

СО Д Е Р Ж А Н И Е

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН <i>Григорьева Е.В., Кащенко И.С., Кащенко С.А.</i> Гипермультистабильность в моделях лазеров с большим запаздыванием	3
БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ <i>Любимов Д.В., Ковалевская К.В., Любимова Т.П.</i> Бифуркации в задаче тепловой конвекции упруговязкой жидкости в подогреваемой снизу замкнутой области со свободными границами	16
НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НЕЙРОНАУКА <i>Постнов Д.Д., Сосновцева О.В., Постнов Д.Э.</i> Автономная и неавтономная динамика функциональной модели серотонэргического нейрона	26
АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ <i>Шаповал А.Б.</i> Устойчивость стационарного критического состояния в модели образования кластеров	45
ДЕБЮТ <i>Хренов Д.Н.</i> Элементарная теория взаимодействия волн пространствен- ного заряда с электромагнитными волнами в модели лампы с попе- речным током	56
ИСТОРИЯ. PERSONALIA <i>Аникин В.М.</i> Альберт Эйнштейн и Питирим Сорокин: Истории диссертаци- онных защит	62
<i>Из рецензии. Пойзнер Б.Н.</i>	79
<i>Аврус А.И.</i> Физики: Взгляд со стороны	80
Материалы IX Международной школы «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, Россия, 4–9 октября 2010	
<i>Безуглова Г.С., Гончаров П.П., Гуров Ю.В., Чечин Г.М.</i> Дискретные бризеры в скалярных динамических моделях на плоской квадратной решетке	89
<i>Павлов Е.А., Осипов Г.В.</i> Моделирование сердечной активности на основе отображений. Часть I. Динамика одного элемента	104
<i>Павлов Е.А., Осипов Г.В.</i> Моделирование сердечной активности на основе отображений. Часть II. Ансамбль связанных элементов	116
<i>Филатова А.Е., Артемьев А.Е., Овчинников А.А., Короновский А.А., Храмов А.Е.</i> Метод автоматической диагностики на основе непрерывного вейвлет- ного преобразования различных волновых составляющих сложных нестационарных сигналов применительно к задачам геофизики	127
<i>Москаленко О.И., Короновский А.А., Храмов А.Е., Алексеев К.Н., Баланов А.Г.</i> Влияние внешнего периодического воздействия на динамику доменов заряда в полупроводниковой сверхрешетке	143
<i>Перегородова Е.Н., Рыскин Н.М., Усачева С.А.</i> Асинхронизация системы двух конкурирующих мод внешним гармоническим сигналом	154
<i>Бакунов Г.М., Матросов В.В., Шалфеев В.Д.</i> О квазисинхронных режимах в системе фазовой автоподстройки частоты с фильтром второго порядка при приближенном учете запаздывания	171
КНИЖНОЕ ОБОЗРЕНИЕ <i>Флейшман А.Н.</i> Вариабельность ритма сердца и медленные колебания гемоди- намики: Нелинейные феномены в клинической практике	179
Рецензии специалистов по нелинейной динамике <i>Сердечный ритм как полигон нелинейной динамики. Лоскутов А.Ю.</i> ...	184
<i>Из рецензии. Безручко Б.П.</i>	187

CONTENTS

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY <i>Grigorieva E.V., Kashchenko I.S., Kaschenko S.A.</i> Hypermultistability in laser's models with large delay	3
BIFURCATIONS IN DYNAMICAL SYSTEMS <i>Lyubimov D.V., Kovalevskaya K.V., Lyubimova T.P.</i> Bifurcations in the problem of thermal convection of viscoelastic fluid in a closed cavity with free boundaries heated from below	16
NONLINEAR DYNAMICS AND NEUROSCIENCE <i>Postnov D.D., Sosnovtseva O.V., Postnov D.E.</i> Autonomous and nonautonomous dynamics of functional model of serotonergic neuron	26
AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION <i>Shapoval A.B.</i> Stability of a stationary critical state in a model of cluster formation	45
DEBUT <i>Khrenov D.N.</i> Elementary theory of interaction between space charge waves and electromagnetic waves for the transverse-current traveling-wave tube	56
HISTORY. PERSONALIA <i>Anikin V.M.</i> Albert Einstein and Pitirim Sorokin: History of dissertation defences ... From critique. <i>Poizner B.N.</i>	62 79
<i>Avrus A.I.</i> Physicists: Intent look from without	80
<i>Transactions of the IX International School «Chaotic Oscillations and Pattern Formation», Saratov, Russia, October 4-9, 2010</i>	
<i>Bezuglova G.S., Goncharov P.P., Gurov Y.V., Chechin G.M.</i> Discrete breathers in scalar dynamical models on the plane square lattice	89
<i>Pavlov E.A., Osipov G.V.</i> Modeling of cardiac activity on the basis of maps. Part I. Dynamics of single element	104
<i>Pavlov E.A., Osipov G.V.</i> Modeling of cardiac activity on the basis of maps. Part II. Ensembles of coupled elements	116
<i>Filatova A.E., Artemiev A.E., Ovchinnikov A.A., Koronovskii A.A., Hramov A.E.</i> The method of automatic diagnostics of various components of complex signals on the base of wavelet transform as applied to geophysics problems	127
<i>Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Hramov A.E., Alekseev K.N., Balanov A.G.</i> Effect of external periodic force on the dynamics of the charge domains in semiconductor superlattice	143
<i>Peregrodova E.N., Ryskin N.M., Usacheva S.A.</i> Synchronization of the system of two competing modes by external harmonic signal	154
<i>Bakunov G.M., Matrosov V.V., Shalfeev V.D.</i> On quasi-synchronous regimes in a phase lock loop with the second-order filter and approximate inclusion of the delay	171
BOOK REVIEW <i>Fleishman A.N.</i> Heart rate variability and slow hemodynamic oscillations: Nonlinear phenomena in clinical practice	179
Critiques by specialists in nonlinear dynamics <i>Cardiac rhythm as a polygon of nonlinear dynamics. Loskutov A. Yu.</i>	184
From critique. <i>Bezruchko B.P.</i>	187



ГИПЕРМУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ В МОДЕЛЯХ ЛАЗЕРОВ С БОЛЬШИМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Е.В. Григорьева, И.С. Кащенко, С.А. Кащенко

В работе исследуется модель одномодового полупроводникового лазера с оптоэлектронной обратной связью, основанная на балансных уравнениях с запаздывающим аргументом. Методами локального анализа построены континуальные наборы семейств квазинормальных форм в окрестности бифуркационных значений параметров. Показана возможность сосуществования большого числа установившихся осциллирующих режимов.

Ключевые слова: Метод нормальных форм, большое запаздывание, малый параметр, локальный анализ.

1. Постановка задачи. Феномен мультистабильности, состоящий в сосуществовании двух или более устойчивых состояний системы при одних и тех же параметрах, находит широкое применение в технике и информационных системах. В последнее время вновь активно обсуждается мультистабильность, индуцированная запаздыванием (см. работы [1–3] и ссылки в них). Особенность эффекта состоит в том, что устойчивыми являются не стационарные, а осциллирующие с разными частотами режимы. Кроме того, при увеличении времени запаздывания число таких сосуществующих аттракторов может увеличиваться, тем самым целенаправленно контролироваться. Для оптоэлектронных лазерных систем мультистабильность релаксационных режимов была описана (см., например, [4,5]) специальными методами нелокального анализа при большом значении одного из параметров лазера. В этой статье на основе локального анализа показана возможность мультистабильности в лазерной системе с большим запаздыванием в оптоэлектронной цепи обратной связи, управляющей накачкой. Наряду с мультистабильностью, описанной в [6], которая проявляется как сосуществование периодических аттракторов с разными частотами, в данной статье показана дополнительная возможность существования множества промодулированных режимов (торов) в областях параметров, где могут также реализоваться и импульсные колебания.

Рассматривается система уравнений

$$\begin{aligned} \dot{u} &= vu(y - 1), \\ \dot{y} &= q - y - yu + \alpha u(t - T), \end{aligned} \quad (1)$$

где переменная u пропорциональна плотности фотонов, переменная y пропорциональна инверсии населённостей, $q > 1$ – скорость накачки, v – отношение скорости затухания фотонов в резонаторе и скорости релаксации населённостей, потери резонатора нормированы к единице. Выражение $\alpha u(t - T)$ описывает дополнительную накачку, которую вводят с помощью оптоэлектронной цепи обратной связи (ОС), где T – время распространения и преобразования оптического сигнала в электрический в цепи ОС, α – коэффициент обратной связи. В лазерных системах имеют смысл значения $-1 < \alpha < 1$. Впервые схема воздействия на ток накачки использовалась для стабилизации частоты пиков полупроводниковых лазеров [6, 7], применялась для управления динамикой газового лазера [8], и может быть применена в современных твердотельных микрочип-лазерах. Математическая модель (1) справедлива при рассмотрении режимов с временами изменения характеристик излучения, значительно превышающими время прохода излучения по резонатору лазерного диода.

Динамика системы (1) изучалась многими авторами. В работах [4, 5] на основе специально разработанного [10, 11] асимптотического метода исследования нелокальной динамики уравнений с запаздыванием было показано, что при условии, когда параметр v достаточно велик (в реальных системах он имеет порядок 10^3 – 10^4), в системе (1) наблюдаются разнообразные пиковые колебания достаточно большой амплитуды. При этом существенно использовались фундаментальные результаты работы [12]. В работах [9, 10] тоже при условии достаточно большого v исследовалась локальная динамика системы (1), то есть динамика в малой окрестности состояния равновесия (u_0, v_0)

$$u_0 = \frac{q - 1}{1 - \alpha}, \quad y_0 = 1. \quad (2)$$

Показано, что в задаче об устойчивости (u_0, v_0) критический случай имеет бесконечную размерность. На основе предложенного в [15–18] метода построены квазинормальные формы – специальные универсальные нелинейные эволюционные уравнения, нелокальная динамика которых определяет поведение решений исходной задачи (1) в малой окрестности состояний равновесия (2). В зависимости от величины запаздывания T эти уравнения могут быть как уравнениями с запаздыванием, так и уравнениями параболического типа.

Основное предположение настоящей работы – достаточно большое время запаздывания T :

$$T \gg 1 \quad \text{или} \quad \varepsilon = T^{-1} \ll 1. \quad (3)$$

При этом условии рассмотрим вопрос о поведении всех решений системы (1) с начальными условиями из некоторой достаточно малой (но не зависящей от ε) окрестности состояния равновесия (2). На основе метода квазинормальных форм [17, 19]

ниже построены специальные континуальные наборы семейств нелинейных эволюционных уравнений, нелокальная динамика которых описывает решения (1) из окрестности (2). Каждый представитель соответствующих семейств определяет поведение тех или иных установившихся структур, а значит, соответствующая локальная динамика настолько богата, что имеет смысл говорить о явлении гипермультистабильности.

В (1) произведем замену, чтобы свести задачу к исследованию динамики в окрестности нулевого состояния равновесия. Положим

$$u = u_0 + u_1, \quad y = y_0 + y_1.$$

В результате, опуская индекс «1», приходим к системе

$$\begin{cases} \dot{u} = vu_0y + vuy, \\ \dot{y} = -u - (1 + u_0)y + \alpha u(t - T) - uy. \end{cases} \quad (4)$$

В дальнейшем предполагаем, что выполнено условие локальности, то есть в (4) значения u и y достаточно малы.

2. Анализ линеаризованной системы. Важную роль для определения локальной (теперь уже в окрестности нулевого состояния равновесия) динамики (4) играет поведение решений линеаризованной в нуле системы

$$\dot{w} = Aw + \alpha Bw(t - T), \quad (5)$$

где $w = \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}^T$, $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -1 & -a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $a = 1 + u_0 = \frac{q - \alpha}{1 - \alpha}$,
 $b = vu_0 = \frac{v(q - 1)}{1 - \alpha}$.

В свою очередь, поведение решений (5) определяется корнями его характеристического уравнения

$$\lambda^2 + a\lambda + b = \alpha b \exp(-\lambda T). \quad (6)$$

В том случае, когда все корни (6) имеют отрицательные вещественные части и отделены от мнимой оси, при $\varepsilon \rightarrow 0$ все решения (4) из малой (и не зависящей от ε) окрестности нулевого состояния равновесия стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Тем самым локальная динамика демонстрирует устойчивость состояния равновесия. Если же у (6) при каждом достаточно малом ε найдется корень с положительной (и отделенной от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$) вещественной частью, поставленная задача становится нелокальной. Здесь рассмотрены критические в задаче об устойчивости $u = y = 0$ случаи, когда у (6) нет корней с положительной (и отделенной от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$) вещественной частью, и есть корни, находящиеся в малой (при $\varepsilon \rightarrow 0$) окрестности мнимой оси на комплексной плоскости. Для определения условия существования таких корней положим в (6) $\lambda = iv$. Получим, что

$$-v^2 + iva + b = \alpha b \exp(-ivT). \quad (7)$$

Отсюда, в частности,

$$(b - z)^2 + a^2 z = \alpha^2 b^2, \quad (8)$$

где $z = v^2 \geq 0$. Уравнение (8) разрешимо относительно $z \geq 0$ при некоторых α , в частности, $z = v^2 = 0$ при $\alpha = \pm 1$. В то же время, при $\alpha = 0$ это уравнение не имеет решений.

Отметим, далее, что при $\alpha = 0$ система (4) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, и все решения из окрестности нуля ($u = y = 0$) стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$ и, соответственно, все корни (6) имеют отрицательные вещественные части. Нас интересует «первое» положительное значение $\alpha = \alpha_+ \leq 1$ и первое отрицательное значение $\alpha = \alpha_- \geq -1$ такие, что при $\alpha = \alpha_{\pm}$ уравнение (8) разрешимо, а при $\alpha \in (\alpha_-, \alpha_+)$ уравнение (8) не имеет неотрицательных решений.

Займемся определением α_+ и α_- . Уравнение (8) перепишем в виде

$$z^2 - (2b - a^2)z + b^2(1 - \alpha^2) = 0. \quad (9)$$

При $\alpha^2 < 1$ свободный член квадратного трехчлена (9) положителен, значит, если действительные корни существуют, то они одного знака. В случае $2b - a^2 < 0$ они получаются отрицательными, а в случае $2b - a^2 \geq 0$ – положительными. Значит, если $2b - a^2 < 0$, то $\alpha_- = -1$, $\alpha_+ = 1$. Если $2b - a^2 \geq 0$, то значения α_{\pm} определяются как наименьший положительный и наибольший отрицательный корни уравнения $d(\alpha) = 0$, где $d(\alpha)$ – дискриминант квадратного трехчлена (9) – имеет вид

$$d(\alpha) = P(\alpha)(1 - \alpha)^{-4},$$

$$P(\alpha) = (q - \alpha)^4 - 4v(q - 1)(q - \alpha)^2(1 - \alpha) + 4v^2(q - 1)^2\alpha^2(1 - \alpha)^2.$$

Интересно отметить, что при достаточно больших v имеем $2b - a^2 > 0$ и

$$\alpha_{\pm} = \pm v^{-1/2} \frac{q}{\sqrt{q-1}} + O(v^{-1}). \quad (10)$$

Через $z_{\pm} = v_{\pm}^2$ обозначим решение уравнения (9) соответственно при $\alpha = \alpha_+$ и $\alpha = \alpha_-$. В дальнейшем через α_0 будем обозначать либо α_+ , либо α_- (в зависимости от знака параметра α), а через v_0 , соответственно, либо v_+ , либо v_- . Легко видеть, что, если $|\alpha_0| = 1$, то $v_0 = 0$, а если $|\alpha_0| < 1$, то

$$z_0 = v_0^2 = v(q - 1)(1 - \alpha_0)^{-1} - 2^{-1}(q - \alpha_0)^2(1 - \alpha_0)^2. \quad (11)$$

Введем затем ещё несколько обозначений. Пусть $\Theta = \Theta(\varepsilon)$ – такое значение из промежутка $[0, 2\pi)$, которое дополняет величину $v_0 T$ до кратного 2π числа. Число $\kappa \in [0, 2\pi)$ определим из равенства

$$\alpha_0 b_0 \exp(-i\kappa) = b_0 - v_0^2 + i v_0 a_0, \quad (12)$$

где $a_0 = (q - \alpha_0)(1 - \alpha_0)^{-1}$, $b_0 = v(q - 1)(1 - \alpha_0)^{-1}$. Эти обозначения позволяют в удобной форме выписать некоторую совокупность таких корней характеристического уравнения (6), которые при малых ε находятся в малой окрестности мнимой оси.

Утверждение 1. При условии

$$\alpha = \alpha_0 + \varepsilon^2 \alpha_1 \quad (13)$$

характеристическое уравнение (6) имеет такое множество корней $\lambda_k(\varepsilon)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), для каждого из которых верно асимптотическое представление

$$\lambda_k(\varepsilon) = i\nu_0 + i\varepsilon(\Theta + 2k\pi + \kappa) + \varepsilon^2 \lambda_{k1} + \varepsilon^3 \lambda_{k2} + O(\varepsilon^4), \quad (14)$$

где

$$\lambda_{k1} = -i\Delta[\Theta + 2k\pi + \kappa], \quad (15)$$

$$\Delta = -i(a_0 - 2\nu_0)(\alpha_0 b_0)^{-1} \exp(i\kappa), \quad (\text{Im } \Delta = 0),$$

$$\lambda_{k2} = \sigma(\Theta + 2k\pi + \kappa)^2 + i\Delta^2(\Theta + 2k\pi + \kappa) + c, \quad (16)$$

$$\sigma = -\frac{1}{2}\Delta^2 + \Delta(a_0 - 2\nu_0 i)[4\nu_0^2 + a_0^2]^{-1},$$

$$c = [i\nu_0 a_1 + (1 - \alpha_0)b_1 + \alpha_1 b_0 \exp(-i\kappa)] \Delta(a_0 - 2i\nu_0)[4\nu_0^2 + a_0^2]^{-1},$$

$$a_1 = \alpha_1(q - 1)(1 - \alpha_0)^{-2}, \quad b_1 = \alpha_1 v(q - 1)(1 - \alpha_0)^{-2}.$$

При условии $\text{Re } \sigma < 0$ задача о динамике решений (4) из малой окрестности нулевого состояния равновесия является нелокальной: существуют корни (6), вещественные части которых положительны и отделены от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$. Ниже дополнительно предполагаем, что

$$\text{Re } \sigma > 0. \quad (17)$$

Обратим внимание, что при больших значениях параметра v неравенство (17) выполнено.

Отметим, что $\lambda_k(\varepsilon)$ разрывны по ε (в силу разрывной зависимости от ε функции $\Theta(\varepsilon)$), а главное – асимптотические равенства (14) неравномерны по номеру k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Как оказывается, некоторые совокупности корней (14) можно представить и по-иному. Для того чтобы показать это, введем ещё несколько обозначений. Фиксируем произвольно параметр $\gamma \in (0, 1)$ и натуральное n . Выберем произвольно n положительных чисел ν_1, \dots, ν_n . Обозначим через $\Theta_j = \Theta_j(\varepsilon)$ такое число из полуинтервала $[0, 2\pi)$, что выражение $\nu_j \varepsilon^{\gamma-1} + \Theta_j(\varepsilon)$ является целым кратным 2π . Положим $\Omega = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, $\Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_n)$, $K = (k_1, \dots, k_n)$, где $k_j \in Z$ (Z – множество всех целых чисел на числовой оси, $j = 1, \dots, n$).

Положим затем

$$\alpha = \alpha_0 + \varepsilon^{2\gamma} \alpha_1. \quad (18)$$

Непосредственно проверяется, что характеристическое уравнение (6) имеет совокупность корней (вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$) вида

$$\begin{aligned} \lambda_K(\Omega, \varepsilon) = & i \left(\nu_0 + (\Omega, K) \varepsilon^\gamma + \varepsilon \left(\Theta_0 + (\Theta, K) + \kappa \right) - \right. \\ & \left. - \Delta \varepsilon^{1+\gamma} (\Omega, K) + o(\varepsilon^{1+\gamma}) \right) + \varepsilon^{1+2\gamma} (\sigma(\Omega, K)^2 + c) + o(\varepsilon^{1+2\gamma}). \end{aligned} \quad (19)$$

В заключение этого пункта отметим, что собственным значениям — корням $\lambda_k(\varepsilon)$ и $\lambda_K(\Omega, \varepsilon)$ характеристического уравнения (6) отвечают собственные решения линейной системы (5) при $\alpha = \alpha_0 + o(1)$ вида

$$w(t, \varepsilon) = [w_0 + o(1)] \exp \left[i \nu_0 \varepsilon^{-1} (1 + o(1)) t \right],$$

где вектор $w_0 = \begin{pmatrix} b_0 \\ i \nu_0 \end{pmatrix}$ является собственным для матрицы $C = A_0 + \alpha_0 \exp(-i\kappa) B_0$

$$i \nu_0 w_0 = C w_0.$$

3. Построение квазинормальной формы при условии (13)

$$\alpha = \alpha_0 + \varepsilon^2 \alpha_1.$$

Напомним, что при этом условии вещественные части бесконечного множества корней характеристического квазиполинома (6) стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это, в частности, означает, что в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия системы (4) реализуется критический случай бесконечной размерности. Стандартные методы исследования, базирующиеся на использовании методов локальных инвариантных интегральных многообразий и нормальных форм непосредственно не применимы, однако формализм этих методов существенно используется. Соответствующие построения детально разработаны в [9, 17, 19]. Согласно результатам этих работ, сначала введем в рассмотрение формальный ряд

$$\begin{aligned} U(t, \varepsilon) = & \varepsilon \left[w(\tau, \tau_1) \exp(i \nu_0 t) w_0 + \bar{w}(\tau, \tau_1) \exp(-i \nu_0 t) \bar{w}_0 \right] + \\ & + \varepsilon^2 U_2(t, \tau, \tau_1) + \varepsilon^3 U_3(t, \tau, \tau_1) + \dots, \end{aligned} \quad (20)$$

в котором $\tau = \varepsilon^3 t$, $\tau_1 = \varepsilon(1 - \varepsilon \Delta)t$; константа ν_0 и вектор w_0 были определены в предыдущем пункте;

$$w(\tau, \tau_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp \left[i(\Theta + 2k\pi + \kappa)\tau_1 \right];$$

а $U_2(t, \tau, \tau_1)$ и $U_3(t, \tau, \tau_1)$ являются $2\pi/\nu_0$ -периодическими функциями по первому аргументу.

Систему (4) удобно записать в векторной форме относительно $U = (u_1, u_2)$,
 $(u_1 = u, u_2 = y)$

$$\dot{U} = AU + \alpha BU(t - T) + u_1 u_2 V, \quad V = \begin{pmatrix} v \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Подставим (20) в (21) и будем, учитывая (13), собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε . При первой степени ε соответствующее тождество выполнено. Собирая коэффициенты при ε^2 , приходим к системе уравнений для определения $U_2 = U_{21} \exp(iv_0 t) + \bar{U}_{21} \exp(-iv_0 t) + U_{22} \exp(2iv_0 t) + \bar{U}_{22} \exp(-2iv_0 t)$:

$$CU_{21} = -i \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau)(\Theta + 2k\pi + \kappa) \exp[i(\Theta + 2k\pi + \kappa)\tau_1] \right) w_0 + \quad (22)$$

$$+ i\alpha_0 \Delta \exp(-i\kappa) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau)(\Theta + 2k\pi + \kappa) \exp[i(\Theta + 2k\pi + \kappa)\tau_1] \right) B_0 w_0,$$

$$C_0 U_{22} = iv_0 b_0 w^2(\tau, \tau_1) V, \quad (23)$$

где $C_0 = 2iv_0 I - A_0 - \alpha_0 \exp(-2i\kappa) B_0$.

Система (23) всегда разрешима и

$$U_{22} = iv_0 b_0 w^2(\tau, \tau_1) C_0^{-1} V = iv_0 b_0 w^2(\tau, \tau_1) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Для разрешимости системы (22) относительно U_{21} необходимо и достаточно, чтобы вектор, стоящий в правой части, был ортогонален вектору

$$w_1 = (a_0 - iv_0, b_0)^T. \quad (24)$$

В силу определения фигурирующих в (22) параметров, это условие выполнено, поэтому U_{21} из (22) определяется следующим выражением:

$$U_{21} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau)(\Theta + 2k\pi + \kappa) \exp[i(\Theta + 2k\pi + \kappa)\tau_1] \right) w_{00}. \quad (25)$$

Здесь w_{00} – решение системы

$$C w_{00} = i[\alpha_0 \Delta \exp(-i\kappa) B_0 - I] w_0. \quad (26)$$

Соберем коэффициенты при ε^3 . В результате приходим к линейной неоднородной системе уравнений относительно $U_3(t, \tau, \tau_1)$, причем неоднородность содержит гармоники по первому аргументу $\exp(inv_0 t)$ с номерами $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$. Тем самым, решение $U_3(t, \tau, \tau_1)$ тоже содержит эти же гармоники. Соответствующие коэффициенты обозначим через $U_{3n}(\tau, \tau_1)$. Для $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ вектор-функции $U_{3n}(\tau, \tau_1)$ легко определяются, а для $U_{31}(\tau, \tau_1)$ (и $U_{3-1}(\tau, \tau_1) = \bar{U}_{31}(\tau, \tau_1)$) получаем систему уравнений

$$CU_{31} = \Gamma, \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned}
\Gamma = & w[A_1 + \alpha_1 \exp(-i\kappa)B_0]w_0 + \alpha_0 \frac{dw}{d\tau} \exp(-i\kappa)B_0w_0 - \\
& - i\delta \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\Theta + 2k\pi + \kappa)^2 \exp[i(\Theta + 2k\pi + \kappa)\varepsilon_1] \right) w_{00} - \\
& - \frac{1}{2}\Delta \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\Theta + 2k\pi + \kappa)^2 \exp[i(\Theta + 2k\pi + \kappa)\tau_1] \right) \times \\
& \quad \times \alpha_0 \exp(-i\kappa)B_0w_0 + v_0b_0[v_0v_1 + ib_0v_2]|w|^2wV, \\
A_1 = & (q-1)(1-\alpha_0)^{-2}\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{28}$$

Условие разрешимости системы (27) состоит в выполнении равенства $(\Gamma, z_0) = 0$. Учитывая здесь соотношения (24)–(26), (28), получаем систему уравнений относительно $w(\tau, \tau_1)$. Обратим внимание, что

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial \tau_1} &= i \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau)(\Theta + 2k\pi + \kappa) \exp[i(\Theta + 2k\pi + \kappa)\tau_1], \\
\frac{\partial^2 w}{\partial \tau_1^2} &= - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau)(\Theta + 2k\pi + \kappa)^2 \exp[i(\Theta + 2k\pi + \kappa)\tau_1].
\end{aligned}$$

Имея это в виду, уравнение для $w(\tau, x)$ можно записать в форме параболического уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Delta^2(\Theta + \kappa) \frac{\partial w}{\partial x} + [\sigma(\Theta + \kappa)^2 + c]w + \delta|w|^2w \tag{29}$$

с периодическими краевыми условиями

$$w(\tau, x+1) \equiv w(\tau, x). \tag{30}$$

В (29) через δ обозначена величина

$$\delta = v_0[v_0v_1 + ib_0v_2](v(a_0 + iv_0) + b_0)(\alpha_0b_0^{-1}) \exp(i\kappa).$$

Коэффициенты (29) зависят от Θ , а значит, от малого параметра ε . При $\varepsilon \rightarrow 0$ функция $\Theta(\varepsilon)$ бесконечно много раз принимает каждое значение из полуинтервала $[0, 2\pi)$. Отсюда, в частности, вытекает, что динамика (4) весьма чувствительна к изменению малого параметра ε : при $\varepsilon \rightarrow 0$ может наблюдаться неограниченное число раз процесс рождения и гибели тех или иных установившихся режимов. Ниже через $\varepsilon_n(\Theta_0)$ обозначим такую последовательность, что $\varepsilon_n(\Theta_0) \rightarrow 0$ и $\Theta(\varepsilon_n(\Theta_0)) = \Theta_0$.

Сформулируем основной результат.

Утверждение 2. Пусть при некотором $\Theta = \Theta_0 \in [0, 2\pi)$ краевая задача (29), (30) имеет ограниченное решение $u^*(\tau, x)$. Тогда система (4) при $\varepsilon = \varepsilon_n(\Theta_0)$ имеет асимптотическое по невязке при $n \rightarrow \infty$ решение $x(t, \varepsilon)$ такое, что

$$\begin{aligned}
x(t, \varepsilon) = & \varepsilon u^* (\varepsilon^3, \varepsilon (1 + \varepsilon\Delta + \Theta(\varepsilon^2)) t) \exp \left[i \left(\frac{v_0}{\varepsilon} + \Theta_0 + \kappa + \Theta(\varepsilon) \right) t \right] + \\
& + \bar{u}^* (\varepsilon^3 t, \varepsilon (1 + \varepsilon\Delta + \Theta(\varepsilon^2)) t) \exp \left[-i \left(\frac{v_0}{\varepsilon} + \Theta_0 + \kappa + \Theta(\varepsilon) \right) t \right] + o(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{31}$$

В простейших ситуациях, когда, например, $u^*(\tau, x)$ – в определенном смысле – грубое периодическое решение, можно показать, что формула (31) доставляет в качестве решения (4) тот же, что $u^*(\tau, x)$ устойчивости.

В заключение этого пункта заметим, что краевая задача (30), (31) является уравнением типа Гинзбурга–Ландау. Известно (см. например [20]), что она может обладать достаточно богатой динамикой. Из приведенных выше построений следует, что тот же вывод справедлив и для локальной динамики системы (4). В частности, бегущим волнам в уравнении Гинзбурга–Ландау будут соответствовать периодические решения разной частоты в исходной системе. На рис. 1 приведены фурье-спектры четырех сосуществующих периодических аттракторов, полученных численно при различных начальных условиях.

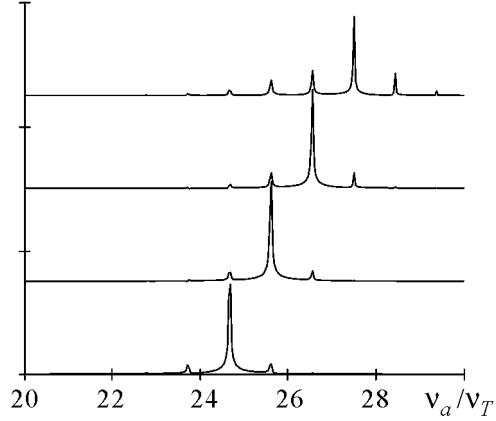


Рис. 1. Фурье-спектры четырех сосуществующих периодических аттракторов, полученных численно при различных начальных условиях. Параметры системы (1): $v = 20$, $q = 3.5$, $\alpha = 0.66$, $T = 16$, критическое значение $\alpha_+ = 0.633$. Частоты аттракторов ν_a нормированы на частоту цепи обратной связи $\nu_T = 2\pi/T$

Количество таких аттракторов может расти с увеличением запаздывания, как обсуждается в [6].

4. Построение систем квазинормальных форм при условии

$$\alpha = \alpha_0 + \varepsilon^{2\gamma}\alpha_1, \quad \gamma \in (0, 1). \quad (32)$$

Это условие означает, что параметр α сильнее отличается от α_0 , чем в предыдущем пункте (формула (13)). Используем построения, предложенные в [21, 22].

Положим в (21)

$$U = \varepsilon^\gamma \left[\exp [i(v_0 + \varepsilon(\Theta + \kappa))t] \sum_k \xi_k(\tau) \exp(i(K, T_1))w_0 + \right. \\ \left. + \exp [-i(v_0 + \varepsilon(\Theta + \kappa))t] \sum_k \bar{\xi}_k(\tau) \exp(-i(K, T_1))\bar{w}_0 \right] + \varepsilon^{2\gamma}U_2 + \varepsilon^{3\gamma}U_3 + \dots \quad (33)$$

Здесь использованы обозначения из п. 2, $\tau = \varepsilon^{2\gamma+1}t$, $T_1 = (t_1, \dots, t_n)$, $t_j = (v_j \varepsilon^{1-\gamma} + \varepsilon \Theta_j + \varepsilon^{\gamma+1} v_j \Delta) t$. Суммирование в (33) происходит по всевозможным целочисленным наборам $K = (k_1, \dots, k_n)$, а вектор-функции $U_j = U_j(t, \tau, t_1, \dots, t_n)$ ($j = 2, 3$) периодичны с периодом 2π по каждому из последних n аргументов. Подставляя формальный ряд (33) в (21) и последовательно приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем, что квазинормальные формы в рассматриваемом случае имеют вид

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \sigma \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^2 w + cw + \delta|w|^2 w \quad (34)$$

с периодическими краевыми условиями по каждой пространственной переменной

$$w(\tau, x_1, \dots, x_j + \frac{2\pi}{\nu_j}, x_{j+1}, \dots, x_n) \equiv w(\tau, x_1, \dots, x_n) \quad (j = 1, \dots, n). \quad (35)$$

Утверждение 3. Пусть при некоторых n и ν_1, \dots, ν_n краевая задача (34), (35) имеет ограниченное решение $w^*(\tau, x_1, \dots, x_n)$. Тогда система уравнений (21) имеет асимптотическое по невязке решение

$$U(t, \varepsilon) = \varepsilon^\gamma \left[\exp(i[\nu_0 + \varepsilon(\Theta_0 + \kappa)]t) w^*(\varepsilon^{1+2\gamma}t, t_1, \dots, t_n) + \exp(-i[\nu_0 + \varepsilon(\Theta_0 + \kappa)]t) \overline{w^*}(\varepsilon^{1+2\gamma}t, t_1, \dots, t_n) \right] + O(\varepsilon^{2\gamma}).$$

Краевая задача (34), (35) является вырожденной параболической краевой задачей. Известно, что её динамика может быть весьма сложной. Кроме этого, уравнение (34) и краевые условия (35) содержат произвольный числовой параметр n ($n = 1, 2, 3, 4, \dots$) и n континуальных параметров ν_1, \dots, ν_n . Для каждого набора параметров решению (34), (35) соответствует асимптотическое по невязке решение (21). Поэтому можно говорить о явлении гипермультистабильности. На рис. 2 и 3 показаны некоторые аттракторы, полученные численно, и их фурье-спектры, где частоты нормированы на частоту цепи обратной связи $2\pi/T$. Отметим, что существование подобных квазипериодических решений подтверждают и численные результаты [23].

Отметим ещё, что, несмотря на кажущуюся сложность краевых задач (34), (35), они позволяют существенно упростить изучение локальной динамики (21). Как показано выше, решения (21) включают в себя как решения (34), (35), так и относительно быстро осциллирующие функции.

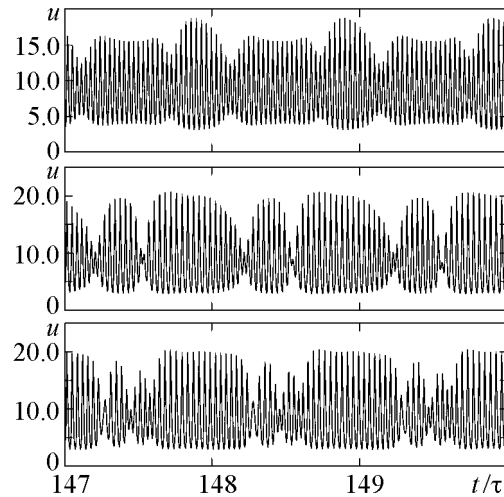


Рис. 2. Динамика трех сосуществующих периодических аттракторов, полученных численно при различных начальных условиях. Параметры системы (1) $v = 20$, $q = 3.5$, $\alpha = 0.7$, $T = 16$ соответствуют достаточно большой надкритичности при критическом значении $\alpha_+ = 0.633$

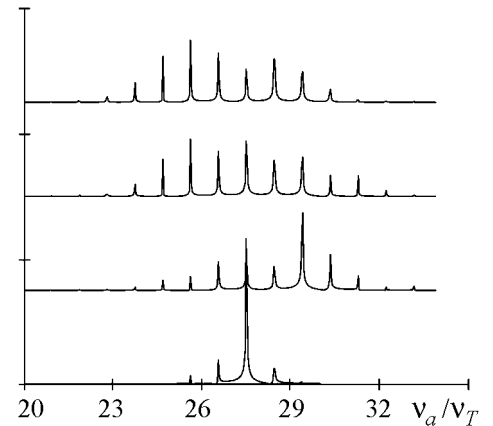


Рис. 3. Фурье-спектры четырех сосуществующих аттракторов, полученных численно при различных начальных условиях. Нижний спектр соответствует простому периодическому решению, другие спектры соответствуют аттракторам, показанным на рис.2. Параметры системы (1) те же, что и на рис.2, и соответствуют достаточно большой надкритичности при критическом значении $\alpha_+ = 0.633$

Ещё один важный вывод, подтверждающий возможность гипермультистабильности, связан с численным определением параметров в (1). Суть вопроса состоит в том, что параметры γ и α_1 , фигурирующие в (32), определяются при каждом фиксированном α неоднозначно и в довольно широком диапазоне. В силу того, что α_1 существенно влияет на динамику краевой задачи (34), (35), а значит, и на локальную динамику системы (1), заключаем, что в конкретных задачах необходимо рассматривать этот параметр во всем его диапазоне изменения. Поскольку при различных α_1 динамика, вообще говоря, различна, то получаем и здесь явное указание на возможность явления гипермультистабильности.

Рассмотрим это подробнее на примере. Фиксируем параметры v , q , α и T в исходном уравнении (1). При этом будем считать, что $q > 1$ произвольно, v такое, что выполняются все сформулированные выше условия. Величина T , в соответствии со всеми предположениями, должна быть большой, а значение $\varepsilon = T^{-1}$ – маленькое. Например, $\varepsilon = 10^{-3}$. Полагаем, что это значение «достаточно мало». Параметр α пусть «не сильно» отличается от критического значения α_0 , то есть $\alpha = \alpha_0 + \mu$ и μ «не велико». Пусть этот параметр принимает одно из двух значений: $\mu = 10^{-1}$ и $\mu = 10^{-2}$. Положим $\mu = \varepsilon^{2\gamma}\alpha_1$. Параметр γ может принимать любое значение от 0 до 1, α_1 пусть будет «не мало» и «не велико». Дополнительно ограничив область значений $\gamma \in [1/4, 1/2]$, получим

$$\begin{aligned}\alpha_1 &\in [\sqrt{10}, 10^2] && \text{при } \mu = 10^{-1}; \\ \alpha_1 &\in [1/\sqrt{10}, 10] && \text{при } \mu = 10^{-2}.\end{aligned}$$

Каждому значению α_1 из полученного диапазона может, вообще говоря, соответствовать свой установившийся режим исходного уравнения (1) при одних и тех же значениях параметров v , q , α и T .

Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (государственные контракты № 02.740.11.0197 и № П2223).

Библиографический список

1. *Yanchuk S., Perlikowski P.* Delay and periodicity // Phys. Rev. E. 2009. Vol. 79. 046221.
2. *Loose A., Goswami B.K., Wunsche H.-J., Henneberger F.* Tristability of a semiconductor laser due to time-delayed optical feedback // Phys. Rev. E. 2009. Vol. 79. 036211.
3. *Erneux T., Grasman J.* Limit-cycle oscillators subject to a delayed feedback // Phys. Rev. E. 2008. Vol. 78. 026209.
4. *Grigorieva E.V., Kaschenko S.A., Loiko N.A., Samson A.M.* Nonlinear dynamics in a laser with a negative delayed feedback // Physica D. 1992. Vol. 59. P. 297.
5. *Grigorieva E.V., Kaschenko S.A.* Regular and chaotic pulsations in laser diode with delayed feedback // Bifurcations and chaos. 1993. Vol. 6. P. 1515.
6. *Wolfrum M., Yanchuk S.* Eckhaus instability in systems with large delay // Phys. Rev. Letters. 2006. Vol. 96. 220201.

7. *Paoli T.L., Ripper L.E.* Frequency stabilization and narrowing of optical pulses from CW GaAs injection lasers // *IEEE J. Quan. Electron.* 1970. Vol. QE-6. P. 335.
8. *Giacomelli G., Calzavara M., Arecchi F.T.* Instabilities in a semiconductor laser with delayed optoelectronic feedback // *Opt. Commun.* 1989. Vol. 74. P. 97.
9. *Arecchi F.T., Giacomelli G., Lapucci A., Meucci R.* Dynamics of a CO₂ laser with delayed feedback: The short-delayed regime // *Phys. Rev. A.* 1991. Vol. 43. P. 4997.
10. *Кащенко С.А.* Исследование методами большого параметра системы нелинейных дифференциально-разностных уравнений, моделирующих задачу хищник-жертва // *Докл. АН СССР* 1982. Т. 266, № 4. С. 792.
11. *Кащенко С.А.* Об установившихся режимах уравнения Хатчинсона с диффузией // *ДАН СССР.* 1987. Т. 292, № 2. С. 327.
12. *Бутузов В.Ф., Васильева А.Б.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
13. *Grigorieva E.V., Haken H., Kaschenko S.A.* Theory of quasiperiodicity in model of lasers with delayed optoelectronic feedback // *Optics Commun.* 1999. Vol. 165. P. 279.
14. *Bestehorn M., Grigorieva E.V., Haken H. and Kaschenko S.A.* Order parameters for class-B lasers with a long time delayed feedback // *Physica D.* 2000. Vol. 145. P. 111.
15. *Кащенко С.А.* О квазинормальных формах для параболических уравнений с малой диффузией // *ДАН СССР.* 1988. Т. 299, № 5. С. 1049.
16. *Кащенко С.А.* О коротковолновых бифуркациях в системах с малой диффузией // *Докл. АН СССР.* 1989. Т. 307, № 2. С. 269.
17. *Кащенко С.А.* Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной // *Дифференциальные уравнения.* 1989. Т. 25, № 8.
18. *Kaschenko S.A.* Normalization in the systems with small diffusion // *International Journal of Bifurcations and chaos.* 1996. Vol. 6, № 7. P. 1093.
19. *Кащенко С.А.* Уравнения Гинзбурга–Ландау – нормальная форма для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием // *Журнал вычисл.матем. и матем. физ.* 1998. Т. 38, № 3. С. 457.
20. *Новое в синергетике: взгляд в третье тысячелетие.* М.: Российская академия наук и издательство «Наука», 2002. 478 с.
21. *Кащенко И.С.* Асимптотический анализ поведения решений уравнения с большим запаздыванием // *Доклады Академии Наук.* 2008. Т. 421, № 5. С. 586.
22. *Кащенко И.С.* Локальная динамика уравнений с большим запаздыванием // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2008. Т. 48, № 12. С. 2141.
23. *Кащенко И.С.* Буферность в уравнениях второго порядка с большим запаздыванием // *Моделирование и анализ информационных систем.* Ярославль, 2008. Т. 15, № 2. С. 31.

*Белорусский государственный
экономический университет
Ярославский государственный
университет им. П.Г.Демидова*

Поступила в редакцию 15.02.2011

HYPERMULTISTABILITY IN LASER'S MODELS WITH LARGE DELAY

E.V. Grigorieva, I.S. Kashchenko, S.A. Kaschenko

We study model of monomode semiconductor laser with optoelectronic feedback, based on balanced equations with delay. We built sets of quasinormal forms in neighbourhood of bifurcation values. The possibility of coexistence of large amount of stable oscillating solutions is shown.

Keywords: Method of normal forms, large delay, small parameter, local analysis.



Григорьева Елена Викторовна – родилась в 1957, окончила Белорусский государственный университет (1974). Работала в институте физики АН БССР, БГУ, в настоящий момент работает в БГЭУ. Защитила диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук в БГУ (2004) в области нелинейной динамики лазерных систем. Опубликовала 100 научных и научно-методических трудов.

Республика Беларусь 220070 Минск, пр. Партизанский, д. 26
Белорусский государственный экономический университет
E-mail: grigorieva@tut.by



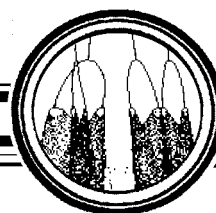
Кащенко Илья Сергеевич – родился в Ярославле (1982), окончил Ярославский государственный университет (2004). После окончания ЯрГУ работает там же. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ЯрГУ (2006) в области нелинейной динамики уравнений с запаздыванием. Является автором 30 научных и научно-методических трудов.

150000 Ярославль, ул. Советская, д. 14
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
E-mail: iliyask@uniyar.ac.ru



Кащенко Сергей Александрович – родился в Ярославле (1953), окончил Ярославский государственный университет (1975). После окончания ЯрГУ работает там же. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ННГУ (1976) и доктора физико-математических наук в МГУ (1990) в области теории нелинейных колебаний. Автор пяти монографий. Опубликовал 220 научных статей по направлению, указанному выше.

150000 Ярославль, ул. Советская, д. 14
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
E-mail: kasch@uniyar.ac.ru



БИФУРКАЦИИ В ЗАДАЧЕ ТЕПЛОЙ КОНВЕКЦИИ УПРУГОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПОДОГРЕВАЕМОЙ СНИЗУ ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Д.В. Любимов, К.В. Ковалевская, Т.П. Любимова

Работа посвящена исследованию бифуркаций в задаче тепловой конвекции упруговязкой жидкости в подогреваемой снизу квадратной области со свободными границами. Для описания реологических свойств жидкости используется обобщенная модель Олдройда. Аналитически, методами слабонелинейного анализа, получено выражение для границы, разделяющей пространство реологических параметров на области с разным типом вилочной бифуркации.

Ключевые слова: Упруговязкая жидкость, конвекция, замкнутая полость, слабонелинейный анализ, вилочные бифуркации.

Введение

Введение. Изучение задачи об устойчивости механического равновесия жидкости при подогреве снизу началось еще в начале прошлого столетия в работах Релея. Позднее анализ этой задачи был расширен на вязкоупругие и упруговязкие жидкости. В отличие от ньютоновских жидкостей, благодаря особым упругим свойствам среды, после потери механического равновесия при подогреве снизу в вязкоупругих и упруговязких жидкостях конвекция может развиваться не только монотонным образом, но также существует колебательная мода, что было показано, например, в работах [1] для максвелловской жидкости и в [2] для жидкости Олдройда, где изучалась линейная устойчивость равновесия подогреваемого снизу плоского горизонтального слоя. Показано, что при малых временах релаксации напряжений неустойчивость равновесия связана с развитием монотонных возмущений; граница монотонной неустойчивости не зависит от упругих свойств среды; соответствующее критическое число Релея совпадает со значением, получающимся в случае ньютоновской жидкости. При временах релаксации, превышающих некоторое значение,

неустойчивость наступает в результате развития колебательных возмущений. Критическое число Релея, определяющее порог колебательной неустойчивости, уменьшается с усилением упругих свойств среды. Наличие запаздывания деформаций оказывает стабилизирующее действие. В [3] с помощью слабонелинейного анализа для слоя со свободными границами, подогреваемого снизу, показано, что в зависимости от реологических параметров в такого рода жидкостях обнаруживаются два типа вилочной бифуркации: прямая, как в ньютоновских жидкостях, и обратная.

Работы, рассматривающие конвекцию вязкоупругих и упруговязких жидкостей в замкнутых областях, в литературе практически отсутствуют. Исключение составляют работы [4–6]. В [4–5] проведен слабонелинейный анализ поведения решений вблизи точки бифуркации в подогреваемых снизу прямоугольных полостях с твердыми границами. Устойчивость механического равновесия исследована в рамках обобщенной модели, переходящей в различных предельных случаях в модели Максвелла, Олдройда и Джеффриса. Для монотонной неустойчивости равновесия численно определены границы, разделяющие области с разным типом вилочной бифуркации. Показано, что при увеличении времени релаксации напряжений или при уменьшении отношения времени запаздывания деформаций ко времени релаксации напряжений происходит переход от прямой к обратной вилочной бифуркации. В [6] рассмотрена жидкость Олдройда в подогреваемой снизу квадратной полости с твердыми границами. Изучены возникновение и нелинейные режимы конвекции. Однако в этой работе исследование проведено лишь для одного значения реологического параметра, определяющего тип ассоциированной производной, и обратная вилочная бифуркация не была обнаружена.

Настоящая работа посвящена изучению типа вилочной бифуркации в задаче конвекции упруговязкой жидкости в подогреваемой снизу квадратной полости со свободными границами. Принятые граничные условия (свободные границы) позволяют провести слабонелинейный анализ поведения решений аналитически.

Постановка задачи

Рассмотрим конвективное движение упруговязкой жидкости в горизонтальном цилиндре квадратного сечения со стороной h . Цилиндр предполагается достаточно длинным, так чтобы можно было ограничиться рассмотрением двумерных движений. Пусть ось x направлена по горизонтали, ось y – по вертикали, начало координат находится в левом нижнем углу полости. Границы полости свободные. Горизонтальные границы поддерживаются при постоянных разных температурах: на верхней границе $T = 0$, на нижней $T = \theta$. Вертикальные границы теплоизолированы. Полость находится в однородном поле силы тяжести.

Для описания реологических свойств жидкости, как и в [4], будем использовать обобщенную модель Олдройда [7]

$$\bar{\sigma} + \tau^* [D \bar{\sigma} - 1/2 a (\bar{\sigma}\dot{\gamma} + \dot{\gamma}\bar{\sigma})] = \mu_0 [\dot{\gamma} + \tau_r^* (D \dot{\gamma} - a \dot{\gamma}\dot{\gamma})]. \quad (1)$$

Здесь $\bar{\sigma}$ – тензор избыточных напряжений (далее для краткости – тензор напряжений); $\dot{\gamma} = \partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i$ – тензор скоростей деформации; τ^* – время релакса-

ции напряжений; τ_r^* – время запаздывания деформаций; μ_0 – динамическая вязкость; a – параметр, определяющий тип ассоциированной производной (он может принимать значения от 1 до -1). Знаком D обозначена яманновская производная, действие которой на тензор определяется следующим образом:

$$D\gamma_{ij} \equiv \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} + v_k \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x_k} - \frac{1}{2}(\omega_{ik}\gamma_{jk} + \omega_{jk}\gamma_{ik}),$$

где $\omega_{ik} = \partial v_i / \partial x_k - \partial v_k / \partial x_i$ – элементы тензора завихренности.

Введем функцию тока ψ и завихренность φ , связанные с компонентами скорости соотношениями

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \varphi = \text{rot}_z \mathbf{v}.$$

Запишем уравнения тепловой конвекции в терминах функции тока и завихренности в безразмерной форме, используя величины v/h , h^2/v , θ в качестве единиц измерения скорости, времени и температуры, соответственно, где ν – кинематическая вязкость. Имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + J(\varphi, \psi) - \text{Gr} \frac{\partial T}{\partial x} + (\Delta \sigma_{xy} + \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x \partial y}) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + J(T, \psi) - \frac{1}{\text{Pr}} \nabla^2 T + \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$\varphi = -\nabla^2 \psi. \quad (4)$$

Здесь $\nabla^2 \equiv \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$, $\Delta \equiv \partial^2 / \partial y^2 - \partial^2 / \partial x^2$, $J(\varphi, \psi) \equiv (\partial \varphi / \partial x)(\partial \psi / \partial y) - (\partial \varphi / \partial y)(\partial \psi / \partial x)$. T – отклонение температуры от теплопроводного распределения, нижние индексы означают компоненты тензора.

Реологическое уравнение (1) в безразмерной форме принимает вид:

$$\bar{\sigma} + \tau [D \bar{\sigma} - 1/2 a (\bar{\sigma} \dot{\gamma} + \dot{\gamma} \bar{\sigma})] = [\dot{\gamma} + \varepsilon \tau (D \dot{\gamma} - a \dot{\gamma} \dot{\gamma})] \quad (5)$$

где $\varepsilon = \tau_r^* / \tau^*$, в качестве единицы измерения $\bar{\sigma}$ принято $\mu_0 \nu / h^2$.

Уравнения (2)–(5) содержат следующие безразмерные параметры: число Грасгофа $\text{Gr} = g\beta\theta h^3 / \nu^2$, число Прандтля $\text{Pr} = \nu / \chi$, число Деборы $\tau = \tau^* \nu / h^2$ и параметры ε и a . Здесь g – ускорение свободного падения, χ – коэффициент температуропроводности.

Удобно разбить тензор напряжений на две части $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2$, где $\bar{\sigma}_2 = \varepsilon \dot{\gamma}$ – ньютоновская часть. Тогда реологическое уравнение (5) и уравнение движения (2) принимают вид

$$\bar{\sigma}_1 + \tau [D \bar{\sigma}_1 - 1/2 a (\bar{\sigma}_1 \dot{\gamma} + \dot{\gamma} \bar{\sigma}_1)] = (1 - \varepsilon) \dot{\gamma}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + J(\varphi, \psi) - \text{Gr} \frac{\partial T}{\partial x} + (\Delta \sigma_{1,xy} + \frac{\partial^2 \sigma_{1,xx}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \sigma_{1,yy}}{\partial x \partial y}) - \varepsilon \nabla^2 \varphi = 0. \quad (7)$$

Проектируя уравнение (6) на оси x, y , имеем

$$\sigma_{1,xx} + \tau \left(\frac{\partial \sigma_{1,xx}}{\partial t} + J(\sigma_{1,xx}, \psi) - \nabla^2 \psi \sigma_{1,xy} - 2a \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \sigma_{1,xx} - a \Delta \psi \sigma_{1,xy} \right) = 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} (1 - \varepsilon), \quad (8)$$

$$\sigma_{1,yy} + \tau \left(\frac{\partial \sigma_{1,yy}}{\partial t} + J(\sigma_{1,yy}, \psi) + \nabla^2 \psi \sigma_{1,xy} + 2a \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \sigma_{1,yy} - a \Delta \psi \sigma_{1,xy} \right) = -2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} (1 - \varepsilon), \quad (9)$$

$$\sigma_{1,xy} + \tau \left(\frac{\partial \sigma_{1,xy}}{\partial t} + J(\sigma_{1,xy}, \psi) + \frac{1}{2} (\nabla^2 \psi (\sigma_{1,xx} - \sigma_{1,yy}) - a \Delta \psi (\sigma_{1,xx} + \sigma_{1,yy})) \right) = \Delta \psi (1 - \varepsilon). \quad (10)$$

Далее для простоты обозначений нижний индекс 1 у переменной $\bar{\sigma}_1$ опускается.

Гидродинамические и тепловые граничные условия для отклонения от состояния равновесия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} x = 0, 1 : \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \\ y = 0, 1 : \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad T = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Известно, что при τ , меньших некоторого критического значения, потеря устойчивости равновесия подогреваемой снизу вязкоупругой (упруговязкой) жидкости происходит монотонным образом, при тех же значениях числа Грасгофа Gr_* , что и в случае ньютоновской жидкости. При достижении τ критического значения наиболее опасными становятся колебательные возмущения. Благодаря особым реологическим свойствам среды, конвективное движение упруговязкой жидкости при подогреве снизу, в зависимости от значений реологических параметров, может возбуждаться либо мягким, либо жестким образом. Интерес представляет нахождение границ, разделяющих области с разным типом бифуркации, в пространстве реологических параметров. В настоящей работе исследуется поведение решений вблизи границы монотонной неустойчивости.

Метод решения

Для принятых граничных условий линейная задача устойчивости равновесия эквивалентна аналогичной задаче для бесконечного горизонтального слоя при волновом числе, равном π . Такая задача для случая свободных границ решалась в [3], где показано, что потеря устойчивости равновесия относительно монотонных возмущений имеет место при достижении числом Грасгофа критического значения, определяемого выражением

$$Gr_* = \frac{8\pi^4}{Pr}. \quad (12)$$

Критическое движение, как и в ньютоновской жидкости, представляет собой в данном случае одновихревую конвективную ячейку. В силу очевидного равноправия двух знаков закрутки монотонная потеря устойчивости должна сопровождаться вилочной бифуркацией, то есть двусторонняя бифуркация невозможна. Однако тип вилочной бифуркации (прямая или обратная) не очевиден и может зависеть от параметров. Для определения этого типа следует воспользоваться методами слабонелинейного анализа для получения уравнения разветвления. При этом роль естественного параметра порядка может играть амплитуда критического движения. Уравнение разветвления может быть получено различными способами. В данной задаче проще всего воспользоваться тем, что как в линейном приближении, так и во всех последующих, решение может быть выражено через простые тригонометрические функции.

Представим переменные поля в виде

$$\psi = a_1 \sin \pi x \sin \pi y + a_2 \sin 2\pi x \sin 2\pi y,$$

$$T = c_1 \cos \pi x \sin \pi y + c_2 \sin 2\pi y + c_3 \cos 2\pi x \sin 2\pi y,$$

$$\sigma_{xx} = d_0 + d_1 \cos \pi x \cos \pi y + d_2 \cos 2\pi x \cos 2\pi y + d_3 \cos 2\pi x + d_4 \cos 2\pi y, \quad (13)$$

$$\sigma_{yy} = e_0 + e_1 \cos \pi x \cos \pi y + e_2 \cos 2\pi x \cos 2\pi y + e_3 \cos 2\pi x + e_4 \cos 2\pi y,$$

$$\sigma_{xy} = f_1 \sin \pi x \sin \pi y + f_2 \sin 2\pi x \sin 2\pi y.$$

Подставляя разложения (13) в (3), (7)–(10) и собирая слагаемые в каждом уравнении с одинаковыми множителями, получим систему 17 нелинейных уравнений для $a_1 - f_2$.

$$\text{Gr} \pi c_1 + \pi^2 d_1 - \pi^2 e_1 + 4\pi^4 \varepsilon a_1 = 0, \quad (14)$$

$$\text{Gr} \pi c_3 + 2\pi^2 d_2 - 2\pi^2 e_2 + 32\pi^4 a_2 = 0, \quad (15)$$

$$\pi^2 c_2 a_1 + 2 \frac{\pi^2}{\text{Pr}} c_1 + \pi a_1 = 0, \quad (16)$$

$$-\frac{\pi^2}{2} c_1 a_1 + 4 \frac{\pi^2}{\text{Pr}} c_2 = 0, \quad (17)$$

$$8 \frac{\pi^2}{\text{Pr}} c_3 + 2\pi a_2 = 0, \quad (18)$$

$$d_0 + \tau \left(\frac{\pi^2}{2} a_1 f_1 - a \frac{\pi^2}{2} a_1 d_1 - 2a\pi^2 a_2 d_2 + 2a\pi^2 a_2 f_2 \right) = 0, \quad (19)$$

$$d_1 + \tau \left(\frac{\pi^2}{2} a_1 f_2 + 2\pi^2 a_2 f_1 - \pi^2 d_3 a_1 + \pi^2 d_4 a_1 - 2a\pi^2 d_0 a_1 - \right. \\ \left. - 2a\pi^2 a_2 d_1 - a \frac{\pi^2}{2} a_1 d_2 - a\pi^2 a_1 d_3 - a\pi^2 a_1 d_4 \right) = 2\pi^2 (1 - \varepsilon) a_1, \quad (20)$$

$$d_2 + \tau \left(\frac{\pi^2}{2} a_1 f_1 - 8a\pi^2 d_0 a_2 - a \frac{\pi^2}{2} a_1 d_1 \right) = 8\pi^2 (1 - \varepsilon) a_2, \quad (21)$$

$$d_3 + \tau \left(\frac{\pi^2}{2} a_1 d_1 + 2\pi^2 d_4 a_2 - \frac{\pi^2}{2} a_1 f_1 - a \frac{\pi^2}{2} a_1 d_1 - 4a\pi^2 a_2 d_4 \right) = 0, \quad (22)$$

$$d_4 + \tau \left(-\frac{\pi^2}{2} a_1 d_1 - 2\pi^2 d_3 a_2 - \frac{\pi^2}{2} a_1 f_1 - a \frac{\pi^2}{2} a_1 d_1 - 4a\pi^2 a_2 d_3 \right) = 0, \quad (23)$$

$$e_0 + \tau \left(-\frac{\pi^2}{2} a_1 f_1 + a \frac{\pi^2}{2} a_1 e_1 + 2a\pi^2 a_2 e_2 - 2a\pi^2 a_2 f_2 \right) = 0, \quad (24)$$

$$e_1 + \tau \left(-\frac{\pi^2}{2} a_1 f_2 - 2\pi^2 a_2 f_1 - \pi^2 e_3 a_1 + \pi^2 e_4 a_1 + 2a\pi^2 e_0 a_1 + \right. \\ \left. + 2a\pi^2 a_2 e_1 + a \frac{\pi^2}{2} a_1 e_2 + a\pi^2 a_1 e_3 + a\pi^2 a_1 e_4 \right) = -2\pi^2 (1 - \varepsilon) a_1, \quad (25)$$

$$e_2 + \tau \left(-\frac{\pi^2}{2} a_1 f_1 + 8a\pi^2 e_0 a_2 + a \frac{\pi^2}{2} a_1 e_1 \right) = -8\pi^2 (1 - \varepsilon) a_2, \quad (26)$$

$$e_3 + \tau \left(\frac{\pi^2}{2} a_1 e_1 + 2\pi^2 e_4 a_2 + \frac{\pi^2}{2} a_1 f_1 + a \frac{\pi^2}{2} a_1 e_1 + 4a\pi^2 a_2 e_4 \right) = 0, \quad (27)$$

$$e_4 + \tau \left(-\frac{\pi^2}{2} a_1 e_1 - 2\pi^2 e_3 a_2 + \frac{\pi^2}{2} a_1 f_1 + a \frac{\pi^2}{2} a_1 e_1 + 4a\pi^2 a_2 e_3 \right) = 0, \quad (28)$$

$$f_1 + \tau \left(-\frac{\pi^2}{4} a_1 (d_2 - e_2) - \pi^2 a_2 (d_1 - e_1) - \pi^2 a_1 (d_0 - e_0) + \right. \\ \left. + \frac{\pi^2}{2} a_1 (d_3 - e_3) + \frac{\pi^2}{2} a_1 (d_4 - e_4) \right) = 0, \quad (29)$$

$$f_2 = \tau \left(-\frac{\pi^2}{4} a_1 (d_1 - e_1) - 4\pi^2 a_2 (d_0 - e_0) \right) = 0. \quad (30)$$

Вводя формальный малый параметр μ , представим число Грасгофа и коэффициенты a_1, \dots, f_2 в виде рядов по степеням μ

$$\begin{aligned} \text{Gr} &= \text{Gr}_* + \mu^2 \text{Gr}^{(2)} + \dots, \\ a_1 &= \mu a_1^{(1)} + \mu^2 a_1^{(2)} + \mu^3 a_1^{(3)} + \dots, \quad \dots \quad f_2 = \mu f_2^{(1)} + \mu^2 f_2^{(2)} + \mu^3 f_2^{(3)} + \dots, \end{aligned} \quad (31)$$

В первом порядке решение имеет вид

$$\begin{aligned} \psi^{(1)} &= a_1^{(1)} \sin \pi x \sin \pi y, \quad T^{(1)} = c_1^{(1)} \cos \pi x \sin \pi y, \\ \sigma_{xx}^{(1)} &= d_1^{(1)} \cos \pi x \cos \pi y, \quad \sigma_{yy}^{(1)} = e_1^{(1)} \cos \pi x \cos \pi y, \quad \sigma_{xy}^{(1)} = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Коэффициенты $c_1^{(1)}$, $d_1^{(1)}$, $e_1^{(1)}$ выражаются через $a_1^{(1)}$

$$c_1^{(1)} = -\frac{\text{Pr} a_1^{(1)}}{2\pi}, \quad d_1^{(1)} = 2\pi^2 (1 - \varepsilon) a_1^{(1)}, \quad e_1^{(1)} = -2\pi^2 (1 - \varepsilon) a_1^{(1)}. \quad (33)$$

Во втором порядке коэффициенты при тригонометрических множителях, не обращающиеся в нуль, даются выражениями

$$\begin{aligned} c_2^{(2)} &= \frac{\text{Pr} c_1^{(1)} a_1^{(1)}}{8}, \quad d_0^{(2)} = a \frac{\tau \pi^2 d_1^{(1)} a_1^{(1)}}{2}, \\ d_2^{(2)} &= a \frac{\tau \pi^2 d_1^{(1)} a_1^{(1)}}{2}, \quad d_3^{(2)} = -\frac{\tau \pi^2 (1 - a) d_1^{(1)} a_1^{(1)}}{2}, \\ d_4^{(2)} &= \frac{\tau \pi^2 (1 + a) d_1^{(1)} a_1^{(1)}}{2}, \quad e_0^{(2)} = -a \frac{\tau \pi^2 e_1^{(1)} a_1^{(1)}}{2}, \\ e_2^{(2)} &= -a \frac{\tau \pi^2 e_1^{(1)} a_1^{(1)}}{2}, \quad e_3^{(2)} = -\frac{\tau \pi^2 (1 + a) e_1^{(1)} a_1^{(1)}}{2}, \\ e_4^{(2)} &= \frac{\tau \pi^2 (1 - a) e_1^{(1)} a_1^{(1)}}{2}, \quad f_2^{(2)} = \frac{\tau \pi^2 (d_1^{(1)} - e_1^{(1)}) a_1^{(1)}}{4}. \end{aligned} \quad (34)$$

Члены, получающиеся из общего решения однородных уравнений для коэффициентов $c_1^{(2)}$, $d_1^{(2)}$, $e_1^{(2)}$, $c_3^{(2)}$, $d_2^{(2)}$, $e_2^{(2)}$ из уравнений (16), (20), (25), (17), (21), (26), соответственно, не приведены, поскольку в дальнейшем при подстановке в уравнения третьего порядка они взаимно уничтожаются.

