исчезает, а неустойчивый цикл превращается в устойчивый. Возникает режим синхронизации через подавление. С дальнейшим увеличением связи при переходе через точку b_1 устойчивый предельный цикл C_N стягивается в неподвижную точку P_R , и она из седловой превращается в устойчивую. Наблюдается переход из режима периодических колебаний в режим «амплитудной смерти».

Таким образом, при введении небольшой расстройки по параметрам возбуждения m_1 и m_2 парциальных генераторов все типичные режимы синхронизации, квазипериодических колебаний и «амплитудной смерти» сохраняются на плоскости управляющих параметров коэффициент связи ε и расстройка по собственным частотам p . Однако происходит качественное изменение в структуре бифуркационного множества. На плоскости параметров линия вырожденной бифуркации перехода от устойчивой неподвижной точки к притягивающему двумерному тору расщепляется на три линии (две бифуркации Андронова–Хопфа и одна Неймарка–Сакера). В результате образуется канал, отделяющий область квазипериодических и синхронных колебаний от области «амплитудной смерти», в котором существует устойчивый предельный цикл. Сходящиеся в точки линии бифуркаций Неймарка–Сакера, ограничивающие области подавления языков синхронизации, размыкаются и тем самым объединяют языки синхронизации $S_{1:1}$, $S_{1:2}$, $S_{1:3}$.

Заключение

В работе представлено описание динамики двух диссипативно связанных генераторов с инерционной нелинейностью. Исследованы бифуркационные переходы к режимам синхронизации и бифуркационный механизм эффекта гашения колебаний. На плоскости управляющих параметров построены соответствующие линии бифуркационных значений как для случая идентичных по параметру возбуждения парциальных генераторов, так и для случая слабой неидентичности. Показано, что языки синхронизации могут быть двух типов: в одних имеется и область захвата, и область подавления, а в других – только область захвата. При слабой неидентичности по параметру возбуждения наличие языков первого типа приводит к возможности перехода из одной области синхронизации в другую без бифуркаций устойчивого предельного цикла. То есть переходы между режимами синхронизации с разными числами вращения могут происходить эволюционным образом. Это обусловлено тем, что сходящиеся в точки линии бифуркаций Неймарка–Сакера, ограничивающие области подавления языков синхронизации, размыкаются и тем самым объединяют языки синхронизации $S_{1:1}$, $S_{1:2}$, $S_{1:3}$.

Исследования выполнены при финансовой поддержке CRDF (грант № ВР4М06) и Министерства образования и науки РФ в рамках АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (2009–2010 годы).

Библиографический список

1. *Блехман И.И.* Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1971.
2. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1971.
3. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
4. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
5. *Balanov A., Janson N., Postnov D., Sosnovtseva O.* Synchronization. From Simple to Complex. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2009.
6. *Aronson D.G., Ermentrout G.B., Kopell N.* Amplitude response of coupled oscillators // *Physica D*. 1990. Vol. 41. P. 403.
7. *Майер А.Г.* К теории связанных колебаний двух самовозбужденных генераторов // *Ученые записки Горьковского государственного университета*. 1935. Т. 2. С. 3.
8. *Rand R.H., Holmes P.J.* Bifurcation of periodic motions in two weakly coupled van der Pol oscillators // *Int. J. Non-Linear Mech.* 1980. Vol. 15. P. 387.
9. *Ivanchenko M.V., Osipov G.V., Shalfeev V.D., Kurths J.* Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators. *Physica D*. 2004. Vol. 189. P. 8.
10. *Bar-Eli K.* On the stability of coupled chemical oscillators. *Physica 14D*. 1985. P. 242.
11. *Taylor M.A., Kevrekidis I.G.* Some common dynamic features of coupled reacting systems. *Physica D*. 1991. Vol. 51. P. 274.

12. *Астахов В.В., Коблянский С.А., Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С.* Бифуркационный анализ динамики диссипативно связанных генераторов ван дер Поля. Успехи современной радиоэлектроники. 2008. № 9. С. 61.
13. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И.* О динамике двух осцилляторов ван дер Поля–Дуффинга с диссипативной связью. Изв.вузов «ПНД». 2003. Т. 11, № 6. С. 48.
14. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И.* Особенности устройства пространства параметров двух связанных осцилляторов ван дер Поля–Дуффинга. Изв.вузов «ПНД». 2005. Т. 13, № 4. С. 3.
15. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И., Роман Ю.П.* Особенности синхронизации в системе связанных осцилляторов ван дер Поля, неидентичных по управляющему параметру // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33, вып. 15. С. 15.
16. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И., Роман Ю.П.* Особенности синхронизации в системе неидентичных связанных осцилляторов ван дер Поля и ван дер Поля–Дуффинга. Широкополосная синхронизация // Изв.вузов «ПНД». 2007. № 4. С. 3.
17. *Kuznetsov A.P., Roman Ju.P.* Properties of synchronization in the systems of non-identical coupled van der Pol and van der Pol–Duffing oscillators. Broadband synchronization // Physica D238. 2009. № 16. P. 1499.
18. *Doedel E., Paffenroth R.C., Fairgrieve T.F., Kuznetsov Y.A., Oldeman B.E., Sandstede B., Wang X.* «AUTO-2000: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations (with HOMCONT)». Technical report. Concordia University, 2002.
19. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах: Механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиофизических системах. Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы. 1990. 312 с.

*Саратовский государственный
университет*

*Поступила в редакцию 9.06.2009
После доработки 24.02.2009*

BIFURCATION ANALYSIS OF SYNCHRONIZATION AND AMPLITUDE DEATH IN COUPLED GENERATORS WITH INERTIAL NONLINEARITY

V.V. Astakhov, S.A. Koblyanskiy, A.V. Shabunin

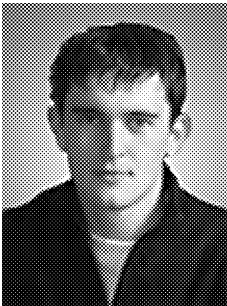
The results of analysis of bifurcation transitions to synchronous regimes and amplitude death are discussed for two dissipatively coupled generators with inertial nonlinearity. It was determined that there are two types of synchronization regions in this system: first consists of both frequency lock and suppression areas, second has only frequency lock area. At the weakly non-identical excitement parameters the first-type synchronization regions merge together. It makes possible the non-bifurcational way of transition between synchronization regions with different rotation numbers.

Keywords: Synchronization, broadband synchronization, «amplitude death».



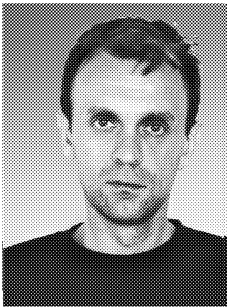
Астахов Владимир Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1980). Доктор физико-математических наук (1999), профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов – теория колебаний и динамический хаос, синхронизация и управление хаосом. Имеет более 80 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: astakhov@chaos.ssu.runnet.ru



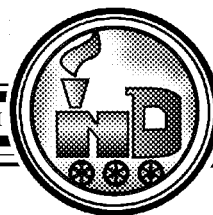
Коблянский Сергей Андреевич – окончил Саратовский государственный университет (2006), аспирант кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. Научные интересы: управление хаосом и мультистабильностью в сосредоточенных и распределенных динамических системах с помощью регулярных и шумовых воздействий. Автор 3 статей по данным направлениям.

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: sergeyk@chaos.ssu.runnet.ru



Шабунин Алексей Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1990). Доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ, доктор физико-математических наук (2008). Научные интересы – нелинейная динамика, теория колебаний, синхронизация и управление хаосом. Автор более 40 научных публикаций.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: shabuninav@info.sgu.ru



РИТМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ АВТОРЕГУЛЯЦИИ ПОЧЕЧНОГО КРОВотоКА И ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В ФОРМЕ МОДУЛЯЦИИ КОЛЕБАНИЙ

О.Н. Павлова, А.Н. Павлов

Авторегуляция почечного кровотока на уровне индивидуальных нефронов включает два взаимодействующих механизма, приводящих к генерации колебаний с разными временными масштабами: канальцево-гломерулярную обратную связь и миогенный отклик. На основе вейвлет-анализа экспериментальных данных в данной работе изучаются эффекты амплитудной и частотной модуляции миогенных колебаний ритмом канальцево-гломерулярной обратной связи. Отмечаются особенности нелинейных зависимостей девиации амплитуды и частоты модулируемого процесса от амплитуды модулирующих колебаний. Показывается, что эффекты модуляции существенно отличаются в норме и при гипертензии.

Ключевые слова: Почечная авторегуляция кровотока, ритмические процессы, вейвлет-анализ.

Введение

Обнаружение нелинейных явлений в динамике сложных систем путем анализа экспериментальных данных представляло собой предмет интенсивных исследований на протяжении последних десятилетий. Для биологических систем эти явления могут быть связаны с нелинейными свойствами индивидуальных функциональных элементов или возникать из-за наличия нелинейной связи между взаимодействующими подсистемами. На практике часто бывает сложно диагностировать наличие слабой нелинейной динамики, в то время как сильные нелинейности обнаружить значительно проще [1]. Цель многих проводившихся ранее исследований состояла в том, чтобы выявить наличие нелинейных свойств при анализе скалярных временных рядов, то есть дискретизованных по времени значений одной переменной состояния [2–6]. Позднее были предложены тесты для диагностики нелинейности при анализе нескольких одновременно регистрируемых переменных [7].

Однако во многих задачах, представляющих интерес для практики, важно не только продиагностировать наличие нелинейных характеристик, но и получить информацию о параметрах системы, при которых наблюдается та или иная динамика.

Данная ситуация особенно актуальна для исследований, которые включают математическое моделирование реальных объектов. В этом случае параметры, оцениваемые по экспериментальным данным, используются для создания детального математического описания. За последние годы был разработан ряд новых подходов для исследования нелинейных свойств взаимодействующих систем и извлечения количественной информации об этих взаимодействиях из регистрируемых сигналов [8–13]. Значительное число работ было посвящено анализу универсального явления синхронизации [8–12]. В частности, стало возможным получать информацию о параметрах взаимодействия, недоступных прямому измерению, таких как направление, коэффициент связи и величина задержки в связи между подсистемами [9–11,14]. Различные методики диагностики эффектов синхронизации неоднократно применялись к анализу сложной динамики живых объектов [15–19].

В рамках данной работы анализируется нелинейное взаимодействие между механизмами почечной авторегуляции кровотока на уровне индивидуальных нефронов. Изучение динамики нефронов в последние годы стало вызывать значительный интерес исследователей, занимающихся проблемой генеза почечной гипертензии, поскольку стало ясно, что данная патология сопровождается изменениями как режима функционирования отдельных нефронов, так и эффектов взаимодействия колебательных процессов в динамике их ансамблей.

К настоящему времени установлены два механизма авторегуляции почечного кровотока в нефронах. Одним из них является миогенный отклик [20, 21]. Повышение давления крови, протекающей по сосудам (артериолам), приводит к их ритмическим сокращениям и колебаниям диаметра артериол с частотой примерно 0.1–0.2 Гц. Вторым механизмом является канальцево-гломерулярная обратная связь (КГОС) [22, 23]. Она осуществляет регуляцию кровотока в зависимости от концентрации ионов NaCl в фильтрате. Увеличение скорости фильтрации приводит к росту концентрации ионов, что вызывает активизацию гладких мышц стенок сосудов. В результате меняется их сопротивление, приводящее к тому, что скорость фильтрации возвращается к первоначальному значению [24]. Поскольку время протекания потока жидкости по канальцам является сравнительно большим, существует временная задержка между изменением концентрации ионов и подстройкой скорости фильтрации, вызванной этим изменением. Наличие задержки приводит к неустойчивости механизма КГОС и возникновению колебаний величины давления фильтрата с частотой примерно 0.02–0.04 Гц. Соответствующие колебания (с другой амплитудой и фазой) можно также зарегистрировать в артериолах.

Согласно результатам экспериментальных исследований, которые проводились на крысах научной группой проф. N.-H. Holstein-Rathlou (институт Панум, университет Копенгагена), незатухающие колебания, обусловленные механизмом КГОС, являются почти периодическими при нормальном артериальном давлении, но сильно нерегулярными (хаотическими) при гипертензии [25–27]. Важно отметить, что хаотизация колебаний в настоящее время обнаружена вне зависимости от формы гипертензии – эффект усложнения динамики наблюдался как для нефронов спонтанных гипертензивных крыс (генетическая форма гипертензии), так и при искусственно вызванной гипертензии Голдблатта [28, 29].

Оба упомянутых механизма (КГОС и миогенный отклик) взаимодействуют между собой, поскольку воздействуют на одну и ту же артериолу. Вследствие этого усиление одного механизма оказывает влияние на другой. Наличие взаимодей-

ствия между отмеченными механизмами в форме синхронизации и модуляции колебаний ранее исследовалось авторами в работах [30–35]. В данной статье рассматриваются специфические особенности эффектов модуляции в почечной авторегуляции кровотока. Используя два варианта экспериментальных записей (давление в проксимальном канальце и поток крови в приносящей артериоле), изучается, каким образом свойства модуляции зависят от амплитуды колебаний, порождаемых механизмом КГОС.

1. Эксперименты

В работе использовались данные двух серий экспериментов, проводившихся научными группами проф. N.-H. Holstein-Rathlou и D.J. Marsh, которые ранее уже анализировались в ходе совместных исследований механизмов авторегуляции и эффектов взаимодействия ритмических процессов [30–35].

Первая серия экспериментов проводилась на двух группах анестезированных крыс (самцов) весом 250–300 грамм и возрастом 12–16 недель. Одну группу составляли 13 крыс с нормальным артериальным давлением, другую – 18 спонтанных гипертензивных крыс (имеющих генетическую форму гипертонии). Измерения давления жидкости в проксимальных канальцах с использованием полиэтиленовых катетеров проводились одновременно для 2–3 нефронов, расположенных на поверхности левой почки крысы. Время каждой записи составляло от 10 до 21 минуты. Для нормотензивных крыс (группа 1) было зафиксировано среднее значение артериального давления 111 ± 3 мм.рт.ст., для гипертензивных крыс (группа 2): 144 ± 5 мм.рт.ст. Общее количество сигналов давления в проксимальных канальцах, полученных в рамках проводимых экспериментов, составляло, соответственно, 32 и 42 для 1-й и 2-й группы. Данные сигналы подвергались предварительной фильтрации (фильтр нижних частот, частота среза 1.5 Гц). Шаг дискретизации выбирался таким образом, чтобы количество точек временного ряда для всех записей составляло постоянную величину 4096. Все эксперименты были выполнены в университете Копенгагена (институт Панум).

Вторая серия экспериментов проводилась в университете Южной Калифорнии (США) в группе проф. D.J. Marsh. В рамках этих экспериментов измерялась величина потока крови в приносящих артериолах поверхностных нефронов. Экспериментальная процедура соответствует предыдущему случаю за исключением того, что не применяются катетеры для регистрации сигналов давления в проксимальных канальцах, а измеряется поток крови с использованием лазерного доплеровского метода [36]. При этом были записаны данные 11 крыс с нормальным давлением (SD) и 17 крыс с повышенным давлением – спонтанных гипертензивных крыс (SHR); регистрировался 1 сигнал от каждой крысы. Кроме этого, были рассмотрены 14 животных с искусственно вызванной гипертонией (гипертония Голдблатта [28]), запись проводилась при нормальном давлении (SDA) и после искусственного повышения давления (SHRA). По аналогии с предыдущей серией экспериментов, время каждой записи составляло 10–20 минут, однако количество точек временного ряда не было постоянным (оно варьировалось в диапазоне от 4000 до 8500).

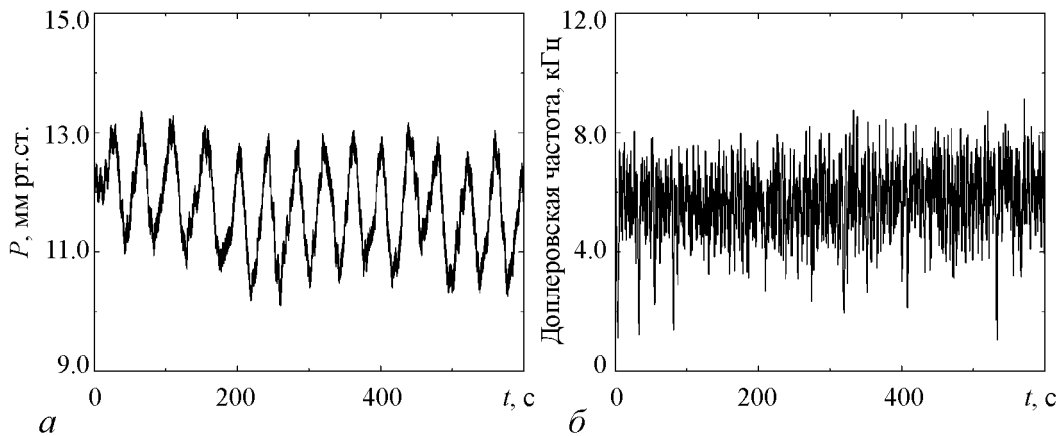


Рис. 1. Типичные примеры сигналов давления в проксимальном канальце (а) и потока крови в приносящей артериоле, регистрируемого с помощью лазерного доплеровского метода (б).

Типичные примеры записанных сигналов представлены на рис. 1. По сравнению с давлением в проксимальном канальце (рис. 1, а) сигналы, полученные с применением лазерного доплеровского метода (рис. 1, б), являются более зашумленными, и в них не столь четко выражен ритм, обусловленный механизмом КГОС. Однако в соответствующих сигналах (см. рис. 1, б) сильнее проявляется миогенная динамика, что упрощает исследование быстрого ритма авторегуляции кровотока (пик в спектре на частоте миогенных колебаний имеет сравнительно большую амплитуду и, как следствие, легче идентифицировать мгновенные характеристики колебательного процесса).

Наличие разных вариантов патологии (генетическая форма гипертензии и искусственно вызванная гипертензия Голдблатта) позволяет проанализировать, насколько однотипной является перестройка режимов колебаний при нарушении нормального функционирования организма.

2. Методика анализа экспериментальных данных

Из-за наличия нестационарной многочастотной динамики основным инструментом численного исследования экспериментальных записей был выбран вейвлет-анализ, который позволяет обнаруживать изменения ритмической активности по коротким фрагментам сигналов [37-39]. Непрерывное вейвлет-преобразование процесса $x(t)$ можно записать следующим образом:

$$W(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt, \quad (1)$$

где функция ψ называется вейвлетом, который подвергается масштабным преобразованиям и переносам: $\psi_{a,b} = \psi([t-b]/a)$. Параметры a и b характеризуют, соот-

ветственно, временной масштаб и локализацию, а звездочка обозначает комплексное сопряжение. Для изучения различных ритмических компонент традиционно используют функцию Морле

$$\psi(\tau) = \frac{1}{\pi^{1/4}} \left(\exp(j2\pi f_0 \tau) - \exp\left(-\frac{(2\pi f_0)^2}{2}\right) \right) \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right), \quad (2)$$

где выбором параметра f_0 осуществляется компромисс между разрешением по частоте и по времени: уменьшение f_0 улучшает спектральное разрешение, но это достигается ухудшением разрешения во временной области, и наоборот. Слагаемое $\exp(-(2\pi f_0)^2/2)$ используется для корректировки результатов вейвлет-преобразования сигналов, имеющих ненулевое среднее значение. На практике часто им пренебрегают особенно, если $f_0 \gg 0$. В данной работе рассматривается значение $f_0 = 1$. В этом случае взаимосвязь между параметром масштаба a и частотой колебаний имеет простое выражение: $f \simeq 1/a$, а отмеченным слагаемым $\exp(-(2\pi f_0)^2/2)$ традиционно пренебрегают, что вполне корректно сделать, если осуществить предварительное приведение экспериментальных данных к нулевому среднему значению. В проводимом в рамках данной работы анализе исследовалась временная динамика локальных пиков энергетического спектра $E(f, b) = |W(f, b)|^2$. Мгновенные частоты и амплитуды ритмов в каждый момент времени определялись путем анализа сечений поверхности $E(f, b)$ по аналогии с работами [30, 31]. Примеры идентификации мгновенных характеристик ритмических процессов представлены на рис. 2.

Как уже отмечалось в работах [32, 33], сосуществование колебательных процессов в почечной авторегуляции кровотока приводит к модуляции амплитуды и частоты быстрого (миогенного) ритма более медленным процессом, обусловленным наличием цепи КГОС. При изучении частотной модуляции быстрого ритмического процесса более медленными колебаниями девиация частоты $\Delta f = (f_{\text{быстр}}^{\text{макс}} - f_{\text{быстр}}^{\text{мин}})/2$ может служить в качестве меры взаимодействия между колебательными

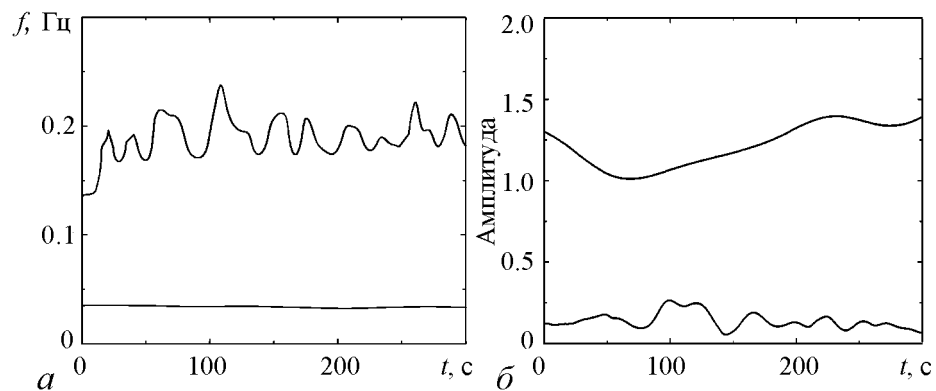


Рис. 2. Выделенные из сигнала давления в проксимальном канальце временные зависимости мгновенных частот (а) и мгновенных амплитуд (б) ритмических процессов. На рисунке (б) верхняя кривая соответствует ритму КГОС, нижняя – миогенной динамике. Погрешность идентификации мгновенных характеристик не превышает 3%

процессами (рис. 3). Аналогичная величина может быть введена для описания амплитудных изменений быстрого ритма $\Delta a = (a_{\text{быстр}}^{\text{макс}} - a_{\text{быстр}}^{\text{мин}})/2$.

Из-за наличия нестационарности в динамике биологических систем данные характеристики непрерывно меняются во времени. Следовательно, для получения информации об истинной динамике необходимо анализировать их мгновенные значения (усредненные величины не позволяют отслеживать изменение во времени свойств модуляции). В связи с этим будем рассматривать Δf и Δa как функции аргумента t ,

вычисленные в пределах некоторого временного окна. Это более простой подход по сравнению с двойным вейвлет-анализом [32, 33]: если требуется только охарактеризовать изменения Δf или Δa без детального анализа спектра модулирующего сигнала, можно ограничиться однократным проведением вейвлет-преобразования. В рамках этого подхода вместо значения Δa целесообразно рассмотреть нормированную безразмерную величину – индекс амплитудной модуляции $M_a = \Delta a/a_{\text{сред}}$, где $a_{\text{сред}} = (a_{\text{быстр}}^{\text{макс}} + a_{\text{быстр}}^{\text{мин}})/2$ – среднее значение амплитуды быстрых колебаний ($a_{\text{сред}}$ также является функцией времени для нестационарных процессов), и индекс частотной модуляции $M_f = \Delta f/F$, где F – частота модулирующего (медленного) ритма. Индекс амплитудной модуляции принимает значения в диапазоне $0 \leq M_a \leq 1$.

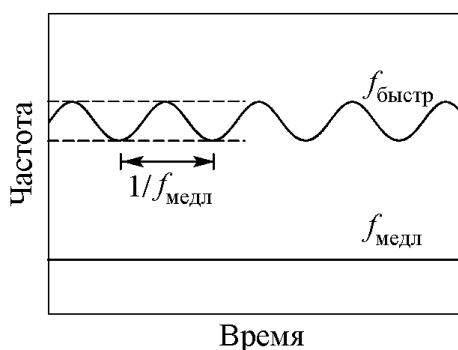


Рис. 3. Пример вейвлет-анализа сигнала с частотной модуляцией; $f_{\text{быстр}}$ и $f_{\text{медл}}$ обозначают мгновенные частоты быстрого (модулируемого) и медленного (модулирующего) ритма. Пунктиры обозначают величины $f_{\text{быстр}}^{\text{макс}}$ и $f_{\text{быстр}}^{\text{мин}}$

3. Результаты

3.1. Анализ сигналов давления в проксимальных канальцах. В работах [31–33] было показано, что миогенный ритм модулируется более медленными колебаниями, которые связаны с механизмом КГОС. Однако до настоящего времени не исследовалось, как частотная/амплитудная модуляция зависит от амплитуды медленных колебаний. Чтобы ответить на этот вопрос, были выбраны экспериментальные записи со сравнительно гладким поведением мгновенной частоты миогенного ритма $f_{\text{быстр}}(t)$ для минимизации возможных ошибок ее идентификации. Девияция частоты $\Delta f(t)$ вычислялась как функция времени $\Delta f(t) = (f_{\text{быстр}}^{\text{макс}}(t) - f_{\text{быстр}}^{\text{мин}}(t))/2$ в пределах временного окна протяженностью 10 сек. Полученная зависимость далее сглаживалась с помощью процедуры вычисления скользящего среднего [40].

На рис. 4 изображены примеры зависимости Δf от амплитуды колебаний, обусловленных механизмом КГОС для крысы с нормальным (рис. 4, а) и повышенным (рис. 4, б) артериальным давлением, а также аппроксимации данных зависимостей сигмоидной функцией

$$g(A) = \frac{cA^n}{1 + dA^n}. \quad (3)$$

Наличие аналогичных функциональных зависимостей наблюдается во взаимосвязи

сигнала КГОС с активацией гладких мышечных клеток в приносящей артериоле, как подтверждается, в частности, в экспериментальных исследованиях [25]. Мы рассматривали случай $n = 4$. Нелинейный характер функции (3) означает, что наблюдается насыщение для величины Δf при высоких значениях A . Это соответствует нашим экспериментальным исследованиям для амплитудной и частотной модуляции миогенных колебаний. Заметим, что возможность анализировать зависимость эффектов модуляции от амплитуды возникает из-за того, что вследствие нестационарности или наличия очень медленной динамики по сравнению с исследуемыми ритмами амплитуда колебаний, порождаемых механизмом КГОС, меняется во времени.

Аналогичный анализ был проведен для всех имеющихся экспериментальных данных. При этом не всегда удавалось получить удовлетворительные результаты. В силу различных причин, таких как сильная нестационарность, слишком зашумленные частотно-временные спектры и сравнительно малый диапазон изменений A не во всех случаях можно зарегистрировать нелинейный характер зависимости $\Delta f(A)$. На основе проведенных исследований можно отметить следующее.

а. Существуют значительные различия между нелинейными характеристиками $\Delta f(A)$ для крыс с нормальным и повышенным артериальным давлением (рис. 5, *а*). Отношение c/d и наклоны соответствующих аппроксимирующих кри-

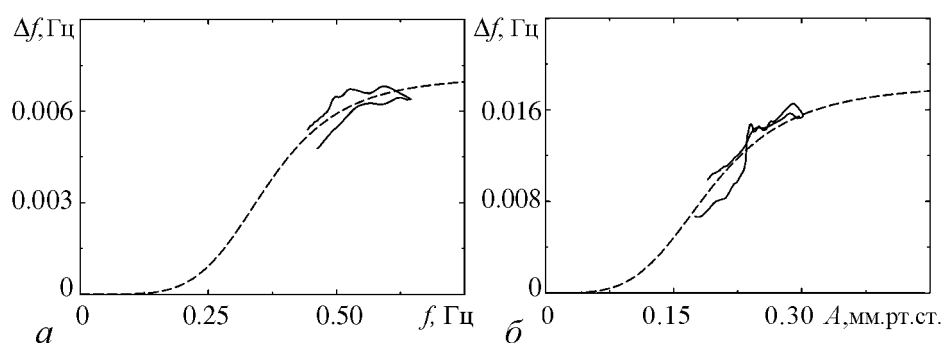


Рис. 4. Примеры нелинейного изменения девиации частоты с ростом амплитуды модулирующего ритма для крысы с нормальным (*а*) и повышенным (*б*) артериальным давлением

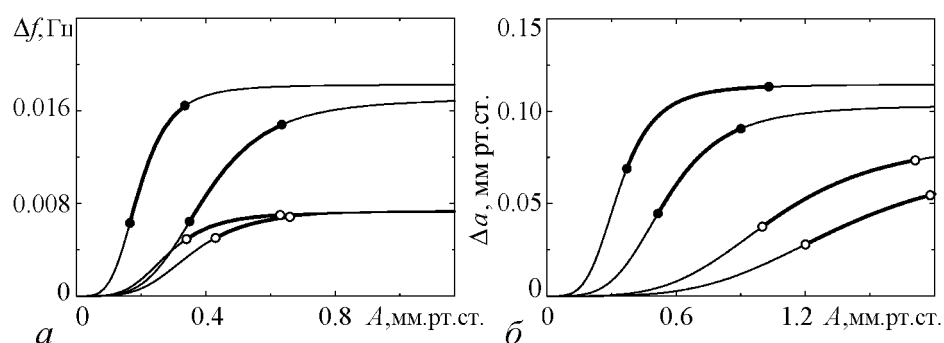


Рис. 5. Примеры нелинейных характеристик для случаев частотной (*а*) и амплитудной (*б*) модуляции. Отметим существенные различия результатов для крыс с нормальным (белые кружочки) и повышенным артериальным давлением (черные кружочки). Указанными символами отмечена область, которую можно достоверно проанализировать по экспериментальным данным

вых примерно в 2 раза больше для гипертензивных крыс. Аналогичные результаты наблюдаются для амплитудной модуляции миогенного ритма при рассмотрении девиации Δa от величины A . Примеры нелинейных характеристик, полученных при проведении аппроксимации функцией вида (3), представлены на рис. 5, б.