В третьем порядке выражения для $c_1^{(3)}$, $d_1^{(3)}$, $e_1^{(3)}$ из уравнений (16), (20), (25), соответственно, через решения предыдущих порядков подставляем в уравнение для $a_1^{(3)}$ (14). После взаимного уничтожения линейных членов и сокращения на $a_1^{(1)}$ в (14) получим формулу, связывающую число Грасгофа $\text{Gr}^{(2)}$ и квадрат величины $a_1^{(1)}$ через реологические параметры, то есть уравнение разветвления

$$\text{Gr}^{(2)} \frac{\text{Pr}}{2} = \left(\frac{\text{Pr}^2}{4\pi^4} - \tau^2 (5 - 9a^2) (1 - \varepsilon) \right) \left(a_1^{(1)} \right)^2. \quad (35)$$

Знак величины $Gr^{(2)}$ дает информацию о типе вилочной бифуркации: прямой бифуркации соответствует $Gr^{(2)} > 0$, обратной – $Gr^{(2)} < 0$. Таким образом, граница между областями с разным типом вилочной бифуркации конвекции описывается следующим выражением:

$$\frac{Pr^2}{4\pi^4} = (5 - 9a^2) (1 - \varepsilon) \tau^2. \quad (36)$$

Результаты

На рисунке приведены границы на плоскости параметров ε – τ , разделяющие области с разным типом вилочной бифуркации при монотонной неустойчивости. Заштрихованный участок соответствует области, в которой возмущения развиваются колебательным образом. Штриховая линия является границей колебательной неустойчивости. При значениях реологических параметров ε и τ , соответствующих точкам, расположенным ниже границы для каждого значения параметра a , имеет место прямая вилочная бифуркация, при пересечении границы (то есть при увеличении τ или при уменьшении ε) происходит переход к обратной вилочной бифуркации.

С увеличением параметра a кривая, разделяющая области с разным типом вилочной бифуркации, поднимается вверх как целое. Как видно из (36), смена типа вилочной бифуркации происходит только при $a < 0.745$. При значениях a , больших указанного значения, область параметров, при которых имеет место обратная вилочная бифуркация, отсутствует. При любых значениях реологических параметров ε и τ наблюдается прямая вилочная бифуркация.

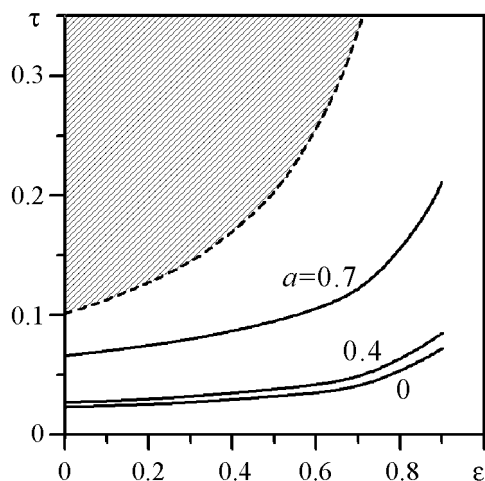


Рис. Границы между областями прямой и обратной вилочной бифуркации для монотонной неустойчивости для разных значений параметра a при $Pr = 1$; заштрихованный участок соответствует области колебательной неустойчивости

Заключение

Исследован характер возбуждения конвекции упруговязкой жидкости в замкнутой полости со свободными границами при подогреве снизу. Рассмотрение ограничено анализом поведения решений вблизи границы монотонной неустойчивости. Получено аналитическое выражение, определяющее границы между областями с разным типом вилочной бифуркации в пространстве реологических параметров. Найдено, что для значений реологического параметра a , определяющего вид ассоци-

ированной производной, больших 0.745, при любых значениях параметра упругости τ и отношения времени запаздывания деформаций к времени релаксации напряжений ε имеет место прямая вилочная бифуркация. В случае $a < 0.745$, для малых τ при любых ε наблюдается прямая вилочная бифуркация; при увеличении τ происходит переход от прямой вилочной бифуркации к обратной. Отметим, что в случае твердых границ, как показано в [5], обратная вилочная бифуркация отсутствует лишь в очень узком интервале значений a , близких к 1.0.

Библиографический список

1. *Vest C.V., Arpaci V.S.* Overstability of a viscoelastic fluid layer heated from below // *J. Fluid Mech.* 1969. Vol. 36. Part 3. P. 613.
2. *Takashima M.* Thermal instability in viscoelastic fluid layer. I // *Journal of the Physical Society of Japan.* 1972. Vol. 33, № 2. P. 511.
3. *Rosenblat S.* Thermal convection in a viscoelastic liquid // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 1986. Vol. 21. P. 201.
4. *Park H.M., Lee H.S.* Nonlinear hydrodynamic stability of viscoelastic fluids heated from below // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 1995. Vol. 60. I. 1. P. 1.
5. *Ковалевская К.В., Любимова Т.П.* Возникновение и нелинейные режимы конвекции упруговязкой жидкости в замкнутой полости при подогреве снизу // *Изв. РАН. МЖГ.* 2012 (принято в печать).
6. *Крапивина Е.Н., Любимова Т.П.* Нелинейные режимы конвекции упруго-вязкой жидкости в замкнутой полости, подогреваемой снизу // *Изв. РАН. МЖГ.* 2000. № 4. С. 5.
7. *Астарита Дж., Маруччи Дж.* Основы гидродинамики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978.

*Пермский госуниверситет
Институт механики
сплошных сред УрО РАН*

*Поступила в редакцию 24.01.2011
После доработки 14.04.2011*

BIFURCATIONS IN THE PROBLEM OF THERMAL CONVECTION OF VISCOELASTIC FLUID IN A CLOSED CAVITY WITH FREE BOUNDARIES HEATED FROM BELOW

D.V. Lyubimov, K.V. Kovalevskaya, T.P. Lyubimova

Bifurcations in the problem of thermal convection of viscoelastic fluid in a square cavity with free boundaries heated from below are studied. General Odroyd model is used for the description of rheological behaviour of the fluid. In the frame of weakly-nonlinear analysis explicit formula is obtained for the boundary separating the rheological parameter space into domains with different type of bifurcations (super- and subcritical).

Keywords: Viscoelastic fluid, convection, closed cavity, weakly-nonlinear analysis, supercritical bifurcation, subcritical bifurcation.

Любимов Дмитрий Викторович – родился в Перми (1949), окончил Пермский государственный университет (1971). После окончания аспирантуры работает в ПГУ. Заведующий кафедрой теоретической физики. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ИПМ АН СССР (1980) и доктора физико-математических наук в Пермском государственном университете (1995) в области теории конвекции, конвективной и гидродинамической устойчивости. Автор монографий «Thermal Vibrational Convection» (в соавторстве с Г.З.Гершуни) и «Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях» (в соавторстве с Т.П. Любимовой и А.А. Черепановым). Опубликовал 106 статей в реферируемых научных журналах по направлениям, указанным выше. Заслуженный деятель науки РФ. Член Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике. Член редакционной коллегии журнала «Вычислительная механика сплошных сред».



614990 Пермь, ул. Букирева, 15
Пермский государственный университет
E-mail: lyubimov@psu.ru



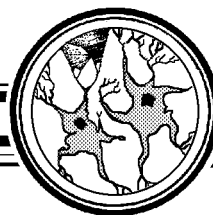
Ковалевская Ксения Викторовна – родилась в Перми (1985), окончила Пермский государственный университет (2008). В настоящее время является аспиранткой Лаборатории вычислительной гидродинамики Института механики сплошных сред УрО РАН.

614013 Пермь, ул. Ак. Королева, 1
Институт механики сплошных сред УрО РАН
E-mail: k_kovalevskaya@mail.ru

Любимова Татьяна Петровна – родилась в Удмуртской АССР (1949), окончила Пермский государственный университет (1971). Работает в Институте механики сплошных сред УрО РАН заведующей Лабораторией вычислительной гидродинамики. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в Томском государственном университете (1980) и доктора физико-математических наук в Пермском государственном университете (1995) в области теории конвекции, конвективной и гидродинамической устойчивости. Автор монографии «Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях» (в соавторстве с Д.В. Любимовым и А.А. Черепановым). Опубликовала 107 статей в реферируемых научных журналах по направлениям, указанным выше. Член редакционных коллегий журналов «Вычислительная механика сплошных сред» и «Вестник Пермского университета. Информационные системы и технологии».



614013 Пермь, ул. Ак. Королева, 1
Институт механики сплошных сред УрО РАН
E-mail: lubimova@psu.ru



АВТОНОМНАЯ И НЕАВТОНОМНАЯ ДИНАМИКА ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ МОДЕЛИ СЕРОТОНЭРГИЧЕСКОГО НЕЙРОНА

Д.Д. Постнов, О.В. Сосновцева, Д.Э. Постнов

Серотонин является одним из основных модуляторов нейронной активности как на системном уровне, так и на уровне локальных (на малых расстояниях) взаимодействий. Однако в отличие от синаптически связанных нейронных ансамблей, математические модели, на качественном уровне описывающие серотонин-управляемые нейронные схемы, практически отсутствуют. В данной работе мы предлагаем относительно простую модель серотонэргического (серотонин-генерирующего и серотонин-чувствительного) нейрона. Показано, что учет наличия слабого деполяризирующего потенциал-независимого тока нейрона, а также наличия авторецепторов к серотонину во многом определяет особенности как автономной, так и неавтономной динамики модели. Приведенные в работе модель и результаты вычислительного эксперимента направлены на формирование типовой вычислительной модели серотонэргического нейрона, которая заняла бы ту «экологическую нишу», которую для «обычного» нейрона играет, например, модель ФитцХью–Нагумо.

Ключевые слова: Серотонэргический нейрон, функциональная модель, слабый деполяризирующий ток, пачечная активность.

Введение

Динамика больших нейронных ансамблей формируется как внутренними свойствами нейронов, так и различными каналами их взаимодействия. Последние опосредованы как синаптическими связями, так и большим количеством нейротрансмиттеров и нейромодуляторов. Серотонин является одним из основных нейромодуляторов, управляющих поведением как позвоночных, так и беспозвоночных. Он влияет на проявление агрессии и доминантное поведение [1, 2], участвует в формировании ритмических движений [3–5]. Серотонин (5-НТ) также влияет на процесс сна [6] и взаимоотношения с противоположным полом [7]. Нарушения в серотонэргической системе вызывают такие болезни человека, как депрессия, различные фобии, эпилепсия, обобщенная anxiety disorder [8, 9]. Антагонисты серотонина и препараты, влияющие на его метаболизм, используются при лечении ряда болезней [10, 11]. Отдельный класс препаратов напрямую нацелен на серотонэргическую

систему, включая некоторые антидепрессанты и препараты против мигрени [12, 13]. Коммерческий успех препаратов, селективно подавляющих механизмы поглощения серотонина (SSRI) [14] при лечении расстройств психоэмоциональной сферы, а также распространение психотропных средств, таких как MDMA (экстази) [15], для развлекательных целей сделало серотонин предметом внимания широкой публики.

Замечательная особенность серотонэргической системы – в том, что все многообразие влияний на организм порождается весьма небольшим количеством нейронов, вырабатывающих серотонин и воздействующих на множество целей. У млекопитающих относительно небольшое (у человека – 500000) число нейронов в специализированном нейронном ядре имеет проекции во всех областях мозга [16]. У улитки *aplysia*, напротив, единственный серотонин-генерирующий нейрон иннервирует группу моторных нейронов и периферийные мускулы, управляя их состоянием и процессом питания [17]. У медицинской пиявки ансамбль из пяти типов серотонэргических нейронов воздействует на различные участки нервной системы и управляет плаванием, укорочением тела, питанием и простейшими формами обучения [18, 19], воздействуя на сенсорные, вставочные и мотонейроны, а также на волокна мускулатуры и глиальные клетки, выделительные железы [20].

На уровне клеточной мембраны механизмы воздействия серотонина включают как G-белок-связанные мембранные рецепторы, так и серотонин-зависимые катионные каналы. Первые могут иметь как возбуждающее, так и подавляющее действие и обычно их отклик медленнее развивается и дольше длится, нежели для ионных каналов [21].

Задача общего понимания законов функционирования серотонэргических систем в силу как межвидовых различий, так и высокой сложности нейронных схем, требует комплексного подхода, включающего как наблюдения за поведенческими реакциями, так и построения математических моделей серотонэргических систем [22]. К настоящему времени разработка математического описания действия нейромодуляторов в нейронных ансамблях привлекает все большее внимание и становится одним из эффективных инструментов исследователей [23–25]. При этом неизбежно возникают задачи двух типов.

Первый тип задач предполагает выделение и исследование специфических свойств той или иной системы, и обычно решается посредством разработки и верификации количественной математической модели при непрерывном сопоставлении с экспериментальными данными по моделируемому объекту. Второй тип задач предполагает изучение механизмов, обусловленных направленностью и характером связей в серотонэргической системе и потому общих для рассматриваемого класса. Здесь для построения *функциональных* математических моделей используется по возможности упрощенное описание в виде безразмерных соотношений и типовых нелинейностей. Иллюстрацией такого подхода может служить использование модели нейрона ФитцХью–Нагумо [26, 27], разнообразные вариации и различные конфигурации ансамблей которой используются столь широко [28–33], что она де-факто играет роль парадигмы возбудимой динамики нейрона в самом общем ее представлении.

Однако для адекватного функционального моделирования серотонэргических систем требуется иной кандидат на роль элементарного «кирпичика». Серотонин-генерирующие нейроны обладают рядом специфических особенностей, а именно:

- во многих случаях они ведут себя как пейсмейкеры с крайне низкой (от 0.1 до 5 Гц) частотой генерации импульсов, причем частота эта зависит от степени стимулирования нейрона [34, 35]. Эта спонтанная активность вызвана наличием слабых потенциал-независимых деполяризующих токов ионов натрия и кальция, не участвующих в «обычном» механизме генерации потенциала действия. Пост-гиперполяризация серотонин-генерирующих нейронов определяется Ca^{2+} -зависимым калиевым током и отвечает за относительно длительный период рефрактерности и невысокую частоту генерации 5-НТ нейронов [34];
- серотонин-генерирующие нейроны часто организованы в пары или группы, в пределах которых они связаны электрическими синапсами и могут взаимно подстраивать частоту генерации [36, 37]. Эта частота, в свою очередь, меняется в зависимости от концентрации серотонина в окружающем межклеточном пространстве [38];
- выделившийся в межклеточное пространство серотонин действует локально на синаптические терминалы и мембрану того же нейрона (авторецепторы), но может также диффундировать на значительные расстояния и активировать рецепторы, принадлежащие другим нейронам [39]. Таким образом, частота генерации 5-НТ нейронов управляется как посредством авторецепторов, так и посредством нейронов-соседей (гетерорегуляция) [40];
- в свою очередь, серотонин-генерирующие нейроны обычно функционально связаны с сенсорными и моторными нейронами, управляя уровнем их активности и силой взаимосвязей [38, 41].

Учет вышеперечисленных особенностей на функциональном (упрощенном и безразмерном) уровне позволяет создать вычислительную модель серотонин-генерирующего нейрона, свойства которой воспроизводили бы наиболее существенные особенности биологических прототипов и, в дальнейшем, позволили бы использовать ее для построения вычислительных моделей серотонэргических систем. Именно эта задача и решается в данной работе. В разделе 1 приведено описание уравнений предложенной модели в двух вариантах, воспроизводящих свойства нейрона-резонатора и нейрона-интегратора [42–44], соответственно. В разделе 2 рассмотрены основные особенности как автономной, так и неавтономной (в том числе – индуцированной шумом) динамики предложенной модели, проведено сопоставление с известными экспериментальными фактами. Итоги работы обсуждаются в Заключение.

1. Функциональная модель серотонэргического нейрона

Общий алгоритм функционального моделирования предполагает:

- определение соотношения характерных пространственных и временных масштабов моделируемой системы;
- выделение наиболее важных причинно-следственных связей на базе доступных экспериментальных данных;
- подбор и адаптацию в качестве элементов модели небольшого количества субъединиц, динамика которых хорошо изучена и позволит реализовать вычислительный аналог причинно-следственных связей, определенных в рамках предыдущего пункта.

Полученная таким образом модель не претендует на количественное соответствие исходной биологической системе, так как все переменные безразмерны, а соотношение временных масштабов устанавливается самим исследователем. Однако ее управляющие параметры сохраняют биологическую интерпретацию, а их вариация при численном эксперименте позволяет воспроизводить типичные для живой системы ситуации. Результатом такого исследования должно стать лучшее понимание того, какие механизмы и эффекты отвечают за особенности динамики изучаемого класса моделей.

1.1. Возбудимый элемент: резонаторы и интеграторы. При всей своей специфичности, серотонин-генерирующий нейрон сохраняет определяющие свойства своего класса, а именно, свойства возбудимой системы: в ответ на стимул достаточной (небольшой) интенсивности он порождает потенциал действия – импульс-спайк фиксированной амплитуды. Таким образом, модель серотонин-генерирующего нейрона должна иметь в своей основе возбудимую систему. По деталям механизма генерации потенциала действия как сами биологические нейроны, так и их модели делят на два больших класса: класс I, или нейроны-интеграторы, и класс II, или нейроны-резонаторы [44–46]. Нейроны, у которых малое возмущение состояния равновесия затухает экспоненциально (монотонно), относят к интеграторам. При этом, чем чаще повторяются слабые (подпороговые) импульсы-стимулы, тем быстрее нейрон «накопит» их и сгенерирует ответный импульс. Нейроны, у которых малое возмущение состояния равновесия вызывает отклик в виде затухающих колебаний, называют резонаторами, так как при повторяющейся подпороговой стимуляции они весьма чувствительны к частоте следования импульсов. Для них, в отличие от интеграторов, увеличение частоты стимуляции может затормозить, или даже прекратить генерацию ответного импульса. Представители классов моделей нейронов-интеграторов и нейронов-резонаторов – это модель Мориса–Лекара [47] и модель ФитцХью–Нагумо [26], соответственно. Следует заметить, что изменение как кинетики ионных токов, так и геометрии дендритов может превратить нейрон из резонатора в интегратор и наоборот [43].

В целях учета описанных выше особенностей, возбудимый элемент в составе модели серотонин-генерирующего нейрона имел два различных варианта:

- модель ФитцХью–Нагумо как резонатор

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dx}{dt} &= x - \frac{x^3}{3} - y, \\ \frac{dy}{dt} &= x - I, \end{aligned} \quad (1)$$

где ε отвечает за соотношение характерных времен быстрой переменной x и медленной переменной y , тогда как I представляет совместное действие всех деполяризующих и гиперполяризующих воздействий. При $|I| = 1.0$ единственное состояние равновесия системы (1) претерпевает суперкритическую бифуркацию Андронова–Хопфа.

- Специально разработанная модификация (1) как интегратор

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{dx}{dt} &= x - \frac{x^3}{3} - y, \\ \frac{dy}{dt} &= x + 2.8(y - y^3) - 0.114575 - I.\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь смысл управляющих параметров тот же, что и для (1), однако, при переходе параметра I через (-1.0) происходит рождение (гибель) предельного цикла через седло-узловую бифуркацию, что характерно для нейрона-интегратора. Так же, как и модель ФитцХью–Нагумо, система (2) демонстрирует автоколебания при $I > -1.0$ и возбудимую динамику при $I \lesssim -1.0$.

Так как бифуркационное значение параметра $I = -1.0$ и уравнения для переменной x в (1) и (2) совпадают, в составе модели серотонэргического нейрона они взаимозаменяемы, по крайней мере при $I \approx -1.0$.

1.2. Слабый деполяризующий ток ионов натрия. Степень активации z этого потенциал-независимого тока описывается следующим уравнением:

$$\frac{dz}{dt} = \alpha(x)(1 - z) - \beta(x)z, \quad (3)$$

форма которого соответствует простейшему предположению о структуре отвечающих за него ионных каналов (два состояния: открыт или закрыт) [27]. При этом известным экспериментальным данным (см., например, [34]) неплохо соответствует выбор $\alpha(x) = \alpha_0 = \text{const}$ и $\beta(x) = \beta_0 \Theta(x) - \alpha_0$, где

$$\Theta(x) = 0.5(1 + \tanh(10x)). \quad (4)$$

При таком описании α_0 отвечает за медленное нарастание z , тогда как β_0 отвечает за быстрый сброс z в нулевое значение при генерации импульса возбудимой подсистемой (1) или (2), когда $\Theta(x)$ принимает значения, близкие к единице.

1.3. Баланс серотонина в межклеточном пространстве. Серотонин выбрасывается в межклеточное пространство при повышении внутриклеточной концентрации ионов кальция, что, в свою очередь, происходит в момент генерации нейроном очередного импульса. По этой причине на уровне функциональной модели можно записать

$$\varepsilon_w \frac{du}{dt} = \Theta(x) - du. \quad (5)$$

В этом уравнении переменная u описывает внеклеточную концентрацию серотонина, параметр d характеризует относительную скорость убывания концентрации под действием различных механизмов, таких как обратное всасывание его в нейрон или диффузия за пределы рассматриваемого пространства, а ε_w пропорционален межклеточному объему и обратно пропорционален количеству серотонина, выбрасываемого при каждой генерации импульса нейроном.

1.4. Синапс. Активация s синаптического тока описывается с помощью соотношения

$$\frac{ds}{dt} = \alpha_s(p)(1 - s - \sigma u) - \beta_s s, \quad (6)$$

которое отличается от использованного в [48] наличием слагаемого σu , которое описывает подавляющее действие на синаптическую передачу внеклеточного серотонина. Здесь p представляет сигнал пресинаптического нейрона, скорость активации синапса $\alpha_s(p) = \Theta(p - p^*)/\varepsilon_s$, p^* – значение p в состоянии равновесия. Скорость релаксации синапса $\beta_s = d_s/\varepsilon_s$, где параметр ε_s позволяет менять одновременно скорость активации и релаксации синапса, тогда как d_s позволяет устанавливать скорость релаксации отдельно.

1.5. Серотонин-генерирующий нейрон. Модель серотонин-генерирующего нейрона как единого целого, включает описанные выше компоненты, то есть содержит возбудимую систему, дополненную слабым деполяризующим током и учитывающую изменение внеклеточной концентрации серотонина. Внешнее воздействие на нейрон через синапс также серотонин-зависимое. Соответствующая система уравнений приведена ниже.

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = x - x^3/3 - y, \quad (7)$$

$$\frac{dy}{dt} = x - (I_0 + g_s s + \gamma z - \delta \frac{u}{u + k_u}), \quad (8)$$

$$\frac{dz}{dt} = \alpha_0 - \beta_0 \Theta(x) z, \quad (9)$$

$$\varepsilon_s \frac{ds}{dt} = \Theta(p - p^*)(1 - s - \sigma u) - d_s s, \quad (10)$$

$$\varepsilon_w \frac{du}{dt} = \Theta(x) - du, \quad (11)$$

где I из (1) заменено на $I_{\text{input}} = (I_0 + g_s s + \gamma z - \delta u/(u + k_u))$ и включает дополнительно действие синапса $g_s s$, деполяризующего тока γz , а также слагаемое, описывающее деполяризующий или гиперполяризующий эффект роста внеклеточной концентрации серотонина $\delta u/(u + k_u)$. Дополнительный параметр I_0 введен для установки начального состояния модели.

2. Автономная и неавтономная динамика модели

Как видно из предыдущего раздела, основными отличиями рассматриваемой нами модели от «обычных» моделей нейронов являются наличие слабого деполяризующего тока и дополнительные цепи обратной связи вследствие действия высвобожденного серотонина. В соответствии с этим, ниже рассмотрено, к каким изменениям динамики приводят такие отличия как при автономной генерации импульсов, так и при отклике на внешний стимул.

2.1. Спонтанная активность. Как уже упоминалось, многие серотонин-генерирующие нейроны в отсутствие внешней стимуляции генерируют относительно регулярную последовательность импульсов, разделенных большими (по сравнению с длительностью самого импульса) интервалами времени [35,49]. В нашей модели на качественном уровне такой режим воспроизводится за счет того, что уравнение (9) обеспечивает медленный рост переменной z , что, в свою очередь, изменяет режим возбудимой подсистемы (1) или (2). Соответствующие временные реализации переменных при $I_0 = -1.003$ приведены на рис. 1, б. Как можно видеть, импульс генерируется в тот момент, когда z достигает некоторого порогового значения, при котором $I_{\text{input}} = -1.0$. При генерации импульса возбудимой подсистемой, как только x принимает положительные значения, слагаемое $\beta_0 \Theta(x)z$ в уравнении (9) резко возрастает, и z «разряжается». В этих условиях даже слабое воздействие на переменную z способно значительно изменить интервал времени между импульсами, тогда как флуктуации x в окрестности стационарного значения становятся значимыми лишь при приближении к порогу генерации, определяемому I_0 и текущим значением z . Переменная u , описывающая внеклеточную концентрацию серотонина, успевает релаксировать к нулевому уровню до появления следующего импульса. Таким образом,

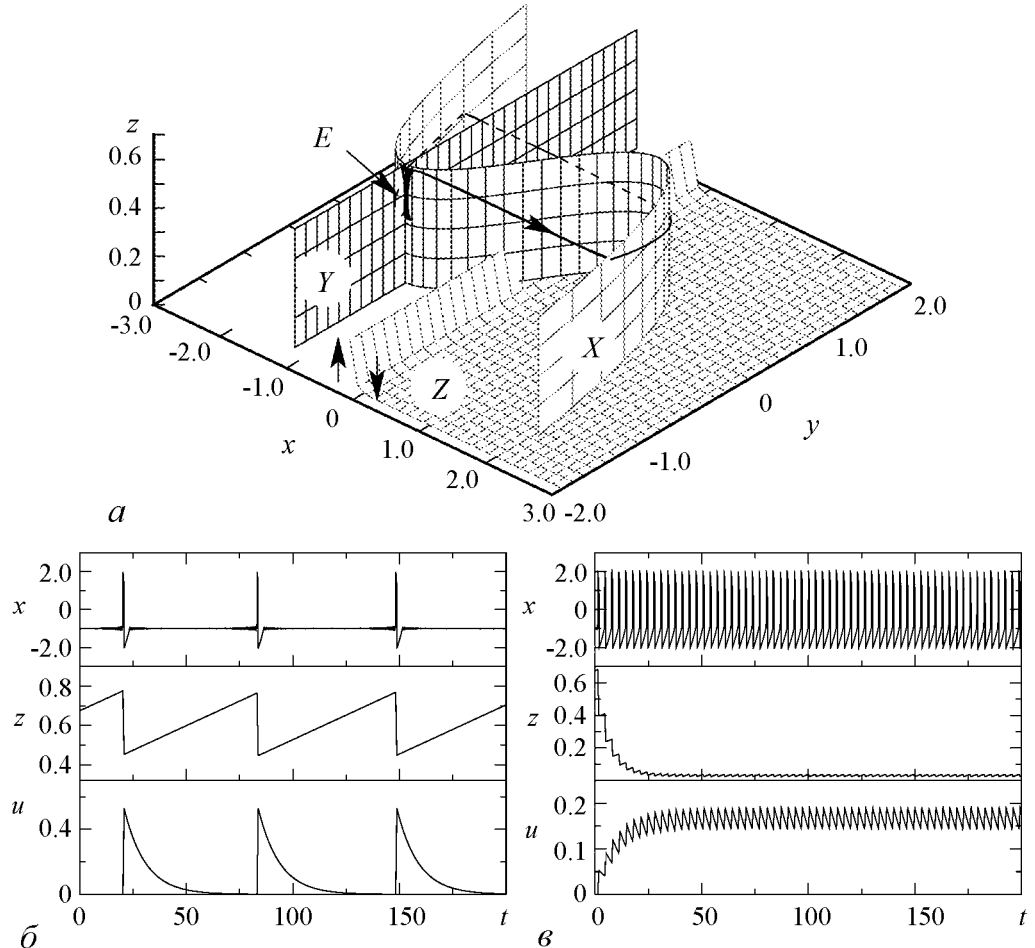


Рис. 1. Поверхности нульклин (а) при $I_0 = -1.003$ и временные реализации переменных модели, иллюстрирующие спонтанную генерацию импульсов моделью при $I_0 = -1.003$ (б) и $I_0 = -0.995$ (в). Значения остальных параметров даны в таблице (набор 1)

Таблица

Значения параметров модели

Параметр	Набор				
	1	2	3	4	4а
ε	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005
ε_w	10.0	10.0	10.0	10.0	15.0
ε_s	5.0	5.0	8.0	8.0	8.0
I_0	-1.003	изм.	-1.005	-1.005	-0.95(8)
g_s	0.0	0.0	0.05	0.0	0.1
γ	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005
δ	0.0	0.0	0.0	-0.032	изм.
k_u	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
α_0	0.005	изм.	0.005	0.01	0.01
β_0	1.0	1.0	2.0	2.0	2.0
d	1.0	1.0	1.05	1.0	1.0
d_s	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
D	0.0	0.0	0.0	0.001	0.0

при данных значениях управляющих параметров поведение модели воспроизводит характерные особенности поведения серотонин-генерирующего нейрона в покое.

Взятые отдельно, оба варианта возбудимой подсистемы, (1) и (2), демонстрируют бифуркационный переход от возбудимого режима к спонтанной генерации при росте I_0 до значения $I_0 = -1.0$. В рассматриваемой модели (7)–(11) такой бифуркационный переход отсутствует, система демонстрирует автоколебания при сколь угодно отрицательных значениях I_0 . Однако при переходе через эту точку частота генерации импульсов резко возрастает. На рис. 1, в приведены временные реализации переменных модели при $I_0 = -0.995$. как можно видеть, переменная z в этом режиме имеет постоянно низкий уровень, в то время как переменная u , напротив, имеет постоянную составляющую $z \approx 0.15$. Такое поведение модели воспроизводит режим высокой активности нейрона, при котором рост внеклеточной концентрации серотонина делает значимым его модулирующее влияние на этот и соседние нейроны.

Рассмотренные выше два режима функционирования модели формально отличаются лишь частотой генерации импульсов. Однако соответствующие им предельные циклы в фазовом пространстве модели имеют различия. Поскольку для описанных выше режимов $g_s = \delta = 0$, то динамика уравнений (10) и (11) не влияет на поведение системы в целом. Это позволяет ограничиться анализом того, что происходит в трехмерном фазовом подпространстве, образованном переменными x , y и z . На рис. 1, а приведены поверхности нульклин для этих переменных (они отвечают условиям $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$ и $\dot{z} = 0$, соответственно) и типичная фазовая траектория при $I_0 = -1.003$, $C_z = 0.005$, $\alpha = 0.005$ и $\beta = 1.0$. Возбудимая подсистема имела вид (1). Как можно видеть, в плоскости (x, y) взаиморасположение нульклин соответствует тому, что имеет место для модели ФитцХью–Нагумо. В зависимости от уровня z , точка пересечения поверхностей линейной и кубической нульклин смещается. Следует также отметить, что состояние равновесия системы, соответствующее пересечению всех трех поверхностей, находится много выше изображенной области и непосредственного влияния на динамику не оказывает. Z -нульклина, поверхность которой показана лишь частично, делит траекторию предельного цикла на части,

где траектория медленно дрейфует вверх (для всех $x < 0$), либо быстро идет вниз (при $x > 0$). Траектория предельного цикла, изображенная на рисунке, может быть разделена на две основные части, первая из которых соответствует генерации спайка в плоскости (x, y) , а вторая описывает медленный дрейф изображающей точки вдоль линии E пересечения x - и y -нульклин. Очевидно, верхнее окончание сегмента E соответствует ситуации, когда указанное пересечение происходит на минимуме кубической параболы.

Теперь можно проанализировать различие в режимах рис. 1, б и в. В первом случае сегмент E присутствует, и время движения по нему в основном и формирует период предельного цикла. Во втором случае взаиморасположение x - и y -нульклин таково, что сегмента E нет, и траектория предельного цикла аналогична таковой для двумерной модели ФитцХью–Нагумо.

При интерпретации всего описанного выше с точки зрения нейродинамики представляет интерес, как меняется частота генерации (то есть степень активности нейрона) в зависимости от величины параметра I_0 , который отображает суммарный эффект различных внешних влияний. На рис. 2 показаны семейства таких зависимостей для двух случаев – когда возбудимая подсистема модели соответствовала нейрону-резонатору (1) и нейрону-интегратору (2). Кривые 1–5 соответствуют различной скорости роста переменной z , то есть различному выбору параметра α_0 . Хорошо видно, что наиболее значительное изменение частоты приурочено к области $I_0 \approx -1.0$ и тем более выражено, чем меньше α_0 . Сопоставление кривых для случаев нейрона-резонатора и нейрона-интегратора показывает, что при общем подобии (рост активности при достижении $I_0 \approx -1.0$) имеется существенная разница, обусловленная различием свойств самих моделей. А именно, для нейрона-резонатора переход между состояниями низкого и высокого уровня активности носит переключательный характер, тем более выраженный, чем меньше α_0 . Максимальная частота, а значит, и максимальный выброс серотонина, практически не зависят от силы сти-

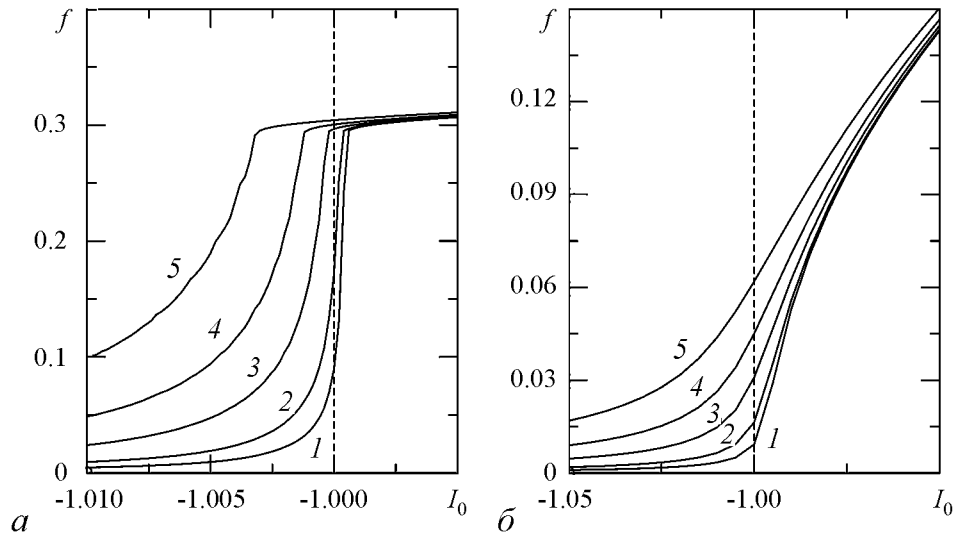


Рис. 2. Зависимость частоты f генерации импульсов от I_0 при различных значениях α_0 . Панели соответствуют различному типу возбудимой подсистемы: a – резонатору (1); b – интегратору (2). Номера кривых 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют $\alpha_0 = 0.005, 0.01, 0.025, 0.05$ и 0.1 . Вертикальным пунктиром отмечено бифуркационное значение $I_0 = -1.0$ в случае $\gamma = 0$ и $\delta = 0$. Значения остальных параметров приведены в таблице (набор 2)

муляции, если она превышает некоторый порог. Для нейрона-интегратора, напротив, реакция на изменение силы стимула гораздо более выражена при высокой активности, когда наклон кривых существенно больше.

Подытоживая описание особенностей автономной динамики исследуемой модели, можно заключить, что она успешно воспроизводит два основных типа состояния (низкой и высокой активности) серотонин-генерирующего нейрона, при которых выброс серотонина либо пренебрежимо мал, либо значителен, соответственно. Характер перехода между этими состояниями зависит от того, какой тип возбудимой системы (интегратор или резонатор) использован в модели, что, в свою очередь, должно обосновываться применительно к конкретному объекту моделирования и представляет собой отдельную задачу, выходящую за рамки данной работы.

2.2. Отклик на стимул в виде пачки импульсов. Как было показано выше, в режиме низкой активности модель серотонин-генерирующего нейрона генерирует импульсы-спайки с большими временными интервалами между ними. На протяжении этих межспайковых интервалов модельная система, как и живой нейрон, демонстрирует возбудимые свойства, откликаясь на внешнюю стимуляцию посредством генерации одного или пачки спайков. При этом наличие слабого деполяризирующего тока, активацию которого описывает уравнение для переменной z , существенно влияет на характеристики отклика. На рис. 3 показан пример: на модель в режиме низкой активности ($I_0 = -1.005$) в интервале времени $t \in [50; 150]$ действует внешний сигнал в виде пачки импульсов (не показано), которые активируют рост переменной s , описывающей синапс. В ответ на такую стимуляцию модель также генерирует пачку импульсов, но ее структура существенно отличается от вида стимула. А именно, сначала наблюдается отклик в виде двух импульсов, затем – интервал «молчания», и лишь потом генерируется непрерывная последовательность импульсов.

Механизм наблюдаемого эффекта обусловлен несколькими факторами. Во-первых, переменная s , транслирующая внешний стимул, нарастает относительно медленно, что отражает интегрирующие свойства синапса. Во-вторых, постоянный прирост переменной z (нижняя панель рис. 3) уменьшает текущий порог срабатывания возбудимой подсистемы. В-третьих, генерация единичного импульса вызывает неполный (не до нуля) сброс переменной z .

В итоге для показанной на рисунке ситуации, при появлении стимула на входе и начале роста s , переменная z имеет достаточно большое значение, порог возбуждения низок, и первый импульс генерируется при неполной активации синапса ($s = 0.05$). В результате этого события z резко падает до $z = 0.35$, порог возбуждения нарастает, но рост s компенсирует это, что приводит к генерации второго импульса. При этом z падает до 0.12, в то время как

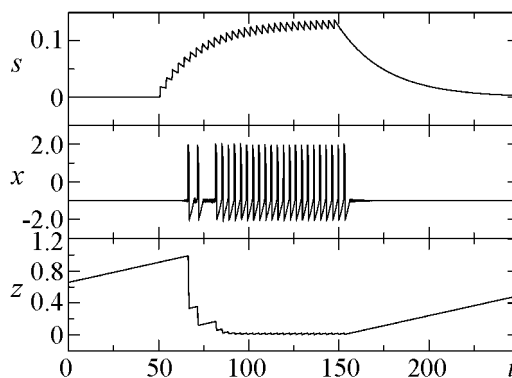


Рис. 3. Пример отклика модели на внешний стимул в виде последовательности импульсов. Приведены временные реализации для синаптической переменной s , быстрой переменной возбудимой системы x (аналог трансмембранного потенциала нейрона) и переменной z (аналог медленной активации деполяризирующего тока). Набор управляющих параметров приведен в таблице (набор 3)

рост s замедляется. По этой причине и возникает интервал «молчания». Когда же s возрастает до $s > 0.1$, переменная z уже не играет определяющей роли и генерируется непрерывная пачка импульсов до окончания действия стимула.

Как следует из приведенного выше описания, конкретная последовательность событий существенно зависит от того, какое значение имеет z в момент прихода внешнего стимула. Чем оно больше, тем быстрее будет сгенерирован первый импульс отклика, но тем вероятнее последующий интервал «молчания» перед формированием непрерывной пачки импульсов отклика нейрона. Напротив, при приходе стимула сразу после или же в момент спонтанной генерации очередного импульса, когда порог возбуждения максимален, время реакции (от появления стимула до первого ответного импульса) будет максимально, но пачка ответных импульсов будет без разрывов. Таким образом, сам вид отклика модели серотонин-генерирующего нейрона на внешний стимул в виде последовательности импульсов зависит от фазы ее внутреннего ритма. Подобные свойства в более простой форме наблюдаются у нейронов с подпороговыми колебаниями [50].

2.3. Отклик на стимул в виде флуктуаций приложенного тока. Анализ поведения модели нейрона в присутствии флуктуаций не менее важен, чем изучение детерминированной динамики. Наличие шума в уравнениях имитирует как разнообразные флуктуации окружения, так и нерегулярный характер интегрального воздействия со стороны других нейронов. С точки зрения теории колебаний, модель серотонин-генерирующего нейрона представляет собой автоколебательную систему. Основным результатом действия флуктуаций в этом случае является уширение пика в спектре мощности и в распределении межспайковых интервалов [51].

Однако данная модель обладает и свойствами возбудимой системы, поведение которых под действием флуктуаций интенсивно изучалось в последние 15 лет, прежде всего, в контексте эффекта когерентного резонанса [52, 53]. Как было показано, генерация импульсов такой системой может быть как случайной (что ожидаемо), так и, при некоторой оптимальной интенсивности шума, весьма упорядоченной.

Для изучения поведения модели (7)–(11) в уравнения был добавлен белый гауссов шум $\varepsilon(t)$ с нулевым средним и амплитудой D как флуктуирующая часть параметра I_0 . На рис. 4 приведено распределение межспайковых интервалов (ISI) как в детерминированном режиме ($D = 0$), так и при действии шума небольшой

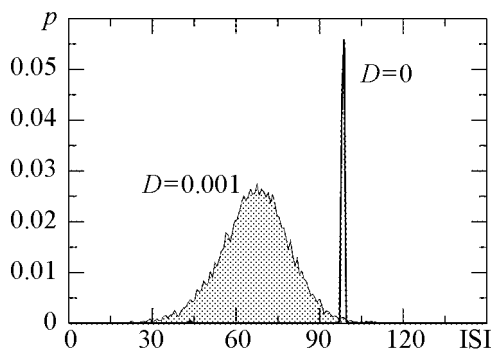


Рис. 4. Распределение межспайковых интервалов (ISI) для модели серотонин-генерирующего нейрона в автономном режиме ($D = 0$) и при воздействии флуктуаций в виде гауссова белого шума ($D = 0.001$). Значения остальных управляющих параметров приведены в таблице (набор 4)

интенсивности ($D = 0.001$). Как можно видеть, в первом случае распределение состоит из единственного узкого пика на $ISI = 98.12$, что соответствует периоду, задаваемому скоростью роста переменной z . Наличие шума существенно меняет вид распределения: основной пик существенно расширяется и значительно смещается влево. Кроме того, в распределении появляется еще один пик на $ISI = 3.2$. Наблюдаемая реакция на шум не соответствует ожидаемой ни для автоколебательных, ни для возбудимых систем. А именно, в первом случае ожидаемо расширение максимума распреде-

ления, мы же, помимо этого, имеем его значительный сдвиг по частоте. Для возбудимых систем характерно формирование «хвоста» распределения в области больших ISI, что также не наблюдается. Полученные результаты могут быть интерпретированы следующим образом. Слабый шум способен вызвать генерацию импульса тогда, когда порог возбуждения низок, то есть при больших значениях z . В результате импульс генерируется (в среднем) раньше (при меньшем значении z), чем это произошло бы в отсутствие шума. После генерации импульса порог возбуждения вновь высокий, и шум практически не оказывает действия на систему. Таким образом, шум уменьшает межспайковые интервалы, что и наблюдается на рис. 4 как сдвиг основного максимума распределения влево.

Появление нового пика на небольших значениях ISI обусловлено генерацией нескольких спайков подряд, когда генерация первого импульса недостаточно «сбрасывает» значение z . Это время обусловлено лишь скоростью срабатывания возбудимой подсистемы и потому пик узкий, и ему соответствует значение ISI, примерно равное сумме длительности импульса и периода рефрактерности возбудимой подсистемы.

Таким образом, изучаемая модель серотонин-генерирующего нейрона демонстрирует специфические свойства при активации шумовым сигналом, что, несомненно, найдет свое отражение и в поведении ансамблей таких нейронов.

2.4. Авторегуляция частоты спонтанной активности. В типичном случае выброс серотонина в межклеточное пространство активирует 5-HT_{1A} авторецепторы, тем самым ограничивая (подавляя) активность самого серотонин-генерирующего нейрона [11]. Однако недавно идентифицированные серотонин-чувствительные хлорные каналы, напротив, вызывают деполяризацию мембраны и потому усиливают активность нейрона [54,55]. С точки зрения функциональной модели, эти взаимосвязи могут классифицироваться, во-первых, по характеру действия (подавление либо возбуждение) и, во-вторых, по типичному времени задержки реакции.

В рамках такой классификации 5-HT_{1A} авторецепторы порождают медленную (с большим временем реакции) отрицательную обратную связь, тогда как серотонин-чувствительные хлорные каналы – быструю положительную. В рамки такой классификации так или иначе укладывается и действие остальных типов рецепторов к серотонину, далеко не полностью изученных к настоящему времени.

Наличие упомянутых выше путей авторегуляции может существенно влиять на режим активности нейрона. В модели (7)–(11) они представлены слагаемым $\delta u / (u + k_u)$ в уравнении (8). Здесь положительное либо отрицательное значение δ соответствует гиперполяризующему или деполяризующему действию серотонина, соответственно. Параметр ε_w отвечает за время реакции возникающей петли обратной связи, что определяется как временем активации самого рецептора, так и скоростью нарастания внеклеточной концентрации серотонина, что, в свою очередь, зависит от удельного объема межклеточного пространства. В условиях относительно малого объема межклеточного пространства, малые значения ε_w соответствуют активации серотонин-чувствительных хлорных каналов, тогда как большие значения ε_w описывают действие авторецепторов на G-белках. Ниже анализируются режимы модели (7)–(11) при различных комбинациях значений ε_w и δ .

Авто-деполяризация и индуцированный шумом берстинг. Возникающая при $\delta < 0$ положительная обратная связь ускоряет отклик нейрона на внешние воздействия. Однако этот же механизм может привести к фиксации режима модели (7)–(11)

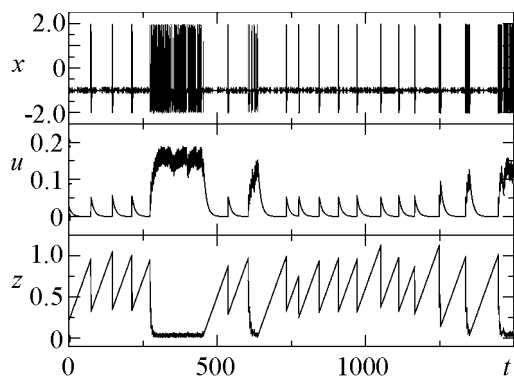


Рис. 5. Индуцированная шумом активность нейрона преобразуется в спайк-берст режим при действии серотонин-опосредованной обратной связи ($\delta = -0.03$, $D = 0.01$). Остальные значения управляющих параметров даны в таблице (набор 4а)

в состоянии непрерывного и самоподдерживающегося выброса серотонина, что не соответствует физиологической норме и потому не представляет особого интереса для анализа. Однако, когда стимулирующий сигнал имеет случайный (нерегулярный) характер, данный механизм порождает специфический режим отклика модели. Рис. 5 показывает типичную временную реализацию при воздействии шума с амплитудой $D = 0.01$ при $\delta = -0.03$, что соответствует слабому деполяризующему действию выделившегося серотонина. Возникающая при этом положительная обратная связь недостаточна для возникновения самоподдерживающейся активности. Как можно видеть, временная реализация демонстрирует два типа поведения: это генерация отдельных, относительно регулярно следующих спайков, что было описано выше (см. рис. 4), либо их пачки различной длительности, во время которых переменная z принимает значения, близкие к нулю, в то время как u , напротив, имеет высокий уровень. Пачечная активность (берстинг) возникает, если вследствие действия шума новый импульс появляется тогда, когда u еще не релаксировала к начальному значению. При этом последующий скачок значения u становится выше, чем предыдущий, что, в свою очередь, понижает порог возбуждения нейрона и так далее. В результате шум индуцирует непрерывную генерацию до тех пор, пока новые импульсы возбудимой подсистемы возникают в то время, когда деполяризация еще не затухла. При этом среднее значение u достигает уровня $u = 0.15$. Если, в силу случайного характера воздействующего сигнала, это произойдет, то генерация прекратится и модель нейрона вернется в режим одиночной генерации импульсов.

Гиперполяризующее действие серотонина. Эта ситуация соответствует отрицательной обратной связи и в условиях постоянно действующего стимула и достаточно большой задержки также порождает пачечную активность (берстинг). Основным же физиологическим смыслом является авторегуляция частоты генерации импульсов с целью ограничения интенсивности генерации серотонина. На рис. 6 приведены графики зависимости частоты генерации f_r от параметра δ (по горизонтальной оси) и для различных значений ε_w (семейство кривых) для нейрона-интегратора (а) и нейрона-резонатора (б). В первом случае наблюдается практически монотонное убывание f_r при росте δ . При малом $\varepsilon_w = 0.1$ (малое время реакции петли обратной связи) f_r практически не зависит от δ . Это можно объяснить тем, что гиперполяризующий эффект, вызванный всплеском u , быстро затухает и не оказывает влияния на генерацию следующего спайка. По мере роста ε_w переменная u затухает медленнее, что отражается на изменении f_r , причем на ее значение примерно в равной степени влияют оба параметра. Наконец, в случае больших ε_w временная зависимость u становится столь сглаженной, что конкретное значение ε_w уже не играет роли. Как можно видеть, кривые для $\varepsilon_w = 5.0$ и $\varepsilon_w = 20.0$ практически совпадают.

Нейрон-резонатор демонстрирует куда более сложное поведение. Как можно видеть на рис. 6, б, для малых δ частота генерации f_r также почти постоянна, однако

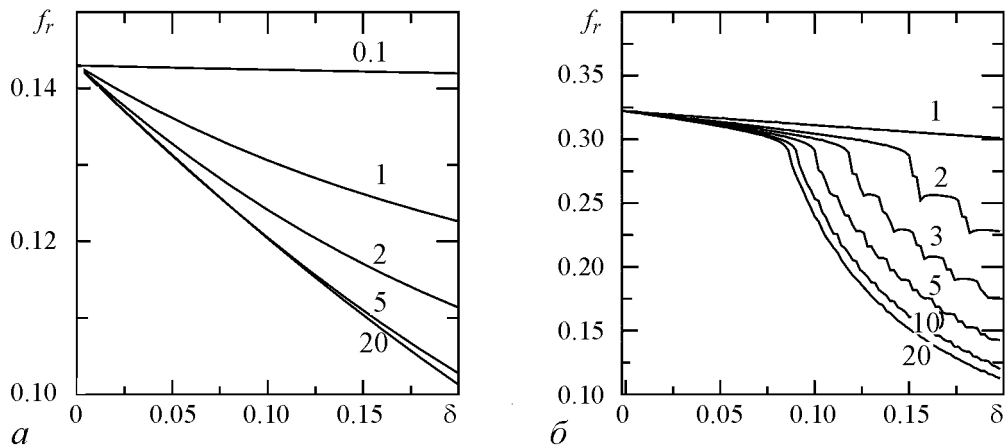


Рис. 6. Авторегуляция частоты генерации модели посредством серотонин-опосредованной отрицательной обратной связи для различных значений ε_w (указано около каждой кривой) в зависимости от δ . Панели (а) и (б) соответствуют случаям нейрона интегратора и резонатора, соответственно. Остальные значения управляющих параметров даны в таблице (набор 4)

по мере того, как δ превышает некий предел, график для f_r содержит скачки и «пюльчки», характерный размер которых зависит от ε_w , уменьшаясь с увеличением ε_w . Сопоставив диапазон значений f_r , можно убедиться, что наблюдаемые особенности возникают, когда отрицательная обратная связь приводит систему в область резкого изменения частоты, когда $I_0 - \delta u / (u + k_u) \approx -1.0$ (см. рис. 2). В этой области возбудимая подсистема модели серотонин-генерирующего нейрона находится на пороге генерации и весьма чувствительна к частоте внешнего воздействия [42], а также, в нашем случае, и к задержке в цепи обратной связи в сравнении с квазипериодом затухающих собственных колебаний.

Заключение

В данной работе было предложено модельное описание серотонин-генерирующего нейрона. Такие нейроны обладают рядом специфических особенностей, во многих случаях они ведут себя как пейсмейкеры с крайне низкой частотой генерации импульсов. Эта спонтанная активность вызвана наличием дополнительных ионных токов, не участвующих в «обычном» механизме генерации нейронного импульса-спайка. Частота генерации таких нейронов, в свою очередь, меняется в зависимости от концентрации серотонина, который выделяется ими в межклеточное пространство и может действовать на синаптические терминалы и мембрану того же нейрона.

Вышеупомянутые особенности были учтены в рамках функциональной (безразмерной и упрощенной, но сохраняющей структуру причинно-следственных связей) математической модели. Как было показано, динамика такой расширенной модели нейрона заметно отличается от поведения традиционных моделей. В частности, для нее характерно совмещение свойств автоколебательной и возбудимой системы при одних и тех же значениях параметров. Зависимость частоты генерации импульсов от величины приложенного тока имеет специфическую форму, что обусловлено механизмом медленного автосмещения порога возбуждения. Этот же механизм определяет и специфику отклика модели нейрона на внешние стимулы.

Так, при стимуляции синапса пачкой регулярно следующих импульсов, в ответ генерируется сильно неоднородная, неэквидистантная их последовательность (см. рис. 3), конкретный вид которой к тому же зависит от времени начала стимуляции. При наличии флуктуирующей составляющей приложенного тока, максимум распределения межспайковых интервалов не только расширяется (что ожидаемо), но и существенно смещается в область меньших значений, при этом рождается новый узкий пик распределения (см. рис. 4).

Обратная связь, обусловленная действием серотонина, также придает динамике такого нейрона специфические черты. В частности, имеет место так называемая авто-деполяризация, при которой чувствительность нейрона к действию внешних стимулов усиливается при его активности. Такой положительной обратной связи противостоит отрицательная, которая в биологических нейронах опосредована другими типами рецепторов и обеспечивает ограничение активности (см. рис. 6).

Будучи небезынтересными сами по себе, перечисленные выше особенности динамики одиночного серотонин-генерирующего нейрона весьма важны для реализации следующего этапа работ в данном направлении, а именно построения и исследования моделей малых серотонэргических ансамблей. Так, например, известны экспериментальные данные по динамике парных Retzius-нейронов сегментарного ганглия медицинской пиявки, активность которых должна быть как скоординирована (действия сегмента как целого), так и индивидуальна (различия в работе правой и левой части сегмента). Исследование динамических режимов моделей, воспроизводящих структурные связи этого и подобных объектов, может стать полезным дополнением работ биологов.

Авторы благодарят А. Браже и Н. Браже (биологический факультет МГУ), а также prof. E. Mosekilde (Датский технический университет) за полезные обсуждения и проявленный интерес к задаче.

Данная работа была частично поддержана грантом РФФИ 09-02-01049а.

Библиографический список

1. *Kravitz E.A.* Serotonin and aggression: Insights gained from a lobster model system and speculations on the role of amine neurons in a complex behavior // *J. Comp. Physiol. A.* 2000. Vol. 186. P. 221.
2. *Lesch K.P. and Merschedorf U.* Impulsivity, aggression, and serotonin: A molecular psychobiological perspective // *Behav. Sci. Law.* 2000. Vol. 18. P. 581.
3. *Sakurai A. and Katz P.S.* Spike timing-dependent serotonergic neuromodulation of synaptic strength intrinsic to a central pattern generator circuit // *J. Neurosci.* 2003. Vol. 23. 10745.
4. *Satterlie R.A. and Norekian T.P.* Modulation of swimming speed in the pteropod mollusc, *Clione limacina*: Role of a compartmental serotonergic system // *Invert. Neurosci.* 1996. Vol. 2. P. 157.
5. *Nusbaum M.P., Friesen W.O., Kristian W.B. Jr., and Pierce R.A.* Neural mechanisms generating the leech swimming rhythm // *J. Comp. Physiol. A.* 1987. Vol. 161. P. 355.
6. *Ursin R.* Serotonin and sleep // *Sleep Med. Rev.* 2002. Vol. 6. P. 55.

7. *Hull E.M., Lorrain D.S., Du J., Matuszewich L., Lumley L.A., Putnam S.K., and Moses J.* Hormone-neurotransmitter interactions in the control of sexual behavior // *Behav. Brain Res.* 1999. Vol. 105. P. 105.
8. *Graeff F.G., Guimaraes F.S., De Andrade T.G., and Deakin J.F.* Role of 5-HT in stress, anxiety, and depression // *Pharmacol. Biochem. Behav.* 1996. Vol. 54. P. 129.
9. *Jobe P.C., Dailey J.W., and Wernicke J.F.* A noradrenergic and serotonergic hypothesis of the linkage between epilepsy and affective disorders // *Crit Rev. Neurobiol.* 1999. Vol. 13. P. 317.
10. *Whitaker-Azmitia P.M. and Peroutka S.J.* The neuropharmacology of serotonin. New York: Academic Sciences, 1990.
11. *Pinžyro G. and Blier P.* Autoregulation of serotonin neurons: Role in antidepressant drug action // *Pharmacol. Rev.* 1999. Vol. 51, P. 533.
12. *Stahl S.M., Grady M.M., and Briley M.* SNRIs: their pharmacology, clinical efficacy, and tolerability in comparison with other classes of antidepressants // *CNS Spectr.* 2005. Vol. 10. P. 732.
13. *Johnson K.W., Phebus L.A., and Cohen M.L.* Serotonin in migraine: theories, animal models and emerging therapies // *Prog. Drug Res.* 1998. Vol. 51. P. 219.
14. *Anderson I.M.* Selective serotonin reuptake inhibitors versus tricyclic antidepressants: a meta-analysis of efficacy and tolerability // *J. Affect. Disord.* 2000. Vol. 58. P. 19.
15. *Kish S.J., Furukawa Y., Ang L., Vorce S.P. and Kalasinsky K.S.* Striatal serotonin is depleted in brain of a human MDMA (Ecstasy) user // *Neurology.* 2000. Vol. 55. P. 294.
16. *Hornung J.P.* The human raphe nuclei and the serotonergic system // *J. Chem. Neuroanat.* 2003. Vol. 26. P. 331.
17. *Schwartz J.H. and Shkolnik L.J.* The giant serotonergic neuron of *Aplysia*: A multi-targeted nerve cell // *J. Neurosci.* 1981. Vol. 1. P. 606.
18. *Kristian M.B. and Nusbaum M.P. Jr.* The dual role of serotonin in leech swimming // *J. Physiol.* 1983. Vol. 78. P. 743.
19. *Sahley C.L.* What we have learned from the study of learning of the leech // *J. Neurobiol.* 1995. Vol. 27. P. 434.
20. *Kristian W.B.Jr., Calabrese R., Friesen W.O.* Neuronal control of leech behavior // *Prog. in Neurobiol.* 2005. Vol. 76. P. 279.
21. *Roth B.L.* The Serotonin receptors: From molecular pharmacology to human therapeutics. Humana Press, 2006.
22. *Marder E., Calabrese R.L.* Principles of rhythmic motor pattern generation // *Physiol. Rev.* 1996. Vol. 763. P. 687.
23. Special issue on computational models of neuromodulation // *Neural Networks.* 2002. Vol. 15.
24. *Baxter D.A., Canavier C.C., Clark J.W. Jr., and Byrne J.H.* Computational model of the serotonergic modulation of sensory neurons in *Aplysia* // *J. of Neurophysiol.* 1999. Vol. 82. P. 2914.
25. *Fellous J.-M. and Linster Ch.* Computational models of neuromodulation // *Neural computation.* 1998. Vol. 10. P. 771.

26. *FitzHugh R.A.* Impulses and physiological states in theoretical models of nerve // *Biophys. J.* 1961. Vol. 1. P. 445.
27. *Keener J., and Sneyd J.* *Mathematical Physiology.* New York: Springer, 1998.
28. *Lindner B., Garcia-Ojalvo J., Neiman A. and Schimansky-Geier L.* Effects of noise in excitable systems // *Phys. Rep.* 2004. Vol. 392. P. 321.
29. *Касаткин Д.В.* Эффекты фазовой переустановки в ансамблях взаимодействующих нейронов ФитцХью–Нагумо // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика.* 2009. Т. 17, № 1. С. 79.
30. *Некоркин В.И., Артюхин Д.В.* Регулярные и хаотические колебания в системе двух взаимосвязанных, динамически различных элементов ФитцХью–Нагумо // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика.* 2001. Т. 9, № 6. С. 45.
31. *Acebron J.A., Bulsara A.R., Rappel W.J.* Динамика глобально связанных нейронных элементов ФитцХью–Нагумо в присутствии шума // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика.* 2003. Т. 11, № 3. С. 110.
32. *Крюков А.К., Осипов Г.В., Половинкин А.В.* Мультистабильность синхронных режимов в ансамблях неидентичных осцилляторов: цепочка и решетка связанных элементов // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика.* 2009. Т. 17, № 2. С. 29.
33. *Binczak S., Jacquir S., Bilbault J.-M., Kazantsev V.B. and Nekorkin V.I.* Experimental study of electrical FitzHugh–Nagumo neurons with modified excitability // *Neural Networks.* 2006. Vol. 19, № 5. P. 684.
34. *Aghajanian G.K. and Vandermaelen C.P.* Intracellular recordings from serotonergic dorsal raphe neurons: Pacemaker potentials and the effect of LSD // *Brain Res.* 1982. Vol. 238. P. 463.
35. *Mnie-Filalia O., El Mansaria M., Espana A., Sánchez C., and Haddjeri N.* Allosteric modulation of the effects of the 5-HT reuptake inhibitor escitalopram on the rat hippocampal synaptic plasticity // *Neuroscience letters.* 2006. Vol. 395. P. 23.
36. *Wang R.Y. and Aghajanian G.K.* Correlative firing patterns of serotonergic neurons in rat dorsal raphe nucleus // *J. Neurosci.* 1982. Vol. 2. P. 11.
37. *Berry M.S. and Pentreath V.W.* Properties of a symmetric pair of serotonin-containing neurons in the cerebral ganglia of *planorbis* // *J. Exp. Biol.* 1976. Vol. 65. P. 361.
38. *Moss B.L., Fuller A.D., Sahley C.L., and Burrell B.D.* Serotonin modulates axo-axonal coupling between neurons critical for learning in the leech // *J. Neurophysiol.* 2005. Vol. 94. 2575-25-89.
39. *De Miguel F.E. and Trueta C.* Synaptic and extrasynaptic secretion of serotonin // *Cell. Mol. Neurobiol.* 2005. Vol. 25. P. 297.
40. *Norekian T.P. and Satterlie R.A.* Serotonergic neural system not only activates swimming but also inhibits competing neural centers in a pteropod mollusc // *Amer. Zool.* 2001. Vol. 41. P. 993.
41. *Zhang H., Wainwright M., Byrne J.H., and Cleary L.J.* Quantitation of contacts among sensory, motor, and serotonergic neurons in the pedal ganglion of *Aplysia* // *Learning and Memory.* 2003. Vol. 10. P. 387.
42. *Izhikevich E.M.* Resonate-and-fire neurons // *Neural Networks J.* 2001. Vol. 14. P. 883.

43. *Izhikevich E.M.* Dynamical systems in Neuroscience: The geometry of excitability and bursting. MIT Press, 2007.
44. *Rinzel J. and Ermentrout G.B.* Analysis of neural excitability and oscillations // Methods in Neuronal Modeling / Eds C. Koch, I. Segel. Cambridge: MIT Press, 1989.
45. *Hodgkin A.L.* The local electric changes associated with repetitive action in a non-medulated axon // J. Physiol. 1948. Vol. 107. P. 165.
46. *Izhikevich E.M.* Neural Excitability, Spiking, and Bursting // Int. J. Bifur. Chaos. 2000. Vol. 10. P. 1171.
47. *Morris C. and Lecar H.* Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fibre // Biophys. J. 1981. Vol. 35. P. 193.
48. *Kopell N., Ermentrout G.B., Whittington M.A., and Traub R.D.* Gamma rhythms and beta rhythms have different synchronization properties // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 2000. Vol. 97. P. 1867.
49. *Hamon M., Gerschenfeld H.M., and Paupardin-Tritsch D.* Release of endogenous serotonin from two identified serotonin-containing neurones and the physiological role of serotonin re-uptake // J. Physiol. 1978. Vol. 274. P. 265.
50. *Казанцев В.Б., Некоркин В.И., Велардэ М.Г.* Модель нейрона с осцилляторной активностью ниже порога возбуждения // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. 1998. Т. 41, № 12. С. 1623.
51. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е.* Регулярные и хаотические автоколебания. Синхронизация и влияние флуктуаций. Учебник-монография. М.: Изд-во «Интеллект», 2009. 312 с.
52. *Pikovsky A. and Kurths J.* Coherence resonance in a noise-driven excitable systems // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 775.
53. *Han S.K., Yim T.G., Postnov D.E. and Sosnovtseva O.V.* Interacting coherence resonance oscillators // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 83. P. 1771.
54. *Ranganathan R., Cannon S.C., and Horvitz H.R.* MOD-1 is a serotonin-gated chloride channel that modulates locomotory behaviour in *C. elegans* // Nature. 2000. Vol. 408. P. 470.
55. *Ali D.W., Catarsi S., and Drapeau P.* Ionotropic and metabotropic activation of a neuronal chloride channel by serotonin and dopamine in the leech *Hirudo medicinalis* // J. Physiol. 1998. Vol. 509. P. 211.

*Саратовский госуниверситет
Университет Копенгагена, Дания*

Поступила в редакцию 9.12.2010

AUTONOMOUS AND NONAUTONOMOUS DYNAMICS OF FUNCTIONAL MODEL OF SEROTONERGIC NEURON

D.D. Postnov, O.V. Sosnovtseva, D.E. Postnov

Serotonin is a key modulator of neuronal activity both at the system level and at the level of local (short-range) interactions. However, in contrast to the synaptically connected neuron ensembles, there are much less qualitative models that describe the

serotonin-controlled neural circuits. In this paper, we propose a relatively simple model of serotonergic (serotonin-releasing and serotonin-sensitive) neuron. It is shown that specific features of both autonomous and nonautonomous dynamics of such model are considerably dependent on a weak depolarizing voltage-independent current of neuron and on the presence of serotonin auto-receptors. Our work is aimed on development of «computational image» for basic serotonin-controlled neural circuits, which role for basic neuronal features plays the famous FitzHugh–Nagumo model.

Keywords: Serotonergic neuron, functional model, weak depolarizing current, bursting pattern.



Постнов Дмитрий Дмитриевич – родился в Саратове (1990), студент физического факультета Саратовского государственного университета. Занимается научной работой в области применения нелинейной динамики живых систем. Имеет 5 публикаций.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского
E-mail: postnovdima@gmail.com



Сосновцева Ольга Владимировна – родилась в Архангельской области (1966), окончила Саратовский государственный университет. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук на тему «Структура и свойства аттракторов в неавтономных и связанных динамических системах» (1996). С 1996 года по настоящее время работает в Дании, профессор университета г. Копенгаген. Опубликовала более 60 статей в областях физики и биофизики.

DK-2200 Copenhagen, Blegdamsvej 3
Panum Institute, DENMARK
E-mail: olgavita7@gmail.com



Постнов Дмитрий Энгелевич – родился в Саратове (1961), профессор кафедры оптики и биофотоники физического факультета Саратовского государственного университета. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук на тему «Регулярные и хаотические процессы в системах взаимодействующих нелинейных осцилляторов» (1990) и докторскую диссертацию на тему «Механизмы синхронизации непериодических колебательных процессов в системах взаимодействующих осцилляторов в режимах мультистабильности» (2000). Опубликовал более 70 научных статей в областях радиофизики и нелинейной динамики живых систем.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского
E-mail: postnov@info.sgu.ru



УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО КРИТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ В МОДЕЛИ ОБРАЗОВАНИЯ КЛАСТЕРОВ

А.Б. Шаповал

Рассмотрен самоорганизующийся критический процесс кластеризации. Доказана устойчивость равновесного состояния для бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, аппроксимирующей этот процесс.

Ключевые слова: Самоорганизованная критичность, кластеризация, равновесие, устойчивость.

Введение

Неравновесные стационарные состояния, без сомнения, принадлежат к числу наиболее сложных природных явлений. Существенный вклад как в формулировку проблемы, так и в её решение внесла широко известная теория однородной турбулентности, предложенная Колмогоровым [1]. Согласно этой теории, жидкость под воздействием случайной силы достигает критического состояния, в котором интенсивность возмущений не имеет выделенных масштабов. При малой вязкости возникает так называемый инерционный интервал масштабов, через который происходит недиссипативное перераспределение энергии от больших вихрей к малым. Таким образом, критическое состояние оказывается неравновесным [2].

В последние десятилетия активно обсуждается гипотеза, что многие физические системы приходят в критическое состояние, не подвергаясь внешнему воздействию. Этот феномен называется самоорганизованной критичностью (СОК). О СОК сообщают при наблюдении за плазмой [3], землетрясениями [4], вспышками на солнце [5], фондовым рынком [6], кластеризацией городского населения [7] и другими явлениями. Возникает вопрос, существует ли простой (и одновременно универсальный) механизм СОК, который может реализовываться в рамках столь непохожих физических явлений.

Первая модель СОК введена Баком, Тангом и Визенфельдом (модель БТВ) в 1987 году [8]. В этой модели на двумерную решётку падают песчинки, одна за одной.

Место падения очередной песчинки выбирается наугад. Как только количество песчинок в клетке превышает некоторое пороговое значение, песчинки перераспределяются по решётке. Перераспределение консервативно внутри решётки и диссипативно на границе. Диссипация происходит редко, но, как правило, значительными «квантами» песка. Постоянное медленное накопление и редкая быстрая диссипация песка уравнивают друг друга, и система оказывается в динамическом равновесии. Динамическому равновесию (другими словами, балансу песка в решётке) соответствует приближение к стационарному состоянию, которое существует в некотором корректно определённом пространстве мер. Распределение различных характеристик системы является степенным [9] вблизи стационарного состояния, что свидетельствует о его критичности.

Механизм медленного накопления нагрузки и редкого быстрого освобождения напряжения оказался достаточно универсальным. Он реализует СОК при моделировании разрыва волокон [10], скольжении прижатых друг к другу шероховатых поверхностей [11], в моделях блоков и пружин [12], иерархических моделях землетрясений [13]. Однако описать критическое состояние аналитически удаётся лишь в редких случаях [14].

Остановимся на иерархической модели образования кластеров [15], в которой отсутствие выделенных масштабов в стационарном состоянии строго доказано. Предполагается, что каждый кластер характеризуется двумя величинами: рангом и массой. При слиянии кластеров их массы складываются, но ранг нового кластера определяется как максимум из рангов меньших кластеров. Увеличение ранга кластера возможно только при слиянии кластеров одинакового ранга. В основе такого определения лежит классификация рек, предложенная в [16]. В [15] доказано, что равновесное распределение кластеров как по их рангу, так и по их массе является степенным.

Цель настоящей работы – показать, что модель [15] действительно предлагает общую схему, при которой образуется самоорганизованная критическая структура. Для этого математически строго устанавливается, что равновесие в модели кластеризации [15] является устойчивым.

В следующем разделе 1 строго определена модель и сформулирован основной результат. Его доказательство приведено в разделе 2. В Заключение подведены итоги и сделаны выводы по результатам работы.

1. Модель

Для моделирования кластеризации статья [15] определяет некоторое пространство, состоящее из элементов (физический смысл которых зависит от приложений). Элементы располагаются внутри двумерной области. Предполагается, что каждый кластер определяется его рангом и массой. Эволюция происходит за счет добавления новых элементов (в каждый момент времени) и удаления достаточно больших кластеров (когда они возникают). В каждый момент времени в рассматриваемую область добавляется наименьший элемент системы. Наименьший элемент имеет ранг 1 и массу 1. В качестве примера области можно рассматривать ограниченное подмножество плоскости, разделённое на клетки. Тогда наименьшие элементы занимают одну клетку (элемент A на рисунке).

Кластером назовём связанное множество элементов. При добавлении нового элемента два несвязных кластера могут образовать новое связанное множество – новый кластер (как при добавлении элемента D на рисунке). Если добавление нового элемента привело к слиянию двух кластеров ранга 1 и массы 1, то получившийся кластер имеет ранг 2 и массу 3 (в случае «клеточной» области получившейся кластер состоит из трёх клеток). В общем случае при слиянии кластеров одинакового ранга r и масс m_1 и m_2 получившийся кластер имеет массу $m_1 + m_2 + 1$ и ранг $r + 1$. Если объединяются кластеры разных рангов R и r , $R > r$, то новый кластер наследует больший из рангов R , тогда как массы складываются. Добавленный элемент может также соприкасаться с одним существующим кластером. Тогда ранг этого кластера не меняется, а масса увеличивается на единицу. Наконец, добавленный элемент может соединять более, чем два кластера. Вероятность этого события мала, поэтому его можно игнорировать.* Кластеры достаточно большого ранга \bar{R} удаляются, как только они возникают.

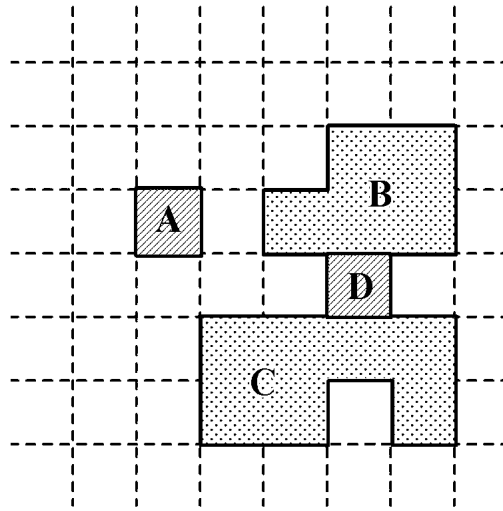


Рис. Появление кластеров на «клеточной» области; наименьший элемент A имеет ранг 1 и массу 1; в результате добавления элемента D кластеры B и C , имеющие ранг 2 и массы 5 и 7, соответственно, образовали один кластер ранга 3 и массы 13

Таким образом, масса кластера определяется однозначно по его виду, тогда как ранг зависит от очередности появления элементов. Легко понять, что кластер B на рисунке может иметь как ранг 1, так и ранг 2. Пусть кластеры B и C имеют ранг 2. Их массы равны 5 и 7, соответственно. Тогда при появлении элемента D , имеющего общие стороны с B и C , образуется кластер ранга 3 и массы 12.

Пусть N_i – это количество кластеров ранга i , M_i – суммарная масса этих кластеров. Через r_{ij} обозначается интенсивность соединения кластеров рангов i и j новым элементом. Предполагается, что

$$r_{ij} \sim L_i L_j, \quad (1)$$

где L_i – суммарный периметр кластеров ранга i . Это предположение соответствует стандартному евклидовому расстоянию между точками двумерной области. За счёт перемасштабирования времени можно добиться того, что коэффициент пропорциональности окажется равен единице. Тогда в соответствии с теорией средних полей, количество кластеров изменяется согласно следующим уравнениям [15]:

$$\dot{N}_1 = C - 2L_1^2 - \sum_{j=2}^{\infty} L_1 L_j, \quad (2)$$

$$\dot{N}_i = L_{i-1}^2 - 2L_i^2 - \sum_{j=i+1}^{\infty} L_i L_j. \quad (3)$$

*Если этот случай произошёл при численном моделировании, то следует отменить последнее добавление элемента и повторить выбор места для нового элемента.

Первое слагаемое уравнения (3) показывает, что количество кластеров возрастает если произошло слияние кластеров предыдущего ранга. Вероятность этого события пропорциональна $r_{i-1,i-1} = L_{i-1}^2$. Второе и третье слагаемые отвечают за убывание количества кластеров ранга i . Если произошло слияние *двух* кластеров ранга i , то N_i уменьшается на два. Отсюда – коэффициент два перед вторым слагаемым. Бесконечная сумма соответствует слиянию кластера ранга i с кластерами большего ранга. Удаление больших кластеров не учитывается уравнением (3). Уравнение для $i = 1$ имеет специальный вид, потому что увеличение наименьших кластеров происходит только в результате добавления элементов. Величина N_1 увеличивается со скоростью C (вместо единицы) из-за перемасштабирования временной шкалы.

Аналогично записываются уравнения, задающие баланс масс M ,

$$\dot{M}_1 = C - 2L_1^2 - \sum_{j=2}^{\infty} L_1 L_j, \quad (4)$$

$$\dot{M}_i = 2L_{i-1}^2 m_{i-1} + \sum_{k=1}^{i-1} L_i L_k m_k - 2L_i^2 m_i - \sum_{j=i+1}^{\infty} L_i L_j m_j, \quad i > 1. \quad (5)$$

Действительно, при слиянии двух кластеров ранга $i - 1$ появляется один кластер ранга i . В результате общая масса M_i увеличивается на удвоенную массу $2m_{i-1}$ типичного кластера ранга $i - 1$. Одновременно общая масса M_{i-1} уменьшается на ту же самую величину $2m_{i-1}$. В соответствии с выбранным масштабом временной оси и предположением (1) интенсивность слияния кластеров ранга $i - 1$ равна L_{i-1}^2 , что объясняет первое и третье слагаемые в правой части (5), соответствующие слиянию кластеров одинакового ранга.

Напротив, второе и четвёртое слагаемые описывают изменение масс при слиянии кластеров разных рангов. Масса M_i кластеров ранга i увеличивается при слиянии кластера ранга i с кластером произвольного меньшего ранга k на величину m_k – среднюю массу кластера ранга k . Коэффициент $L_i L_k$ в сумме по переменной k (второе слагаемое в (5)) является следствием предположения (1). Аналогично получается четвёртое слагаемое, отвечающее за уменьшение M_i при слиянии кластера ранга i с кластером большего ранга j . Уравнение (4) для кластеров единичного ранга имеет специальный вид.

При формулировке динамики масс в виде уравнений (4), (5) игнорируется единичная масса элементов (элемента D на рисунке), соединяющих кластеры. Как будет указано ниже, в стационарном состоянии массы m_i возрастают по i как степенная функция, поэтому при оценке асимптотики масс по i допустимо пренебрегать единичной массой элементов.

Стационарное состояние системы (2)–(5) достигается при равенстве нулю производных по времени.

Теорема 1 [15]. В равновесии $L_i = C^{1/2} x^{i-1}$, $m_i \approx (1/x^2)^{i-1}$, где $x \approx 0.55$ – решение уравнения $x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$.

Так как предполагается выполненным евклидово соотношение $l_i \sim \sqrt{m_i}$, то из Теоремы 1 следует, что $N_i \sim 1/m_i$. Таким образом, в равновесии распределение кластеров по массе является степенным с показателем степени, равным единице.

Далее формулируется, в каком смысле стационарное состояние оказывается устойчивым. Положим $s_i = N_i x^{-2i}$. Тогда система (2)–(5) для пары вектор-функций (\vec{s}, \vec{N}) записывается следующим образом:

для $i = 1$

$$\dot{s}_1 = a^2 x^{-2} - 2M_1 s_1 - \sum_{j=2}^{\infty} \sqrt{M_1 M_j s_1 s_j} x^{j-1}, \quad (6)$$

$$\dot{M}_1 = a^2 - 2M_1^2 - \sum_{j=2}^{\infty} \sqrt{M_j M_1^3 \frac{s_j}{s_1}} x^{j-1}; \quad (7)$$

для $i > 1$

$$\dot{s}_i = M_{i-1} x^{-2} s_{i-1} - 2M_i s_i - \sum_{j=i+1}^{\infty} \sqrt{M_i M_j s_i s_j} x^{j-i}, \quad (8)$$

$$\dot{M}_i = 2M_{i-1}^2 + \sum_{k=1}^{i-1} \sqrt{M_i M_k^3 \frac{s_i}{s_k}} x^{i-k} - 2M_i^2 + \sum_{j=i+1}^{\infty} \sqrt{M_j M_i^3 \frac{s_j}{s_i}} x^{j-i}. \quad (9)$$

Пусть l_2 – это пространство последовательностей, суммируемых в квадрате. Тогда пару вектор-функций

$$(\vec{s}(s_1(t), s_2(t), \dots), \vec{M}(M_1(t), M_2(t), \dots)) \in l_2 \times l_2$$

будем называть решением (6)–(9) с начальными условиями

$$\vec{s}|_{t=0} = \vec{s}_0, \quad (10)$$

$$\vec{M}|_{t=0} = \vec{M}_0, \quad (11)$$

если $s_i(\cdot)$ и $M_i(\cdot)$, $i \in \mathbb{N}$ – дважды дифференцируемые функции, удовлетворяющие (6)–(9) и начальным условиям (10), (11).

Основной результат статьи сформулирован в следующей Теореме.

Теорема 2. *Равновесие (σ, μ) системы уравнений (6)–(9) асимптотически устойчиво.*

2. Устойчивость стационарного состояния

Для доказательства Теоремы 2 сформулируем три вспомогательные Леммы, доказательство которых приведено в приложении.

Лемма 1. *Зафиксируем произвольное $T > 0$. Пусть \vec{M} – это произвольная вектор-функция, такая что $M_i(t)$ дважды дифференцируема на $[0, T]$ и удовлетворяет неравенству*

$$|M_i(t) - \mu_i| \leq \varepsilon \gamma^i, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, 2, \dots$$

для некоторого достаточно малого ε и $\gamma = x^{1/2}$. Пусть \vec{s} – решение задачи (6), (8), (10), у которого начальное условие удовлетворяет неравенству $|s_{0i} - \sigma| \leq \varepsilon \gamma^i$. Тогда

$$|s_i(t) - \sigma| \leq |s_{0i} - \sigma| e^{-\varphi t}, \quad \varphi > 0, \quad t > 0. \quad (12)$$

Лемма 2. Пусть $T > 0$ – некоторое число. Предположим, что $\vec{s}(t)$ – это произвольная дважды дифференцируемая на $[0, T]$ вектор-функция, удовлетворяющая неравенству

$$|s_i(t) - \sigma| < \varepsilon\gamma^i, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, 2, \dots,$$

где $\gamma = x^{1/2}$, а ε достаточно мало. Предположим также, что $\vec{M}(t)$ является решением (7), (9), (11), где $|M_{0i} - \sigma| < \varepsilon\gamma^i$, $i = 1, 2, \dots$. Тогда

$$|M_i(t) - \sigma| \leq |M_{0i} - \sigma|e^{-\varphi t}, \quad \varphi > 0, \quad t > 0. \quad (13)$$

Лемма 3. Система уравнений (6)–(11) имеет единственное решение

$$(\vec{s}(s_1(t), s_2(t), \dots), \vec{M}(M_1(t), M_2(t), \dots)),$$

удовлетворяющее неравенству

$$|M_i(t) - \mu_i| \leq |M_i(0) - \mu_i|e^{\alpha t}, \quad \alpha > 0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (14)$$

$$|s_i(t) - \sigma| \leq |s_i(0) - \sigma|e^{\alpha t}. \quad (15)$$

Доказательство Теоремы 1. Зафиксируем такое достаточно малое ε , что условия Лемм 1 и 2 выполнены. Предположим, что начальные условия (\vec{s}_i, \vec{M}_i) удовлетворяют неравенствам

$$|s_{0i} - \sigma| < \varepsilon\gamma^i/2, \quad |M_{0i} - \mu_i| < \varepsilon\gamma^i/2, \quad i = 1, 2, \dots$$

Тогда, согласно (14) and (15), существует такое τ , что решение $(\vec{s}(t), \vec{M}(t))$ задачи (6)–(11) с начальными условиями (\vec{s}_0, \vec{M}_0) удовлетворяет неравенствам

$$|s_i(t) - \sigma| < \varepsilon\gamma^i, \quad |M_i(t) - \mu_i| < \varepsilon\gamma^i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad t \in [0, \tau].$$

Итак, $\vec{M}(t)$ удовлетворяет условиям Леммы 1 на отрезке $[0, \tau]$. Согласно Лемме 1, неравенство (15) может быть изменено на убывающее по времени неравенство (12). Поэтому

$$|s_i(t) - \sigma| \leq |s_{0i} - \sigma|e^{-\varphi t} \leq \varepsilon\gamma^i/2, \quad t \in [0, \tau]. \quad (16)$$

Аналогично устанавливается неравенство

$$|M_i(t) - \mu_i| \leq |M_{0i} - \mu_i|e^{-\varphi t} \leq \varepsilon\gamma^i/2, \quad t \in [0, \tau] \quad (17)$$

для $M_i(t)$. Повторяя предыдущие рассуждения, легко получить, что неравенства (16) и (17) справедливы на отрезках $t \in [\tau, 2\tau]$, $t \in [2\tau, 3\tau]$ и далее. Следовательно, функции $s_i(t)$ и $M_i(t)$ удовлетворяют неравенствам (16) и (17) для всех $t > 0$. Асимптотическая устойчивость стационарного состояния (6)–(11) доказана.

Заключение

В статье доказана устойчивость стационарного состояния в модели кластеризации с самоорганизованной критичностью. Если модельная система находится в окрестности критического состояния, то структура системы (кластеры) медленно укрупняется. Имеет место обратный каскад: малые изменения нижнего уровня постепенно проникают на все более и более высокие уровни. Распространение возмущения по уровням происходит с сохранением массы.

Состояние системы в каждый момент времени задаётся точкой в фазовом пространстве, снабжённом l_2 -нормой. Удаление кластеров большого ранга (что соответствует освобождению напряжения в других моделях с СОК) не меняет принципиально норму точки в фазовом пространстве за счёт сделанного выбора нормы, устанавливающей малый вес кластерам большого ранга. Таким образом, показано, что процесс медленного нагружения и быстрого освобождения напряжения не уводит рассматриваемую систему от критического состояния.

Этот результат характерен для моделей с СОК. Однако, в отличие от многих моделей с СОК, в данном случае критическое состояние описано аналитически. Из-за универсальности механизма СОК найденные в частном случае флуктуации системы около критического состояния могут оказаться типичными для целого класса систем.

Информация о критическом состоянии позволяет решать прикладные задачи, в частности, связанные с прогнозом катастрофических событий в сложных системах, демонстрирующих самоорганизованное критическое поведение [17, 18]. В течение долгого времени в теории прогноза оставалась популярной гипотеза, утверждающая, что экстремальные события (явления), порождаемые самоорганизованной критической системой, как правило, не предсказуемы. Аргументы оппонентов прогноза основаны на том, что степенные распределения в системах с СОК обычно возникают как следствие отсутствия внутренних выделенных масштабов [19]. Эти аргументы формализуются для классических моделей с СОК [20]. Однако критическое состояние в моделях определяется при стремящемся к бесконечности пространственному объёму. В приложениях (землетрясения, финансовые крахи, всплески преступности и др.) наблюдаемые системы пространственно ограничены. Они не находятся в критическом состоянии, а совершают колебания вокруг него. Точно также, в данной статье динамика конечной системы носит колебательный характер за счёт удаления крупнейших кластеров, тогда как в бесконечной системе будет наблюдаться приближение к степенному (критическому) распределению кластеров. Именно колебания вокруг критической точки существенны для прогноза [21,22]. Эффективный прогноз крупных землетрясений мира [23], вспышек преступности [24], техногенных катастроф [4] основан на сравнении текущих характеристик системы с критическими характеристиками. Точное описание критического состояния, обоснованное в настоящей статье, может стимулировать дальнейшее развитие прогнозных алгоритмов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 11-01-00339 и 11-01-00887-а).

Вспомогательные Леммы

Доказательство Леммы 1. Рассмотрим случай $i > 1$. (При $i = 1$ вычисления упрощаются). Положим $u_i = s_i - \sigma_i$. Тогда линейная аппроксимация уравнения для u_i имеет вид

$$\dot{u}_i = x^{-2}M_{i-1}u_{i-1} - 2M_iu_i - \sum_{j=i+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\sqrt{M_iM_j}\frac{\sigma_j}{\sigma_i}x^{j-i}u_i + \frac{1}{2}\sqrt{M_iM_j}\frac{\sigma_i}{\sigma_j}x^{j-i}u_j \right).$$

Умножая полученное уравнение на $2u_i\gamma^i$, суммируя по всем натуральным i и принимая во внимание равенство $\sigma = \sigma_i$, имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{dt} (\gamma^i u_i^2) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(2x^{-2}M_{i-1}\gamma^i u_{i-1}u_i - 4M_i\gamma^i u_i^2 - \sum_{j=i+1}^{\infty} \sqrt{M_iM_j}x^{j-i}\gamma^i u_i^2 - \sum_{j=i+1}^{\infty} \sqrt{M_iM_j}x^{j-i}\gamma^i u_i u_j \right).$$

Пользуясь абсолютной сходимостью ряда, изменим порядок слагаемых. В силу очевидного неравенства $2u_i u_j \leq \beta u_i^2 + \beta^{-1} u_j^2$ (для произвольного $\beta > 0$) получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \gamma^i u_i^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\left| \gamma^{i+1} x^{-2} M_i - \frac{1}{2} \gamma^i \sqrt{M_i M_{i+1}} x \right| (\beta u_i^2 + \beta^{-1} u_{i+1}^2) - \sqrt{M_i M_{i+1}} x \gamma^i u_i^2 - 4\gamma^i M_i u_i^2 - \gamma^i \sum_{j=i+2}^{\infty} \left(\sqrt{M_i M_j} x^{j-i} u_i^2 + \frac{1}{2} \sqrt{M_i M_j} x^{j-i} u_i^2 + \frac{1}{2} \sqrt{M_i M_j} x^{j-i} u_j^2 \right) \right).$$

Таким образом, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{dt} (\gamma^i u_i^2) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \gamma^i u_i^2$, где

$$a_i \leq \left| x^{-2} \gamma M_i - \frac{1}{2} x \sqrt{M_i M_{i+1}} \right| \beta + \beta^{-1} \gamma^{-1} \left| x^{-2} \gamma M_{i-1} - \frac{1}{2} x \sqrt{M_{i-1} M_i} \right| - 4M_i - \sqrt{M_i M_{i+1}} x - \frac{1}{2} \sum_{j=i+2}^{\infty} \sqrt{M_i M_j} x^{j-i} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{i-2} \sqrt{M_i M_j} \gamma^{-(i-k)} x^{i-k}.$$

Зафиксируем $\beta = x^{-1/4}$. Так как $|M_i(t) - \mu_i| \leq \varepsilon \gamma^i$ для любого $t > 0$ и $\mu_j \geq \mu_i$ для всех $j \geq i$, то

$$a_i \leq \left(2x^{-7/4} - x^{3/4} - x^{5/4} - 4 - x - \frac{1}{2} \sum_{j=i+2}^{\infty} x^{j-i} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{i-2} x^{(i-k)/2} \right) \mu_i + C_\varepsilon,$$

где $C_\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Вычисления показывают, что a_i отрицательны для достаточно малых ε .

Доказательство Леммы 2. Пусть $v_i = M_i - \mu_i$. Тогда линейризация уравнения для v_i имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{v}_i = & 4\mu_{i-1}v_{i-1} + \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{i-1} \sqrt{\mu_i \mu_k \frac{s_i}{s_k}} x^{i-k} v_k - \left(4\mu_i + \frac{3}{2} \sum_{j=i+1}^{\infty} \sqrt{\mu_i \mu_j \frac{s_j}{s_i}} x^{j-i} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{i-1} \sqrt{\frac{\mu_k^3 s_i}{\mu_i s_k}} x^{i-k} \right) v_i - \frac{1}{2} \sum_{j=i+1}^{\infty} \sqrt{\frac{\mu_i^3 s_j}{\mu_j s_i}} x^{j-i} v_j. \end{aligned}$$

Умножая обе части уравнения на $2x^{i/2}v_i$, суммируя по всем i и изменяя порядок слагаемых, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{dt} (x^{i/2} v_i^2) = & \sum_{i=1}^{\infty} \left(8\mu_{i-1} v_{i-1} v_i x^{i/2} + \sum_{k=1}^{i-1} \left(3x^{i/2} \sqrt{\mu_i \mu_k} x^{i-k} - \sqrt{\mu_k / \mu_i} x^{i-k} x^{k/2} \right) v_k v_i - \right. \\ & \left. - x^{i/2} v_i^2 \left(8\mu_i + 3 \sum_{j=i+1}^{\infty} \sqrt{\mu_i \mu_j} x^{j-i} - \sum_{k=1}^{i-1} \sqrt{\mu_k^3 / \mu_i} x^{i-k} \right) \right) + C_\varepsilon, \end{aligned}$$

где $C_\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. При получении последнего неравенства использована близость s_i и σ . Сумма слагаемых, содержащих разности $s_i - \sigma$, обозначена через C_ε . Применив элементарное неравенство $v_i v_j \leq v_i^2/2 + v_j^2/2$ для оценки попарных произведений, имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{dt} (x^{i/2} v_i^2) \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^{i/2} v_i^2,$$

где a_i оценивается

$$\begin{aligned} a_i \leq & 4\mu_{i-1} + 4\mu_i x^{1/2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{i-1} \left| 3\sqrt{\mu_i \mu_k} x^{i-k} - \sqrt{\mu_k^3 / \mu_i} x^{(i-k)/2} \right| + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=i+1}^{\infty} \left| 3\sqrt{\mu_j \mu_i} x^{3(j-i)/2} - \sqrt{\mu_i^3 / \mu_j} x^{j-i} \right| - 8\mu_i - \\ & - 3 \sum_{j=i+1}^{\infty} \sqrt{\mu_i \mu_j} x^{j-i} + \sum_{k=1}^{i-1} \sqrt{\mu_k^3 / \mu_i} x^{i-k} + C_\varepsilon. \end{aligned}$$

Утверждение Леммы следует из отрицательности a_i , которая, в свою очередь, следует из последнего неравенства с помощью элементарных вычислений, которые используют асимптотическую независимость равновесного μ_i от i . Мы опустим здесь вычисления, лишь упомянув, что каждую сумму следует разделить на две части. Первая часть относится к трем слагаемым с индексами $j = i + 1, i + 2, i + 3$, $k = i - 1, i - 2, i - 3$. Вторая часть относится к остальным индексам. Если $i \leq 3$, то первая часть состоит из меньшего числа слагаемых.

Доказательство Леммы 3. Заметим, что аккуратные оценки при доказательстве Лемм 1 и 2 необходимы для получения отрицательных показателей в неравенствах (12) и (13). Аналогичные вычисления проведённые для уравнений (6)–(9)

одновременно обеспечивают (14) и (15) с положительным показателем α . Тогда существование и единственность решения уравнений (6)–(11) следует из неравенств (14) и (15) стандартным образом.

Библиографический список

1. Колмогоров А.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // ДАН СССР. 1941. Т. 30. С. 299.
2. Фриш У. Турбулентность. Наследие А.Н. Колмогорова. М.: ФАЗИС, 1998. 360 с.
3. March T.K., Chapman S.C., Dendy R.O., Merrifield J.A. Off-axis electron cyclotron heating and the sandpile paradigm for transport in tokamak plasmas // Phys. of Plasmas. 2004. Vol. 11. P. 659.
4. Писаренко В.Ф., Родкин М.В. Распределения с тяжелыми хвостами: Приложение к анализу катастроф. М.: ГЕОС, 2007. 240 с.
5. Bershadskii A. and Sreenivasan K.R. Multiscale self-organized criticality and powerful x-ray flares // Eur. Phys. J. B. 2003. Vol. 35. P. 513.
6. Amaral L.A.N., Cizeau P., Gopikrishnan P., Liu Y., Meyer M., Peng C.-K., Stanley H.E. Econophysics: Can statistical physics contribute to the science of economics? // Computer Physics Communications. 1999. Vol. 121–122. P. 145.
7. Шунер В.А. Самоорганизация городского расселения. М.: Наука, 1995. 166 с.
8. Bak P., Tang C., and Wiesenfeld K. Self-organized criticality: An explanation of $1/f$ noise // Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 59. P. 381.
9. Dhar D. Theoretical studies of self-organized criticality // Physica A. 2006. Vol. 369. P. 29.
10. Hemmer P.C. and Hansen A. The distribution of simultaneous fiber failures in fiber bundles // ASME J. Appl. Mech. 1992. Vol. 59. P. 909.
11. Hallgass R., Loreto V., Mazzella O., Paladin G., and Pietronero L. Earthquakes statistics and fractal faults // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 56. P. 1346.
12. Carlson J.M., Langer J.S. Properties of earthquakes generated by fault dynamics // Phys. Rev. Lett. 1989. Vol. 62. P. 2632.
13. Blanter E.M., Shnirman M.G., Le Mouél J.-L., and Allegre C.J. Scaling laws in blocks dynamics and dynamic self-organized criticality // Physics of the Earth and Planetary Interiors. 1997. Vol. 99. P. 295.
14. Dhar D., Majumdar S.N. Abelian sandpile model on the Bethe lattice // J. Physica A. 1990. Vol. 23. P. 4333.
15. Gabrielov A., Newman W.I., Turcotte D.L. An exactly soluble hierarchical clustering model: Inverse cascades, self-similarity, and scaling // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 60. P. 5293.
16. Strahler A.N. Quantitative analysis of watershed morphology // Trans. Am. Geophys. Union. 1957. Vol. 38. P. 913.
17. Малинецкий Г.Г. Сценарии, стратегические риски, информационные технологии // Информационные технологии и вычислительные системы. 2002. № 4. С. 83.

18. *Малинецкий Г.Г., Подлазов А.В., Кузнецов И.В.* Мониторинг, анализ и прогноз опасностей как задачи национальной информационной системы // Информационные технологии и вычислительные системы. 2004. № 4 С. 119.
19. *Bak P.* How nature works: The science of self-organized criticality. New York: Springer-Verlag, Inc. 1996. 205 pp.
20. *Bak P. and Paczuski M.* Complexity, contingency, and criticality // Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA. 1995. Vol. 92. P. 6689.
21. *Blanter E.M., Shnirman M.G., Le Mouel J.-L.* Temporal variation of predictability in a hierarchical model of dynamical self-organized criticality // Physics of the Earth and Planetary Interiors. 1999. Vol. 111. P. 317.
22. *Shnirman M.G., Shapoval A.B.* Variable predictability in deterministic dissipative sandpile // Nonlinear Processes in Geophysics. 2010. Vol. 17. P. 85.
23. *Keilis-Borok V.I.* Fundamentals of earthquake prediction: Four paradigms / in V.I. Keilis-Borok and A.A. Soloviev (eds.) Nonlinear dynamics of the lithosphere and earthquake prediction. Springer-Verlag, Heidelberg, 2003. P. 1.
24. *Кузнецов И.В., Родкин М.В., Серебряков Д.В., Урядов О.Б.* Иерархический подход к динамике преступности / В сб. Новое в синергетике. Новая реальность, новые проблемы, новое поколение. Часть 1. Под ред. Г.Г. Малинецкого. М.: Радиотехника, 2006. P. 103.

*Финансовый университет
при Правительстве РФ, Москва*

*Поступила в редакцию
После доработки*

*7.07.2010
10.01.2011*

STABILITY OF A STATIONARY CRITICAL STATE IN A MODEL OF CLUSTER FORMATION

A.B. Shapoval

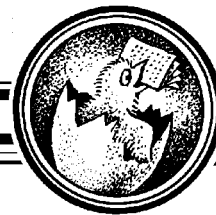
The paper considers a self-organized critical process of clusterization. The stability of the equilibrium for infinite system of the differential equations approximating this process is proved.

Keywords: Self-organized criticality, clustering, equilibrium, stability.



Шапвал Александр Борисович – родился в 1972 году в Киеве, окончил Московский государственный университет (1994). После окончания МГУ работает в Международном институте теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН и Финансовом университете при Правительстве РФ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1999) в области динамических систем. Опубликовал 30 научных статей в реферируемых журналах о качественных свойствах уравнений математической физики, самоорганизованных критических системах, прогнозе экстремальных событий. Автор учебного пособия «Инвестиции: математические методы» (в соавторстве с В.Ю. Поповым).

125468 Москва, Ленинградский пр-т, 49
Финансовый университет при Правительстве РФ
E-mail: shapoval@mccme.ru



ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ ВОЛНАМИ В МОДЕЛИ ЛАМПЫ С ПОПЕРЕЧНЫМ ТОКОМ

Д.Н. Хренов

Методом последовательных приближений строится аналитическая теория лампы с поперечным током. Рассматривается взаимодействие волн пространственного заряда с полем. Расчеты показывают, что учет встречной волны существенно меняет картину энергообмена – происходит смещение нулевых значений мощности реактивного взаимодействия на $\pi/3$.

Ключевые слова: Лампа с поперечным током, метод последовательных приближений, аналитическая теория, волны пространственного заряда, энергообмен.

Введение

Существует несколько моделей взаимодействия волн в электронных потоках с электромагнитными волнами применительно к лампе с поперечным током (ЛПТ) [1]. Первое теоретическое и экспериментальное исследование ЛПТ проведено в работах [2, 3]. Некоторые результаты теории ЛПТ приведены в работах [4, 5]. Наиболее полное изучение ЛПТ было проведено Р.А. Дудником в рамках его диссертационной работы [6]. Более простой вариант модели Дудника Р.А. изложен в работе [7].

В последние годы интерес к ЛПТ появился вновь в связи с распределенными усилителями с автоэмиссией [8]. В настоящей статье сделана попытка создания элементарной аналитической теории ЛПТ применительно к модели, описанной в работе Данна и Хармана [3].

1. Модель и результаты аналитической теории

На рис. 1 представлена модель ЛПТ с наклонным относительно потока мощности направлением движения электронов [3]. Уравнение, описывающее ток, сгруппированный в поле $E(z) e^{jt\omega}$ в одномерной модели, запишем в стандартной форме

$$i(z) = \frac{jI_0}{2V_0} \int_0^z E(\zeta) \beta_e \frac{\sin \beta_p(z - \zeta)}{\beta_p} \exp(-j\beta_e(z - \zeta)) d\zeta, \quad (1)$$

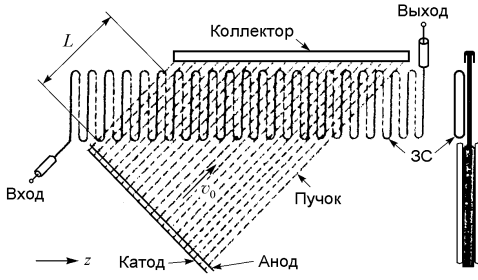


Рис. 1. Модель лампы с поперечным током Дана и Хармана [3]

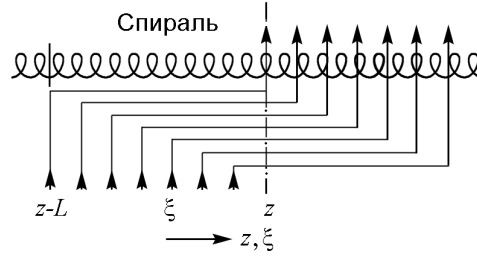


Рис. 2. Часть лампы в окрестности точки z, ξ -координата влета элемента тока в пространство взаимодействия [3]

где I_0 – постоянный ток пучка, V_0 – напряжение пучка, $\beta_e = \omega/v_0$, $\beta_p = \omega_p/v_0$, ω – круговая частота переменного электрического поля, ω_p – плазменная частота, v_0 – скорость электронов.

Следуя [3], перейдем от схемы, изображенной на рис. 1, к эквивалентной ей модели, представленной на рис. 2. Для этого запишем уравнение (1) для элемента тока пучка $I_0 = J_0 d\xi$, где J_0 – линейная плотность тока. Проинтегрируем полученное выражение по всей длине. Тогда

$$i(z) = \frac{jJ_0}{2V_0} \int_{z-L}^z \int_{\xi}^z E(\zeta) \beta_e \frac{\sin(\beta_p(z-\zeta))}{\beta_p} \exp(-j\beta_e(z-\zeta)) d\zeta d\xi. \quad (2)$$

Уравнение для поля имеет стандартный вид (см., например, [9])

$$E(z) = E_0 \exp(-j\beta_0 z) - \frac{\beta_0^2 K}{2} \int_0^z i(\zeta) \exp(-j\beta_0(z-\zeta)) d\zeta - \frac{\beta_0^2 K}{2} \int_z^L i(\zeta) \exp(j\beta_0(z-\zeta)) d\zeta, \quad (3)$$

где $\beta_0 = \omega/v_\phi$, v_ϕ – фазовая скорость, K – сопротивление связи, L – длина взаимодействия.

Решая полученную систему уравнений (2), (3) методом последовательных приближений [10], в первом приближении получим следующее решение:

$$E(z) = E_0 \exp(-j\beta_0 z) - E_0 (2\pi CN)^3 \{ \exp(-j\beta_0 z) F_1(\Phi_0, \theta_p) + \exp(-j\beta_0 z) F_2(\Phi_0, \theta_p, \bar{\Phi}_0) + \exp(j\beta_0 z) F_3(\Phi_0, \theta_p, \bar{\Phi}_0) \}, \quad (4)$$

где

$$F_1(\Phi_0, \theta_p) = -\frac{j}{\Phi_0^2 - \theta_p^2} + \frac{2\Phi_0}{(\Phi_0^2 - \theta_p^2)^2} - \frac{\exp(-j\Phi_0 + j\theta_p)}{2\theta_p(\Phi_0 - \theta_p)^2} + \frac{\exp(-j\Phi_0 - j\theta_p)}{2\theta_p(\Phi_0 + \theta_p)^2},$$

$$F_2(\Phi_0, \theta_p, \bar{\Phi}_0) = -\frac{1}{2(\Phi_0 - \bar{\Phi}_0)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\Phi_0}{\Phi_0^2 - \theta_p^2} + \frac{2j\Phi_0^2}{(\Phi_0^2 - \theta_p^2)^2} - \frac{j\Phi_0 \exp(-j\Phi_0 + j\theta_p)}{2\theta_p(\Phi_0 - \theta_p)^2} + \frac{j\Phi_0 \exp(-j\Phi_0 - j\theta_p)}{2\theta_p(\Phi_0 + \theta_p)^2} \right\},$$

$$F_3(\Phi_0, \theta_p, \bar{\Phi}_0) = -\frac{\exp(2j\Phi_0 - 2j\bar{\Phi}_0)}{2(\Phi_0 - \bar{\Phi}_0)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\Phi_0^2 - \theta_p^2} + \frac{2j\Phi_0}{(\Phi_0^2 - \theta_p^2)^2} - \frac{j \exp(-j\Phi_0 + j\theta_p)}{2\theta_p(\Phi_0 - \theta_p)^2} + \frac{j \exp(-j\Phi_0 - j\theta_p)}{2\theta_p(\Phi_0 + \theta_p)^2} \right\}.$$

Здесь F_1, F_2, F_3 – функции, характеризующие эффективность энергообмена прямых и обратных волн; $\theta_p = \beta_p L$; $C_0 = (J_0 L K / (4V_0))^{1/3}$; $\Phi_0 = L(\beta_e - \beta_0)$ – относительный угол пролета; $\bar{\Phi}_0 = L\beta_e$ – абсолютный угол пролета.

Очевидно, что при подстановке выражения (2) в (3) должно получиться четыре функции: две для взаимодействия медленной волны пространственного заряда с прямой и встречной волнами напряженности электрического поля и две – для быстрой. Однако удобнее записать именно три функции, чтобы посмотреть, как повлияет учет встречной волны на общую картину взаимодействия.

Дальнейший анализ проводился при фиксированном значении параметра $\bar{\Phi}_0 = 0.5$.

2. Результаты расчетов

Отметим, что первый интеграл в уравнении (3) дает только одно слагаемое в качестве добавки к заданному полю. Этой добавке соответствует функция $F_1(\Phi_0, \theta_p)$ (рис. 3), которая точно совпадает с уже известной аналогичной функцией из элементарной теории лампы бегущей волны [10].

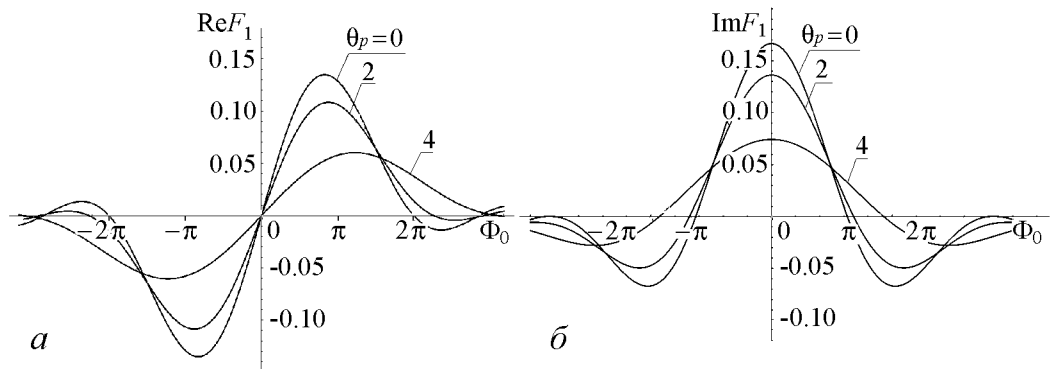


Рис. 3. Реальная (а) и мнимая (б) части функции $F_1(\Phi_0, \theta_p)$ при различных значениях θ_p

Рассмотрим случай нулевого пространственного заряда. Максимальная передача энергии волне происходит при $\Phi_0 = -\pi$. В этом случае электроны движутся несколько быстрее волны. Передача энергии происходит и в том случае, когда они движутся существенно быстрее волны (например, $\Phi_0 = -3\pi$); однако эффективность такого энергообмена невелика. При увеличении тока с катода происходит «расползание» функций F_i за счет увеличения разности фаз элементарных волн. Наблюдается уменьшение амплитуды, из чего следует, что эффективность энергообмена снижается (подробнее см., например, [10]).

Теперь рассмотрим, какое влияние оказывает учет встречной волны. На рис. 4 представлены реальная и мнимая части суммы функций $F_1(\Phi_0, \theta_p)$ и $F_2(\Phi_0, \theta_p, \bar{\Phi}_0)$. Как и в предыдущем случае, номер кривой соответствует значению θ_p . Видно, что графики сместились, приблизительно, на $\Phi_0 = \pi/3$, что имеет существенное значение. Максимальная передача энергии теперь происходит при $\Phi_0 = -(4\pi/3 + 2\pi n)$. При этом амплитуда увеличилась примерно на 10%, что свидетельствует об увеличении эффективности энергообмена.

Функция $F_3(\Phi_0, \theta_p, \bar{\Phi}_0)$, соответствующая добавке к полю в виде встречной волны $\exp(j\beta_0 z)$, представлена на рис. 5. При увеличении пространственного заряда вновь наблюдается «расползание» и уменьшение амплитуды. График для удобства восприятия построен только при значении $\theta_p = 0$.

Мнимая часть в данном случае обращается в ноль при $\Phi_0 = -(4\pi/3 + 2\pi n)$.

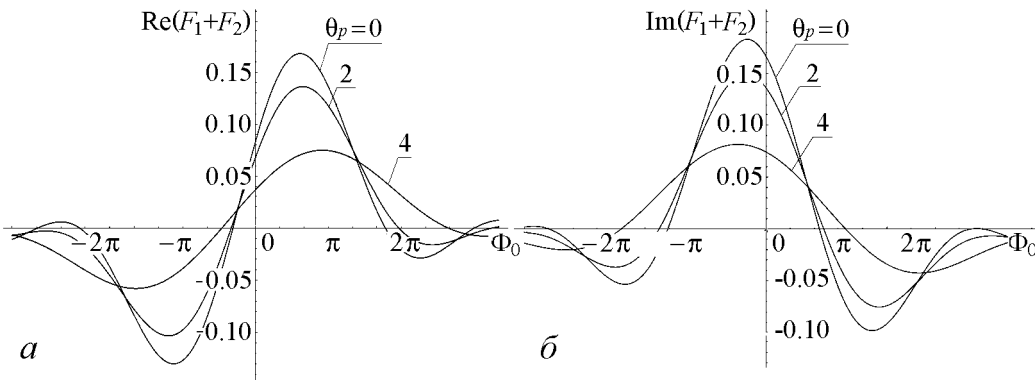


Рис. 4. Реальная (а) и мнимая (б) части функции $F_1(\Phi_0, \theta_p) + F_2(\Phi_0, \theta_p, \bar{\Phi}_0)$ при различных значениях θ_p

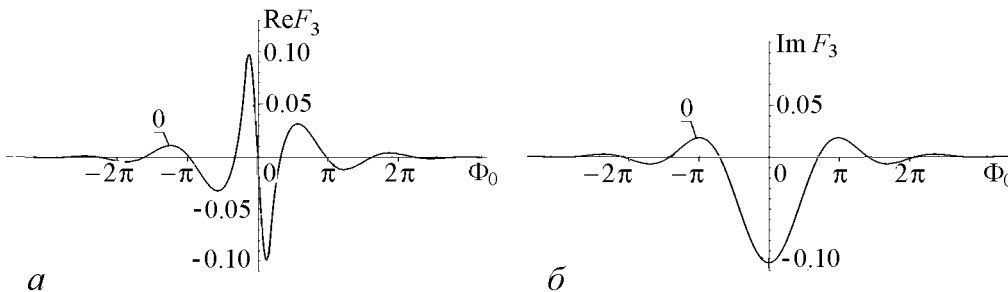


Рис. 5. Реальная (а) и мнимая (б) части функции $F_3(\Phi_0, \theta_p, \bar{\Phi}_0)$ при значении $\theta_p = 0$

Значения реальной части функции при данных относительных углах пролета близки к локальным минимумам, но амплитуды этих минимумов в несколько раз меньше, чем у функций, представленных на рис. 3 и 4, и их учет не изменит характера функций, представленных на рис. 4.

Выводы

В рамках модели, предложенной Данном и Харманом, методом последовательных приближений построена аналитическая теория лампы с поперечным током. Отмечено, что, несмотря на существенные различия между рассматриваемой моделью и моделью лампы с бегущей волной, решение задачи для лампы с поперечным током в первом приближении (с учетом только прямой волны) точно повторяет решение задачи для лампы с бегущей волной. Расчеты показали, что учет встречной волны в уравнении для поля существенно меняет картину энергообмена, а именно, происходит смещение на $\pi/3$ нулевых значений мощности реактивного взаимодействия и, соответственно, минимумов мощности активного взаимодействия. Поэтому можно с уверенностью сказать, что учет встречной волны для лампы с поперечным током необходим даже в первом приближении.

Библиографический список

1. Клеен В., Пёшль К. Введение в электронику сверхвысоких частот М.: Сов. радио, 1963. С. 231.
2. Dunn D.A., Harman W.A. An experimental transverse-current traveling-wave tube// PIRE. 1956 Vol. 44. P. 888.
3. Dunn D.A., Harman W.A., Field L.M., Kino G.S. Theory of transverse-current traveling-wave tube// PIRE. 1956. Vol. 44. P. 879.
4. Петин Г.П. К теории лампы с поперечным током// Радиотехника и электроника. 1962. № 7. С. 1941.
5. Петин Г.П. Исследование лампы с поперечным током и перекошенной спиралью// Радиотехника и электроника. 1962. № 7. С. 1948.
6. Дудник Р.А. Некоторые вопросы теории взаимодействия электронных потоков с электромагнитными волнами в двумерных замедляющих системах: Дис... канд. физ.-мат. наук, 1971.
7. Doehler O., Mourier G. Theory of two-dimensional travelling wave tube. Munchen: Microwellenrohren, 1960. P. 90.
8. Трубецков Д.И., Рожнев А.Г., Соколов Д.В. Лекции по сверхвысокочастотной вакуумной микроэлектронике. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996. С. 158.
9. Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. В 2-х т. Т.1. М.: Физматлит, 2003. 496 с.
10. Шевчик В.Н., Трубецков Д.И. Аналитически методы расчета в электронике СВЧ. М.: Сов. радио, 1970.

Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 3.03.2011

ELEMENTARY THEORY OF INTERACTION BETWEEN SPACE CHARGE WAVES AND ELECTROMAGNETIC WAVES FOR THE TRANSVERSE-CURRENT TRAVELING-WAVE TUBE

D.N. Khrenov

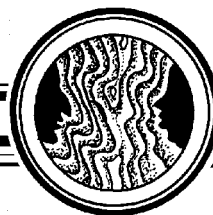
Analytical theory for the transverse-current traveling-wave tube has been created with the use of successive approximations method. Interaction between space charge waves and electromagnetic waves has been examined. Numerical calculations have shown that the inclusion of the backward wave significantly changes the pattern of interchange of energy – there is a shift of zero values of reactive interaction power by $\pi/3$.

Keywords: Transverse-current traveling-wave tube, successive approximations method, analytical theory, space charge waves, interchange of energy.



Хренов Дмитрий Николаевич – родился в Саратове (1989). Окончил Лицей прикладных наук. Студент 5 курса факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского. Научные интересы – взаимодействие электронных потоков и волн в режиме слабых и сильных сигналов.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
E-mail: johnscoffe@mail.ru



АЛЬБЕРТ ЭЙНШТЕЙН И ПИТИРИМ СОРОКИН: ИСТОРИИ ДИССЕРТАЦИОННЫХ ЗАЩИТ

В.М. Аникин

Сравниваются процедуры получения ученых степеней в Западной Европе и России, существовавшие в начале XX столетия, на примерах защиты докторской диссертации Нобелевским лауреатом Альбертом Эйнштейном (1876–1955) в Цюрихском университете в 1905 г. и подготовки магистерской диссертации крупнейшим российско-американским социологом XX столетия Питиримом Сорокиным (1889–1968) в 1914–1922 гг. в Петербургском (Петроградском) университете. Отмечается стабильность комплекса требований, предъявляемых к соискателям ученых степеней в России.

Ключевые слова: Диссертация, процедура защиты, история научных защит.

Введение

В заглавие статьи можно внести интригу, если переформулировать его так: защитил бы свою диссертацию на соискание степени Doctor of Philosophy один из основоположников постньютоновской физики Альберт Эйнштейн столь же успешно, если бы он в 1905 году представил свою диссертацию для защиты не в Цюрихский университет, а в один из российских университетов?!

Эта гипотетическая ситуация на самом деле очень наглядно отражает жизненные реалии, ибо, во-первых, в России всегда существовали более жесткие правила продвижения соискателей к ученой степени и, во-вторых, содержание диссертации Эйнштейна после присуждения ему докторской степени не избежало критических замечаний.

В данных заметках излагаются факты, почерпнутые из биографических материалов и регламентирующих документов, которые позволяют на конкретных примерах наглядно продемонстрировать различие в системах присуждения ученых степеней, практиковавшихся (и практикующихся) в России и на Западе. Обсуждаются также некоторые аспектные характеристики диссертационной работы А. Эйнштейна. В качестве альтернативы рассматривается диссертационная «эпопея» одного из

крупнейших российско-американским социологов XX столетия Питирима Александровича Сорокина. Одновременно изложение можно также рассматривать как аргументацию, свидетельствующую в пользу «разумности» постановки сформулированной выше гипотетической проблемы.

Подобные «исторические» рассмотрения особенно интересны и полезны в периоды, когда происходят серьезные изменения в системе подготовки высокообразованных научно-педагогических кадров, от наличия которых зависит, собственно, будущее страны.

1. Как Альберт Эйнштейн стал доктором

На русском языке докторская диссертация Альберта Эйнштейна публиковалась (правда, с некоторыми изменениями и дополнениями) дважды – в сборнике «Броуновское движение» (1936) и в третьем томе Собрания научных трудов [1, с. 75–91]. В конце работы стоит дата – Берн, 30 апреля 1905 г. Диссертация носит название «Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen» («Новое определение размеров молекул») и занимает (в зависимости от издания) 16–18 страниц. Первоначально текст диссертации был опубликован в 1905 г. отдельным изданием в Берне [2] с посвящением «Моему другу Марселю Гроссману»¹. Предыстория этого посвящения такова.

После окончания Политехникума, когда Эйнштейн долго не мог найти работу и находился в отчаянном материальном положении, М. Гроссман (через своего отца) помог Эйнштейну устроиться на должность эксперта в Федеральное Бюро патентования изобретений в Берне. Здесь будущий Нобелевский лауреат и начал свою научную карьеру, публикуя статьи в престижном немецком журнале «Annalen der Physik». Этот период в жизни Эйнштейна до сих пор продолжает удивлять своей фантастической творческой фундаментальностью и разносторонностью. Только в 1905 г. друг за другом вышли его статьи о световых квантах, броуновском движении, теории относительности. Тогда же им была завершена работа над диссертацией.

20 июля 1905 г. Эйнштейн представил отгиск диссертации декану философского факультета (секция II) Цюрихского университета [3, с. 90]. Спустя два дня были получены положительные заключения экспертов – профессора экспериментальной физики Альфреда Кляйнера (Alfred Kleiner) и профессора математики Генриха Буркхардта (Heinrich Burckhardt)². Вот тексты этих заключений (на английском языке) [4]:

Expert opinion by Alfred Kleiner and Heinrich Burckhardt on Einstein's Dissertation

Zurich, 22 July 1905

Kleiner: The arguments and calculations to be carried out are among the more difficult ones in hydrodynamics.

Burckhardt: The mode of treatment demonstrates fundamental mastery of the relevant mathematical method? What I checked, I found to be correct without exception.

¹Марсель Гроссман (Marcel Grossmann, 1878–1936), швейцарский математик, однокурсник Альберта Эйнштейна по Цюрихской высшей технической школе (Политехникуму) в 1896–1900 гг., друг, а впоследствии – соавтор первых работ по общей теории относительности. В его честь регулярно проводятся международные семинары по общей теории относительности (MG Meetings), на которых присуждаются премии Марселя Гроссмана

²Г. Буркхардт был привлечен к рецензированию работы Эйнштейна по инициативе А. Кляйнера [3, с. 90]

Имена А. Кляйнера и Г. Буркхардта как рецензентов работы А. Эйнштейна значатся и на титульном листе диссертации, изданной солидным Бернским издательством Bockdruckerei K.J. Wyss [2]. Предельно кратких положительных отзывов А. Кляйнера и Г. Буркхардта оказалось вполне достаточно для утверждения факультетом диссертации. О факте публичной защиты Эйнштейном диссертации его биографы не сообщают. Так Альберт Эйнштейн стал доктором...

Подробнее рассмотрим некоторые обстоятельства, сопутствовавшие диссертационной работе А. Эйнштейна. Курс физики в Политехникуме Эйнштейн слушал у профессора Генриха Фридриха Вебера. Отношения между ними не сложились. Эйнштейн, по его признанию, много занимался самообразованием, изучая труды Кирхгофа, Герца, Гельмгольца, Максвелла, Маха, Лоренца, Больцмана... Математику же в те годы в Политехникуме преподавали Адольф Гурвиц и Герман Минковский. После окончания Политехникума Эйнштейн надеялся получить должность ассистента, как три его однокурсника, но Вебер не оказал ему должного содействия [3, с. 52]. Не получили продолжения и планы написания диссертации под патронатом Вебера по термоэлектричеству. Нужно отметить, что Политехникум в Берне до 1909 г. не имел права присуждать ученые степени, и Эйнштейну в любом случае нужно было обращаться за получением степени в университеты Германии или Швейцарии. Есть данные [5], что летом 1901 г. Эйнштейн намеревался по этому поводу связаться с Паулем Друде (Paul Karl Ludwig Drude), профессором Гиссенского университета и редактором журнала «Annalen der Physik» (впоследствии – 1906 – академиком Берлинской АН). В том же году Эйнштейн смог заинтересовать своей работой профессора Альфреда Кляйнера из Цюрихского университета. Из писем Эйнштейна 1901–1903 гг. к своей жене Милеве Марич (Mileva Maric)³ и другу по Политехникуму Мишелю Бессо (Michele Angelo Besso) можно узнать, что Эйнштейн уже с конца 1901 г. обсуждал в Цюрихе с Кляйнером возможные направления своей будущей диссертационной работы, а в середине 1903 г. полностью определил ее содержание [5] (первоначальный вариант своей диссертации Эйнштейн забраковал в 1902 г.).

Биограф А. Эйнштейна, немецкоговорящий швейцарский писатель Карл Зелиг (Carl Seelig, 1892–1962) утверждал, ссылаясь на Эйнштейна, что при представлении диссертации в 1905 г. Кляйнер поначалу вернул диссертацию, указав, что она слишком коротка. После этого Эйнштейн добавил в ее текст всего лишь одну (!) фразу, и диссертация прошла без дальнейших возражений. В то же время другой биограф – Абрахам Пайс (Abraham Pais, 1918–2000), коллега Эйнштейна по американскому исследовательскому центру в Принстоне, не нашел документального подтверждения этому факту [3, с. 90]. Формально в истории с диссертацией Эйнштейна А. Кляйнер должен рассматриваться как консультант (advisor), а Г. Буркхардт – как оппонент (examiner, reviewer).

³Милева Марич (1875–1948), первая жена Эйнштейна, училась вместе с ним в Цюрихском политехникуме (и один семестр – в Гейдельберге). Судя по сохранившимся письмам, она была в курсе его научных дел. Это дало повод к возникновению в конце 1980-х гг. дебатов о ее роли и участии в научном творчестве Эйнштейна начала 1900-х. В Сербии, на родине М. Марич, в 1996–2005 гг. ей установлено три бюста. Научных работ она никогда не публиковала и практически всю жизнь после отъезда на учебу в Европу прожила в Цюрихе. Занимая в рейтинге успеваемости последнее место, М. Марич по крайней мере дважды не смогла сдать выпускные экзамены в Политехникуме – в 1900 и 1901 гг. [3, с. 52].



Г. Вебер

М. Гроссман

А. Эйнштейн

А. Кляйнер

Г. Буркхардт

Цюрихский университет

Ж. Перрен

А теперь о коллизиях, касающихся непосредственно содержания диссертации А. Эйнштейна. В своей работе он получил численные оценки для размеров атомов и числа Авогадро, теоретически установив связи между этими величинами посредством двух уравнений. Как отмечалось в краткой преамбуле к диссертации, «самые старые определения истинной величины молекул основывались на кинетической теории газов, тогда как физические явления, наблюдаемые в жидкостях, до сих пор не были использованы для нахождения этих величин» [1, с. 75]. Соответственно итоги своей работы Эйнштейн формулировал так: «...Показано, что величина молекул растворенного вещества в слабом недиссоциированном растворе может быть определена по внутреннему трению раствора и чистого растворителя и по диффузии растворенного вещества в растворителе, если объем молекулы растворенного вещества велик по сравнению с объемом молекулы растворителя» [1, с. 75].

Эйнштейн проводил свои расчеты в рамках математической модели, описывающей движение крупных сферических частиц в жидкости под действием сил гидродинамического давления, на примере слабого водного раствора сахара. Одно уравнение, связывающее названные параметры, Эйнштейн получил на основе уравнения Навье–Стокса для сильно вязкой жидкости (при полном пренебрежении инерциальными свойствами молекул растворителя) с нулевыми граничными условиями для скорости на поверхности сферических частиц. При сделанных предположениях уравнение для течения жидкости сохраняет вид уравнения Навье–Стокса при замене коэффициента вязкости η на некоторое эффективное значение η^* , выражающееся через η и коэффициент φ , учитывающий долю объема, занимаемую в жидкости равномерно распределенными сферами. В диссертации выражение для эффективной вязкости было записано в виде

$$\eta^* = \eta(1 + \varphi). \quad (1)$$

Если в роли сфер выступают не подверженные диссоциации молекулы, то введенная поправка выражается как

$$\varphi = \frac{N\rho}{m} \frac{4\pi}{3} a^3, \quad (2)$$

где N – постоянная Авогадро, ρ – плотность растворенного вещества, m – молекулярный вес растворенного вещества, a – радиус молекулы; (m и не совсем точное значение φ для сахарного раствора Эйнштейну были известны).

Второе уравнение, связывающее атомные размеры и число Авогадро, Эйнштейн вывел, приравняв выражение для потока молекул растворенного вещества под действием силы давления, вынуждающей молекулы двигаться с некоторой скоростью в вязком растворителе, выражению для встречного диффузионного потока, обусловленного градиентом концентрации этих молекул. Итоговое соотношение имеет вид

$$D = \frac{RT}{N} \frac{1}{6\pi\eta a}, \quad (3)$$

где D – коэффициент диффузии, R – универсальная газовая постоянная, T – температура. Проведя расчеты, Эйнштейн получил значение для числа Авогадро $N = 2.1 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹. Как известно, современные оценки этой величины составляют $N = 6.02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹.

Через три недели после защиты Эйнштейн направил диссертацию в журнал «Annalen der Physik», где она была напечатана в 1906 г. без посвящения М. Гросс-

ману, но с дополнением, основанным на новых данных по коэффициентам диффузии и вязкости сахарного раствора [6]. В этот раз было приведено значение $N = 4.5 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹. Расхождение с первым результатом, учитывая порядок величины, значительное, но в данном случае точность определялась данными, которые «поставлялись» другими исследователями.

Как интригующе выражается в своей книге А. Пайс, «в течение пяти лет после опубликования диссертации Эйнштейна все было спокойно» [3, с. 94]. Что здесь имеется в виду? Спустя пять лет, в 1910 г., Баслен (Baselin), ученик французского физика Жана Батиста Перрена⁴, будущего Нобелевского лауреата, сообщил Эйнштейну о том, что экспериментально определенное значение эффективной вязкости значительно превосходит то, что следует из уравнения (1). Другими словами, математическая модель, предложенная Эйнштейном, не была в должной степени адекватна экспериментально наблюдаемой картине. Собственно, подобная ситуация является в физике типичной, ибо, как правило, с одним объектом (явлением, процессом) можно соотнести не одну модель, каждая из которых «работает» в рамках определенных приближений, условий и для определенных значений параметров. Степень согласованности модели с данными эксперимента и ее предсказательные свойства трактуются в пользу качества модельного построения.

Получив письмо Баслена, Эйнштейн вынужден был заняться перепроверкой модельных предположений и расчетов. В то время он уже занимал должность экстраординарного профессора теоретической физики в Цюрихском университете⁵. В качестве своего ассистента Эйнштейн пригласил в университет немецкого физика, специалиста по гидродинамике доктора Людвига Хопфа⁶ (Ludwig Hopf, 1884–1939), с которым его познакомил немецкий физик и математик Арнольд Зоммерфельд (Arnold Sommerfeld, 1868–1951) на физической конференции в Зальцбурге в октябре 1909 г. Именно Л. Хопф проверил расчеты в диссертации Эйнштейна и нашел «элементарную, но не тривиальную ошибку» при выводе формулы (1) (этот факт отражен в письме Эйнштейна к Хопфу от 27 декабря 1910 г.⁷). Более корректный результат для

⁴Перрен Жан Батист (Jean Baptiste Perrin, 1870–1942), французский физик, член Парижской АН (1923). Лауреат Нобелевской премии по физике 1926 г. «за работу по дискретной природе материи и в особенности за открытие седиментационного равновесия». С 1924 года член-корреспондент, а с 1929 – почётный член АН СССР.

⁵Ходатаем за приглашение Эйнштейна в Цюрих выступил А. Кляйнер. Предлагая его кандидатуру факультету, он называл его одним из «самых крупных физиков», которому «свойственны необычайная ясность концепций и умение развивать идеи, а также ясность и точность изложения» [3, с. 178]. Позиция Кляйнера оказала решающее влияние на положительное решение факультета; результат тайного голосования по кандидатуре Эйнштейна в марте 1909 г. был таков: 9 – «за», 1 – «воздержался».

⁶В годы работы в Цюрихе Эйнштейн и Хопф составляли не только научный, но и музыкальный дуэт: первый играл на скрипке, а второй – на фортепьяно.

⁷Это письмо опубликовано в 5 томе избранных статей А. Эйнштейна, содержащем его переписку за 1902–1914 гг. (см., например, [4]):

Zurich, 27 December 1910

Dear Mr. Hopf,

I thank you once again for the splendid toys you sent for my son.

I rechecked my old calculations and arguments and could find no errors in them. You would do a great service to the course if you made a through examination of my argument. Either there is an error in my work, or Perrin's suspended substance has a larger volume in suspended state that Perrin believes.