б. Обнаружен нелинейный рост для девиации частоты/амплитуды миогенного ритма при изменении амплитуды колебаний, вызванных механизмом КГОС для примерно 23% крыс с нормальным и 18% крыс с повышенным артериальным давлением. Последнее вовсе не означает отсутствие нелинейных эффектов для других нефронов. В частности, диапазон амплитудных изменений медленного ритма может быть очень незначительным, чтобы достичь области, где заметно проявляются нелинейные ограничения; в результате этого мы можем наблюдать лишь почти линейный участок зависимостей $\Delta f(A)$ и $\Delta a(A)$. В некоторых случаях изменения Δf и Δa являются очень слабыми, и соответствующие сигналы трудно классифицировать. Наконец, зависимости $\Delta f(A)$ и $\Delta a(A)$ могут демонстрировать достаточно нестабильное поведение (вероятно из-за сильной нестационарности). Экспериментальные данные, для которых мы не можем диагностировать тип упомянутых зависимостей, были выделены отдельно как неклассифицированные. Рис. 6 демонстрирует результаты статистического анализа для всех экспериментальных данных. Данная статистика скорее отражает наши возможности выявлять нелинейные характеристики из экспериментальных записей, чем истинное количество нефронов, для которых наблюдается нелинейный характер функций $\Delta f(A)$ и $\Delta a(A)$. Отметим, что число неклассифицированных записей больше для гипертензивных крыс, для которых сложнее решать задачу идентификации миогенного ритма.

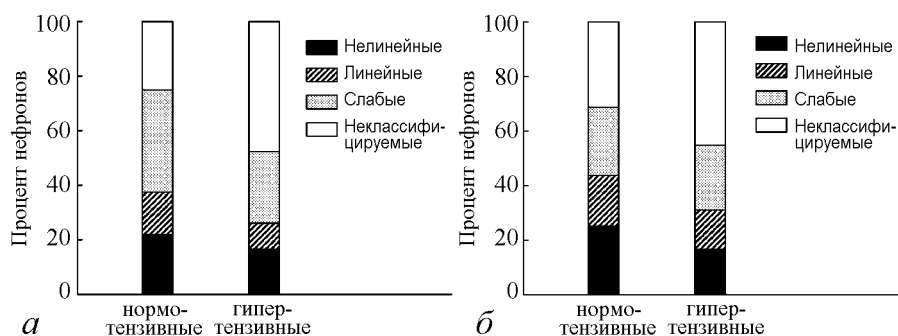


Рис. 6. Статистика выявленных эффектов по всему набору экспериментальных данных давления жидкости в проксимальных канальцах нефронов для случаев частотной (а) и амплитудной (б) модуляции

3.2. Анализ сигналов потока крови в приносящих артериолах. Временные зависимости давления филтраты в проксимальном канальце демонстрируют слабый уровень шума, но в то же время и малую амплитуду миогенных колебаний (как следствие, возникают сложности идентификации соответствующего ритма). Значительно более выраженные миогенные колебания можно наблюдать при помощи лазерного доплеровского метода для измерений величины потока крови в отдельной приносящей артериоле на поверхности почки [36]. Однако данные сигналы содержат более высокий уровень измерительного шума, что может создавать существенные проблемы при извлечении мгновенных частот и амплитуд быстрых ритмических компонент.

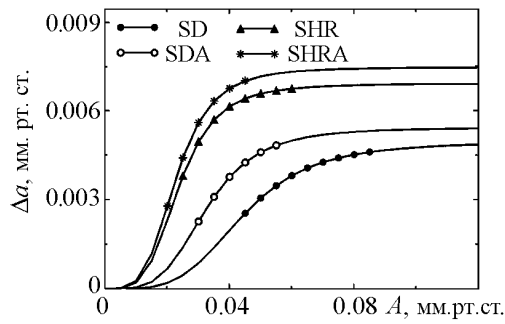


Рис. 7. Нелинейные характеристики, полученные по экспериментальным данным

Рис. 7 иллюстрирует примеры нелинейных характеристик $\Delta\alpha(A)$, полученных по экспериментальным данным, в которых нелинейные эффекты (а именно, существование нелинейной зависимости девиации частоты или амплитуды миогенного ритма от амплитуды ритма КГОС) являются наиболее наглядными и четко выраженными (здесь мы опять используем аппроксимацию (3) реальных зависимостей для случая $n = 4$). Наклон соответствующей кривой для нормотензивной крысы снова меньше чем для гипертензивной. В данном случае искусственно вызванное повышение артериального давления (гипертония Голдблатта) для нормотензивной крысы приводит к наклону, который занимает промежуточное положение между случаями SD и SHR. Искусственное повышение давления для гипертензивной крысы не демонстрирует заметных изменений нелинейной характеристики. Важно отметить, что для представленного примера мы ставили задачу лишь проиллюстрировать возможность изучения нелинейных эффектов во взаимодействии между ритмическими процессами механизма почечной авторегуляции. Выявление соответствующих нелинейных свойств требует высокого качества экспериментальных измерений и наличия плавных изменений амплитуды ритма, обусловленного механизмом КГОС. В проводившихся исследованиях только примерно 10-15% экспериментов полностью удовлетворяли всем этим требованиям.

Рис. 8 иллюстрирует полученную статистику. Несмотря на отмеченную проблему, мы можем констатировать существование принципиальной возможности определить нелинейную характеристику индекса модуляции по скалярному временному ряду. Полученная информация может быть использована в математическом моделировании биосистем. Форма нелинейной зависимости относится к числу характеристик, которые недоступны прямому измерению, поэтому возможность выявления ее из экспериментальных данных открывает новые возможности в области моделирования механизмов почечной авторегуляции.

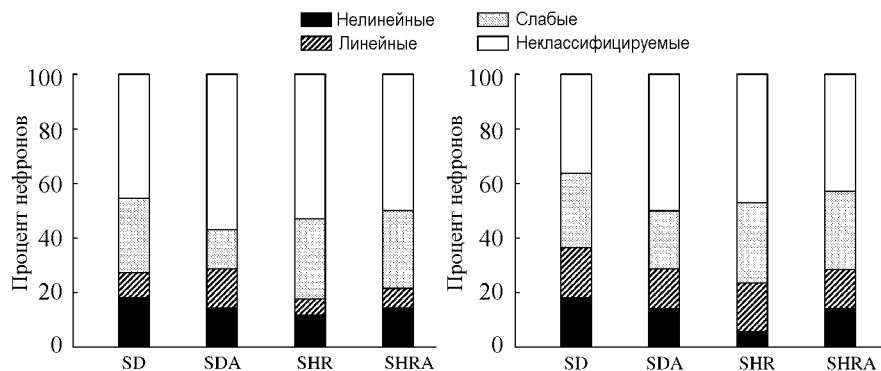


Рис. 8. Статистика выявленных эффектов по всему набору экспериментальных данных потока крови в приносящей артериоле на поверхности почки для случаев частотной (а) и амплитудной (б) модуляции

3.3. Анализ усредненных характеристик. Представленные выше результаты в основном относятся к извлечению информации о нелинейных характеристиках из экспериментальных временных рядов, при этом нам требуется корректно оценивать мгновенные значения различных величин. Статистический анализ динамики с процедурой проведения усреднения для каждой отдельной экспериментальной записи является более простым, поскольку усреднение упрощает многие существующие технические сложности. Отметим, что при проведении данного анализа желательно рассматривать индекс модуляции вместо девиации амплитуды Δa в связи со следующим обстоятельством. Часто усредненные значения Δa могут быть сравнимы для нормотензивных и гипертензивных крыс, но в то же время они соответствуют существенно отличающимся значениям средней амплитуды медленного ритма, то есть наклон зависимости $\Delta a(A)$ является более информативной величиной, чем лишь оценка диапазона возможных амплитудных изменений. При усреднении индекс модуляции является характеристикой, отражающей величину этого наклона.

Рис. 9 иллюстрирует зависимости индексов модуляции частоты M_f и амплитуды M_a от амплитуды медленного (модулирующего) ритма для записей колебаний давления жидкости в проксимальных канальцах. Хорошо видно, что нормотензивные крысы отличаются от спонтанных гипертензивных крыс – они демонстрируют значительно меньшие значения индексов модуляции для той же самой амплитуды A медленного ритма, обусловленного механизмом КГОС. Отметим, что величина A обычно меньше для гипертензивных крыс. С увеличением амплитуды модулирующего процесса происходит рост индексов M_f и M_a . Для нормотензивных крыс аналогичные изменения являются менее выраженными. В данном случае мы можем определить чувствительность частоты миогенной динамики к росту величины A путем вычисления другого наклона, а именно $k = M_f/A$. В результате получаются значения примерно $0.9 \text{ мм.рт.ст.}^{-1}$ и $4.3 \text{ мм.рт.ст.}^{-1}$. Иными словами, частота миогенной динамики является почти в 5 раз более чувствительной к амплитуде колебаний КГОС для спонтанных гипертензивных крыс по сравнению с крысами с нормальным артериальным давлением.

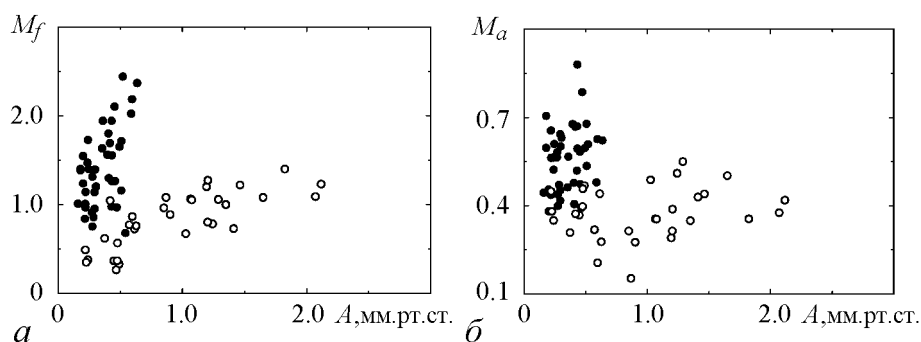


Рис. 9. Значения индекса частотной (a) и амплитудной (\bar{b}) модуляции миогенного ритма в зависимости от амплитуды модулирующего сигнала. Белые кружочки – нормотензивные крысы, черные – гипертензивные

Заключение

Извлечение информации о нелинейных явлениях в динамике живых систем из экспериментальных данных может в значительной степени способствовать решению задачи построения адекватных, физиологически обоснованных математических моделей биосистем. Многие характеристики их сложной динамики не могут быть непосредственно измерены в экспериментах, в частности, характеристики, описывающие связь между различными механизмами. Возможность получения такой информации из временных рядов может осуществляться на основе специальных методов анализа данных. В рамках данной работы решалась задача поиска нелинейных явлений в двух взаимодействующих процессах механизма почечной авторегуляции, а именно, в миогенных колебаниях и в ритмической динамике, обусловленной наличием цепи КГОС.

Анализ нелинейных явлений на уровне отдельного сигнала требует высокого качества экспериментальных данных – они не должны быть ни слишком зашумленными, ни слишком нестационарными, а также демонстрировать четко выраженный миогенный ритм для уменьшения возможных ошибок его идентификации при извлечении мгновенных частот и амплитуд из вейвлет-спектров. В частности, нам удалось выявить наличие нелинейных эффектов в модуляции только для, примерно, 23% нормотензивных крыс и 18% гипертензивных крыс (по данным давления в проксимальных канальцах). Другие сигналы не демонстрировали нелинейных характеристик по ряду причин, таких как малый диапазон изменения амплитуды модулирующих колебаний (этот диапазон должен быть достаточно большим и захватывать переход между линейной и нелинейной частями зависимостей $\Delta f(A)$ и $\Delta a(A)$), малая амплитуда миогенных колебаний (в результате мы наблюдаем достаточно зашумленные вейвлет-спектры, что приводит к возможным ошибкам идентификации мгновенной частоты миогенного ритма, которые оказывают влияние на последующий анализ). Тем не менее, если экспериментальные данные удовлетворяют всем отмеченным требованиям, существует возможность извлекать информацию о нелинейной зависимости девиаций Δf и Δa от амплитуды колебаний, обусловленных механизмом КГОС.

Статистическое исследование динамики (анализ усредненных данных, полученных для каждой экспериментальной записи) имеет некоторые преимущества с точки зрения более простой процедуры вычислений. В частности, при изучении усредненных характеристик становится менее критичным влияние возможных ошибок идентификации на первом этапе анализа для каждой индивидуальной записи: любые ошибки могут восприниматься как шум, эффект влияния которого снижается при усреднении. Статистический анализ позволяет выявить четкие различия в динамике нормотензивных и гипертензивных крыс, которые проявляются в росте девиаций Δf и Δa с увеличением амплитуды модулирующего сигнала.

В отличие от известных работ, которые ограничивались простой иллюстрацией наличия взаимодействия (синхронизации, модуляции), в рамках данного исследования проведено изучение нелинейных свойств двух взаимодействующих колебательных процессов при возрастании амплитуды колебаний, обусловленных задержкой

в цепи обратной связи. Обнаружено наличие нелинейных ограничений роста девиации частоты/амплитуды и существенные различия характеристик, описывающих этот рост для нормотензивных и гипертензивных крыс – наклон соответствующей зависимости примерно вдвое больше при гипертензии.

Авторы выражают искреннюю признательность N.-H. Holstein-Rathlou, D.J. Marsh за предоставленные данные, а также E. Mosekilde и O.B. Sosnovtseвой за многочисленные дискуссии. Проводимые исследования были поддержаны Федеральным агентством по образованию в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы.

Библиографический список

1. *Schreiber T.* Interdisciplinary application of nonlinear time series methods // *Physics Reports.* 1999. Vol. 308, № 1. P. 11.
2. *Tsay R.S.* Detecting and modeling nonlinearity in univariate time series analysis // *Statistica Sinica.* 1991. Vol. 1. P. 431.
3. *Kaplan D.T. and Glass L.* Direct test for determinism in a time series // *Phys. Rev. Lett.* 1992. Vol. 68. P. 427.
4. *Kennel M.B. and Isabelle S.* Method to distinguish possible chaos from colored noise and to determine embedding parameters // *Phys. Rev. A.* 1992. Vol. 46. P. 3111.
5. *Theiler J., Galdrikian B., Longtin A., Eubank S., and Farmer J.D.* Detecting nonlinear structure in time series // *Physica D.* 1992. Vol. 58. P. 77.
6. *Paluš M.* Testing for nonlinearity using redundancies: Quantitative and qualitative aspects // *Physica D.* 1995. Vol. 80. P. 186.
7. *Paluš M.* Detecting nonlinearity in multivariate time series // *Phys. Lett. A.* 1996. Vol. 213. P. 138.
8. *Janson N.B., Balanov A.G., Anishchenko V.S., and McClintock P.V.E.* Phase synchronization between several interacting processes from univariate data // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 86. P. 1749.
9. *Rosenblum M.G. and Pikovsky A.S.* Detecting direction of coupling in interacting oscillators // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 64. 045202(R).
10. *Paluš M. and Štefanovska A.* Direction of coupling from phases of interacting oscillators: An information-theoretic approach // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 67. 055201.
11. *Smirnov D.A. and Bezruchko B.P.* Estimation of interaction strength and direction from short and noisy time series // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 68. P. 046209.
12. *Cimponeriu L., Rosenblum M., and Pikovsky A.* Estimation of delay in coupling from time series // *Phys. Rev. E.* 2004. Vol. 70. 046213.
13. *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H., and Marsh D.J.* Double-wavelet approach to study frequency and amplitude modulation in renal autoregulation // *Phys. Rev. E.* 2004. Vol. 70. 031915.

14. *Bezruchko B., Ponomarenko V., Rosenblum M.G., and Pikovsky A.S.* Characterizing direction of coupling from experimental observations // *Chaos*. 2003. Vol. 13. P. 179.
15. *Paluš M., Komárek V., Hrnčíř Z., and Štěrbová K.* Synchronization as adjustment of information rates: Detection from bivariate time series // *Phys. Rev. E*. 2001. Vol. 63. 046211.
16. *Janson N.B., Balanov A.G., Anishchenko V.S., and McClintock P.V.E.* Phase relationships between two or more interacting processes from one-dimensional time series. II. Application to heart-rate-variability data // *Phys. Rev. E*. 2002. Vol. 65. 036212.
17. *Rosenblum M.G., Cimponeriu L., Bezerianos A., Patzak A., and Mrowka R.* Identification of coupling direction: Application to cardiorespiratory interaction // *Phys. Rev. E*. 2002. Vol. 65. 041909.
18. *Mrowka R., Cimponeriu L., Patzak A. and Rosenblum M.G.* Directionality of coupling of physiological subsystems – age related changes of cardiorespiratory interaction during different sleep stages in babies // *Am. J. Physiol. Regul. Comp. Integr. Physiol.* 2003. Vol. 285. R1395-R1401.
19. *Smirnov D.A., Bodrov M.B., Perez Velazquez J.L., Wennberg R.A., and Bezruchko B.P.* Estimation of coupling between oscillators from short time series via phase dynamics modeling: Limitations and application to EEG data // *Chaos*. 2005. Vol. 15. 024102.
20. *Gonzalez-Fernandez J.M., Ermentrout G.B.* On the origin and dynamics of the vasomotion of small arteries // *Math. Biosci.* 1994. Vol. 240. P. 127.
21. *Horowitz A., Menice C.B., Laporte R., Morgan K.G.* Mechanisms of smooth muscle contraction // *Physiol. Rev.* 1996. Vol. 76. P. 967.
22. *Leyssac P.P., Holstein-Rathlou N.-H.* Effects of various transport inhibitors on oscillating tubuloglomerular feedback pressure responses in the rat // *Pflügers Arch.* 1986. Vol. 407. P. 285.
23. *Chon K.H., Raghavan R., Chen Y.M., Marsh D.J., Yip K.-P.* Interactions of TGF-dependent and TGF-independent oscillations in tubular pressure // *Am. J. Physiol. (Renal Physiol.)* 2005. Vol. 288. P. F298.
24. *Casellas D., Moore L.C.* Autoregulation and tubuloglomerular feedback in juxtamedullary glomerular arterioles // *Am. J. Physiol. (Renal Fluid Electrolyte Physiol.)* 1990. Vol. 258. P. F660.
25. *Holstein-Rathlou N.-H., He J., Wagner A.J., Marsh D.J.* Patterns of blood pressure variability in normotensive and hypertensive rats // *Am. J. Physiol. (Regul. Integr. Comp. Physiol.)* 1995. Vol. 269. P. R1230.
26. *Holstein-Rathlou N.-H., Leyssac P.P.* TGF-mediated oscillations in the proximal intratubular pressure: differences between spontaneously hypertensive rats and Wistar-Kyoto rats // *Acta Physiol. Scand.* 1986. Vol. 126. P. 333.

27. *Leyssac P.P., Holstein-Rathlou N.-H.* Tubulo-glomerular feedback response: enhancement in adult spontaneously hypertensive rats and effects of anaesthetics // *Pflügers Arch.* 1989. Vol. 413. P. 267.
28. *Yip K.-P., Holstein-Rathlou N.-H., Marsh D.J.* Chaos in blood flow control in genetic and renovascular hypertensive rats // *Am. J. Physiol. (Renal Fluid Electrolyte Physiol.)* 1991. Vol. 261. P. F400.
29. *Yip K.-P., Marsh D.J., Holstein-Rathlou N.-H.* Low dimensional chaos in renal blood flow control in genetic and experimental hypertension // *Physica D.* 1995. Vol. 80. P. 95.
30. *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E., Yip K.-P., Holstein-Rathlou N.-H., Marsh D.J.* Synchronization among mechanisms of renal autoregulation is reduced in hypertensive rats // *Am. J. Physiol. (Renal Physiol.)*. 2007. Vol. 293. P. F1545.
31. *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H., Marsh D.J.* Double-wavelet approach to study frequency and amplitude modulation in renal autoregulation // *Phys. Rev. E.* 2004. Vol. 70. P. 031915.
32. *Marsh D.J., Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Yip K.-P., Holstein-Rathlou N.-H.* Frequency encoding in renal blood flow regulation // *Am. J. Physiol. (Regul. Integr. Comp. Physiol.)*. 2005. Vol. 288. P. R1160.
33. *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H., Marsh D.J.* Double-wavelet approach to studying the modulation properties of nonstationary multimode dynamics // *Physiological Measurement.* 2005. Vol. 26. P. 351.
34. *Pavlov A.N., Makarov V.A., Mosekilde E., Sosnovtseva O.V.* Application of wavelet-based tools to study the dynamics of biological processes // *Briefings in Bioinformatics.* 2006. Vol. 7. P. 375.
35. *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Pavlova O.N., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H.* Characterizing the effect of L-name on intra- and inter-nephron synchronization // *European Journal of Pharmaceutical Sciences.* 2009. Vol. 36. P. 39.
36. *Smedley G.T., Yip K.-P., Wagner, A.J., Dubovitsky S., Marsh D.J.* A laser Doppler velocimetry instrument for in-vivo measurements of blood flow in single renal arterioles // *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 1993. Vol. 40. P. 290.
37. *Mallat S.G.* A wavelet tour of signal processing. New York: Academic Press, 1998.
38. *Addison P.S.* The illustrated wavelet transform handbook: applications in science, engineering, medicine and finance. Bristol; Philadelphia: IOP Publishing, 2002.
39. *Kaiser G.* A friendly guide to wavelets. Boston: Birkhäuser, 1994.
40. *Press W.H., Flannery B.P., Teucolsky S.A., Vetterling W.T.* Numerical recipes: the art of scientific computing / Cambridge University Press, New York, 1986.

*Саратовский государственный
университет*

*Поступила в редакцию
После доработки*

*3.09.2009
17.02.2010*

RHYTHMIC PROCESSES OF RENAL BLOOD FLOW AUTOREGULATION AND THEIR INTERACTION IN THE FORM OF MODULATION OF OSCILLATIONS

O.N. Pavlova, A.N. Pavlov

Renal blood flow autoregulation at the level of individual nephrons includes two interacting mechanisms that produce oscillations with different time scales: the tubuloglomerular feedback (TGF) and the myogenic response. Based on the wavelet-analysis of experimental data, we study in this work phenomena of amplitude and frequency modulation of myogenic oscillations by the TGF-rhythm. Features of nonlinear dependencies of amplitude and frequency deviation of modulated process versus the amplitude of modulating oscillations are revealed. It is shown that phenomena of modulation are essentially different between normal and hypertensive states.

Keywords: Renal blood flow autoregulation, rhythmic processes, wavelet-analysis.



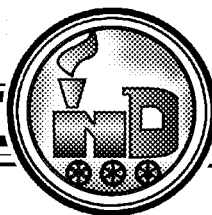
Павлова Ольга Николаевна – родилась в Саратове (1985). Окончила физический факультет Саратовского университета по специальности биохимическая физика (2007). В настоящее время работает ассистентом на кафедре радиофизики и нелинейной динамики. Область научных интересов: динамика биологических систем. Имеет около 20 работ, опубликованных в отечественной и зарубежной печати.

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: pavlova_olya@yahoo.com



Павлов Алексей Николаевич – родился в Саратове (1973). Окончил физический факультет Саратовского университета по специальности радиофизика и электроника (1995). Кандидат физико-математических наук (1998). В настоящее время работает доцентом на кафедре радиофизики и нелинейной динамики. Область научных интересов: анализ временных рядов. Имеет более 80 работ, опубликованных в отечественной и зарубежной печати.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: pavlov_lesha@mail.ru



РЕЖИМЫ ДИНАМИКИ МОДЕЛИ ДВУХВОЗРАСТНОЙ ПОПУЛЯЦИИ

Е.Я. Фрисман, Г.П. Неверова, О.Л. Ревуцкая, М.П. Кулаков

Исследуется модель динамики численности популяции с сезонным характером размножения. Предполагается, что популяция может быть представлена к началу очередного сезона размножения совокупностью двух возрастных классов: младшего, включающего неполовозрелых особей, и старшего, состоящего из особей, участвующих в размножении. Параметры модели (коэффициенты рождаемости и выживаемости) представлены экспоненциальными функциями численностей обеих возрастных групп, и, тем самым, осуществляется плотностно-зависимая регуляция роста популяции. Проведено аналитическое и численное исследование модели. Показано, что плотностно-зависимые факторы регуляции роста популяции могут привести к возникновению колебаний численности и к хаотическому поведению популяции.

Ключевые слова: Модели популяционной динамики, дискретные во времени модели, возрастная структура, плотностно-зависимые факторы, устойчивость, бифуркации, динамические режимы, хаос.

Введение

Открытие циклических и хаотических режимов в простейших моделях динамики биологических популяций [1–5] дало новый импульс исследованиям природы популяционных колебаний. Обоснование и развитие матричных моделей популяций [6–11] позволяют подробно описывать и исследовать роль и значение возрастной структуры и стадийности развития для поддержания и эволюции популяционной цикличности [12–14]. Наиболее впечатляющими здесь оказываются различные эффекты нелинейности, проявляющиеся уже в простейших моделях популяций с возрастной структурой, представленной всего двумя возрастными группами особей [15–19].

В данной работе продолжено исследование математической модели динамики численности двухвозрастной популяции [4,16,17]. В отличие от предшествующих работ, в которых предполагалось, что на рождаемость или выживаемость определенного возрастного класса влияет только его численность (или численность всей популяции), здесь анализируются случаи, когда коэффициенты рождаемости и выживаемости являются функциями численности обеих возрастных групп. Такая постановка

задачи в полном виде до сих пор не рассматривалась, ее исследование позволяет проследить качественную картину изменения динамического поведения предлагаемой модели (сценарии переходов от устойчивой динамики к периодическим, квазипериодическим или хаотическим режимам) в зависимости от вида плотностной регуляции численности и интенсивности конкурентного давления двух возрастных классов друг на друга.

1. Уравнения динамики

Исследуемая модель соответствует ситуации, когда популяция может быть представлена к началу очередного сезона размножения совокупностью двух возрастных классов: младшего, включающего неполовозрелых особей, и старшего, состоящего из особей, участвующих в размножении. Предполагается, что времени, протекающего между двумя последовательными периодами размножения, достаточно для развития особей младшего возраста до половозрелого состояния, а новорожденных особей – до состояния младшего возраста. Выживаемость и репродуктивная способность половозрелых особей не зависят от возраста, то есть отсутствуют возрастные различия у взрослых особей [16]. Описанная ситуация характерна для организмов с небольшим временем жизни, включающим два-три периода размножения. Примерами могут служить мелкие млекопитающие (мышевидные грызуны, белчьи и т.п.), быстросозревающие рыбы (такие как навага, корюшка и др.), многие насекомые, двух- и трехлетние растения [16,17,20]. Именно мышевидные грызуны, быстросозревающие виды рыб и насекомые обладают сложной флуктуирующей динамикой и являются наиболее частыми объектами исследований в экспериментальной и яркими примерами в теоретической популяционной биологии.

При условии, что на развитие популяции оказывают влияние плотностно-зависимые факторы, уравнения динамики численности двухвозрастной лимитированной популяции имеют вид

$$\begin{cases} x_{n+1} = a(x_n, y_n)y_n, \\ y_{n+1} = s(x_n, y_n)x_n + v(x_n, y_n)y_n, \end{cases} \quad (1)$$

где x – численность младшего возрастного класса; y – численность старшего возрастного класса, составляющего репродуктивную часть популяции; n – номер периода размножения; $a(x, y)$ – функция, характеризующая зависимость рождаемости от численностей возрастных классов; $s(x, y)$, $v(x, y)$ – функции, определяющие зависимость выживаемости неполовозрелых и половозрелых особей от соответствующих численностей.

Предполагается, что функции $a(x, y)$, $s(x, y)$, $v(x, y)$ монотонно убывают и стремятся к нулю при бесконечном возрастании каждого из аргументов. Тем самым осуществляется плотностно-зависимое лимитирование роста численности популяции. Действительно, поскольку здесь рассматривается изолированная популяция, населяющая некоторый фиксированный ареал, плотность населения (численность на единицу площади) оказывается пропорциональной (и в этом смысле «синонимичной») численности. Рост численности сопровождается пропорциональным увеличением плотности населения и вызывает цепочку событий (таких, как известный и хорошо изученный стресс-синдром [20]), приводящих в итоге к падению рождаемости или выживаемости.

Далее рассмотрим и сравним поведение этой модели в следующих важных частных случаях.

- Лимитирующие факторы роста численности популяции воздействуют только на рождаемость популяции: $s(x_n, y_n) = s = \text{const}$, $v(x_n, y_n) = v = \text{const}$.

- Действие лимитирующих факторов сосредоточено на стадии неполовозрелого возрастного класса: $a(x_n, y_n) = a = \text{const}$, $v(x_n, y_n) = v = \text{const}$.

- Лимитирующие факторы роста численности популяции действуют только в репродуктивной части популяции: $a(x_n, y_n) = a = \text{const}$, $s(x_n, y_n) = s = \text{const}$.

Функции, характеризующие зависимость значений параметров a , s и v от численности возрастных классов популяции, выбраны по аналогии с моделью Рикера:

$$a(x, y) = ae^{-\alpha x - \beta y}, \quad s(x, y) = e^{-\alpha x - \beta y}, \quad v(x, y) = e^{-\alpha x - \beta y},$$

где a – репродуктивный потенциал популяции, α и β – коэффициенты, характеризующие интенсивности воздействия особей неполовозрелого и половозрелого возрастного класса на соответствующий демографический параметр. Для фиксированных значений параметров естественны следующие ограничения: $a > 0$, $0 < v \leq 1$, $0 < s \leq 1$.

2. Плотностное лимитирование рождаемости

Рождаемость многих животных, особенно мелких млекопитающих, заметно снижается по мере увеличения численности популяции. Это обычно является основным проявлением стресс-синдрома, приводящего к снижению половой активности и уменьшению плодовитости особей, вплоть до рассасывания части заложенных эмбрионов. Подобная картина наблюдается у видов, подверженных сильным колебаниям численности, например, у леммингов, полевок и др. [20]. Данной ситуации соответствует следующий частный случай модели (1):

$$\begin{cases} x_{n+1} = ay_n \exp(-\alpha x_n - \beta y_n), \\ y_{n+1} = sx_n + vy_n. \end{cases} \quad (2)$$

При переходе к безразмерным переменным $\beta x \rightarrow x$ и $\beta y \rightarrow y$ модель (2) сводится к виду:

$$\begin{cases} x_{n+1} = ay_n \exp(-\gamma x_n - y_n), \\ y_{n+1} = sx_n + vy_n, \end{cases} \quad (3)$$

где $\gamma = \alpha/\beta$. Исследование системы упрощается, если ввести параметры $r = as$ и $b = \gamma/s$. Параметр r в этом случае характеризует репродуктивный потенциал популяции, параметр b – относительный вклад младшей возрастной группы в лимитирование процесса воспроизводства. Система (3) может иметь единственное ненулевое (нетривиальное) стационарное решение

$$\bar{x} = \frac{1-v}{s(b-vb+1)} \ln \frac{r}{1-v}, \quad \bar{y} = \frac{1}{b-vb+1} \ln \frac{r}{1-v} \quad (4)$$

с условиями существования $r \neq 0$, $r \geq 1-v$, $0 \leq v < 1$, $v < (1+b)/b$.

Устойчивость решения (4) определяется значениями собственных чисел, удовлетворяющих уравнению

$$\lambda^2 + \lambda \left(\frac{b(1-v)}{1+b(1-v)} \ln \frac{r}{1-v} - v \right) + \frac{1-v}{1+b(1-v)} \left(bv - b - 1 - (1+bv) \ln \frac{r}{1-v} \right) = 0.$$

Область устойчивости ограничивается следующими поверхностями:

$$\lambda = 1 : \quad r = 1 - v,$$

$$\lambda = -1 : \quad r = (1 - v) \exp \left(\frac{2v(b - bv + 1)}{(b + bv - 1)(1 - v)} \right), \quad (5)$$

$$|\lambda| = 1 : \quad r = (1 - v) \exp \left(\frac{(2 - v)(b - bv + 1)}{(1 - v)(1 - bv)} \right). \quad (6)$$

Граница области устойчивости $r = 1 - v$ совпадает с условием существования нетривиального равновесия. При ее пересечении вглубь области устойчивости нулевое решение теряет устойчивость, и появляется устойчивое нетривиальное стационарное решение (4).

Как видно из рис. 1, *а*, *б*, чем больше значение коэффициента b , тем меньше площадь фигуры, образованной осями координатной плоскости (v, r) и кривой (5). Соответственно, с ростом параметра b потеря устойчивости решения (4) при переходе через границу $\lambda = -1$ происходит при более низких значениях репродуктивного потенциала популяции.

Для кривой (6) наблюдается противоположная ситуация, а именно с ростом параметра b область между осями координатной плоскости (v, r) и границей устойчивости $|\lambda| = 1$ расширяется (рис. 1, *в*). Соответственно, потеря устойчивости ненулевого равновесного решения происходит при более высоких значениях коэффициента r .

Несложно показать, что кривые (5) и (6) в полосе $0 < v < 1$ имеют точку пересечения только при $3/4 < b < 1$.

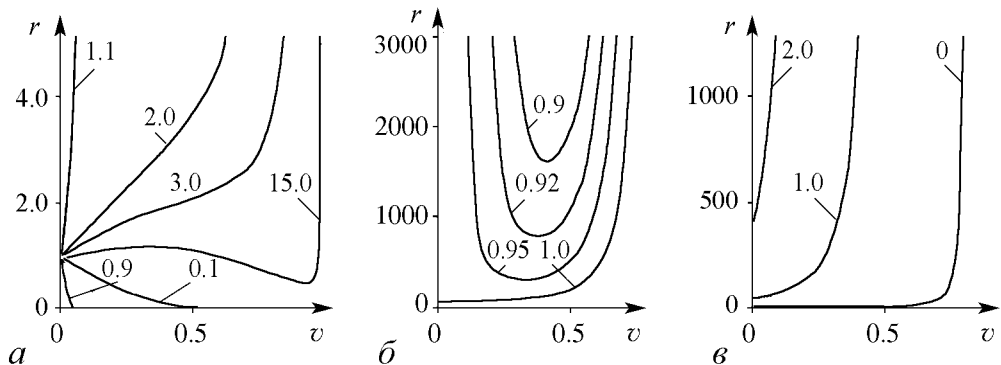


Рис. 1. Кривые, ограничивающие область устойчивости нетривиального решения системы (3) в полосе $0 \leq v < 1$ при фиксированных значениях параметра b (указаны на соответствующих кривых); *а*, *б* – график функции (5), *в* – график функции (6)

Изменение области устойчивости нетривиального равновесия системы (3) в координатах $(v; r)$ при вариациях значений параметра b представлено на рис. 2. В зависимости от того, каким способом происходит потеря устойчивости ненулевого решения системы (3), можно выделить три диапазона значений параметра b .

1. $0 \leq b \leq 3/4$. В этом отрезке значений параметра b кривые (5) и (6) не имеют точек пересечения. Область устойчивости ограничивается одной кривой (6) и существенно увеличивается с ростом параметра b .

Потеря устойчивости может произойти только при комплексно-сопряженных корнях характеристического уравнения, при переходе $|\lambda|$ через 1, и сопровождается появлением предельных инвариантных кривых, которые при дальнейшем удалении

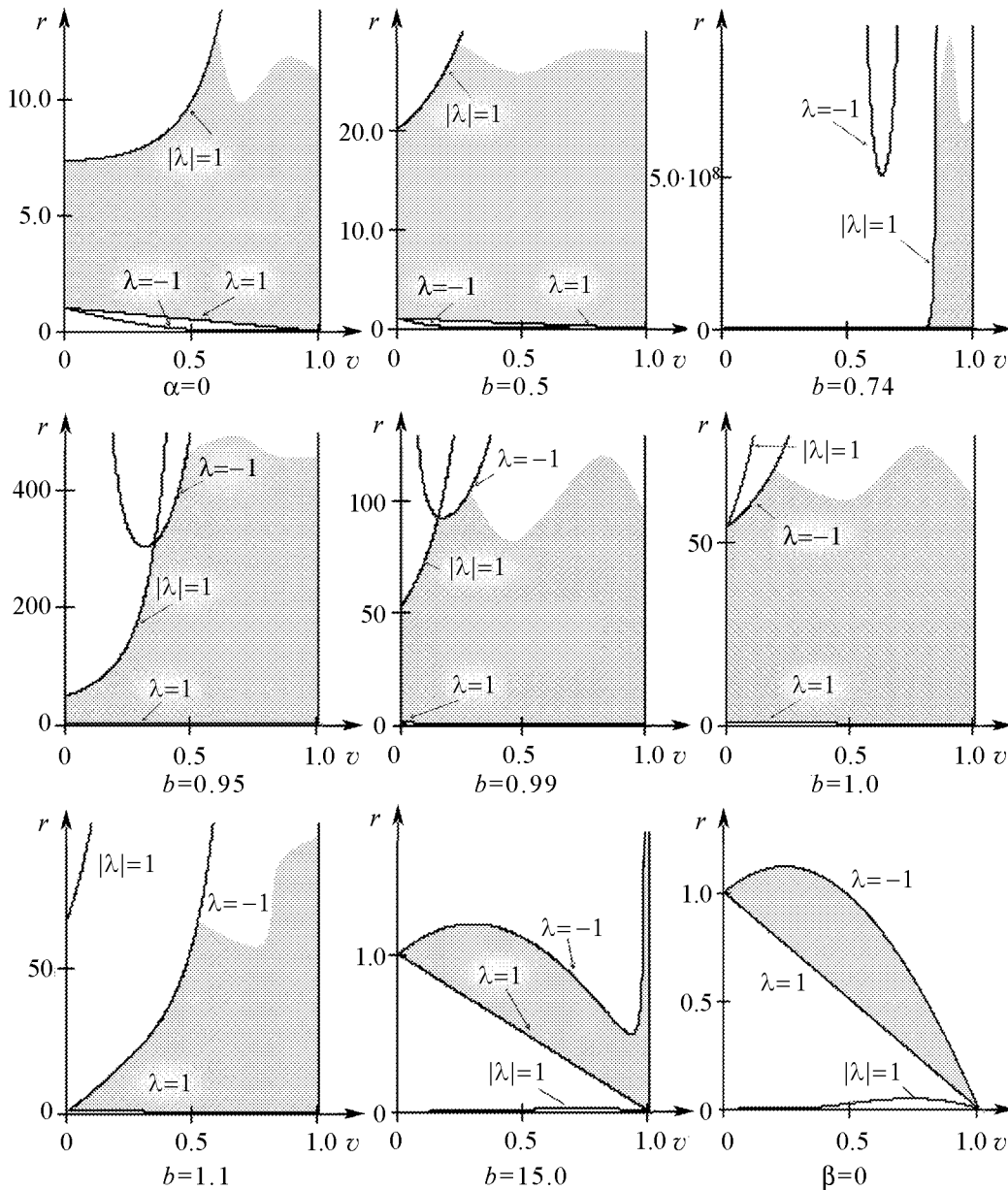


Рис. 2. Область устойчивости нетривиального решения системы (3) при фиксированных значениях параметра b

параметров v и r от границы устойчивости разрушаются с образованием весьма сложных предельных структур.

Таким образом, уменьшение рождаемости с ростом численности взрослых особей является эффективным механизмом регулирования численности, но может привести к возникновению достаточно сложно организованных колебаний численности. Лимитирование рождаемости молодью, а именно снижение рождаемости с ростом численности младшего возрастного класса, приводит к существенному увеличению области устойчивости равновесной численности популяции. Потеря устойчивости происходит с увеличением параметра r (тем скорее, чем меньше параметр выживаемости v).

На рис. 3 представлена бифуркационная диаграмма системы (3) для диапазона $0 \leq b \leq 3/4$, демонстрирующая зависимость предельного распределения численности младшего возрастного класса (x) от величины параметра r . Диаграмма дополнена «портретами» аттракторов, которые соответствуют конкретным значениям параметра r . Для визуализации области регулярного, квазипериодического и хаотического поведения на рис. 3 представлен график значений старшего показателя Ляпунова (λ) и размерности аттрактора (D). Показатели Ляпунова были вычислены по алгоритму Бенеттина, размерность аттрактора находилась по формуле Каплана-Йорке [21,22].

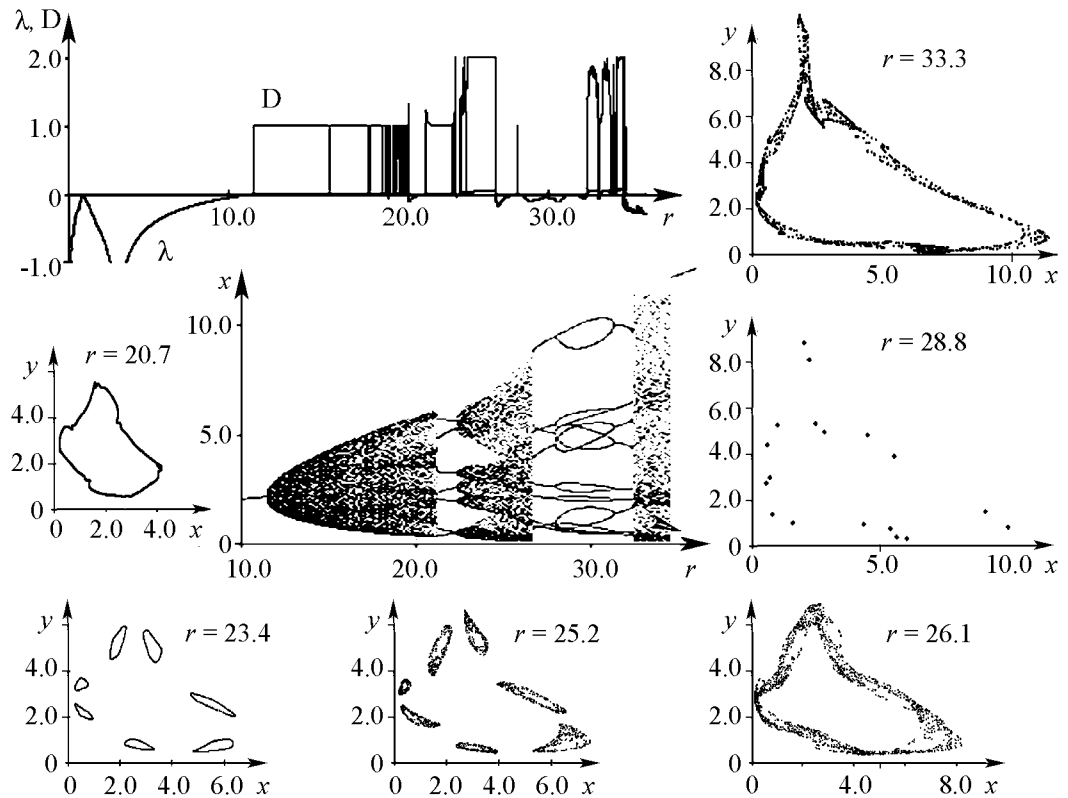


Рис. 3. Изменение размерности аттрактора и старшего показателя Ляпунова в зависимости от значения параметра r ; бифуркационная диаграмма динамической переменной x при изменении параметра r и значениях $b = 0.2$ и $v = 0.1$; аттракторы системы (3), соответствующие конкретным значениям параметра r

Бифуркационная диаграмма и график размерности хорошо дополняют друг друга. Потеря устойчивости приводит к предельному циклу (инвариантной кривой) размерности 1, а далее наблюдаются серии переходов инвариантных кривых, циклов конечной длины, аттракторов различной размерности, включая аттракторы максимальной размерности два.

2. $3/4 < b < 1$. При переходе параметра b через бифуркационное значение $b = 3/4$ добавляется новая граница области устойчивости (6), которая с ростом параметра b приводит к ее сужению (см. рис. 2). Потеря устойчивости нетривиального равновесия через эту границу происходит при переходе одного из собственных чисел через (-1) и сопровождается рождением предельного 2-цикла. Вместе с тем при $3/4 < b < 1$ сохраняется граница области устойчивости (6), соответствующая $|\lambda| = 1$.

Таким образом, дальнейший рост ограничения рождаемости молодью приводит к уменьшению области устойчивости равновесной численности популяции. При этом меняется качественная картина потери устойчивости: появляется и увеличивается с ростом параметра b зона значений параметров v и r , переход в которую сопровождается потерей устойчивости равновесия и появлением 2-цикла.

3. $b \geq 1$. Область устойчивости ограничивается одной кривой (5) и существенно уменьшается с ростом параметра b (см. рис. 2). Потеря устойчивости может произойти только при переходе одного из собственных чисел через (-1) и сопровождается рождением предельного 2-цикла. С ростом значений параметра b происходит сужение области устойчивости.

В случае $\beta = 0$ потеря устойчивости происходит через границу $\lambda = -1$. За этой границей изменения численности возрастных классов носят характер расходящихся колебаний с периодом в 2 года. Численность детей при этом в годы минимумов достигает нуля, а в годы максимумов экспоненциально растет. Колебания численности взрослых происходят асинхронно с колебаниями приплода, причем и минимумы и максимумы экспоненциально растут, но с разными скоростями, и амплитуда колебаний увеличивается.

Проведенное исследование показывает, что падение рождаемости с ростом численности взрослых особей оказывается эффективным механизмом регуляции роста численности, но при росте репродуктивных возможностей особей может привести к возникновению колебаний численности, имеющих весьма сложную временную организацию. Именно этот механизм является, по-видимому, определяющим в поведении численности мелких млекопитающих, таких как лемминги и некоторые полевки [23].

Если коэффициент рождаемости уменьшается еще и ростом численности приплода, то такой регуляторный механизм оказывает положительное влияние только при слабом воздействии, не превосходящим регуляторную роль взрослых особей. В этом случае значительно увеличивается зона параметрической устойчивости популяции. Возможно, это происходит в популяциях крупных млекопитающих, самки которых перестают размножаться в течение значительного периода «воспитания» потомства. Наиболее характерный пример – прайд львов.

Регуляция интенсивности рождаемости преимущественно численностью приплода оказывается неэффективной: небольшое повышение репродуктивного потенциала позволяет популяции «ускользнуть» и перейти к экспоненциальному росту, который приведет к формированию новых механизмов сдерживания.

3. Плотностное лимитирование выживаемости молодежи

Наиболее распространенным механизмом регулирования уровня численности является уменьшение выживаемости неполовозрелых особей. Ранее случай двухвозрастной модели при плотностном лимитировании выживаемости младших возрастов был изучен довольно основательно. В работах [15–17] приведен ряд результатов исследования частного случая модели (1), когда выживаемость молодежи линейно или экспоненциально зависит от численности самих младших возрастов. Однако для многих животных выживаемость молодежи определяется не только (и не столько) численностью молодежи, но зависит и от численности взрослых особей. Крайним случаем здесь является каннибализм (например, у некоторых видов рыб), когда взрослые особи частично питаются собственным приплодом, снижая тем самым численность своих популяций [24]. Другой интересный пример зависимости выживаемости приплода от численности взрослых особей описан для популяций полевков, обитающих на севере Скандинавии. Оказалось, что «качество потомства», определяющее его выживаемость, существенно зависит от плотности населения взрослых особей и падает с ее увеличением из-за дефицита ресурсов жизнедеятельности у самок в период беременности и лактации (материнский эффект) [25].

Уравнения динамики популяции, регуляция роста которой осуществляется путем снижения выживаемости молодежи, имеют вид

$$\begin{cases} x_{n+1} = ay_n, \\ y_{n+1} = x_n \exp(-\alpha x_n - \beta y_n) + vy_n. \end{cases} \quad (7)$$

Модель (7) при замене переменных $\alpha x \rightarrow x$ и $\alpha y \rightarrow y$ сводится к

$$\begin{cases} x_{n+1} = ay_n, \\ y_{n+1} = x_n \exp(-x_n - \rho y_n) + vy_n, \end{cases} \quad (8)$$

где $\rho = 1/\gamma = \beta/\alpha$ – параметр, характеризующий соотношение интенсивности лимитирования выживаемости младшей возрастной группы за счет половозрелых особей и самолимитирования. Исследование системы упрощается, если вместо параметра ρ ввести параметр $c = \rho/a$. Единственное ненулевое стационарное решение (8)

$$\bar{x} = \frac{1}{1+c} \ln \frac{a}{1-v}, \quad \bar{y} = \frac{1}{a(1+c)} \ln \frac{a}{1-v} \quad (9)$$

существует при $a \geq 1-v$ и $0 \leq v < 1$.

Устойчивость этого решения определяется значениями собственных чисел, удовлетворяющих уравнению

$$\lambda^2 - \lambda \left(\frac{c(1-v)}{1+c} \ln \frac{1-v}{a} + v \right) - (1-v) \left(1 + \frac{1}{1+c} \ln \frac{1-v}{a} \right) = 0.$$

Границы области устойчивости определяются следующими уравнениями:

$$\lambda = 1 : \quad a = a_1 = 1 - v,$$

$$\lambda = -1 : \quad a = a_2 = (1 - v) \exp \left(\frac{2v(1 + c)}{(c - 1)(1 - v)} \right), \quad (10)$$

$$|\lambda| = 1 : \quad a = a_3 = (1 - v) \exp \left(\frac{(2 - v)(1 + c)}{1 - v} \right). \quad (11)$$

Граница области устойчивости $a = 1 - v$ совпадает с условием существования нетривиального равновесия. При ее пересечении вглубь области устойчивости нулевое решение теряет устойчивость, и появляется устойчивое нетривиальное стационарное решение. Поведение кривых (10), (11) в зависимости от значений параметра c представлено на рис. 4.

Кривая (10) при $0 < c < 1$ лежит вне области существования нетривиального равновесия («под» прямой $a = 1 - v$). Если $c > 1$, кривая (10) пересекает область существования (полосу $0 \leq v < 1$), монотонно возрастая по v (от 1 при $v = 0$) и стремясь к бесконечности при $v \rightarrow \infty$. Скорость роста по v зависит от параметра c и убывает с ростом этого параметра. Кривые с большим значением c лежат «под» кривыми с меньшим значением (рис. 4, а).

Кривая (11) пересекает область существования нетривиального равновесия при любом значении параметра $c > 0$, монотонно возрастает по v (от $a = \exp(2(1 + c))$ при $v = 0$), стремясь к бесконечности при $v \rightarrow \infty$. Скорость роста по v зависит от параметра c и возрастает с ростом этого параметра. Кривые с большим значением c лежат «над» кривыми с меньшим значением (рис. 4, б).

Таким образом, легко проследить изменение области устойчивости системы (8) в координатах $(v; a)$ при изменении параметра c (рис. 5).

В зависимости от того, каким способом происходит потеря устойчивости нетривиального решения системы (8) можно выделить следующие диапазоны значений параметра c .

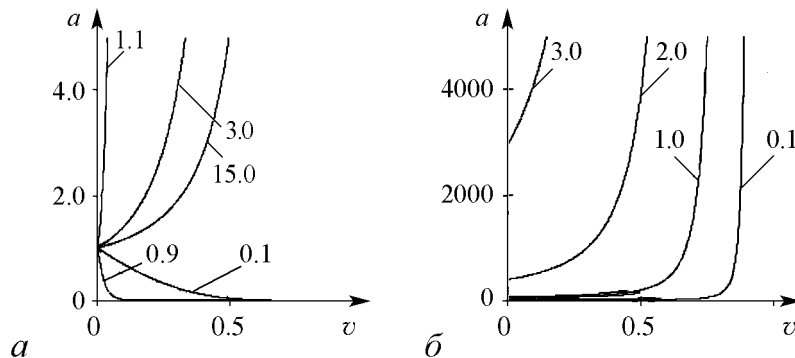


Рис. 4. Кривые, ограничивающие область устойчивости нетривиального решения системы (8), при фиксированных значениях параметра c (указаны на соответствующих кривых), а – график функции (10), б – график функции (11)

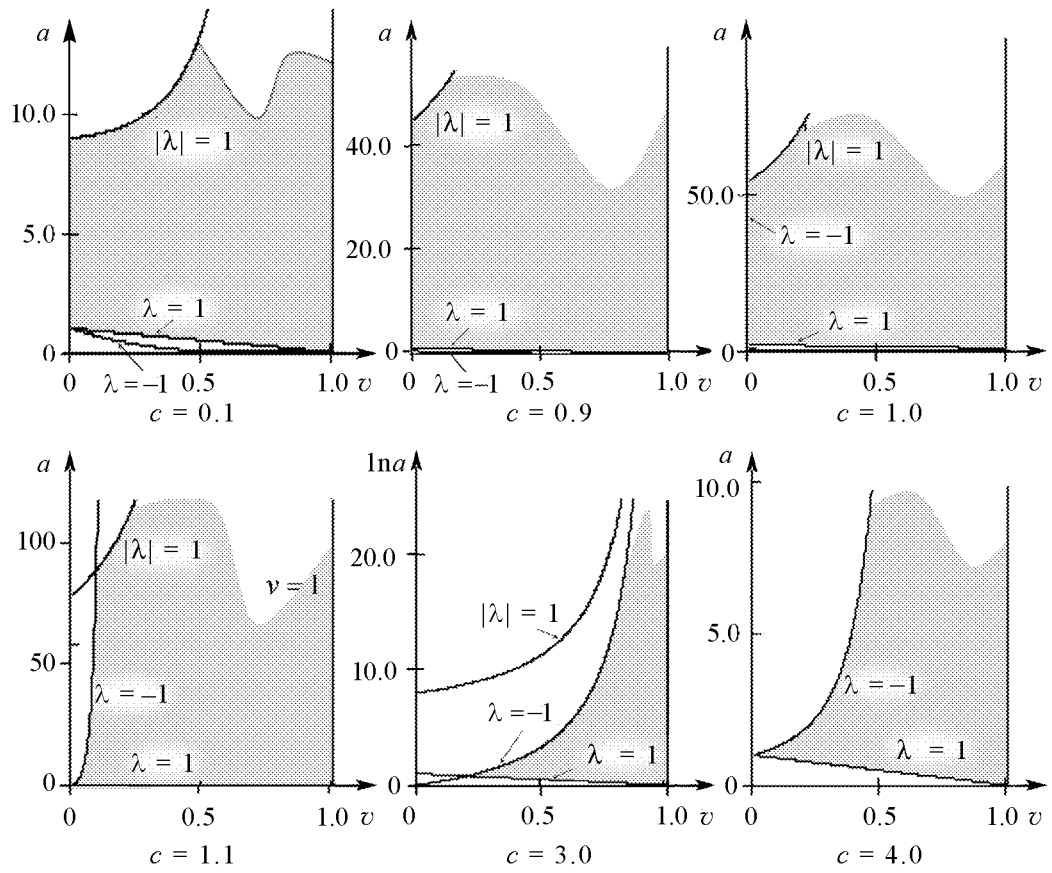


Рис. 5. Область устойчивости нетривиального решения системы (8) при фиксированных значениях параметра c

1. $0 < c \leq 1$. В этом случае область устойчивости ограничивается одной кривой (11) и существенно увеличивается с ростом параметра c . Потеря устойчивости может произойти только при комплексно-сопряженных корнях характеристического уравнения, при переходе $|\lambda|$ через 1.

Таким образом, добавление в самолимитирование выживаемости младшей возрастной группы еще и лимитирование взрослыми особями (уменьшение выживаемости младшей группы с ростом численности взрослых) приводит, наряду с уменьшением равновесной численности популяции, к существенному увеличению области ее устойчивости. Качественная картина потери устойчивости при этом не меняется. Потеря устойчивости происходит при росте параметра рождаемости a (тем скорее, чем меньше параметр выживаемости v) или при убывании выживаемости (при больших значениях рождаемости).

2. $1 < c < 3$. При переходе параметра c через бифуркационное значение $c = 1$, добавляется новая граница области устойчивости (10), которая с ростом параметра c приводит к существенному ее сужению. Потеря устойчивости нетривиального равновесия через эту границу происходит при переходе одного из собственных чисел через (-1) и сопровождается рождением предельного 2-цикла. Вместе с тем при $1 < c < 3$ сохраняется граница области устойчивости (11), соответствующая $|\lambda| = 1$, которая пересекается с кривой (10) при $v = 2(c - 1) / (c + 1)$.

Таким образом, дальнейший рост ограничения выживаемости младшей группы взрослыми особями приводит, наряду с уменьшением равновесной численности популяции, к существенному уменьшению и области ее устойчивости. При этом меняется качественная картина потери устойчивости: появляется большая зона значений параметров v и a , увеличивающаяся с ростом параметра c , переход в которую сопровождается потерей устойчивости, и появлением 2-цикла.

3. $c \geq 3$. Кривая (11) находится выше (10). Следовательно, в этом случае область устойчивости ограничивается одной кривой (10) и существенно уменьшается с ростом параметра c . Потеря устойчивости может произойти только при переходе одного из собственных чисел через (-1) и сопровождается рождением предельного 2-цикла. Самолимитирование выживаемости младшего возрастного класса практически не играет роли, и поведение системы качественно аналогично частному случаю системы (7) при $\alpha = 0$.

Результаты численного эксперимента. Наглядное представление о динамических режимах системы (8) при $0 < c \leq 1$ дает карта динамических режимов [22], построенная на плоскости параметров (a, v) для начального условия $x_0 = 0.3, y_0 = 0.1$ и $c = 0.1$. Карта динамических режимов дополнена бифуркационными диаграммами для различных значений параметра выживаемости молодежи v (рис. 6). Это позволяет

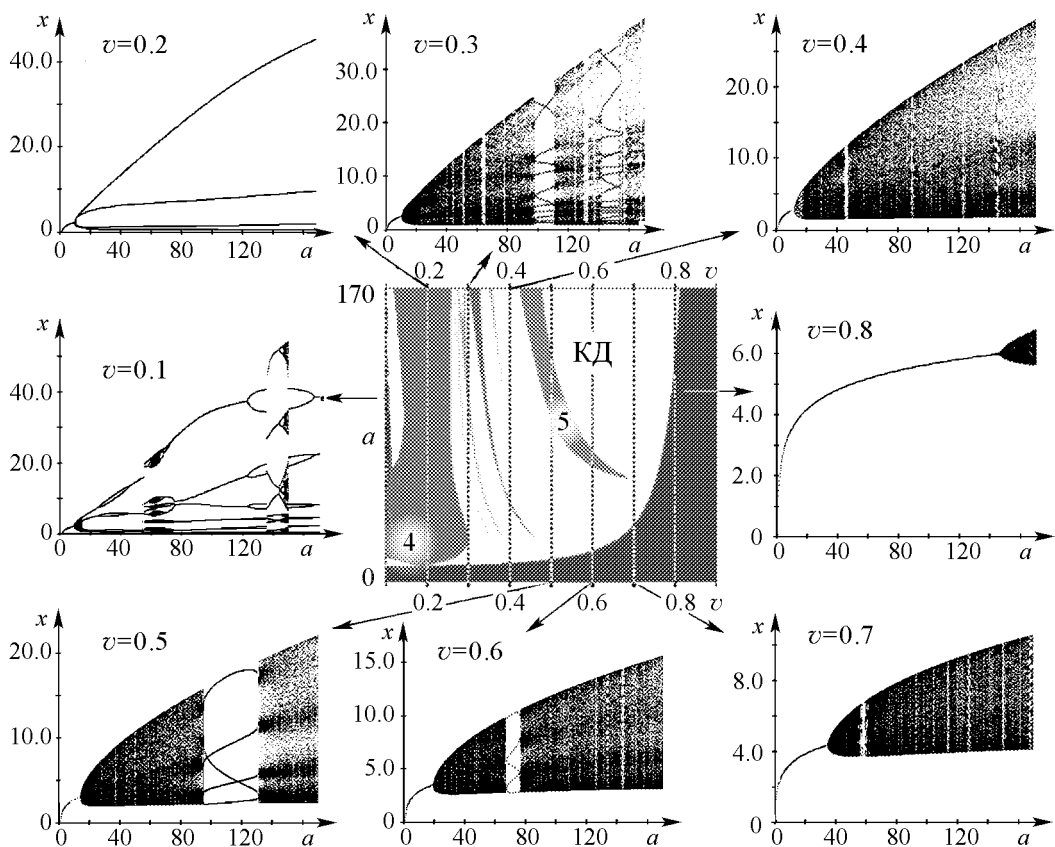


Рис. 6. Карта динамических режимов системы (8) для начального условия $x_0 = 0.3, y_0 = 0.1, c = 0.1$ на плоскости параметров $(a \in [0; 170], v \in [0.1; 0.9])$; КД – квазипериодическая динамика

визуально оценить, какие режимы динамики наблюдаются при различных значениях параметра a . Бифуркационные диаграммы динамической переменной x при изменении параметра $a \in [0; 170]$ демонстрируют срезы динамических режимов при конкретных значениях параметра v .