Издание избранных статей А. Эйнштейна (Collected Papers of Albert Einstein) в 11 томах осуществлено издательством Princeton University Press в 1987–2009 гг. Переписка за 1902–1914 гг. издана в 1993 г. на немецком языке, а в 1995 г. – на английском языке (цитируемое письмо опубликовано под номером 239).

эффективной вязкости имеет вид

$$\eta^* = \eta(1 + 2.5\varphi). \quad (4)$$

Применение этой формулы приводит к значению $N = 6.56 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹, что уже гораздо ближе к правильному результату. Линейная зависимость в правой части (4) верна, как было установлено позднее, лишь для малых значений $\varphi < 0.02$, а при внесении нелинейной зависимости в виде φ^2 сопряжено с учетом эффектов, которые в диссертации Эйнштейна не рассматривались. К ним принадлежит и броуновское движение частиц растворенного вещества. Вопросы математического моделирования броуновского движения обсуждались Эйнштейном в других работах, первая из которых, как уже говорилось, вышла в 1905 г.

В январе 1911 г. Эйнштейн опубликовал статью под названием «Исправления к моей работе “Новое определение размеров молекул”» [7], где прежде всего пояснил причину вносимых поправок, назвав фамилии Баслена, Перрена и Хопфа. Исправления были внесены и во все последующие публикации с результатами диссертации, в том числе и в [1].

При изучении диссертации А. Эйнштейна нельзя оставить без внимания замечательное соотношение между коэффициентами диффузии и вязкости (3), лежащее в основе работы. Одновременно оно является классическим примером научной конкуренции и предметом для выяснения научного приоритета. Дело в том, что формула (3) присутствует также и в статье австралийского физика шотландского происхождения, исследователя структуры воды Уильяма Сазерленда (William Sutherland, 1859–1911), направленной в марте 1905 г. для публикации в журнале «Philosophical Magazine» [8], а годом раньше (1904!) представленной на конференцию Dunedin ANZAAS conference⁸. Как отмечает А. Пайс [3], уравнение (3) «следовало бы по справедливости назвать уравнением Сазерленда–Эйнштейна» (да, вот в таком порядке!).

Подведем итоги. Научная значимость диссертации А. Эйнштейна заключалась в ценном вкладе в обоснование атомно-молекулярной теории вещества. Именно определение и переопределение числа Авогадро на основе рассмотрения различных физических явлений позволили в начале XX столетия безоговорочно утвердиться в физике атомно-молекулярной гипотезе строения вещества. В то же время, диссертация имела несомненное «прикладное значение», поскольку предметом изучения являлись свойства взвесей частиц, которые присутствуют в разнообразных материалах и продуктах.

Что же касается допущенной в диссертации вычислительной погрешности, то, как говорил Публилий Сир, «кто быстро исправляет свою ошибку, тот смягчает ее». Судя по биографическим материалам, Эйнштейн легко шел на признание и исправление своих ошибок, а также на изменение своего первоначального мнения. Например, уже в ранге создателя общей теории относительности он поначалу критиковал А.А. Фридмана за его модель нестационарной Вселенной, но потом согласился с доводами русского ученого, сообщив об этом в краткой заметке в журнале «Zeitschrift für Physik». Кроме того, племя соискателей ученых степеней может быть благодарно Эйнштейну за его диссертационную ошибку, поскольку получило в свои руки своего рода «индальгенцию», смягчающую эффект от промахов в научных публикациях.

⁸См. <http://www.ph.unimelb.edu.au/dnj/wyop/wyop2005-sutherland-essay.html>.

Если же говорить о процедуре получения А. Эйнштейном докторской степени, то после написания научного сочинения, претендующего на роль диссертации, ему пришлось, как мы видели, выполнить всего лишь три формальных шага: определиться с университетом, в который следует представить работу (Цюрихский университет), опубликовать работу (Берн) и представить ее оттиск в деканат философского факультета. Там ее уже ждали положительные заключения консультанта и рецензента, отношение которых к работе было сформировано в процессе предшествовавшего научного общения с соискателем. Впрочем, достижение подобного «согласия» представляло и представляет во все времена неформальную и немалую (если не самую главную) трудность для претендента на ученую степень. Обращает на себя внимание тот факт, что в своей творческой автобиографии⁹, написанной в 1949 г., Эйнштейн о своей диссертации не говорит ни слова!

2. Путь к ученой степени в России

В России с присуждением ученых степеней все обстояло гораздо сложнее, поскольку процедура защиты, регламентированная нормативными актами, предусматривала дополнительные обязательные испытания для соискателя – магистерские экзамены и публичную защиту диссертации при большем количестве оппонентов и широкой аудитории слушателей. На юридическом факультете Петроградского университета своего рода всероссийский «рекорд» установил Пителим Сорокин, потративший на сдачу магистерских экзаменов по правоведению всего лишь два года, и защитивший диссертацию в Петроградском университете 22 апреля 1922 г. в условиях, когда ученые степени и звания были декретом правительства отменены. Однако рассмотрим все по порядку.

Научную «траекторию» талантливого студента и выпускника российского университета в начале XX столетия можно проследить на примере Пителима Александровича Сорокина, будущего автора беспрецедентных по объему и эмпирическому охвату социологических трудов. Сдав экзамены в гимназии экстерном (в Великом Устюге), Сорокин в 1909 году поступил в руководимый В.М. Бехтеревым столичный Психоневрологический институт, где открыли кафедру социологии всемирно известные в то время ученые – Евгений Валентинович Де Роберти (1843–1915) и Максим Максимович Ковалевский (1851–1916). Через год Сорокин перешел на юридический факультет Петербургского университета, где работал выдающийся русский правовед начала века Лев Иосифович Петражицкий (1867–1931). Среди своих преподавателей П.А. Сорокин называет также Михаила Ивановича Туган-Барановского (1865–1919), Николая Николаевича Розина (1871–1919), Александра Александровича Жижиленко (1873–нач. 1930-х), Николая Николаевича Покровского (1865–1930), Давида Давидовича Гримма (1864–1941), Михаила Ивановича Ростовцева (1870–1952) и Николая Онуфриевича Лосского (1870–1965). В своих воспоминаниях П.А. Сорокин писал.

«Мне просто повезло, что составляющие такое чудесное созвездие ученые были моими учителями, а позже и друзьями. Эти выдающиеся профессора не требовали,

⁹Творческая автобиография А. Эйнштейна в переводе и с комментариями академика В.А. Фока опубликована в журнале «Успехи физических наук» (1956, т. 59, вып. 1).

чтобы мы сильно принимали на веру их теории – именно этим они и отличались от ученых среднего уровня. Напротив, мэтры скорее даже поощряли обоснованное критическое отношение к их точке зрения и всей душой приветствовали проявление творческой оригинальности у студентов.

Высказываемые мною на семинарах высокие оценки научного вклада моих учителей, так же как и критика слабостей их теорий, и некоторые собственные конструктивные идеи, похоже, производили на мэтров благоприятное впечатление. Оно только усилилось, благодаря нескольким антропологическим, социологическим, юридическим и философским исследованиям, опубликованным мною в солидных научных журналах в студенческие годы, и изданию моего первого основательного труда “Преступление и кара, подвиги и награда”, когда я был еще третьекурсником (1913 г.). В результате незаслуженно высокой оценки моих скромных научных достижений на втором и третьем курсах университета М.М. Ковалевский предложил мне должность своего частного секретаря и ассистента в исследовательской работе, а Де Роберти – ассистента на его курсе и соредатора серии “Новые идеи в социологии”. В то же время Петражицкий и Бехтерев пригласили меня быть соредктором “Новых идей в правоведении” и “Вестника психологии и криминальной антропологии”...

В общем и целом, студенческие годы в университете были временем интенсивных и полезных научных занятий. В этот период я приобрел солидные знания в областях философии, психологии, этики, истории и естественных наук, не говоря уже о социологии и праве...

В 1914 г. я окончил Санкт-Петербургский университет, имея диплом первой степени. По окончании университета мне предложили остаться при кафедре для подготовки к профессорскому званию. Я с радостью принял предложение, так как оно полностью устраивало меня и соответствовало моему выбору науки в качестве дела всей жизни. Очень хорошая стипендия, предоставленная мне по меньшей мере на четыре года подготовки к степени магистра и званию приват-доцента, обеспечивала мою жизнь и давала возможность все время посвящать науке. Поскольку социологии не было в смысле дисциплины, одобренной администрацией, я вынужден был выбрать одну из тех, что преподавались в университете. После некоторых колебаний я остановился на уголовном праве и пенологии в качестве основной, и конституционном праве в качестве вспомогательной областей специализации. Этим дисциплинам я отдавал большую часть времени в течение двух следующих лет моей аспирантуры. Углубленные занятия правом никоим образом не препятствовали моим социологическим трудам, которым я посвящал много времени в рамках выбранной специализации.

Своим обучением в университете я был доволен, заработав не только диплом и право быть “оставленным при университете для приготовления к профессорскому званию”, но и репутацию способного молодого школяра, обещающего вырасти в ближайшие годы в выдающегося и творчески мыслящего человека» [9, с. 60,61].

По свидетельству того же П.А. Сорокина, от молодых ученых, оставленных для подготовки к профессорскому званию, не требовалось ходить на лекции и семинары, сдавать какие-либо экзамены или выполнять курсовые работы. Им было необходимо лишь сдать устный экзамен на степень магистра, и только затем – представить и успешно защитить магистерскую диссертацию, «после того как специальная комиссия уважаемых специалистов-профессоров нескольких университетов допускала их к защите» [9, с.69]. В исключительных случаях при защите могла быть присуждена и степень доктора, когда выходящий на защиту магистерской диссертации ученый уже был хорошо известен. Степень доктора присуждалась соискателям,

чьи диссертации имели гораздо большее научное значение, чем рядовая магистерская работа¹⁰. Диссертации на обе степени обязательно представлялись в виде значительных по объему опубликованных работ. Устный экзамен на докторскую степень не предусматривался.

Составить представление об уровне требований, предъявлявшихся к сдающим магистерские экзамены, можно опять же из воспоминаний П.А. Сорокина.

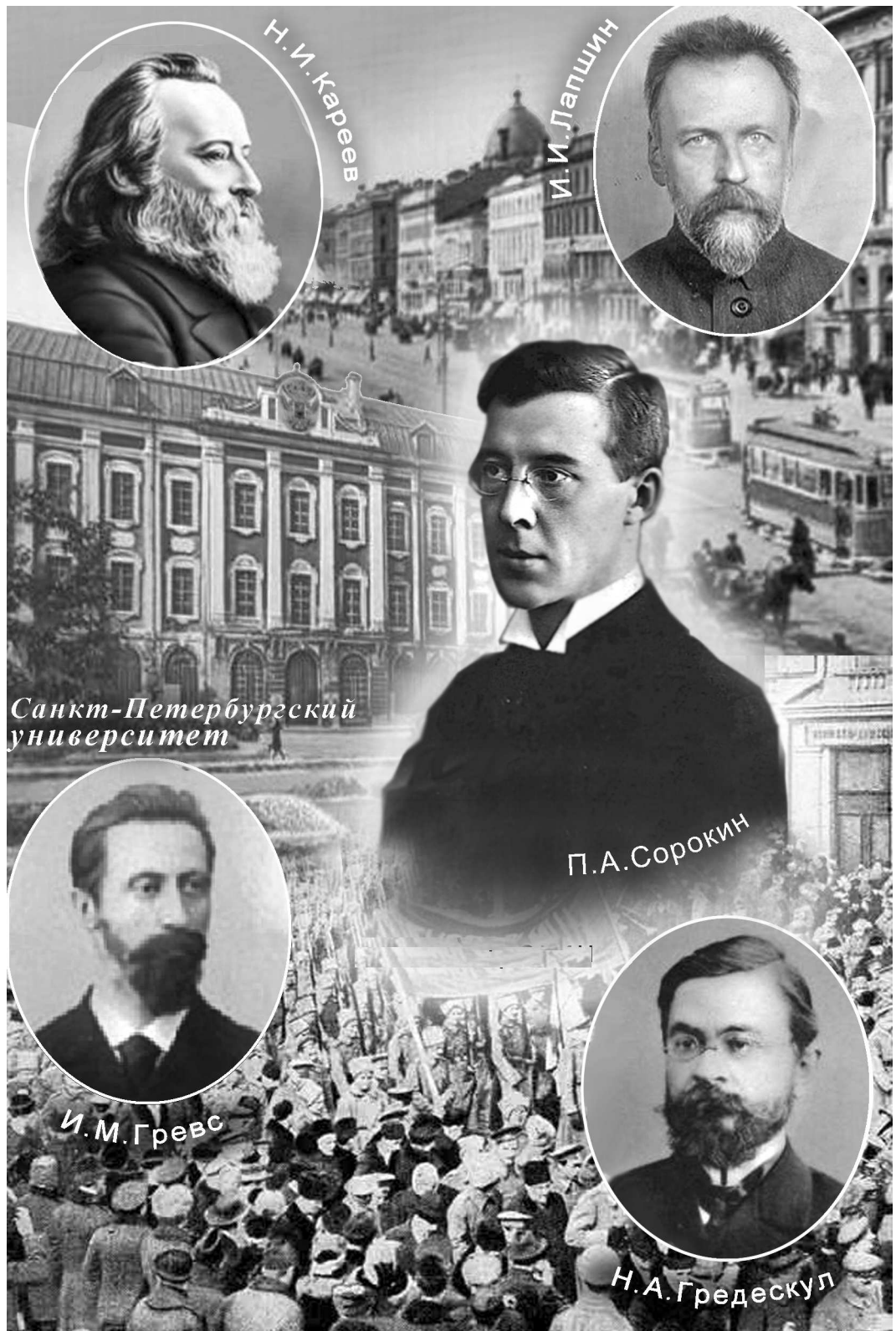
«После моего назначения на подготовку к профессорству, преподаватель криминального права Н. Розин дал мне список из примерно пятисот названий русских и зарубежных трудов по криминологии. Профессор А. Жижиленко вручил мне подобный список из 250 работ по уголовно-процессуальному законодательству, профессор Н. Лазаревский добавил примерно 150 названий по конституционному праву. Некоторые из этих трудов, как, например, немецкий “Vergleichende Partellung” по криминальному праву и процессу (подготовленный известными немецкими профессорами для нового проекта уголовного кодекса Германии), состояли из почти сотни солидных томов. Передавая мне списки литературы, профессора говорили, что я должен показать хорошее знание этих работ, чтобы успешно сдать экзамен на магистра. Их не интересовало, как я буду овладевать этой массой знаний, но овладевать ими я должен. Если время от времени мне понадобятся консультации с ними или другими преподавателями, я могу рассчитывать на их помощь. Вот эти-то списки с такой очень короткой инструкцией и представляли собой все требования к устному испытанию на степень магистра.

До первой мировой войны подготовка к этим экзаменам занимала примерно четыре, или даже больше, года. В течение такого срока соискатели обычно на год-два уезжали за границу поработать с зарубежными знаменитостями в своей области. Но моя подготовка проходила в годы войны, в период, когда поездка за рубеж и работа с иностранными учеными стали невозможны. По данной причине я был вынужден заниматься в России без преимуществ занятий и консультаций с зарубежными специалистами. Некоторые из их работ военного времени продолжали каким-то образом поступать в университетскую библиотеку. Например, уже в декабре 1916 г. мне удалось разыскать там трактат по общей социологии В. Парето, только что опубликованный в Италии...

Освобожденный от денежных забот, благодаря приличной стипендии, в течение 1914–1916 гг. я мог отдавать все свое время подготовке к магистерскому экзамену и социологическим исследованиям. С молодым задором отдавшись этим двум занятиям, я в рекордный срок – за два года вместо обычных четырех или более лет – подготовился и успешно сдал устный экзамен на степень магистра в октябре-ноябре 1916 года.

...Такой экзамен был сложнее, чем испытание на степень доктора философии в американских университетах. Во-первых, экзамен занимал четыре дня: день – на уголовное дело, день – на судопроизводство, день – на государственное право и последний – на написание обстоятельного эссе по теме, которую предлагала экзаменационная комиссия. Каждый день экзамена длился от трех до пяти часов. Во-вторых, в состав экзаменаторов входили не только члены специальной комиссии, создаваемой именно для этих целей, но и большинство профессоров всего юридического факультета, объединявшего специалистов в областях права, экономики и политических наук. Поэтому круг вопросов, которые задавали профессора, был шире, а сами вопросы сложнее, чем на экзаменах в американских университетах, где в комиссию входят всего три-четыре члена. После экзамена я получил звание “магистранта уголовного права”, что позволяло мне стать приват-доцентом Санкт-Петербургского университета» [9, с. 71,72].

¹⁰Возможность такого исхода защиты предусматривал общий устав российских университетов 1884 г. (требовалось единогласное голосование). За период 1884–1917 гг. докторами без защиты магистерской диссертации стали, по данным Г.Г. Кричевского, не более 30 человек [10].



В начале XX столетия вопрос о магистерских экзаменах в России стал предметом активных дебатов (как и ряд других вопросов по проблемам диссертационных защит) в рамках работы комиссии, созданной Министерством народного просвещения [11]. Так, профессор Б.В. Струве ссылаясь на опыт германских университетов, где, благодаря отсутствию сложных условий, которыми «формально обставлена академическая дорога» в России, были созданы предпосылки «обилия научных сил и научной производительности».

«Молодому человеку, имеющему наклонность к научной работе и творческие способности, не приходится в Германии проходить через целый лес экзаменов и обязательных работ, способных только подавить творческий процесс самостоятельной мысли. Русский ученый, потратив свои молодые годы на преодоление формальных препятствий для достижения кафедры, зачастую теряет всякую энергию для продолжения ученых трудов и почти прекращает свою научную деятельность по получении степени доктора. При рассмотрении вопроса о средствах поддержания научного уровня профессорской среды имеет значение не столько тот багаж, с которым профессор всходит на кафедру, сколько тот, с которым он ее покидает» [11, с. 83].

Заметим, что основные элементы процедуры защиты диссертаций в России регламентировались такими общегосударственными нормативными актами, как «Положение о присуждении ученых степеней» (1819, 1837, 1844, 1864 гг.) и «Общий устав российских университетов» (1804, 1835, 1863, 1884 гг.). В целом необходимость и значимость экзаменов для подготовки научно-педагогических кадров в научной среде не оспаривалась, но всегда признавалась необходимость их совершенствования в связи со сложностью и зависимостью результата (это можно заметить и в рассказе П.А. Сорокина от «усмотрения экзаменатора»). В «Положениях» требования к сдаче экзаменов меняются от документа к документу: сокращается число экзаменов, устанавливаются предельные сроки продолжительности магистерской и докторской экзаменационной сессии (1844), отменяются устные и письменные испытания на соискание ученой степени доктора наук (1864). Кроме того, в качестве «ограничителя» круга дисциплин и вопросов, на которые должен был отвечать соискатель, стала играть роль (по мере развития науки) детализация «классов» («разрядов», специализаций) наук. Динамика числа специальностей (разрядов), по которым могли присуждаться ученые степени магистра и доктора наук, такова: 14 (1819), 17 (1837), 35 (1844) и 39 (1864). Совершенствование разрядов наук проводилось и впоследствии [12].

Очередной этап сравнения процессов диссертационных защит в России и Европе – это рецензирование работ на предварительной стадии их рассмотрения в университетах. Сведений о том, что работу А. Эйнштейна кроме А. Кляйнера и Г. Буркхардта кто-то рассматривал еще, не имеется. В России же «Положение» 1864 г. постановляло:

«Желающий приобрести степень Магистра обязан, по выдержании испытания, представить диссертацию на избранную им самим и факультетом одобренную тему. Диссертация сия... рассматривается по распоряжению Декана, всеми членами факультета порознь, а письменный разбор оной делает Профессор, или занимающий кафедру Доцент, к предмету которого принадлежит сочинение... Если диссертация признана будет удовлетворительною, то факультет допускает Кандидата к публичному защищению оной, и, по отчетливом с его стороны исполнении сего условия, представляет Совету об утверждении его в степени Магистра» [13, с. 109].

Этот пункт «Положения» на рубеже XIX и XX веков был подвергнут критике. Так, профессор Г.Ф. Шершеневич¹¹ в своей книге «О порядке приобретения ученых степеней» отмечал, что «на самом деле диссертации рассматриваются только лицами, которым поручается отзыв, специалистами по данной научной области и только в редких случаях многими членами факультета, когда затронутая тема имеет общий для всех научный вопрос или когда диссертация почему-либо поднимает личные вопросы» [14, с. 19]. В этой связи автор подвергал сомнению объективность «единоличной» оценки диссертации и перечислял целый набор причин, которые могут усугубить необъективность отзыва о диссертации, а именно: симпатичность (несимпатичность) личности магистранта, умение (неумение) соискателя польстить профессорскому самолюбию, единство или разногласие в политических и (или) научных взглядах, а также и опасение, что соискатель может лишиться профессора слушателей и места и т.д. Именно на последнюю ситуацию обращает внимание П.А. Сорокин в своих мемуарах.

«Получив степень, любой магистр мог поступить в любой университет в качестве приват-доцента и вести любой лекционный курс или семинар в своей области, в том числе и конкурирующий или дублирующий курсы, читаемые ординарными профессорами.

Зарплата лекторов из числа приват-доцентов была много ниже, чем у ординарных профессоров. Но если приват-доцент был выдающимся ученым и популярным лектором, он часто имел больше студентов, записывающихся на его курс и, соответственно, больший доход, чем у менее знаменитого полного (ординарного) профессора. Точно так получилось с приват-доцентом М. Туган-Барановским и профессором Георгиевским в Санкт-Петербургском университете. Оба они читали параллельные курсы по политической экономии, но число студентов, записывавшихся на курс Туган-Барановского, было во много раз больше, чем у Георгиевского. Их доходы также различались соответственно. В конце концов, талантливый приват-доцент получил должность то ли экстраординарного, то ли ординарного профессора» [9, с.70].

Завершающим этапом на пути соискателя ученой степени в России всегда была публичная защита диссертации. Имея возможность сравнивать российский и зарубежный опыт защит, П.А. Сорокин очень высоко оценивал этот акт инициации соискателя.

«Что касается степени «магистра» уголовного права, то я должен был представить одобренную университетской комиссией диссертацию и защитить ее в весьма напряженном диспуте с официальными оппонентами, назначенными университетом, неофициальными оппонентами и любым желающим высказаться из числа публики. День защиты магистерской или докторской диссертации был праздником? Дата диспута заранее объявлялась в университетских изданиях и всех солидных газетах. Для диспута специально

¹¹Габриэль Феликсович Шершеневич (1863-1912) – юрист, специалист и автор классических работ по гражданскому и торговому праву, профессор Казанского и Московского университетов, депутат I Государственной Думы. Вехи его пути к ученым степеням и званиям были таковы. В 1885 г. он окончил юридический факультет Казанского университета со степенью кандидата (такая степень временно существовала в дореволюционной России) юридических наук, представив работу «Акционерные компании». В том же году был оставлен в университете «для приготовления к профессорскому званию» по кафедре торгового права. В 1887 г. сдал магистрантский экзамен, а в 1888 г., прочитав две пробные лекции «О праве замужней женщины на производство торговли» (по личному выбору) и «О чеках» (по назначению факультета), занял должность приват-доцента по кафедре торгового права.

резервировали одну из самых больших аудиторий университета. На диспуте, который проводился под председательством ректора или проректора, присутствовали все преподаватели соответствующего факультета, некоторые профессора с других факультетов, желавшие послушать защиту, много не университетских специалистов, многие студенты и большое количество заинтересованной публики.

При таком стечении народа диспут открывался, и зачитывалась Curriculum vitae¹² соискателя и список его основных публикаций и научных достижений. Затем каждый официальный оппонент высказывал критику работы, особо выделяя слабые или сомнительные места в ней. На высказанные критические замечания соискатель отвечал по пунктам каждому из выступавших. Вслед за официальными выступали неофициальные оппоненты – факультетские преподаватели, желавшие участвовать в обсуждении, внешние эксперты и, наконец, любой человек из числа присутствующих. На каждое из критических замечаний опять-таки диссертант должен был сразу же отвечать. Весь диспут обычно продолжался от пяти до семи часов.

По завершении проводилось тайное голосование между всеми преподавателями факультета, пришедшими на диспут, по поводу присвоения соискателю степени доктора или магистра. Вопрос решался большинством.

Обмен критикой и ответами на нее представлял собой одно из наиболее волнующих и возбуждающих зрелищ, которым я когда-либо был свидетелем. В этих научных дебатах стороны обнаруживали глубочайшее знание предмета, отличную логику, юмор, мудрость и блестящую оригинальность мысли. Это в самом деле была чудесная баталия зрелых и компетентных умов, столкнувшихся в совместном поиске истины и достоверных знаний. Как для участников диспута, так и для всех присутствующих на нем, это было ярчайшей демонстрацией интеллектуальных возможностей и настоящим академическим наслаждением. Понятно, что каждый такой диспут подробно освещался в прессе и служил темой для дискуссий в интеллектуальных кругах еще некоторое время после самого диспута. Я могу только глубоко сожалеть, что в американских университетах не бывает таких праздников мысли» [9, с. 73,74].

В упоминавшейся уже дискуссии начала прошлого века звучали предложения отменить диссертационные диспуты. Например, Г.Ф. Шершеневич приводил такой довод:

«С одной стороны, вы видите взволнованного и расстроенного диспутанта, с трудом собирающего свои мысли, с другой – оппонентов, в лучшем случае скупающих от обязанности повторять публично то, что уже было высказано ими в факультете, в худшем случае поставивших себе задачу блеснуть перед публикою своим остроумием на счет беззащитного диспутанта. Значение диспута для спорящих сторон далеко не одинаковое: один в случае неудачи рискует всем, а другие ничем, кроме уколов самолюбия... При таком положении словесное состязание далеко не удовлетворяет тому равенству сторон, которое составляет необходимое условие диспута...» [11, с. 13].

Но все же мнения в пользу такого рода диспутов преобладали. Так, профессор Я.Я. Никитинский¹³ называл публичную защиту диссертации «праздником науки».

¹²Жизнеописание (лат.)

¹³Никитинский Я.Я. (1854–1924) считается одним из основоположников «научного товароведения» в России. Одна из его многочисленных книг – «Руководство по товароведению с необходимыми сведениями из технологии» до революции переиздавалась неоднократно. В ней рассматривались вопросы строения, состава, свойства и технологии переработки сырья и материалов, используемых в промышленном производстве.

«Такой праздник воспитывает молодежь – студентов, воспитывает молодые силы, работающие при учебном заведении в качестве преподавателей, ассистентов, лаборантов и пр., и, наконец, вводит струю освежения и в жизнь профессоров; такой праздник поднимает научный пульс школы, и уже это одно говорит много за полезность дарования высшим техническим школам права присуждения ученых степеней» [11, с.86].

П.А. Сорокину довелось ощутить себя триумфатором публичного диспута, состоявшегося в Петроградском университете. На защиту в качестве магистерской диссертации он представил двухтомник «Система социологии», изданный в 1920 г., по утверждению автора, тиражом 10 тысяч экземпляров. Обстоятельства издания книги носили полудетективный характер.

22 апреля 1922 года в здании Петроградского университета, в Большой физической аудитории при большом стечении именитых ученых и студентов, под председательством декана исторического факультета И.М. Гревса¹⁴ был устроен открытый диспут по книге П.А. Сорокина. В начале заседания ученый секретарь факультета огласил биографические сведения и список трудов диссертанта. Далее П.А. Сорокин, охарактеризовал «принципы, преимущество, методы и цели двух томов» [15].

Затем в качестве назначенных университетом «официальных оппонентов» выступили крупнейшие обществоведы того времени: историк, философ и социолог Николай Иванович Кареев¹⁵, социолог и политический деятель Константин Михайлович Тахтарев¹⁶ и философ Иван Иванович Лапшин¹⁷. Высказались также правовед Николай Андреевич Гредескул¹⁸ и социолог С.И. Тхоржевский.

¹⁴Гревс Иван Михайлович (1860–1941) – историк, краевед, педагог и общественный деятель, основоположник отечественного городоведения и экскурсионного метода преподавания истории. Профессор Высших женских (Бестужевских) курсов (1892–1918), Санкт-Петербургского (Петроградского, Ленинградского) университета (1898–1923, 1934–1941). 27 октября 2010 г. в Петербурге состоялась конференция «И.М. Гревс и петербургское краеведение», посвященная 150-летию со дня рождения ученого.

¹⁵Кареев Николай Иванович (1850–1931) – русский историк, философ и социолог, профессор Варшавского (1879–1884) и Санкт-Петербургского (с 1886, с перерывом в 1899–1906 гг. по подозрению в политической неблагонадежности) университетов. Депутат I Государственной Думы от партии кадетов. С 1910 – член-корреспондент Российской АН, с 1929 – почетный член АН СССР. По отзыву Н.И. Кареева, первыми «профессиональными преподавателями социологии» в России были К.М. Тахтарев и П.А. Сорокин.

¹⁶Тахтарев Константин Михайлович (1871–1925) – российский социолог, политический деятель, участник созданного В.И. Лениным Союза борьбы за освобождение рабочего класса, член группы «Освобождение труда» Г.В. Плеханова. Читал лекции по социологии в созданном в 1908 году Психоневрологическом институте в качестве ассистента на кафедре социологии и (с 1911 г.) – на Высших курсах П.Ф. Лесгафта (по рекомендации М.М. Ковалевского).

¹⁷Лапшин Иван Иванович (1870–1952) – русский философ, доктор философии (1906), профессор философии Санкт-Петербургского университета, автор статей «Энциклопедического словаря» Ф.А. Брокгауза и И.А. Ефрона. Выслан из России в 1922 году. Читал философию в Пражском университете.

¹⁸Гредескул Николай Андреевич (1864–1941) – юрист, публицист, политический деятель. В 1890–1900-х гг. – профессор и декан юридического факультета Харьковского университета. Один из создателей (1905) и член ЦК партии кадетов (до 1916), товарищ (заместитель) председателя I Государственной думы (1906), участник подписания Выборгского воззвания. С 1908 г. – профессор Петербургского политехнического института, сотрудник ряда периодических изданий. В 1920–1930-х гг. преподавал в ленинградских вузах.

Выступавшие назвали книгу выдающимся достижением русской социологической школы. Замечания и возражения, судя по краткому стенографическому отчету, опубликованному в журнале «Экономист» [15], были Сорокиным с блеском отведены. После шестичасового (!) обсуждения состоялось тайное голосование профессоров факультета. Формально, в условиях отмены в стране ученых степеней, степень магистра не могла быть присуждена. Результат защиты был достигнут косвенно: итоги голосования выразились в «единогласном признании историческим исследовательским институтом работы удовлетворительной». Как говорилось в отчете [15], «многочисленная публика наградила диспутанта долго не смолкаемыми аплодисментами». Осенью того же года П.А. Сорокин был выслан из России. Впоследствии он оставил содержательные воспоминания о многих обстоятельствах подготовки и защиты своей диссертации. «В тот вечер я устал, – писал он, – но был счастлив, что удачно прошел “сквозь огонь и воду”» [9, с.73].

Заключение

Изначально в России складывалась модель аттестации научных и научно-педагогических кадров, отличная от западных систем. Главные ее признаки, дополнительные к требованию надлежащего представления результатов диссертации в научной печати, состоят в следующем:

- регулирование порядка присуждения ученых степеней не на уровне отдельно взятого университета, а на базе нормативных актов общегосударственного значения;
- обязательность кандидатских (в современной терминологии) экзаменов;
- наличие двух и даже трех защищаемых научных степеней;
- обязательный публичный характер защиты диссертации с привлечением двух или трех (в зависимости от статуса диссертации) официальных оппонентов.

Одно время (1918–1934) ученые степени в СССР отменялись вообще, но возникший кадровый преподавательский дефицит пришлось потом «компенсировать» присуждением ученых степеней без защит диссертаций.

И в дореволюционный, и советский периоды неоднократно возникали дискуссии по реформированию системы аттестации и переходу на западные образцы, при которых решение о присуждении степеней принадлежит факультетам. Эти предложения не нашли правовой поддержки. Защиты диссертаций сегодня проводятся в специально созданных диссертационных советах при научных и учебных заведениях, имеющих (сохраняющих) научный потенциал. Процедуры защит детально прописаны в соответствующих положениях. Последнее слово в вопросе о присуждении (лишении) ученой степени принадлежит единому центру – Высшей аттестационной комиссии.

Законодательные акты, тем не менее, не могут охватить и регламентировать все аспекты отношений, в которые приходится вступать лицам, участвующим в процессе научной аттестации. Здесь начинают учитываться и играть свою роль сложившиеся традиции, определенные правила научного этикета и морали, в том числе степень осознания и понимания такой категории, как научная репутация.

Представляется, что в настоящее время проблема многогранного повышения статусного уровня ученого, как никогда, актуальна [16]. Исчезновение системы отраслевой науки, отток кадров за границу в 90-е годы прошлого века, падение престижности научной и образовательной деятельности, слабый уровень подготовки школьников, потеря преемственности поколений внутри высшей школы и академической науки – вот главные проблемы, требующие сегодня более активного решения.

Библиографический список

1. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. М.: Наука, 1966. Т. 3.
2. *Einstein A.* Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen. Inaugural dissertation. Zürich Universität. Bern: Buchdruckerei K.J. Wyss, 1905.
3. *Пайс А.* Научная деятельность и жизнь Альберта Эйнштейна. М.: Наука, 1989. 568 с.
4. http://www.astro.physik.uni-potsdam.de/äfeld/einstein/einstein_sub1.html.
5. http://en.wikipedia.org/wiki/Alfred_Kleiner.
6. *Einstein A.* Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen // *Annalen der Physik (Leipzig)*. 1906. Bd 19. S. 289.
7. *Einstein A.* Berichtigung zu meiner Arbeit: «Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen» // *Annalen der Physik (Leipzig)*. 1911. Bd. 34. S. 591.
8. *Satherland W.* // *Philosophical Magazine*. 1905. Vol. 9. P. 781.
9. *Сорокин П.А.* Долгий путь: Автобиографический роман / Пер. с англ. П.П. Кротова, А.В. Липского. Сыктывкар: Союз Журналистов Коми АССР; Шыпас, 1991. 304 с.
10. *Кричевский Г.Г.* Ученые степени в университетах дореволюционной России // *История СССР*. 1985. № 2 (март–апрель). С. 141.
11. Труды высочайше учрежденной комиссии по преобразованию высших учебных заведений. СПб., 1903. Вып. 2.
12. *Кононова С.В., Якушев А.Н.* Развитие разрядов наук в университетах Российской империи // *Высшее образование в России*. 2010. № 4. С. 130.
13. Положение об испытаниях на звание действительного студента и на ученые степени. 04.01.1864 г. // *Сборник постановлений по Министерству народного просвещения. 1850–1864.* СПб., 1867. Т. 3. С. 636–643; Штаты и прил. С. 107.
14. *Шершеневич Г.Ф.* О порядке приобретения ученых степеней. Казань: Типо-литография Императорского Казанского Университета, 1897.
15. Диспут П.А. Сорокина // *Экономист*. 1922. № 4–5. С. 277.
16. *Хохлов Д.Р.* О проблемах физической науки и образования в современных условиях // *Alma Mater (Вестник высшей школы)*. 2010. Вып. 3. С. 20.

Саратовский государственный
университет имени Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 12.01.2011

ALBERT EINSTEIN AND PITIRIM SOROKIN: HISTORY OF DISSERTATION DEFENCES

V.M. Anikin

The difference between procedures of receiving scientific degrees in Europe and Russia is demonstrated by means of comparison of thesis defences by Nobel laureate Albert Einstein (1876–1955) in Zurich University (1905) and outstanding Russian/American sociologist Pitirim Sorokin (1889–1968) in Peterburg University (1922).

Keywords: Thesis, receiving scientific degree, public defence.



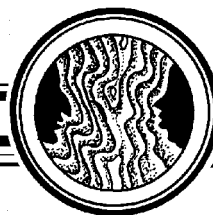
Аникин Валерий Михайлович – родился в Аткарске Саратовской области (1947). Окончил физический факультет СГУ (1970). Доктор физико-математической наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерной физики, декан физического факультета СГУ, ученый секретарь диссертационного совета. Область научных интересов – математическое моделирование хаотических и стохастических процессов. В числе работ – монография «Аналитические модели детерминированного хаоса (совместно с А.Ф. Голубенцевым, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007)», методическое пособие «Диссертация в зеркале автореферата» (совместно с Д.А. Усановым, Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009). Рекомендовано Управлением аттестации научных и научно-педагогических работников Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки).

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
E-mail: AnikinVM@info.sgu.ru

Из рецензии

...Под впечатлением статьи задумался: не оттого ли более жесткие правила для соискателей в России (а тем паче в СССР), чем на Западе, что в нашем отечестве к человеку всегда было мало доверия, а чувство солидарности, дух корпорации если и существовал, то где-то на периферии культуры, скажем, у гонимых старообрядцев или купцов-старообрядцев? Но и правонарушителей у нас всегда хватало, и злодеев, и шарлатанов – значит, нужно око государево за теми, кто пошел в ученые? Где имела силу *репутация*? Только в узких кругах, кружках приличных людей, но они и до 1917 года не могли быть законодателями моральной моды для всего пестрого российского сообщества. А уж при совласти... Эти кружки сократились до 3–4 персон в городе, но к 1960 году они просто вымерли. А сегодня впору создавать тайную полицию нравов для санации нашего научного сообщества, только из кого ее рекрутировать?

*Б.Н. Пойзнер, профессор
Томского государственного университета*



ФИЗИКИ. ВЗГЛЯД СО СТОРОНЫ

А.И. Аврус

В 1947 году я поступил учиться на исторический факультет СГУ, а затем долгие годы работал в университете: зам. секретаря комитета комсомола, преподавателем кафедры истории КПСС, профессором кафедры отечественной истории в новейшее время и постоянно контактировал со студентами и преподавателями физического факультета. Моя преподавательская деятельность в СГУ в 1966 году началась именно на физическом факультете, где я несколько лет читал лекции и вел семинарские занятия на 1-м курсе. Поэтому, думаю, неплохо знал многих студентов и преподавателей-физиков, с некоторыми сохранил дружеские отношения до настоящего времени.

Начну свои воспоминания с тех студентов физического факультета, которые учились в университете одновременно со мной. Среди них были три моих одноклассника, выбравшие физический факультет: Григорий Мясковский, Владилен Савельев и Борис Снегирев. Все трое хорошо знали физику и математику, многое умели делать своими руками и прекрасно проявили себя в университете.

Очень талантливым был Гриша Мясковский, окончивший 19-ю мужскую среднюю школу (МСШ) с серебряной медалью. Жизнерадостный, несмотря на трудные материальные условия жизни, подвижный как ртуть, доброжелательный к людям, особенно к детям, Гриша с 8-го класса неизменно был пионервожатым, вечно в окружении любивших его детей. Все свое свободное время он отдавал им. К сожалению, он трагически погиб перед защитой дипломной работы, и страна лишилась талантливого ученого и прекрасного педагога.

С Владиленом Савельевым мы учились вместе с 1-го класса, особенно подружились во время Великой Отечественной войны, когда совместно готовили уроки, проводили почти все свободное время. Наши дружеские отношения продолжались и в студенческие годы, и когда он получил назначение в Москву, где работал до конца жизни. Это был очень вдумчивый, основательный человек, прекрасный товарищ, на которого всегда можно было положиться. Насколько я знаю, он всю жизнь проработал в одном учреждении, которое, если я не ошибаюсь, называлось первоначально СКБ-1 (им руководил в 1952 году, когда Владилен получил туда назначение, Сергей Берия).

Своеобразным человеком был Борис Снегирев. Профессорский сын, он отличался большими способностями, солидной эрудицией, независимостью суждений, иногда излишней категоричностью в выводах, но также тяжелым, неуживчивым характером. С ним интересно было беседовать, но вряд ли можно было по-настоящему дружить. Кстати, Борис через отца был знаком с профессором-медиком М. Маричем, работавшим до 1944 году в медицинском и зооветеринарном институтах Саратова и в СГУ, шурином великого Эйнштейна. Через него я узнал, что Эйнштейн переписывался с Маричем, когда тот работал в Саратове (интересно, куда девались эти письма!?)

Естественно, что через своих одноклассников я познакомился и с другими их однокурсниками-физиками. Многих из них помню и сейчас, а с Д.И. Биленко поддерживаю дружеские отношения до сегодняшнего дня. Давид и в студенческие годы выделялся среди студентов своими глубокими знаниями (не случайно он получал стипендию им. И. Ньютона; была тогда в университете такая в единственном экземпляре), толерантностью, общительностью.

Среди тех, кто учился на физическом факультете параллельно со мной, знал я Ю. Сачкова (будущего доктора философских наук, заместителя директора Института философии АН СССР), с которым не раз сражался за шахматной доской в межфакультетских соревнованиях, И. Акчурина (тоже ставшего известным философом, доктором философских наук), Г. Пахомова, В. Зелепукина, Н. Карякина (уехавшего после защиты кандидатской диссертации в Куйбышевский СХИ заведующим кафедрой физики). Коля Карякин жил напротив меня на ул. Некрасова, мы с ним много общались и в студенческие годы, и после окончания университета. Оба играли в баскетбол и были страстными болельщиками. Сколько бы ни собралось людей вокруг спортивных площадок, наличие Коли можно было сразу определить: только он умел так аплодировать – как-будто с огромной силой друг о друга стучали две деревяшки.

Из числа студентов других курсов физического факультета конца 1940–начала 1950-х мне запомнились Василий Чуенков, комсомольский лидер факультета и прекрасный студент, получавший Сталинскую стипендию; его однокурсник Леонид Тимонин, разносторонний спортсмен, способный студент, в будущем один из руководителей ядерного центра Арзамас-16, лауреат Ленинской, Сталинской, Государственных премий СССР и РФ; Алексей Штыров, фронтовик, окончивший 19-ю МСШ на год раньше меня и работавший после завершения учебы на физическом факультете, страстный яхтсмен и талантливый ученый; Дмитрий Худяков, самый разносторонний спортсмен университета, положивший вместе с геофизиком Анатолием Кукиным начало туризму не только в университете, но и в Саратовской области; Василий Кошелев, бывший тогда одним из сильнейших легкоатлетов-спринтеров университета и самым аккуратным участником университетского хора, а теперь он профессор физического факультета.

Еще в школе установились у меня дружеские связи с Сергеем Шушуриным, который учился и в школе, и на физическом факультете вместе со Штыровым. Сергей был в те годы в чем-то уникальным человеком, единственным из тех, кого я знал, кто, оканчивая школу, владел уже несколькими иностранными языками. Впоследствии Сергей выучил фактически все европейские языки, во время одной из наших последних встреч он сказал, что завершает изучение угро-финских языков и ему остается в Европе только албанский. Вот его рассказ о том, как он изучил датский язык. Он давно переводил литературу по физике с ряда языков, и как-то раз

редакция одного физического журнала обратилась к нему с просьбой перевести с датского языка большую статью родственника Нильса Бора, тоже физика. Сергей не знал тогда датского языка, но владел уже английским, немецким, шведским и норвежским. Он взялся за перевод и несколько задержался со сроком выполнения, но сумел одновременно овладеть датским языком. Шушурин был физиком-теоретиком, дипломником М. А. Ковнера. По способностям и знаниям Сергей, конечно, должен был быть сразу рекомендован в аспирантуру, но он имел выговор по комсомольской линии за то, что в одной своей научной студенческой работе допустил якобы идеалистические выверты. Ему пришлось согласиться год поработать на выборной комсомольской должности (оказалось, это можно и с выговором!), чтобы потом поступить в аспирантуру в МГУ. После защиты диссертации он был оставлен на кафедре теоретической физики МГУ и оказался, благодаря способностям и знанию языков, одним из первых советских физиков, которые получили годичную стажировку в Парижском университете. За год он объездил всю Францию, одновременно подготовив и опубликовав несколько статей во французских научных журналах. По совокупности работ Сергей давно мог бы стать доктором наук, но у него все не хватало времени, чтобы сесть за стол и оформить свои труды в диссертацию. А затем тяжелая болезнь и ранняя смерть. Я так подробно пишу о Сергее Шушурине потому, что это была незаурядная личность, которую мало кто помнит теперь в университете.

На одном курсе со Штыровым, Шушуриним, Худяковым учились Владимир Горохов, много лет бывший центральным факультетской и университетской баскетбольных команд, Нина Жимская, прекрасная легкоатлетка и волейболистка, в дальнейшем преподаватель физфака и научный работник НИИМФа. Особенно хочется отметить учившегося на этом курсе В.С. Стальмахова, с которым мы были хорошо знакомы со студенческих лет до конца его жизни. Всеволод Семенович уже в студенческие годы выделялся особой статью, внешним и внутренним благородством. Став, наверное, самым молодым в истории СГУ проректором по науке, В.С. Стальмахов прекрасно справлялся со своими обязанностями. Мне пришлось иметь дело со многими проректорами по науке, но надо сказать, что ни с кем не было так легко и просто решать вопросы о командировках, поездках на научные конференции, как с Всеволодом Семеновичем. Когда умер ректор университета В.Г. Лебедев, то, по моему мнению, были два лучших кандидата на этот пост: В.С. Стальмахов и В.Б. Островский. Но оба они были не по душе областному начальству: умны, образованны, способны высказывать собственное мнение, не брать под козырек по каждому указанию руководства. Всеволод Семенович был честным человеком, ему хотелось сделать свою кафедру (общей физики) лучшей в университете. Так же он действовал бы, если бы стал ректором, в отношении университета. Еще надо отметить университетский патриотизм В.С. Стальмахова, его бережное отношение к истории и традициям СГУ.

Особенно много физиков я знал из тех, кто был младше меня. Дело в том, что это были годы, когда физики явно преобладали над лириками, а в нашей 19-й МСШ к тому же был прекрасный преподаватель физики Василий Сергеевич Романов, влияние которого часто сказывалось на выборе профессии выпускниками. Уже в 1948 году на 1-й курс физического факультета поступили из нашей школы Г. Соболев, М. Авербух, Ю. Ирхин, Е. Алексеев, И. Козлов, Г. Афруткин, В. Усов, В. Горкун, А. Победоносцев, В. Хандрос, С. Ульянов, А. Хромов, Э. Кальянов и др. Все они были мне знакомы еще со школы, и наши товарищеские отношения продолжались и в последующие годы. С Юрой Ирхиным, ставшим крупным физиком-теоретиком в

Свердловске (Екатеринбурге), лауреатом Государственной премии СССР, мы встречались за шахматной доской в школьные годы, он был одним из сильнейших юных шахматистов города. После окончания университета он уехал в Свердловск и, когда приезжал в Саратов к родителям, мы с ним постоянно встречались. Несколько раз я был в гостях у него в уже в Екатеринбурге. Юра, безусловно, один из самых умных людей, которых мне довелось знать в жизни. Как интересно он рассуждал, какие часто парадоксальные выводы делал, оказывавшиеся реальными! Долгие годы он увлекался обработкой уральских самоцветов, в одной из комнат квартиры установил камнерезный станок, на котором любил работать в свободное время.

На этом же курсе учились Ю. Науменко, Ю. Складов, Ю. Жарков, Л. Стальмахова, А. Никишов, с которыми я познакомился в студенческие годы. Юрий Петрович Науменко пришел в университет после участия в Великой Отечественной войне, орденоносцем, заслуженным человеком. Это не мешало ему поддерживать самые теплые отношения со вчерашними школьниками, ураганом носиться по баскетбольной площадке, забрасывая красивейшие мячи (он был одним из лучших баскетболистов университета, несмотря на небольшой рост). Свои лучшие человеческие качества Юрий Петрович сохранил на всю жизнь: он был хорошим секретарем парткома университета, уважаемым деканом физического факультета, любимым студентами преподавателем.

С Юрием Андреевичем Складовым мы знакомы уже более 60 лет: вместе были в комитете комсомола университета и в студенческие годы нередко в одной компании отмечали праздники и события личной жизни. Потом я провожал Юрия Андреевича, когда он уезжал работать председателем колхоза. С его возвращением в университет наши дружеские отношения возобновились. С большим уважением отношусь к его научной деятельности, к его большой работе во главе Совета ветеранов СГУ. С интересом читаю его лирические стихи, свидетельствующие, что можно с успехом сочетать в себе и физика и лирика.

Из тех, кто пришел на физический факультет в 1949 году, вспоминаю В. Степанчука, А. Калинину, Т. Колотилову, Б. Малкиеля. Тамару Колотилкову я знал раньше, так как один год она училась на историческом факультете, а затем перешла на физический, скорее всего под влиянием старшей сестры, сразу поступившей на физический факультет. Сестры Колотилковы были хорошими спортсменками, под влиянием Д. Худякова и А. Кукина увлеклись туризмом и были в числе основателей университетской туристской секции. С Виктором Петровичем Степанчуком мы приятельствуем с 1949 года, вместе занимались комсомольской работой, впоследствии я был членом парткома университета, когда Степанчук являлся его секретарем. У нас с ним всегда есть о чем поговорить, что вспомнить.

Среди физиков, поступивших учиться в университет в 1950 году, мне запомнились В. Ильин, А. Богомолов, В. Решников и, конечно, Л. Питаевский. Последнего я знал еще по школе: принимал его в комсомол. После школы Лев уехал учиться в МФТИ, но через год вернулся в Саратов и стал студентом физического факультета. Со школьных лет Питаевский отличался выдающимися способностями и хотел продолжать учебу в аспирантуре у академика Л. Ландау. А для этого надо было сдать знаменитый «минимум Ландау». Лев рассказывал мне, как на 5-м курсе он несколько раз ездил к Ландау и сдавал один экзамен за другим. Экзамены были настолько трудными и индивидуальными, что в Саратове не у кого было получить консультацию, все надо было осваивать самостоятельно. Продолжая успешно учиться на 5-м курсе и завершая дипломную работу, Лев одновременно сдал весь «минимум

Ландау». Он стал аспирантом Ландау, одним из его лучших учеников. Лев Питаевский сделал немало крупных открытий в разных областях физики, признан одним из 100 самых известных физиков-теоретиков мира в XX веке. Пока были живы родители, Лев нередко приезжал в Саратов, мы с ним встречались и беседовали. Он обладает прекрасными ораторскими способностями, очень интересно рассказывает о себе, своих делах, окружающих его людях. Уже много лет академик РАН Л.П. Питаевский живет в Италии, поэтому общение наше ограничивается редким обменом сообщениями по электронной почте.

Из последнего приема на физический факультет в бытность мою студентом (1951) запомнились многие: Р. Амиров, В. Семенов, А. Лепесткин, М. Лунц, И. Шорин, Э. Волкова. Игорь Шорин был младшим братом моего лучшего друга студенческих лет историка Юры Шорина, трагически погибшего в 1952 году. Поэтому я знал Игоря еще с его юных лет, а после смерти Юры дружеские отношения завязались с Игорем и продолжают до настоящего времени. Игорь – прекрасный товарищ, очень мужественный человек, до последнего времени работал на одном из предприятий Ленинского района, куда получил назначение после окончания физического факультета.

С Ренатом Амировым я познакомился в 1954 году, когда стал работать в комитете комсомола СГУ. Хороший спортсмен, прекрасный организатор, умный человек, он всегда вызывал у меня самые добрые чувства.

Очень обаятельной была в студенческие годы Марьяна Лунц. Она поражала своей энергией, жизнерадостностью, юношеским задором, часто становилась душой многих интересных дел на физическом факультете. Ее старший брат был в 19-й МСШ секретарем комсомольской организации и дал мне рекомендацию при поступлении в комсомол.

На этом кончаются мои краткие воспоминания о тех студентах-физиках, с кем я был знаком в свои студенческие годы. Немного хочу рассказать о контактах с некоторыми представителями этого факультета, учившимися в последующие годы. Особенно хорошие отношения у меня сложились с теми из них, кто поступил в университет в 1955 году. Во-первых, почти всех их я принимал на комсомольский учет, будучи заместителем секретаря комитета комсомола университета. При этом оказалось, что некоторых из них (Б. Шишкина, Ю. Туманяна) я видел и слышал летом, когда мы вместе плыли на пароходе до Сталинграда, и еще подумал, какие умные ребята, вот бы они поступили в университет. Во-вторых, летом 1956 года именно этот курс физиков был впервые направлен на два месяца на уборку первого большого урожая в целинные совхозы Саратовской области, и мне довелось возглавлять ту его часть (группы А, Б, В, Г), которая работала в совхозе «Декабрист» Ершовского района. В-третьих, меня довольно часто приглашали на встречи выпускников этого курса, которые проходят регулярно, и таким образом возобновлялись наши контакты. В-четвертых, многие учившиеся на этом курсе были оставлены на работе в СГУ, и мы постоянно контактировали. Мне этот курс очень нравился: на нем было много ярких личностей, индивидуальностей, и в тоже время он был необыкновенно дружным (может, сказалось совместное пребывание на целине в 1956 году, где сложились основы коллектива, выявились неформальные лидеры). Я могу перечислять десятки студентов этого курса, с кем мне и сегодня интересно встречаться, разговаривать. Особенно мне близки бывшие студенты этого курса Д. Трубецков, Ю. Гамаюнов, Б. Альтеркоп, Ю. Глейзер, Н. Синицын, Р. Иванова (Синицына), Ю. Духина, А. Голишников, Н. Жиделева, Ю. Чихичин, А. Крылов, А. Банковский, Л. Кряжжимская,

Ю. Лыков, Н. Каменоградский, В. Разуваев, Г. Княжева, С. Варчева, Р. Мухаммедов, А. Бортничук и т. д. (к сожалению, некоторых из них уже нет в живых). Летом 1960 года, когда этот курс заканчивал университет и многие из вышеназванных поступали в аспирантуру, я помню, как мы собирались в вестибюле библиотеки или у библиотечного фонтана (тогда работал), и я их консультировал перед экзаменом по истории КПСС, который был обязательным для всех, поступавших в аспирантуру. Конечно, мы в эти часы много общались, вспоминали совхозное лето 1956 года, делились планами на будущее. Многие из выпускников того курса успешно состоялись в науке, в преподавательской деятельности. Докторами наук стали Д. Трубецков (член-корреспондент РАН), В. Березин, Н. Сеницын, Ю. Григорьев, Б. Альтеркоп, А. Кураев и некоторые другие.

Несколько лет после окончания аспирантуры (1966–1969) мне повезло читать лекции и проводить семинарские занятия на первом курсе физического факультета. Именно повезло, так как работать с физиками было очень интересно, а таких семинарских занятий, как с группами теоретиков, мне уже не довелось больше проводить. Как активно студенты выступали, какие глубокие знания демонстрировали, как увлеченно спорили друг с другом! Это была прекрасная школа для молодого преподавателя. До сих пор вспоминаю доклады, сообщения и выступления В. Дербова, В. Хасина, В. Кордита, С. Ильина, В. Селиверстова, Л. Мельникова, Ю. Синичкина и многих других. Правда, однажды (наверное, это было в 1968 или 1969 году) прихожу в сентябре в группу физиков-теоретиков, начинаю проводить занятия и чувствую, что группа не может ответить на самые элементарные вопросы, из всей группы подготовленной оказалась только одна студентка. Хотя я знал, что это группа теоретиков, но на всякий случай переспросил их и получил подтверждение: да, теоретики. Пришлось им разъяснять, что теоретики обычно самые подготовленные, эрудированные студенты, разбирающиеся прекрасно и в гуманитарных науках. Но мои разъяснения оказались напрасными, лучше учиться по истории они не стали. Это был единственный у меня случай на физическом факультете, когда «пятерку» на экзамене, по-моему, получила из группы только одна студентка, и было много «троек».

Из отдельных студентов физического факультета, с кем мне довелось тесно сталкиваться в послестуденческие годы, хочу, в первую очередь, отметить Ивана Ивановича Птичкина, Льва Яковлевича Майофиса, Бориса Геннадьевича Цикина, Льва Израилевича Каца и Владимира Вениаминовича Глейзера (младшего брата уже упомянутого Ю. Глейзера). Несколько десятилетий И. Птичкин был одним из самых близких моих друзей. Я его очень уважал: он был не только умным, эрудированным, но обладал и прекрасными человеческими качествами, был душевным, добрым. Как все его друзья и товарищи любили те моменты, когда в руках Ивана Ивановича появлялась гитара и он своим несильным, но удивительно проникновенным голосом исполнял любимые всеми песни, романсы! Мы нередко отдыхали с ним вместе в отпускное время, отмечали праздники и семейные даты, вели бесконечные разговоры по самым разным проблемам. Мне не довелось слышать лекций, которые читал Иван Иванович. Но, по отзывам других, знаю, что эти лекции были очень содержательны, отличались логикой и изяществом, прекрасно воспринимались студентами. Очень жалко, что такой замечательный человек рано ушел из жизни.

Совсем другой личностью был Лев Израилевич Кац. Если Птичкин был очень скромен, внешне незаметен, раскрывался полностью только в дружеском общении, то Лев Кац был ярким общественным деятелем, умелым организатором больших и малых коллективов с запоминающимся внешним обликом и пламенной речью трибуна. Познакомился я с ним еще в его студенческие годы, когда он возглавлял комсомольскую организацию физического факультета. Затем мы много лет жили с ним в одном подъезде дома, потом в соседних домах, что способствовало частому общению. Он всегда был полон энергии, энтузиазма, всяких идей, занят тысячью дел, вечно спешил и вечно опаздывал. Вот эта непрерывная гонка, наверное, так рано оборвала его жизнь.

Вместе с Л. Кацем учился в школе и в университете Борис Геннадьевич Цикин, у которого и старший брат кончал физический факультет. Хотя Борис Цикин был сыном секретаря обкома партии, но представлял собой очень скромного и порядочного человека, как и его старший брат Игорь (в отличие от многих других детей ответственных работников). Борис хорошо учился, был прекрасным специалистом, очень внимательным и добросовестным преподавателем, активным комсомольцем. В то же время, он довольно иронически относился к пафосу и демагогии, критически воспринимал многие явления жизни и в советские годы, и в перестроечный период, и в постсоветское время. Много лет мы жили с ним в одном доме, общались почти ежедневно и это было для меня очень поучительно, так как у Бориса был собственный взгляд на происходившее в университете и за его пределами. Борис Цикин был большим любителем копать в земле на даче, выращивать различные сорта овощей и фруктов. Кроме того, он увлекся подлёдным ловом, и часто зимой можно было увидеть рано утром во дворе его высокую, немного сутулую фигуру в валенках и теплой одежде, со всем необходимым для зимней рыбалки «вооружением». После того как Борис переехал жить в другой дом, встречи наши стали редкими, а затем он прекратил работать на факультете, и я потерял его из виду.

Много десятилетий поддерживал я дружеские связи с Львом Майофисом, который окончил 19-ю МСШ на пять лет позже меня. Подружились мы в 1955 году, когда вместе были в комитете комсомола университета, и до самой смерти Льва постоянно общались, правда, в последние годы только по телефону, так как он не выходил из дома. Лев был прирожденным организатором, у него всегда имелась куча идей, и он стремился их осуществить, умело втягивая в это дело своих друзей и просто знакомых. Многие интересные и полезные новации в университете с 1950-х годов до сегодняшнего дня связаны с его именем как инициатора или самого активного участника. Так было с созданием комнаты боевой славы, строительством мемориала в честь погибших в годы Великой Отечественной войны преподавателей и студентов СГУ и СГМУ, организацией студенческого конструкторского бюро на физическом факультете, открытием ряда мемориальных досок на зданиях 3-го корпуса, бывшего 4-го корпуса СГУ, 19-й МСШ. Последним делом Льва Яковлевича было создание книги о фронтовиках – студентах, сотрудниках и преподавателях университета (совместно с Б. Борисовым и А. Филипповым). При этом надо отметить, что многое было им сделано, когда он был уже серьезно болен и осуществлял свои акции с помощью телефона и верных друзей, заражая их своей энергией, своим университетским патриотизмом. Он, наверное, учитывая его способности, мог бы больше сделать в науке, но его общественная активность пересиливала.

Одним из самых интересных людей, с которым я познакомился во второй половине 1960-х, был Владимир Глейзер. Очень одаренный человек, наделенный многими способностями, он, мне кажется, особенно мог бы преуспеть на журналистском поприще, стать профессионалом самого высокого класса. О его владении пером свидетельствуют написанные им книги, статьи. Кроме того, он – великолепный рассказчик, способный часами с необычайным мастерством, соединенным то с тонким юмором, то со злой сатирой, излагать различные истории из своей жизни. Правда, думается, что он иногда нарочно эпатирует слушателей, так же как и читателей своих книг. Мне особенно запомнилось два случая с Володей. Как-то вечером несколько человек, в основном физиков, собралось для дружеской беседы на квартире у Дмитрия Ивановича Трубецкого. И вот В. Глейзер начал рассказывать о своих жизненных перипетиях. Мы сидели и слушали его, буквально затаив дыхание, так все было интересно и остроумно. Случайно взглянули на часы – шёл уже третий час ночи, так незаметно пролетело более 4 часов. В зимние каникулы небольшой компанией мы отправились в Дом отдыха в Пристанном (теперь пансионат «Волга»), чтобы отдохнуть и покататься на лыжах. В одно утро я и Лев Кац ушли побегать на лыжах. Погода была прекрасная, и мы отсутствовали часа три. Возвращаемся и видим такую картину: на кровати в изнеможении лежит Лев Гродницкий – был в те годы в университете такой знаменитый человек: талантливый геолог, создатель замечательной сатирической группы, очень остроумный и любивший поговорить. Увидев нас, он закричал: «Уберите от меня этого Глейзера!» Оказалось, что все время нашего отсутствия Володя непрерывно что-то рассказывал, не давая Гродницкому вставить хотя бы слово.

Мне много приходилось общаться с преподавателями физического факультета, я имею при этом в виду тех, кто преподавал уже тогда, когда я еще учился. Из того поколения преподавателей-физиков особенно запомнились А.Д. Степухович, Н.К. Сидоров, В.Ф. Боголюбов, Б.М. Заморозков, Л.И. Баранов, П.В. Голубков, В.И. Калинин, Г.М. Герштейн, З.И. Кирьяшкина, М.А. Ковнер, С.В. Соломонов, М.Л. Кац, В.Н. Шевчик, А.С. Шехтер.

Очень колоритной фигурой был А.С. Шехтер, декан физического факультета. Небольшого роста, худенький, очень живой, быстро говорящий, необычайно доброжелательный и предупредительный, Александр Самойлович был как-будто оторван от реальной почвы, витал где-то в облаках. Мне несколько раз пришлось присутствовать на комсомольских собраниях физического факультета, на которых обсуждались итоги очередной экзаменационной сессии, о чем докладывал декан, то есть А.С. Шехтер. И каждый раз выглядело это примерно так: А.С. произносил несколько общих фраз, затем говорил, что успеваемость в прошедшей сессии была..., и обращался к сидевшему рядом В.Ф. Боголюбову (заместитель декана) – Виталий Федорович! Какая у нас успеваемость? Виталий Федорович называл цифру, Александр Самойлович ее повторял... Затем он продолжал: на «отлично» сдали сессию... и снова обращение к Виталию Федоровичу за конкретными данными. И так из года в год.

Легендарной личностью был на факультете Сергей Варламович Соломонов, сменивший Боголюбова на посту заместителя декана. Сергей Варламович знал каждого студента по имени и о каждом студенте все. Он любил и оберегал студентов, был родным отцом для многих физиков, учившихся в 1950–1970-х годах. Приятно было встретить в корпусах или на университетском дворе его крупную, полную фигуру, всегда с приветливой, добродушной улыбкой, почувствовать крепкое пожатие

теплой руки, услышать интересный рассказ о каком-нибудь из студентов-физиков. Сергей Варламович мог быть и строгим, но всегда справедливым.

Мне довелось последние годы жизни Александра Давидовича Степуховича жить в соседнем с ним доме, наши двory сообщались, и довольно часто я встречал его на прогулке и иногда присоединялся к нему. Это были незабываемые прогулки, так как Александр Давидович был необыкновенно эрудированным человеком, любил и умел рассказывать. От него тогда, в частности, я услышал много о студенческих годах Солженицына, который был мужем дипломницы Степуховича Н. Решетовской.

Очень приятное впечатление всегда производили своей интеллигентностью и доброжелательностью Н.К. Сидоров и Л.И. Баранов. Мне было радостно увидеть в одной из групп физического факультета, в которой я вел семинарские занятия, Володю Баранова, сына Леонида Иосифовича, который и отношением к делу, и манерой поведения напоминал отца.

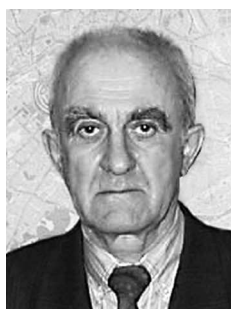
Бориса Михайловича Заморозкова, бывшего деканом 2-го физического факультета (существовал в 1952–1957 годах и готовил специалистов для радиоэлектронной промышленности), чаще всего наблюдал около спортивных площадок, когда он стоял, опираясь на костыли, и с огромным интересом следил за спортивной борьбой волейболистов или баскетболистов. Борис Михайлович был страстным болельщиком, его присутствие воодушевляло команды физического факультета.

Хотя я поступил в университет и первые годы учился при ректорстве Петра Васильевича Голубкова, но встречался с ним редко, чаще видел его спешившим по университетскому двору из ректората в 3-й корпус в распахнутом белом халате и с дымящейся сигаретой в руках.

Конечно, заметки мои – беглые, вспомнил я не всех физиков, которых знал в студенческие годы. Но, может быть, они помогут представить себе преподавателей и студентов физического факультета конца 1940–начала 1950-х такими, какими они выглядели в глазах одного из гуманитариев.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского*

Поступила в редакцию 10.03.2011



Аврус Анатолий Ихильевич – родился в г. Шаргороде, Винницкой обл., УССР (1930), окончил исторический факультет СГУ (1952). После окончания СГУ и аспирантуры работает в СГУ, в настоящее время – профессор кафедры отечественной истории в новейшее время. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата исторических наук (1966) в области отечественной истории и доктора исторических наук (1980) в области истории международного рабочего движения. Автор свыше 10 монографий и учебных пособий. Опубликовано свыше 300 научных статей по направлениям, указанным выше. Член редколлегии «Известий Саратовского университета. Новая серия» и редакционного совета «Интеллигенция и мир» (Иваново), член редколлегии журнала «Клио» (Санкт-Петербург).

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: avrus@rol.ru



ДИСКРЕТНЫЕ БРИЗЕРЫ В СКАЛЯРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ НА ПЛОСКОЙ КВАДРАТНОЙ РЕШЕТКЕ*

Г.С. Безуглова, П.П. Гончаров, Ю.В. Гуров, Г.М. Чечин

С помощью теоретико-групповых методов для скалярных динамических моделей на плоской квадратной решетке найдены все симметрично обусловленные инвариантные многообразия, допускающие локализованные колебания. Для модели с однородным потенциалом межчастичного взаимодействия на этих многообразиях построены дискретные бризеры и исследована их устойчивость. Обнаружены необычные бризерные решения, которые не являются нелинейными нормальными модами Розенберга, несмотря на присущую этой модели возможность разделения пространственных и временной переменных. Найдены дискретные бризеры того же типа и в двумерной модели линейно связанных осцилляторов Дуффинга. Примененный подход к изучению бризерных решений может быть распространен на другие типы динамических моделей на двумерных и трехмерных пространственных структурах.

Ключевые слова: Нелинейная динамика, решеточные модели, дискретные бризеры, инвариантные многообразия, теоретико-групповые методы.

Введение

Дискретные бризеры (ДБ) представляют собой локализованные в пространстве и периодические во времени возбуждения в нелинейных гамильтоновых решетках. В настоящее время существует целый ряд обширных обзорных работ, посвященных свойствам этих динамических объектов в различных физических системах и их экспериментальному обнаружению [1–4]. Большую роль при исследовании ДБ играют методы математического моделирования, предполагающие широкое использование вычислительных экспериментов. Большинство таких работ было выполнено для различных типов одномерных цепочек, и лишь относительно небольшое число статей посвящено исследованию ДБ в периодических структурах с размерностью $D > 1$. К числу последних относятся, например, работы [5–16], в которых рассматриваются

*Статья написана по материалам доклада на IX Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, Россия, 4–9 октября, 2010.

различные скалярные и векторные модели в двумерных и трехмерных периодических структурах.

В скалярных моделях каждому узлу решетки отвечает одна динамическая переменная (например, в плоских механических моделях таковой может быть отклонение частиц решетки в перпендикулярном к ней направлении или заряд конденсатора в электрических моделях). В векторных моделях каждому узлу отвечает несколько динамических переменных, каковыми могут быть x - и y -компоненты атомных смещений в плоскости двумерной решетки. Во многих из вышеперечисленных работ (см. также ссылки в них на статьи других авторов) ДБ в двумерных решетках строятся с помощью некоторых приближений, например, с помощью метода «вращающейся фазы» (RWA), и лишь в немногих исследование проведено с помощью достаточно точных вычислительных процедур. К числу таких работ следует отнести статью [5], в которой строятся ДБ в скалярной модели на квадратной и гексагональной решетках с межчастичным взаимодействием, описываемым однородными потенциалами четных степеней.

Настоящая работа посвящена проблеме построения ДБ с машинной степенью точности для скалярных динамических моделей на плоской квадратной решетке. При этом поиск бризерных решений разделен на два этапа:

- нахождение всех возможных выделенных по симметрии инвариантных многообразий, на которых могут быть реализованы локализованные в пространстве колебания;
- построение на каждом из этих многообразий периодических во времени колебаний, которые и представляют собой искомые ДБ.

Существенно, что первый этап не зависит от вида исследуемой динамической модели и выполняется лишь с помощью некоторых теоретико-групповых методов, в то время как реализация второго этапа невозможна без знания дифференциальных уравнений, описывающих рассматриваемую модель. Предлагаемая методика может быть естественным образом обобщена на случай решеток и динамических моделей других типов.

В настоящей работе исследуются дискретные бризеры в следующих двух скалярных моделях на плоской квадратной решетке:

$$\ddot{x}_{i,j} + \gamma x_{i,j}^{m-1} = (x_{i+1,j} - x_{i,j})^{m-1} - (x_{i,j} - x_{i-1,j})^{m-1} + (x_{i,j+1} - x_{i,j})^{m-1} - (x_{i,j} - x_{i,j-1})^{m-1}, \quad (1)$$

$$\ddot{x}_{i,j} + \gamma x_{i,j}^3 = x_{i+1,j} + x_{i-1,j} + x_{i,j+1} + x_{i,j-1} - 4x_{i,j}. \quad (2)$$

Первая модель соответствует *однородному* потенциалу степени m с учетом его *онсайтовой* и *интерсайтовой* частей*. Такая модель не допускает гармонического приближения, в силу чего в ней отсутствует фононный спектр. ДБ в этой модели обычно представляют собой локализованные в пространстве *нелинейные нормальные моды Розенберга*, а для их нахождения приходится решать некоторую систему нелинейных алгебраических уравнений.

*В отечественной литературе в первом случае обычно говорят о потенциальной энергии отдельных осцилляторов, а во втором – об энергии взаимодействия между ними.

Вторая модель описывает систему линейно связанных осцилляторов Дуффинга в узлах квадратной решетки и имеет некоторый фононный спектр. Построение ДБ в такой модели сводится к решению системы нелинейных дифференциальных уравнений (2) и применению некоторого варианта метода спуска.

Для обеих вышеуказанных моделей дискретные бризеры строятся на одних и тех же *симметрично обусловленных инвариантных многообразиях*, которые находятся с помощью теоретико-групповых методов.

Заметим, что в дальнейшем для удобства мы будем называть входящие в уравнения (1), (2) динамические переменные «смещениями частиц решетки», хотя они могут иметь и совершенно другой физический смысл.

1. Симметрично обусловленные инвариантные многообразия для скалярной модели на плоской квадратной решетке

Первый этап построения ДБ основан на выделении симметрично обусловленных инвариантных многообразий с помощью теоретико групповых методов, которые были ранее использованы нами для построения теории бушей нелинейных нормальных мод [17, 18] (см. также и [19]). Суть такого подхода заключается в том, что все возможные динамические режимы в физической системе, уравнения которой инвариантны относительно некоторой группы дискретной симметрии G_0 , можно классифицировать по *подгруппам* этой группы.

Анализируя дифференциальные уравнения, описывающие динамику скалярной модели (1) на плоской квадратной решетке, легко убедиться в том, что они инвариантны относительно всех преобразований, которые соответствуют элементам симметрии рассматриваемой решетки в состоянии равновесия. В обозначении Шенфлиса эта симметрия описывается точечной группой C_{4v} . В качестве G_0 мы однако выбираем расширенную группу

$$G_0 = C_{4v} \times (E, P), \quad (3)$$

являющуюся прямым произведением группы C_{4v} на группу второго порядка, которая состоит из тождественного элемента E и преобразования P , изменяющего знаки всех динамических переменных. Такой выбор обусловлен тем, что позволяет рассматривать не только скалярные модели, характеризующиеся потенциалом межчастичного взаимодействия общего вида (для этого достаточно положить $G_0 = C_{4v}$), но и модели, в которых этот потенциал является *четной* функцией своего аргумента.

Более того, следует иметь в виду, что в моделях (1) и (2) учитывается взаимодействие между переменными, относящимися только к ближайшим узлам решетки. Однако обсуждаемые нами группы описывают симметрию и других скалярных моделей на плоской квадратной решетке, в частности, тех, в которых радиус межчастичного взаимодействия является произвольным. Как известно, атомы в кристалле распределяются по точечным *орбитам* соответствующей *пространственной* группы. В кристаллографии набор точек таких орбит в пределах одной элементарной ячейки называется «правильной системой точек» (ПСТ). Каждая ПСТ характеризуется своей точечной группой симметрии, которая центрирована определенным образом относительно элементарной ячейки кристалла (см., например, [20]).

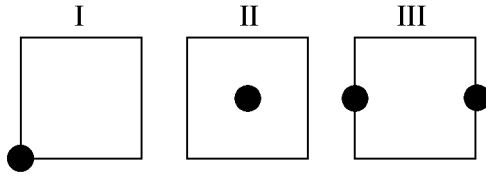


Рис. 1. Правильные системы точек (ПСТ) плоской квадратной решетки, соответствующие возможной локализации дискретных бризеров

Рис. 1. Правильные системы точек (ПСТ) плоской квадратной решетки, соответствующие возможной локализации дискретных бризеров

Рис. 1. Правильные системы точек (ПСТ) плоской квадратной решетки, соответствующие возможной локализации дискретных бризеров

Можно показать, что из всех возможных в плоской квадратной решетке типов правильных систем точек для построения дискретных бризеров достаточно учитывать только три такие системы. Им отвечают следующие точечные группы: I – группа C_{4v} , «локализованная» в узле элементарной ячейки (все ее элементы симметрии не изменяют положение данного узла решетки); II – точечная группа C_{4v} , локализованная в центре элементарной ячейки и III – группа C_{2v} , локализованная в центре ребра элементарной ячейки. На рис. 1 приведены ПСТ, соответствующие этим трем случаям. (Заметим, что в случае III на элементарную ячейку решетки приходится *две* точки – «кратность» этой ПСТ равна 2.)

В настоящей работе приведены результаты исследований инвариантных многообразий, отвечающих лишь первой ПСТ (данные по двум другим типам ПСТ будут приведены в отдельной публикации).

ДБ представляет собой локализованный в пространстве колебательный режим, в процессе которого частицы решетки отклоняются из своих положений равновесия. Симметрия этого динамического объекта должна поэтому описываться одной из *подгрупп* точечных групп симметрии ПСТ. Таким образом, для полной симметричной классификации всех возможных бризеров необходимо перебрать все подгруппы точечных групп правильных систем точек данной кристаллической решетки. Каждой из таких подгрупп отвечает некоторое инвариантное многообразие исследуемой динамической модели. Это означает, что любой динамический режим, который определяется начальными условиями на данном многообразии, не сходит с него в течение сколь угодно больших времен эволюции системы.

Симметрично обусловленные инвариантные многообразия были построены нами с помощью теоретико-групповых методов [21], разработанных ранее в рамках исследования структурных фазовых переходов. Эти многообразия задаются набором динамических переменных $q_{ij}(t)$, которые соответствуют узлам выделенного фрагмента решетки. Поскольку каждое из многообразий инвариантно относительно некоторой группы симметрии (она является подгруппой группы G_0 и на рис. 2

$$\begin{aligned}
 Q_{3 \times 3}^{(1)} &= \begin{pmatrix} c & b & c \\ b & a & b \\ c & b & c \end{pmatrix} & Q_{3 \times 3}^{(2)} &= \begin{pmatrix} d & b & d \\ c & a & c \\ d & b & d \end{pmatrix} & Q_{3 \times 3}^{(3)} &= \begin{pmatrix} d & b & e \\ b & a & c \\ e & c & d \end{pmatrix} & Q_{3 \times 3}^{(4)} &= \begin{pmatrix} e & b & f \\ d & a & c \\ e & b & f \end{pmatrix} \\
 C_{4v} = 90^\circ, \sigma_y & & 180^\circ, \sigma_y & & \sigma_{xy} & & \sigma_y
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{3 \times 3}^{(5)} &= \begin{pmatrix} c & b & c \\ b & a & b \\ c & b & c \end{pmatrix} & Q_{3 \times 3}^{(6)} &= \begin{pmatrix} d & b & e \\ c & a & c \\ e & b & d \end{pmatrix} & Q_{3 \times 3}^{(7)} &= \begin{pmatrix} c & b & d \\ b & a & b \\ d & b & c \end{pmatrix} \\
 C_4 = 90^\circ & & 180^\circ & & 180^\circ, \sigma_{xy}
 \end{aligned}$$

Рис. 2. Инвариантные многообразия для скалярной модели на плоской квадратной решетке, допускающие локализованные колебания

2. Построение дискретных бризеров для модели с однородным потенциалом межчастичного взаимодействия

Каждое из приведенных в предыдущем разделе симметрично обусловленных инвариантных многообразий зависит от ряда произвольных параметров (a, b, c, \dots) , число которых может быть существенно меньше общего количества степеней свободы рассматриваемого фрагмента решетки. Учет этого обстоятельства в системах дифференциальных уравнений типа (1) позволяет уменьшить число таких уравнений за счет перехода от динамических переменных $q_{ij}(t)$ к новым переменным $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$..., выделенным симметрией данного многообразия.

При решении уравнений (1) с произвольными начальными условиями можно получить некоторое, в общем случае, *непериодическое* движение рассматриваемой динамической системы. Поэтому для построения дискретных бризеров, которые по определению представляют собой *периодические* колебательные режимы, необходимо найти весьма специфические начальные условия для решения соответствующей системы дифференциальных уравнений второго порядка (граничные условия, как было указано выше, предполагаются периодическими). Наиболее просто такие начальные условия могут быть найдены для динамических моделей, которые описываются однородными потенциалами межчастичного взаимодействия. Действительно, в модели (1), отвечающей однородному потенциалу степени m , можно ввести нелинейные нормальные моды Розенберга [22], что фактически является следствием разделения пространственных и временной переменных. Для каждой такой моды все динамические переменные в любой момент времени t пропорциональны *одной и той же* функции $f(t)$

$$q_{ij}(t) = k_{ij} f(t), \quad (4)$$

где k_{ij} – постоянные коэффициенты, $i = 1..N$, $j = 1..N$.

Учитывая уравнение (4), найдем пространственный *профиль* \vec{k} данной нелинейной нормальной моды (ННМ), которая задается набором коэффициентов k_{ij} . Построение такого профиля сводится к решению некоторой системы нелинейных алгебраических уравнений, получаемых подстановкой выражений (4) в исходную систему динамических уравнений (1), а временная зависимость $f(t)$ ННМ определяется так называемым «ведущим» дифференциальным уравнением. Применение аппарата ННМ Розенберга для построения дискретных бризеров и анализа их устойчивости в одномерных цепочках подробно описано в [23–25]. В настоящей работе этот аппарат используется для исследования дискретных бризеров в скалярной модели на плоской квадратной решетке.

Рассмотрим процедуру построения дискретного бризера для приведенного на рис. 2 многообразия $Q_{3 \times 3}^{(1)}$. Этому многообразию отвечают три независимые динамические переменные, а соответствующая ННМ Розенберга $R(t)$ может быть записана в форме

$$R(t) = \begin{pmatrix} c & b & c \\ b & a & b \\ c & b & c \end{pmatrix} f(t), \quad (5)$$

где параметры a, b, c не зависят от t (совокупность этих параметров определяет пространственный профиль искомого дискретного бризера). Один из указанных па-

раметров может быть фиксирован произвольным образом. В дальнейшем поэтому будем полагать $a = 1$. Действительно, можно показать, что при различных его значениях получается однопараметрическое семейство ДБ с пропорциональными профилями. Подставляя выражение (5) в исходную систему (1) и требуя эквивалентности друг другу всех дифференциальных уравнений, получим два нелинейных алгебраических уравнения

$$\begin{aligned} b [-\gamma + 4(b-1)^{m-1}] &= -\gamma b^{m-1} + 2(c-b)^{m-1} + (1-b)^{m-1}, \\ c [-\gamma + 4(b-1)^{m-1}] &= -\gamma c^{m-1} + 2(b-c)^{m-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Ведущее дифференциальное уравнение принимает следующий вид:

$$\ddot{f}(t) + [\gamma - 4(b-1)^{m-1}] f(t)^{m-1} = 0. \quad (7)$$

Поскольку дискретный бризер является локализованным в пространстве динамическим объектом, амплитуды колебаний частиц решетки должны убывать (наиболее часто экспоненциально) от его центра к периферии: $|a| > |b| > |c|$.

Для решения системы нелинейных алгебраических уравнений типа (6) использовались стандартные средства математического пакета MAPLE. С их помощью были построены профили дискретных бризеров на всех инвариантных многообразиях, приведенных на рис. 2, для разных степеней m однородного потенциала и различных значений параметра γ , который определяет относительную силу онсайтовой и интерсайтовой частей потенциальной энергии рассматриваемой динамической системы.

В качестве примера на рис. 4, а приведены для $m = 8$ профили дискретных бризеров на инвариантных многообразиях $Q^{(1)}$, $Q^{(2)}$, $Q^{(4)}$, которые отвечают группам симметрии $C_{4v} = \{90^\circ, \sigma_y\}$, $C_{2v} = \{180^\circ, \sigma_y\}$ и $\{\sigma_y\}$, соответственно (σ_y – плоскость отражения, перпендикулярная оси Y). $Q^{(2)}$ и $Q^{(1)}$ являются подмногообразиями многообразия $Q^{(4)}$. Действительно, $Q^{(2)}$ получается из $Q^{(4)}$ при условии $e = f$, $c = d$, а многообразие $Q^{(1)}$ получается из $Q^{(2)}$ при условии $c = b$ (см. рис. 2).

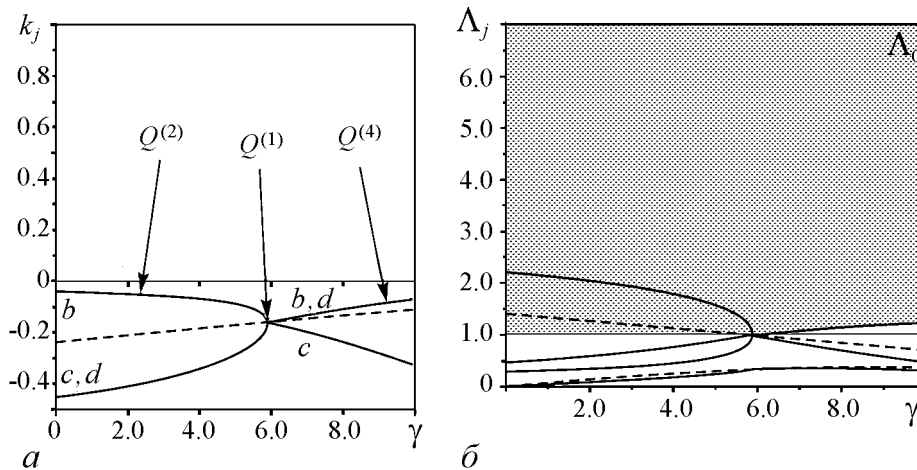


Рис. 4. ДБ на многообразиях $Q^{(2)}$, $Q^{(4)}$ и $Q^{(1)}$: а) зависимость профиля от γ ; б) зависимость показателей устойчивости Λ_j от γ

При $\gamma = \gamma_{\text{кр}} = 5.8848$ дискретные бризеры на всех вышеуказанных многообразиях сливаются. При $\gamma < \gamma_{\text{кр}}$ найдено бризерное решение, соответствующее многообразию $Q^{(2)}$, а при $\gamma > \gamma_{\text{кр}}$ получен ДБ, отвечающий многообразию $Q^{(4)}$. Более того, при одном и том же значении γ могут существовать бризерные решения разной симметрии. На рис. 4 этот факт иллюстрируется тем, что при любых значениях $\gamma \in [0; 10]$ можно получить, по крайней мере, два различных ДБ, один из которых представляет собой бризер с симметрией C_{4v} (при $\gamma < \gamma_{\text{кр}}$ одновременно с ним существует ДБ с симметрией C_{2v} , а при $\gamma > \gamma_{\text{кр}}$ – ДБ с симметрией σ_y).

На рис. 4 вся информация, относящаяся к ДБ с симметрией C_{4v} , изображена штриховой линией, в частности, на рис. 4, а штриховой линией представлена функция $b = b(\gamma)$ многообразия $Q_{3 \times 3}^{(1)}$ (функция $c = c(\gamma)$ не видна в силу своей малости).

3. Устойчивость дискретных бризеров в скалярной модели с однородным потенциалом

Поскольку ДБ представляет собой периодический колебательный режим, для исследования его устойчивости по линейному приближению можно воспользоваться теорией Флоке. В случае скалярной модели на плоской квадратной решетке с однородным потенциалом межчастичного взаимодействия анализ устойчивости периодических режимов, являющихся *нелинейными нормальными модами Розенберга*, можно существенным образом упростить. Это было продемонстрировано на примере одномерных цепочек с однородным потенциалом четвертой степени в статьях [23–25]. В настоящей работе этот же подход применяется для анализа устойчивости ДБ в двумерной решетке для случая потенциала, представляющего собой однородную функцию произвольной четной степени m .

Задавая ДБ в форме локализованной НМ Розенберга (4) и линеаризуя в ее окрестности исходные динамические уравнения (1), получим некоторую систему линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Исследование устойчивости ДБ теперь сводится к анализу устойчивости нулевого решения полученной линеаризованной системы уравнений. Эту систему в анализируемом случае можно записать в форме

$$\ddot{\vec{\delta}} = (m - 1) f^{m-2} \mathbf{B} \vec{\delta} \quad (8)$$

(вычислительные детали см. в работах [23–25]). Здесь $\vec{\delta}$ – инфинитезимальный вектор, характеризующий отклонения из положений равновесия всех частиц рассматриваемого фрагмента решетки; \mathbf{B} – постоянная матрица, количество строк и столбцов которой равно числу узлов фрагмента; $f(t)$ – периодическая функция времени, являющаяся решением ведущего уравнения для моды Розенберга. В случае однородного потенциала степени m функция $f(t)$ является решением уравнения

$$\ddot{f}(t) + p^2 f(t)^{m-1} = 0 \quad (9)$$

с начальными условиями $f(0) = A$, $\dot{f}(0) = 0$, где A – амплитуда ДБ, а коэффициент $p(\vec{k})$ определенным образом зависит от профиля ДБ (см., например, уравнение (7)).

Как и в работах [23–25], можно воспользоваться специфической структурой линеаризованной системы уравнений (8) и с помощью преобразования $\mathbf{S}^T \mathbf{B} \mathbf{S} = \mathbf{D}$

привести симметричную матрицу \mathbf{B} к диагональному виду \mathbf{D} , где \mathbf{S} – некоторая ортогональная матрица. Столбцы последней являются собственными векторами матрицы \mathbf{B} , которые легко найти с помощью пакета MAPLE. Собственные значения λ_k матрицы \mathbf{B} равны диагональным элементам матрицы \mathbf{D} .

Введение нового инфинитезимального вектора \vec{z} с помощью преобразования $\vec{\delta} = \mathbf{S}\vec{z}$ позволяет расщепить систему дифференциальных уравнений (8) на *независимые скалярные уравнения* одного и того же вида

$$\ddot{z} = (m - 1)\lambda_k f(t)^{m-2} z. \quad (10)$$

Проводя в ведущем уравнении (9) и в линеаризованных уравнениях (10) масштабирование функции $f(t)$ и ее аргумента t в соответствии с формулами

$$f(t) = A\varphi(t), \quad t = \frac{\tau}{pA^{m/2-1}}, \quad (11)$$

где A – амплитуда НМ Розенберга, а $p = p(\vec{k})$, получим следующие уравнения:

$$\varphi''_{\tau} + \varphi^{m-1}(\tau) = 0, \quad \varphi(0) = 1, \quad \varphi'_{\tau}(0) = 0 \quad (12)$$

$$z''_{\tau} = f^{m-2} \Lambda_k z, \quad z(0) = 0, \quad z'_{\tau}(0) = 0. \quad (13)$$

(Два последних соотношения отвечают тому условию, что исследуется устойчивость нулевого решения линеаризованных уравнений.)

Параметры $\Lambda_k = ((m - 1)\lambda_k)/p^2$ в дальнейшем будем называть *показателями устойчивости*. Бризерное решение является линейно устойчивым, если все показатели Λ_k лежат внутри интервалов устойчивости нулевого решения уравнения (13). Заметим, что один из показателей, Λ_0 , всегда лежит точно на границе между первой зоной неустойчивости и второй зоной устойчивости. Соответствующий ему инфинитезимальный вектор направлен в пространстве всех возможных атомных смещений вдоль профиля ДБ и, следовательно, не влияет на его устойчивость.

Исследование устойчивости нулевого решения уравнения (10) в случае $m = 4$ сводится к анализу уравнения Лямэ (см. [23–25]), а для $m > 4$ является гораздо более сложной процедурой, но она также может быть выполнена с помощью некоторых аналитических методов [26]. С другой стороны, такую процедуру можно относительно просто осуществить *численными* методами. В результате применения последних было установлено, что дискретные бризеры являются линейно устойчивыми, если все показатели Λ_j попадают внутрь интервалов

$$[0, 1]; [m - 1, m + 2], [3m - 2, 3m + 3], \dots \quad (14)$$

На рис. 4, б приведены графики показателей устойчивости $\Lambda_j(\gamma)$ для ДБ, профили которых представлены на рис. 4, а и проанализированы в предыдущем разделе настоящей работы. Из этого рисунка видно, что бризеры с симметрией C_{2v} и σ_y являются неустойчивыми на всем интервале $\gamma \in [0; 10]$, поскольку некоторые из соответствующих им показателей $\Lambda_j(\gamma)$ попадают в первую зону неустойчивости (эта зона на рис. 4, б показана серым цветом). С другой стороны, бризер с симметрией C_{4v} , будучи неустойчивым при $\gamma < \gamma_{кр}$, становится устойчивым динамическим объектом при $\gamma > \gamma_{кр}$.

Особо следует подчеркнуть, что устойчивость ДБ в скалярной модели с однородным потенциалом произвольной степени m не зависит от его амплитуды, что очевидно из уравнений (12), (13), поскольку амплитуда A не входит в эти уравнения. Заметим, что в общем случае устойчивость ДБ может существенным образом зависеть от их амплитуды.

На рис. 2 представлено 7 различных инвариантных многообразий, каждому из которых отвечает своя точечная группа. Однако для модели (1) с однородным потенциалом степени $m = 4, 6, 8$ удалось построить ДБ только на четырех их вышеуказанных многообразиях. Причина этого заключается в очень сильной локализации бризерных решений для потенциалов такого рода. Действительно, например, из рис. 2 видно, что многообразия $Q_{3 \times 3}^{(2)}$ и $Q_{3 \times 3}^{(6)}$ отличаются друг от друга только амплитудами периферийных частиц: $Q_{3 \times 3}^{(6)}$ переходит в $Q_{3 \times 3}^{(2)}$ при условии $e = d$. При построении дискретных бризеров для модели (1) эти амплитуды оказываются слишком малыми и их различие находится на пределе точности используемых нами численных методов. По этой причине в таблице приведены результаты исследования существования и устойчивости ДБ в модели (1) только для четырех из семи возможных инвариантных многообразий. Разумеется, для других скалярных моделей на квадратной решетке могут существовать весьма различные между собой ДБ на всех симметрично обусловленных инвариантных многообразиях, приведенных на рис. 2.

В таблице для скалярной модели (1) на плоской квадратной решетке, описываемой однородным потенциалом степени $m = 4, 6, 8$, представлены области существования и устойчивости по параметру γ дискретных бризеров на четырех инвариантных многообразиях. Прочерки для многообразий $Q^{(2)}, Q^{(3)}, Q^{(4)}$ при $m = 4$ означают, что попытка построить на них бризерные решения автоматически приводит к таким дополнительным соотношениям между динамическими переменными, которые соответствуют многообразию $Q^{(1)}$.

Аналогично, указание ограниченного по параметру γ интервала существования дискретных бризеров $\gamma \in [0, \gamma_{кр}]$ (например, $\gamma \in [0; 0.0476]$) означает, что при $\gamma > \gamma_{кр}$ не удастся построить эти динамические объекты, соответствующие симметрии данного многообразия. Попытка такого построения опять-таки приводит к бризерным решениям, соответствующим инвариантному многообразию $Q^{(1)}$ с его более высокой симметрией C_{4v} .

Таблица

Существование и устойчивость дискретных бризеров, построенных на инвариантных многообразиях скалярной модели (1) для однородного потенциала разных степеней m

		Инвариантные многообразия			
		$Q^{(1)}$	$Q^{(2)}$	$Q^{(3)}$	$Q^{(4)}$
m=4	существование	$[0; \infty)$	–	–	–
	устойчивость	$[0; \infty)$	–	–	–
m=6	существование	$[0; \infty)$	$[0; 0.0476]$	$[0; 0.0476]$	$[0; 3.8716]$
	устойчивость	$[0; \infty)$	неуст.	неуст.	неуст.
m=8	существование	$[0; \infty)$	$[0; 5.8848]$	$[0; 5.8848]$	$[0; 17.9037]$
	устойчивость	$[5.8848; \infty)$	неуст.	неуст.	неуст.

4. Дискретные бризеры в скалярных моделях с неоднородными потенциалами

Обсуждаемая в предыдущих разделах работы модель (1), соответствующая однородному потенциалу степени m , является весьма специфической. Наиболее характерная ее особенность заключается в отсутствии фононного спектра. Действительно, для такой модели нельзя построить гармоническое приближение, поскольку разложение потенциальной энергии в многомерный ряд Тейлора начинается с членов, степени которых превышают 2.

В более же реалистических моделях, которые допускают гармоническое приближение, не существует локализованных ННМ Розенберга, в силу чего для построения ДБ в таких моделях требуется применение методов, отличных от описанных ранее. Наиболее часто для этой цели в работах разных авторов используется в той или иной форме метод Ньютона [1]. Однако на этом пути могут возникнуть существенные трудности, связанные с его сходимостью в многомерном пространстве L всех возможных начальных условий для исходных динамических переменных, описывающих бризерное решение. Поэтому для построения ДБ в тех случаях, когда нельзя воспользоваться аппаратом мод Розенберга, в настоящей работе применялся некоторый вариант метода *спуска* в вышеуказанном пространстве L . При этом минимизировалась сумма квадратов расхождений всех динамических переменных при $t = 0$ и при $t = T$, где T – некоторый произвольно фиксированный период бризерного решения. В ряде случаев для задания начального приближения в методе спуска использовался в «ручном режиме» метод парной синхронизации [24]. Применение такого подхода позволяет построить ДБ на представленных на рис. 2 инвариантных многообразиях для скалярных моделей, описываемых *любыми* потенциалами межчастичного взаимодействия. Сюрпризом оказалось, что даже для моделей с однородными потенциалами, для которых во всех известных нам работах построение бризеров основано на методе разделения переменных (а следовательно, на возможности применения аппарата ННМ Розенберга), можно найти бризерные решения, которые *не являются* модами Розенберга.

Пример такого бризера с периодом $T = 2$ на инвариантном многообразии $Q_{5 \times 5}^{(1)}$ для модели (1) при $m = 4$, $\gamma = 1$ приведен на рис. 5. На этом рисунке изображена временная эволюция динамических переменных $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$,

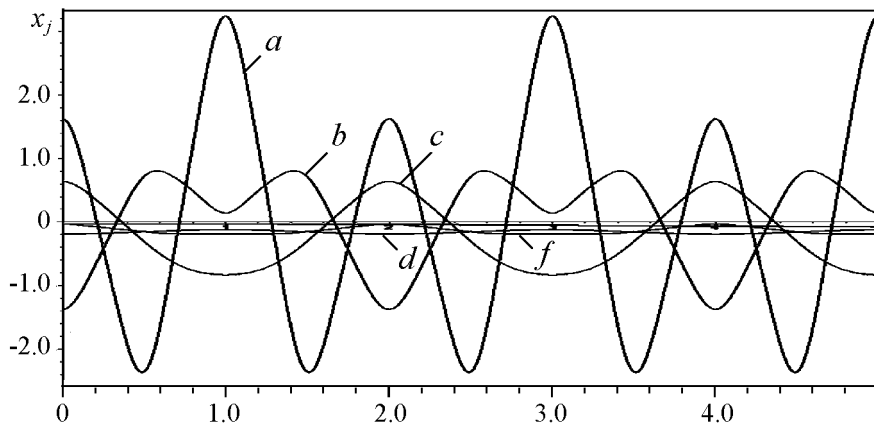


Рис. 5. Нетривиальный дискретный бризер в модели (1) с однородным потенциалом степени $m = 4$, при $\gamma = 1$, который не является модой Розенберга

которые соответствуют указанному многообразию (две другие переменные не видны в силу малости их амплитуд). Приведенный ДБ не является модой Розенберга уже хотя бы потому, что разные динамические переменные проходят через нуль в разные моменты времени, что противоречит уравнениям (4). Из рис. 5 видно, что полученный ДБ является достаточно хорошо локализованным. Более того, непосредственное интегрирование на больших временах, как и метод Флоке, свидетельствуют о его *устойчивости*. В силу нетривиальности ДБ, изображенного на рис. 5, приведем набор начальных условий для его построения: $a(0) = 1.6208$, $b(0) = -1.3718$, $c(0) = 0.6325$, $d(0) = -0.0370$, $e(0) = -0.1928$, $f(0) = -0.0354$ (начальные скорости всех динамических переменных имеют нулевые значения).

Для той же модели и того же самого инвариантного многообразия $Q_{5 \times 5}^{(1)}$ можно найти ДБ, который *является* НМ Розенберга и имеет тот же самый период $T = 2$. Он был также построен с помощью метода спуска, исходя из других начальных условий: $a(0) = 1.2820$, $b(0) = -0.2894$, $c(0) = 0.0036$, $d(0) = 0.0017$, $e(0) = -1.17 \cdot 10^{-6}$, $f(0) = -3.36 \cdot 10^{-16}$.

Дискретные бризеры, подобные изображенному на рис. 5, были обнаружены и для ряда других моделей, например, для системы (2), которая представляет собой набор расположенных в узлах квадратной решетки и линейно взаимодействующих друг с другом осцилляторов Дуффинга.

Заключение

В настоящей работе исследуются выделенные по симметрии инвариантные многообразия для скалярных моделей на плоской квадратной решетке, на которых могут реализовываться *локализованные* колебания (как периодические, так и непериодические). В силу ограниченного объема данной публикации, на рис. 2 приведены лишь те многообразия, которые отвечают правильным системам точек первого типа (см. рис. 1), а все другие будут обсуждены в дальнейшем.

Для двух типов моделей (1) и (2) были исследованы дискретные бризеры, соответствующие приведенным на рис. 2 многообразиям. В модели (1) с однородным потенциалом степени $m = 4, 6, 8$ найдены ДБ, которые в этом случае представляют собой локализованные нелинейные нормальные моды Розенберга. Для всех таких бризеров исследована их устойчивость по отношению к параметру γ , который характеризует силу онсайтовой части потенциала по отношению к его интерсайтовой части. Отметим отличие полученных результатов от представленных в работе [5]. Во-первых, там найдены не все типы дискретных бризеров, реализующихся на полном комплекте инвариантных многообразий трех возможных в квадратной решетке ПСТ (см. рис. 1). Во-вторых, в статье [5] учитывалась только интерсайтовая часть однородных потенциалов, а также не была исследована устойчивость получаемых автором бризерных решений.

Во всех известных работах, в которых рассматриваются ДБ для моделей с *однородными* потенциалами, представлены лишь бризеры, являющиеся модами Розенберга, поскольку они находятся методом разделения переменных. Поэтому неожиданностью было обнаружение в таких моделях бризеров, которые *не являются* таковыми модами. Более того, они могут сосуществовать с локализованными модами Розенберга при одних и тех же параметрах модели (1) и обладать одинаковыми с ними периодами.

Для модели линейно связанных осцилляторов Дуффинга (2) с помощью метода спуска оказалось возможным найти как «обычные» ДБ, для которых характерно одновременное прохождение всеми частицами через положение равновесия, так и «нетривиальные» бризеры, для которых это свойство не имеет места.

В отличие от работ других авторов, в настоящем исследовании был использован теоретико-групповой подход для предварительного поиска симметрично обусловленных инвариантных многообразий в скалярных моделях на плоской квадратной решетке. Нахождение таких многообразий позволяет существенным образом сократить число динамических переменных, соответствующих искомым дискретным бризерам. Вышеуказанный теоретико-групповой подход является общим и может быть применен не только к любым скалярным моделям на квадратной решетке (или на двумерных и трехмерных периодических структурах других типов), но и к разнообразным векторным решеточным моделям.

Авторы выражают благодарность Ю.В. Михлину за ряд советов, касающихся исследования устойчивости ННМ. Г.С. Безуглова выражает глубокую признательность Фонду некоммерческих программ «Династия» за финансовую поддержку.

Библиографический список

1. Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: existence, linear stability and quantization // Physica D. 1997. Vol. 103. P. 201.
2. Flach S., Willis C.R. Discrete breathers // Physics Reports. 1997. Vol. 295. P. 181.
3. Aubry S. Discrete breathers: Localization and transfer of energy in discrete Hamiltonian nonlinear systems // Physica D. 2006. Vol. 216. P. 1.
4. Flach S., Gorbach A. Discrete breathers: Advances in theory and applications // Physics Reports. 2007. Vol. 467. P. 1.
5. Fischer F. Self-localized single-anharmonic vibrational modes in two-dimensional lattices // Ann. Physik. 1993. Vol. 2. P. 296.
6. Flach F., Kladko K., Willis C.R. Acoustic breathers in two-dimensional lattices // Phys. Rev. Lett. 1997 Vol. 78. P. 1207.
7. Kiselev S.A., Sievers A.J. Generation of intrinsic vibrational gap modes in three-dimensional ionic crystals // Phys. Rev. B. 1997. Vol. 55. P. 5755.
8. Kevrekidis P.G., Rasmussen K.O., Bishop A.R. Two-dimensional discrete breathers: Construction, stability, and bifurcations // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 61. P. 2006.
9. Doi Y., Nakatani A. Structures of discrete breathers in two-dimensional Fermi–Pasta–Ulam lattices // Theor. Appl. Mech. Jpn. 2006. Vol. 55 P. 103.
10. Butt I.A., Wattis J.A.D. Discrete breathers in a two-dimensional Fermi–Pasta–Ulam lattice // J. Phys. A. Math. Gen. 2006. Vol. 39. P. 4955.
11. Butt I.A., Wattis J.A.D. Discrete breathers in a two-dimensional hexagonal Fermi–Pasta–Ulam lattice // J. Phys. A. Math. Gen. 2006. Vol. 40. P. 1239.
12. Feng B.F., Kawahara T. Discrete breathers in two-dimensional nonlinear lattices // Wave Motion. 2007. Vol. 45. P. 68.
13. Xu Q., Qiang T. Two-dimensional discrete gap breathers in a two-dimensional discrete diatomic Klein–Gordon lattice // Chin. Phys. Lett. 2009 Vol. 26. P. 070501.

14. *Yi X., Wattis J.A.D., Susanto H., Cummings L.J.* Discrete breathers in a two-dimensional spring-mass lattice // *J. Phys. A. Math. Theor.* 2009. Vol. 42. P. 355207.
15. *Дмитриев С.В., Хадеева Л.З., Пиеничнюк А.И., Медведев Н.Н.* Щелевые дискретные бризеры в двухкомпонентном трехмерном и двумерном кристаллах с межатомными потенциалами Морзе // *Физика твердого тела.* 2010. Т. 52. С. 1398.
16. *Koukouloyannis V., Kevrekidis P.G., Law K.J.H., Kourakis I., Frantzeskakis D.J.* Existence and stability of multisite breathers in honeycomb and hexagonal lattices // *J. Phys. A. Math. Theor.* 2010. Vol. 43. P. 235101.
17. *Сахненко В.П., Чечин Г.М.* Симметричные правила отбора в нелинейной динамике атомных систем // *ДАН.* 1993. Т. 330. С. 308.
18. *Chechin G. M., Sakhnenko V. P.* Interactions between normal modes in nonlinear dynamical systems with discrete symmetry. Exact results // *Physica D.* 1998. Vol. 117. P. 43.
19. *Chechin G.M., Ryabov D.S., Sakhnenko V.P.* Bushes of normal modes as exact excitations in nonlinear dynamical systems with discrete symmetry // *Nonlinear phenomena research perspectives / Ed. by C. W. Wang.* Nova Science Publishers, NY, 2007. P. 225.
20. *Бокий Г.Б.* Кристаллохимия. М.: Изд-во МГУ, 1960. 357 с.
21. *Chechin G.M.* Computers and group-theoretical methods for studying structural phase transitions // *Comput. Math. Applic.* 1989. Vol. 17. P. 255.
22. *Rosenberg R.M.* On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom // *Adv. Appl. Mech.* 1966. Vol. 9. P. 155.
23. *Chechin G.M., Dzhelauhova G.S., Mehonoshina E.A.* Quasibreathers as a generalization of the concept of discrete breathers // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 74. P. 36608.
24. *Гончаров П.П., Джелаухова Г.С., Чечин Г.М.* Дискретные бризеры в нелинейных моноатомных цепочках // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2007. Т. 6. С. 57.
25. *Chechin G.M., Dzhelauhova G.S.* Discrete breathers and nonlinear normal modes in monoatomic chains // *Journal of Sound and Vibration.* 2009. Vol. 322. P. 490.
26. *Аврамов К.В., Михлин Ю.В.* Нелинейная динамика упругих систем. Модели, методы, явления. Том 1. Ижевск: РХД, 2010. 704 с.

*Южный Федеральный
университет, Ростов-на-Дону*

*Поступила в редакцию 29.12.2010
После доработки 14.05.2011*

DISCRETE BREATHERS IN SCALAR DYNAMICAL MODELS ON THE PLANE SQUARE LATTICE

G.S. Bezuglova, P.P. Goncharov, Y.V. Gurov, G.M. Chechin

All symmetry related invariant manifolds, admitting localized vibrations, for dynamical models on plane square lattice were found by group-theoretical methods. Discrete breathers were constructed on these manifolds for the model with homogeneous potentials of interparticle interactions and their stability was studied. Nontrivial breather solutions

which are not nonlinear normal modes by Rosenberg have been revealed for the above model despite it admits space-time separation of dynamical variables. Discrete breathers of the same type were also found in the system of linear coupled Duffing oscillators situated in sites of square lattice. Our approach for studying discrete breathers can be spread to different two- and three-dimensional space-periodic dynamical models.

Keywords: Nonlinear dynamics, lattice models, discrete breathers, invariant manifolds, group-theoretical methods.



Безуглова (Джелаухова) Галина Сергеевна – родилась в Ростове-на-Дону в 1985 году. Аспирантка физического факультета Южного федерального университета. Стипендиат Фонда некоммерческих программ «Династия». Область научных интересов – нелинейная динамика, теоретико-групповые методы в физике, вычислительная физика.

344090 Ростов-на-Дону, ул. Р. Зорге, 5
Южный федеральный университет
E-mail: djel@rambler.ru



Гончаров Петр Петрович – родился в Донецке Ростовской области в 1986 году. В настоящее время – аспирант физического факультета Южного федерального университета. Специализируется на кафедре теоретической и вычислительной физики. Область научных интересов – нелинейная динамика и вычислительная физика.

344090 Ростов-на-Дону, ул. Р. Зорге, 5
Южный федеральный университет
E-mail: petro_zzz@rambler.ru



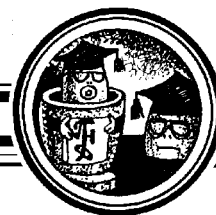
Гуров Юрий Владимирович – родился в 1985 году. Окончил физический факультет Южного федерального университета (бывший Ростовский государственный университет) (2007). В настоящее время является аспирантом НИИ физики Южного Федерального Университета. Область научных интересов – нелинейная динамика, хаос и хронобиология.

344090 Ростов-на-Дону, ул. Р. Зорге, 5
Южный федеральный университет
E-mail: noisegen@mail.ru



Ччин Георгий Михайлович – родился в Новочеркасске (1937), окончил РГУ (1960), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и вычислительной физики Южного федерального университета. Научный руководитель студенческой «Лаборатории нелинейной кристаллофизики» при НИИ физики ЮФУ, Соросовский доцент. Читает лекции по численным методам, вычислительной и нелинейной физике, теории групп. Область научных интересов - теоретико-групповые методы в физике, теория фазовых переходов, нелинейная динамика и вычислительная физика. Автор более 100 научных публикаций.

344090 Ростов-на-Дону, ул. Р. Зорге, 5
Южный федеральный университет
E-mail: gchchin@gmail.com



МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕРДЕЧНОЙ АКТИВНОСТИ НА ОСНОВЕ ОТОБРАЖЕНИЙ*

Часть I. Динамика одного элемента

Е.А. Павлов, Г.В. Осипов

В работе вводится новая вычислительно-эффективная модель сердечной клетки. Модель представляет собой 4-мерное точечное отображение и построена на основе широко известной модели Луо–Руди. Представлены возможности дискретной модели в воспроизведении различных режимов сердечной активности: возбудимого и автоколебательного. Изучены бифуркационные механизмы переходов между этими режимами. Показана связь между изменением индивидуальных параметров модели и биофизическими процессами в реальной сердечной клетке. Рассмотрена динамика возбудимой клетки при внешнем периодическом воздействии, в том числе различные типы синхронных откликов и явления гистерезиса.

Ключевые слова: Отображение, сердечная динамика, мембранный потенциал, возбудимая клетка, пейсмекерная клетка, гистерезис.

Введение

Исследование биологических процессов с помощью математического моделирования и методов нелинейной динамики является на сегодняшний день одним из перспективных направлений получения новых знаний о живых системах. В настоящее время в этой области можно выделить два основных класса моделей для описания процессов на клеточном уровне. Первый класс составляют модели, детально описывающие клетку на основе ионных токов. Такие модели строятся с использованием формализма Ходжкина–Хаксли [1] и состоят из достаточно большого количества переменных, что приводит к техническим трудностям при исследовании ансамблей связанных клеток. Кроме того, в некоторых случаях исследование индивидуальной динамики модели также представляет собой определенные проблемы.

*Статья написана по материалам доклада на IX Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, Россия, 4–9 октября, 2010.

Второй класс содержит простые (феноменологические) модели [2, 3], позволяющие лишь качественно описать активность клетки. Они строятся путем значительного упрощения уже существующих моделей и нередко состоят только из двух переменных, воспроизводящих быстрые и медленные процессы в клетке. Такие модели позволяют быстро производить вычисления, однако требуют существенных поправок при моделировании и объяснении того или иного нового эффекта. В настоящей работе предпринята попытка совместить лучшие стороны этих направлений для моделирования сердечной динамики, то есть создать простую вычислительно-эффективную модель сердечной клетки с биологически релевантными параметрами и на ее основе воспроизвести динамические механизмы активности миокарда.

Следует отметить, что моделирование даже одной сердечной клетки сопряжено с определенными трудностями, так как необходимо учитывать комплексную динамику большого числа ионных токов, влияющих на изменение мембранного потенциала в различные его фазы. К настоящему времени существует огромное число моделей сердечных клеток, основанных на экспериментальных данных. Все они представляют собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с большим числом переменных (8, 10, 15, 33 и даже 67) [4–8] и с достаточной степенью точности описывают динамику клетки. Предлагаемая дискретная модель построена на основе широко известной модели Луо–Руди [7], которая хорошо зарекомендовала себя в численных экспериментах [9–12]. Путем подробного анализа динамических переменных и ионных токов, влияющих на изменение мембранного потенциала, она была значительно упрощена и редуцирована к дискретной модели. Таким образом, удалось свести систему ОДУ с 8 динамическими переменными к 4-мерному отображению, сохранив при этом основные электрофизиологические параметры и свойства.

1. Описание модели

Модель представляет собой 4-мерное точечное отображение и может быть записана в форме

$$\begin{cases} V_{n+1} = V_n + \frac{1}{C_m}(-[I_{Na}(V_n, x_n) + I_{Ca}(V_n, y_n) + \\ \quad + I_{Kd}(V_n, z_n) + I_{Ki}(V_n) + I_{oc}(V_n)] + I_{st} + I_d), \\ x_{n+1} = x_n + (x_\infty(V_n) - x_n)/\tau_x(V_n), \\ y_{n+1} = \alpha_y(V_n)(1 - y_n) - \beta_y(V_n)y_n, \\ z_{n+1} = \alpha_z(V_n)(1 - z_n) - \beta_z(V_n)z_n, \end{cases} \quad (1)$$

где переменная V_n – мембранный потенциал, x_n, y_n, z_n – обобщенные воротные переменные для соответствующих ионных токов: натриевого I_{Na} , кальциевого I_{Ca} и калиевого I_{Kd} . Параметр C_m есть емкость мембраны, I_d – постоянный деполяризующий ток, I_{st} – входной импульс. Функции $I_{Na}(V_n, x_n)$, $I_{Ca}(V_n, y_n)$, $I_{Kd}(V_n, z_n)$, $I_{Ki}(V_n)$, $I_{oc}(V_n)$ в уравнении для мембранного потенциала представляют собой различные ионные токи, влияющие на формирование мембранного потенциала в его

различные фазы. Каждый из указанных токов имеет реальное физиологическое значение и соответствует ионному току из модели Луо–Руди [7]. Все они могут быть представлены в следующем виде:

$$I_{Na} = g_{Na} x_n^2 (V_n - E_{Na}) m_\infty - \text{быстрый натриевый ток},$$

$$I_{Ca} = 0.56 g_{Ca} y_n (V_n - E_{Ca}) - \text{медленный кальциевый ток},$$

$$I_{Kd} = g_{Kd} z_n F_{Kd}(V_n) - \text{калиевый ток, зависимый от времени},$$

$$I_{Ki} = g_{Ki} F_{Ki}(V_n) - \text{калиевый ток, независимый от времени},$$

$$I_{oc} = I_{pp}(V_n) + I_{bg}(V_n) - \text{другие токи, вовлеченные в формирование мембранного потенциала}.$$

Здесь параметры g_i с индексом $i = \{Na, Ca, Kd, Ki\}$ – максимальные проводимости соответствующих ионных токов, E_{Na} и E_{Ca} – потенциалы реверсии натрия и кальция, соответственно. Функции m_∞ , F_{Kd} , F_{Ki} , x_∞ , τ_x , α_i , β_i имеют отношение к воротным переменным, а функции I_{pp} , I_{bg} есть компоненты тока I_{oc} исходной модели [7]. Все вышеперечисленные функции имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} m_\infty = & -1.0526 \cdot 10^{-21} V_n^{12} - 2.0279 \cdot 10^{-19} V_n^{11} - 1.0771 \cdot 10^{-18} V_n^{10} + \\ & + 1.6023 \cdot 10^{-15} V_n^9 + 3.7446 \cdot 10^{-14} V_n^8 - 5.2536 \cdot 10^{-12} V_n^7 - \\ & - 8.8092 \cdot 10^{-11} V_n^6 + 8.2965 \cdot 10^{-9} V_n^5 + 9.6833 \cdot 10^{-10} V_n^4 - \\ & - 2.5759 \cdot 10^{-6} V_n^3 - 3.554 \cdot 10^{-5} V_n^2 + 0.0011 V_n + 0.9944, \end{aligned}$$

$$F_{Kd} = 81.9351 \cdot 10^{-6} V_n^3 - 214.2383 \cdot 10^{-5} V_n^2 - 0.01 V_n + 47.0553,$$

$$\begin{aligned} F_{Ki} = & 6.6243 \cdot 10^{-9} V_n^4 + 3.0694 \cdot 10^{-7} V_n^3 - 2.6809 \cdot 10^{-5} V_n^2 - \\ & - 1.0633 \cdot 10^{-4} V_n + 1.0192 \cdot 10^{-2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{pp} = & -2.0717 \cdot 10^{-9} V_n^5 - 3.1208 \cdot 10^{-7} V_n^4 - 6.0728 \cdot 10^{-6} V_n^3 + \\ & + 9.314 \cdot 10^{-4} V_n^2 + 4.4546 \cdot 10^{-2} V_n + 0.4678, \end{aligned}$$

$$I_{bg} = 0.03921(V_n + 59.87),$$

$$\begin{aligned} x_\infty = & 15.9457 \cdot 10^{-26} V_n^{14} + 3.8968 \cdot 10^{-23} V_n^{13} + 16.7517 \cdot 10^{-22} V_n^{12} - \\ & - 2.4767 \cdot 10^{-19} V_n^{11} - 1.8675 \cdot 10^{-17} V_n^{10} + 5.4138 \cdot 10^{-16} V_n^9 + \\ & + 5.9476 \cdot 10^{-14} V_n^8 - 4.2353 \cdot 10^{-13} V_n^7 - 8.3382 \cdot 10^{-11} V_n^6 - \\ & - 9.1273 \cdot 10^{-11} V_n^5 + 5.8726 \cdot 10^{-8} V_n^4 - 4.4997 \cdot 10^{-8} V_n^3 - \\ & - (1.0017 V_n^2 + 6.082 V_n) \cdot 10^{-5} + 9.3514 \cdot 10^{-4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_x = & 9.2993 \cdot 10^{-24} V_n^{14} + 2.0788 \cdot 10^{-21} V_n^{13} + 6.4715 \cdot 10^{-20} V_n^{12} - \\ & - 1.4021 \cdot 10^{-17} V_n^{11} - 8.2552 \cdot 10^{-16} V_n^{10} + 3.3218 \cdot 10^{-14} V_n^9 + \\ & + 2.6872 \cdot 10^{-12} V_n^8 - 2.7012 \cdot 10^{-11} V_n^7 - 4.1183 \cdot 10^{-9} V_n^6 + \\ & + 1.9038 \cdot 10^{-9} V_n^5 + 3.5448 \cdot 10^{-6} V_n^4 - 4.965 \cdot 10^{-5} V_n^3 + \\ & + 1.2365 \cdot 10^{-3} V_n^2 - 5.0567 \cdot 10^{-2} V_n + 1.694,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_y = & -2.2434 \cdot 10^{-9} V_n^4 - 3.0005 \cdot 10^{-8} V_n^3 - \\ & - 1.0327 \cdot 10^{-6} V_n^2 + 1.1923 \cdot 10^{-3} V_n + 4.1009 \cdot 10^{-2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_y = & -5.3887 \cdot 10^{-10} V_n^4 - 1.1921 \cdot 10^{-7} V_n^3 + \\ & + 8.4983 \cdot 10^{-6} V_n^2 - 1.813 \cdot 10^{-4} V_n - 997.1124 \cdot 10^{-3},\end{aligned}$$

$$\alpha_z = 3.0402 \cdot 10^{-9} V_n^3 + 6.6393 \cdot 10^{-7} V_n^2 + 5.4553 \cdot 10^{-5} V_n + 1.7119 \cdot 10^{-3},$$

$$\beta_z = -1.9186 \cdot 10^{-9} V_n^3 + 2.5765 \cdot 10^{-7} V_n^2 - 1.3209 \cdot 10^{-5} V_n - 9997.2805 \cdot 10^{-4}.$$

Представленные полиномиальные выражения для токов и воротных переменных выбраны как простейшие формы записи для наиболее реалистичного воспроизведения процесса формирования мембранного потенциала. При этом переменные x_n , y_n и z_n выбраны таким образом, чтобы скомпенсировать совместное действие всех активационных и деактивационных воротных переменных из исходной модели. Так, переменная x_n является обобщенной воротной переменной, осуществляющей воспроизведение совместной динамики переменных m , h и j из модели Луо–Руди [7], переменная y_n – обобщенная воротная переменная, объединяющая действие переменных d и f , переменная $[Ca]_i$ изменения внутриклеточной концентрации кальция выбрана постоянной величиной ввиду малости изменения последней. Для того, чтобы достаточно точно повторять совместную динамику указанных переменных, необходимо использовать аппроксимации высоких порядков. В качестве метода аппроксимации для получения полиномиальных форм был выбран метод наименьших квадратов. Полиномиальные формы описания в свою очередь были выбраны как наиболее приемлемые (в смысле вычислительной эффективности) для воспроизведения динамики ионных токов и воротных переменных в предлагаемой модели. Выбор самих порядков и коэффициентов аппроксимирующих полиномов обусловлен необходимостью наиболее точного совпадения результатов (формы и продолжительности мембранного потенциала, изменения ионных токов) предлагаемой и исходной моделей. Как и в модели Луо–Руди, все ионные токи вычислены для 1 см^2 мембраны с емкостным сопротивлением $C_m = 1 \text{ мФ/см}^2$. Для начальных ионных концентраций $[K]_0 = 5.4 \text{ мМ}$, $[K]_i = 145 \text{ мМ}$, $[Na]_0 = 140 \text{ мМ}$, $[Na]_i = 18 \text{ мМ}$, $[Ca]_0 = 1.8 \text{ мМ}$ и $[Ca]_i = 2 \cdot 10^{-4} \text{ мМ}$ параметры $g_{Na} = 23$, $g_{Ca} = 0.09$, $g_{Kd} = 0.282$, $g_{Ki} = 0.6047$, $E_{Na} = 54.4$ и $E_{Ca} = 118.6679$ (подробности см. в [7]). Здесь и далее будем использовать эти

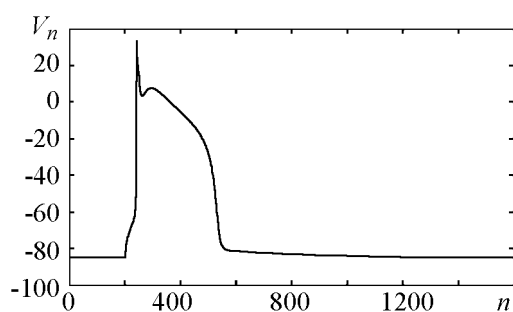


Рис. 1. Мембранный потенциал возбудимой клетки

значения параметров во всех случаях, если не оговорено обратное. Типичная форма эволюции мембранного потенциала, производимого отображением, представлена на рис. 1. Здесь параметр $I_d=0$, а амплитуда и продолжительность входного импульса I_{st} выбраны достаточными для формирования отклика клетки на внешний стимул. При этом одна итерация n отображения соответствует 1 мс модельного времени.

2. Свойства модели

Несмотря на относительную простоту, модель демонстрирует достаточно хорошее соответствие с процессами в реальных сердечных клетках и дает широкие возможности для ее применения при моделировании. Так, можно провести некоторую связь между изменением индивидуальных параметров модели (проводимостей ионных каналов) и использованием определенных медицинских препаратов. Известно, что блокаторы кальциевых каналов приводят к уменьшению g_{Ca} , тем самым уменьшая продолжительность мембранного потенциала и снижая частоту сердечных сокращений. Изменение продолжительности мембранного потенциала при вариации параметра g_{Ca} представлено на рис. 2, а. Также применение определенных блокаторов K^+ -каналов существенно продлевает плато. Этот эффект изменения g_{Kd} иллюстрируется рис. 2, б. Зависимость продолжительности мембранного потенциала (APD) от изменения параметров g_{Ca} и g_{Kd} представлена на в поле рис. 2. Таким образом, за счет регулирования параметров g_{Ca} и g_{Kd} можно контролировать продолжительность и форму мембранного потенциала клетки. Это свойство модели является очень важным при моделировании различных участков сердечной ткани (синцития) в зависимости от указанных типов клеток (миоцитов в предсердиях или желудочках, клеток волокон Пуркинье и др.). Также описанные эффекты дают воз-

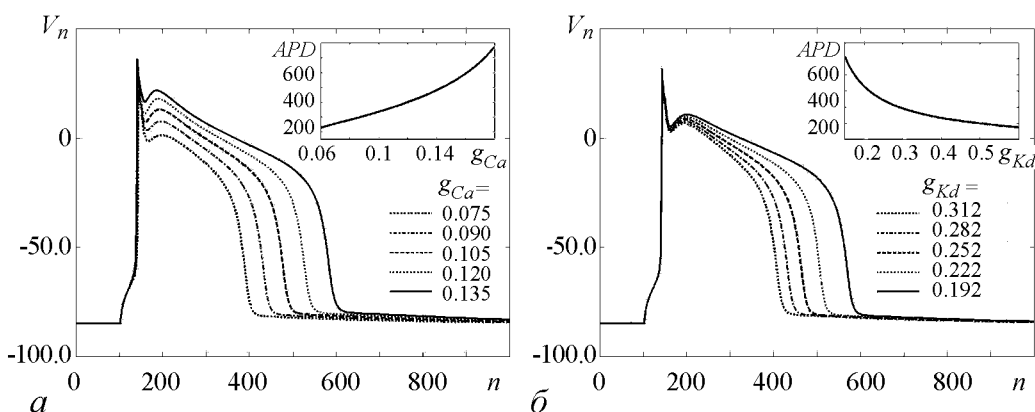


Рис. 2. Изменение формы мембранного потенциала в случае возбудимой клетки при различных значениях параметров (а) g_{Ca} , (б) g_{Kd}

возможность моделирования различных патологических изменений ионных концентраций в культурах сердечных клеток, приводящих к нарушению сердечного ритма и проведения, и применения различных медицинских препаратов с целью их восстановления.

Кроме воспроизведения динамики и свойств возбудимых клеток отображение (1) также можно использовать при моделировании пейсмекерных клеток, расположенных в синоатриальном (SA) и атриовентрикулярном (AV) узлах сердца. Однако необходимо отметить, что переход к пейсмекерной активности (осцилляторному режиму) связан с определенной перестройкой ионных токов. Последние данные компьютерных экспериментов оперируют с изменением плотности калиевого тока аномального выпрямления (в нашем случае – с одной из разновидностей калиевого тока, независимого от времени – I_{Ki}), уменьшение влияния которого, как предполагается, влечет формирование тока, образованного Na^+ - Ca^{2+} обменником, что обеспечивает формирование автоматической активности [13, 14]. Другие экспериментальные данные говорят об отсутствии в пейсмекерных клетках быстрого натриевого тока I_{Na} , что показывается за счет блокирования последнего специальным веществом – тетродотоксином [15]. Кроме того, пейсмекерные клетки характеризуются наличием нескольких дополнительных токов, вовлеченных в формирование мембранного потенциала в фазе диастолической деполяризации и дальнейшей автоматической активности. По этим причинам мы существенно уменьшаем плотность натриевого тока (за счет уменьшения параметра g_{Na}) и вводим дополнительный деполяризующий ток I_d , который позволит скомпенсировать явное отсутствие в предлагаемой

модели тех токов, наличие которых способствует формированию автоматической активности. Таким образом, для моделирования центральных клеток SA-узла берется значение g_{Na} , достаточно близкое к нулю, и изменяется параметр I_d , что позволяет увеличить потенциал покоя клетки до значения, характерного для пейсмекерных клеток. Типичная форма эволюции мембранного потенциала, производимого отображением для случая пейсмекерных клеток, представлена на рис. 3. При моделировании мембранного потенциала, характерного для периферических клеток SA-узла и клеток AV-узла, требуется подобрать соответствующий баланс между указанными двумя параметрами, то есть увеличить g_{Na} и подобрать значение I_d . На рис. 4 кривые l_1 и l_2 разделяют плоскость параметров (I_d, g_{Na}) на области с возбудимой и осцилляторной (пейсмекерной) динамикой, где также представлены характерные формы мембранного потенциала для описанных выше типов пейсмекерных

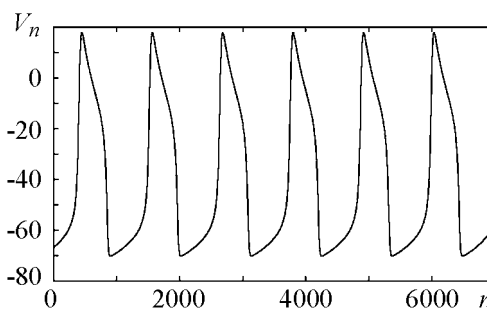


Рис. 3. Мембранный потенциал пейсмекерной клетки

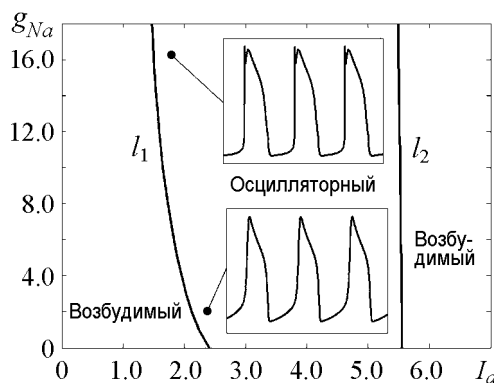


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма на плоскости параметров (I_d, g_{Na})

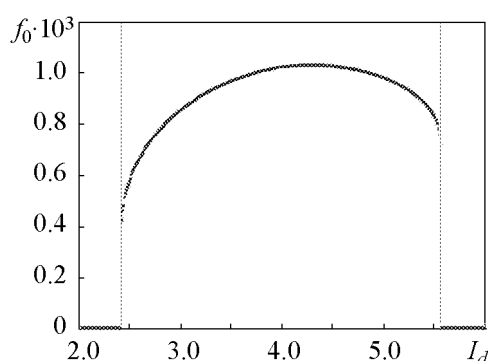


Рис. 5. Изменение частоты колебаний клетки при вариации I_d

клеток. Заметим, что приведенные рассуждения об ионных токах и формах мембранного потенциала достаточно хорошо согласуются со многими другими известными системами [16, 17], построенными специально как модели клеток SA-узла на основе экспериментальных данных.

Параметр I_d влияет на частоту колебаний пейсмекерной клеток. На рис. 5 показано изменение частоты при вариации I_d , параметр $g_{Na}=0$.

3. Возбудимый и осцилляторный режимы: бифуркационные механизмы переходов

Как уже упоминалось ранее, сердечная клетка, описываемая отображением (1) может быть возбудимой или осцилляторной в зависимости от изменения параметров I_d и g_{Na} . Не уменьшая общности, зафиксируем параметр $g_{Na}=0$ и будем следить за динамикой отображения при изменении параметра I_d . Необходимо отметить, что одной из характерных особенностей этого отображения является тот факт, что все эффекты, интересные с точки зрения нелинейной динамики, могут быть рассмотрены на плоскости переменных (z_n, V_n) , что значительно упрощает проведение бифуркационного анализа.