Потеря устойчивости, происходящая при некотором критическом значении параметра рождаемости, сопровождается, как правило, возникновением аperiodических режимов. Исключением является возникновение конечного 4-цикла при $v = 0.2$. Вместе с тем, в областях сложной динамики имеется множество окон периодичности – интервалов значений параметра a , где реализуется устойчивый цикл конечного периода (в системе существуют ярко выраженные устойчивые циклы периода 4 и 5).

Дополнительно были найдены показатели Ляпунова и определена размерность аттракторов, которая оказалась равной 1 для большинства аperiodических режимов. Аттракторы дробной размерности (большей 1), наблюдались в диапазоне значений $0 < c \leq 1$ либо при малых значениях параметра выживаемости старшего возрастного класса, либо при очень высоких значениях параметра рождаемости.

Бифуркационная диаграмма, демонстрирующая усложнение динамики через каскад бифуркаций удвоения периода при $c \geq 3$ представлена на рис. 7.

Диаграмма дополнена графиками старшего показателя Ляпунова и размерности аттрактора. Возникающие в этом случае хаотические структуры имеют размерность чуть больше единицы. Причем с ростом значений параметра a размерность аттрактора медленно увеличивается. На рисунке приведен также наиболее часто встречающийся здесь тип аттрактора, который характеризуется большими размахами значений численности между крайними точками и напоминает аттрактор Эно (Хенона) [22].

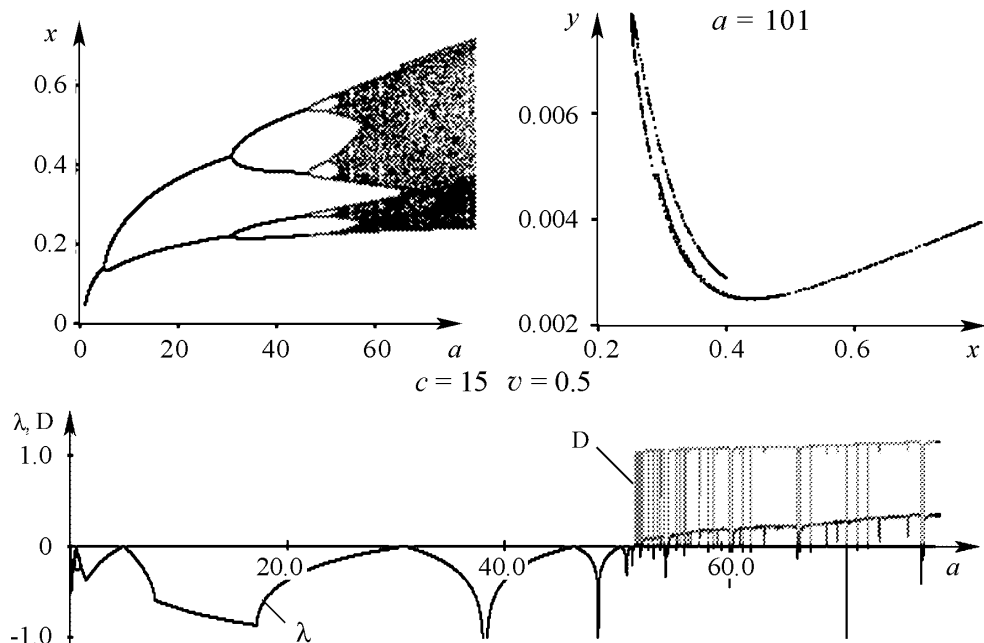


Рис. 7. Бифуркационная диаграмма и графики зависимости старшего показателя Ляпунова и размерности аттрактора от значений параметра a

4. Плотностная регуляция выживаемости репродуктивных возрастов

В предыдущих исследованиях [16] было показано, что когда плотностная регуляция роста численности осуществляется на уровне половозрелых возрастных групп, потеря устойчивости равновесного состояния сопровождается появлением 2-цикла. Однако область значений параметров, для которой характерно сложное поведение (наличие циклов и, возможно, хаоса), оказывается весьма небольшой. Усложним функцию выживаемости взрослых особей добавлением зависимости от плотности молодежи и взрослых.

$$\begin{cases} x_{n+1} = ay_n, \\ y_{n+1} = x_n s + \exp(-\alpha x_n - \beta y_n) y_n. \end{cases} \quad (12)$$

Исследование модели (12) при замене переменных $\beta x \rightarrow x$ и $\beta y \rightarrow y$ сводится к исследованию следующей системы:

$$\begin{cases} x_{n+1} = ay_n, \\ y_{n+1} = x_n s + \exp(-\gamma x_n - y_n) y_n, \end{cases} \quad (13)$$

где $\gamma = \alpha/\beta$ параметр, характеризующий отношение интенсивности лимитирования выживаемости старшей возрастной группы за счет лимитирования младшего возрастного класса и самолимитирования. Система (13) может иметь единственное ненулевое стационарное решение, определяемое уравнениями

$$\bar{x} = \frac{a}{a\gamma + 1} \ln \frac{1}{1 - as}, \quad \bar{y} = \frac{1}{a\gamma + 1} \ln \frac{1}{1 - as}. \quad (14)$$

Условия существования решения (14) удовлетворяют неравенствам $as < 1$, $0 < s < 1$, и его устойчивость определяется значениями собственных чисел уравнения

$$\lambda^2 + \lambda(1 - as) \left(\frac{1}{a\gamma + 1} \ln \frac{1}{1 - as} - 1 \right) + \frac{a\gamma(1 - as)}{1 + a\gamma} \ln \frac{1}{1 - as} - as = 0.$$

Удобным параметром для исследования области устойчивости нетривиального равновесия (14) является величина $h = a\gamma$. Границы области устойчивости ненулевого стационарного решения определяются следующими поверхностями:

$$\lambda = 1 : \quad a = \frac{1}{s}, \quad (15)$$

$$\lambda = -1 : \quad a = \frac{1}{s} \left(1 - \exp \left(2 \cdot \frac{h+1}{h-1} \right) \right), \quad (16)$$

$$|\lambda| = 1 : \quad as + \frac{h(1 - as)}{h + 1} \ln(1 - as) + 1 = 0. \quad (17)$$

В зависимости от значений параметра h можно выделить следующие изменения области устойчивости системы (13).

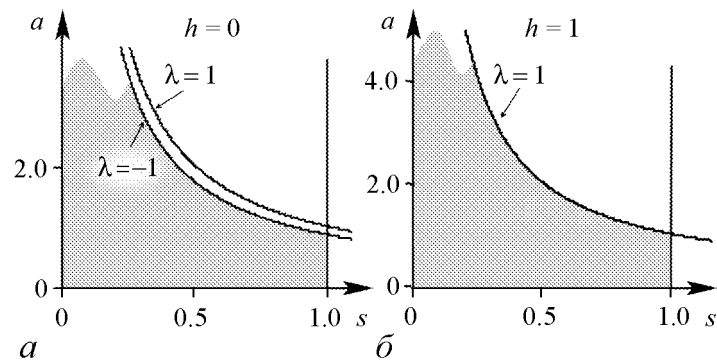


Рис. 8. Область устойчивости модели (13) при фиксированных значениях параметра h

При $h < 1$, кривая (16) располагается под графиком (15) (рис. 8). Чем ближе h к 1, тем меньше расстояние между кривыми (15) и (16). Следовательно, потеря устойчивости нетривиального равновесия происходит через границу $\lambda = -1$ и сопровождается удвоением периода, до момента перехода через $\lambda = 1$ (рис. 8). Дальнейшее движение в область неустойчивости сопровождается уходом траекторий на бесконечность. Причем значение $h = 0$ соответствует предельному случаю модели (12), когда $\alpha = 0$.

При $h \geq 1$ потеря устойчивости нетривиального равновесия происходит, когда один из корней характеристического уравнения равен единице, и сопровождается уходом траекторий на бесконечность.

Таким образом, уменьшение выживаемости половозрелых особей с ростом численности популяции не может служить эффективным механизмом сдерживания популяционного роста.

Заключение

Проведенное исследование динамического поведения популяции при различных механизмах регуляции роста численности показало, что наиболее эффективными механизмами регуляции являются: уменьшение рождаемости с ростом числа взрослых особей и падение выживаемости приплода с увеличением его численности. Неудивительно, что именно эти механизмы регуляции численности широко представлены в природных популяциях. Уменьшение рождаемости с ростом плотности населения фиксируется у многих млекопитающих, особенно мелких, у некоторых птиц, пресмыкающихся и амфибий. Падение выживаемости приплода, прямо или опосредованно связанное с ростом его численности, также широко распространено, в том числе у крупных млекопитающих. Вместе с тем, мы видим, что именно такая регуляция роста численности при увеличении потенциальных репродуктивных возможностей особей может привести к возникновению колебаний численности, имеющих весьма сложную временную организацию. Мы только-только начинаем осознавать эволюционные возможности развития экологически лимитированных популяций, обладающих возрастной структурой [26–28]. Сценарии их генетического и динамического развития очень впечатляют и весьма далеки до полного понимания и описания.

Зона параметрической устойчивости популяции может существенно увеличиться, если коэффициент рождаемости будет уменьшаться не только с ростом численности половозрелых особей, но еще и с ростом численности приплода. Однако такой регуляторный механизм оказывает положительное влияние только при слабом воздействии, не превосходящим регуляторную роль взрослых особей. Аналогично, увеличивает область параметрической устойчивости популяции добавление в самолимитирование выживаемости младшей возрастной группы еще и небольшое лимитирование взрослыми особями (уменьшение выживаемости младшей группы с ростом численности взрослых). Вместе с тем, регуляция выживаемости молодежи преимущественно взрослыми особями оказывается малоэффективной: область устойчивости сильно сужается, и при выходе из нее популяция испытывает колебания, подобные биениям.

Регуляция интенсивности рождаемости исключительно численностью приплода также оказывается весьма ограниченной: небольшое повышение репродуктивного потенциала позволяет популяции «ускользнуть» и перейти к экспоненциальному росту, который приведет к формированию новых механизмов регулирования.

Не может служить эффективным механизмом сдерживания популяционного роста и уменьшение выживаемости половозрелых особей, происходящее с ростом плотности населения популяции. Хотя такой механизм в той или иной форме представлен у многих животных, он, по-видимому, служит иным целям (оптимизации процесса расселения, экологической регуляризации и т.п.) нежели ограничению роста численности.

Исследования проведены при частичной финансовой поддержке ДВО РАН (конкурсные проекты № 09-II-CO-06-006, № 09-I-P15-01, № 09-I-ОБН-12) и РФФИ (проект № 09-04-00146).

Библиографический список

1. *Ricker W.E.* Stock and recruitment // *J. Fish. Res. Board Can.* 1954. Vol. 11, № 5. P. 559.
2. *May R.M.* Stability and Complexity in Model Ecosystems. Princeton: Princeton Univ. Press, 1974.
3. *May R.M.* When two and two make four: nonlinear phenomena in ecology // *Proc. R. Soc. London.* 1986. B228, N1252, C. 241.
4. *Шапиро А.П.* К вопросу о циклах в возвратных последовательностях // В сб.: Управление и информация. Вып. 3. Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1972. С. 96.
5. *Шапиро А.П., Луннов С.П.* Рекуррентные уравнения в теории популяционной биологии. М: Наука, 1983. 132 с.
6. *Leslie P.H.* On the use of matrices in certain population mathematics // *Biometrika.* 1945. Vol. 33, № 3. P. 183.
7. *Leslie P.H.* Some further notes on the use of matrices in population mathematics// *Biometrika.* 1948.

8. *Lefkovich L.P.* The study of population growth in organisms grouped by stages // *Biometrics*, 1965. Vol. 21. P. 1.
9. *Свирижев Ю.М., Логофет Д.О.* Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.
10. *Логофет Д.О.* К теории матричных моделей динамики популяций с возрастной и дополнительной структурами // *Журнал общей биологии*. 1991. Т. 52, № 6. С. 793.
11. *Логофет Д.О., Белова И.Н.* Неотрицательные матрицы как инструмент моделирования динамики популяций: классические модели и современные обобщения // *Фундаментальная и прикладная математика*. Москва. 2007. Т. 13, № 4. С. 145.
12. *Hastings A.* Age dependent dispersal is not a simple process: Density dependence, stability, and chaos // *Theor. Popul. Biol.* 1992. Vol. 41, № 3. P. 388.
13. *Lebreton J.D.* Demographic models for subdivided populations: The renewal equation approach // *Theor. Popul. Biol.* 1996. Vol. 49, № 3. P. 291.
14. *Kooi B.W. and Koopman S.A.L.M.* Discrete event versus continuous approach to reproduction in structured population dynamics // *Theor. Popul. Biol.* 1999. Vol. 56, № 1. P. 91.
15. *Шапиро А.П.* Роль плотностной регуляции в возникновении колебаний численности многовозрастной популяции // *Исследования по математической популяционной экологии*. Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1983. С. 3.
16. *Фрисман Е.Я., Луппов С.П., Скокова И.Н., Тузинкевич А.В.* Сложные режимы динамики численности популяции, представленной двумя возрастными классами // *Математические исследования в популяционной экологии*. Владивосток: ДВО АН СССР, 1988. С. 4.
17. *Фрисман Е.Я., Скалецкая Е.И.* Странные аттракторы в простейших моделях динамики численности биологических популяций // *Обозрение прикладной и промышленной математики*. 1994. Т. 1, № 6. С. 988.
18. *Недорезов Л.В., Неклюдова В.Л.* Непрерывно-дискретная модель динамики численности двухвозрастной популяции. *Сибирский экологический журнал*, 1999, Т. 4. С. 371.
19. *Недорезов Л.В., Утюпин Ю.В.* Дискретно-непрерывная модель динамики численности двуполой популяции // *Сибирский математический журнал*. 2003. Т. 44, № 3. С. 650.
20. *Дажо Р.* Основы экологии. М.: Прогресс, 1975. С. 416.
21. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. С. 424.
22. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. С. 296.
23. *Чернявский Ф.Б., Лазуткин А.Н.* Циклы леммингов и полевок на Севере. Магадан: ИБПС ДВО РАН, 2004. 150 с.
24. *Никольский Г.В.* Экология рыб. М.: Высшая школа, 1974. 357 с.
25. *Inchausti P., and Ginzburg L.R.* 1998. Small mammals cycles in northern Europe: patterns and evidence for the maternal effect hypothesis // *Journal of Animal Ecology* 67: 180–194.

26. *Charlesworth B.* Natural selection on multivariate traits in age-structured populations // Proc. R. Soc. Lond. B. 1993. P. 47.
27. *Ferriere R., Gatto M.* Chaotic population dynamics can result from natural selection // Proc. R. Soc. Lond. B 1993. P. 33.
28. *Фрисман Е.Я., Жданова О.Л.* Эволюционный переход к сложным режимам динамики численности двухвозрастной популяции // Генетика. 2009. Т. 45, № 9. С. 1277.

*Институт комплексного анализа
региональных проблем ДВО РАН*

*Поступила в редакцию 29.05.2009
После доработки 6.10.2009*

DYNAMIC MODES OF TWO-AGE POPULATION MODEL

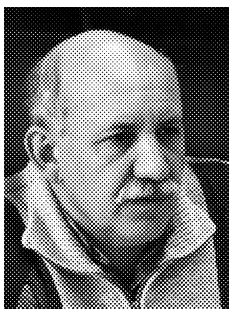
E.Ya. Frisman, G.P. Neverova, O.L. Revutskaya, M.P. Kulakov

In this paper we research a mathematical model of dynamics for the population number. We considered the population of the two-age classes by the beginning of the next season: the younger, one including not reproductive individuals, and the senior class, consisting of the individuals participating in reproduction. The model parameters (birth rate and survival rates) represent the exponential functions of the both age groups numbers. According to this supposition the density-dependent factors restrict the development of population. Analytical and numerical analysis of the model is made. We investigate the dynamic modes of the model. It is shown that density-dependent factors of regulation for the population number can lead to generation of fluctuations and chaotic dynamics behavior of the population.

Keywords: Population models equations, discrete-time systems, age distribution, density-dependent, stability, bifurcations, dynamic modes, chaos.

Фрисман Ефим Яковлевич – родился в 1948 году в Сталинабаде (ныне Душанбе), окончил Новосибирский государственный университет (1971). После окончания НГУ работал в Институте автоматизации и процессов управления ДВО РАН, где с 1988 года заведовал лабораторией математического моделирования экологических систем. С 2002 года – директор Института комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН (Биробиджан). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата биологических наук (1982) в Институте цитологии и генетики СО РАН (Новосибирск) и доктора биологических наук (1989) в Институте биофизики ДВО РАН (Красноярск) в области математической популяционной биологии и теории эволюции. Автор 4-х монографий (две вышли в издательстве «Наука» и две – в ДВО АН СССР). Опубликовал более 120 научных работ по общим вопросам математического моделирования и по конкретным моделям экологических и популяционных систем. Соровский профессор.

679016, Еврейская автономная область, Биробиджан, ул. Шолом-Алейхема, 4
Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН
E-mail: frisman@mail.ru





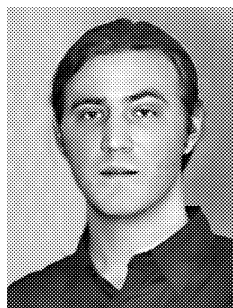
Неверова Галина Петровна – родилась в 1982 году, окончила факультет математики и информатики в Биробиджанском государственном педагогическом институте (ныне Дальневосточная государственная социально-гуманитарная академия) в 2004 году. В 2007 году окончила очную аспирантуру Института комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН по специальности «Биофизика». Работает младшим научным сотрудником в лаборатории математического моделирования динамики региональных систем ИКАРП ДВО РАН. Основные научные интересы сосредоточены в области математического моделирования экологических систем. Опубликовала 10 работ по исследуемой тематике.

679016, Еврейская автономная область, Биробиджан, ул. Шолом-Алейхема, 4
Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН
E-mail: galina.nev@gmail.com



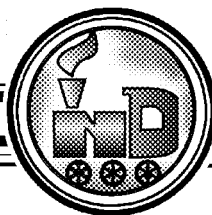
Ревуцкая Оксана Леонидовна – родилась в 1982 году, окончила факультет математики и информатики в Биробиджанском государственном педагогическом институте (ныне Дальневосточная государственная социально-гуманитарная академия) в 2004 году. В 2007 году окончила очную аспирантуру Института комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН по специальности «Биофизика». Работает младшим научным сотрудником в лаборатории математического моделирования динамики региональных систем ИКАРП ДВО РАН. Основные научные интересы сосредоточены в области математического моделирования экологических систем. Опубликовала 10 работ по исследуемой тематике.

679016, Еврейская автономная область, Биробиджан, ул. Шолом-Алейхема, 4
Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН
E-mail: oksana-rev@mail.ru



Кулаков Матвей Павлович – родился в 1982 году, окончил факультет математики и информатики в Биробиджанском государственном педагогическом институте (ныне Дальневосточная государственная социально-гуманитарная академия). Работает младшим научным сотрудником в лаборатории математического моделирования динамики региональных систем ИКАРП ДВО РАН. Основные научные интересы сосредоточены в области математического моделирования экологических систем, нелинейной динамики, синхронизации, теории колебаний.

679016, Еврейская автономная область, Биробиджан, ул. Шолом-Алейхема, 4
Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН
E-mail: k_matvey@mail.ru



НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ КРОВΟΣНАБЖЕНИЯ УЧАСТКА ТКАНИ

Б.Н. Клочков, А.М. Рейман

В работе предложена континуальная модель кровоснабжения ткани, в которой возможно существование автоструктур неоднородного распределения крови. На основе этой модели проведен теоретический анализ, аналитические и численные расчеты. Исследованы фильтрационные изменения кровотока, обусловленные активностью среды (химическими реакциями, нервным возбуждением), самоорганизационные процессы с учетом механизмов микрососудистой регуляции.

Ключевые слова: Континуальная модель, мягкая биоткань, кровоснабжение, нелинейность, активность, динамические автоструктуры.

Распределение кровотока в тканях живого организма неоднородно [1–9]. Существуют механизмы пространственного распределения, перераспределения и регулирования потока крови в тканях (механизмы перфузии или промывания). Одна из основных функций крови – транспортная, то есть доставка кислорода и других веществ в ткани, насыщение тканей кислородом, а также удаление из них продуктов обмена веществ (жизнеобеспечение с помощью течения и диффузии) [10–12].

Биологические ткани пронизаны системой кровеносных сосудов, превращающейся за счет последовательных разветвлений на все более мелкие сосуды в ветвящееся артериальное «дерево», на самых тонких веточках которого – терминальных артериолах – находятся капиллярные ячейки, содержащие параллельные капилляры [13]. Одновременно эти капиллярные ячейки примыкают к самым тонким веточкам венозного дерева – венулам. Начиная с некоторого уровня ветвления, малые сосуды могут быть локально саморегулируемыми за счет активности механогенных мышечных волокон, содержащихся в их стенках [14]. Вследствие этого диаметр каждого из сосудов может изменяться, причем изменение диаметров разных сосудов может происходить несинхронно. Более того, изменение диаметра одного сосуда в разных его сечениях может быть различным.

Состояние сосуда меняется благодаря его собственной активности, имеется взаимодействие с соседними сосудами. Для осуществления перфузии в сети со спазмирующимися сосудами необходимы дополнительные шунтирующие «перемычки». Глобальная пространственная структура кровозаполненности живых тканей определяется состоянием локальной активности сосудов сети и может быть однородно заполненной или иметь вид конечных заполненных кластеров, причем картина пятен кровозаполнения интерпретируется как мозаичная и характеризуется фрактальной размерностью [4,7–9,15,16].

Задачи о неоднородности кровоснабжения в сложных биологических тканях и сосудах активно обсуждаются в литературе; некоторые теоретические подходы развиты в работах [17–20]. Математические модели должны качественно и количественно описывать динамику кровоснабжения участка ткани, что важно для понимания биофизических и физиологических процессов в нем.

Целью настоящей работы является построение континуальной модели неоднородного распределения крови в участке ткани, учитывающей фильтрационные процессы, нелинейную активность среды за счет химических реакций и нервного возбуждения, а также проведение на основе этой модели аналитических и численных расчетов, описывающих кровоснабжение активной ткани, насыщенной кровеносными микрососудами с гладкомышечной стенкой, анализ возможных классов решений, рассмотрение самоорганизационных процессов с учетом механизмов регуляции кровотока и получение автоструктур перераспределения крови в ткани.

1. Континуальная модель пространственно-неоднородного распределения кровозаполнения тканей

Структурная особенность биоткани заключается в наличии сильно разветвленной сети кровеносных сосудов разного порядка (калибра), переплетенных так, что в среднем по малому объему среды скорость фазы крови практически совпадает со скоростью твердой фазы (тканевого каркаса), хотя вдоль любого сосуда скорость тока крови существенно отлична от скорости окружающей ткани [1,2,13,14,17]. При этом особенностью биоткани является не только ее структура, но и активность за счет химических реакций в мышечных элементах ткани. Активность ткани связана со скелетной мышцей, управляемой нервной системой, а также с гладкомышечными клетками, входящими в стенку сосудов и играющими важную роль в регуляции просвета микрососудов.

Получим нелинейную математическую модель пороупругой активной биологической сплошной среды. Полагаем, что ткань представляет собой двухфазную среду (кровь и активный упругий каркас). Уравнения неразрывности фаз имеют вид [17,21–23]

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_m \vec{V}_m) = -Q_{mf}, \quad \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_f \vec{V}_f) = Q_{mf}, \quad (1)$$

$$\rho_m = \overset{\circ}{\rho}_m \varphi_m, \quad \rho_f = \overset{\circ}{\rho}_f \varphi_f, \quad \varphi_m + \varphi_f = 1, \quad (2)$$

где $\overset{\circ}{\rho}_m, \overset{\circ}{\rho}_f$ – истинные плотности твердой (m) и жидкой (f) фаз; φ_m, φ_f – объемные содержания фаз; \vec{V}_m, \vec{V}_f – скорости фаз; Q_{mf} – интенсивность межфазного обмена.

Уравнения движения фаз при использовании фильтрационного закона Дарси справедливы в виде [17–19, 21–23]

$$\varphi_m \overset{\circ}{\rho}_m \frac{d_m V_m^i}{dt} = \nabla_n(\varphi_m \sigma_m^{in}) + F_{fm}^i, \quad \varphi_f \overset{\circ}{\rho}_f \frac{d_f V_f^i}{dt} = -\nabla^i(\varphi_f p) - F_{fm}^i, \quad (3)$$

$$F_{fm}^i = \frac{\eta}{k} \varphi_f (V_f^i - V_m^i) - p \nabla^i \varphi_f, \quad (4)$$

где σ_m^{in} – напряжения в твердой фазе, p – давление в жидкости, η – вязкость жидкости, k – эффективная проницаемость ткани по отношению к крови.

Границы применимости модельных допущений также связаны со следующим. Предполагается, что фазы несжимаемы, истинные плотности фаз равны, твердый каркас линейно-упругий и нелинейно-активный за счет мышечных напряжений, межфазный переток отсутствует; считаем активное напряжение изотропным, поскольку в среднем мышечные волокна микрососудов и сами микрососуды переплетены так, что нет выделенного направления [17, 24–26]:

$$\sigma_m^{ij} = A^{ijnl} \varepsilon_{nl} + N^{ij}, \quad N^{ij} = N^{ij}(\varepsilon_{nl}, p, q^i), \quad (5)$$

$$\overset{\circ}{\rho}_f = \overset{\circ}{\rho}_m = \text{const}, \quad \varepsilon_{nl} = (u_{n,l} + u_{l,n})/2, \quad Q_{mf} = 0, \quad q^i = V_f^i - V_m^i, \quad (6)$$

где ε_{nl} – деформации твердой фазы, u_n – ее смещения, A^{ijnl} – упругие коэффициенты, N^{ij} – активные напряжения.

Рассмотрим отклонение (\sim) от стационарного фонового состояния (\circ). В одномерном случае и в безынерционном приближении, сохраняя нелинейность лишь в активном слагаемом N^{ij} (в γ), имеем следующее представление модельных уравнений:

$$\overset{\circ}{\varphi}_m \frac{\partial \tilde{\sigma}^{11}}{\partial x} + \frac{\eta}{k} \overset{\circ}{\varphi}_f (\tilde{V}_f - \tilde{V}_m) = 0, \quad (7)$$

$$- \overset{\circ}{\varphi}_f \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} - \frac{\eta}{k} \overset{\circ}{\varphi}_f (\tilde{V}_f - \tilde{V}_m) = 0, \quad (8)$$

$$\tilde{\sigma}^{11} = A \tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{\gamma}(\tilde{\varepsilon}_{11}, \tilde{p}, \tilde{q}), \quad \tilde{q} = \tilde{V}_f - \tilde{V}_m, \quad (9)$$

$$- \frac{\partial \tilde{\varphi}_f}{\partial t} + (1 - \overset{\circ}{\varphi}_f) \frac{\partial \tilde{V}_m}{\partial x} = 0, \quad \tilde{\varepsilon}_{11} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}, \quad \tilde{V}_m = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_f}{\partial t} + \overset{\circ}{\varphi}_f \frac{\partial \tilde{V}_f}{\partial x} = 0, \quad \tilde{\varphi}_f + \tilde{\varphi}_m = 0, \quad \overset{\circ}{\varphi}_m + \overset{\circ}{\varphi}_f = 1. \quad (11)$$

В зависимости от вида нелинейной функции $\tilde{\gamma}(\tilde{\varepsilon}_{11}, \tilde{p}, \tilde{q})$ возможны разные случаи. В данной работе ограничимся подробным рассмотрением случая $\tilde{\gamma}(\tilde{\varepsilon}_{11})$, когда сосудистая гладкая мышца активирована в некоторой области деформаций. Исключим переменные \tilde{u} , \tilde{V}_f из уравнений (7)–(11). В результате получим нелинейное уравнение, описывающее изменение пористости ткани (объемного содержания крови) $\varphi \equiv \tilde{\varphi}_f$, причем имеет место связь между переменными $\varepsilon \equiv \tilde{\varepsilon}_{11}$ и φ в виде $\varepsilon = \varphi / (1 - \overset{\circ}{\varphi})$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \quad D = D(\varphi) = \frac{(1 - \overset{\circ}{\varphi})k}{\eta} \left[A + (1 - \overset{\circ}{\varphi}) \gamma'_{\varphi} \right]. \quad (12)$$

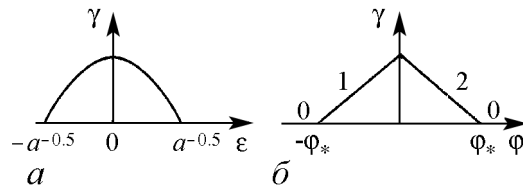


Рис. 1. Кусочно-параболическая (а) и кусочно-линейная с областями 0,1,2 (б) аппроксимации нелинейной функции активности $\gamma(\varepsilon)$, $\gamma(\varphi)$

Основной нелинейной функцией является $\gamma(\varphi)$ – финитная колоколообразная экспериментальная биофизическая зависимость [1,2,14,17]. Её можно аппроксимировать квадратичной, кусочно-линейной, гауссовой и другими функциями. При этом принципиального различия в них нет, выбор связан лишь с удобством анализа. Для квадратичной аппроксимации имеем (рис. 1, а)

$$\gamma(\varepsilon) = \gamma_0(1 - a\varepsilon^2); \quad \gamma'_\varepsilon = -\frac{2\gamma_0 a}{1 - \varepsilon^2} \varphi \quad \text{при} \quad |\varepsilon| < a^{-0.5}, \quad (13)$$

$$\gamma(\varepsilon) = \gamma'_\varepsilon(\varepsilon) = 0 \quad \text{при} \quad |\varepsilon| > a^{-0.5}. \quad (14)$$

Рассмотрим сначала линейную задачу, которая сводится к уравнению диффузионного типа, когда коэффициент диффузии D может менять знак

$$\dot{\varphi} = D\varphi_{xx}, \quad D = \frac{(A + \gamma'_\varepsilon)(1 - \varepsilon^2)k}{\eta}. \quad (15)$$

Анализ линейной задачи показывает следующее. Характерное решение имеет вид $\varphi \sim \exp[i(\omega t - kx)]$. В случае граничной задачи, моделирующей распространение волны от монохроматического источника (ω – действительная величина), имеем $\kappa_{1,2} = \pm(-1 + i)\sqrt{\omega/(2D)}$. При этом в зависимости от знака и величины γ'_ε (уровня активности) коэффициент диффузии D может быть как положительным, так и отрицательным. Последний случай ($D < 0$) имеет место, если уровень активности гладкомышечных волокон среды достаточно высок и рабочая точка находится на падающем участке кривой $\gamma(\varepsilon)$ (см. рис. 1, а). Если $D > 0$, то имеем затухающую волну. Однако при $D < 0$ величина $\kappa_2 = (1 + i)[\omega/(2|D|)]^{0.5}$, и по мере распространения волна объемного содержания жидкости φ будет нарастать с пространственным инкрементом $[\omega/(2|D|)]^{0.5}$. В линейной задаче имеется неустойчивость.

Для задачи с начальными условиями – задачи Коши, где k является действительной величиной, получим

$$\omega = D\kappa^2 i. \quad (16)$$

Следовательно, при $D < 0$ имеем экспоненциальное нарастание во времени начального распределения объемного содержания жидкой фазы φ с инкрементом $|D|\kappa^2$. Мелкомасштабные коротковолновые возмущения быстро возрастают в силу (16) со значительным инкрементом. Учет нелинейных членов может привести к ограничению энергии возмущений.

Проведем анализ уравнения (12) в нелинейной задаче. Проинтегрируем нелинейное уравнение (12) по всей оси x от $-\infty$ до $+\infty$ и получим, что существуют

инварианты (моменты) по времени t для достаточно общих финитных зависимостей $\varphi(x, t)$ и $\gamma(\varphi)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi dx = C_0 = \text{const}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi dx = C_1 = \text{const}, \quad \text{но} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi dx = C_2 \neq \text{const}. \quad (17)$$

То есть площадь под кривой $\varphi(x)$ сохраняется в любой момент времени t и центр тяжести кривой $\varphi(x)$ сохраняется; однако отклонение от центра тяжести уже не сохраняется. Моменты более высокого порядка, вообще говоря, отличны от константы (не сохраняются). Приведенные интегралы использовались для проверки устойчивости разностной схемы численных расчетов, работоспособности программы, правильности и точности результатов.

Можно показать, что «энергетическая» характеристика процесса $E = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x, t) dx$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dE}{dt} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \frac{d\varphi}{dt} dx = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} D(\varphi_x)^2 dx, \quad (18)$$

если φ имеет локальное распределение по x . При этом поведение E определяется знаком D .

В стационарных условиях ($\partial/\partial t = 0$) после однократного интегрирования (12) в классе финитных функций $\varphi(x)$ ($\varphi_x|_{\pm\infty} = 0$) имеем: $D(\varphi)\varphi_x = 0$. Отсюда следует, что в установившемся распределении $\varphi_x = 0$ ($\varphi = \text{const}$), кроме, возможно, точек, определяемых уравнением $D(\varphi) = 0$. Следовательно, если $D(\varphi) = 0$ в некоторой области значений φ (например, при φ_1 и φ_2), то установившееся решение уравнения (12) $\varphi(x)$ может состоять из горизонтальных участков $\varphi = \text{const}$, разделенных вертикальными, причем величина вертикального скачка может быть равна $\varphi_1 - \varphi_2$.

Ограничимся некоторыми соображениями о характере решения нелинейного уравнения (12) в случае, когда нелинейная функция $\gamma(\varphi)$ представима в виде кусочно-линейной аппроксимации (рис. 1, б). Тогда уравнение (12) примет вид

$$\dot{\varphi} = D(\varphi) \varphi_{xx}, \quad D(\varphi) = \frac{(A + \gamma'_\varepsilon)(1 - \overset{\circ}{\varphi})k}{\eta} = \text{const}, \quad (19)$$

причем $D = -|D| = -D_1 < 0$ при $0 < \varphi < \varphi_*$; $D > 0$ при $\varphi > \varphi_*$, $\varphi < 0$; величина const зависит от области 0,1,2 (см. рис. 1, б).

Таким образом, задача свелась к кусочно-линейному уравнению диффузионного типа. Влияние активности может привести к $D < 0$. В этом случае возникает необходимость изучения эволюционности начального распределения $\varphi(x, 0)$ [27]. На интервале $0 < \varphi < \varphi_*$ это уравнение может решаться с помощью интеграла Фурье–Стилтьеса:

$$\varphi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\kappa) e^{D_1 \kappa^2 t - i\kappa x} d\kappa, \quad (20)$$

где $\varphi(\kappa)$ – пространственный спектр $\varphi(x, 0)$.

Если начальные условия ($t=0$) заданы в виде синусоидального распределения на всей оси x : $\varphi(x, 0) = \varphi_a \exp(-ikx)$, $\varphi_a < \varphi_*$, то в момент времени $t > 0$ получим выражение $\varphi(x, t) = \varphi_a \exp(D_1 \kappa^2 t) \exp(-ikx)$. Условие $\varphi_a \exp(D_1 \kappa^2 t_*) \cos(\kappa x) = \varphi_*$ для точек $\cos(\kappa x) = 1$ дает время достижения максимума φ_* : $t_* = (\ln(\varphi_*/\varphi_a)) / (D_1 \kappa^2)$. При этом заметим, что величина $D \partial \varphi / \partial x$ непрерывна по x . Начальное квазипериодическое распределение из-за отрицательной диффузии собирается в импульс-структуры «антидиффузионным образом». Локальное расплывчатое возмущение соберется в резкое «пятно». Эволюционный процесс зависит от начальных условий, «пятна» будут как бы вырастать из них (аналогично так называемым «режимам с обострением» [28]).

Если нелинейная активная функция $\gamma(\varphi)$ аппроксимируется квадратичным образом (см. рис. 1, а), то уравнение (12) заменой $W = \varphi_x$ приводится к виду (на падающем участке $\gamma(\varphi)$)

$$\dot{W} = -|D| W_{xx} - 3|D_2| W W_x, \quad (21)$$

где $D_2 = \text{const}$, а $D \approx \text{const}$ для достаточно малых длинноволновых возмущений W . Слагаемое с D_2 дает дополнительное укручение фронта за счет нелинейности. Данное уравнение описывает взрывную неустойчивость [27]. Однако в этом случае ограничение может быть связано с выходом системы из активной области за счет $D(\varphi)$.

Аналогичный подход справедлив и для случая гладкой сосудистой мышцы, реагирующей на давление, $\gamma = \gamma(p)$ (местная миогенная регуляция). Основные уравнения имеют вид (7)–(11). Исключая из них u , V , φ , получаем нелинейное уравнение относительно давления p

$$\left(\frac{\overset{\circ}{\varphi}}{1 - \overset{\circ}{\varphi}} - \gamma'_p \right) p_t = \frac{Ak \overset{\circ}{\varphi}}{\eta} p_{xx}, \quad (22)$$

где функция $\gamma'_p = \partial \gamma / \partial p < 0$, если нет эффекта авторегуляции кровотока и, соответственно, $\gamma'_p > 0$, если он есть. Анализ аналогичен предыдущему случаю $\gamma = \gamma(\varepsilon)$, только вместо пористости будет давление, и знак коэффициента диффузии меняется при переходе не через 0, а через ∞ .

2. Динамические автоструктуры распределения кровотока в ткани

Для случая, когда параметр активности γ зависит от деформации ε , проведем численные решения нелинейного уравнения относительно пористости ткани (объемного содержания крови) φ (12). Здесь коэффициент нелинейной «диффузии» $D(\varphi)$ включает в себя упругость твердой фазы (коэффициент A), вязкость крови (η), эффективную проницаемость крови в ткани (k), активность $\gamma(\varphi)$, причем $\overset{\circ}{\varphi}$ – фоновая пористость. Коэффициент $D(\varphi)$ может менять знак (рис. 2), если уровень активности гладкомышечных и (или) скелетномышечных элементов среды достаточно высок и рабочая точка находится на падающем участке кривой $\gamma(\varphi)$ (см. рис. 1, б).

Использована следующая зависимость:

$$D = D(\varphi_1) = D_0 [1 + g\varphi_1(\varphi_1^2 - l^2)]$$

при $|\varphi_1| \leq l,$

$$D = D(\varphi_1) = D_0 \text{ при } |\varphi_1| \geq l,$$

где D_0 и g – безразмерные параметры, $\varphi_1 = \varphi/\varphi_0$. Кривые $\varphi_1(x, t)$ на приведенных рис. 3–5 – безразмерные. Кривые расположены снизу вверх через $\Delta t = 1$. Были приняты следующие параметры модели: $D_0 = 0.006$, $l = 1$, $\varphi_0 = 0.2$, $g = 3$ (кроме рис. 5, *a*, на котором $g = 2.93$).

Начальные распределения по переменной φ_1 или φ (объемное содержание крови) выбраны синусоидальными с пространственными частотами (самые нижние кривые), что является определенным упрощением. В реальных условиях могут возникать участки кровоснабжения ткани с характерным масштабом, определяемым строением ткани, различными механизмами регуляции кровотока и его состоянием. Возможны и более сложные и более простые распределения [1,2,4–9,15,26,29].

Проведем численное решение нелинейного уравнения (12). Рассмотрим эволюцию гармонических возмущений. Граничные условия примем нулевыми. В результате получаем диссипативные динамические структуры пространственного распределения кровотока в ткани $\varphi_1(x, t)$, представленные на рис. 3–5. На рис. 3 видна зависимость ширины импульса от начальной амплитуды: чем она больше, тем больше протяженность итогового импульса. Вариация начальной амплитуды составляла 0.5...0.75. Наблюдаются эффекты обострения импульса, а при определенных условиях – уплощения с прогибом в середине, а также мелкомасштабность. Может происходить расщепление импульса.

Уменьшение периода начального возмущения может приводить к эффекту локализации в середине (пропадание концевых импульсов) (рис. 4, *a*) или выпадение пика (пропадание промежуточных импульсов) (рис. 4, *б*). Кроме этого возможны реализации острых импульсов (постепенное обострение) (рис. 5, *a*) или тупых им-

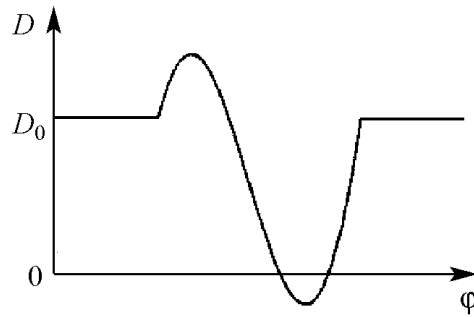


Рис. 2. Нелинейная «диффузия»

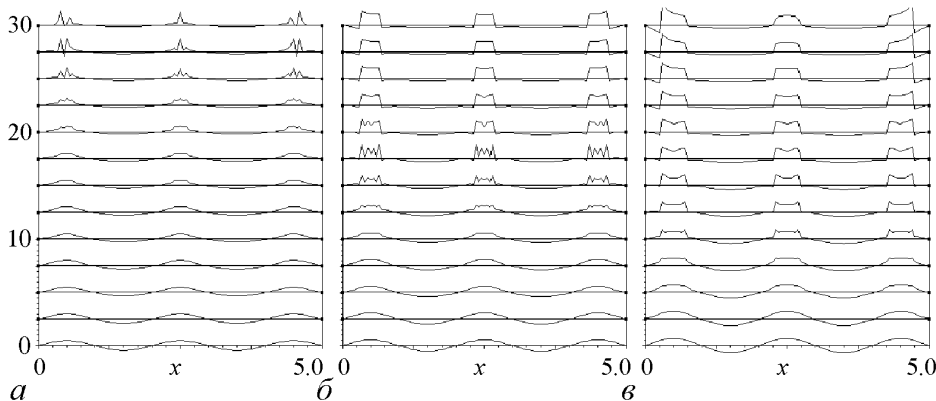


Рис. 3. Динамические структуры пространственного кровотока в ткани $\varphi_1(x, t)$ с начальной амплитудой: 0.5 (*a*); 0.6 (*б*); 0.75 (*в*)

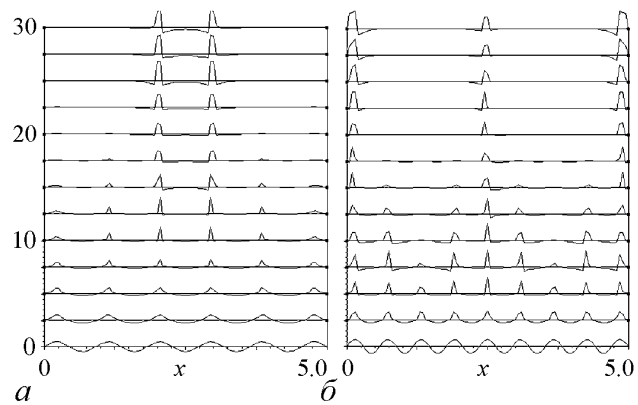


Рис. 4. *a* – локализация в середине $\varphi_1(x, t)$ (пропадание концевых импульсов); *б* – выпадение пика $\varphi_1(x, t)$ (пропадание промежуточных импульсов)

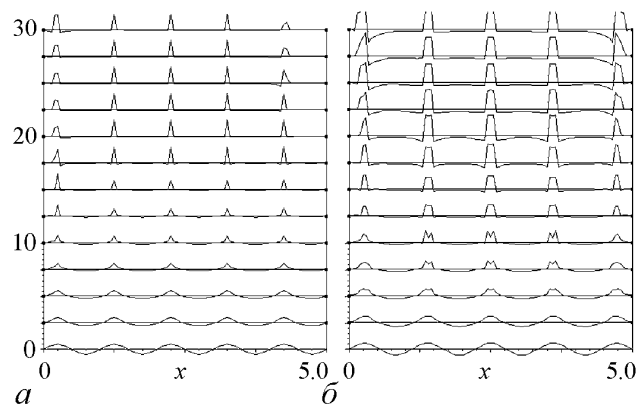


Рис. 5. *a* – острые импульсы $\varphi_1(x, t)$ (обострение); *б* – тупые импульсы $\varphi_1(x, t)$ (уплощение)

пульсов (постепенное их уплощение) (рис. 5, б). «Пятна» могут как бы вырасти из начальных условий. Численные решения полученных нелинейных уравнений дают процесс изменения распределения объемного содержания биожидкости в такой среде при различных условиях. При достаточно малой начальной амплитуде возникают эффекты обострения импульсов, а при ее увеличении – возможны эффекты уплощения. Увеличение пространственной частоты может давать эффекты взаимодействия импульсов, приводящие к участкам обеднения. Возможно рассмотрение аналогичных механизмов возникновения неоднородного распределения кровоснабжения ткани в двумерном случае, в плоском деформированном состоянии.

Представленные характерные режимы изменения квазиоднородного распределения применительно к кровоснабжению живых тканей могут быть обусловлены изменениями температуры, физической нагрузки, давления, влажности и других физико-физиологических и биофизических параметров внутренней и внешней среды. Предложенное модельное описание может быть использовано для исследования функционирования сосудистой периферии.

Заключение и выводы

В настоящей работе при помощи методов механики сплошных гетерогенных сред проведено математическое моделирование кровоснабжения ткани и рассмотрены возможные механизмы возникновения неоднородного распределения крови

в ней. Получена нелинейная модель, описывающая динамику изменения объемного содержания крови для ткани, включающей активные кровеносные микрососуды с гладкомышечной стенкой, которые могут осуществлять различного типа регуляцию кровотока, в приближении ее двухфазности. Выведены и проанализированы уравнения с нелинейной «диффузией». Исследован одномерный линейный случай и проведены аналитические расчеты характера нелинейной стадии эволюции возмущений. Построенные модели описывают диссипативные автоструктуры кровонаполнения (сложные «пятна» на поверхности ткани), пространственно-временную динамику кровотока из начального распределения. Численные решения полученных нелинейных уравнений определяют самоорганизационные процессы изменения распределения объемного содержания жидкой фазы (пористости) в такой среде при достаточно общих условиях.

Авторы признательны Е.Н. Пелиновскому и В.Г. Яхно за полезные обсуждения основных уравнений и результатов работы.

Работа выполнялась при поддержке РФФИ.

Библиографический список

1. Физиология кровообращения: Регуляция кровообращения (Руководство по физиологии). Л.: Наука, 1986.
2. *Fung Y.C.* Biodynamics. Circulation. New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer-Verlag, 1984.
3. *Кошелев В.Б., Кондашевская М.В., Ставская О.Н., Васильев Н.Б., Тимкина М.И., Юсупов Т.Т., Родионов И.М.* Роль гетерогенности артериол в формировании органного ответа сосудов скелетных мышц крысы на констрикторные воздействия // Физиологический журнал СССР. 1986. Т. 72, № 2. С. 198.
4. *Bassingthwaight J.B., Van Beek J.H.G.M.* Lightning and the heart: fractal behavior in cardiac function // IEEE Transactions. 1988. Vol. 76, № 6. P. 693 (Рус. пер.: *Бассингтуэйт Д.Б., Ван Бек Дж.Х.Г.М.* Молния и сердце: фракталы в кардиологии // ТИИЭР. 1988. Т. 76, № 6. С. 60).
5. *Spaan J.A.E.* Coronary blood flow. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Press, 1991.
6. *Годик Э.Э., Гуляев Ю.В.* Человек глазами радиофизики // Радиотехника. 1991. № 8. С. 51.
7. Биоритмические и самоорганизационные процессы в сердечно-сосудистой системе. Теоретические аспекты и практическое значение. Сб. научн. тр. ИПФ РАН. Н. Новгород, 1992.
8. Коллективная динамика возбуждений и структурообразование в биологических тканях. Сб. научн. тр. ИПФ АН СССР. Горький, 1988.
9. Автоволновые процессы в системах с диффузией. Сб. научн. тр. ИПФ АН СССР. Горький, 1981.
10. *Harvey W.* Exercitatio anatomica de motu cordis et sangninis in animalins. Lond., 1628 (Рус. пер. : Гарвей В. Анатомическое исследование о движении сердца и крови у животных. М.-Л.: Изд. АН СССР, 1948).
11. *Krogh A.* The number and distribution of capillaries in muscles with calculations of the oxygen pressure nead necessary for supplying the tissue // J. Physiol. 1919. Vol. 52. P. 409.

12. *Krogh A.* The anatomy and physiology of capillaries. N.Y.: Haufer Publishing Co., 1959.
13. Архитектоника кровеносного русла / Отв. ред. В.А. Матюхин. Новосибирск: Наука, 1982.
14. *Folkow B., Neil E.* Circulation. N.Y., London, Toronto: Oxford University Press, 1971 (Рус. перев.: Фолков Б., Нил Э. Кровообращение. М.: Медицина, 1976).
15. *Bithner H.R.* Modelling of fractal vessel systems // Fractals in the fundamental and applied sciences / Ed. H.O. Peitgen, J.M. Hennigues and L.F. Penedo. Amsterdam, N.Y., Oxford, Tokyo: Elsevier Science Publishers B.V., North-Holland, 1991. P. 59.
16. *Mandelbrot B.B.* The Fractal Geometry of Nature. N.Y.: W.H. Freeman and Company, 1982.
17. *Регурер С.А.* Лекции по биологической механике. Часть 1. М.: Из-во Моск. ун-та, 1980.
18. *Регурер С.А., Утушкина Н.С., Шадрина Н.Х.* О течении крови в капиллярной сети мышцы // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1986. № 6. С. 79.
19. *Рухлис В.Е.* Движение крови в терминальном сосудистом русле как фильтрация в пористой среде // Биомеханика кровообращения, дыхания и биологических тканей. Рига, 1981. С. 7.
20. *Федотов С.П., Мархасин В.С.* Неустойчивость однородного распределения кровотока в системе микроциркуляции // Доклады АН СССР. 1990. Т. 313, № 6. С. 1497.
21. *Нигматулин Р.И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.
22. *Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А.* Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970.
23. *Бувич Ю.А., Желамский С.В., Изаков В.Я., Ясников Г.П.* О вязкоупругом поведении пористого биологического материала // Физико-химическая гидродинамика. Сб. научн. тр. Свердловск: УрГУ, 1985. С. 34.
24. *Клочков Б.Н., Пелиновский Е.Н.* Модели неоднородного распределения кровотока в ткани // Биоритмические и самоорганизационные процессы в сердечно-сосудистой системе: теоретические аспекты и практическое значение. Сб. научн. тр. ИПФ РАН. Н. Новгород, 1992. С. 33.
25. *Klochkov B.N., Pelinovsky E.N.* Nonlinear models of blood flow in tissues // Mechanics of blood circulation. Biomechanics (Madrain, October 1991). Lecture notes of the Int. Centre of Biocybernetics (ICB) seminars. Warsaw: ICB. 1992. №15. P. 70.
26. *Klochkov B.N., Pelinovsky E.N., Reyman A.M.* Mathematical nonlinear model of inhomogeneous distribution blood flow in tissue // XV-th Congress of the International Society of Biomechanics (2-6 July, 1995, Jyvaskyla). Book of Abstracts. Finland, 1995. P. 486.
27. *Пелиновский Е.Н., Фридман В.Е.* Взрывная неустойчивость нелинейных волн в средах с отрицательной вязкостью // Прикладная математика и механика. 1974. Т. 38, вып. 6. С. 991.
28. *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.

29. Клочков Б.Н., Рейман А.М. Самоорганизационные процессы кровоснабжения в биологических тканях // Нелинейные волны. Синхронизация и структуры. Междунар. школа по нелинейным явлениям (5–16 сентября 1995) / Под ред. М.И. Рабиновича, М.М. Сущика, В.Д. Шалфеева. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1995, ч. 2. С. 111.

Институт прикладной физики РАН,
Нижний Новгород

Поступила в редакцию 17.03.2009
После доработки 3.11.2009

NONLINEAR MODELS OF BLOOD SUPPLY DYNAMICS IN TISSUE AREA

B.N. Klochkov, A.M. Reyman

A continual model of tissue blood supply has been suggested in this paper providing the existence of autostructures in the inhomogeneous blood distribution. Theoretical analysis including both analytical and numerical calculations has been carried out on the base of this model. The filtration variations of blood flow caused by medium activity (chemical reactions, nerve excitation) have been studied as well as self-organization processes accounting mechanisms of microvessel regulation.

Keywords: Continual model, soft biotissue, blood supply, nonlinearity, activity, dynamic autostructures.



Клочков Борис Николаевич – родился в Ленинграде. Окончил Горьковский госуниверситет имени Н.И. Лобачевского и аспирантуру Московского госуниверситета имени М.В. Ломоносова. Защитил кандидатскую диссертацию в МГУ и докторскую диссертацию в Нижегородском государственном техническом университете имени Р.Е. Алексеева (физико-математические науки). Работает в Институте прикладной физики РАН в области биоакустики, биомеханики и биофизики, старший научный сотрудник. Преподавал в ННГУ в должности доцента. Опубликовал 40 научных статей.

603950, ГСП-120, Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН
klochkov@appl.sci-nnov.ru



Рейман Александр Михайлович – родился в Горьком (1959), окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (1980). После окончания ГГУ пришел работать в Институт прикладной физики АН СССР (ныне ИПФ РАН), где и работает в настоящее время старшим научным сотрудником. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (1989). Лауреат Премии Ленинского комсомола в области науки и техники (1987). Область интересов – линейная и нелинейная акустика, теория колебаний и волн, разработка информационных систем технической и медицинской диагностики. В последние годы работает также в области преподавания физики в профильной школе.

603950, ГСП-120, Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН
rey@appl.sci-nnov.ru



Изв. вузов «ПНД», т. 18, № 2, 2010

К 100-летию Саратовского государственного университета

Всероссийская научная школа-конференция для молодежи в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы

**НЕЛИНЕЙНЫЕ ФЕНОМЕНЫ, ХАОС, КРИТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ
И МЕТОДЫ ИХ ИССЛЕДОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ ВЕЙВЛЕТНОГО,
КЛАСТЕРНОГО И СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА
В ГЕОЭКОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ**

Саратов, 6–12 октября 2009

Организаторы

- Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
- Научно-образовательный центр «Сложные системы» СГУ
- Факультет нелинейных процессов СГУ
- Геологический факультет СГУ
- Кафедра геоэкологии СГУ

Программный комитет

Трубецков Д.И., чл.-корр. РАН, профессор, СГУ, Саратов, председатель; *Горяинов П.М.*, д.г.-м.н., профессор, Геологический институт Кольского научного центра РАН; *Гурия Г.Т.*, д.ф.-м.н., профессор, ГНЦ РАН, Москва; *Иванов А.В.*, к.г.-м.н., профессор, СГУ, Саратов; *Короновский А.А.*, д.ф.-м.н., профессор, СГУ, Саратов; *Левин Ю.И.*, к.ф.-м.н., профессор, СГУ, Саратов; *Некоркин В.И.*, д.ф.-м.н., профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород; *Поздняков А.В.*, д.г.н., профессор, ТГУ, Томск; *Храмов А.Е.*, д.ф.-м.н., профессор, СГУ, Саратов; *Худяков Г.И.*, чл.-корр. РАН, профессор, Тихоокеанский институт географии РАН, Владивосток; *Шалфеев В.Д.*, д.ф.-м.н., профессор, Нижегородский государственный университет, Нижний Новгород

Организационный комитет

Трубецков Д.И., председатель, д.ф.-м.н., профессор; *Левин Ю.И.*, заместитель председателя, к.ф.-м.н., профессор, декан факультета нелинейных процессов СГУ; *Иванов А.В.*, зам. председателя, к.г.-м.н., профессор, заведующий кафедрой геоэкологии

СГУ; *Яшков И.А.*, ученый секретарь, к.г.н., ассистент; члены оргкомитета: профессора *А.Е. Храмов*, *А.Н. Маликов*, *А.А. Короновский*; доценты *Ремпен И.С.*, *Егоров Е.Н.*; ассистенты *Москаленко О.И.*, *Добролюбова Н.В.*; зам. руководителя ОФНС НИИ ЕН СГУ *Стародубов А.В.*; зав. лабораторией геоэкологии СГУ *Решетников М.В.*; члены рабочей группы: ассистенты *Куркин С.А.* и *Овчинников А.А.*, аспиранты *Ханенко М.В.* и *Шешнев А.С.*, н.с. *Филатов Р.А.*, лаборант *Шурыгина С.А.*

Цель школы-конференции: эффективное освоение молодыми исследователями и преподавателями лучших научных и методических отечественных и мировых достижений в области нелинейной динамики, геологии, географии и геоэкологии, обучение методологии и инструментам анализа нелинейных явлений, создание условий для проведения междисциплинарных исследований на стыке наук о Земле, экологии и нелинейной науки о колебаниях и волнах

Тематика конференции

- Геологические и геоэкологические процессы
- Нелинейные феномены, хаос, критические явления
- Методы анализа пространственных, временных и пространственно-временных данных
- Глобальные процессы
- Фундаментальные проблемы нелинейной динамики
- Влияние шумов на процессы в нелинейных системах
- Актуальные проблемы наук о Земле
- От прошлого к будущему: история, современное состояние и перспективы развития науки в XXI веке

Рабочая программа

6 октября 2009

Открытие школы-семинара (*Д.И. Трубецков*, *А.В. Иванов*)
Д.И. Трубецков, (СГУ, Саратов) Саратовскому государственному университету 100 лет
Д.И. Трубецков, (СГУ, Саратов) Современная картина мира и место нелинейной науки в нём
А.В. Иванов (СГУ, Саратов) Геоэкология в Саратовском университете
Г.И. Худяков (Тихоокеанский институт географии ДВНЦ РАН, Владивосток) Самоорганизация растущей Земли: геология, геоморфология и геоэкология

7 октября 2009

Иванов А.В. (СГУ, Саратов) Синергетические эффекты коэволюции геосфер
А.Е. Храмов, *С.А. Куркин* (СГУ, Саратов) Фрактальные объекты и их размерности
З.К. Азизов (УлГТУ, Ульяновск) Нелинейная динамика оползневых процессов на территории города Ульяновска и их моделирование
П.М. Горяинов (Геологический институт КНЦ РАН, Апатиты) Самоорганизация магнитного поля Земли (к проблеме корректности палеомагнитных реконструкций)
А.В. Поздняков (Институт климатических и экологических систем СО РАН, Томск) Синергетические феномены в строении и функционировании рельефа Земли

8 октября 2009

П.М. Горяинов (Геологический институт КНЦ РАН, Апатиты) Перколяционные процессы как причина самоорганизации литосферных структур

А.А. Короновский (СГУ, Саратов) Нелинейные феномены и критические явления в процессе эволюции: статистический анализ палеонтологических данных и модели

Семинар: «Анализ особенностей структуры и рисунка эрозионно-речной сети» (*И.А. Яшков*)

Семинар: «Фрактальный анализ структуры и рисунка эрозионно-речной сети» (*И.С. Ремпен*)

Круглый стол: «Синергетика и геоэкология: пути коэволюции» (*Д.И. Трубецков, А.В. Иванов, А.Н. Маликов, Д.В. Михель*)

9 октября 2009

Р.Р. Габдулин (МГУ, Москва), *А.В. Иванов* (СГУ, Саратов) Астрономо-климатические циклы Миланковича и методы их анализа

А.Е. Храмов (СГУ, Саратов) Введение в вейвлетный и спектральный анализ

О.Д. Смилевец (СГТУ, Саратов) Самоорганизация рельефообразующих процессов в условиях крайнего Севера

П.М. Горяинов (Геологический институт КНЦ РАН, Апатиты) О фантомах современной теоретической геологии

Доклады молодых участников

10–11 октября 2009

Полевой семинар (*И.А. Яшков*)

12 октября 2009

Закрытие Школы. Вручение сертификатов участникам Школы (*А.Е. Храмов, А.А. Короновский*)

Адрес оргкомитета
Россия, Саратов, 410012, Астраханская, 83,
Саратовский госуниверситет, Факультет нелинейных процессов,
Оргкомитет всероссийской научной школы-конференции
«Нелинейные феномены, хаос, критические явления и методы
их исследования с помощью вейвлетного, кластерного
и спектрального анализа в геоэкологических процессах»

Тел.: +7 (8452) 508530; 514294 Факс: +7 (8452) 523864

<http://nonlin.sgu.ru/GEO2009/index.htm>

E-mail: geo2009nonlin@gmail.com



СИНЕРГЕТИКА И ГЕОЭКОЛОГИЯ: ОПЫТ КОЭВОЛЮЦИИ*

*Е.Н. Егоров, А.В. Иванов, А.А. Короновский,
Д.И. Трубецков, А.Е. Храмов, И.А. Яшков*

Статья содержит информацию о результатах организации в Саратовском университете Всероссийской научной школы для молодежи «Нелинейные феномены, хаос, критические явления и методы их исследования с помощью вейвлетного, кластерного и спектрального анализа в геоэкологических процессах». Вниманию читателя предлагаются обзоры тематических лекций, лабораторных практикумов, защит научно-исследовательских работ слушателей школы, круглого стола и полевого семинара. Мероприятия школы выполнены приглашенными специалистами и саратовскими учеными в области нелинейной динамики, наук о Земле и геоэкологии.