Когда $I_d=0$, клетка находится в возбудимом режиме. Единственным аттрактором в фазовом пространстве отображения является устойчивая неподвижная точка, которая отвечает состоянию покоя клетки. При увеличении параметра I_d эта устойчивая неподвижная точка и близлежащее к ней седло движутся навстречу друг другу и сливаются при $I_d=2.41$ (рис. 6, а). При этом происходит возникновение устойчивой замкнутой инвариантной кривой, что соответствует переходу к осцилляторному режиму. Таким образом, вследствие бифуркации седло-узла на инвариантной кривой возбудимая клетка становится пейсмекерной (рис. 6, б).

Следующая бифуркация происходит при $I_d=5.51$. В этом случае неустойчивая неподвижная точка, охваченная замкнутой инвариантной кривой, становится устойчивой вследствие субкритической бифуркации Неймарка–Сакера с появлением неустойчивой замкнутой инвариантной кривой вокруг неподвижной точки. Здесь наблюдается эффект бистабильности, характеризующийся сосуществованием в фазовом пространстве отображения двух аттракторов – устойчивой неподвижной точки и устойчивой замкнутой инвариантной кривой (рис. 6, в). Далее с увеличением I_d с 5.51 до 5.55 неустойчивая замкнутая инвариантная кривая увеличивается и приближается к устойчивой инвариантной кривой. При I_d , близком к 5.55, имеет место дискретный вариант бифуркации двойного предельного цикла, когда обе замкнутые инвариантные кривые сливаются и исчезают. В результате в фазовом пространстве вновь остается единственная устойчивая неподвижная точка (рис. 6, г). Клетка снова становится возбудимой.

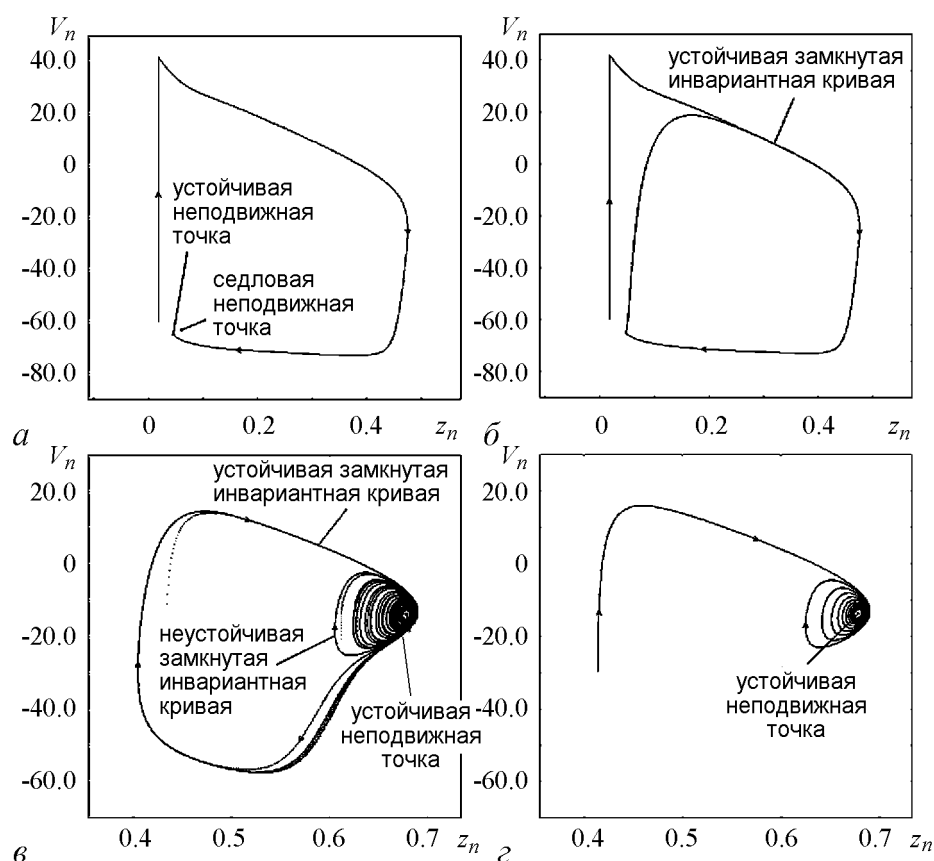


Рис. 6. Неподвижные точки и инвариантные кривые отображения в проекции на плоскость (z_n, V_n) при различных значениях I_d : а – 2.40, б – 2.41, в – 5.52, г – 5.55

4. Синхронный отклик возбудимой клетки на внешнюю стимуляцию

Как известно, распространение импульса в сердце характеризуется целым спектром паттернов, зависящих от скорости активации, начиная от нормальных электрических разрядов, в которых каждый импульс распространяется от предсердий к желудочкам в отношении 1:1 до появления полного блока в некоторой части проводящей системы. На границах между распространением импульсов 1:1, и полной блокадой имеют место различные промежуточные процессы, наблюдаемые во всех типах сердечной ткани, которые могут отличаться в любом их проявлении или механизме. В результате возможно появление различного рода аритмий. Классический пример такого поведения – явление Венкебаха, при котором увеличение частоты приводит к предсказуемой последовательности паттернов активности и в конечном счете 2:1 или выше степени блока проведения импульсов. При этом каждая клетка характеризуется ограниченным временем восстановления после каждой активации, в результате чего увеличение частоты воздействия ведет к уменьшению отношения отклик–стимул (R:S). Кроме того, отклик зависит от текущего состояния клетки в момент подачи внешнего стимула.

Стимуляция клетки производилась путем приложения в качестве I_{st} последовательности импульсов постоянной амплитуды $I_{st}=2$ и продолжительности 45 итера-

ций с периодом между стимулами (BCL), изменяющимся от 150 до 1000 итераций. Производимые реализации мембранного потенциала приведены на рис. 7, а. График изменения отношения отклик-стимул (R:S) в зависимости от изменения величины BCL представлен на рис. 7, б. График демонстрирует различные типы синхронных откликов в отношении S:R (1:1, 2:1, 3:1 и др.) и резкие переходы между величинами, соответствующими нецелочисленным значениям отношения S:R. Построенная таким образом лестница зависимостей демонстрирует монотонное возрастание отношения R:S при увеличении значения BCL, то есть при уменьшении частоты внешнего воздействия. Важной теоретической особенностью такого вида графика зависимостей S:R является то, что, если строить ее с нужной степенью точности и с достаточно малым периодом изменения BCL между любыми двумя соседними отношениями $S_1:R_1$ и $S_2:R_2$, можно обнаружить хотя бы одно дополнительное соотношение, эквивалентное значению $(S_1+S_2):(R_1+R_2)$. В качестве таковых выбраны синхронные отклики в отношении 9:2, 5:2, 3:2 (см. рис. 7, б).

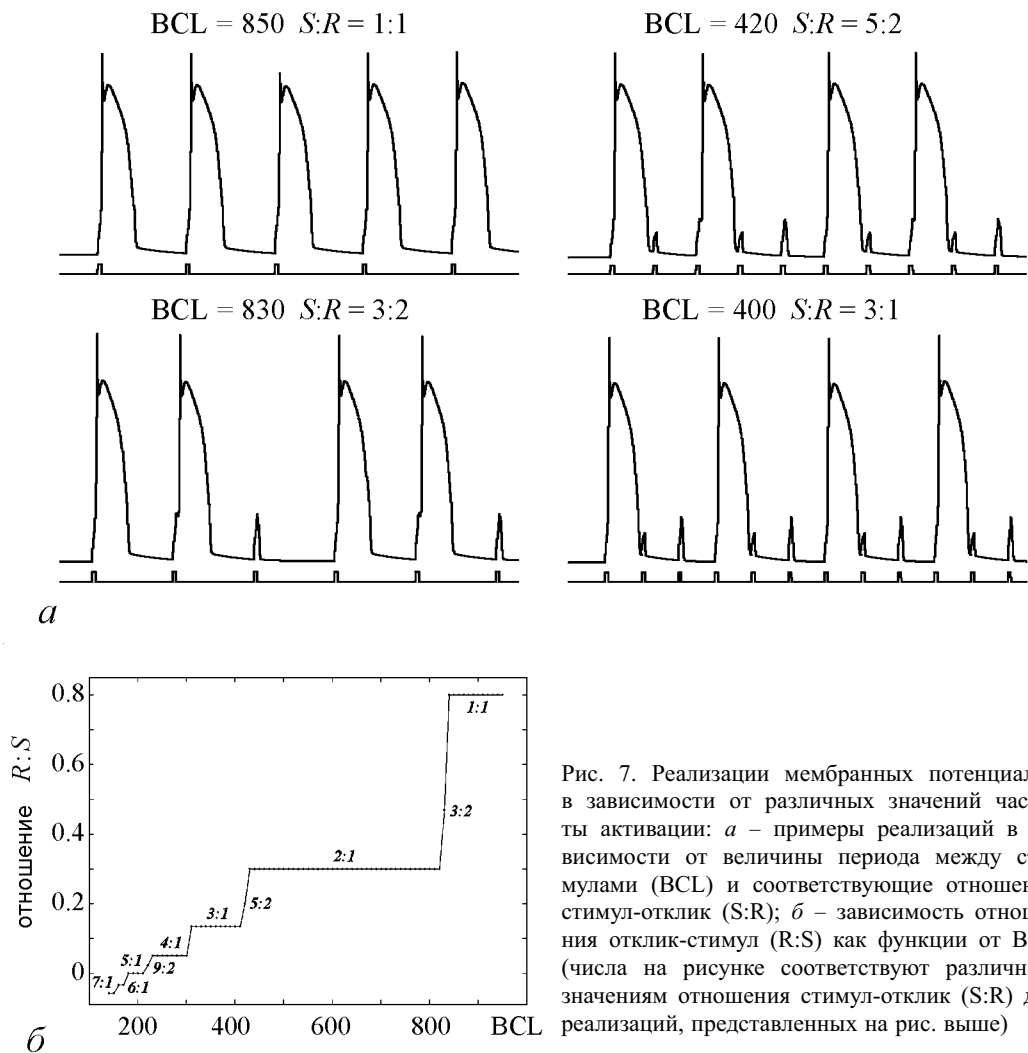


Рис. 7. Реализации мембранных потенциалов в зависимости от различных значений частоты активации: а – примеры реализаций в зависимости от величины периода между стимулами (BCL) и соответствующие отношения стимул-отклик (S:R); б – зависимость отношения отклик-стимул (R:S) как функции от BCL (числа на рисунке соответствуют различным значениям отношения стимул-отклик (S:R) для реализаций, представленных на рис. выше)

Другим интересным явлением, наблюдающимся при синхронном отклике клетки на внешнее периодическое воздействие, является гистерезис. В качестве контрольного параметра взята частота внешнего воздействия $\omega = 2\pi/VCL$. Частота отклика Ω определяется как $(l - 1)/n$, где l – число максимумов, n – количество итераций между первым и последним максимумом. Когда частота ω невелика, наблюдается синхронный отклик 1:1, то есть один отклик клетки отвечает одному входному импульсу. При увеличении частоты внешнего воздействия наблюдается переход к синхронному отклику 2:1. В этом случае единственный отклик клетки отвечает двум приложенным импульсам. При движении в обратном направлении, то есть при уменьшении частоты внешнего воздействия, имеет место переход от синхронного отклика 2:1 к отклику 1:1. Все описанные эффекты представлены на рис. 8, демонстрирующем явление гистерезиса при синхронном отклике клетки на внешнее воздействие.

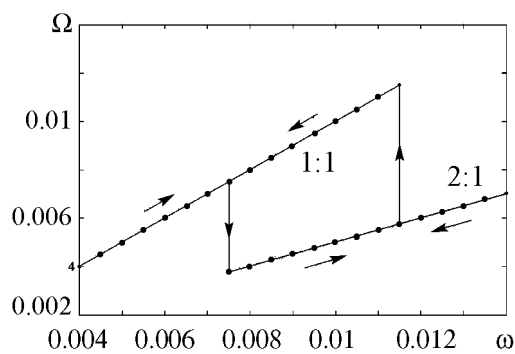


Рис. 8. Явление гистерезиса при синхронном отклике возбудимой клетки на внешнее периодическое воздействие

Отметим, что указанные результаты достигаются за счет применения следующей адаптационной процедуры: последние полученные значения переменных в предыдущем эксперименте берутся в качестве начальных условий для следующего, что показывает зависимость отклика клетки не только от величины частоты воздействия, но и от момента времени, когда этот отклик подается.

Заключение

Предложена новая вычислительно-эффективная модель сердечной активности, представляющая собой 4-мерное отображение и основанная на свойствах модели в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений, построенной на экспериментально полученных данных. Установлено хорошее качественное соответствие между изменением индивидуальных параметров модели и биофизическими процессами в реальных сердечных клетках. Показано, что модель позволяет воспроизводить различные режимы сердечной активности, такие как возбудимый и осцилляторный режимы. На основе анализа фазового пространства отображения изучены бифуркационные механизмы переходов между этими режимами. Исследована динамика возбудимой клетки при внешнем периодическом воздействии, в том числе продемонстрированы различные типы синхронных откликов и явление гистерезиса.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 08-02-92004, 08-02-97049, 10-02-00940) и при поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (контракты № П2308, 02.740.11.5138, П2018).

Библиографический список

1. *Hodgkin A.L., Huxley A.F.* A quantitative description of membrane currents and its application to conduction and excitation in nerve // *J. Physiol.* 1952. Vol. 117. P. 500.
2. *Bonhoeffer K.F.* Modelle der nervenerregung // *Naturwissenschaften.* 1953. Vol. 40. P. 301.
3. *Chialvo D.R.* Generic excitable dynamics on a two-dimensional map // *Chaos, Solitons, Fractals.* 1995. Vol. 5. P. 461.
4. *Noble D.* A modification of the Hodgkin–Huxley equations applicable to Purkinje fibre action and pacemaker potential // *J. Physiol.* 1962. Vol. 160. P. 317.
5. *Beeler G.W., Reuter H.* Reconstruction of the action potential of ventricular myocardial fibers // *J. Physiol.* 1977. Vol. 268. P. 177.
6. *Di Francesco D., Noble D.* A model of cardiac electrical activity incorporating ionic pumps and concentration changes // *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* 1985. Vol. 307. P. 353.
7. *Luo C.H., Rudy Y.* A model of the ventricular cardiac action potential, depolarization, repolarization and their interaction // *Circ. Res.* 1991. Vol. 68. P. 1501.
8. *Ten Tusscher K.H., Noble D., Noble P.J., Panfilov A.V.* A model for human ventricular tissue // *Am. J. Physiol.* 2004. Vol. 286. H1573.
9. *Qu Z., Weiss J.N., Garfinkel A.* From local to global spatiotemporal chaos in a cardiac tissue model // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 61. P. 727.
10. *Arce H., Lopez A., Guevara M.* Triggered alternans in an ionic model of ischemic cardiac ventricular muscle // *Chaos.* 2002. Vol. 12. P. 807.
11. *Alonso S., Panfilov A.V.* Negative filament tension in the Luo–Rudy model of cardiac tissue // *Chaos.* 2007. Vol. 17. 015102.
12. *Kanakov O.I., Osipov G.V., Chan C.K., Kurths J.* Cluster synchronization and spatio-temporal dynamics in networks of oscillatory and excitable Luo–Rudy cells // *Chaos.* 2007. Vol. 17. 015111.
13. *Kurata Y., Hisatome I., Matsuda H., Shibamoto T.* Dynamical mechanisms of pacemaker generation in IK1-downregulated human ventricular myocytes: Insights from bifurcation analyses of a mathematical model // *Biophys. J.* 2005. Vol 89. 2865.
14. *Silva J., Rudy Y.* Mechanism of pacemaking in IK1-downregulated myocytes // *Circ. Res.* 2003. Vol. 92. P. 261.
15. *Carmeliet E., Vereecke J.* Adrenaline and the plateau phase of the cardiac action potential // *Pflugers Arch.* 1969. Vol. 313. P. 300.
16. *Noble D., Noble S.J.* A model of sino-atrial node electrical activity based on a modification of the DiFrancesco-Noble equations // *Proc. R. Soc. Lond. B Biol. Sci.* 1984. Vol. 222. P. 295.
17. *Zhang H., Holden A.V., Kodama I., Honjo H., Lei M., Varghese T., Boyett M.R.* Mathematical models of action potential in the periphery and center of the rabbit sinoatrial node // *Am. J. Physiol.* 2000. Vol. 279. H397.

Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского

Поступила в редакцию
После доработки

4.02.2011
12.04.2011

MODELING OF CARDIAC ACTIVITY ON THE BASIS OF MAPS: DYNAMICS OF SINGLE ELEMENT

E.A. Pavlov, G.V. Osipov

New computationally efficient model of cardiac activity is introduced. The model is a four-dimensional map based on well-known Luo–Rudy model. Capabilities of the model in replication of the basic cardiac cells' properties are shown. Analysis of relationship between changes in individual parameters of the model and biophysical processes in real cardiac cells has been made. The model can reproduce two basic activity modes such as excitable and oscillatory regimes. Bifurcation mechanisms of transitions of between these regimes are investigated using phase space analysis. The dynamics of excitable cell on the external periodic action, including various types of synchronous response and hysteresis phenomenon, is investigated.

Keywords: Map, cardiac dynamics, membrane potential, excitable cell, pacemaker cell, hysteresis.



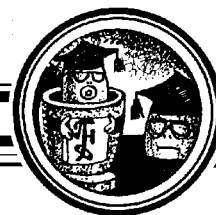
Павлов Евгений Александрович – родился в 1985 году, окончил Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (2008). Аспирант кафедры теории управления и динамики машин факультета ВМК ННГУ. Область научных интересов: математическое моделирование, нелинейная динамика, теория бифуркаций, синхронизация и структурообразование в нелинейных активных средах. Имеет 6 научных публикаций.

603950 Россия, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: eugene-pavlov@mail.ru



Осипов Григорий Владимирович – родился в Нижнем Новгороде (1960), окончил Нижегородский государственный университет (ННГУ) им. Н.И. Лобачевского (1982). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (НСК, 1988) по математическому моделированию и доктора физико-математических наук (ННГУ, 2004) по радиофизике. С 1988 года работает в ННГУ, заведующий кафедрой «Теории управления и динамики машин» (2007). Соавтор монографий «Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации» и «Synchronization in oscillatory networks». Опубликовал 125 научных статей (в том числе 2 обзора) по теории колебаний и волн и математическому моделированию.

603950 Россия, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: osipov@vmk.unn.ru



МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕРДЕЧНОЙ АКТИВНОСТИ НА ОСНОВЕ ОТОБРАЖЕНИЙ*

Часть II. Ансамбль связанных элементов

Е.А. Павлов, Г.В. Осипов

На основе отображения, предложенного в работе [1], исследуется динамика ансамблей связанных элементов в приложении к моделированию пространственно-временных процессов в сердечной мышце. В частности, рассмотрена динамика двух связанных отображений, моделирующих взаимодействие пейсмекера (осцилляторной клетки) и миоцита (возбудимой клетки), а также двух пейсмекеров. Установлено возникновение синхронного режима через совпадение характерных временных характеристик – частот колебаний – при увеличении силы связи. Исследуется динамика цепочек и решеток связанных осцилляторных элементов со случайным распределением индивидуальных частот. Обнаружены эффекты кластерной синхронизации и переход к глобальной синхронизации при увеличении силы связи. Проанализировано распространение импульсов по цепочке, а также концентрических и спиральных волн в двумерной решетке связанных отображений. Изучены характеристики спиральной волны в зависимости от изменения индивидуальных параметров и связи. Представлены результаты сравнения вычислительной эффективности отображения и исходной модели в форме ОДУ.

Ключевые слова: Пространственно-временная динамика, синхронизация, образование структур, концентрическая волна, спиральная волна.

Введение

Исследование коллективной динамики крупномасштабных ансамблей связанных элементов является сегодня одной из наиболее важных задач, имеющих как теоретическое, так и прикладное значение для понимания процессов, протекающих в различных сложных радиофизических, механических, биологических, химических системах. В таких системах могут наблюдаться всевозможные динамические эффекты, например, синхронизация колебаний, распространение концентрических и спи-

*Статья написана по материалам доклада на IX Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, Россия, 4–9 октября, 2010.

ральных волн, а также формирование различных пространственно-временных структур. К подобным сложным системам, демонстрирующим практически весь спектр описанных явлений, относится, в частности, сердце.

Безусловно, с развитием современных методов компьютерного моделирования и высокопроизводительной техники изучение таких систем стало возможным, однако даже сейчас исследование больших ансамблей (тем более с физиологически реалистичной топологией) представляет собой процесс, требующий значительных вычислительных ресурсов. По этой причине для моделирования сердечной динамики в [1] была предложена новая вычислительно-эффективная модель в форме точечного отображения, позволяющая воспроизводить основные динамические механизмы сердечной активности и допускающая описание на основе ионных токов.

Настоящая работа представляет результаты численных экспериментов по моделированию пространственно-временной динамики с использованием указанной модели, в том числе по анализу особенностей синхронизации и выявлению некоторых волновых эффектов в ансамблях связанных элементов. Кроме того, при воспроизведении тех или иных динамических эффектов анализируется связь между полученными численными результатами и процессами, происходящими в реальной сердечной ткани.

1. Моделирование электрической связи

Одной из важных компонент в моделировании электрической активности сердечной ткани является выбор типа связи между клетками. Как известно, проведение электрического импульса по миокарду характеризуется внеклеточным электрическим взаимодействием между близлежащими клетками, осуществляемым через гэп-контакты (gap junctions) [2]. Такой способ соединения клеток в миокарде осуществляется с помощью специальных каналов (коннексонов), образуемых шестью белками-коннексинами. Через гэп-контакты могут непосредственно передаваться от клетки к клетке электрические сигналы (потенциалы действия), а также некоторые молекулы.

Моделирование гэп-контактов на различных уровнях сложности предложено в работах [3–5] в приложении к моделям в форме ОДУ. В качестве таковой в большинстве случаев использовался диффузионный тип связи. Таким образом, как и для моделей ОДУ, для учета влияния гэп-контактов в случае модели в форме отображения перепишем уравнения для мембранного потенциала в виде

$$V_{n+1}^{ij} = F(V_n^{ij}) + d\Delta_d(V_n^{ij}), \quad (1)$$

где функция $F(V_n^{ij})$ описывает индивидуальную динамику ij -й клетки, а параметр d – силу электрической связи между близлежащими клетками. Здесь Δ_d – дискретный Лапласиан.

Для иллюстрации некоторых эффектов и особенностей сердечной динамики рассмотрим несколько достаточно простых одномерных и двумерных решеток связанных отображений с указанным типом связи (1), моделирующих сердечную ткань в случае нормального и патологического функционирования миокарда.

2. Взаимодействие возбудимых и осцилляторных клеток

Вначале рассмотрим динамику малого ансамбля, а именно, двух связанных отображений, моделирующих взаимодействие пейсмекера (осцилляторной клетки) и миоцита (возбудимой клетки). Необходимость детального анализа связанных сердечных клеток различных типов диктуется тем фактом, что данное взаимодействие имеет принципиальное значение при проведении электрического импульса от источника автоматической активности (пейсмекера) к рабочим клеткам миокарда, проводящим электрический импульс (кардиомиоцитам). При проведении моделирования мы продемонстрируем как ситуацию нормального проведения импульсов (1 : 1), так и ситуацию, когда в силу недостаточной силы связи будут различные типы синхронных откликов и, как следствие, проведения импульсов по сердечному волокну (цепочке отображений).

Синхронный отклик возбудимой клетки в отношении $S : R$ оценивался через совпадение соответствующих временных характеристик (частот) для обеих клеток. Для вычисления частоты определялись плоскости пересечения как $V_{n+1}^i > V_n^i$,

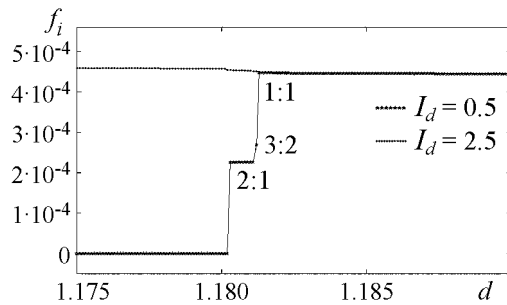


Рис. 1. Взаимодействие пейсмекера ($I_d=2.5$) и возбудимой клетки ($I_d=0.5$)

$V_{n+1}^i = -30$ и регистрировалось каждое пересечение траектории указанных плоскостей. Частота колебаний каждого элемента вычислялась по формуле

$$f_i = (l_i - 1) / \delta n_i, \quad (2)$$

где l_i есть число пересечений указанной плоскости, а δn_i – число итераций между первым и последним пересечением. Установление синхронного режима в отношении $S : R$ можно расценивать как R откликов возбудимой клетки в ответ на S импульсов, поступающих от пейсмекерной клетки. На рис. 1 приведены результаты одного из экспериментов по моделированию двух связанных клеток. Показано изменение частоты колебаний для обеих клеток и уменьшение отношения $S : R$ при увеличении значения связи. На рис. 2 представлены временные реализации для обеих клеток при различных значениях $S : R$ синхронного отклика, отмеченных на рис. 1.

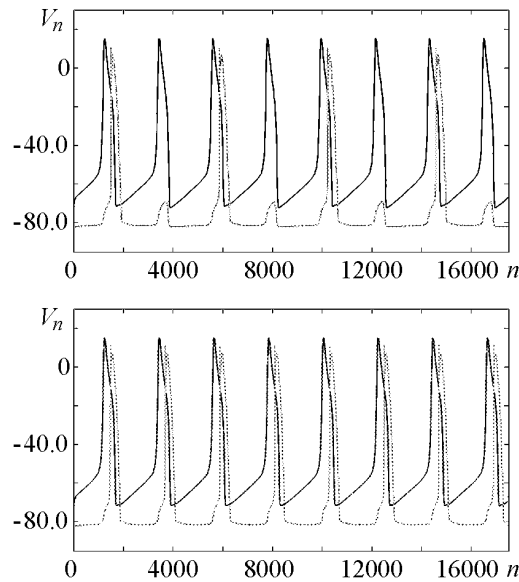


Рис. 2. Временные реализации двух связанных клеток (пейсмекера ($I_d=2.5$) и возбудимой клетки ($I_d=0.5$)) при различных типах синхронного отклика: а – отклик 2 : 1; б – отклик 1 : 1

Далее рассматривается цепочка связанных элементов, сконструированная следующим образом: к уже имеющимся двум пейсмекерной и возбудимой клеткам справа добавляется еще 48 возбудимых клеток. Это дает возможность изучить эффект распространения импульса от пейсмекера по возбудимой

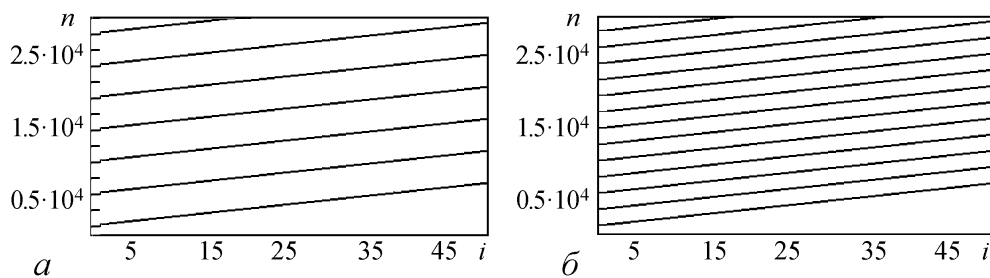


Рис. 3. Пространственно-временная динамика цепочки связанных отображений при различных значениях силы связи d : a – 0.011807; b – 0.01182

среде. Пространственно-временная динамика такой цепочки при различных значениях d изображена на рис. 3. При достаточно малом d нет проведения колебаний по возбудимой части цепочки. При $d=0.011807$ (рис. 3, a) только каждый второй импульс от пейсмекера проходит по возбудимой среде. Наконец, при $d>0.01182$ (рис. 3, b) есть полное проведение импульсов по цепочке (1:1).

3. Цепочки и решетки осцилляторных элементов

Рассмотрим результаты анализа ансамблей, состоящих только из осцилляторных элементов. Исследование таких ансамблей связано, в первую очередь, с моделированием функционирования SA-узла. Известно, что SA-узел является основным водителем ритма в сердечной мышце человека. Он представляет собой особый участок на своде правого предсердия, расположенный в месте впадения верхней полой вены, и состоит из небольшого числа сердечных мышечных волокон, иннервированных окончаниями нейронов из вегетативной нервной системы. В SA-узле зарождается каждая волна возбуждения, которая приводит к сокращению сердечной мышцы и служит стимулом для возникновения следующей волны. В этом смысле синхронная активность клеток SA-узла является одним из ключевых моментов в процессе формирования единого сердечного ритма. И наоборот, рассогласованность (некогерентная активность) участков SA-узла влечет дисфункцию последнего, что может вызвать различного рода аритмии. Все это показывает, насколько важно изучение особенностей синхронизации в ансамблях связанных осцилляторных клеток в данном контексте приложения к моделированию электрофизиологии сердца.

В настоящей работе анализ ансамблей осцилляторных элементов проводился в несколько этапов. Сначала рассматривалась динамика двух связанных отображений, моделирующих взаимодействие двух пейсмекеров (осцилляторных клеток). Каждый из пейсмекеров обладает своей собственной индивидуальной частотой, задаваемой с помощью различных значений параметра I_d . Так же как и в случае с возбудимой клеткой частота колебаний оценивалась по формуле (2). Установление синхронных режимов через совпадение частот при увеличении силы связи d представлено на рис. 4.

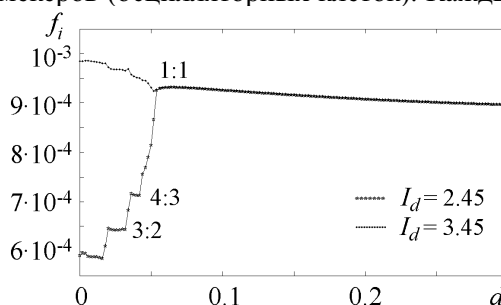


Рис. 4. Взаимодействие двух пейсмекеров

На втором этапе анализа исследовалась цепочка осцилляторных клеток со свободными граничными условиями. Для этого была проведена серия численных экспериментов по моделированию цепочек из 30-ти локально диффузионно связанных осцилляторных элементов со случайным распределением индивидуальных частот (параметр I_d был случайным образом распределен на интервале [2.8;3.6]). Ниже приводятся результаты одной из таких реализаций. На рис. 5 показаны пространственно-временные диаграммы эволюции мембранных потенциалов клеток, взятые после временного интервала ($t_{trans} = 10^6$) переходных процессов в цепочке. Распределения соответствующих средних частот f_i для каждого из 30-и элементов при различных значениях силы связи d представлены на рис. 6. Можно видеть, что с ростом связи коллективное поведение элементов в цепочке становится все более когерентным, то есть все большее количество элементов становится взаимно синхронизованным.

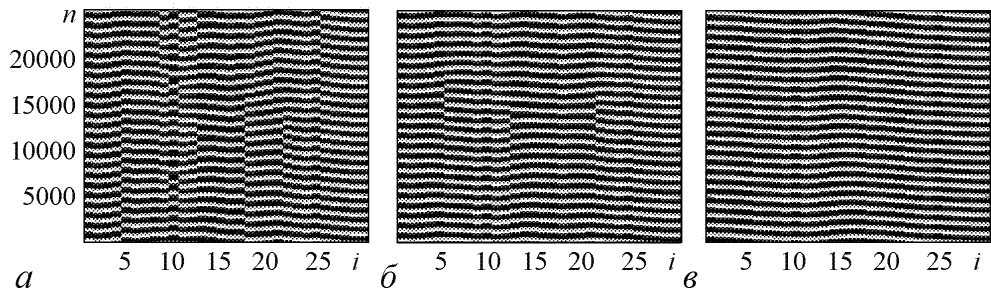


Рис. 5. Пространственно-временная динамика цепочки связанных отображений при различных режимах синхронизации. При связи $d = 0.002$ (а) существуют кластеры синхронизации для элементов вблизи концов цепочки и полностью несинхронизованные движения для элементов в середине цепочки. При $d = 0.003$ (б) имеет место пять кластеров синхронизованных элементов. При $d = 0.005$ (в) реализуется режим глобальной синхронизации

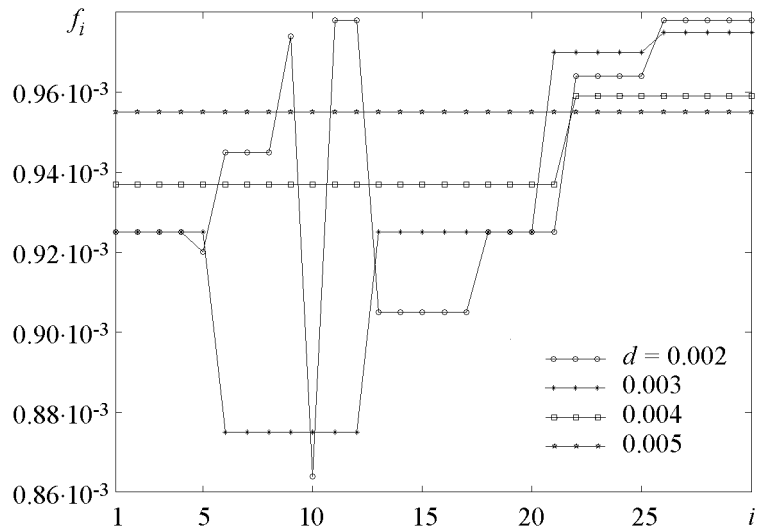


Рис. 6. Распределение средних частот колебаний для режимов синхронизации, представленных на рис. 5

Так, для коэффициента связи $d = 0.003$ (рис. 5, б) наблюдается пять кластеров синхронизированных элементов. При $d = 0.004$ – два кластера синхронизации. На границе двух соседних кластеров синхронизации имеют место проскоки (см. рис. 5, а, б), частота появления которых определяется разностью средних частот синхронизации в соседних кластерах. При $d = 0.005$ (рис. 5, в) существует режим глобальной синхронизации. Таким образом, при увеличении силы связи d наблюдается переход от полностью некогерентного состояния элементов в цепочке к установлению глобальной синхронизации через режим кластерной синхронизации.

Переходим теперь к анализу динамики двумерной решетки 100×100 связанных осцилляторных элементов. Так же как и для цепочки случайное распределение индивидуальных частот элементов обусловлено распределением параметра I_d на указанном интервале. Граничные условия – свободные концы. На рис. 7 представлено распределение средних частот элементов и соответствующее мгновенное распределение мембранного потенциала при одной из реализаций. Видно, что при слабой силе связи d формируются кластеры синхронизации, однако они состоят из достаточно малого числа элементов и в целом динамика решетки выглядит некогерентной (рис. 7, а и б). При дальнейшем увеличении силы связи d динамика становится более регулярной, размеры кластеров увеличиваются (рис. 7, в и г). Наконец, при $d = 0.005$ почти во всей решетке имеет место единственный кластер синхронизации, за исключением малых «дефектов», характеризующихся отличными от усредненного значения частотами (рис. 7, д). Пространственная динамика решетки демонстрирует почти регулярные волны, распространяющиеся от лидера – пейсмекера, задающего частоту колебаний всем элементам – по всей решетке с препятствиями на указанных «дефектах» (рис. 7, е). Дальнейший рост значения силы связи d приводит к режиму глобальной синхронизации элементов решетки.

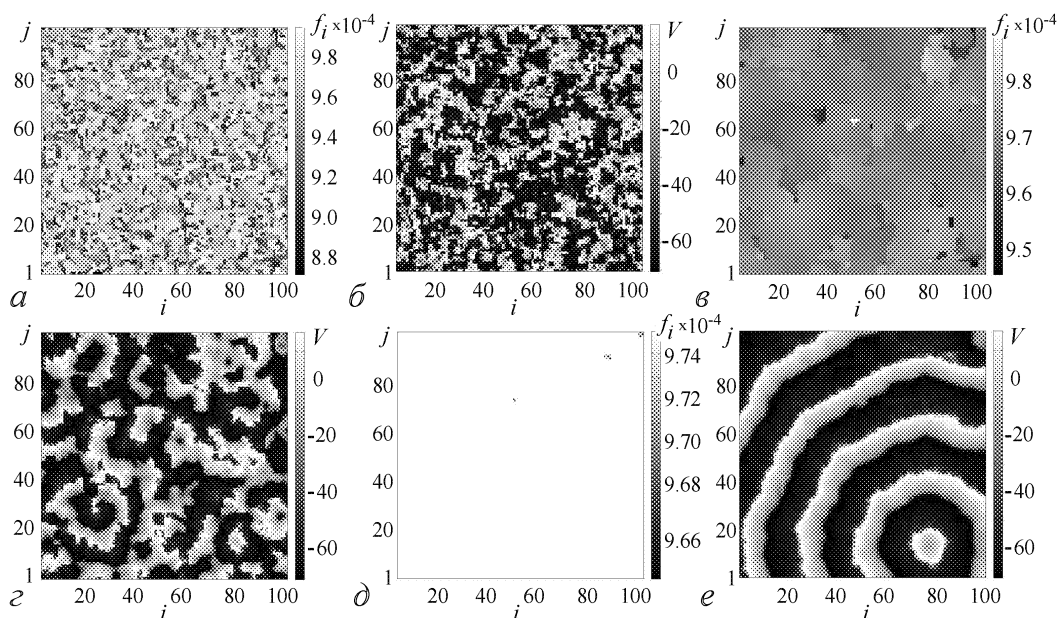


Рис. 7. Распределение средних частот элементов (а, в, д) и мгновенное распределение мембранного потенциала (б, г, е) в решетке при различных значениях силы связи d : 0.001 (а, б), 0.002 (в, г), 0.005 (д, е)

4. Решетки возбудимых элементов

В этом разделе рассмотрим ансамбли, состоящие из связанных возбудимых клеток, которые, как известно, играют фундаментальную роль в проведении электрического возбуждения по миокарду. Действительно, исследование таких ансамблей достаточно типично при моделировании проводящих участков сердечной ткани, а анализ волновых процессов, протекающих в таких ансамблях, позволяет адекватно описывать различные режимы сердечной активности.

Рассмотрим двумерную решетку 250×250 связанных элементов со свободными концами, моделирующую возбудимую среду. На рис. 8 приведен результат распространения концентрических волн в решетке возбудимых клеток. Источниками концентрических волн в решетке являются элементы с номерами $(75, 175)$ и $(175, 50)$. Видно, что два движущихся навстречу друг другу фронта волн, исходящих из указанных источников, сталкиваются и гасят друг друга. Это происходит вследствие характерной для возбудимых сред сильной релаксационности, то есть превышения времени рефрактерности над временем возбуждения. В результате распространяющаяся в сердце волна имеет резкий передний фронт и длинный рефрактерный хвост заднего фронта, где возбуждение невозможно. Две волны поэтому не могут пройти одна сквозь другую и гаснут. Отметим, что концентрические волны, распространяющиеся от пейсмекерной зоны (SA-узла), являются результатом пространственно-временной организации нормальной деятельности миокарда, что обеспечивает нормальные условия сокращения сердечной мышцы.

При определенных условиях возбудимости взаимодействие фронтов волн с препятствиями может привести к разрушению фронта концентрической волны и образованию спиральных волн, частота вращения которых выше частоты нормального следования импульсов возбуждения от SA-узла. Активность спиральных волн может вызывать повторную самостоятельную активацию различных участков миокарда, что связано с появлением различного рода сердечных аритмий [6], таких как, например, пароксизмальная тахикардия, которая затем может перерасти в фибрилляцию.

Моделирование эффекта спиральных волн выполнено на решетке 500×500 связанных элементов. Влияние изменения параметров g_{Ca} и g_{Kd} на характеристики спиральной волны и ее проведения в двумерной решетке представлено на рис. 9, *a–в*

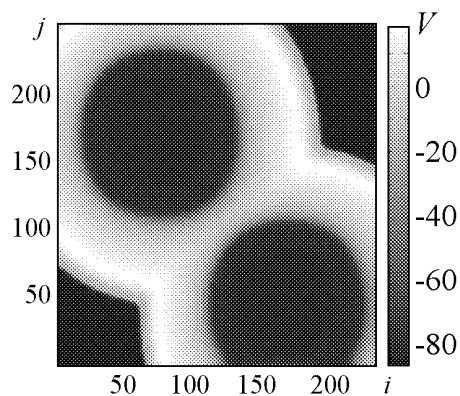


Рис. 8. Распространение концентрических волн в двумерной решетке

и *г–е*, соответственно, здесь $d = 0.2$. Рис. 9, *ж–и* представляет результаты моделирования волн при различных значениях параметра связи d для возбудимых клеток с $g_{Ca} = 0.09$, $g_{Kd} = 0.282$. Приведенные результаты по моделированию спиральных волн в двумерной решетке получены с использованием протокола $S_1 - S_2$ [7]. Вышеуказанный метод достаточно часто используется при моделировании и заключается в следующем. Сначала воздействуют на элементы с одной стороны решетки S_1 , запуская тем самым плоскую волну,

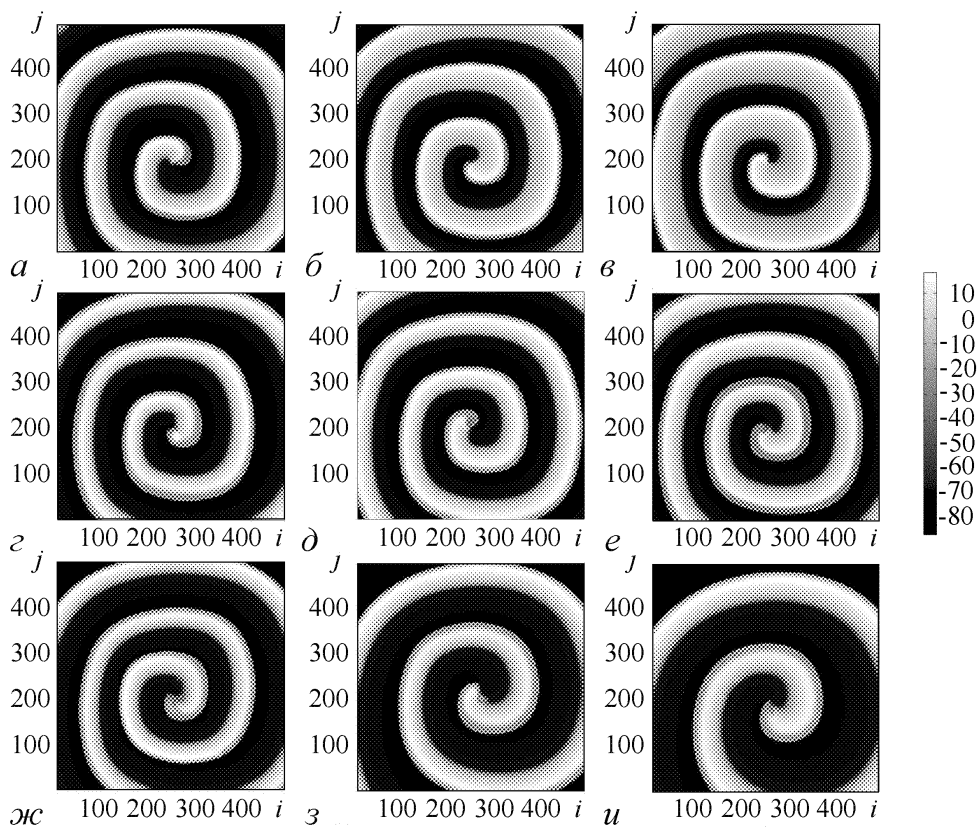


Рис. 9. Спиральные волны в двумерной решетке – пространственная динамика при вариации параметров g_{Ca} : 0.11 (а), 0.13 (б), 0.15 (в); g_{Kd} : 0.27 (г), 0.24 (д), 0.21 (е) и связи d : 0.20 (ж), 0.24 (з), 0.28 (и)

распространяющуюся в одном направлении (слева направо). После того, как волна достигает середины решетки (в нашем случае $i = 250$), прикладывается дополнительный импульс S_2 параллельно распространению фронта волны возбуждения. Этот второй стимул S_2 используется с целью «задавить» половину распространяющейся плоской волны, свободный конец которой в этих условиях как раз и дает формирование спиральной волны в решетке.

5. Вычислительная эффективность

Как было указано в [1], важной отличительной особенностью предлагаемой модели является высокая вычислительная эффективность, что позволяет быстро производить численные эксперименты для крупномасштабных ансамблей связанных элементов. Напомним, что модель представляет собой точечное отображение и по этой причине не требует необходимости выбора как самого метода, так и шага численного интегрирования, как в случае моделей в форме ОДУ. В настоящей работе проведено сравнение вычислительной эффективности модели в форме отображения [1] и оригинальной модели Луо–Руди [8], на основе которой она была построена.

Для одного элемента сравнение скоростей счета были проведены для моделирования возбудимых клеток с приложенной стимуляцией. Модельное время со-

Сравнение вычислительного времени
для различных размеров двумерных решеток

Размер решетки ($N \times N$)	100 × 100	250 × 250	500 × 500
Отображение	0.15 мин	0.9 мин	3.65 мин
Модель Луо–Руди	19 мин	115 мин	457 мин

ставляло 50.00 мс. Сравнительные вычисления были выполнены на процессоре Intel Pentium IV 2.80-GHz CPU с 1.00 Gb RAM с использованием шага численного интегрирования $\Delta t = 0.01$ мс для модели Луо–Руди. Для исходной модели (Луо–Руди) время вычисления составляло 52.1 с машинного времени, в то время как моделирование того же эффекта с использованием модели в форме отображения заняло всего 0.2 с. Безусловно, скорость интегрирования модели ОДУ (модель Луо–Руди) может быть увеличена за счет выбора более сложной схемы численного интегрирования или использования адаптивных сеток [9, 10]. Однако даже тогда модель в форме отображения демонстрирует более высокую вычислительную эффективность в сравнении с моделями в форме ОДУ. Также было проведено сравнение вычислительной эффективности для двумерного случая, то есть в зависимости от различных размеров решеток, где каждый элемент описывался либо моделью Луо–Руди, либо моделью в форме отображения. Результаты сравнения времен счета для отображения и модели Луо–Руди приведены в таблице.

Заключение

Проведено исследование динамики ансамблей связанных отображений в контексте описания пространственно-временных процессов в сердечной мышце, в том числе ситуации нормального и патологического функционирования миокарда.

Проанализирована система из двух связанных отображений, моделирующих взаимодействие пейсмекера (осцилляторной клетки) и миоцита (возбудимой клетки). Представлены различные типы синхронных откликов $S : R$ возбудимой клетки в ответ на импульсы, поступающие от пейсмекерной клетки. Показано уменьшение отношения $S : R$ при увеличении значения связи d . Проанализировано распространение импульсов от пейсмекера по цепочке возбудимых элементов.

Исследована динамика цепочек и решеток связанных осцилляторных элементов со случайным распределением индивидуальных частот. В ходе численных экспериментов установлено, что в таких ансамблях возможно существование следующих режимов коллективной динамики:

- некогерентная активность элементов ансамбля;
- режимы кластерной синхронизации;
- глобальная синхронизация всех элементов в ансамбле.

Представлен эффект перехода от полностью некогерентного поведения связанных элементов к глобальной синхронизации через режим кластерной синхронизации при увеличении силы связи d .

Рассмотрена динамика двумерных решеток связанных возбудимых элементов. Продемонстрировано распространение концентрических и спиральных волн в решетке связанных отображений. Изучены характеристики спиральной волны (форма и величина фронта возбуждения) в зависимости от изменения индивидуальных параметров отображения: g_{Ca} и g_{Kd} , а также от силы связи d между элементами решетки.

Представлены результаты сравнения времен вычисления отображения и модели Луо–Руди, на основе которой оно было построено. Сравнение проведено как для одного элемента, так и для различных размеров двумерных ансамблей связанных элементов. Показана высокая вычислительная эффективность модели в форме отображения.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 08-02-92004, 08-02-97049, 10-02-00940) и при поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (контракты № П2308, 02.740.11.5138, П2018).

Библиографический список

1. Павлов Е.А., Осипов Г.В. Моделирование сердечной активности на основе отображений: Динамика одного элемента // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19, № 3. С. 104.
2. Rohr S. Role of gap junctions in the propagation of the cardiac action potential // Cardiovasc. Res. 2004. Vol. 62. P. 309.
3. Joyner R.W., van Capelle F.J. Propagation through electrically coupled cells. How a small SA node drives a large atrium // Biophys. J. 1986. Vol. 50. P. 1157.
4. Jamaledine R.S., Vinet A., Roberge F.A. New frequency entrainment scenario in a pair of cardiac cells coupled through a variable resistance (Proceedings of the 18th Annual International Conference of the IEEE Engineering) // Medicine and Biology Society. 1996. Vol. 3. P. 1270.
5. Henriquez A.P., Vogel R., Muller-Borer B.J., Henriquez C.S., Weingart R., Cascio W.E. Influence of dynamic gap junction resistance on impulse propagation in ventricular myocardium: A computer simulation study // Biophys. J. 2001. Vol. 81. P. 2112.
6. Kleber A.G., Rudy Y. Basic mechanisms of cardiac impulse propagation and associated arrhythmias // Physiol. Rev. 2004. Vol. 84. P. 431.
7. Bernus O., Wilders R., Zemlin C.W., Verschelde H., Panfilov A.V. A computationally efficient electrophysiological model of human ventricular cells // Am. J. Physiol. 2002. Vol. 282. H2296.
8. Luo C.H., Rudy Y. A model of the ventricular cardiac action potential, depolarization, repolarization and their interaction // Circ. Res. 1991. Vol. 68. P. 1501.
9. Cherry E.M., Greenside H.S., Henriquez C.S. A space-time adaptive method for simulating complex cardiac dynamics // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 84. P. 1343.
10. Qu Z., Garfinkel A. An advanced algorithm for solving partial differential equation in cardiac conduction // IEEE Trans. Biomed. Eng. 1999. Vol. 46. P. 1166.

Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского

Поступила в редакцию
После доработки

4.02.2011
12.04.2011

MODELING OF CARDIAC ACTIVITY ON THE BASIS OF MAPS: ENSEMBLES OF COUPLED ELEMENTS

E.A. Pavlov, G.V. Osipov

The dynamics of coupled maps' ensembles is investigated in the context of description of spatio-temporal processes in the myocardium. Particular, the dynamics of two coupled maps is explored as well as modeling the interaction of pacemaker (oscillatory) cell and myocyte (excitable cell), and the interaction of two pacemakers. Setting of synchronous regime by increasing of coupling strength is considered through a coincidence of their characteristic time scales (characteristic frequencies). Effects of cluster and global synchronization in 1D and 2D lattices of oscillatory cells with a random distribution of individual frequencies are discussed. Impulse propagation in the chain of excitable cells has been observed. Analysis of 2D lattice of excitable elements with target and spiral waves has been made. The characteristics of the spiral wave have been analyzed in depending on the individual parameters of the map and coupling strength between elements of the lattice. Comparative results of computational efficiency with the map-based model and original ODE model are presented.

Keywords: Spatio-temporal dynamics, synchronization, pattern formation, target wave, spiral wave.



МЕТОД АВТОМАТИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ НА ОСНОВЕ НЕПРЕРЫВНОГО ВЕЙВЛЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ВОЛНОВЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ СЛОЖНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИГНАЛОВ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧАМ ГЕОФИЗИКИ*

*А.Е. Филатова, А.Е. Артемьев, А.А. Овчинников,
А.А. Короновский, А.Е. Храмов*

В работе предложен новый, использующий непрерывное вейвлетное преобразование, метод диагностики определенных осцилляторных паттернов на полевых данных наземной сейсмической разведки для экспресс-анализа полевых данных и автоматизации процесса диагностики искомым паразитных компонент сейсмозаписи. Эффективность предложенного метода проиллюстрирована как на примере эталонной модели теории колебаний (системе Лоренца, демонстрирующей перемежающееся поведение), так и на реальных геофизических данных.

Ключевые слова: Автоматическая диагностика, вейвлетный анализ, цифровые сигналы, сейсморазведочные работы, звуковые и поверхностные волны.

Введение

Современные математические методы исследования, анализа и диагностики различных нелинейных режимов динамики и волновых компонент, присутствующих в сложных колебательных процессах, активно развиваемые в теории колебаний и волн в радиофизике, находят все большее применение в самых различных областях естествознания. Одним из важных аспектов развития методов изучения сложных сигналов является проблема анализа структуры нестационарных процессов при наличии помех, актуальная как при проведении фундаментальных научных исследований в физике, физиологии, геофизике, социологии, так и при изучении экспериментальных данных в различных практических приложениях науки и техники.

Геофизические исследования являются одним из ярких примеров практической необходимости развития и создания новых методик изучения структуры и фильтрации различных компонент сложных экспериментальных сигналов, востребованных как с точки зрения развития теоретической геофизики, так и для практических

*Статья написана по материалам доклада на IX Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, Россия, 4–9 октября, 2010.

нужд поисковых работ. На сегодняшний день наиболее активно прогрессирующими областями геофизики являются отрасли, связанные с поиском и разведкой залежей различных природных ископаемых и, в наибольшей степени, нефтяных и газовых месторождений. Лидирующее место по объему ежегодных полевых поисковых и разведочных работ с последующими камеральными исследованиями полученных данных занимает сейсмическая разведка методом отраженных волн. Сейсмическая разведка, обеспечивая весьма большую глубинность исследований земной коры при достижении высокой детальности информации, играла и играет важную, а подчас и преобладающую роль в задачах прогнозирования нефтегазоносности глубоко залегающих отложений при освоении крупнейших нефтегазоносных провинций на территории Российской Федерации в Западной и Восточной Сибири, Поволжье, Прикаспийской впадине, Тимано-Печорском регионе [1, 2].

Спектр актуальных для поисковых геофизических работ задач анализа и фильтрации весьма широк. В него входят проблемы полевого экспресс-анализа и первичной обработки больших объемов результатов полевых работ, очистка цифровых данных от случайных шумов, дифференциация полезных и паразитных компонент сложных сигналов, которые, отметим, могут быть вызваны практически неразличимыми с точки зрения физики процессами, и т.д. [2]. Применяемые для изучения зарегистрированной сейсмической информации методики обработки определяют финальную успешность всех этапов сейсмической разведки и, в конечном итоге, величину ее финансовых показателей и соответствующую экономическую выгоду. Большая стоимость полевых исследований требует высочайшего качества обработки экспериментальных материалов в целях получения максимально возможной информации о геологическом строении земной коры района работ. Таким образом, новые современные алгоритмы и методы анализа, фильтрации и выделения различных компонент сложных сигналов могут решить многие проблемы, существующие в различных аспектах обработки временных рядов полевых данных. Несмотря на то, что за последние десятилетия был достигнут значительный прогресс в развитии методов изучения динамики систем с меняющимися во времени характеристиками [3–13], задача развития нового и совершенствования уже существующего инструментария для адекватной расшифровки информации, содержащейся в сигналах таких систем, остается одной из важнейших для экспериментальных исследований. В значительной степени это связано с ограничениями применяемых в настоящее время специальных методов анализа нестационарной динамики. В применении к конкретной области обработки полевых данных в геофизических исследованиях актуальными проблемами являются, в частности, задачи исключения паразитных компонент сейсмозаписей без искажения полезной информации, автоматизация различных стадий динамической обработки и диагностики различных волновых компонент материала.

Следует отметить, что сигналы, полученные при проведении геофизических поисково-разведочных работ, являются принципиально многокомпонентными, характеризуются существенной нестационарностью, их спектральный состав и амплитуда меняются с течением времени, поэтому представляется перспективным применение для их исследования вейвлетного анализа [14–17], хорошо приспособленного для анализа таких нестационарных сложных процессов. Известен ряд удачных применений вейвлетного преобразования для анализа и обработки нестационарных сигналов геофизической природы, в частности, для сжатия данных и кратномасштабного анализа в задачах очистки сигналов от высокочастотных шумов [18, 19], классифи-

кации данных [20], для разработки оптимальных фильтров на основании одномерного вейвлет-преобразования с материнскими функциями DOG-семейства [21–24], для диагностики в реальном времени состояния систем [25], для расчета и анализа атрибутов сейсмических записей [26–28]. Кроме того, весьма перспективным является использование вейвлетного анализа при подготовке полевых сейсмических данных к процедурам AVO-анализа [29–32]. Метод AVO-анализа (Amplitude Variation with Offset) – метод изучения зависимости амплитуд отраженной волны от удаления – широко применяется в мировой практике в процессе обнаружения, разведки и разработки, в основном, газовых месторождений, а иногда и нефтяных [33–35]. Благоприятными условиями для применения этой методики являются разрезы, сложенные относительно молодыми, слабо консолидированными терригенными породами мезозойского и кайнозойского возраста [36, 37]. На основании наблюдающихся в последние десятилетия достижений в исследовании сейсмических амплитуд для определения углеводородов, можно сделать предположения, что дальнейшие успехи направления AVO-анализа будут напрямую связаны с улучшением качества предобработки сейсмической информации для повышения соотношения сигнал–помеха, включая усовершенствование способов исключения влияния на амплитуды промежуточной сложно построенной толщи и учета наклона и кривизны отражающих границ путем глубинной миграции до суммирования. Очевидно, что в таком случае современная обработка сейсмических данных должна проводиться с сохранением истинного соотношения амплитуд сейсмических записей [38]. Согласно пункту 7.4.2.3 технической инструкции по сейсморазведке [38], для проведения обработки с сохранением амплитудных соотношений, из графа обработки исключаются процедуры автоматической регулировки амплитуд и процедура одноканальной нормализации амплитуд в заданном временном окне. Они заменяются процедурой регулировки амплитуд с учетом граничных (поверхностных) условий, когда амплитудный коэффициент для каждой трассы рассчитывается с учетом влияния расположения пунктов взрыва и приема, общей глубинной точки отражения, а также расстояния между пунктами взрыва и приема сигнала. Кроме этого, вместо одноканальной деконволюции используется деконволюция с учетом поверхностных условий, когда оператор деконволюции для каждой трассы рассчитывается также с учетом влияния расположения общей глубинной точки, пунктов взрыва и приема сигнала и расстояния между ними. В свою очередь, отказ от традиционных для сейсморазведки процедур регулировки усиления порождает ряд новых задач фильтрации различных помех и шумов сейсмоматериала и, в частности, проблему аккуратного подавления волн-помех звукового и поверхностного типов.

Целью настоящей работы являлось создание нового метода диагностики на основе непрерывного вейвлетного преобразования определенных осцилляторных паттернов в режиме реального времени на полевых данных наземной сейсмической разведки методом отраженных волн. Основные достоинства предложенного метода, как показано дальше, – это возможность использования его для экспресс-анализа полевых данных и автоматизации на его основе процесса диагностики искомых паразитных компонент сейсмозаписи, соответствующих волнам-помехам звукового и поверхностного типов. Также к достоинствам предложенного метода следует отнести незначительные затраты машинного времени, требуемые для такой обработки, что позволяет эффективно реализовать многоканальный анализ данных по сейсмическому профилю в реальном времени.

1. Метод автоматической диагностики различных компонент сложного нестационарного сигнала

Непрерывное вейвлетное преобразование с комплексным материнским вейвлетом для хаотического временного ряда $x(t)$ осуществляется следующим образом [3]:

$$W(s, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{s, t_0}^*(t) dt, \quad (1)$$

где $\psi_{s, t_0}^*(t)$ – вейвлетная функция, получающаяся из материнского вейвлета $\psi_0(t)$ –

$$\psi_{s, t_0}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi_0\left(\frac{t - t_0}{s}\right). \quad (2)$$

Параметр s , называемый масштабом вейвлетного преобразования ($s \in \mathbb{R}^+$), отвечает за ширину вейвлета, а $t_0 \in \mathbb{R}$ – параметр сдвига, определяющий положение вейвлета на оси t . В формуле (1) символ «*» означает комплексное сопряжение. Необходимо отметить, что при проведении вейвлетного анализа термин «временной масштаб» используется вместо термина «частота», традиционного для фурье-анализа. В настоящей работе в качестве материнского вейвлета (2) выбран вейвлет Морле [3]

$$\psi_0(\eta) = \pi^{-1/4} \exp(j\omega_0\eta) \exp(-\eta^2/2). \quad (3)$$

Параметр вейвлет-функции ω_0 был выбран равным 2π , что, с одной стороны, обеспечивает хорошее соотношение между локализациями вейвлет-функции во времени и фурье-пространстве [3], а с другой стороны, позволяет легко сопоставлять временные масштабы s вейвлет-преобразования (1) с частотами f спектрального представления сигнала, поскольку для данного значения параметра ω_0 выполняется соотношение $s \approx 1/f$ [3,4]. Выбор материнского вейвлета был также обусловлен близостью его формы к виду регистрируемого при наземных сейсморазведочных полевых работах сейсмического импульса.

По аналогии со спектром мощности фурье-преобразования можно ввести в рассмотрение мгновенное

$$E(s, t_0) = |W(s, t_0)|^2 \quad (4)$$

и интегральное

$$\langle E(s) \rangle = \int |W(s, t_0)|^2 dt_0 \quad (5)$$

распределение энергии по временным масштабам [3].

Поскольку в весьма широком смысле поведение системы во время преобладания различных волновых компонент различается, то и структура вейвлет-поверхности $W(t, s)$ в области регистрации различных режимов динамики также будет существенно различна [3, 39–41]. Иными словами, вид зависимости мгновенной энергии вейвлет-спектра $E(s, t)$, рассчитанной для каждого конкретного момента времени t , будет определяться динамикой волновой компоненты сложного сигнала $x(t)$, преобладающей на данном временном промежутке. Если для сигнала можно выделить несколько характерных режимов волновой динамики, то и мгновенная энергия $E(s, t)$ демонстрирует соответствующий набор выраженных зависимостей. Таким образом, можно перейти от анализа структуры вейвлетной поверхности $W(s, t)$

к анализу распределения энергии вейвлетного спектра по характерным временным масштабам.

Для выделения различных компонент сигнала в каждый момент времени t определяется суммарное значение энергии вейвлет-спектра $w(t)$, приходящейся на выбранный диапазон характерных временных масштабов $s \in S = (s_1; s_2)$

$$w(t) = \int_S E(t_0, s) ds. \quad (6)$$

Диапазон характерных временных масштабов S , по которым будет находиться величина $w(t)$, определяется рассматриваемыми волновыми компонентами исследуемого сигнала, и в каждом конкретном случае выбирается на основании мгновенных распределений энергии вейвлетного спектра для различных режимов динамики. В ряде случаев может сложиться ситуация, когда необходимо рассматривать несколько диапазонов временных масштабов S_i , которые однозначно позволили бы оценить и охарактеризовать волновую динамику по численным данным. В этом случае интегрирование (6) должно проводиться по объединению $S = \bigcup_i S_i$ соответствующих диапазонов временных масштабов.

2. Анализ различных частотных компонент динамики модельной нелинейной системы

Для демонстрации сущности и возможностей данного метода в области изучения сложных нестационарных многокомпонентных сигналов обратимся к рассмотрению временной динамики одной из классических систем нелинейной динамики, а именно системы Лоренца [39]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= rx - xz - y, \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{aligned} \quad (7)$$

где x , y и z – независимые динамические переменные, а σ , r и b – управляющие параметры системы. Эта система вначале была введена как первое нетривиальное галеркинское приближение для задачи о конвекции морской воды в плоском слое, подогреваемом снизу, однако, впоследствии было показано, что данная система является хорошей моделью и для многих других физических явлений (например, модель динамики одномодового лазера, описание диссипативного осциллятора с инерционной нелинейностью и т.д.).

Известно, что при значениях управляющих параметров $\sigma = 10$; $b = 8/3$ и при $r < r^* \cong 166.07$ временная реализация $x(t)$ представляет собой устойчивое периодическое движение. При превышении порога r^* регулярные колебания $x(t)$ (ламинарная фаза) прерываются хаотическими всплесками, которые с ростом r становятся все более и более длительными, пока движение полностью не хаотизируется. Перемежаемость в данной системе классифицируется как перемежаемость I типа [42].

На рис. 1 показана временная реализация $x(t)$ системы Лоренца (7) при значении бифуркационного параметра $r = 166.07$ и соответствующая ей проекция

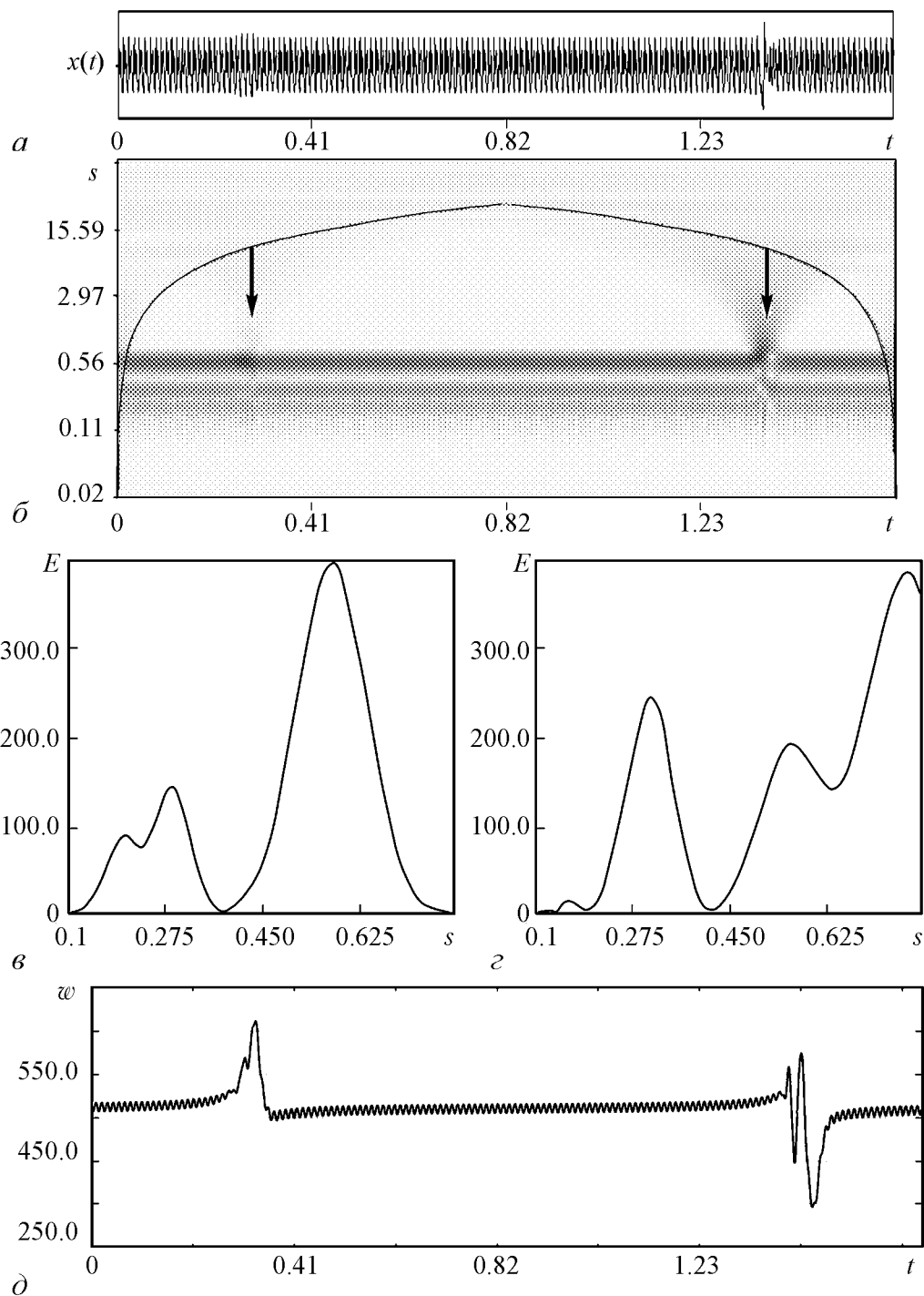


Рис. 1. *a* – Временная реализация $x(t)$ системы Лоренца (7) при $r = 166.07$. *б* – Проекция распределения амплитуды вейвлет-преобразования $|W(t, s)|$, рассчитанного по временной реализации $x(t)$, на пространственно-временную плоскость (t, s) . Интенсивность градаций серого цвета пропорциональна численно полученному вейвлетному спектру $|W(t, s)|$. Сплошная линия ограничивает область влияния красевых эффектов, достоверные данные располагаются ниже этой линии [3,9]. Стрелками показаны структуры, соответствующие турбулентной фазе перемежающегося поведения в исследуемой временной реализации. *в* и *г* – Профили вейвлет-поверхности $|W(t, s)|$, соответствующие ламинарной (*в*) и турбулентной (*г*) фазам временной реализации $x(t)$ системы Лоренца. На профиле вейвлет-поверхности ламинарной фазы отчетливо видны три максимума, соответствующие характерным временным масштабам: $s_1 \approx 0.2$, $s_2 \approx 0.3$ и $s_3 \approx 0.56$. *д* – Энергия вейвлет-спектра $w(t)$, приходящаяся на диапазон характерных временных масштабов $s \in S = (0.1; 0.6)$

вейвлет-поверхности $|W(t, s)|$ на плоскость (t, s) . Наиболее темные участки проекции $|W(t, s)|$ на плоскость (t, s) (рис. 1, б) соответствуют максимумам вейвлет-поверхности, кривая на рисунке ограничивает область влияния краевых эффектов. На проекции вейвлет-поверхности четко выделяются структуры, соответствующие ламинарной и турбулентной фазам перемежающегося поведения во временной реализации. Иными словами, если отвлечься от физического объяснения наблюдаемого поведения системы, на рис. 1 представлен временной ряд, на котором в разные периоды времени преобладает динамика, обусловленная различными волновыми компонентами (регулярной и стохастической). Структура вейвлет-поверхности, соответствующая регулярной фазе движения, имеет профиль $W(t, s)|_{t=\text{const}}$ с двумя глобальными максимумами, соответствующими характерным временным масштабам $s_1 \approx 0.2$, $s_2 \approx 0.3$ и $s_3 \approx 0.56$ (см. рис. 1, в, на котором показано мгновенное распределение энергии вейвлет-спектра по временным масштабам $E(s)$). Этим максимумам вейвлет-поверхности соответствуют три темные области на проекции поверхности $|W(t, s)|$, расположенные параллельно оси времени (см. рис. 1, б). Профиль поверхности $|W(t, s)|$ не изменяется с течением времени t в пределах ламинарной фазы. Однако с наступлением режима турбулентной динамики вид поверхности $|W(t, s)|$ сильно изменяется. Можно сказать, что в режиме хаотической динамики наблюдается «всплеск» разномасштабных колебательных явлений. Это хорошо видно на рис. 1, г. Распределение энергии вейвлет-спектра по временным масштабам $E(s)$ существенным образом отличается от распределения, соответствующего ламинарной фазе (ср. с рис. 1, в).

На рис. 1, б видно, что области вейвлет-поверхности, соответствующие турбулентным фазам, четко локализованы во времени [39]. Также видно, что в пределах ламинарной фазы функция $w(t)$ имеет структуру, близкую к периодической, и совершает колебания вблизи среднего значения $w_0(t) \approx 510$ с амплитудой, не превышающей величины в 10 единиц. В течение турбулентной фазы $w(t)$ испытывает резкие скачки значений (рис. 1, д), что позволяет точно диагностировать различные фазы движения. Моменты времени, в которые величина $|w(t) - w_0(t)|$ не превышает пороговое значение $D = 10$, считаются ламинарными фазами, а интервалы времени, для которых выполняется условие $|w(t) - w_0(t)| > D$ – турбулентными. Таким образом, исследователь имеет возможность численно оценить продолжительность хаотической фазы и соотношение длительностей турбулентной и ламинарной фаз динамики системы при различных значениях критического параметра r [41].

3. Анализ и диагностика различных волновых компонент полевых данных наземной сейсмической разведки

Все возрастающая потребность в энергетических ресурсах и повышение мировых цен на нефть настоятельно диктует необходимость постоянного и интенсивного поиска новых месторождений нефти и газа. В связи с этим актуальной является задача разработки новых технологий обработки и интерпретации данных сейморазведки как геофизического метода, играющего ведущую роль в комплексе геолого-разведочных работ на нефть и газ. Основными результатами полевой геофизической

разведки сейсмическим способом являются сейсмограммы, которые представляют собой цифровые записи упругих колебаний, вызываемых взрывами или другими источниками.

На рис. 2 показана типичная сейсмограмма общего пункта взрыва, полученная при проведении наземных сейсмических исследований методом отраженных волн в Саратовском Поволжье. Рассматриваемая сейсмограмма образована совокупностью 180 сейсмических трасс, каждая из которых является временным рядом, то есть может быть численно описана набором амплитуд упругих колебаний с шагом дискретизации по времени, в данном случае 2 миллисекунды. Каждая сейсмическая трасса имеет длину 3 секунды, что составляет 1500 отсчетов. Таким образом, показанное на рисунке сейсмическое изображение может быть представлено в виде матрицы, состоящей из 180 столбцов и 1500 строк. Нетрудно подсчитать, что при использовании четырехбайтового формата записи каждого отсчета, для записи всей сейсмограммы в памяти компьютера потребуется около 1 мегабайта информации. При проведении современной сейсморазведки, наблюдения выполняются по профилям, длина каждого из которых может составлять десятки и даже сотни километров. Как правило, сейсмограммы регистрируются с интервалом 50 метров по профилю. Следовательно, для записи только одного сейсмического профиля может потребоваться количество

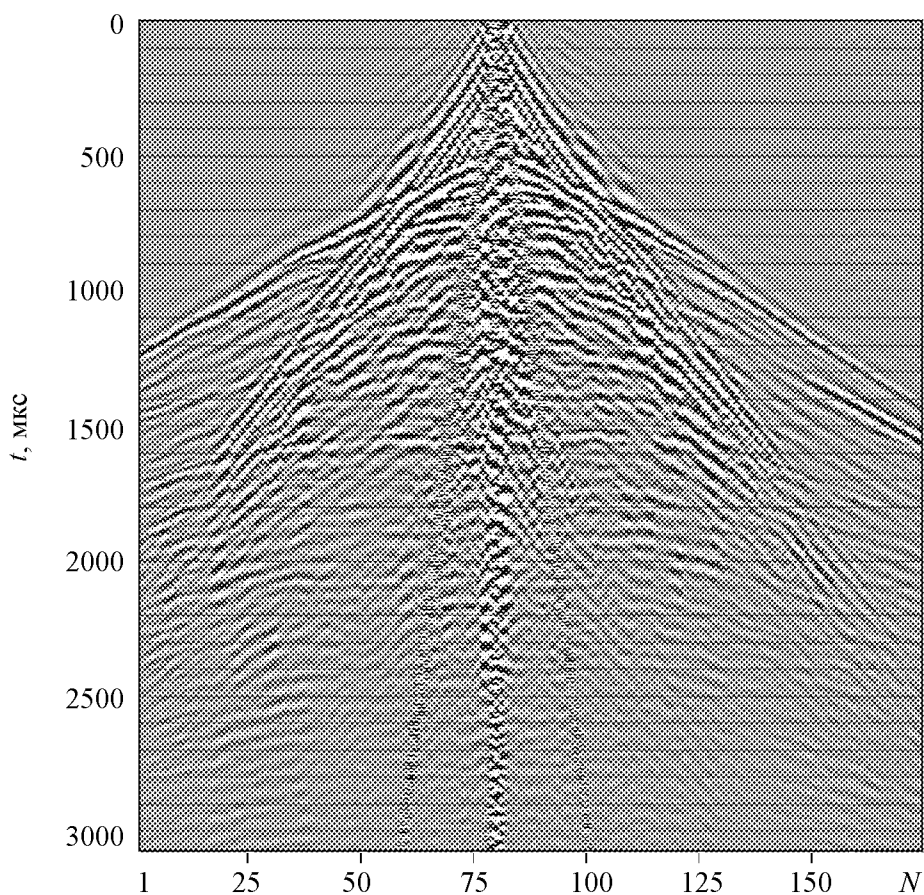


Рис. 2. Сейсмограмма общего пункта возбуждения волнового поля первичного полевого материала. По оси абсцисс отложен номер трассы N , по оси ординат – время регистрации сейсмических колебаний t

памяти, исчисляемое гигабайтами. Для детального геологического изучения небольших месторождений нефти и газа, характерных для Саратовского Поволжья иногда необходимо использовать тысячи погонных километров сейсмопрофилей. Подводя итог этим несложным вычислениям, можно заключить, что только для хранения первичной сейсмической информации требуются десятки и сотни гигабайт памяти. Так как наиболее полная и точная геологическая интерпретация данных сейморазведки возможна только после многих десятков процедур подавления волн-помех, количество вариантов обработки сейсмограмм может увеличиваться в геометрической прогрессии. Отсюда следует, что для выполнения обработки сейсмических данных, используемых для геологического изучения только одного месторождения, требуются первые терабайты памяти. В связи с вышеизложенным, становится понятным, что стоящая в центре данной статьи задача разработки новых высокоэффективных алгоритмов диагностики волн-помех в автоматическом режиме особенно актуальна.

Обратимся к представленному на рис. 2 полевому материалу. Отметим, что ключевым понятием в теории сейморазведки является понятие годографа [1]. Годографом называется зависимость времени прихода волны в точку наблюдения от координат этой точки. Сейсмический годограф представляет собой ось синфазности – то есть линию, соединяющую точки на разных трассах, колеблющиеся в одинаковой фазе. При простом визуальном анализе первичной сейсмограммы, приведенной на рисунке, хорошо видно, что, кроме полезных однократно отраженных волн, характеризующихся гиперболическими годографами, сейсмическая запись содержит в себе множество волн других типов. При работах методом отраженных волн все остальные типы волн относятся к помехам.

По устоявшейся классификации волн-помех различают регулярные и нерегулярные волны-помехи. Регулярные волны характеризуются высокой устойчивостью кинематических и динамических параметров в пределах области наблюдения. К регулярным волнам относятся электрические наводки, звуковая волна и сейсмические волны, которые в свою очередь подразделяются на низкоскоростные, среднескоростные и высокоскоростные помехи. К низкоскоростным помехам принято относить прямую волну и поверхностные волны Рэлея. Среднескоростные помехи обусловлены перераспределением энергии падающей волны на границах раздела упругих свойств среды (обменные волны) и явлением полного внутреннего отражения (головные волны). Наконец, к высокоскоростным помехам относят волны, претерпевшие многократные отражения от сейсмогеологических границ. На первых вступлениях рассматриваемой сейсмограммы отчетливо выделяются прямолинейные годографы прямой и головной волн-помех, а также гиперболический годограф волны, отраженной от первой акустически жесткой границы. Выделить гиперболические годографы волн, отраженных от более глубоких геологических границ, не представляется возможным. Это связано с тем, что на больших удалениях от источника (от центральной части сейсмограммы), отраженные волны интерферируют с многократно отраженными помехами. На малых удалениях (в центре сейсмограммы) однократно отраженные волны попадают в зону регистрации звуковой и поверхностных волн. Звуковая волна представляет собой запись акустических колебаний, распространяющихся от источника сейсмических волн по воздуху. Скорость распространения этой волны-помехи имеет вполне определенную величину, равную скорости звука в воздухе. Звуковая волна характеризуется линейным годографом,

по наклону которого может быть определена скорость. Кроме регулярной составляющей на сейсмограммах всегда присутствуют нерегулярные колебания (шум), вызванные различными причинами: ветер, дождь, движение транспорта, пешеходов, скота и т. д. Отметим, что на данном полевом материале, являющемся типичным для наземной сейсморазведки, весьма выражен конус регистрации помех звукового и поверхностного типов на центральных каналах данной сейсмограммы общего пункта взрыва (см. рис. 2).

Временной ряд одной из трасс (см. рис. 2, трасса 88 сейсмограммы) показан на рис. 3, *а*. Соответствующая вейвлетная поверхность представлена на рис. 3, *б*, из которого видно, что при преобладании различных волновых компонент зарегистрированного сейсмического сигнала энергия вейвлетного спектра перераспределяется

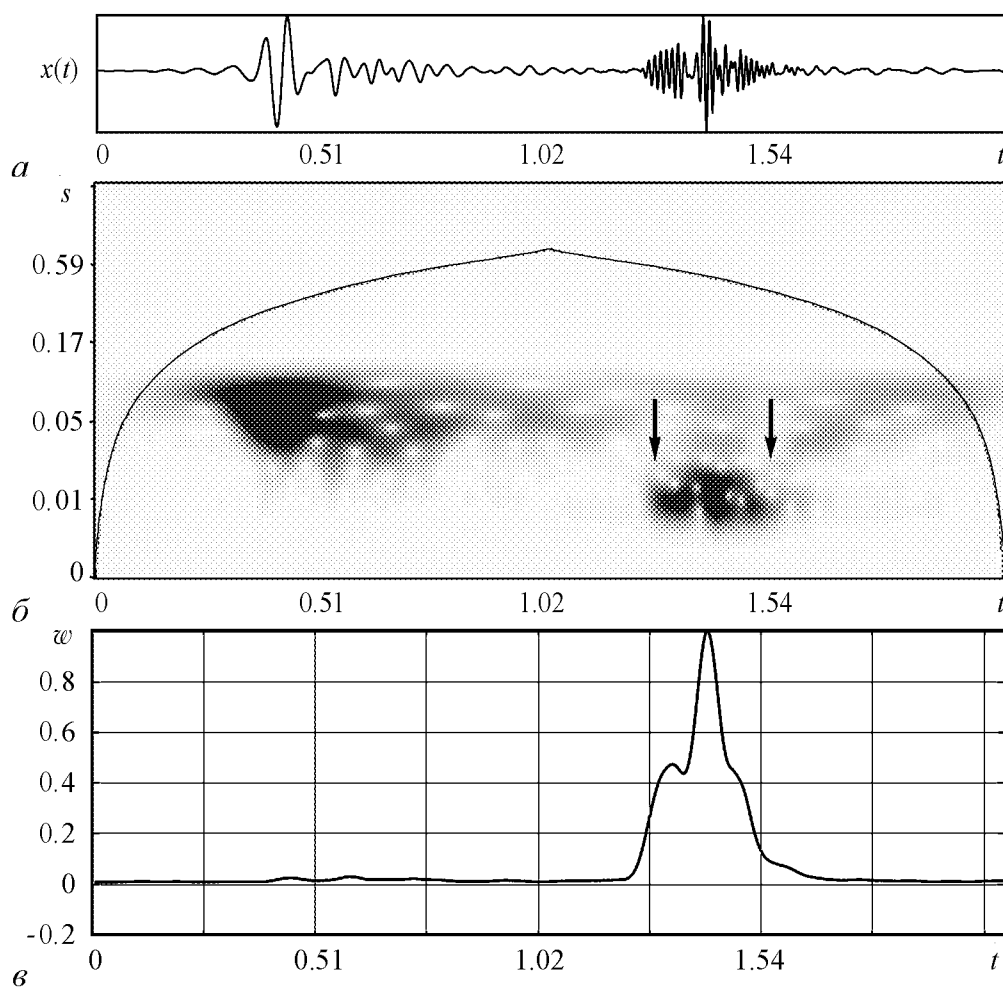


Рис. 3. *а* – Временной ряд, соответствующий одной из трасс сейсмограммы (трасса 88). *б* – Проекция распределения амплитуды вейвлет-преобразования $|W(t, s)|$, рассчитанного по временной реализации $x(t)$, на пространственно-временную плоскость (t, s) . Интенсивность градаций серого цвета пропорциональна численно полученному вейвлетному спектру $|W(t, s)|$. Сплошная линия ограничивает область влияния краевых эффектов, достоверные данные располагаются ниже этой линии [3, 9]. Стрелками показана зона регистрации помех, вызванных волнами звукового типа. *в* – Энергия вейвлетного спектра $w(t)$, приходящаяся на диапазон характерных временных масштабов $s \in S = (0.089; 0.02)$

различными способами. Стрелками отмечена область, отвечающая регистрации звуковой помехи. Элементарные вычисления показывают, что звуковая помеха демонстрирует увеличение амплитуды вейвлетных коэффициентов в диапазоне высоких частот 50...500 Гц и, соответственно, низких значений масштабов вейвлетного преобразования, в то время как полезный сигнал характеризуется высокими значениями коэффициентов вейвлетного преобразования в низкочастотном диапазоне частот (10...100 Гц). На основании этого явления построен алгоритм автоматического распознавания помехи звукового типа.

Поскольку волны-помехи звукового и поверхностного типов характеризуются увеличением энергии, приходящейся на определенный диапазон временных масштабов (частот), не совпадающий с диапазоном частот полезного сейсмического сигнала, удобно рассматривать интегральную величину мгновенной энергии на характерном для волны-помехи диапазоне масштабов F согласно формуле (6), где диапазон $F \in (0.0089; 0.02)$. На рис. 3, в приведена рассчитанная по рассматриваемому временному ряду и нормированная на единицу зависимость $w(t)$ по диапазону масштабов F . Очевидно, если в момент времени t имеет место волна-помеха, то справедливо следующее соотношение:

$$w(t) \geq w_0, \quad (8)$$

где w_0 – пороговое значение энергии, определяемое экспериментально единожды для всего полевого материала, отработанного на площади со схожими сейсмогеологическими условиями. Для данного полевого материала пороговое значение было выбрано $w_0 = 0.3$. Следует отметить, что с единым порогом производился расчет не одной сейсмограммы, а всего сейсмического профиля, отработанного по одной методике, но в достаточно изменчивых поверхностных и приповерхностных сейсмогеологических условиях. Данный факт говорит о высокой устойчивости предлагаемого метода к неизбежно присутствующим стохастическим шумам и флуктуациям геологической среды.

Итак, предложенный универсальный алгоритм на основании непрерывного вейвлетного преобразования легко позволяет осуществлять диагностику зоны регистрации волн-помех звукового типа. В одноканальном режиме для каждой трассы рассчитывается зависимость $w(t)$ на диапазоне масштабов F . Очевидно, что при реальной обработке по профилю принципиальная одноканальность метода позволит провести этот и последующие этапы вычисления параллельно для различных трасс массива полевого материала. По рассчитанным зависимостям $w(t)$ определяются диапазоны времени, на которых выполняется условие (8) и, кроме того, присутствует глобальный максимум зависимости $w(t)$ для предотвращения возможной ложной диагностики. Таким образом, после выполнения данных действий для каждой трассы в автоматическом режиме определяются волны-помехи на записях сейсмограмм.

Результат обработки данных всех трасс рассматриваемой сейсмограммы показан на рис. 4. На ней после проведенного вейвлетного анализа выделена область пространственной и временной регистрации искомых помех, обусловленных волнами звукового и поверхностного типов (отмечена линиями на рисунке). Отметим, что при проведении стандартной обработки выделение данного типа волн производится либо вручную, либо требует применения сложных многоканальных процедур. С ис-

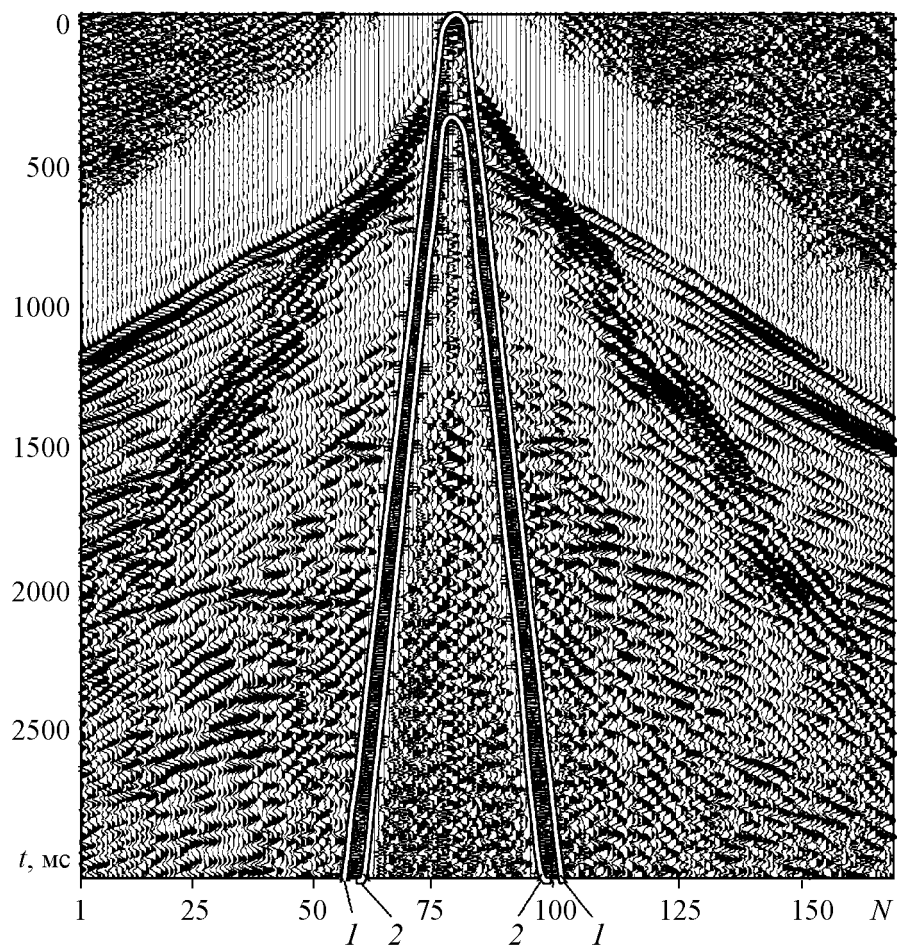


Рис. 4. Результат обработки данных всех трасс на полевой сейсмограмме ОПВ (см. рис. 2). Линиями отмечена область пространственной и временной регистрации искомым помех, обусловленных волнами звукового и поверхностного типов, выделенная автоматически с помощью предложенного метода. Для большей наглядности полевой материал представлен после процедуры одноканальной автоматической регулировки амплитуд

пользованием рассмотренного метода появляется возможность быстрой автоматической диагностики области регистрации волн-помех и последующей их фильтрации. Разработка методов последующей одноканальной фильтрации будет являться продолжением данной научной работы.

Заключение

Таким образом, в настоящей работе предлагается метод диагностики различных режимов волновой динамики по сложным нестационарным сигналам различной природы. Данный метод основан на непрерывном вейвлет-преобразовании, апробирован на модельных системах нелинейной динамики и с успехом может быть применен для исследования экспериментальных данных геофизической природы. Предложенный метод является устойчивым к влиянию шумов и флуктуаций, искажающих исходную временную реализацию. Высокая эффективность предложенного метода

в области геофизики обусловлена принципиальной одноканальностью, малыми численными затратами на обработку информации и, в перспективе, большими возможностями по расширению сферы дальнейшего применения.

Работа выполнена при поддержке федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы».

Библиографический список

1. Гурвич И.И., Боганик Г.Н. Сейсмическая разведка. М.: Недра, 1980.
2. Бондарев В.И., Крылатков С.М. Основы обработки и интерпретации данных сейсморазведки. Екатеринбург: Издательство УГГА, 2001.
3. Короновский А.А., Храмов А.Е. Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения М.: Физматлит, 2003.
4. Блаттер Ч. Вейвлет-анализ. Основы теории. М.: Постмаркет, 2001.
5. Анфиногентов В.Г., Короновский А.А., Храмов А.Е. Вейвлетный анализ и его использование для анализа динамики нелинейных динамических систем различной природы // Изв. РАН, сер. физич. 2000. Т. 64, № 12. С. 2383.
6. Torrence C., Compo G.P. A practical guide to wavelet analysis // Bulletin of the American Meteorological Society. 1998. Vol. 79. P. 61.
7. Peng C.-K., Havlin S., Stanley H.E., Goldberger A. Quantification of scaling exponents and crossover phenomena in nonstationary heartbeat time series // Chaos. 1995. Vol. 5. P. 82.
8. Muzy J.F., Bacry E., Arneodo A. The multifractal formalism revisited with wavelets // International Journal Bifurcation Chaos. 2010. Vol. 4, № 2. P. 245.
9. Daubechies I. Ten lectures on wavelets. Philadelphia: SIAM, 1992.
10. Meyer Y. Wavelets: Algorithms and Applications. Philadelphia: SIAM, 1993.
11. Mallat S.G. A wavelet tour of signal processing. New York: Academic Press, 1998.
12. Addison P.S. The Illustrated Wavelet Transform Handbook: Introductory Theory and Applications in Science Engineering, Medicine and Finance. Bristol: Institute of Physics Publishing, 2002.
13. Flandrin P. Some aspects of non-stationary signal processing with emphasis on time-frequency and time-scale methods // In Wavelets / Ed. by J.M. Combes, A. Grossmann, Ph. Tchamitchian. Springer, Berlin. 1989. P. 68.
14. Grossman A., Morlet J. Decomposition of Hardy function into square integrable wavelets of constant shape // SIAM J. Math. Anal. 1984. Vol. 15, № 4. P. 273.
15. Holschneider M. Wavelets: An analysis tool. Oxford: Oxford University Press, 1995.
16. Филатова А.Е., Артемьев А. Е., Короновский А.А., Павлов А.Н., Храмов А.Е. Успехи и перспективы применения вейвлетных преобразований для анализа нестационарных нелинейных данных в современной геофизике // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 3. С. 3.
17. Филатова А.Е., Овчинников А.А., Короновский А.А., Храмов А.Е. Применение вейвлетного преобразования для диагностики волн-помех звукового и поверхностного типов по цифровым данным наземной сейсморазведки // Вестник ТГУ. 2010. Т. 15, № 2. С. 524.

18. Пискун П.В. Программно-алгоритмическое обеспечение непрерывного вейвлет-преобразования при обработке и интерпретации геофизических полей. М.: МГУ, 2006.
19. Пискун П.В., Петров А.В., Зиновкин С.В. Компьютерная технология Коскад СЕЙС комплексного анализа сейсмической и скважинной информации. Тезисы докладов VII международной научно-практической конференции Геомодель-2005, 2005. С. 42.
20. Sitnikova E.Yu., Hramov A.E., Koronovskii A.A., Luijtelaar E.L. Sleep spindles and spike-wave discharges in EEG: Their generic features, similarities and distinctions disclosed with Fourier transform and continuous wavelet analysis // Journal of Neuroscience Methods. 2009. Vol. 180. P. 304.
21. Kumar P., Foufoula-Georgiou E. Wavelet analyses for geophysical applications // Reviews of Geophysics. 1997. Vol. 35. P. 385.
22. Corso G., Kuhn P.S., Lucena L.S., Thom Z.D. Seismic ground roll time-frequency filtering using the Gaussian wavelet transform // Physica A. 2003. Vol. 318. P. 551.
23. Yuen D.A., Vincent A.P., Kido M., Vecsey L. Geophysical Applications of Multidimensional Filtering with Wavelets // Pure and Applied Geophysics. 2001. Vol. 159. P. 2285.
24. Kritski A., Vincent P., Yuen D.A., Carlsen T. Adaptive wavelets for analyzing dispersive seismic waves // Geophysics. 2007. Vol. 72. P. V1-V11.
25. Овчинников А.А., Храмов А.Е., Люттьеханн А., ван Луйтелаар Ж. Метод диагностики характерных паттернов на наблюдаемых временных рядах и его экспериментальная реализация в режиме реального времени применительно к нейрофизиологическим сигналам // ЖТФ. 2011. Т. 81, № 1. С. 3.
26. Liner C., Li C., Gersztenkorn A., Smythe J. SPICE: A new general seismic attribute. (SEG Expanding Abstracts.) 2004. P. 52.
27. Naveau P. and Oh H. Polynomial Wavelet Regression for Images With Irregular Boundaries // IEEE Transactions On Image Processing. 2004. Vol. 13, № 6. P. 35.
28. Domingues M.O., Mendes O.Jr., Mendes da Costa F. On wavelet techniques in atmospheric sciences // Advances in Space Research. 2005. Vol. 35. P. 831.
29. Аку П., Ричардс П. Количественная сейсмология. Т. 1. М.: Мир, 1983.
30. Rutherford S.R., Williams R.H. Amplitude -versus-offset variations in gas sands // Geophysics. 1989. Vol. 54. P. 680.
31. Castagna J.P., Backus M.M. Offset-dependent reflectivity – Theory and practice of AVO analysis // Soc. Expl. Geophys. 1993. P. 3.
32. Ross C.P. Effective AVO crossplot modeling: A tutorial // Geophysics. 2000. Vol. 65, № 3. P. 700.
33. Dong W. AVO detectability against tuning and stretching artifacts // Geophysics. 1999. Vol. 64, № 2. P. 494.
34. Foster D.J., Keys R.G., Reilly J.M. Another perspective on AVO crossplotting // The Leading Edge. 1997. Vol. 16, № 9. P. 1233.
35. Gray D., Goodway B., Chen T. Bridging the Gap: Using AVO to detect changes in fundamental elastic constants. SEG, Expanded Abstracts, 1999.
36. Иноземцев А.Н., Коростышевский М.Б., Воскресенский Ю.Н., Баранский Н.Л., Бадейкин А.Н. Влияние спектральных характеристик сейсмических сигналов

на образ и класс AVO-аномалий в тонкослоистых средах // Геофизика. Спец. выпуск. Технологии сейсморазведки-II. 2003. С. 167.

37. *Валиев С.Г., Ли И.А.* Результаты AVO-анализа сейсмических записей на нефтегазовых месторождениях шельфа Сахалина // Геофизика. 2003. № 2. С. 21.
38. Техническая инструкция по проведению сейсморазведочных работ на нефть и газ. М., 2003.
39. *Короновский А.А. and Храмов А.Е.* Об эффективном анализе перехода к хаосу через перемежаемость с помощью вейвлетного преобразования // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27, № 1. С. 3.
40. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Midzyanovskaya I.S., Sitnikova E., Rijn C.M.* On-Off intermittency in time series of spontaneous paroxysmal activity in rats with genetic absence epilepsy // Chaos. 2006. Vol. 16. P. 043111.
41. *Короновский А.А., Минюхин И.М., Тищенко А.А., Храмов А.Е., Мидзяновская И.С., Ситникова Е.Ю., Van Luijtelaaar E.L., Rijn C.M.* Применение непрерывного вейвлет-преобразования для анализа перемежающегося поведения // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 4. С. 34.
42. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию 2.12.2010
После доработки 3.02.2011*

THE METHOD OF AUTOMATIC DIAGNOSTICS OF VARIOUS COMPONENTS OF COMPLEX SIGNALS ON THE BASE OF WAVELET TRANSFORM AS APPLIED TO GEOPHYSICS PROBLEMS

A.E. Filatova, A.E. Artemiev, A.A. Ovchinnikov, A.A. Koronovskii, A.E. Hramov

The article discusses the method of analysis and automatic diagnostics of the characteristics of various components of complex signals on digital data on the basis of continuous wavelet transformation. The results of processing of experimental data are exposed. The article shows that the offered method of single-channel continuous wavelet transformation with the subsequent analysis of instantaneous transformation energy in a certain frequency band allows tracing a zone of the registered high-intensity waves of sound and superficial type in an automatic mode.

Keywords: Automatic diagnostics, wavelet analysis, digital signal, seismic exploration works, sound and superficial waves.



Филатова Анастасия Евгеньевна – родилась в Саратове (1983). Окончила факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2005). Кандидат физико-математических наук (2008). Старший научный сотрудник лаборатории физики нелинейных явлений Отделения физики нелинейных систем Саратовского государственного университета. Область научных интересов – нелинейная динамика систем различной природы, методы анализа динамических систем, вейвлетный анализ. Автор ряда статей в рецензируемых отечественных и зарубежных журналах.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: anefila@gmail.com



Артемяев Александр Евгеньевич – родился в Саратове (1975). Окончил геологический факультет Саратовского государственного университета (1997). Кандидат геолого-минералогических наук (2001). Доцент кафедры геофизики геологического факультета Саратовского государственного университета. Основные научные интересы связаны с развитием методики обработки и интерпретации данных сейсморазведки, моделированием процессов распространения упругих волн и вейвлетным анализом. Автор ряда статей в рецензируемых научных журналах.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: aartemiev@gmail.com



Овчинников Алексей Александрович – родился в Саратове (1985), окончил Саратовский государственный университет (2008). Ассистент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – влияние шумов на явления синхронизации.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: ovchinnikov@nonlin.sgu.ru



Храмов Александр Евгеньевич – окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1996). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1999) и доктора (2006) физ.-мат. наук. Профессор, заместитель заведующего кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов – радиофизика в той ее части, которая связана со взаимодействием свободных электронов с электромагнитными полями, нелинейная динамика распределенных активных сред, методы анализа и моделирования динамических систем. Опубликовал (в соавторстве) книгу «Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков» (Т. 1, М.: Физматлит, 2003; Т. 2, М.: Физматлит, 2004), монографию «Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения» (Москва: Наука, Физматлит, 2003), двухтомную коллективную монографию «Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот» (М.: Физматлит, 2009), коллективную монографию «Моделирование нелинейной динамики глобальных процессов» (М.: Изд.-во МГУ, 2010) и др.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: aeh@nonlin.sgu.ru



Короновский Алексей Александрович – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995), доктор физико-математических наук (2007), профессор кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой деятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. Автор ряда статей в центральной печати, а также лекций по СВЧ-электронике в 2-х томах (в соавторстве) и 4-х монографий (в соавторстве) «Нелинейная динамика в действии» и «Непрерывный вейвлетный анализ», вышедших в Издательстве ГосУНЦ «Колледж», двухтомной монографии «Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот» (М.: Физматлит, 2009, под редакцией А.А. Короновского, А.А. Кураева, Д.И. Трубецкого и А.Е. Храмова), монографии «Моделирование нелинейной динамики глобальных процессов» (М.: Изд.-во МГУ, 2010, под редакцией С.И. Ильина и Д.И. Трубецкого) и др.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: alkor@nonlin.sgu.ru



ВЛИЯНИЕ ВНЕШНЕГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ДИНАМИКУ ДОМЕНОВ ЗАРЯДА В ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ СВЕРХРЕШЕТКЕ*

*О.И. Москаленко, А.А. Короновский, А.Е. Храмов,
К.Н. Алексеев, А.Г. Баланов*

В работе исследуется влияние периодического внешнего сигнала на коллективную динамику заряда в полупроводниковой сверхрешетке. Показано, что внешнее периодически осциллирующее электрическое поле способно синхронизировать движение доменов высокой концентрации зарядов и таким образом – колебания электрического тока, протекающего через структуру. При этом в плоскости параметров «частота электрического поля – амплитуда электрического поля» возникают «языки синхронизации», чья ширина практически не зависит от отношения частот приложенного поля и собственной частоты следования доменов. Обнаружено, что синхронизация сопровождается резким увеличением поглощения на частоте внешнего поля.

Ключевые слова: Полупроводниковая сверхрешетка, домены заряда, синхронизация.

Полупроводниковые сверхрешетки представляют собой наноструктуры, состоящие из перемежающихся слоев нескольких (двух и более) полупроводниковых материалов [1]. Из-за разницы в ширине запрещенной зоны в разных полупроводниках, граница зоны проводимости идеальной сверхрешетки периодически модулируется, что создает условия для формирования энергетических «мини-зон» [2, 3]. В присутствии внешних электрических и магнитных полей транспорт электронов в мини-зонах может иметь сложный характер и сопровождаться рядом интересных нетривиальных эффектов, включающих возникновение сверхвысокочастотных блоховских колебаний, динамическую локализацию электронов, отрицательную дифференциальную дрейфовую скорость электронов, циклотрон-блоховские резонансы и динамический хаос.

Одним из способов управления колебаниями заряда в полупроводниковой сверхрешетке является периодическое внешнее воздействие на систему [4–7]. При этом, в зависимости от параметров внешнего воздействия характер динамики заряда может существенно меняться, а при определенных условиях внешнее воздействие

*Статья написана по материалам доклада на IX Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, Россия, 4–9 октября, 2010.

может синхронизовать осцилляции заряда. В этом случае внешнее воздействие сдвигает основную частоту колебаний заряда так, что последняя становится соизмеримой с частотой самого воздействия.

Следует отметить, что явление синхронизации [8–11] имеет важное фундаментальное и практическое значение в самых различных областях науки и техники [12–22], в том числе и при управлении системами сверхвысокочастотной электроники (см., например, [23]).

В рамках настоящей работы изучаются эффекты внешнего периодического воздействия на динамику заряда в полупроводниковой сверхрешетке, в которой реализуется мини-зонный транспорт электронов [1]. В частности, исследуется, как эффекты самоорганизации (подобные синхронизации) влияют на поглощение электромагнитных волн полупроводниковой сверхрешеткой.

Для описания коллективной динамики заряда в полупроводниковой сверхрешетке используется система уравнений Пуассона и непрерывности, которые интегрируются с помощью численных методов. По аналогии с [24] разобьем сверхрешетку на достаточно большое число N узких слоев шириной Δx . В пределах каждого m -го слоя концентрация электронов n_m полагается постоянной.

Предполагаем, что (i) транспорт электронов рассматривается в нижней мини-зоне сверхрешетки в приближении сильной связи; (ii) межзонным туннелированием Ландау–Зинера можно пренебречь; (iii) при определении плотности тока электронов в мезоскопической модели можно пренебречь диффузией; (iv) равновесная концентрация носителей (в отсутствие поля) одинакова для всех слоев решетки. Следует отметить, что подобные приближения широко распространены при моделировании транспорта заряда в полупроводниковых сверхрешетках и во многих случаях хорошо описывают экспериментальные результаты [1, 25].

Эволюция плотности заряда в слое m описывается уравнением непрерывности

$$e\Delta x \frac{dn_m}{dt} = J_{m-1} - J_m, \quad m = 1 \dots N, \quad (1)$$

где $e > 0$ – заряд электрона, J_{m-1} и J_m – плотности тока, протекающего через левую и правую границу m -го слоя, соответственно. В рамках дрейфового приближения, пренебрегая диффузией, запишем плотность тока J_m

$$J_m = en_m v_d(\overline{F_m}), \quad (2)$$

где v_d – дрейфовая скорость электрона для среднего значения напряженности электрического поля $\overline{F_m}$ в слое m [25].

Дрейфовая скорость вычисляется с помощью соотношения

$$v_d = \iiint_V w(\mathbf{p}_0) u_d(\mathbf{p}_0) dp_{0x} dp_{0y} dp_{0z}, \quad (3)$$

где w – вероятность того, что частица имеет некоторый начальный импульс \mathbf{p}_0 из элементарного объема пространства импульсов $dV = dp_{0x} dp_{0y} dp_{0z}$; $u_d(\mathbf{p}_0)$ – дрейфовая скорость одного отдельно взятого электрона, соответствующая начальному импульсу $\mathbf{p}_0 = (p_{x0}, p_{y0}, p_{z0})$,

$$u_d = \frac{1}{\tau} \int_0^{\infty} v_x(t) e^{-t/\tau} dt. \quad (4)$$

Здесь τ – время рассеяния электронов, $v_x(t)$ – x -компонента скорости рассматриваемого электрона, определяемая из уравнений движения электрона в сверхрешетке [3, 26]. В рассматриваемом случае при нулевых начальных условиях ($p_{0x} = 0$, $p_{0y} = 0$, $p_{0z} = 0$)

$$u_d = \frac{d\Delta_0}{2\hbar} \frac{\tau\omega_B}{(1 + \tau^2\omega_B^2)}, \quad (5)$$

где \hbar – постоянная Планка, $\Delta_0 = 19.1$ мэВ – ширина мини-зоны, $d = 8.3$ нм – период сверхрешетки, $\omega_B = eFd/\hbar$ – круговая частота блоховских колебаний электрона (более подробно см. [27]).

В теоретическом полуклассическом рассмотрении часто предполагается бoльцмановская статистика температурного распределения электронов в энергетических зонах сверхрешетки [28–30]:

$$dw = C \exp\left(-\frac{E(\mathbf{p}_0)}{kT}\right) dp_{0x} dp_{0y} dp_{0z}, \quad (6)$$

где T – температура в градусах Кельвина; k – постоянная Больцмана, E – кинетическая энергия электронов. Константа C в соотношении (6) определяется из условия нормировки

$$\iiint_V C \exp\left(-\frac{E(\mathbf{p}_0)}{kT}\right) dp_{0x} dp_{0y} dp_{0z} = 1. \quad (7)$$

Для полупроводниковой сверхрешетки, находящейся в продольном электрическом поле \mathbf{F} (электрическое поле приложено вдоль решетки, чтобы обеспечить направленный дрейф электронов), дисперсионное соотношение между кинетической энергией электрона и импульсом имеет вид [3, 31]:

$$E(\mathbf{p}_0) = \frac{\Delta_0}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{p_{0x}d}{\hbar}\right)\right] + \frac{p_{0y}^2 + p_{0z}^2}{2m^*}, \quad (8)$$

где $m^* = 0.067m_e$ – эффективная масса электрона в полупроводниковом материале (здесь GaAs), m_e – масса свободного электрона. В этом случае соотношение (3) с учетом формул (6)–(8) примет вид

$$v_d(T) = C \iiint_V u_d(\mathbf{p}_0) \exp\left(-\frac{E(\mathbf{p}_0)}{2kT}\right) dp_{0x} dp_{0y} dp_{0z}, \quad (9)$$

а нормировочный множитель, найденный из условия (7),

$$C = \frac{d \exp\left(\frac{\Delta_0}{2kT}\right)}{4\pi^2 \hbar m^* kT I_0\left(\frac{\Delta_0}{2kT}\right)}, \quad (10)$$

где $I_n(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя. В рассматриваемом случае интеграл (9) может быть вычислен аналитически, а дрейфовая скорость будет иметь вид

$$v_d = \frac{d\Delta_0}{2\hbar} \frac{\tau\omega_B}{(1 + \tau^2\omega_B^2)} \frac{I_1\left(\frac{\Delta_0}{2kT}\right)}{I_0\left(\frac{\Delta_0}{2kT}\right)}. \quad (11)$$

Для каждого слоя m справедливо дискретное представление уравнение Пуассона

$$F_{m+1} = \frac{e\Delta x}{\varepsilon_0\varepsilon_r} (n_m - n_D) + F_m, \quad m = 1 \dots N, \quad (12)$$

в котором $n_D = 3 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$ описывает равновесную концентрацию электронов, определяемую уровнем легирования, а ε_0 и $\varepsilon_r = 12.5$ обозначают электрическую постоянную и относительную диэлектрическую проницаемость материала, соответственно.

Если предположить омические контакты на эмиттере и коллекторе сверхрешетки, то плотность тока через эмиттер J_0 будет определяться проводимостью контакта σ : $J_0 = \sigma F_0$, а напряженность электрического поля F_0 может быть найдена из уравнения Кирхгофа

$$V = U + \frac{\Delta x}{2} \sum_{m=1}^N (F_m + F_{m+1}), \quad (13)$$

где V – напряжение, приложенное к сверхрешетке, U описывает падение напряжения на контактах. В случае наличия внешнего воздействия на сверхрешетку напряжение V определяется соотношением

$$V = V_0 + V_m \cos(\omega_e t + \varphi_0), \quad (14)$$

где V_0 – постоянная разность потенциалов, приложенная к полупроводниковой наноструктуре, V_m – амплитуда внешнего воздействия, ω_e – круговая частота внешнего воздействия, φ_0 – начальная фаза. Таким образом, внешнее воздействие на полупроводниковую сверхрешетку реализуется путем модуляции приложенного к ней напряжения, создающего продольное электрическое поле. При этом разность потенциалов V_0 выступает в качестве управляющего параметра, определяющего динамический режим в автономной системе. С учетом формирования слоев повышенной концентрации заряда вблизи эмиттера и пониженной концентрации зарядов вблизи коллектора сверхрешетки падение напряжения U определяется соотношением [25]

$$U = F_0(\Delta x_l - \Delta x_s) + F_0(\Delta x_l - \Delta x_q) + F_1\Delta x_s + F_{N+1}\Delta x_q + \quad (15)$$

$$+ F_{N+1}\Delta x_q - \frac{en_0(\Delta x_q)^2}{2\varepsilon_0\varepsilon_r} + \sigma F_0 S R_c.$$

Здесь Δx_l определяет длину контактов, Δx_s и Δx_q задают протяженность области повышенной и пониженной концентрации электронов вблизи контактов, n_0 – концентрация электронов в контактном слое, S – площадь контакта, а R_c – контактное сопротивление, учитывающее сопротивление измерительной линии. Зная плотность тока в каждом слое, можно вычислить силу тока, протекающего через сверхрешетку

$$I(t) = \frac{S}{N+1} \sum_{m=0}^N J_m, \quad (16)$$

соответствующую той, которую можно измерить в реальном эксперименте.

На основе построенной модели исследуем, как амплитуда и частота внешнего воздействия влияют на колебания заряда в полупроводниковой сверхрешетке, уделяя

особое внимание синхронизации колебаний заряда внешним воздействием. При этом под синхронизацией понимаем такой режим, при котором колебания в рассматриваемой системе осуществляются на частоте внешнего воздействия или на частотах, связанных рационально с частотой внешнего воздействия [11].

На рис. 1 приведены области синхронных колебаний на плоскости «частота $f_e = \omega_e/2\pi$ – амплитуда V_m внешнего воздействия» для полупроводниковой сверхрешетки, находящейся при нулевой температуре. Постоянное напряжение, приложенное к полупроводниковой наноструктуре, V_0 было выбрано равным 510 мВ, что соответствует ре-

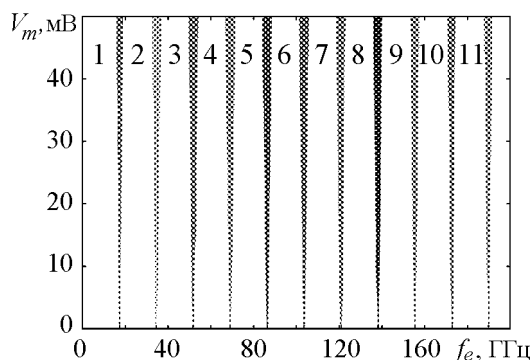


Рис. 1. Карта режимов на плоскости «частота внешнего воздействия – амплитуда внешнего воздействия» для полупроводниковой сверхрешетки, находящейся при нулевой температуре. Градациями серого показаны области синхронизации, соответствующие значениям $\rho = 1, 2 \dots 11$, приведенным рядом с соответствующими областями синхронизации

жиму формирования доменов в автономном режиме. Для того чтобы охарактеризовать наблюдающийся колебательный режим, используется величина $\rho = \omega_e/\omega$ (где ω – циклическая частота колебаний тока в сверхрешетке, ω_e – циклическая частота внешнего воздействия), называемая числом вращения. Число вращения ρ характеризует наблюдающийся режим колебаний: целые значения соответствуют основным синхронным режимам (так, $\rho = 1$ соответствует режиму синхронизации «один к одному», когда в системе устанавливаются колебания на частоте внешнего воздействия), иррациональные значения свидетельствуют об асинхронном режиме в исследуемой системе.

Как следует из рис. 1, на котором области синхронных режимов $\rho = 1, 2, \dots$ выделены градиациями серого, дрейф доменов заряда в полупроводниковой сверхрешетке может быть синхронизован внешним гармоническим сигналом в широком диапазоне частот f_e . При этом ширина области синхронизации практически не зависит от значений числа вращения ρ , что является нетипичным для синхронизации периодических колебаний.

Рис. 2 иллюстрирует пространственно-временную динамику концентрации заряда $n(x, t)$ и соответствующие колебания тока $I(t)$ в отсутствие внешнего воздействия, а также для случаев синхронного и асинхронного режимов, реализующихся в системе в результате внешнего воздействия. В отсутствие внешнего воздействия приложенное напряжение $V_0 = 510$ мВ приводит к возникновению и дрейфу областей (доменов) высокой концентрации заряда (рис. 2, а). Прибытие домена на коллектор приводит к резкому увеличению тока через решетку, что инжектирует в систему новый домен, который, в свою очередь, также начинает дрейфовать к коллектору и, таким образом, процесс повторяется. В результате, в сверхрешетке возникают периодические релаксационные автоколебания тока, подобные приведенным на рис. 2, б.

В зависимости от частоты f_e и амплитуды V_m внешнее периодическое воздействие может по-разному влиять на автономную динамику заряда в полупроводниковой сверхрешетке. В случае синхронизации колебания заряда и тока по-прежнему

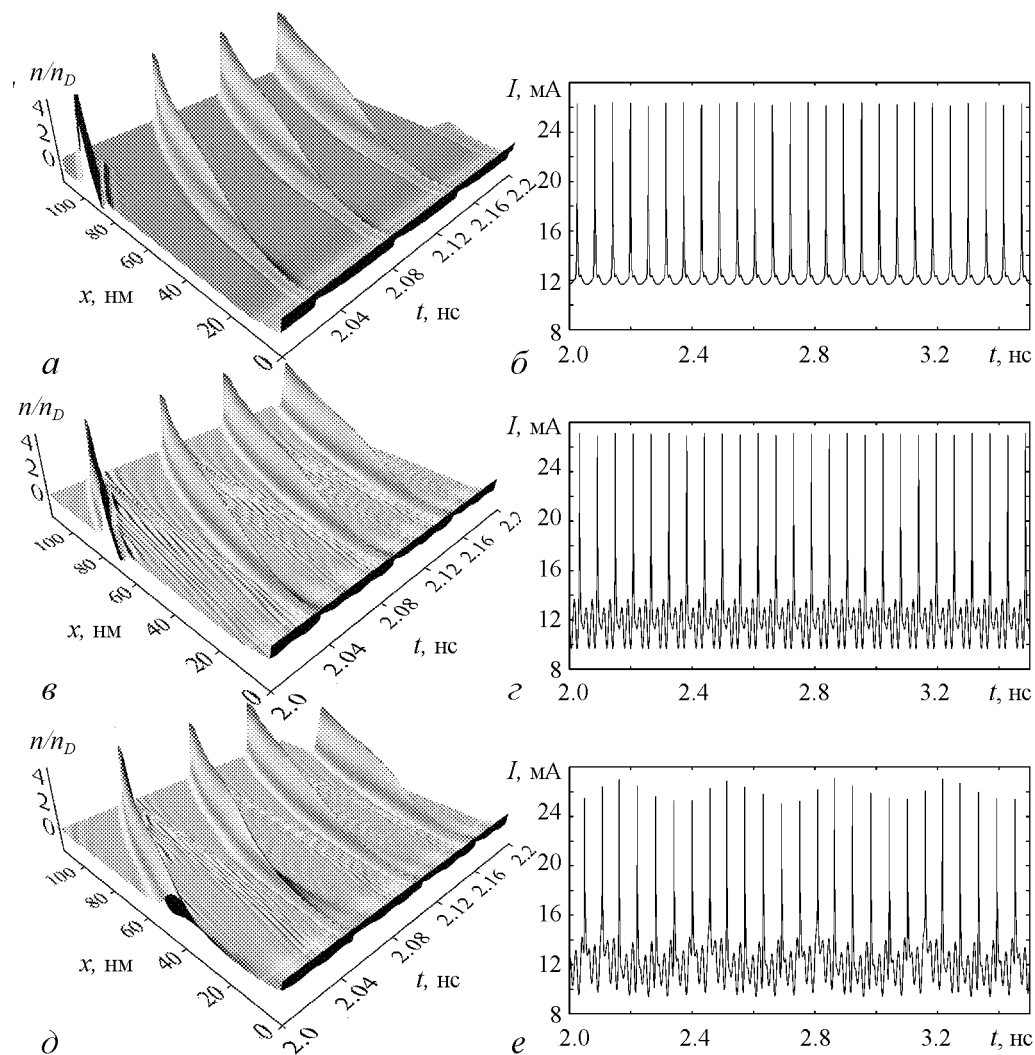


Рис. 2. Пространственно-временная динамика концентрации заряда $n(x, t)/n_D$ (а, в, д) и соответствующие колебания тока $I(t)$ (б, з, е) в отсутствие внешнего воздействия (а, б), а также для случая синхронизации при $\rho = 3$ (в, з) и в отсутствие синхронизации при $\rho = 2.84$ (д, е); $V_0 = 510$ мВ, $V_m = 50$ мВ

носят периодический характер, однако их частота становится рационально связанной с частотой внешнего воздействия f_e (рис. 2, в, з). При этом в асинхронном режиме динамика системы становится квазипериодической (рис. 2, д, е). Такой режим характеризуется двумя несоизмеримыми временными масштабами и проявляется в характерной амплитудной модуляции колебаний.

Спектральные плотности мощности колебаний тока в отсутствие внешнего воздействия, а также в синхронном и асинхронном режимах приведены на рис. 3. Как можно видеть из сравнения рис. 3, а, б и в, в случае синхронизации частота колебаний тока подстраивается под внешнее воздействие, при этом мощность колебаний на частоте воздействия, позиция которой на рисунке показана стрелкой, резко возрастает. В асинхронном режиме подстройка частоты колебаний тока к частоте внешнего воздействия и резкое увеличение мощности одной из гармоник не происходит, и спектр представляет собой набор гармоник двух несоизмеримых частот и их комбинации.

Резкое увеличение мощности колебаний на частоте внешнего воздействия при синхронизации позволяет предположить, что синхронизация существенно усиливает поглощение мощности на частоте внешнего воздействия. Чтобы оценить такое поглощение, вводилась следующая величина:

$$A(\omega_e) = \langle I(t) \cos(\omega_e t) \rangle_t, \quad (17)$$

где $\langle \cdot \rangle_t$ обозначает усреднение по бесконечному интервалу времени, $I(t)$ – ток, возникающий в сверхрешетке под действием полного приложенного к ней напряжения (14). Величина $A(\omega)$ напрямую с связана с коэффициентом поглощения, традиционно используемым в оптических и СВЧ-измерениях. При этом $A > 0$ означает поглощение на данной частоте, а $A < 0$ соответствует вынужденному (стимулированному) излучению на частоте ω_e в перпендикулярном к сверхрешетке направлении [6].

На рис. 4 приведена зависимость числа вращения ρ от частоты внешнего воздействия (так называемая «чертова лестница») и соответствующая ей зависимость абсорбции A для сверхрешетки, находящейся в режиме генерации доменов заряда, когда наблюдаются колебания тока, протекающего через сверхрешетку. Значения управляющих параметров выбраны теми же самыми, что и при построении областей режимов синхронных колебаний на плоскости управляющих параметров (ср. с рис. 1). «Полочки» на «чертовой лестнице» $\rho = 1, 2, \dots$ соответствуют областям синхронных режимов. Из рисунка видно, что в режиме синхронизации колебаний тока в сверхрешетке наблюдается резкое увеличение абсорбции A , что соответствует интенсивному поглощению энергии внешнего воздействия. Интересно также отметить, что и в асинхронных режимах колебаний величина абсорбции также оказывается положительной, что свидетельствует об

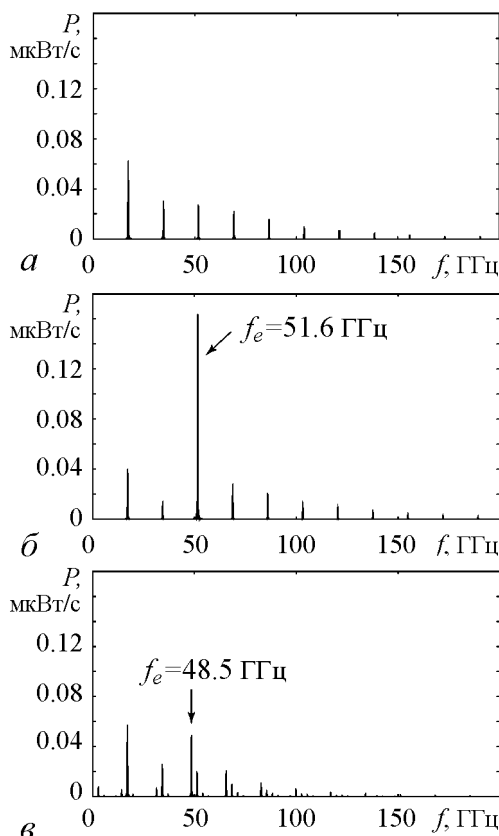


Рис. 3. Спектральная плотность мощности колебаний тока $P(f)$ в полупроводниковой сверхрешетке в отсутствие внешнего воздействия $V_m = 0$ (а); для синхронного режима при $V_0 = 510$ мВ, $V_m = 50$ мВ, $f_e = 51.6$ ГГц ($\rho = 3$) (б); для асинхронного режима при $V_0 = 510$ мВ, $V_m = 50$ мВ, $f_e = 48.5$ ГГц ($\rho = 2.84$) (в). Стрелками на рисунках (б, в) указаны пики в спектре, соответствующие частоте внешнего воздействия. См. также рис. 2

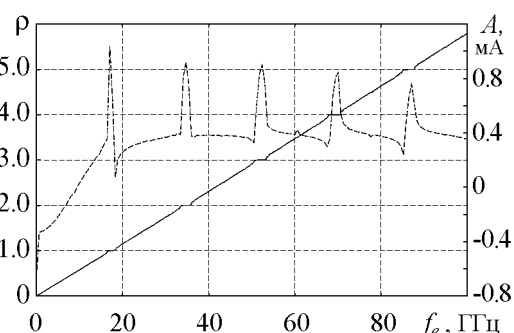


Рис. 4. Зависимость числа вращения ρ (сплошная линия) и величины абсорбции A (пунктирная линия) от частоты внешнего воздействия f_e (показана линейная частота). Значения управляющих параметров $V_0 = 510$ мВ, $V_m = 30$ мВ, $T = 0$ К

ослаблении внешнего сигнала в полупроводниковой наноструктуре, хотя это ослабление оказывается не столь ярко выраженным, как в случае синхронизации.

Таким образом, слабый внешний периодический сигнал может эффективно синхронизовать движение доменов в полупроводниковой сверхрешетке в широком диапазоне частот воздействия. Примечательно, что ширина зон синхронизации практически не зависит от отношения частот следования доменов и воздействия, что необычно с точки зрения теории синхронизации и может быть связано с богатым спектральным составом колебаний тока в автономной сверхрешетке (см. рис. 3, *a*). Здесь следует отметить, что вопрос о ширине зоны синхронизации на разных гармониках лежит в сфере проблем теории синхронизации и до сих пор является не решенным для общего случая. Вместе с тем, во многих работах (см., например, [11] и список литературы к ней) наблюдались корреляции зависимости ширины зоны синхронизации (при фиксированной силе внешнего воздействия) и мощности соответствующей гармоники в спектре невозмущенной системы: чем выше мощность невозмущенной гармоники, тем шире зона синхронизации на ней. В нашем случае спектр колебаний, которые синхронизируются внешним воздействием, имеет богатый состав с многими мощными гармониками. В этой связи, хотя мы и не можем математически точно обосновать почти не меняющуюся ширину зон синхронизации, но можем предположить, что это связано с богатым спектральным составом невозмущенных колебаний. Следует также подчеркнуть, что синхронизация сопровождается резким ростом поглощения на частоте внешнего воздействия. Последнее делает использование внешнего периодического воздействия перспективным не только для управления динамикой заряда, но и для измерения частоты следования доменов.

Работа выполнена при поддержке Президентской программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-3407.2010.2). А.А.К. благодарит также ФНП «Династия» за финансовую поддержку.

Библиографический список

1. *Wacker R.* Semiconductor superlattices: a model system for nonlinear transport // *Physics Reports*. 2002. Vol. 357. P. 1.
2. *Келдыш Л.В.* Свойства полупроводниковых сверхрешеток // *Физика твердого тела*. 1962. Т. 4. С. 2265.
3. *Esaki L., Tsu R.* Superlattices and negative differential conductivity in semiconductors // *IBM Journal of Research and Development*. 1970. Vol. 14, № 1. P. 61.
4. *Schomburg E., Hofbeck K., Scheuerer R. et al.* Control of the dipole domain propagation in a GaAs/AlAs superlattice with a high-frequency field // *Phys. Rev. B*. 2002. Vol. 65. P. 155320.
5. *Jappsen A.-K., Wacker A., Schöll E., Schomburg E.* High-frequency impedance of driven superlattices // *J. Appl. Phys.* 2002. Vol. 92. P. 3137.
6. *Hyart T., Alekseev K., Thuneberg E.* Bloch gain in dc-ac-driven semiconductor superlattices in the absence of electric domains // *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)*. 2008. Vol. 77, № 16. P. 165330.
7. *Hyart T., Alexeeva N.V., Mattas J., Alekseev K.* Terahertz bloch oscillator with a modulated bias // *Phys. Rev. Lett.* 2009. Vol. 102. P. 140405.

8. *Блехман И.И.* Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981.
9. *Landa P.S., Rosenblum M.G.* Synchronization and chaotization of oscillations in coupled self-oscillating systems // *Appl. Mech. Rev.* 1993. Vol. 46, № 7. P. 414.
10. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., и др.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
11. *Balanov A.G., Janson N.B., Postnov D.E., Sosnovtseva O.V.* Synchronization: from simple to complex. Springer, 2009.
12. *Glass L.* Synchronization and rhythmic processes in physiology // *Nature (London)*. 2001. Vol. 410. P. 277.
13. *Anishchenko V.S., Balanov A.G., Janson N.B. et al.* Entrainment between heart rate and weak nonlinear forcing // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 2000. Vol. 10, № 10. P. 2339.
14. *Parmananda P.* Generalized synchronization of spatiotemporal chemical chaos // *Phys. Rev. E*. 1997. Vol. 56. P. 1595.
15. *Blasiusc B., Stone L.* Chaos and phase synchronisation in ecological systems // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 2000. Vol. 10, № 10. P. 2361.
16. *Palus M., Kurths J., Schwarz U. et al.* Is the solar activity cycle synchronized with the solar inertial motion? // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 2000. Vol. 10, № 11. P. 2519.
17. *Murali K., Lakshmanan M.* Transmission of signals by synchronization in a chaotic van der Pol–Duffing oscillator // *Phys. Rev. E*. 1993. Vol. 48, № 3. R1624.
18. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002.
19. *Anishchenko V.S., Pavlov A.N.* Global reconstruction in application to multichannel communication // *Phys. Rev. E*. 1998. Vol. 57. P. 2455.
20. *Pyragas K.* Synchronisation of coupled time-delay systems: analytical estimations // *Phys. Rev. E*. 1998. Vol. 58, № 3. P. 3067–3071.
21. *Суото К., Oppenheim A.V.* Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications // *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 71, № 1. P. 65.
22. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации // *Успехи физических наук*. 2009. Т. 179, № 12. С. 1281.
23. *Трубецков Д.И., Короновский А.А., Храмов А.Е.* Синхронизация распределенных автоколебательных систем электронно-волновой природы с обратной волной // *Изв. вузов. Радиофизика*. 2004. Т. XLVII, № 5–6. С. 343.
24. *Greenaway M.T., Balanov A.G., Schöll E., Fromhold T.M.* Controlling and enhancing terahertz collective electron dynamics in superlattices by chaos-assisted miniband transport // *Phys. Rev. B*. 2009. Vol. 80. P. 205318.
25. *Fromhold T.M., Patane A., Bujkiewicz S. et al.* Chaotic electron diffusion through stochastic webs enhances current flow in superlattices // *Nature*. 2004. April. Vol. 428. P. 726.
26. *Balanov A. G., Fowler D., Patane A. et al.* Bifurcations and chaos in semiconductor superlattices with a tilted magnetic field // *Phys. Rev. E*. 2008. Vol. 77, № 2. P. 026209.
27. *Баланов А.Г., Короновский А.А., Сельский А.О., Храмов А.Е.* Влияние температуры на дрейфовую скорость электронов в полупроводниковой сверхрешетке

в продольном электрическом и наклонном магнитном полях // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 3. С. 128.