Ключевые слова: Синергетика, геоэкология, науки о Земле, научная школа для молодежи.

Гораздо быстрее мы можем изменить другую традицию – обучение завтрашних ученых методами вчерашнего дня.

Федерико Майер

С 6 по 12 октября 2009 года в Саратовском государственном университете имени Н.Г. Чернышевского в рамках реализации Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы проходила Всероссийская научная школа-конференция для молодежи «Нелинейные феномены, хаос, критические явления и методы их исследования с помощью вейвлетного, кластерного и спектрального анализа в геоэкологических процессах». Проведение Школы было приурочено к столетнему юбилею Саратовского государственного университета.

Целью школы-конференции являлось эффективное освоение молодыми учёными лучших научных и методических отечественных и мировых достижений в области геологии, географии и геоэкологии, обучение методологии и инструментам анализа нелинейных явлений, создание условий для проведения междисциплинарных исследований на стыке наук о Земле, экологии и нелинейной науки о колебаниях и волнах.

*© Материалы Всероссийской научной школы для молодежи на компакт-диске – Саратов: Изд-во «Новый ветер», 2009. – 1 DVD-диск – Миним. систем. требования: Celeron 2Гц, 512 МБ ОЗУ, Windows XP, разрешение экрана 1024*768, DVD-ROM. Microsoft Internet Explorer 6.0. ISBN 978-5-317-02815-2.

В рамках прошедшей Школы молодые исследователи имели возможность прослушать лекции учёных, специализирующихся в области междисциплинарных исследований на стыке основных направлений Школы, по наиболее актуальным вопросам геоэкологии, наук о Земле и нелинейной динамики. Программа Школы предполагала также проведение комплекса мероприятий, связанных со стажировкой молодых исследователей – слушателей и участников Школы. В рамках стажировки молодые учёные кроме посещения лекций участвовали в научно-практических семинарах, направленных на закрепление полученных на Школе знаний и навыков, на круглом столе «Синергетика и геоэкология: пути коэволюции», а также в полевом семинаре. По завершении лекционной программы Школы проводилась защита научно-практических работ молодых участников Школы. Лучшие из работ вошли в электронный сборник материалов Школы на DVD-диске (Материалы, 2009) [1], а также были размещены на Интернет-сайте Школы (<http://nonlin.sgu.ru/GEO2009/index.htm>).

Актуальность тематики Школы связана со всё возрастающей ролью нелинейной динамики – междисциплинарного научного инструмента познания – для изучения сложных систем как совокупности простых элементов и описания закономерности строения составных элементов системы (подсистем), их взаимосвязи, а также функционирования и эволюции этих подсистем как единого целого (как сложной составной системы). В последние десятилетия идеи и методы нелинейной динамики активно проникают в различные области знаний, в том числе в науки о Земле (геологию и географию), геоэкологию и экологию.

Идея организации и проведения научной Школы для молодежи состояла во вовлечении молодых учёных в области естественнонаучных специальностей в открытое обсуждение проблем самоорганизации геоэкологически опасных процессов и изучения ее механизмов с помощью методов нелинейной динамики. Широкое обсуждение специалистами различного научного профиля этих вопросов в рамках молодежной Школы позволило сосредоточить дискуссию по сложным и многогранным вопросам развития, функционирования и взаимодействия геоэкологических процессов, рассмотреть их сквозь призму нелинейных законов и явлений.

Основные лекции на Школе были прочитаны саратовскими и приглашёнными лекторами из различных научных центров и учебных заведений России. Лекторы, выступавшие на Школе, представляли Тихоокеанский институт географии ДВНЦ РАН (Владивосток), Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова (Москва), Геологический институт Кольского научного центра РАН (Апатиты), Институт климатических и экологических систем Томского научного центра СО РАН (Томск), Ульяновский государственный технический университет (Ульяновск), Саратовский государственный технический университет (Саратов), а также Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского (Саратов).

По своей тематике все лекции, прочитанные на Школе, формально делились на три основных блока.

В первый блок вошли лекции, освещающие актуальные проблемы современных наук о Земле, глобальных геологических и геоэкологических процессах. В этот блок лекций вошли лекции член-корр. РАН профессора Д.И. Трубецкого (СГУ, Саратов) «Современная картина мира и место нелинейной науки в ней», зав. кафедрой геоэкологии СГУ, профессора А.В. Иванова «Геоэкология в Саратовском университете» и «Синергетические эффекты коэволюции геосфер», видеолекция профессора, член-корр. РАН Г.И. Худякова (Владивосток) «Самоорганизация растущей Земли: геология, геоморфология и геоэкология».

Второй блок объединил лекции, ориентированные на изучение и применение методов нелинейной динамики к анализу данных различной природы, в том числе геологических и геофизических. В частности, в рамках этого блока были прочита-

ны лекции профессора А.А. Короновского (СГУ, Саратов) «Нелинейные феномены и критические явления в процессе эволюции: статистический анализ палеонтологических данных и модели», профессора А.Е. Храмова (СГУ, Саратов) «Введение в вейвлетный и спектральный анализ», профессора А.Е. Храмова и ассистента С.А. Куркина «Фрактальные объекты и их размерности».

Третий блок лекций в большей степени был ориентирован на вопросы самоорганизации, функционирования и эволюции геологических и геоэкологических систем с точки зрения нелинейной динамики. Профессором П.М. Горяиновым (Апатиты) был подготовлен цикл лекций, посвящённый проблемам самоорганизации литосферных структур: «Самоорганизация магнитного поля Земли (к проблеме корректности палеомагнитных реконструкций)», «Перколяционные процессы как причина самоорганизации литосферных структур», «О фантомах современной теоретической геологии». Доцент З.К. Азизов (УлГТУ, Ульяновск) подготовил лекцию «Нелинейная динамика оползневых процессов на территории города Ульяновска и их моделирование». Профессором О.Д. Смилевцом (СГТУ, Саратов) представлена лекция «Самоорганизация рельефообразующих процессов в условиях крайнего Севера», профессором А.В. Поздняковым (Томск) видеолекция «Синергетические феномены в строении и функционировании рельефа Земли».

Наконец, на школе была прочитана лекция Д.И. Трубецкова, посвященная столетнему юбилею Саратовского государственного университета, которая вызвала значительный интерес слушателей школы. В ней были изложены вопросы истории развития Университета.

Среди слушателей школы были студенты, аспиранты и молодые научные сотрудники Московского физико-технического университета, Томского научного центра РАН, Института космофизического исследований и распространения волн РАН, Гематологического научного центра РАМН, ОАО «Саратовнефтегеофизика», Института мониторинга климатологических и экологических систем СО РАН, Саратовского государственного технического университета, Саратовского государственного университета. Как упоминалось выше, программа стажировки молодых учёных на Школе, помимо лекционных заседаний, включала в себя посещение семинарских занятий. Идея проведения семинаров состояла в применении на практике методов нелинейной динамики при анализе геологических и геоэкологических данных, в ходе которых слушатели выполняли ряд тестовых заданий.

Семинары «Анализ особенностей структуры и рисунка эрозионно-речной сети» и «Фрактальный анализ структуры и рисунка эрозионно-речной сети» представляли собой комплекс взаимосвязанных мероприятий, включавших также лекцию профессора А.Е. Храмова и ассистента С.А. Куркина «Фрактальные объекты и их размерности».

В ходе *первого семинарского занятия*, подготовленного ассистентом кафедры геоэкологии СГУ к.г.н. И.А. Яшковым, участники Школы познакомились с одним из наиболее показательных объектов изучения геоморфологической науки – овражно-балочной сетью и геоэкологическими особенностями ее развития и функционирования в условиях современной урбанизации. Выбор организаторами Школы овражно-балочной сети в качестве объекта изучения в рамках семинарского занятия был продиктован тем, что именно она в условиях города является чаще всего «удобной» площадкой для развития целого комплекса экологически неблагоприятных процессов, зачастую с катастрофическими последствиями (подтопления и затопления городской территории, заболачивания, оползнеобразования, просадочности и т.д.). Кроме того, на территории засыпанных толщей техногенных отложений и замусоренных различными городскими отходами долин оврагов и балок формируются очаги острых инфекционных заболеваний.

После краткого теоретического курса, посвященного функционированию эрозионной сети в условиях современного урбогенеза, участники Школы получили практическое задание, которое было направлено на изучение рисунка современной эрозионной сети. Анализ рисунка эрозионной сети проводился по специально подготовленным для участников фрагментам крупномасштабных топографических карт территории города Саратова на разные временные интервалы. Практиканты получили задание схематично отобразить систему тальвегов эрозионной сети для последующего ее изучения с помощью фрактального анализа. В результате обработки схем тальвегов с помощью фрактального аппарата участники имели возможность сравнить значения фрактальной размерности на территорию модельных овражно-балочных бассейнов на разные годы. Такое задание предполагало развитие у участников Школы навыков анализа и обработки картографических материалов с последующим расчетом величины фрактальной размерности и интерпретацией этого показателя в зависимости от ряда особенностей каждого конкретного эрозионного бассейна.

Второе семинарское занятие, подготовленное доцентом к.ф.-м.н. И.С. Ремпен (СГУ, Саратов), проводилось в специально оборудованном компьютерном классе. Участникам семинара было предложено рассчитать фрактальную размерность по схемам участков овражно-балочной сети различных районов Саратова и Саратовской области, полученным с помощью топографических карт местности в ходе первого семинарского занятия. Методика получения результата была описана в специально предоставленном участникам семинара методическом пособии.

Во второй части семинара слушателям ставилась задача ознакомления с прикладными пакетами программ для компьютеров, автоматически решающими задачу расчета фрактальной размерности и фрактального анализа любых заданных одномерных и двумерных объектов, и приобретение навыков работы с ними. В заключение семинара участникам была предоставлена возможность проверить достоверность полученных ими практических результатов с помощью специально подготовленной на факультете нелинейных процессов компьютерной программы «ГЕОФРАКТАЛ 2.0» и оценить значение фрактального анализа в области применения методов нелинейной динамики к наукам о Земле.

В завершение семинарских занятий состоялось обсуждение полученных результатов. Вместе с ведущими семинаров слушатели имели возможность обсудить наиболее типичные ошибки, возникающие при применении теоретических методов нелинейной динамики на практике, границы применимости тех или иных методов к реальным геосистемам, обсудить другие вопросы, касающиеся применения полученных теоретических сведений. Таким образом, проводилась проверка эффективности усвоения слушателями Школы материала прослушанных лекций.

Другим мероприятием, включённым в программу стажировки молодых исследователей в ходе проведения Школы, стала защита слушателями (или малыми группами слушателей, работающих над проектом совместно) своих научно-исследовательских работ. Для этого участники должны были предварительно подготовить расширенные тезисы своего выступления, которые присылались в оргкомитет непосредственно перед началом Школы. Таким образом члены программного комитета могли заранее ознакомиться с содержанием докладов и отобрать работы наиболее высокого уровня. По окончании лекционной программы было проведено пленарное заседание, на котором слушатели представили доклады. Наилучшие работы по итогам защиты были отмечены дипломами школы-конференции.

В рамках *круглого стола* «Синергетика и геоэкология: пути коэволюции» состоялась презентация учебно-научной литературы, изданной за последние годы как организаторами Школы, так и их коллегами из ведущих научно-образовательных

организаций России. Выставка публикаций кафедры геоэкологии и факультета нелинейных процессов Саратовского университета, посвященных вопросам изучения геоэкологически опасных природных и природно-техногенных процессов с помощью различных методик, в том числе аппарата нелинейной динамики, вызвала значительный интерес участников круглого стола.

В обсуждении современных проблем нелинейной динамики, геологии и геоэкологии особо подчеркивалась важная роль синергетики, методический аппарат которой еще только начинает использоваться в науках о Земле, геоэкологии и экологии. Профессор Д.В. Михель (СГГУ, Саратов) отметил синергетические эффекты в развитии массовых эпидемий. Профессор П.М. Горяинов выступил с оценкой уровня современного развития синергетических идей в науках о Земле. Член-корр. РАН Д.И. Трубецков представил основные научные издания, посвященные нелинейно-динамическому моделированию различных процессов. Представленные сообщения вызвали активное обсуждение всех участников круглого стола. В результате работы круглого стола сформирована общая позиция организаторов и участников: многие проблемы современной геоэкологической науки могут быть решены в рамках междисциплинарных научных направлений на стыке наук о Земле и нелинейной динамики с использованием аппарата математического моделирования.

Полевой семинар для участников Школы был организован А.В. Ивановым и И.А. Яшковым. В течение двух рабочих дней Школы участники посетили наиболее показательные модельные полигоны изучения различных геоэкологически опасных процессов как на территории Саратова и его окрестностей, так и на территории Красноармейского административного района Саратовской области. Маршрутные работы предполагали знакомство с разнообразием геологических и геоморфологических методов изучения геоэкологически опасных объектов и явлений.

Разработанный программным комитетом учебно-научный план был выполнен в полном объеме. Принято решение о целесообразности проведения в следующем году второй Школы по данной тематике, посвящённой междисциплинарным исследованиям в области нелинейной динамики геосистем.

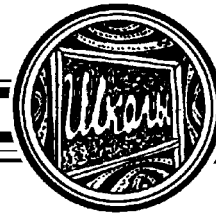
Научная школа проведена при поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы и при финансовой поддержке Некоммерческого партнерства «Поволжский торговый альянс» (Саратов, ген. директор В.В. Зародин).

SYNERGETICS AND GEOECOLOGY: WAYS OF COEVOLUTION

*E.N. Egorov, A.V. Ivanov, A.A. Koronovskii,
D.I. Trubetskov, A.E. Hramov, I.A. Yashkov*

This article contains the information concerning the organization of the All-Russian scientific school in the Saratov State University for young scientists. The paper deals with the reviews of the lectures, labs, practical tasks, etc. The scientists from different regions of Russia have taken part in this school.

Keywords: Synergetic, geocology, Earth sciences, scientific school for young scientists.



**АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ
ЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ**

АПЭП-2010

IX Международная научно-техническая конференция

Саратов, 22–23 сентября 2010

Саратовский государственный технический университет

Организаторы

- Саратовский государственный технический университет
- Российское научно-техническое общество радиотехники, электроники и связи им. А.С. Попова
- ООО НПФ «ЭлТрон-С», г. Саратов
- IEEE ED Society, MTT/ED/AP/CPMT Saratov–Penza Chapter

Оргкомитет

Захаров А.А., председатель, д.т.н., профессор, зав. кафедрой ЭПУ, СГТУ, Саратов; *Царёв В.А.*, зам. председателя, д.т.н., профессор кафедры ЭПУ, СГТУ, Саратов; *Мирошниченко А.Ю.*, ответственный секретарь, к.т.н., доцент кафедры ЭПУ, СГТУ, Саратов; *Синицин Н.И.*, д.ф.-м.н., профессор, СФ ИРЭ РАН, Саратов; *Морев С.П.*, д.ф.-м.н., ФГУП «НПП «Торий», Москва; *Григорьев Ю.А.*, д. ф.-м. н., профессор, СФ ИРЭ РАН, Саратов; *Большаков А.А.*, д.т.н., профессор, декан ФЭТиП, СГТУ, Саратов; *Сивяков Б.К.*, д.т.н., профессор, зав. кафедрой ЭиЭ, СГТУ, Саратов; *Кудряшов В.П.*, д.т.н., зам. директора НПЦ «Электронные системы», ФГУП «НПП «Алмаз», Саратов; *Акафьева Н.А.*, зам. ответственного секретаря, инженер кафедры ЭПУ, СГТУ, Саратов; *Кузнецов Р.Ю.*, художественный редактор, ИЦ «Дельта», Саратов; *Панина О.А.*, технический редактор, РИЦ СГТУ, Саратов; *Папшев С.В.*, начальник Управления исследованиями в области образования и науки, СГТУ, Саратов; *Пчелинцев Г.А.*, директор ООО НПФ «ЭлТрон-С», СГТУ, Саратов; *Никитина В.И.*, ведущий инженер СИДиИСДЦ, СГТУ, Саратов

Программный комитет

Никитов С.А., председатель, д.ф.-м.н., зам. директора ИРЭ РАН, Москва; *Сытник А.А.*, д.т.н., профессор, первый проректор СГТУ, Саратов; *Петров Д.М.*, д.т.н., профессор, руководитель секции электроники РНТОРЭС им. А.С. Попова, Москва; *Трубецков Д.И.*, д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой электроники, колебаний и волн,

СГУ, Саратов; *Царёв В.А.*, зам. председателя, д.т.н., профессор кафедры ЭПУ, СГТУ, Саратов; *Захаров А.А.*, д.т.н., профессор, зав. кафедрой ЭПУ, СГТУ, Саратов; *Григорьев А.Д.*, д.т.н., профессор, С.-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ», С.-Петербург; *Федяев В.К.*, д.т.н., профессор, зав. кафедрой ЭП, Рязанская государственная радиотехническая академия, Рязань; *Милютин Д.Д.*, д.т.н., с.н.с ФГУП «НПП «Алмаз», Саратов; *Филимонов Ю.А.*, д.ф.-м.н., профессор, директор СФ ИРЭ РАН, Саратов; *Семёнов В.К.*, к.т.н., зам. гл. инженера ФГУП «Контакт», Саратов; *Мещанов В.П.*, д.т.н., профессор, зам. ген. директора ЦНИИИА, Саратов; *Рыскин Н.М.*, д.ф.-м.н., профессор, СГУ, Саратов, координатор МТТ/ED/AP/CPMT Saratov-Penza Chapter; *Артюхов И.И.*, д.т.н., профессор, зав. кафедрой ЭПП, СГТУ, Саратов

Тематика конференции

На конференции предполагается обсудить новые результаты научных исследований и практических достижений по следующим направлениям:

- микроволновые приборы и устройства, включая наноэлектронику;
- электродинамика и микроволновая техника;
- силовая электроника и прикладные аспекты электронного приборостроения.

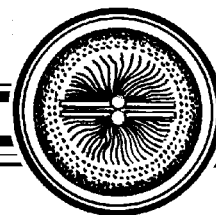
Для участия в конференции в оргкомитет необходимо представить:

- тексты докладов в электронном виде;
- заполненную регистрационную форму на каждую статью;
- экспертное заключение – для докладов авторов из РФ.

Контрольные сроки

| | |
|--|-------------------|
| Приём докладов | до 1 июня 2010 |
| Извещение о включении докладов в программу конференции | до 15 июля 2010 |
| Оплата орг. взноса | до 1 августа 2010 |

Полная информация о правилах участия
в конференции на сайте АПЭП-2010: <http://apede2010.sstu.ru>
Электронный адрес Оргкомитета конференции: alexm@sstu.ru
Адрес Оргкомитета АПЭП-2010: 410054 Саратов, ул. Политехническая, 77,
СГТУ, каф. ЭПУ, Оргкомитет АПЭП-2010, Мирошниченко А.Ю.



К 100-летию Саратовского государственного университета

Серия: «След вдохновений и трудов упорных...»

«...И ПОИСК ТРУДНОЙ ПРОСТОТЫ»

**Сборник избранных статей журнала
«Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика»**

Составитель и автор предисловия Д.И. Трубецков

© Редакция журнала «Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика», 2008
© Д.В. Соколов, оформление, 2008
Саратов: ИЦ «РАТА», 2008. 212 с., илл.
ISBN 978-5-91659-022-7

В сборник вошли избранные статьи из ряда рубрик журнала «Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика», представляющие интерес для широкой читательской аудитории, интересующейся историей науки, культурологией, проблемами университетского образования.

Предисловие

Поэт Иосиф Бродский в предисловии к книге стихов Александра Кушнера написал: «Время, потраченное на предисловие, есть время, украденное у чтения, и поэтому я буду краток». Последуем и мы примеру поэта. В сборнике избранных статей, напечатанных в разное время в журнале «Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика» отражены две темы: история науки, в частности, нелинейной динамики, и идея сближения двух культур – естественно-научной и гуманитарной. Эти темы идейно связаны, поскольку история науки является очень важным разделом культуры. История науки выиграет, если о ней будут говорить не только люди, имеющие, главным образом, историческое или философское образование, но и исследователи, которые сами вносят вклад в науку, знакомы с результатами ее достижений и думают о ее современном или прошлом развитии. Ученый-естественник находит в истории науки многочисленные уроки и, умудренный собственным опытом, он может лучше, чем кто-то другой, истолковать со знанием дела эти уроки. Она поучительна для всех научных работников. Удивительно точно писал об истории не случайно упомянутый нами Александр Кушнер:

История не учит ничему,
Но, как сказал историк, – и ему
Не верить нет причины, – за незнание
История наказывает нас. Глаз да глаз
За нами нужен, да вниманье.
Скорее воспитательница, чем
Учительница. Сколько страшных тем
В учебниках ее, в ее анналах.

По счастью, в этом сборнике нет «страшных тем». Отметим также, что история науки есть поучительный анализ деятельности человеческого мозга, позволяющий классифицировать склады ума и методы работы научных работников; она - драгоценный источник сведений о механизме научного прогресса и законах его развития. Другая тема восходит к знаменитому эссе Чарльза Сноу «Две культуры», в котором в середине XX века английский физик и писатель с тревогой усмотрел возможность раскола общей культуры на две разные культуры. У нас в стране эта тема нашла отражение в дискуссии о «физиках» и «лириках». По нашему мнению, такого раскола не происходит, а появление нелинейной динамики, наоборот, создает предпосылки сближения этих культур. Иллюстрацией этого тезиса являются несколько статей сборника. Надеемся, что читатель получит удовольствие от прочтения сборника и захочет сам участвовать как автор в соответствующих разделах нашего журнала.

Содержание

Предисловие

Обзоры актуальных проблем нелинейной динамики

Мухин Р.Р. Колмогоров и теория КАМ: заметки к истории ее создания

Мухин Р.Р. Хаос и неинтегрируемость в гамильтоновых системах

Нелинейная динамика в лицах. История. *Personalia*

Мухин Р.Р. Из истории гамильтонова хаоса: исследования стохастичности нелинейных систем в трудах Новосибирской школы

Мухин Р.Р. Из истории гамильтонова хаоса: бильярды

Дмитриев Б.С., Левин Ю.И. Юбилей электрона

Дмитриев Б.С., Левин Ю.И., Шараевский Ю.П. Этюды об Эйнштейне

Трубецков Д.И. Жозеф Валентен Буссинеск, Дидерик Йоганн Кортевег, Густав де Вриз и уравнение КДВ

Методические заметки по нелинейной динамике

Трубецков Д.И. Колмогоров, Петровский, Пискунов, Фишер и нелинейное уравнение диффузии

Трубецков Д.И. Канонические модели нелинейной динамики в экономике

Наука – образованию

Трубецков Д.И. Образование, наука и культура – миссия университета. Комментарии к книге Хосе Ортеги-и-Гассета «Миссия университета»

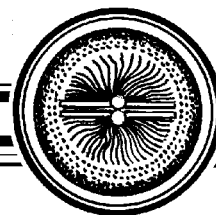
Дмитриев Б.С., Левин Ю.И., Шараевский Ю.П. Постановка физического образования в классическом университете

Нелинейная динамика и гуманитарные науки

Пойзнер Б.Н. Дуализм концептов – на службу синергии «двух синергетик»

Рабинович М. О некоторых особенностях творчества: стихи и формулы

Рабинович М. Время внутри нас



**СПОСОБ БЫТИЯ СУБЪЕКТА? –
«ПОИСК ТРУДНОЙ ПРОСТОТЫ»**

Б.Н. Пойзнер

Понимание как целое складывается из трёх начал:
познающего, познавания и познаваемого.

В.В. Розанов, 1886

Мчится мгновенный век...

А. Блок, 1912

Человек, и это правда, не владеет миром. Раз-
ве что властвует над тем, что ему близко; и
господство над тем, что ему ближе всего, – в
пространстве, открываемом наукой, – обычно
даёт ему чувство, что он у себя дома.

Ж. Батай, 1957

Редакция журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика» преподнесла студентам и сотрудникам Саратовского государственного университета – к столетию рождения alma mater – оригинальный и ценный подарок. Это сборник «...И поиск трудной простоты» [1], составленный из статей журнала 1995–2008 гг. На наш взгляд, подарок выражает роль Саратовской нелинейно-физической школы, а также дальновидность лидеров СГУ, проявившуюся в ряде пионерских начинаний в конце минувшего века.

Выход в свет книги видится нам вовсе не «внутривузовским» лишь событием. Работы в [1] вызывают далеко не только академический интерес. Они либо непосредственно, либо логикой читательского восприятия ориентируются на те цели, которым в основном подчинено существование науки и образования. Пересмотр этих целей и условий существования идёт на фоне осознания нестационарности, переходности нашей эпохи. Показательны центральные образы теорий, в которых исследователи описывают и объясняют наше турбулентное сегодня: философия разрыва [2,3], концепции «trans» [4,5], феноменология «пере» [6], идея растождествления [7]. А человека нашей поры квалифицируют неологизмом Homo zwischens (от нем. zwischen –

между) [8, с. 464]. Ситуация в отечественном университете отягощена тем, что после экзекуций в советские десятилетия, а потом «под натиском ширпотреба» (И. Бродский) *alma mater* во многом утратила способность облагораживать духовно своих питомцев [9].

Даже беглая оценка многих сторон содержания [1] (объём 212 с.) предполагает обращение к различным контекстам. Поэтому рецензия не получилась лаконичной.

Жанр и актуальность. Нет, презент к вековому юбилею СГУ – отнюдь не «творческий отчёт» *ex officio*, не парадный «рапорт». Я сравнил бы сборник с многогранником, поскольку книга отвечает требованиям к полидисциплинарным работам. Тематические вершины этой фигуры далеко отстоят друг от друга. Скажем, на одном полюсе находятся обзоры Р.Р. Мухина по теории Колмогорова–Арнольда–Мозера, по проблеме неинтегрируемости и детерминированного хаоса в гамильтоновых системах. Они рисуют панораму становления этого фундаментального направления исследований, в котором достойное место занимают работы наших соотечественников.

В противоположной точке – два эссе М.И. Рабиновича, делающие сборник привлекательным и для филологов, и вообще для любителей сложной поэзии XX века. В эссе речь идёт о материях, насущных, вероятно, для каждого автора, печатающегося в «ПНД». Опираясь на собственный опыт поэта и обращаясь к шедеврам предшественников, М.И. Рабинович толкует творчество как реакцию на «нехватку средств». Тонко переживая «время внутри нас», он помогает читателю воспринимать, осознать, декодировать этот феномен в классических стихах. И тем самым он повышает в читателе его «субъектный потенциал» [10, с. 561]. Очевидно, он требуется для успешной творческой деятельности. Более того, если человек начинает задумываться над механизмами субъектного самоосуществления (а оно идёт во времени), то его жизненные смыслы обогащаются. И это способно повлечь отказ от рутины. Например, в таком временном явлении социального бытия, как любовь. Философ культуры В.М. Розин, исходя из понятия внутреннего времени человека, выдвигает концепцию *креативной любви субъекта*, осознающего себя личностью [10, с. 446–451]. Его подход и другие толкования феномена времени в человеческом измерении, развёрнутые в [10], свидетельствуют, что рецензируемый сборник [1] соответствует вектору движения теории социального времени. Уверен, что она небезынтересна читателям «ПНД»: ведь изучение динамических систем незаметно обостряет то, что хочется назвать нашим *темпоральным инстинктом* (от лат. *temporarius* – сообразный со временем; *temporis* – зависящий от времени, чувствительный к времени).

Смысловой лейтмотив. По-моему, *Leitmotiv* [1] передаёт рёзановская триада: познающий, познание, познаваемое (см. эпитафия). Именно в таком порядке: на первом месте – человек. Названия доброй половины статей несут чью-то фамилию либо несколько, спаянных аббревиатурой в одно коллективное имя, вроде КАМ, ФПУ или КДВ. Заглавие одного из разделов (давно присутствующего в «ПНД») точно передаёт эту установку на субъект научного творчества: «Нелинейная динамика в лицах. История. *Personalia*».

Рискну сказать (перефразируя тему монографии [11]), что сборник утверждает *персонализм как средство воспитания* профессиональной культуры в физико-математических науках. Что это значит? Немало математических абстракций носят «фирменные» имена Буссинеска, де Вриза, Гамильтона, Колмогорова, Кортевега,

Петровского, Пискунова, Фишера, Эйнштейна. Насколько могу судить, для большинства студентов (и, подозреваю, для некоторых преподавателей) далеко не все из эпонимов (от др.-гр. ετι – после + ὄνομα – имя), то есть тех, чьё имя носит закон физики либо модель, воспринимаются как конкретные личности. И вот читатель сборника [1] (благодаря усилиям Б.С. Дмитриева, Ю.И. Лёвина, Р.Р. Мухина, Д.И. Трубецкова, Ю.П. Шараевского) неожиданно обнаруживает за слишком привычными фамилиями концентрированную полноту человеческого существования. А в ней – риски, драматизм, сильные страсти, духовные высоты, горькие прозрения... Некоторые поворотные пункты нашей точной науки в XX, XIX вв. не только восстанавливаются. Их оживляет обращение к судьбам обитателей мира науки. Примечательно, что мир этот нередко показан через их видение, порой несоразмерное с современным.

Персоналистский аспект ряда статей в [1] восполняет в какой-то степени многолетнюю нехватку работ по психологии творчества представителей естествознания и математики. Дефицит усугубляется отсутствием системно построенного полидисциплинарного ответвления когнитивистики, какое можно было бы назвать: *эстетика физико-математического творчества*. Комбинируя материалы из [1], из трудов историков науки Д.С. Данина, Ю.А. Данилова, философа культуры К.А. Свасьяна и других источников со способами анализа творческого «я», которые практикуют искусствоведы (допустим, в [12]), вероятно, удалось бы продвинуться к такой эстетике. В частности, Б.С. Дмитриев, Ю.И. Лёвин, Ю.П. Шараевский в [1] обращают внимание на нетривиальность проблемы возникновения новой модели в теоретической физике. Здесь каждый раз по-своему проявляются коллизии двух мощных начал: дерзкой авторской инициативы и императивов научной культуры, творческого «я» и корпоративного «мы» (что составляет аналогии с темами в [12, с. 177, 278]).

Синергия рубрик. Мне кажется, сведение под обложкой [1] текстов различных типов, сгруппированных в пять разделов, дало синергетический эффект. Во-первых, обозначился новый смысл последовательности событий в истории физико-математического знания, в развитии связанного с ними университетского образования. Что само по себе весьма ценно. (Скажем, несколько статей, как я теперь вижу, мне надо обязательно использовать в лекциях по современным проблемам физики.)

Во-вторых, продуманное разнообразие позиций, с которых в [1] освещается исторический и сугубо научный материал, помогает читателю увидеть учёного не только как одарённого деятеля, своевременно разрешившего ту или иную трудную проблему, но и в роли создателя сложного, многоаспектного, эволюционирующего мира науки. Причём это не только интеллектуальный труд (неважно – за адекватное вознаграждение или нет), но и главным образом борьба с самим собой, саморазвитие, самопревышение в ходе преодоления барьеров и тягот творческой деятельности. Мне приходит на память двойная формула В.М. Розина (изучающего отношение «личность – культура» [13, с. 42]). Чуть изменив её, можно сказать, что сборник очерчивает силуэт такого креативного индивида, в котором «учредитель и менеджер "себя"» слит с субъектом физико-математической культуры. Естественно, этот процесс *нелинейный*: исследователя – в периоды учения и творческого дебюта – формирует сложившаяся научная культура. Далее в её движение он – наряду со своими современниками – вносит некую лепту. А новое состояние научной культуры, в свою очередь, воздействует на личность исследователя. Etc. по циклу.

В-третьих, чтение первых четырёх разделов [1] убеждает в том, что наука Нового времени (равно как и вся человеческая культура) существует в форме «куматоидов» (от др.-гр. *κύμα* – волна + *εἶδος* – вид), то есть волнообразных объектов, и «социальных эстафет».

Эти понятия выдвинул московский (а в 1960–1970-е гг. – новосибирский) философ М.А. Розов, объясняя способ бытия научного знания и других семиотических (то есть имеющих знаковую природу) объектов. Развивая параллель между социальными явлениями и волнами (предложенную французским социологом Г. Тардом в 1890 г.), обобщая факты из истории многих наук и выделяя инварианты их эволюции, М.А. Розов распространил волновую модель на функционирование социума в целом. Действительно, общество подобно волне в том смысле, что оно (и любой социальный организм) постоянно воспроизводит себя – в каждом очередном поколении – в форме разветвлённой программы человеческих действий. Но воспроизводит – на всё новом и новом «человеческом материале». М.А. Розов называет социальным куматоидом реализацию некоторой социальной программы поведения на постоянно сменяющемся друг друга материале. В этом плане куматоид ведёт себя, словно одиночная волна на поверхности водоёма: она в ходе своего распространения заставляет колебаться всё новые и новые частицы воды. Примеры социальных куматоидов: университет, город, образ жизни, слово, знание [14, с. 38–47].

Социальная эстафета, по М.А. Розову, есть базовый механизм существования упомянутых выше социальных программ, то есть воспроизведение тех или иных форм человеческой активности в соответствии с уже имеющимися культурными образцами деятельности. Автор уподобляет социальные эстафеты «элементарным частицам», из которых состоит общество и культура. В этом контексте он цитирует Дж. Уилера, подчёркивающего, что теория элементарных частиц относится ко всему пространству сразу, то есть к тому целому, каким является Вселенная [14, с. 48–53].

Но, вероятно, впервые дискретный аспект человеческой культуры и скрытая принудительность её образцов ясно выразил в эссе «Антиномия культуры» (1928) [15] русский мыслитель Н.М. Бахтин (1894–1950), живший в эмиграции. Социальные куматоиды и эстафеты, удобные для описания «устройства» механизмов получения знания в науке, представляют собой разновидности *репликаторов*. Так называют информационные (либо материальные) структуры, способные самовоспроизводиться в подходящей среде и служить инициатором процесса самоорганизации в неравновесных системах [16].

Относительно же места творчества в процессах, формируемых социальными эстафетами (что составляет фабулу большинства статей в [1]), М.А. Розов полагает: творчески мыслить – значит осуществлять прошлый опыт в новых условиях, воспроизводить Прошлое в Настоящем. По-видимому, авторы и читатели [1] признают наличие нелинейного подхода в розовском рассуждении о соотношении Прошлого / Настоящего в науке. Реализуя образцы деятельности, – пишет философ, – мы тем самым изменяем контекст их существования. Хотя современная наука (и культура в целом) есть продукт реализации прошлых образцов, но они в контексте сегодняшнего знания получают новый смысл, новое содержание. «Мы смотрим в Прошлое из Настоящего, и это означает изменение контекста его существования. Именно в силу этого мы способны находить в Прошлом всё новое содержание, а реализуя его, снова обогащаем и видоизменяем контекст восприятия прошлых образцов. <...> Итак,

сохранить – значит видоизменить» [14, с. 54–56]. Предполагаю, что такая позиция склоняет взяться за перо и авторов [1].

В-четвёртых, указанные разделы и Предисловие в [1] выпукло иллюстрируют тезис: наука – это система с рефлексией [14, с. 301]. Иначе говоря, в голове отдельного исследователя (или в его подсознании) и в трудах науковедов не умолкает самокритичный диалог, какой Фауст, обращаясь к студенту Вагнеру, ведёт с самим собой: *Что значит знать? Вот, друг мой, в чём вопрос. / На этот счёт у нас не всё в порядке* [17, с. 28]. М.А. Розов напоминает, что научные знания постоянно осознаются в свете различных научных задач, и это приводит к рефлексивным преобразованиям. Он подчёркивает: исследование науки надо осуществлять с позиций «внешнего» наблюдателя, «не подменяя самого учёного в его попытках вербализовать те программы, которые он реализует. Основная задача исследования – выделение типов программ и их связей, выявление в конечном итоге эстафетных структур знания и науки» [14, с. 147, 301].

По-моему, М.А. Розов одобрил бы авторов историко-научных статей в [1] за решение этой задачи, пусть формулируемой ими на другом языке, но явно подразумеваемой. Эта сторона содержания [1] многообразно связана со вторым членом триады В.В. Розанова: познаванием. Ad vocem, в сборнике отведено место и третьему началу понимания: познаваемому. Пример – статья Б.С. Дмитриева, Ю.И. Лёвина, кратко и остроумно озаглавленная: «Юбилей электрона». Первый эпиграф к ней (выбранный из того места мифологического эпоса «Фиваида» римского поэта Публия Папиния Стация (ок. 45–96 гг. н.э.), где речь идёт о благоговейном следовании «божественной» поэме Вергилия (70–19 гг. до н. э.) «Энеида») призывает: *vestigia semper adora* – Всегда чти следы (прошлого). Он по праву мог быть поставлен и ко всему сборнику.

В-пятых (а отчасти, в-третьих), составитель издания [1] не упускает из виду ещё одну «вечную» проблему. Её можно определить так: соотношение индивидуального и культурного авторства (ссылаясь на доклад известного гуманитария В.С. Библера на семинаре «Архэ» в Москве, в 1999 г. [18, с. 341]). Нередко, чтобы разделить персональную и коллективную долю в получении нового знания, полезно выяснить, как формулируются вопросы и ответы внутри данного профессионального сообщества в те или иные периоды его деятельности и на определённой стадии истории знания.

Так поступает, например, Р.Р. Мухин, восстанавливая картину исследований стохастичности нелинейных динамических систем, проводимых в 1960–1970-е гг. в Новосибирской научной школе. Цитируемые им письма и воспоминания, а также выявленные (и быстро забываемые ныне) детали советского научного быта объясняют, почему первопроходцам, обнаружившим детерминированный хаос в гамильтоновых системах, пришлось «преодолеть немалые трудности» [1, с. 48], прежде чем их идеи получили признание в физическом сообществе СССР. Р.Р. Мухин показывает, что их достижение явилось продолжением богатой физико-математической традиции, созданной усилиями Л. Больцмана, А. Пуанкаре, Дж. Биркгофа, Э. Хопфа, Н.С. Крылова, А.Н. Колмогорова, Я.Г. Синая. В статье раскрыт вклад лидеров этого направления: Б.В. Чирикова, Г.М. Заславского, А.М. Будкера, Р.З. Сагдеева, а также их продуктивных коллег, учеников, коллаборантов. Глубину исторической мизансцене придаёт освещение автором проблемы Ферми–Пасты–Улама (1940) и её трактовки Б.В. Чириковым и Ф.М. Израйлевым.

В-шестых, системно построенный сборник [1] демонстрирует (без фальшивого пафоса и псевдогуманитарного красноречия) значимость ценностного аспекта естествознания. На страницах «ПНД» эта тема недавно звучала в междисциплинарном диалоге Ю.И. Неймарка с А.Я. Левиным по поводу создания первым математической (производительно-потребительно-управленческой) модели социума [19]. Обращение авторов [1] к репрезентативным (и запоминающимся) историческим эпизодам делает понятными роль, механизмы, пределы *саморегулирования* в научном сообществе. Поэтому рецензируемый сборник *de facto* отвечает на вопрос современного философа Э. Агацци: почему у науки есть и этические измерения? Как и авторы [19], Э. Агацци настаивает на «ответственном соучастии» научной корпорации в решении проблем всего человеческого сообщества, отвергая (добровольную или организуемую властными и гражданскими структурами) изоляцию учёных от специфических проблем социума. Сегодня от естествознания и создателя новых технологий требуется «привычка формулировать правильные *моральные суждения*» [20, с. 103–104]. И в этом плане книга [1] обладает несомненным педагогическим потенциалом.

Так, статья Б.С. Дмитриева, Ю.И. Лёвина, Ю.П. Шараевского о постановке физического образования в классическом университете [1] не только напоминает о том, что он издавна противостоял фольклорному сознанию, иррационализму, религиозному и прочему мистицизму (принявшим в плохо образованном, а потому растерявшемся российском обществе комические формы, но угрожающий размах). Статье предпослана глубокая мысль профессора Кембриджского университета А. Пиппарда: поскольку физика воплощает искусство решать проблемы материального мира, то и учиться физике надо как искусству. Мне представляется существенным, что одним из условий формирования молодого физика авторы полагают воспитание «глубокой порядочности, нравственной культуры, собственного достоинства» [1, с. 165]. (Это ли не формула патриотизма?). Уже только потому, что физике следует учиться как искусству, невозможно игнорировать этический императив творческой деятельности.

Чтобы обосновать императив, позвольте привести длинную цитату. Французский прозаик М. Пруст размышляет в начале романа «В сторону Свана» (1913): «В жизни нашей всё происходит так, как если бы мы вступали в неё под бременем обязательств, принятых в некоей прошлой жизни; в обстоятельствах нашей жизни на этой земле нельзя найти никаких оснований, чтобы считать себя обязанным делать добро, быть чутким и даже вежливым, как нет оснований для неверующего художника считать себя обязанным двадцать раз переделывать какой-то фрагмент, дабы вызвать восхищение, которое телу его, изглоданному червями, будет безразлично так же, как куску жёлтой стены, изображённой с таким искусством и изысканностью навеки безвестным художником <...>. Все эти обязанности, здешней жизнью не оправданные, относятся, по-видимому, к иному миру, основанному на доброте, совестливости и жертве и совершенно отличному от нашего, – миру, который мы покидаем, дабы родиться на этой земле».

Кризис науки? Конец науки? Думается, значение републикаций, объединённых в [1], ещё и в том, что почти каждая из них по-своему иллюстрирует идею хрупкости культуры: её высоким результатам часто благоприятствуют случайные стечения событий в жизни и деяниях учёного. Как говорится в Предисловии к [1], по счастью, в этом сборнике нет «страшных» тем. Это верно.

Однако знакомство с историческими сюжетами в [1] менее всего настраивает на благодушное спокойствие. Наоборот, сюжеты эти невольно возбуждают тревогу относительно места института науки в нынешнем российском обществе. Возможно, одно из кардинальных отличий самоощущения исследователя в наши дни – переживание ситуации схлынувшего бума в точных науках. Чаще всего положение обозначают словом «кризис», столь ходким в последний год. Полезно вспомнить его этимологию.

Древнегреческое слово κρίσις означало: разбор; суд; приговор; решительный исход; спор, состязание; толкование. Κρίσις непосредственно связан с глаголом κρίνω – отделять; разбирать, судить. От глагола κρίνω происходит: 1) выражение κριτική τέχνη – искусство судить, критика; 2) важное для познания понятие «критерий»: κριτήριον – средство для решения; признак, по которому можно судить верно; суд [21, с. 732]. Если пытаться понять логос древнего грека, то получается, что в кризисе проявляется состязание различных начал (возможно, до кризиса незаметное). Как подсказывает язык античной Греции, в противовес катастрофе (καταστροφή – ниспровержение, уничтожение, гибель [21, с. 685]) кризис принципиально исправим. Но он требует критического мышления, то есть искусства отделять, разбирать, судить, требует поиска критерия (κριτήριον) – верного средства для вынесения решения. (Ошибочная же реакция на кризис чревата катастрофой: вспомним наш 1917-й.)

Наверное, для многих авторов «ПНД» и древний κρίσις, и любой кризис имеют своим геометрическим образом, а также синонимом точку бифуркации. Например, таковой представляется социокультурная ситуация в Европе первой четверти XVII в. Тогда в обстановке жестокой конкуренции возникла традиция математического моделирования природных явлений и процессов [22]. Рождение научного естествознания и ускорившееся совершенствование техники то исподволь, то явно изменяли жизнь мира, картину мира, духовные ценности. (Вот и нынче (в который раз!) под впечатлением поразительных научно-технических успехов и из лучших побуждений нам предлагается – в данном случае весьма изобретательным философом культуры и эрудитом М.Н. Эпштейном – древняя, но эффектно аранжированная им модель сверхъестественного существа, то бишь бога [23].) В свою очередь, общественно-политические кризисы (всемирные, региональные, местные) существенно влияли на темп, однородность, вектор развития науки Нового времени. Этой поучительной теме посвящён тысячестраничный фолиант [24]. Некоторые болезненные аспекты состояния российской науки и образования в 2000-е гг. дискутируются Д.И. Трубецковым в [1] по ходу комментирования работы Х. Ортеги-и-Гассета «Миссия университета».

В приложении к науке понятие кризиса имеет фундаментальный смысл, не связанный с кадровым, финансовым, материально-техническим, организационным упадком научных учреждений. Это – исчерпанность методов исследования либо сколько-нибудь достойных объектов исследования. Вероятно, в первом случае справедлива сентенция русского поэта-символиста и теоретика культуры Андрея Белого: «Кризис жизни и мира зависит от кризиса мысли: мысль действительна» (цит. по [25, с. 10]). Если оглянуться в прошлое, то ясно, что кризисы мысли случались в тех или иных науках многократно: таково свойство эволюции, идущей через последовательности бифуркаций и запускаемых в этих пунктах процессов самоорганиза-

ции «на новой идейной основе». Иначе говоря, эти кризисы суть механизмы *самообновления* познавательных средств отдельной дисциплины. Изредка же – целого комплекса наук. Тогда говорят о смене познавательной модели, или парадигмы (от др.-гр. *παράδειγμα* – пример, образец). Парадигма есть исходная модель постановки и решения проблем, способ упорядочения и истолкования конкретного материала, практикуемый учёными различных специальностей и убеждений [26, с. 71]. Понять, насколько велика власть парадигмы, помогают, например, «Этюды об Эйнштейне» Б.С. Дмитриева, Ю.И. Лёвина, Ю.П. Шараевского [1]. Многочисленные прецеденты описаны также в [14]. Пожалуй, эпиграфом к этим работам мог бы служить тезис (1927) германского мыслителя М. Хайдеггера: «Уровень науки определяется тем, насколько она *способна* на кризис своих основопонятий» [27, с. 9], то есть и на суд (*κρίσις*) над ними.

На рубеже XX–XXI вв. разговоры о кризисе науки отличаются, на наш взгляд, радикализмом, переходящим в саморекламу. Так, изобилующее различными мнениями сочинение (1996) американского журналиста Дж. Хоргана вносит похоронный тон самим заголовком: «Конец науки: Взгляд на ограниченность знания на закате Века Науки» [28]. (Было бы поучительно сопоставить его вердикты науке с прогнозами астрофизика Ст. Хокинга [29].) Подобные мегамасштабные прогнозы не раз звучали. Скажем, в 1989 г. американский общественный деятель японского происхождения Фр. Фукуяма выступил со статьёй «Конец истории?», которую в 1992 г. переработал в книгу «Конец истории и последний человек». Фр. Фукуяма полагал, что из-за исчезновения у США воинственного противника, каким был СССР, исторический процесс становится предсказуемым, даже скучным. Увы, реальный ход событий вскоре опроверг его предсказание... (Может быть, не зря философ и востоковед А.М. Пятигорский неpolitкорректно аттестует Фр. Фукуяму как «последнего шарлатана» [30, с. 38]?)

Какое отношение имеет юбилейный сборник к незатиhaющему спору о кризисе / конце науки? Самое прямое: большинство анализируемых в [1] научных проблем – это повествования *без эпилога*. Пока нет признаков истощения «золотой жилы», то есть объекта исследований, который мы называем Природой (первозданной либо рукотворной). Однако было бы наивностью провозглашать, что так будет вечно. Значит, поднимается дискуссия об эволюционных перспективах человеческой культуры. В частности – о статусе познающего разума, о науке как одном из способов осуществления функции познания, о сингулярности Дьяконова, преодолев которую, наша цивилизация сможет (если сможет) вступить в принципиально иную фазу, и т.д. [31,32].

От физика, стремящегося осмыслить столь непривычные материи, бесспорно, требуется очень напряжённый «поиск трудной простоты» и «ответственное соучастие». Готовят ли авторы [1] к подобной стезе читателя – особенно молодого? Да. Они укрепляют его навыки нелинейного и эволюционистского мышления. По моим ощущениям, сильная сторона текстов в [1] – присутствие познавательной установки, которую, видимо, первым у нас выразил П.Я. Чаадаев. В I «Философическом письме» он призывает: «Пора сознать, что человеческий разум не ограничен той силой, которую он черпает в узком настоящем, что в нём есть и другая сила, которая, сочетая в одну мысль и времена протекшие, и времена обетованные, образует его подлинную сущность и возносит его в истинную сферу его деятельности».

Историзм как «выбор себя». Рецензируемый сборник поддерживает традицию выпуска в СГУ изданий, посвящённых личностям и творческому наследию классиков XVIII–XX вв., а также наших соотечественников конца XX в., e.g. А.А. Андропова, Ю.А. Данилова, Ю.Л. Климонтовича. Традиция эта есть не только искренняя дань уважения замечательным предшественникам. Думаю, она отвечает индивидуальной и коллективной потребности в самопонимании.

В масштабе отдельной личности для самопонимания необходимы определённые условия и градиенты развития профессиональных интересов. В свою очередь, это стимулирует тот экзистенциальный труд, какой Ф.М. Достоевский метко называет: «сочинение себя человеком» (цит. по [13, с. 99]).

Коллективная же потребность создаёт обширный, разнообразный, многомерный «фонд» свидетельств, документов, наблюдений, обобщений и т.д. В итоге формируется более или менее полное *самоописание* научной корпорации, невольно выдающее её отношение к своему прошлому, настоящему, отчасти же – к будущему. И в этом пункте мы встречаемся с предпосылкой самоорганизации, которая имеет вероятность произойти в дальнейшем.

Модель общества как динамической системы с самописанием разрабатывает в 1980-е гг. германский социолог Н. Луман. В частности, он раскрывает особенности современного типа осознания времени. Толкуя новый историзм, Н. Луман пишет: «речь должна идти об общественной системе, в которой доминирует горизонт будущего, об общественной системе, для которой селективность будущего важнее селективности прошлого». Здесь просматривается некий диагностический принцип, который, наверное, законно и полезно применить к сообществу физиков. Если считать тексты в [1] более или менее репрезентативными *тестами* на упомянутую селективность, то, мне кажется, содержание [1] удовлетворяет критерию Н. Лумана (доминирование горизонта будущего).

В его теории общество есть система, и она изменяет себя благодаря эволюционирующему самописанию. Приблизительно та же социальная картина мира, типичная для физика. «Настоящее – доказывает Н. Луман – понимает себя как прошедшее в отношении вероятностно-случайных будущих настоящих и предварительно выбирает себя в рамках будущей случайности». Видимо, чем точнее самопонимание научного сообщества, тем обоснованней этот предварительный «выбор себя». Причём цели толкуются Н. Луманом «не как кульминация какого-то процесса развития, имеющая место в настоящем, а как селекция вероятностно-случайного будущего, производимая в настоящем». Стало быть, оценка целей «зависит от вердикта о шансах на реальность будущих вероятностей» [33, с. 157]. А это, заметим, сюжет из разряда тех, что предполагают владение «искусством решать проблемы материального мира» [1, с. 161]. Например, для описания и предсказания ситуаций в экономике Д.И. Трубецков предлагает привлечь канонические модели нелинейной динамики [1, с. 131].

Власть дискурса и преодоление идентичности со «своим временем». Выше отмечались некоторые отличительные черты сборника: 1) его содержание проникнуто идеей темпоральности; 2) первенствует установка на персонализм, на воспитание и поощрение субъектной позиции. Завершая рецензию, попытаемся показать, что сочетание этих аспектов тоже способно произвести системный эффект. Он благотворен для читателя, в особенности для того, кто начинает сознавать проблему соотношения себя со временем.

Напомним значение термина «дискурс» (фр. *discours*, англ. *discourse* < лат. *discursus* – рассуждение). Согласно разъяснению Н.С. Автономовой, дискурс имеет два разных смысла. 1) Логико-лингвистическое развёртывание, то есть «последовательное выражение мыслей посредством слов и предложений» (Словарь А. Лаланда). Отсюда прилагательное «дискурсивный», то есть выводимый логически – в противоположность знанию, получаемому интуитивно. 2) Социально-регламентированное высказывание, не имеющее отношения ни к логике, ни к лингвистике. То есть дискурс – это «совокупность социальных и идеологических ограничений, определяющих, кто, что, кому, каким образом и при каких обстоятельствах может или не может говорить. Как ни парадоксально этот социально-идеологический дискурс как раз «недискурсивен»: во всяком случае, он противоположен «дискурсивности» в логико-лингвистическом смысле слова» [34, с. 378]. Для различения двух омонимов Н.С. Автономова предлагает ко второму термину применять прилагательное «дискурсный».

Термин «дискурс» во втором смысле близок по своему значению к понятию стиля речи (письменной или устной). Так, принято говорить о «научном дискурсе» [35, с. 76], о «русском дискурсе» [36] и т.п. Молодой учёный обычно открывает существование дискурса как социально-регламентированных ограничений на высказывание, когда садится писать диссертацию и испытывает «муки слова». В какой-то мере они напоминают усилия, какие предпринимает ребёнок, осваивая мир слов. Наряду с правилами поведения, слова позволяют ему наладить диалог, общение с людьми и очеловечиться, то есть войти в общество, стать соучастником истории культуры, начавшейся задолго до него. Французский философ XX в. Ж. Лакан утверждает: роль языка «является определяющей, основной в истории субъекта» (цит. по [10, с. 460]). Аналогично, магистрант или аспирант – через освоение норм дискурса и профессионального поведения – способен стать полноправным членом цеха учёных. В результате его возможность саморазвития, его субъектный потенциал (как и у малыша, овладевшего речью) возрастает.

Полезны ли для его роста материалы в [1]? Безусловно. Молодой человек нуждается в том, чтобы видеть в наличном состоянии науки не просто данность, к которой он обязан приспособиться, но стадию эволюции, в которой он может и должен проявить свой дар, свою индивидуальность. Однако положение, в каком оказывается человек, неизбежно двойственное.

С одной стороны, личность связана с минувшей историей и со своим астрономическим временем через (не)осознанное воспроизведение колоссального массива культурных образцов, то есть структур восприятия, мышления, поведения, воображения [16]. Выше говорилось, что на репрессивную, принуждающую функцию этих структур указывал Н.М. Бахтин [15]. Дело в том, что культурные образцы, которым обязан следовать каждый, благодаря чему он отождествляет, идентифицирует себя со своей семьёй, коллегами, современниками, соотечественниками etc., изначально – и правомерно! – воспринимаются им как «внешние», «чужие». Философ М.М. Бахтин (брат Н.М. Бахтина, оставшийся в СССР и долгие годы проведший в ссылке, в г. Кустанае) напоминает, что всякий из нас живёт «в мире чужих слов. <...> распадение для каждого человека всего выраженного в слове на маленький мирок своих слов (ощущаемых как свои) и огромный безграничный мир чужих слов – первичный факт человеческого сознания и человеческой жизни <...>» [37, с. 406].

С другой же стороны, человек, буквально, – *self-made man*. Он не может не самоутверждаться, преодолевая заслоны вне себя, но ещё больше – стереотипы внутри

себя. (Верно, о своей судьбе думал Б. Пастернак (1936), когда писал о творческой натуре: «С кем протекли его боренья? / С самим собой, с самим собой».) Факты из [1] предоставляют начинающему исследователю достаточно прецедентов для подражания. Самоутверждение требует осознания того обстоятельства, что человек мыслит и действует «в мире чужих слов», то есть культурных образцов, созданных задолго до его появления на свет. Не исключено, что они возникли в ином контексте, для разрешения несколько иных противоречий.

Поэтому распадение культурных форм на «свои» и «чужие», «готовые» имеет, согласно М.М. Бахтину, огромное значение «для личности, для «я» человека (в его неповторимости)» [37, с. 406]. В науке неповторимость личности ассоциируется с её способностью нестандартного видения проблемы, что обычно служит залогом её оригинального (и успешного) разрешения. По М.М. Бахтину, неповторимость означает *незаменимость* личности. Действительно, заменимость её – особенно в науке, в искусстве – есть тревожный признак. «<...> один человек может стать на место другого, <...> человек вполне заменим <...> только в таких ситуациях и при решении таких вопросов, где целая и неповторимая *личность* человека не требуется, там, где человек, так сказать, специализируется, выражая лишь оторванную от целого часть своей личности, где он выступает не как “я сам”, а “как инженер”, “как физик” и т.п.» [37, с. 406]. Специализация, ущемляющая целостную личность, пожалуй, – главная опасность для физика. Защиту от неё даёт самообразование, удерживающее человека в сфере художественной культуры (естественно, высокой, а не массовой!). Мне представляется, что материалы, любовно собранные в [1], пригодны для профилактики данного «профзаболевания». Истоки конкретных достижений в науке и, конечно, яркие фигуры легендарных учёных демонстрируют вдумчивому читателю [1] ценность гуманитарного самообразования как жизненной стратегии.

Поскольку дискурс (во втором смысле) обусловлен социокультурными факторами, он изменяется с ходом истории. Иногда весьма заметно. Скажем, лет 30 назад в некоторой доле монографий физико-математического профиля первый абзац предисловия содержал ссылку на «исторические решения» съезда КПСС с таким-то порядковым номером, предназначавшие развитие в СССР области науки, к которой относится тема монографии. Совсем не обязательно, что автор книги свято верил в чудодейственную силу решений. Он мог написать такой абзац машинально, подражая сотням подобных предисловий. Такой абзац в текст мог вписать (не считаясь с волей автора) редактор издательства, олицетворявший диктат советского дискурса. А нынче ссылка в предисловии к книге физика на резолюцию последнего съезда ЛДПР, ЕР или СР будет воспринята со смехом или даже недоумением.

Чтобы подчеркнуть историзм дискурса, психолог Е.В. Улыбина вводит понятие актуального временного дискурса, под властью которого нам приходится быть [10, с. 462]. (К.А. Свасьяну принадлежит сильнодействующее определение: терроризм дискурса [7, с. 80].) Смысл его достаточно ясен в свете приведённого примера. Власть эта возникает, когда человек идентифицирует себя с определённой социальной группой, принимая её нормы и другие культурные образцы. Отождествление себя со временем проходит ряд этапов [10, с. 473].

Вначале принадлежность к «своему времени» не осознаётся. Тогда проблема идентичности решается *извне*: человек без всякой критики принимает те готовые способы бытия (от профессионального жаргона до метода формирования предмета исследования), которыми располагает данная субкультура. На второй стадии просыпается рефлексия. Принадлежность к «своей» социальной общности и заимствован-

ный у неё набор образцов, включая дискурс, оценивается как лучший, самый *актуальный*. (Вспомним слова из песенки дореволюционных студентов: «Только физика – соль! / Остальное всё – ноль».) Но границы «своего времени» ещё не становятся объектом внимания. На третьем этапе время оценивается личностью как не (вполне) соответствующее её запросам, ценностям и т.п. Рождается чувство «несовпадения себя и времени». Человек ищет себе место в том периоде истории, который представляется ему эталонным и потому «своим». Пример: с 1990-х гг. едва ли не каждый второй из молодых литераторов позиционирует себя как «человека Серебряного века». (Увы, почти все они не могут толком объяснить ни смысла, ни происхождения «металлургической метафоры» [39].) Для наивного литератора отождествление себя с этим промежутком истории может стать не стимулом роста субъектности, а штампом, тормозящим реализацию своей неповторимости в творчестве.

Однако ощущение темпорального несоответствия благотворно. Оно-то и побуждает личность сопротивляться границам «своего времени», а тем самым – границам своего «я», задаваемым идентичностью со средой. Преодолевая идентичность со «своим временем» (будь то XIX в. или XXI в.), человек восстанавливает своё целое. Он перестаёт оценивать прошлое и будущее лишь через систему временного актуального дискурса. И тогда личность в состоянии воспринимать, а далее преодолевать элементы иного, то есть «чужого», не её персонального времени [10, с. 462, 468–474]. Персональное – сфера, где человек «у себя дома» (см. эпиграф), где нет помех его саморазвитию. «ЧЕЛОВЕЧЕСКОЕ в нас и начинается с растождествлений», – убеждён К.А. Свасьян [7, с. 9]. Чтобы овладеть трудным искусством растождествления, нужны своего рода мастер-классы. По-моему, их функцию – на материале истории точных наук – выполняют многие тексты в [1]. А эссе М.И. Рабиновича обучают читателя, как сделать красоту словесного творчества союзником самопознания.

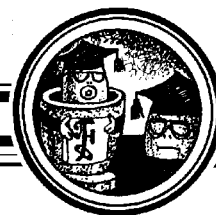
Субъективное resume. Пожалуй, в России нынче ни один университет, кроме Саратовского, не печатает регулярно трудов по мировой и отечественной истории естественных и точных наук, включая новейшую её стадию. Здесь особенно выделяются циклы статей Д.И. Трубецкого, время от времени издаваемые в виде приложений к «ПНД». Они заслуживают самых хвалебных оценок на страницах научных журналов, но я таковых не встречал... Преимущество по отношению к этим приложениям тактично подчеркнута дизайном обложки [1] (художник Д.В. Соколов), цвет её выбран сдержанный, благородный. Формат издания не громоздок, но солиден. Стил «ПНД» сохранён и узнаваем. Техническое редактирование (И.Я. Сидорова, Л.А. Сидорова) выполнено тщательно.

В целом же «...И поиск трудной простоты» внушает читателю идею ценности ничем не заменимой свободы: научного поиска, университетского образования. По моей догадке, здесь сказывается дореволюционный – пусть и краткий – период жизни СГУ. Такое допущение не противоречит комментарию Д.И. Трубецкого к книге Х. Ортеги-и-Гассета «Миссия университета». Сохранить университетский дух свободы (если он жив), вероятно, важно, чтобы послужить образцом современному российскому населению с его пёстрыми рудиментами и рецидивами рабской психологии «закрытого общества» [39]. Приходится пока ещё говорить о населении или даже популяции, а не о социуме, используя критерий И.Г. Фихте, который можно назвать нелинейно-динамическим. В лекциях о назначении учёного, читанных в Йенском университете (1794), немецкий философ заявляет: «*Взаимодействие посредством свободы (Wechselwirkung durch Freiheit)* – положительный признак общества» [40, с. 25]. Приложим ли его критерий ко всем нашим университетам?

Библиографический список

1. «...И поиск трудной простоты»: Сб. избр. ст. журнала «Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика» / Сост. и автор предисл. Д.И. Трубецков. Саратов: ИЦ «РАТА», 2009.
2. *Жижек С.* Устройство разрыва: Параллаксное видение. М.: Европа, 2008.
3. *Хренов Н.А.* Образы «Великого разрыва»: Кино в контексте смены культурных циклов. М.: Прогресс-Традиция, 2008.
4. *Смирнов И.П.* Бытие и творчество. СПб.: Канун, 1996.
5. *Геллер Л. и др.* К определению понятия «трансгрессия» // Семиотика скандала: Сб. ст. / Ред.-сост. Н. Букс. М.: Европа, 2008. С. 56.
6. *Лехциер В.Л.* Феноменология «пере»: введение в экзистенциальную аналитику переходности. Самара: Самар. ун-т, 2007.
7. *Свасьян К.* Растождествления. М.: Evidentis, 2006.
8. *Баранцев Р.Г.* Имманентные проблемы синергетики // Новое в синергетике: Взгляд в третье тысячелетие. М. Наука, 2002.
9. *Пойзнер Б.Н., Соснин Э.А.* Наш Universitas и вторжение низкого // Аналитика культурологии. 2008. № 3 (12). Доступно в сети Интернет по адресу: <http://analiculturolog.ru/index.php?module=subjects&func=viewpage&pageid=566>
10. Субъект во времени социального бытия: Историческое выполнение пространственно-временного континуума социальной эволюции / А.С. Ахиезер, А.В. Бездидько, З.Н. Галич, И.В. Кондаков и др.; отв. ред. Э.В. Сайко. М.: Наука, 2006.
11. *Меерсон О.А.* Персонализм как поэтика: Литературный мир глазами его обитателей. СПб.: Пушкинский дом, 2009.
12. Метаморфозы творческого Я художника / Отв. ред. О.А. Кривцун. М.: Памятники исторической мысли, 2005.
13. Человек как субъект культуры / Отв. ред. Э.В. Сайко. М.: Наука, 2002.
14. *Розов М.А.* Теория социальных эстафет и проблемы эпистемологии. М.: Новый хронограф, 2008.
15. *Бахтин Н.М.* Антиномия культуры // Бахтин Н.М. Из жизни идей / Сост., коммент., послесл. С.Р. Федякин; ред. А.Е. Махов. М.: Лабиринт, 1995. С. 39.
16. *Пойзнер Б.Н.* Репликатор – посредник между человеком и историей // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7, № 6. С. 83.
17. *Гёте И.В.* Собр. соч.: В 10 томах. Т. 2: «Фауст». Трагедия / Пер. Б. Пастернака; под ред. А. Аникста и В. Вильмонта; коммент. А. Аникста. М.: Худож. лит., 1976.
18. *Библер В.С.* Индивидуальное и культурное авторство // АРХЭ: Тр. культурологического семинара / Ред. И.Е. Берлянд. Вып. 5. М.: РГГУ, 2009. С. 341.
19. *Неймарк Ю.И., Левин А.Я.* Играет ли Бог в кости? Человеческое общество как коллективная игра людей: Опыт ещё одного монистического взгляда на общество // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 3. С. 98.
20. *Агацци Э.* Почему у науки есть и этические измерения // Вопросы философии. 2009. № 10. С. 97.
21. *Вейсман А.Д.* Греческо-русский словарь. Репринт V-го издания 1899 г. М.: Греко-латинский кабинет Ю.А. Шичалина, 1991.

22. *Пойзнер Б.Н., Ситникова Д.Л.* Big bifurcation: рождение математического моделирования // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 5. С. 82.
23. *Эпштейн М.Н.* Техника – религия – гуманистика // Вопросы философии. 2009. № 12. С. 19.
24. Наука и кризисы: Историко-сравнительные очерки / Ред.-сост. Э.И. Колчинский. СПб.: Дмитрий Буланин, 2003.
25. *Полянская М.* Foxtrot белого рыцаря: Андрей Белый в Берлине. СПб.: Деметра, 2009.
26. *Чайковский Ю.В.* Познавательные модели, плюрализм и выживание // Путь: Международный философский журнал. 1992. № 1. С. 62.
27. *Хайдеггер М.* Бытие и время / Пер. В.В. Бибихин. М.: Ad Marginem, 1997.
28. *Хорган Дж.* Конец науки: Взгляд на ограниченность знания на закате Века Науки. СПб.: Амфора, 2001.
29. *Хокинг Ст.* Виден ли конец теоретической физики? // Природа. 1982. № 5. С. 54.
30. *Пятигорский А.М.* Что такое политическая философия: размышления и соображения. Цикл лекций. М.: Европа, 2007.
31. *Подлазов А.В.* Теоретическая демография. Модели роста народонаселения и глобального демографического перехода // Новое в синергетике: Взгляд в третье тысячелетие. М. Наука, 2002. С. 324.
32. *Панов А.Д.* Универсальная эволюция, проблема поиска внеземного разума (SETI) / Послесл. Л.М. Гиндилиса. М.: ЛКИ, 2008.
33. *Луман Н.* Мировое время и история систем // Логос. 2004. № 5 (44). С. 131.
34. *Автономова Н.С.* Познание и перевод: Опыты философии языка. М.: РОССПЭН, 2008.
35. *Ильин И.П.* Постмодернизм: Словарь терминов. М.: ИНИОН РАН; Intrada, 2001.
36. *Гусейнов Г.Ч.* Д.С.П.: Советские идеологемы в русском дискурсе 1990-х. М.: Три квадрата, 2004.
37. *Бахтин М.М.* Рабочие записи 60-х – начала 70-х годов // Собр. соч. в 7-ми т. Т. 6: «Проблемы поэтики Достоевского». Работы 1960–1970 гг. М.: Русские словари; Языки славянской культуры, 2002. С. 371.
38. *Ронен О.* Серебряный век как умысел и вымысел. М.: ОГИ, 2000.
39. Новое литературное обозрение. 2009. № 6. Специальный выпуск: Антропология закрытых обществ.
40. *Фихте И.Г.* Несколько лекций о назначении учёного // Соч. в 2 т. Т. II / Сост. и примечания В. Волжского. СПб.: Мифрил, 1993. С. 7.



Синергетика: от прошлого к будущему

**СЛОЖНОСИСТЕМНОЕ МЫШЛЕНИЕ: МАТЕРИЯ,
РАЗУМ, ЧЕЛОВЕЧЕСТВО. НОВЫЙ СИНТЕЗ**

Клаус Майнцер

Пер. с англ. / Под ред. и с предисл. Г.Г. Малинецкого

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1994, 1996, 1997, 2004
© Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2008
М: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 464 с.
ISBN 978-5-397-00002-4

Книга одного из ведущих специалистов в области междисциплинарных исследований Клауса Майнцера получила мировую известность и была переведена на многие языки. Она вошла в учебные курсы ряда европейских, азиатских и американских университетов.

Эта книга посвящена междисциплинарным проблемам современной науки. В ней, говоря словами Чарльза Сноу, перебрасывается мост между двумя культурами – естественно-научной и гуманитарной. В книге показывается пройденный познанием путь от глубоких философских идей, начиная с Античности, Средневековья и Нового времени, к исследованиям, находящимся на переднем крае науки – нанотехнологиям, хаосу, искусственному интеллекту, нейронауке, высоким гуманитарным технологиям. Несмотря на широту охвата рассматриваемых проблем, в основе этой работы глубокое внутреннее единство, связанное с использованием и развитием теории самоорганизации, или синергетики, и ее раздела – теории сложности.

Книга междисциплинарна не только по содержанию, но и по жанру. Она занимает промежуточное место между научно-популярной работой, учебником и монографией. Несмотря на отсутствие формул в тексте, в ней ясно и точно излагаются глубокие и важные научные идеи. Среди них – искусственная жизнь, клеточные нейронные сети, новый взгляд на проблемы сознания, которые впервые обсуждаются в литературе на русском языке.

Книга будет интересна и полезна широкому кругу читателей – от школьников и преподавателей до исследователей, инженеров, руководителей.

Оглавление

Синергетика. Кризис или развитие? Г.Г. Малинецкий

Предисловие к четвертому изданию

Предисловие к третьему изданию

Предисловие ко второму изданию

Предисловие к первому изданию

Глава 1. Введение: от линейного к нелинейному мышлению

Глава 2. Сложность и эволюция материи

2.1. Космос Аристотеля и Логос Гераклита. 2.2. Вселенная Ньютона и Эйнштейна и демон Лапласа. 2.3. Гамильтоновы системы, небесный хаос и квантовый мир. 2.4. Консервативные и диссипативные системы и возникновение порядка. 2.5. Сложные системы наномира и самоконструирующиеся материалы. 2.6. Сбор сложных данных и анализ временных рядов.

Глава 3. Сложность и эволюция жизни

3.1. От Фалеса до Дарвина. 3.2. Термодинамика Больцмана и эволюция жизни. 3.3. Сложные системы и эволюция организмов. 3.4. Сложные системы и экология популяций

Глава 4. Сложность и эволюция системы разум–мозг

4.1. От души Платона к «человеку-машине» Ламетри. 4.2. Сложные системы и нейронные сети. 4.3. Мозг и возникновение сознания. 4.4. Интенциональность и крокодил в мозге

Глава 5. Сложность и эволюция вычислимости

5.1. Лейбниц и Diathesis Universalis. 5.2. Вычислимость и алгоритмическая сложность. 5.3. От обработки информации к обработке знаний. 5.4. Клеточные автоматы, хаос и случайности

Глава 6. Сложность и эволюция искусственных жизни и интеллекта

6.1. Нейронные сети и синергетические компьютеры. 6.2. Клеточные нейронные сети и аналоговые нейрокомпьютеры. 6.3. Универсальные клеточные нейронные сети и динамическая сложность. 6.4. Нейробионика и робототехника. 6.5. От искусственного интеллекта к искусственной жизни

Глава 7. Сложность и эволюция человеческого общества

7.1. От полиса Аристотеля до Левиафана Гоббса. 7.2. Экономика Смита и рыночное равновесие. 7.3. Сложные экономические системы, хаос и случайность. 7.4. Сложные общественные и культурные системы. 7.5. Сложные коммуникационные сети и поиск информации. 7.6. Сложные мобильные сети и вездесущие компьютеры

Глава 8. Эпилог о будущем, науке и этике. Сложность, прогнозы и будущее

8.1. Сложность, наука и техника. 8.2. Сложность, ответственность и свобода

Примечания

Предметный указатель

Клаус Майнцер (род. в 1947 г.) – один из крупнейших в мире специалистов в области нелинейной динамики, теории самоорганизации сложных систем и искусственного интеллекта. Директор академии им. Карла фон Линде и заведующий кафедрой философии и теории науки в техническом университете Мюнхена, президент немецкого общества по исследованию сложных систем и нелинейной динамики. Член ряда престижных международных научных организаций Германии, Швейцарии, США. Автор более 20 монографий, в том числе таких получивших широкую известность книг, как «Сложность» (2008), «Творческий случай. Как в мире возникает новое?» (2007), «Симметрия и сложность. Дух и красота нелинейной науки» (2005), «Философия компьютера» (2003), «Искусственный интеллект. Основы работы разумных систем» (2003).

Настоящее издание – русский перевод его книги «Thinking in Complexity. The Computational Dynamics of Matter, Mind and Mankind», выдержавшей 5 изданий в Германии с 1994 по 2007 гг. и переведенной на китайский, японский и польский языки. Это первая книга автора, опубликованная в России.

* * *

Глава 3. Сложность и эволюция жизни

Как объяснить возникновение порядка в эволюции жизни по Дарвину? В истории философии и биологии жизнь объяснялась телеологически существованием непричинных («жизненных», витальных) сил, стремящихся к достижению определенных целей в природе. В знаменитой цитате Канта говорится, что может никогда не найтись «Ньютон, который сумел бы объяснить стебелек травы» (разд. 3.1). Больцману удалось показать, что живые организмы являются открытыми диссипативными системами, не нарушающими второе начало термодинамики: несмотря на растущие, согласно второму началу термодинамики, энтропию и беспорядок в замкнутых системах, для объяснения возникающего в жизни порядка не требуются максвелловские демоны. Тем не менее, согласно статистической интерпретации от Больцмана до Моно, возникновение жизни является лишь случайным событием, локальной космической флуктуацией на краю Вселенной (разд. 3.2).

В рамках теории сложных систем возникновение жизни не случайно, а необходимо и закономерно в духе диссипативной самоорганизации. Рост организмов и видов моделируется как возникновение макроскопических структур, вызванных нелинейными (микроскопическими) взаимодействиями молекул, клеток и пр. в фазовых переходах вдали от теплового равновесия (разд. 3.3). Даже экологические популяции можно рассматривать как сложные диссипативные системы растений и животных со взаимными нелинейными взаимодействиями и метаболизмом с окружающей их средой (разд. 3.4). Идея Спенсера о том, что жизнь определяется структурной эволюцией с возрастающей сложностью, похоже, представляется в математической форме сложными динамическими системами.

Так найден ли «Ньютон жизни»? Теория сложных динамических систем не объясняет, что такое жизнь, но предлагает модель того, как при определенных условиях могут возникнуть разные формы жизни. Таким образом, даже если нам удастся в конце концов смоделировать сложную динамику жизни, само существование жизни для нас, как и для наших предков, останется чудом.

3.1. От Фалеса до Дарвина

Прежде чем обсуждать сложные системы и биологическую эволюцию жизни, окинем взглядом прежние философские суждения о жизни [3.1]. Удивительно, что многие аспекты современной экологии напоминают ранние идеи, касающиеся самоорганизации. В интерпретации мистиков, жизнь понималась как циклическое движение от роста к распаду, от жизни к смерти. Животные и люди выживали, только приспособившись к великим природным циклам, таким как приливы и отливы, смена времен года, смена созвездий на небе, периоды плодородия и неплодородия и т.п. Сама природа представлялась большим организмом, причем считалось, что люди частично вовлечены в ее естественное развитие. Мифы первобытных религий и их ритуалы использовались для заклинания сил природы и для жизни в гармонии с естественным порядком.

Когда люди перестали воспринимать демонов и богов в качестве персонифицированных сил природы и стали задавать вопросы об основных принципах жизни, мифология уступила место натурфилософии. В VI в. до н.э. философ-досократик Фалес из Милета объявил воду фундаментальным источником жизни. По-видимому, ранние идеи об эволюции появились у Анаксимандра:

Первые живые существа возникли во влажном месте. Они были покрыты чешуей с шипами. Затем они вышли на сушу, их чешуя лопнула, и вскоре они изменили свой образ жизни... [3.2]

В вопросе о происхождении человека взгляды Анаксимандра были удивительно современными. Наблюдая продолжительный период времени, в течение которого ребенок нуждается в заботе и защите, он заключил, что если бы людям всегда требовалось такое время для взросления, то они не смогли бы выжить. Следовательно, раньше они должны были быть другими. Эмпедокл объяснил жизненные процессы с помощью смешивания и преобразования знакомых нам элементов – воды, воздуха, огня и земли.

Для современников эти естественные объяснения жизни казались интуитивно убедительными, в то же время атомизм Демокрита, со сведением жизни к взаимодействию невидимых атомов, считался довольно абстрактным учением. Даже сознание и душа человека объяснялись микроскопическими взаимодействиями крохотных материальных элементов. Таким образом, Демокрит и его ученики подвергались атакам не только за свой материализм, но и за атеизм. Платон попробовал смоделировать первоэлементы материи и их комбинации с помощью геометрических фигур и конструкций.

С современной научной точки зрения, атомизм Демокрита и математические модели Платона являлись ранними редуccionистскими программами для описания жизни. Эти философы пытались свести физиологические и биологические процессы к взаимодействиям физических элементов. Но сама идея объяснения изменчивых и развивающихся жизненных процессов на основе жестких и мертвых геометрических фигур или атомов вещества должна была казаться современникам совершенно неестественной, умозрительной и надуманной. Короче, «реальная» жизнь казалась безнадежно «сложной», а математика Евклида – слишком простой. Таким образом, математика Евклида была зарезервирована для «надлунного» мира звезд, но не применялась к «подлунному» миру земной жизни.

Именно здесь начинается аристотелевская философия жизни. Платон в духе пифагорейской традиции выводил свою концепцию из геометрии, Аристотель же формулировал свои представления о природных процессах, основываясь на том, как функционируют такие живые организмы, как растения и животные. Жизненные процессы и само течение жизни известны нам из повседневного опыта. Что же может быть более очевидным, чем сравнить и объяснить остальной, неизвестный и странный, мир через известный? Согласно Аристотелю, задачей физики является объяснение принципов и роли сложности и изменений в природе. На современном языке – Аристотель отверг атомный редукционизм, а также математизацию науки о жизни как спекулятивные и нереалистичные идеи.

Чтобы неодушевленный камень начал двигаться, его нужно толкнуть извне. В противоположность этому, жизнь была определена свойством самодвижения. В таком, аристотелевском смысле жить означало «иметь душу», которая понималась как организующая сила (энтелехия) материи (витализм). На современном языке – самоорганизация жизни интерпретировалась Аристотелем как функционально управляемый процесс, стремящийся к определенным «аттракторам» целей (телеология). Например, дерево вырастает из семечка с целью достичь своей окончательной формы. Как сказали бы сейчас, изменение форм, характеризующих рост организма, напоминает (качественную) эволюцию параметра порядка, названного Аристотелем «потенцией» данного организма. Но, конечно, главная разница, по сравнению с современными представлениями о параметрах порядка, заключается в том, что Аристотель отрицательно относился к любой редукции макроскопических форм к атомным или микроскопическим взаимодействиям.

Примечательно, что Аристотель предложил непрерывную шкалу более или менее одушевленных состояний природы (*scala naturae*) и отвергал абсолютную разницу между «живым» и «мертвым». Он всегда искал промежуточные или связующие звенья между организмами разной сложности. Например, грек, современник Аристотеля, живущий на берегу Средиземного моря с его богатыми флорой и фауной, без труда мог наблюдать такие организмы, как водяные лилии, «относительно которых трудно сказать, являются ли они животными или растениями, так как они растут из почвы, как растения, и питаются рыбами, как животные» [3.3]. Исходя из идеи непрерывности, Аристотель предложил нечто вроде биогенетического закона: «В начале плод животного развивается, как растение; при последующем развитии можно говорить о его чувствительной и думающей душе» [3.4].

Аристотель был не только теоретиком, но и одним из первых естествоиспытателей – ботаников, зоологов и физиологов. Он создал систематику растений и животных в соответствии с разными их свойствами и попытался описать физиологические жизненные процессы. Главной парадигмой жизни для него была идея самоорганизующегося организма, отвергающая любой атомный, молекулярный или неорганический редукционизм. Философия жизни Аристотеля до сих пор отбрасывает тень на развитие биологии.

В период Римской империи под влиянием аристотелевской традиции оказалась даже медицина. Врач римского императора Марка Аврелия Гален учил, что органы нашего тела полностью приспособились к своим функциям. Следуя аристотелевской телеологии, он описывал, каким образом органы пищеварения для поддержания жизненных процессов выбирают «полезные» части еды и отделяют «бесполезные». В Средние века Альберт Великий объединил аристотелевскую философию жизни с

христианством. Опираясь на телеологию Аристотеля, Альберт развил первоначальную экологию, утверждая, что люди должны жить в гармонии с природной окружающей средой. Организмы и окружающая их среда связаны друг с другом, благодаря многочисленным обменам воздухом, пищей, выделениями и прочим, и находятся в естественном балансе («равновесии»), управляемом божественным провидением. Альберт считал, что даже здоровье человеческой души зависит от здоровой окружающей среды со здоровыми воздухом, климатом, растениями и животными. Душа и тело являются не отдельными сущностями, а органичным целым.

В эпоху Возрождения Галилей осознал, что решающим условием развития современной физики является установление связи с математикой, наблюдениями, опытом и техникой. Ньютон создал новую математическую и экспериментальную философию природы, названную им «*Математические начала натуральной философии*» (1687). Геометрия и механика стали новой парадигмой естественных наук. В истории науки этот период называется становлением механистической картины мира, который представлялся не чем иным, как огромными механическими часами. Математик и философ Рене Декарт и физик Христиан Гюйгенс учили, что каждая система в природе состоит из отдельных элементов, подобных зубчатым колесикам в часах. Очевидно, что механицизм Декарта противоречит аристотелевскому холизму¹.

Даже физиология жизненных процессов должна была объясняться механистически. Например, сердце рассматривалось как насос. В целом, Декарт полагал, что движения тела животного или человека можно вывести, исходя из механического устройства органов тела, а «их, с той же необходимостью, представить как механизм часов, определяющийся положением и формой гирек и колесиков» [3.5]. Анатомия человека, изученная в проводившихся со времен Возрождения вскрытиях, была применением аналитического метода Декарта. Согласно Декарту, чтобы объяснить функционирование системы с помощью законов геометрии и механики, каждую систему нужно разделить на основные составные части.

Итальянский физик и физиолог Борелли (1608–1679) создал так называемую ятрофизику – раннюю версию биофизики. Он перенес с физики на биологию знаменитое высказывание Галилея и решительно заявил в своей книге «О движении животных» («*De motu animalium*»):

Так как научное понимание всего этого основано на геометрии, будет правильным считать, что при создании живых организмов Бог использовал геометрию и что для понимания этих организмов нам тоже нужна геометрия; поэтому для тех, кто хочет прочесть и понять Божественный замысел животного мира, она является единственной подходящей наукой [3.6].

В то время как Декарт был убежден в бессмертии человеческой души, Ламетри, в соответствии с концепцией «человек–машина», свел человека к бездушному автомату (1747). Тела людей и животных отличались лишь уровнем сложности и организации. После создания физики телеология в духе аристотелевской традиции должна была быть исключена также из физиологии и медицины. В эпоху Просвещения механизм жизни понимался с точки зрения материалистической и атеистической философии.

¹Холизм (от *англ.* whole – целый) – противоположное редуccionизму мировоззрение, рассматривающее субъекта и окружающий его мир как единое целое, не сводимое к отдельным частям. – *Прим. пер.*

Довольно занятна следующая история, рассказанная Вольтером о Ламетри: когда тот внезапно заболел после слишком обильного обеда и умер через несколько дней от несварения желудка, богобоязненным современникам было сказано, что они должны быть благодарны за то, что материалист должен умирать от собственной ненасытности.

Тем не менее некоторые аристотелевские понятия продолжали обсуждаться в эпоху механицизма. Например, Лейбниц предположил существование иерархического порядка в природе с непрерывной шкалой одушевленности от простейших строительных блоков («монад») до сложных организмов. Он попытался объединить идеи Аристотеля с физической механикой, он стал одним из пионеров теории сложных динамических систем. Рассматривая статус человека в природе, Лейбниц заявлял:

Итак, каждое органическое тело живого существа есть род божественной машины или естественного автомата, бесконечно превосходящего все искусственные автоматы [3.7].

Под воздействием идей Лейбница зоолог Бонне (1720–1793) предложил кажущуюся довольно современной иерархию природы («*Лестница устройства природы*») в зависимости от меры сложности. В качестве наиболее важного свойства материи Бонне выделял «организацию». Самой идеальной, по определению, является та организация, которая реализует наибольшее число явлений с заданным числом разных частей [3.8].

В конце XVIII в. Иммануил Кант критиковал применение ньютоновской механики к биологии: «Невозможно найти Ньютона, который объяснит стебелек травы». Главной причиной критики Канта было то, что в XVIII в. понятие машины могло быть точно сформулировано только в рамках механики Ньютона. Поэтому в знаменитой «Критике способности суждения» Кант писал, что «организм не может быть машиной, поскольку машина обладает только движущей силой: но организм обладает организующей силой... которая не может быть объяснена одним механическим движением» [3.9]. Кант также критиковал аристотелевскую телеологию и предположение о «намерениях» и «целях» в природе, считая это метафорическим антропоморфизмом. Организм нужно описывать моделью «самоорганизующегося существа».

Как и Кант, Гёте отвергал материалистически-механистическое объяснение жизни, которое защищал, например, французский энциклопедист Гольбах в книге «*Система природы*». Для Гёте механистическая модель природы «сера... как смерть... как дух без солнца» [3.10]. Он полагал, что жизнь развивается органично и гармонично, как метаморфоза растения или умственное развитие человека.

В начале XIX в., в конце жизни Гёте, на фоне кантовской критики механистического рационализма в Германии возникла романтическая философия природы. Это было возрождение органической парадигмы в противовес механицизму. Фридрих Шеллинг (1775–1854) разработал «науку жизни», предполагая, что главными свойствами живого являются организация и размножение [3.11]. Окен (1779–1851), врач и философ, описывал «планетарный процесс», в котором живые организмы объяснялись синтезом магнетизма, химизма и гальванизма. С современной точки зрения, «самоорганизация» и «самовоспроизводство» уходят корнями в понятия романтической философии природы. Однако в те дни это были лишь умозрительные рассуждения или интуитивные прозрения, так как все еще отсутствовала экспериментальная и математическая база.

Мирная картина органичного и гармоничного развития была вскоре разрушена биологией. Теория эволюции Чарльза Дарвина не нуждалась для объяснения жизни в телеологических силах. «Выживание самых приспособленных» (Герберт Спенсер) зависит, главным образом, от отбора по отношению к определенным условиям окружающей среды (например, питание, климат) [3.12]. Дарвин был вдохновлен некоторыми идеями Ламарка (1744–1829), например, идеей наследования приобретенных признаков. Дарвиновская эволюция обеспечивается (генетическим) многообразием видов, возникающим благодаря мутациям, и естественным отбором, ведущими развитие в определенном направлении. Спенсер учил, что жизнь развивается в сторону большей сложности, контролируемой отбором. Многие современники рассматривали дарвинизм не только как естественнонаучную теорию. Казалось, что теория Дарвина описывает сценарий жизни, во многом аналогичный развитию общества в XIX в. «Отбор самых приспособленных» стал лозунгом политического течения «социального дарвинизма».

Во второй половине XIX в. Геккель обобщил теорию эволюции жизни от одноклеточных организмов к человеку. Но в те времена теорию эволюции нельзя было даже сравнивать с очень хорошо подтвержденными физическими и химическими теориями. Дарвин мог только заниматься сравнительным изучением морфологии. Он описывал изменчивость видов и естественный отбор, но не мог объяснить это математизированными и проверяемыми законами, как в физике. Закон наследственности Менделя (1865) был неизвестен ни Дарвину, ни многим его современникам. Тем не менее один из великих физиков XIX в. Людвиг Больцман, окидывая взглядом уходящий век, заявил:

Если кто-то спросит меня, правда ли, что по моему глубокому убеждению наш век будет когда-нибудь назван веком железа, веком пара, или веком электричества, то я отвечу без промедления, что его назовут веком Дарвина [3.13].

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина*
Оформление художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, О.Н. Строгановой
в пакете *L^AT_EX*

Подписка на 2010 год осуществляется
по каталогу Агентства Роспечать
«Газеты. Журналы», индекс 73498,
и по договору между Подписчиком
(юридическим или физическим лицом)
и Издателем (Саратовским государственным университетом)

Стоимость подписки на 2010 год 600 руб. (6 номеров)
Заявки на заключение договора принимаются
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции
Адрес редакции: 410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64
E-mail: and@nonlin.sgu.ru

Распространение журнала осуществляется
редакцией журнала по адресной системе

Сдано в набор 20.03.2010. Подписано к печати 27.04.2010
Формат 70x108/16. Бумага «Балет». Печать трафаретная
Усл. печ. л. 15,4(11,0). Уч.-изд. л. 15,0. Тираж 200. Заказ 420

Отпечатано на ризографе GR 3750 редакции журнала

© Редакция журнала
«Известия вузов. ПНД», 2010
© Оформление художника
Д.В. Соколова, 2010