28. *Игнатов А.А., Шаикин В.И.* Блоховские осцилляции электронов и неустойчивость волн пространственного заряда в полупроводниковых сверхрешетках // ЖЭТФ. 1987. Т. 93. С. 935.
29. *Басс Ф.Г., Зорченко В.В., Шашора В.И.* Штрак-циклотронный резонанс в полупроводниках со сверхрешеткой // Письма в ЖЭТФ. 1980. Т. 31, № 6. С. 345.
30. *Басс Ф.Г., Зорченко В.В., Шашора В.И.* К теории гальваномагнитных и высокочастотных явлений в полупроводниках со сверхрешеткой // Физика и техника полупроводников. 1981. Т. 15. С. 459.
31. *Шик А.Я.* Сверхрешетки–периодические полупроводниковые структуры // Физика и техника полупроводников. 1974. Т. 8. С. 1841.

*Саратовский госуниверситет
Loughborough University, UK*

*Поступила в редакцию 17.12.2010
После доработки 4.04.2011*

EFFECT OF EXTERNAL PERIODIC FORCE ON THE DYNAMICS OF THE CHARGE DOMAINS IN SEMICONDUCTOR SUPERLATTICE

O.I. Moskalenko, A.A. Koronovskii, A.E. Hramov, K.N. Alekseev, A.G. Balanov

Periodic external signal effect on the collective dynamics of charge in semiconductor superlattice is studied. It is shown, that periodically-oscillating external electrical field can synchronize the transport of domains of the high density of charge as well as oscillations of electrical current flowing through the superlattice. Synchronization tongues are occurred in the control parameter «frequency of electrical field – electrical field amplitude» plane, and the width of such tongues does not almost depend on the frequency of external field and proper frequency of the domain follow ratio. Synchronization is shown to be accompanied by the sharp increase of absorption on the frequency of external field.

Keywords: Semiconductor superlattice, charge domains, synchronization.



Москаленко Ольга Игоревна – родилась в Саратове (1984). Окончила факультет нелинейных процессов Саратовского госуниверситета (2006), кандидат физико-математических наук (2008). Доцент кафедры физики открытых систем СГУ, старший научный сотрудник лаборатории физики нелинейных явлений отделения физики нелинейных систем НИИ Естественных наук СГУ. Область научных интересов – исследование классической и хаотической синхронизации в нелинейных системах; применение непрерывного вейвлет- и фурье-анализа к проблеме хаотической синхронизации в системах с малым числом степеней свободы и пространственно-распределенных средах; изучение обобщенной синхронизации в системах с однонаправленной и взаимной связью и ее возможных приложений; влияние шума на установление синхронных режимов; применение хаотической синхронизации для скрытой передачи информации; исследование кооперативных явлений в сетях со сложной топологией; анализ хаотической синхронизации в сложных сетях. Автор около 40 статей в центральных реферируемых отечественных и зарубежных научных журналах.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

E-mail: moskalenko@nonlin.sgu.ru



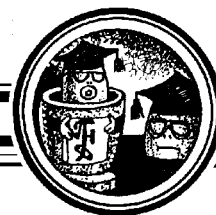
Алексеев Кирилл Николаевич – кандидат физико-математических наук, специалист в области теоретической физики. В настоящее время на постоянной основе работает в университете Лафборо (Великобритания).

England, Loughborough, LE11 3TU
Loughborough University



Баланов Александр Геннадьевич – родился в Саратове (1973), окончил Саратовский государственный университет (1995). После окончания СГУ работал инженером в том же университете. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2000). В настоящее время на постоянной основе работает в университете Лафборо (Великобритания), по совместительству является ведущим научным сотрудником СГУ. Научные интересы – нелинейная динамика классических и квантовых систем. Опубликовал около 100 научных работ по вышеуказанной тематике.

England, Loughborough, LE11 3TU
Loughborough University
E-mail: a.balanov@lboro.ac.uk



СИНХРОНИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ КОНКУРИРУЮЩИХ МОД ВНЕШНИМ ГАРМОНИЧЕСКИМ СИГНАЛОМ*

Е.Н. Перегородова, Н.М. Рыскин, С.А. Усачева

Исследуется вынужденная синхронизация автоколебательной системы с двумя степенями свободы в случае, когда нет никаких резонансных соотношений между собственными частотами и взаимодействие собственных мод носит чисто энергетический характер (конкуренция мод). Аналитически найдены условия устойчивости режимов одно- и двухчастотных колебаний. Численно исследована структура языков синхронизации на плоскости параметров частота – амплитуда внешнего воздействия и механизмы установления синхронного режима в зависимости от коэффициентов нелинейной связи мод.

Ключевые слова: Синхронизация, конкуренция мод, квазипериодические колебания, захват частоты, подавление колебаний, язык синхронизации, асинхронное возбуждение и подавление.

Введение

В последнее время значительный интерес привлекает проблема синхронизации многочастотных квазипериодических колебаний. На эту тему опубликован ряд работ (см., например, [1–6]), основные результаты даже вошли в учебные пособия [7,8]. Выяснилось, что уже в простейшем случае двухчастотных колебаний процессы взаимодействия между различными собственными модами колебательной системы приводят к появлению ряда принципиальных отличий от известной картины синхронизации в системе с одной степенью свободы [9–19]. Однако в работах [1–6] главным образом рассматривался случай, когда собственные частоты колебательной системы близки друг к другу либо приближенно соотносятся как 1:3. При этом взаимодействие мод носит резонансный характер, то есть в автономной системе происходит образование резонансного предельного цикла на торе, а синхронизация происходит посредством захвата собственных частот внешним сигналом. В работах [4–6] была развита достаточно простая аналитическая теория синхронизации двухчастотных

*Статья написана по материалам доклада на IX Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, Россия, 4–9 октября, 2010.

колебаний в фазовом приближении, результаты которой хорошо согласуются как с численным моделированием, так и с данными экспериментов.

Однако не исследованным остается случай, когда никаких резонансных соотношений между собственными частотами нет, и взаимодействие собственных мод носит чисто энергетический характер (конкуренция мод). При этом в случае небольшого превышения над порогом генерации, когда колебания можно считать квазигармоническими, применение стандартных асимптотических методов теории колебаний приводит к хорошо известной системе уравнений для комплексных амплитуд мод $A_{1,2}$ [9,10]

$$\begin{aligned}\dot{A}_1 &= \lambda_1 \left(1 - |A_1|^2 - \beta_1 |A_2|^2\right) A_1, \\ \dot{A}_2 &= \lambda_2 \left(1 - |A_2|^2 - \beta_2 |A_1|^2\right) A_2,\end{aligned}\tag{1}$$

где $\lambda_{1,2}$ – параметры возбуждения соответствующих мод, коэффициенты $\beta_{1,2}$ характеризуют влияние мод друг на друга и называются коэффициентами нелинейной связи мод. Без ограничения общности можно положить $\lambda_1 = 1$, чего всегда можно добиться перенормировкой времени.

Хотя система (1) формально имеет четвертый порядок (так как амплитуды $A_{1,2}$ являются комплексными), она сводится к системе с одной степенью свободы, поскольку для фаз колебаний $\varphi_{1,2} = \arg(A_{1,2})$ получаются тривиальные уравнения $\dot{\varphi}_{1,2} = 0$. Это является следствием чисто энергетического характера взаимодействия.

Напомним основные сведения о динамике системы (1) [9,10]. Она имеет четыре неподвижные точки:

- 1) $A_1 = A_2 = 0$;
- 2) $|A_1| = 1, A_2 = 0$;
- 3) $A_1 = 0, |A_2| = 1$;
- 4) $|A_1|^2 = \frac{1 - \beta_1}{1 - \beta_1\beta_2}, |A_2|^2 = \frac{1 - \beta_2}{1 - \beta_1\beta_2}$.

Первая соответствует отсутствию колебаний. Поскольку мы рассматриваем случай $\lambda_{1,2} > 0$, очевидно, что первая неподвижная точка является неустойчивым узлом. Вторая и третья неподвижные точки отвечают режимам одномодовой генерации. Условия их устойчивости имеют вид $\beta_2 > 1$ и $\beta_1 > 1$, соответственно. Четвертая неподвижная точка отвечает режиму двухмодовой генерации. Она существует лишь в том случае, если параметры β_1, β_2 одновременно меньше или больше единицы, причем устойчивой эта точка является только при $\beta_{1,2} < 1$. Таким образом, возможны четыре типа поведения. При $\beta_1 < 1, \beta_2 > 1$ и $\beta_1 > 1, \beta_2 < 1$ реализуются одночастотные режимы генерации первой и второй моды, соответственно. При $\beta_{1,2} < 1$ наблюдается одновременная генерация обеих мод, то есть режим двухчастотных квазипериодических колебаний. Наконец, при $\beta_{1,2} > 1$ имеет место мультистабильность, то есть в зависимости от начальных условий устанавливаются колебания либо на первой, либо на второй моде.

Отметим, что задачи о взаимодействии конкурирующих мод имеют большое практическое значение, в частности, для электроники приборов коротковолновых диапазонов (гиротроны, лазеры на свободных электронах и др.), в которых используются принципиально многомодовые пространственно-развитые («сверхразмерные»)

колебательные системы (см., например, [11,12]). Весьма актуальной представляется проблема управления спектром генерации подобных систем, одним из возможных способов решения которой является воздействие внешним синхронизирующим сигналом [11]. В частности, в работе [13] рассматривался вопрос о переключении частоты субмиллиметрового гиротрона, используемого в экспериментах по нагреву плазмы, и было показано, что наиболее быстрое переключение можно осуществить за счет кратковременного воздействия внешним сигналом на частоте соответствующей моды. Таким образом, очевидный интерес представляет задача о синхронизации двухмодовой системы (1) при воздействии на нее внешним гармоническим сигналом, которой посвящена настоящая работа. Следует отметить, что подобная задача рассматривалась ранее рядом авторов [14–16], однако в «докомпьютерную» эпоху не было возможности подробно изучить механизмы установления синхронного режима и построить полную картину синхронизации.

1. Режимы синхронизации неавтономного генератора

Рассмотрим модель неавтономного генератора, когда на систему с двумя степенями свободы (1) действует гармонический внешний сигнал. Поскольку считается, что собственные частоты достаточно далеки друг от друга и не связаны какими-либо резонансными соотношениями, достаточно ввести внешнее воздействие лишь в одно из уравнений системы (1), в результате чего она модифицируется следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{A}_1 &= \lambda_1 \left[1 - |A_1|^2 - \beta_1 |A_2|^2 \right] A_1 + f e^{i\omega t}, \\ \dot{A}_2 &= \lambda_2 \left[1 - |A_2|^2 - \beta_2 |A_1|^2 \right] A_2,\end{aligned}\tag{2}$$

где f и ω – амплитуда и частота внешнего воздействия*. Далее без ограничения общности будем считать, что $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda$. Заменой $A_1 \rightarrow A_1 e^{i\omega t}$ неавтономную систему уравнений (2) можно превратить в автономную:

$$\begin{aligned}\dot{A}_1 + i\omega A_1 &= \left[1 - |A_1|^2 - \beta_1 |A_2|^2 \right] A_1 + f, \\ \dot{A}_2 &= \lambda \left[1 - |A_2|^2 - \beta_2 |A_1|^2 \right] A_2.\end{aligned}\tag{3}$$

Режиму синхронизации, то есть одночастотным колебаниям на частоте внешнего воздействия, соответствует неподвижная точка

$$A_1 = A_0 = \text{const}, \quad A_2 = 0.\tag{4}$$

Для нее из уравнений (3) получаем

$$\left(i\omega - 1 + |A_0|^2 \right) |A_0| = f,\tag{5}$$

откуда следует соотношение, позволяющее определить амплитуду колебаний как функцию амплитуды и частоты внешнего воздействия, то есть уравнение резонансных кривых

$$\rho \left((1 - \rho)^2 + \omega^2 \right) = f^2.\tag{6}$$

*Точнее говоря, ω – отстройка частоты внешнего воздействия от собственной частоты первой моды.

Здесь $\rho = |A_0^2|$. Отметим, что уравнение (6) в точности совпадает с соответствующим уравнением для случая синхронизации одномодовой системы [7–10,17,18].

Найдем условия устойчивости режима синхронизации. Зададим малые возмущения стационарного состояния (4):

$$\begin{aligned} A_1 &= A_0 + \tilde{a}_1(t), \\ A_2 &= \tilde{a}_2(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Подставив (7) в исходные уравнения (3), после линеаризации получим

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{a}}_1 + i\omega\tilde{a}_1 &= (1 - 2\rho)\tilde{a}_1 - A_0^2\tilde{a}_1, \\ \dot{\tilde{a}}_2 &= \lambda(1 - \beta_2\rho)\tilde{a}_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Как видим, система расщепляется на два независимых уравнения: первое содержит только \tilde{a}_1 , второе – только \tilde{a}_2 . Из первого уравнения следуют два условия неустойчивости, которые полностью совпадают с соответствующими соотношениями, возникающими при решении задачи о синхронизации системы с одной степенью свободы [7–10,17,18]:

$$\rho < \frac{1}{2}, \quad (9)$$

$$\omega^2 + (1 - \rho)(1 - 3\rho) < 0. \quad (10)$$

Напомним, что соотношение (9) дает условие бифуркации Андронова–Хопфа, что соответствует синхронизации через подавление собственных колебаний генератора (синхронизация гашением), а (10) есть условие седлоузловой бифуркации, что соответствует синхронизации посредством захвата частоты [7–10,17–19].

Однако в случае системы с двумя степенями свободы появляется еще один механизм неустойчивости одночастотного режима, связанный с возбуждением второй моды. Как видно из второго уравнения системы (8), условие неустойчивости имеет вид

$$\rho < \frac{1}{\beta_2}. \quad (11)$$

С помощью соотношений (9)–(11) можно построить границы устойчивости на плоскости ω , ρ и, наложив их на резонансные кривые, определить, какие участки являются устойчивыми, какие – неустойчивыми. Кроме того, используя уравнение резонансных кривых (6), можно построить язык синхронизации – границу устойчивости на плоскости параметров ω , f .

На рис. 1 в левой колонке представлены резонансные кривые с наложенными на них областями неустойчивости. Белый цвет соответствует устойчивому синхронному режиму, различными оттенками серого окрашены области неустойчивости. Темно-серым закрашена область, удовлетворяющая неравенству (10), при выходе из нее происходит захват частоты первой моды. Горизонтальная прямая на уровне $\rho = 1/2$ есть граница подавления первой моды (неравенство (9)). Штриховой линией показана граница подавления второй моды (неравенство (11)). В правой колонке представлены соответствующие языки синхронизации. Показаны границы захвата

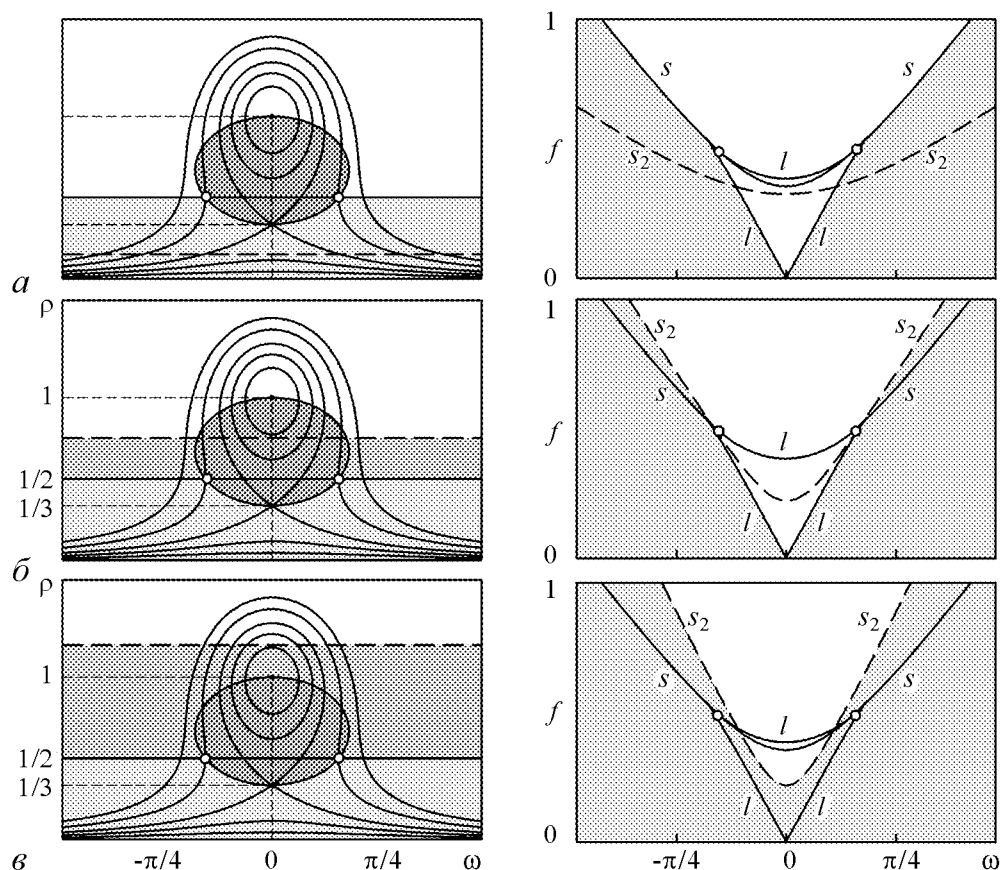


Рис. 1. Резонансные кривые (левая колонка) и языки синхронизации (правая колонка) для $\beta_2 > 2$ (а), $1 < \beta_2 < 2$ (б), $\beta_2 < 1$ (в). Светлые кружки – точки Богданова–Такенса

(кривая l) и подавления (s) первой моды, а также граница подавления второй моды s_2 (штриховая линия). Белыми кружками показаны точки Богданова–Такенса, в которых касаются друг друга границы захвата и подавления частоты [8].

Очевидно, что возможны три ситуации. Если $\beta_2 > 2$ (рис. 1, а), граница подавления второй моды лежит ниже соответствующей границы для первой моды. В этом случае присутствие второй моды по существу не влияет на процессы синхронизации. Картина резонансных кривых и язык синхронизации выглядят точно так же, как и для системы с одной степенью свободы [7–10,17,18].

В случае, когда $1 < \beta_2 < 2$ (рис. 1, б), граница области синхронизации частично определяется захватом частоты первой моды, частично – подавлением второй моды. Заметим, что подавление осуществляется воздействием на частоте, далекой от собственной частоты второй моды. Поэтому, следуя [10], будем называть данный эффект асинхронным подавлением.

Наконец, при $\beta_2 < 1$ (рис. 1, в) границей области синхронизации является только кривая s_2 – граница асинхронного подавления второй моды. При этом язык синхронизации отрывается от горизонтальной оси, то есть появляется порог синхронизации. Действительно, при $\beta_2 < 1$ в автономном генераторе реализуется либо режим генерации второй моды, либо режим двухчастотной генерации, так что при $f \rightarrow 0$ установление синхронного режима невозможно.

2. Двухмодовый режим и условия его устойчивости

Для полноты картины следует рассмотреть режим генерации двух мод. Ему отвечает неподвижная точка системы (3) вида $A_1 = A_{10}$, $A_2 = A_{20}$, где константы A_{10} , A_{20} не равны нулю. Тогда из уравнений (3) получаем

$$\begin{aligned} (i\omega - (1 - \rho_1 - \beta_1\rho_2)) A_{10} &= f, \\ \lambda(1 - \rho_2 - \beta_2\rho_1) &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\rho_{1,2}$ – квадрат модуля соответствующей амплитуды.

Из второго уравнения системы следует, что

$$\rho_2 = 1 - \beta_2\rho_1. \quad (13)$$

Поскольку ρ_2 – величина неотрицательная, двухмодовый режим существует, только если выполняется условие $\rho_1 < 1/\beta_2$, что в точности совпадает с полученным выше условием возбуждения второй моды (11).

Подставив (13) в первое уравнение системы (12), найдем уравнение резонансных кривых

$$f^2 = \rho_1 \left(\omega^2 + (1 - \beta_1 - (1 - \beta_1\beta_2)\rho_1)^2 \right) = \rho_1 \left(\omega^2 + (1 - \beta_1\beta_2)^2 (\rho_0 - \rho_1)^2 \right). \quad (14)$$

По структуре оно аналогично уравнению резонансных кривых для одномодового режима (6). Здесь

$$\rho_0 = \frac{1 - \beta_1}{1 - \beta_1\beta_2}$$

– квадрат амплитуды двухмодовой генерации в автономном генераторе.

Исследуем неподвижную точку на устойчивость. Зададим малые возмущения

$$A_1 = A_{10} + \tilde{a}_1(t), \quad A_2 = A_{20} + \tilde{a}_2(t),$$

подставим в (3) и линеаризуем. Получим

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{a}}_1 + i\omega\tilde{a}_1 &= (1 - 2\rho_1)\tilde{a}_1 - A_{10}^2\tilde{a}_1^* - \beta_1\rho_2\tilde{a}_1 - \beta_1A_{10}A_{20}^*\tilde{a}_2 - \beta_1A_{10}A_{20}\tilde{a}_2^*, \\ \dot{\tilde{a}}_2 &= \lambda(1 - 2\rho_2 - \beta_2\rho_1)\tilde{a}_2 - \lambda A_{20}^2\tilde{a}_2^* - \lambda\beta_2A_{20}(A_{10}^*\tilde{a}_1 + A_{10}\tilde{a}_1^*). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь знак «*» означает комплексное сопряжение. Отметим, что величины a_2 и A_{20} можно без ограничения общности считать вещественными. Тогда система (15) упрощается:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{a}}_1 + i\omega\tilde{a}_1 &= (1 - 2\rho_1 - \beta_1\rho_2)\tilde{a}_1 - A_{10}^2\tilde{a}_1^* - 2\beta_1A_{10}A_{20}\tilde{a}_2, \\ \dot{\tilde{a}}_2 &= \lambda(1 - 3\rho_2 - \beta_2\rho_1)\tilde{a}_2 - \lambda\beta_2A_{20}(A_{10}^*\tilde{a}_1 + A_{10}\tilde{a}_1^*). \end{aligned} \quad (16)$$

Будем искать решения системы (16) в виде $\tilde{a}_{1,2} \sim \exp(pt)$ и исключим ρ_2 с помощью уравнения (13). Получим

$$\begin{aligned} [p + i\omega - (1 - \beta_1 - (2 - \beta_1\beta_2)\rho_1)]\tilde{a}_1 + A_{10}^2\tilde{a}_1^* + 2\beta_1A_{10}A_{20}\tilde{a}_2 &= 0, \\ [p + 2\lambda(1 - \beta_2\rho_1)]\tilde{a}_2 + \lambda\beta_2A_{20}(A_{10}^*\tilde{a}_1 + A_{10}\tilde{a}_1^*) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Добавив к системе (17) уравнение, комплексно-сопряженное первому, из условия совместности получаем характеристическое уравнение третьего порядка

$$\left((p - \Delta)^2 - \rho_1^2 + \omega^2 \right) (p + 2\lambda\rho_2) - 4\lambda\beta_1\beta_2\rho_1 (1 - \beta_2\rho_1) (p - \Delta - \rho_1) = 0, \quad (18)$$

где введено обозначение $\Delta = 1 - \beta_1 - (2 - \beta_1\beta_2)\rho_1$. Отметим, что, если положить в (18) $\beta_{1,2} = 0$, оно превратится в характеристическое уравнение для синхронизации системы с одной степенью свободы. Уравнение (18) можно окончательно переписать следующим образом:

$$p^3 + ap^2 + bp + c = 0, \quad (19)$$

где

$$a = 2(\lambda(1 - \beta_2\rho_1) - \Delta),$$

$$b = \omega^2 + \Delta^2 - \rho_1^2 - 4\lambda(1 - \beta_2\rho_1)(\Delta + \beta_1\beta_2\rho_1),$$

$$c = 2\lambda(1 - \beta_2\rho_1) [\omega^2 + (\Delta + \rho_1)(\Delta - \rho_1 + 2\beta_1\beta_2\rho_1)].$$

Поскольку на границе устойчивости характеристический показатель p является чисто мнимым, положим $p = i\Omega$, подставим в уравнение (19) и разделим его на два вещественных уравнения:

$$\begin{aligned} \Omega^3 &= \Omega b, \\ a\Omega^2 &= c. \end{aligned} \quad (20)$$

Первое уравнение системы (20) имеет очевидное решение $\Omega = 0$. Тогда из второго уравнения следует, что

$$c = 0. \quad (21)$$

Это решение соответствует условию седлоузловой бифуркации или захвата частоты первой моды внешним сигналом в присутствии второй (действительно, при этом период биений обращается в бесконечность). Если же $\Omega \neq 0$, то из первого уравнения (20) следует, что $\Omega^2 = b$, тогда из второго уравнения находим

$$ab = c. \quad (22)$$

Это есть условие бифуркации Андронова–Хопфа, то есть условие подавления собственных колебаний первой моды в присутствии второй. Очевидно, что одновременно должны также выполняться условия $a > 0$, $b > 0$; таким образом, найденные соотношения совпадают с условиями устойчивости для системы третьего порядка, следующими из известного критерия Рауса–Гурвица [9,20].

Отметим, что аналогичные аналитические условия устойчивости одно- и двух-частотного режима были получены ранее в [15,16]. В дальнейшем мы сопоставим их с результатами численного моделирования исходных уравнений (2).

3. Результаты численного моделирования

3.1. Воздействие на генератор в режиме одномодовой генерации. Рассмотрим вначале ситуацию, когда в автономном генераторе устанавливаются колебания на первой моде ($\beta_1 < 1$, $\beta_2 > 1$). Выберем для определенности следующие

значения параметров: $\beta_1 = 0.5$, $\beta_2 = 1.5$, $\lambda = 1$. Случай $\beta_2 > 2$ рассматривать нет необходимости, так как при этом вторая мода не возбуждается ни при каких условиях.

При небольшой отстройке частоты внешнего воздействия от собственной частоты первой моды наблюдается классический сценарий захвата частоты, подробно описанный в литературе [7–10,17–19]. При малой амплитуде воздействия наблюдаются двухчастотные квазипериодические колебания, в спектре которых присутствуют частота воздействия и собственная частота первой моды, то есть классический режим биений. Далее будем называть его двухчастотным режимом I типа. С увеличением f амплитуда биений возрастает, а их период увеличивается; при этом спектральная составляющая на собственной частоте приближается к частоте внешнего воздействия. Спектр обогащается комбинационными частотами, а зависимость амплитуды сигнала от времени приобретает вид релаксационных колебаний. При дальнейшем увеличении амплитуды воздействия происходит захват частоты, после чего возникает режим одночастотных колебаний с постоянной амплитудой. Поскольку возбуждение второй моды в данном случае не происходит, поведение полностью аналогично случаю системы с одной степенью свободы, так что мы не приводим соответствующие иллюстрации.

При большей отстройке частоты внешнего воздействия ω наблюдается более сложная картина, которую иллюстрирует рис. 2, где построены зависимости амплитуд колебаний от времени и их спектры при различных значениях амплитуды внешнего воздействия f . Спектры нормированы на компоненту в спектре колебаний первой моды, имеющую максимальную интенсивность.

При малой амплитуде внешнего воздействия наблюдается двухчастотный режим I типа, а колебания второй моды, как и в предыдущем случае, затухают (рис. 2, *a*). Отметим, что затухание второй моды носит длительный и достаточно сложный характер. Спектр колебаний второй моды на рис. 2, *a* напоминает спектр модулированных колебаний, причем частота модуляции равна разности частот первой моды и внешнего воздействия. Однако в действительности это спектр затухающего переходного процесса, модулированного колебаниями первой моды: как видно, интенсивность максимальной компоненты второй моды примерно на 30 дБ меньше, чем у первой моды, и уменьшается с увеличением времени счета.

С ростом f происходит возбуждение второй моды, то есть осуществляется переход к трехчастотному режиму (рис. 2, *б*). Это происходит потому, что, как показано в разд. 1, первая мода подавляет вторую в процессе конкуренции, то есть нелинейного амплитудного взаимодействия мод. Воздействие внешней силы на частоте, достаточно удаленной от собственной частоты первой моды, уменьшает ее амплитуду, и подавление второй моды становится невозможным. Поскольку вторая мода возбуждается за счет воздействия сигнала на частоте, близкой к частоте первой моды, этот эффект называют асинхронным возбуждением [10].

При дальнейшем увеличении амплитуды внешнего воздействия амплитуда собственных колебаний первой моды уменьшается, а второй – увеличивается, соответственно ведут себя амплитуды биений (рис. 2, *в*). Затем внешнее воздействие полностью подавляет собственные колебания первой моды (рис. 2, *г*). Режим вновь становится двухчастотным, однако, если ранее в спектре присутствовали частота внешнего воздействия и собственная частота первой моды (рис. 2, *a*), то теперь это

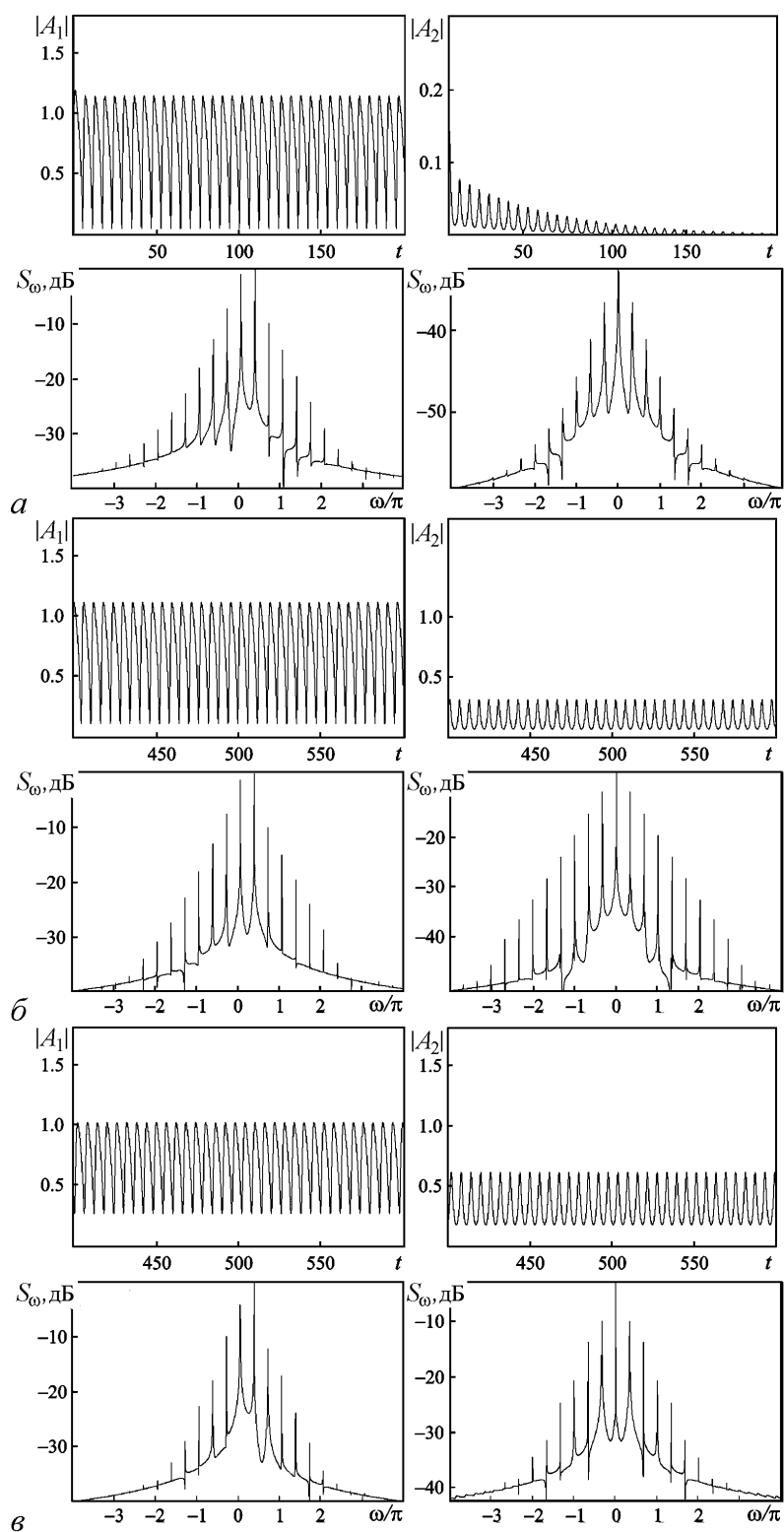


Рис. 2. Зависимости амплитуд колебаний от времени и соответствующие спектры при $\beta_1 = 0.5$, $\beta_2 = 1.5$, $\lambda = 1$, $\omega = 0.4\pi$; $f=0.86$ (a), 0.87 (б), 0.89 (в)

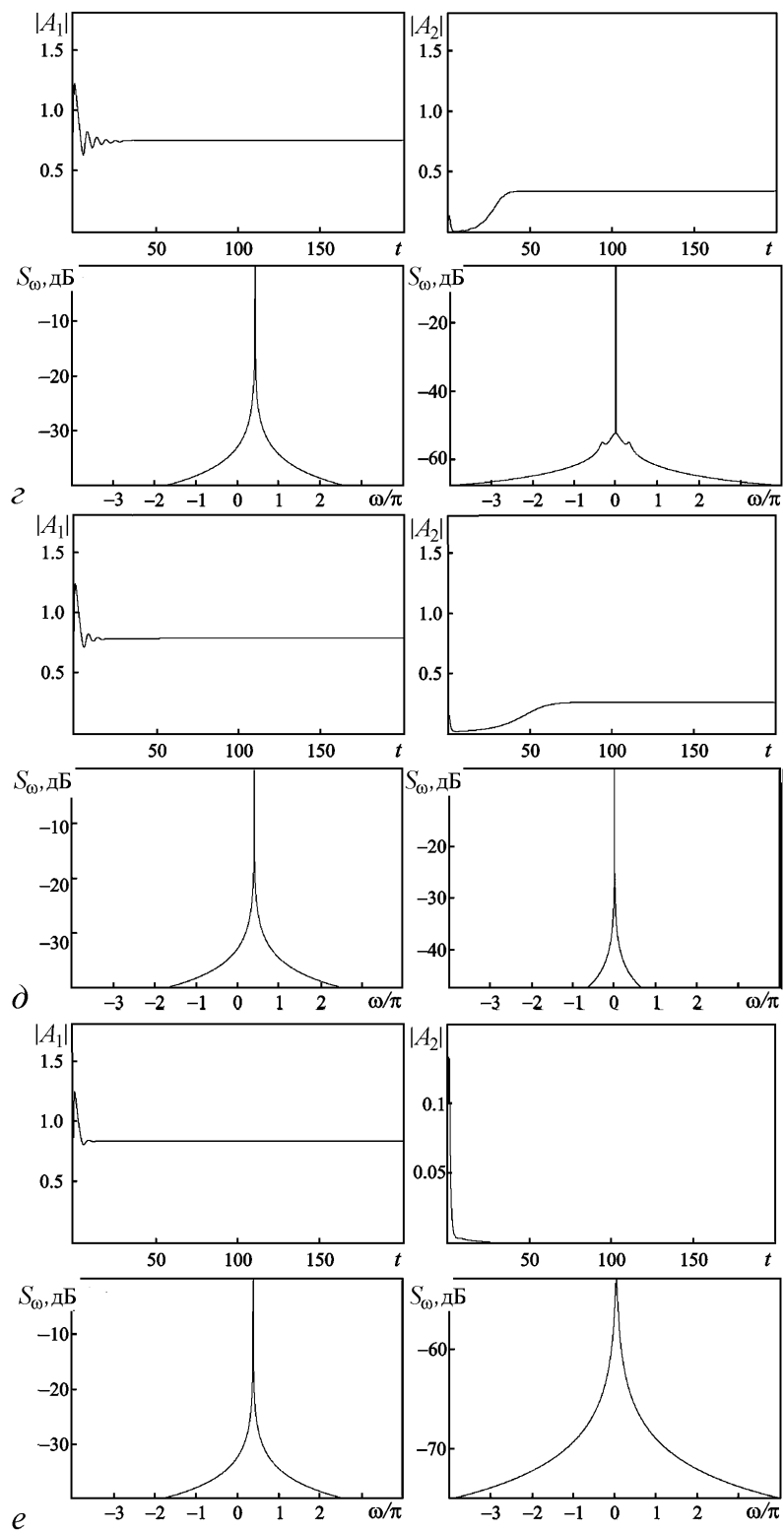


Рис. 2 (Продолжение) $f=1.0$ (z), 1.03 (d), 1.09 (e)

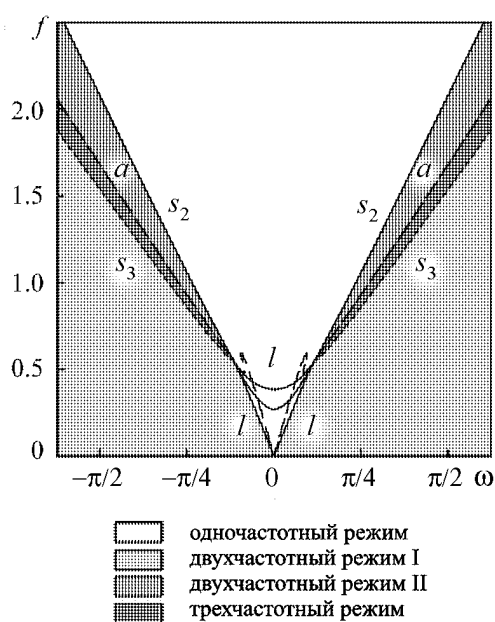


Рис. 3. Разбиение плоскости параметров f, ω на области различных режимов при $\lambda = 1, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 1.5$

плоскости параметров f, ω на области различных режимов. Отметим, что результаты численного моделирования полностью согласуются с теоретическими (разд. 1,2). Язык синхронизации, то есть область одночастотного режима, имеет тот же вид, что и на рис. 1, б. Он образован линией захвата частоты первой моды l , которая определяется соотношениями (6), (10), и линией асинхронного подавления второй моды s_2 , которая задается соотношениями (6), (11). Однако картина является более сложной, чем показанная на рис. 1, б, так как с боков к языку синхронизации подходят области трехчастотного режима. Верхняя граница этих областей (линия a) определяется условием (22). Нижняя граница – линия асинхронного возбуждения s_3 – может быть получена только численно, так как возникновение трехчастотного режима не связано с бифуркацией неподвижной точки.

Случай $\beta_1 > 1, \beta_2 < 1$, когда в автономной системе генерируется вторая мода, нет необходимости рассматривать подробно. Поскольку в этом случае собственные колебания первой моды вообще не возбуждаются, картина на плоскости параметров f, ω аналогична представленной на рис. 1, в. Границей языка синхронизации служит линия асинхронного подавления второй моды s_2 . Ниже этой линии реализуется двухчастотный квазипериодический режим II типа, а трехчастотные режимы не наблюдаются.

3.2. Воздействие на генератор в двухмодовом режиме. Теперь рассмотрим ситуацию, когда в автономном генераторе устанавливается двухмодовый режим ($\beta_{1,2} < 1$). Выберем следующие значения параметров: $\beta_1 = 0.5, \beta_2 = 0.5, \lambda = 1$. Поскольку в этом случае воздействие осуществляется на систему, генерирующую двухчастотные колебания, при малой амплитуде воздействия колебания становятся трехчастотными. Сценарий перехода в режим синхронизации следующий: вначале, в зависимости от ω , происходит либо захват, либо подавление собственных колебаний

частота внешнего воздействия и собственная частота второй моды. Будем называть этот режим двухчастотным режимом II типа. Условия его устойчивости были рассмотрены в разд. 2.

Последующее увеличение f приводит к подавлению колебаний второй моды (рис. 2, д,е) и переходу в одночастотный синхронный режим, что согласуется с результатами разд. 1. Следуя [10], будем называть этот эффект асинхронным подавлением.

Заметим, что спектр колебаний второй моды на рис. 2, е напоминает спектр квазигармонических колебаний. Однако в действительности это вновь, как и на рис. 2, а, спектр затухающего переходного процесса.

Общую картину иллюстрирует рис. 3, на котором показано разбиение

первой моды и колебания становятся двухчастотными. Дальнейшее увеличение f приводит к асинхронному подавлению колебаний второй моды.

На рис. 4 показано разбиение плоскости параметров f, ω на области различных режимов. Область двухчастотного режима ограничена снизу линиями a и c (соотношения (22) и (21), соответственно), а сверху – линией подавления второй моды. Таким образом, область синхронизации отрывается от горизонтальной оси, что согласуется с рис. 1, *в*. Двухчастотный режим I типа в данном случае отсутствует.

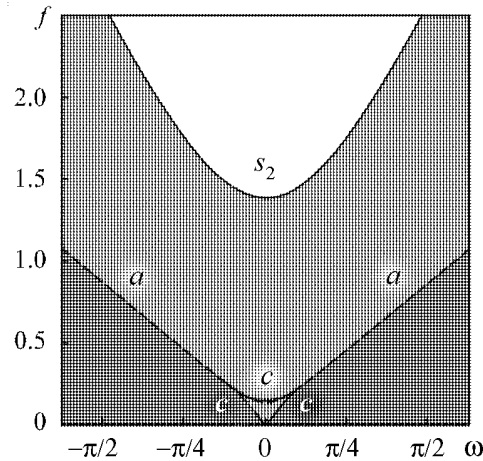


Рис. 4. Разбиение плоскости параметров f, ω на области различных режимов при $\lambda = 1, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 0.5$

3.3. Воздействие на генератор в режиме мультистабильности. Наконец, рассмотрим воздействие на генератор при $\beta_{1,2} > 1$, когда имеет место мультистабильность, что представляет особый интерес в связи с задачами управления частотой многомодовых генераторов. Именно этот случай рассматривался в [13], где обсуждалась возможность переключения частоты генерации гиротрона за счет кратковременного воздействия внешним сигналом на частоте соответствующей моды.

Здесь следует выделить две ситуации, а именно, когда $1 < \beta_2 < 2$ и $\beta_2 > 2$. Более сложное поведение наблюдается в первом случае. Поскольку при наличии мультистабильности характер установившегося режима зависит от начальных условий, расчеты будем проводить, плавно увеличивая f с наследованием начальных условий. Рассмотрим вначале случай, когда до включения внешнего воздействия в системе установилась первая мода колебаний (рис. 5, *а*). Тогда внешнее воздействие приведет к возникновению двухчастотного режима типа I. При малых расстрой-

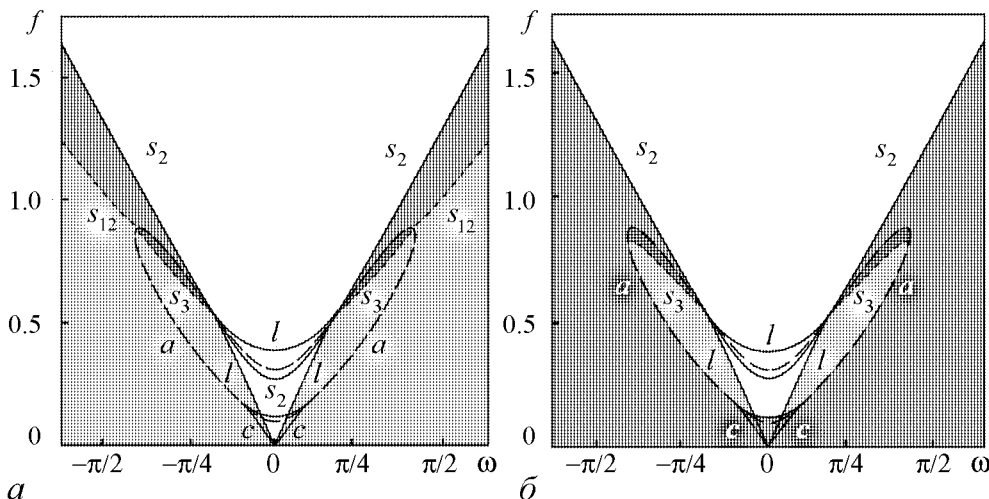


Рис. 5. Разбиение плоскости параметров f, ω на области различных режимов при $\lambda = 1, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 1.5$ Воздействие осуществляется на систему в режиме генерации первой (*а*) и второй (*б*) моды

ках синхронизация происходит через захват частоты первой моды. С увеличением расстройки переходу в синхронный режим предшествует асинхронное возбуждение второй моды, поскольку внешнее воздействие приводит к уменьшению амплитуды собственных колебаний. Однако асинхронное возбуждение может происходить двумя различными способами. Внутри области, ограниченной линией a , асинхронное возбуждение происходит мягко и возникает трехчастотный режим (линия s_3). При выходе из области, ограниченной линией a , происходит подавление собственных колебаний первой моды, то есть переход в двухчастотный режим II типа. При дальнейшем увеличении амплитуды воздействия произойдет подавление второй моды. Если же значения ω будут выбраны вне области, ограниченной линией a , то при пересечении линии s_{12} происходит жесткий переход между двухчастотными режимами I и II типов (рис. 6); при этом трехчастотный режим отсутствует.

Если воздействие осуществляется на генератор, в котором установилась вторая мода колебаний, то разбиение плоскости параметров ω, f на области различных режимов приобретет несколько иной вид (рис. 5, б). При любой частоте воздействия вначале возникает двухчастотный режим II типа. При малых ω синхронизация наступает при переходе через верхнюю границу области, ограниченной линией c (условие (21)). Отметим, что, если воздействие осуществляется точно на собственной частоте первой моды, то есть $\omega = 0$, то

$$\rho_1 = \frac{1 - \beta_1}{3(1 - \beta_1\beta_2)}.$$

Тогда с учетом (14) можно найти аналитическое выражение для амплитуды воздействия, при которой происходит переключение мод

$$f^2 = \frac{4}{27} \cdot \frac{(1 - \beta_1)^3}{1 - \beta_1\beta_2}.$$

Расчет по этой формуле полностью согласуется с результатами, полученными в [13] путем численного моделирования.

При больших расстройках, когда мы попадаем внутрь области, ограниченной линией a , происходит жесткий переход к режиму биений, а затем повторяется тот

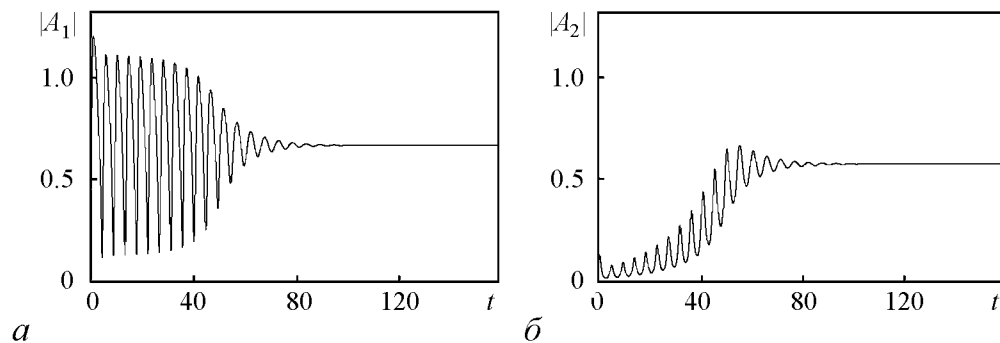


Рис. 6. Зависимости амплитуд колебаний от времени, иллюстрирующие жесткий переход между двухчастотными режимами I и II типа ($\beta_1 = 1.5$, $\beta_2 = 1.5$, $\lambda = 1$, $\omega = 0.5\pi$, $f=1.05$)

же сценарий, что и в предыдущем случае. Если же двигаться по плоскости параметров, обходя область, ограниченную кривой a , то единственной бифуркацией будет асинхронное подавление второй моды.

Таким образом, мультистабильность, имеющая место в автономной системе, сохраняется и в неавтономном случае в определенном диапазоне параметров. Сопоставление рис. 6, a и b наглядно демонстрирует область, в которой имеет место мультистабильность.

Более простая ситуация реализуется в случае $\beta_2 > 2$. Если до включения воздействия в генераторе установились колебания первой моды, то, как следует из результатов разд. 1, возбуждение второй моды при этом вообще не должно происходить, и картина на плоскости параметров ω, f имеет тот же вид, что и на рис. 1, a . Если же воздействие осуществляется на систему в режиме генерации второй моды, то вначале устанавливается двухчастотный режим типа II, а с увеличением f происходит жесткий переход к режиму типа I, после чего динамика носит тот же характер, что и в предыдущем случае. Пример разбиения плоскости параметров на области различных режимов приведен на рис. 7.

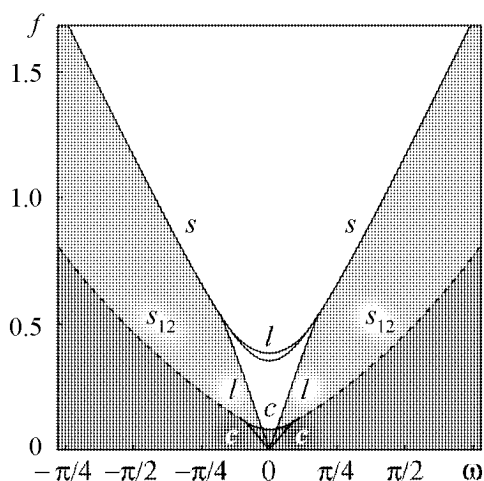


Рис. 7. Разбиение плоскости параметров f, ω на области различных режимов при $\lambda = 1, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2.5$. Воздействие осуществляется на систему в режиме генерации второй моды

Заключение

В данной работе изучена вынужденная синхронизация генератора с двумя степенями свободы, в случае, когда никаких резонансных соотношений между собственными частотами нет, и взаимодействие носит чисто энергетический характер (конкуренция мод). Найдены аналитические условия устойчивости одночастотного (синхронного) режима и двухчастотного режима. Достаточно полная картина неавтономной динамики двухмодового генератора была получена за счет сочетания аналитических методов исследования и численного моделирования. Наряду с классическим режимом биений, в данном случае возможен еще один тип двухчастотного квазипериодического режима, когда в спектре колебаний присутствуют частота внешнего воздействия и собственная частота второй моды. Переходы между этими двумя режимами происходят либо жестко, либо мягко в результате образования трехчастотного режима и его последующего исчезновения.

Результаты численного моделирования полностью согласуются с теоретическими, а также позволяют установить наличие ряда интересных эффектов. Так, если внешний сигнал воздействует на систему в режиме одномодовой генерации, то при не слишком больших значениях коэффициента нелинейной связи ($1 < \beta_2 < 2$) переходу в синхронный режим предшествует асинхронное возбуждение второй моды, которая в автономном генераторе не возбуждается. На плоскости параметров

частота – амплитуда внешнего воздействия появляются области трехчастотных квазипериодических колебаний, примыкающих к языку синхронизации. Далее увеличение амплитуды воздействия приводит к подавлению сначала собственных колебаний первой моды, а затем – второй моды.

При воздействии на систему в режиме двухмодовой генерации вначале происходит либо захват, либо подавление собственных колебаний первой моды, а затем – асинхронное подавление второй моды. Переход в режим синхронизации в этом случае носит пороговый характер.

Наиболее сложное поведение наблюдается, когда в автономной системе имеет место бистабильность. Картина режимов неавтономной динамики также зависит от начальных условий. Наблюдаются жесткие переходы между квазипериодическими режимами различных типов.

Полученные результаты дополняют теорию синхронизации колебаний в многомодовых системах, развитую в работах [1–8]. В дальнейшем предполагается исследовать синхронизацию более сложных многочастотных режимов, в частности, при наличии различных резонансов.

Авторы благодарят Г.С. Нусиновича за интерес к работе и полезные замечания.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (№ 11-02-01411) и АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (№ 2.1.1/1738). Н.М. Рыскин также благодарит фонд некоммерческих программ «Династия».

Библиографический список

1. *Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J.* Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 76. 046216.
2. *Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J.* Winding number locking on a two-dimensional torus: synchronization of quasiperiodic motions // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 73. 056202.
3. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Синхронизация квазипериодических колебаний с двумя частотами // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2008. Т. 16, № 2. С. 69.
4. *Анищенко В.С., Астахов С.В., Вадивасова Т.Е., Феоктистов А.В.* Численное и экспериментальное исследование внешней синхронизации двухчастотных колебаний // *Нелинейная динамика.* 2009. Т. 5, № 2. С. 237-252.
5. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* Синхронизация квазипериодических колебаний связанных фазовых осцилляторов // *Письма в ЖТФ.* 2010. Т. 36, № 10. С. 73.
6. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* Фазовая динамика возбуждаемых квазипериодических автоколебательных осцилляторов // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2010. Т. 18, № 4. С. 33.
7. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е.* Лекции по нелинейной динамике. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. 2010.
8. *Кузнецов А.П., Емельянова Ю.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* Синхронизация в задачах. Саратов: ООО Издательский центр «Наука». 2010.

9. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука. 1984.
10. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Физматлит., 1997.
11. Nusinovich G.S. Review of the theory of mode interaction in gyrodevices // IEEE Trans. Plasma Sci. 1999. Vol. 27, No. 2. P. 313.
12. Гинзбург Н.С., Петелин М.И. Конкуренция и кооперация мод в лазерах на свободных электронах // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 6. С. 3.
13. Nusinovich G.S., Sinitsyn O.V., Antonsen T.M. Mode switching in a gyrotron with azimuthally corrugated resonator // Phys. Rev. Lett. 2007. Vol. 98, № 20. 205101.
14. Берштейн И., Иконников Е. К математической теории вынужденных колебаний в автоколебательных системах с двумя степенями свободы // ЖТФ. 1934. Т. 4, № 1. С. 172.
15. Нусинович Г.С. К теории синхронизации многомодовых электронных СВЧ генераторов // Изв. вузов. Радиофизика. 1975. Т. 18, № 11. С. 1689.
16. Мельникова В.А., Тарантович В.М. Конкуренция мод и режимы захвата автогенератора // Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т. 19, № 8. С. 1156.
17. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
18. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
19. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2005.
20. Трубецков Д.И., Рожнёв А.Г. Линейные колебания и волны. М.: Физматлит, 2001.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию
После доработки*

*13.01.2011
31.03.2011*

SYNCHRONIZATION OF THE SYSTEM OF TWO COMPETING MODES BY EXTERNAL HARMONIC SIGNAL

E.N. Peregorodova, N.M. Ryskin, S.A. Usacheva

Forced synchronization of self-oscillating system with two degrees of freedom is studied in the case when there are no resonance relations between eigenfrequencies and interaction of the modes has the form of mode competition. Stability conditions for the regimes of one- and two-frequency oscillations are obtained analytically. The structure of synchronization tongues on the frequency–amplitude of external driving parameters plane is studied numerically. Mechanisms of establishing of the synchronous regime are considered depending on coefficients of non-linear mode coupling.

Keywords: Synchronization, mode competition, quasi-periodic oscillations, frequency locking, oscillation suppression, synchronization tongues, asynchronous excitation and suppression.



Перегородова Екатерина Николаевна – родилась в Саратове (1990). Обучается на 4 курсе факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета по специальности «Физика открытых нелинейных систем». Область научных интересов – синхронизация многомодовых нелинейных динамических систем.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: jinkss@yandex.ru



Рыскин Никита Михайлович – родился в 1966 году в Саратове. Окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1991). Защитил кандидатскую (1996) и докторскую (2005) диссертации. С 1997 года работает на факультете нелинейных процессов СГУ, в настоящее время – профессор кафедры нелинейной физики. Область научных интересов – нелинейная динамика распределенных систем, нелинейные волны и солитоны, вакуумная сверхвысокочастотная электроника и микроэлектроника. Имеет более 100 научных публикаций по указанным выше направлениям, в том числе учебные пособия «Нелинейные волны» (в соавторстве с Д.И. Трубецковым; М.: Физматлит, 2000) и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и С.П. Кузнецовым; М.: Физматлит, 2002, 2005).

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: RyskinNM@info.sgu.ru



Усачева Светлана Александровна – родилась в Саратове (1987), окончила факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2009). Аспирант факультета нелинейных процессов СГУ по специальности «Радиофизика». Область научных интересов – нелинейная динамика многомодовых автоколебательных систем, в том числе, распределенных систем с запаздыванием.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет
E-mail: usasva@mail.ru



О КВАЗИСИНХРОННЫХ РЕЖИМАХ В СИСТЕМЕ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ С ФИЛЬТРОМ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ ПРИБЛИЖЕННОМ УЧЕТЕ ЗАПАЗДЫВАНИЯ*

Г.М. Бакунов, В.В. Матросов, В.Д. Шалфеев

Для типовой системы фазовой автоподстройки частоты с фильтром второго порядка и запаздыванием изучаются условия возникновения и характеристики регулярных и хаотических автомодуляционных режимов.

Ключевые слова: Фазовые системы, фазовая автоподстройка частоты, динамические режимы, автомодуляционные колебания, синхронизация, бифуркации.

Введение

Системы фазовой автоподстройки частоты (ФАП) широко применяются в радиофизике, радиосвязи, радиолокации – в частности, в устройствах передачи и приема сигналов. Теория таких систем для регулярных сигналов достаточно хорошо развита [1]. В фазовом пространстве системы режиму синхронизации соответствует устойчивое состояние равновесия. В работах [2,3] на основе аналитических методов было показано, что учет запаздывания в цепи управления системы ФАП с наиболее простым интегрирующим фильтром первого порядка может приводить к нарушению устойчивости состояния равновесия и возникновению около него устойчивого предельного цикла. В этом случае в системе ФАП устанавливается квазисинхронный режим, при котором колебания с выхода генератора ФАП являются колебаниями с периодической угловой модуляцией и стабилизированной (по опорной частоте) центральной частотой. Детальный анализ таких автомодуляционных колебаний в системе ФАП с интегрирующим RC-фильтром в цепи управления проведен в работе [4] с использованием методов компьютерного моделирования. В частности, исследованы зависимости периода и глубины модуляции автомодуляционных колебаний от параметров системы (величины запаздывания, характеристик фильтра).

*Статья написана по материалам доклада на IX Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, Россия, 4-9 октября, 2010.

В последнее время в связи с задачами передачи информации с использованием хаотических сигналов представляют интерес режимы динамического хаоса в системах ФАП [5,6]. В фазовом пространстве таким режимам соответствуют хаотические аттракторы. Количественное исследование характеристик хаотических аттракторов и бифуркаций, приводящих к их возникновению, требует, как правило, привлечения методов компьютерного моделирования. В частности, с помощью таких методов в работе [7] было показано, что наличие более сложного фильтра в цепи управления ФАП (второго порядка) приводит, даже без учета запаздывания, к нарушению устойчивости состояния равновесия и возникновению в фазовом пространстве предельного цикла, который в результате каскада бифуркаций удвоения периода может переходить в хаотический аттрактор.

Настоящая работа посвящена исследованию особенностей возникновения автомодуляционных режимов в случае, когда присутствуют оба вышеуказанных фактора: сложный фильтр в цепи управления и запаздывание.

1. Математическая модель

Базовая математическая модель типовой системы ФАП может быть представлена следующим операторным уравнением [1]:

$$\frac{p\varphi}{\Omega} + K(p)F(\varphi) = \gamma, \quad (1)$$

где φ – разность фаз колебаний управляемого и опорного генераторов, Ω – максимальная расстройка по частоте, которая может быть скомпенсирована цепью управления, $\gamma = \Omega_H/\Omega$ – относительная начальная частотная расстройка подстраиваемого и опорного генераторов, $F(\varphi)$ – нормированная нелинейная характеристика фазового дискриминатора, $K(p)$ – коэффициент передачи фильтра ($p \equiv d/dt$).

При приближенном учете запаздывания в цепи управления ($e^{-T_3 p} \approx 1 - T_3 p$, где T_3 – время запаздывания) уравнение (1) можно записать в виде [3]

$$\frac{p\varphi}{\Omega} + K(p)(1 - T_3 p)F(\varphi) = \gamma. \quad (2)$$

Будем рассматривать в (2) фильтр второго порядка с передаточной функцией вида $K(p) = (1 + ap + bp^2)^{-1}$ и $F(\varphi) = \sin \varphi$. Переходя в (2) к дифференциальной форме и вводя безразмерные время $\tau = \Omega t$ и параметры $\mu = \Omega^2 b$, $\varepsilon = \Omega a$, $d = T_3/a$, получаем из (2) систему дифференциальных уравнений 3-го порядка

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = y, \quad \frac{dy}{d\tau} = z, \quad \mu \frac{dz}{d\tau} = \gamma - \sin \varphi - (1 - d\varepsilon \cos \varphi)y - \varepsilon z, \quad (3)$$

определенную в цилиндрическом фазовом пространстве $U = \{\varphi(\text{mod } 2\pi), y, z\}$.

2. Структура пространства параметров

На рис. 1, а приведено сечение (ε, γ) пространства параметров $(\gamma, \varepsilon, \mu, d)$ системы (3) для $\mu = 0.5$, $d = 0.6$, построенное методом компьютерного моделирования с использованием пакета [8]. В пространстве параметров выделены следующие

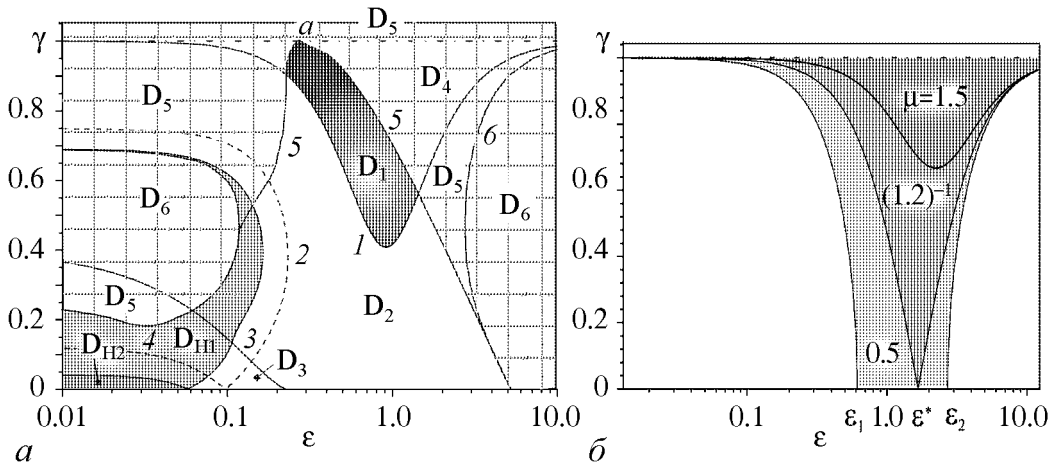


Рис. 1. *a* – структура пространства параметров модели (3) при $\mu = 0.5, d = 0.6$; *б* – эволюция областей устойчивости синхронного режима модели ФАП с фильтром второго порядка и малым запаздыванием при изменении μ в случае $d = 0.3$

области: область захвата в режим синхронизации D_1 , области захвата в режим регулярной квазисинхронизации D_2, D_3 , области существования режимов хаотической квазисинхронизации D_{H1} и D_{H2} , области существования режима биений D_4, D_5, D_6 .

Область D_1 – область глобальной устойчивости режима синхронизации. В этой области параметров все фазовые траектории модели (3) асимптотически стремятся к устойчивому состоянию равновесия O_1 с координатами $\varphi^* = \arcsin \gamma, y^* = 0, z^* = 0$, определяющему режим синхронизации колебаний управляемого генератора опорным сигналом. В режиме синхронизации частоты колебаний совпадают, однако имеет место стационарное рассогласование колебаний по фазе, равное φ^* .

Область D_2 – область глобальной устойчивости режима регулярной квазисинхронизации. В этой области параметров все фазовые траектории модели (3) стремятся к устойчивому колебательному предельному циклу $L_{01}^{(k)}$, где k характеризует кратность цикла. Цикл $L_{01}^{(k)}$ соответствует режиму регулярной квазисинхронизации, в котором на выходе ФАП имеют место периодически модулированные колебания со стабилизированной по опорному сигналу средней частотой. Цикл $L_{01}^{(1)}$ (рис. 2, *a*) возникает в результате бифуркации Андронова–Хопфа при переходе из области D_1 через *линию 1*, циклы $L_{01}^{(k)}$ кратности больше единицы ($k = 2, 4, 8, \dots$) возникают в результате бифуркаций удвоения периода циклов $L_{01}^{(k/2)}$. Пунктирная *линия 2* на рис. 1, *a* соответствует мягкой смене устойчивости цикла $L_{01}^{(1)}$, сопровождающаяся рождением устойчивого предельного цикла $L_{01}^{(2)}$ (рис. 2, *б*).

Область D_3 . При значениях параметров из области D_3 в фазовом пространстве модели (3) имеют место колебательные предельные циклы $L_{02}^{(k)}$, которые, так же как циклы $L_{01}^{(k)}$, характеризуют режим регулярной квазисинхронизации. Цикл $L_{02}^{(1)}$ возникает в фазовом пространстве U при пересечении *линии 3* при уменьшении ε или γ в результате бифуркации двойного предельного цикла (мультипликатор цикла $\nu = +1$). Циклы $L_{02}^{(k)}$, где $k = 2, 4, 8, \dots$, появляются аналогично циклам $L_{01}^{(k)}$, через бифуркации удвоения периода циклов $L_{02}^{(k/2)}$. Пунктирная *линия 4* соответствует рождению цикла $L_{02}^{(2)}$ (рис. 2, *д*) в результате удвоения периода цикла $L_{02}^{(1)}$ (рис. 2, *з*).

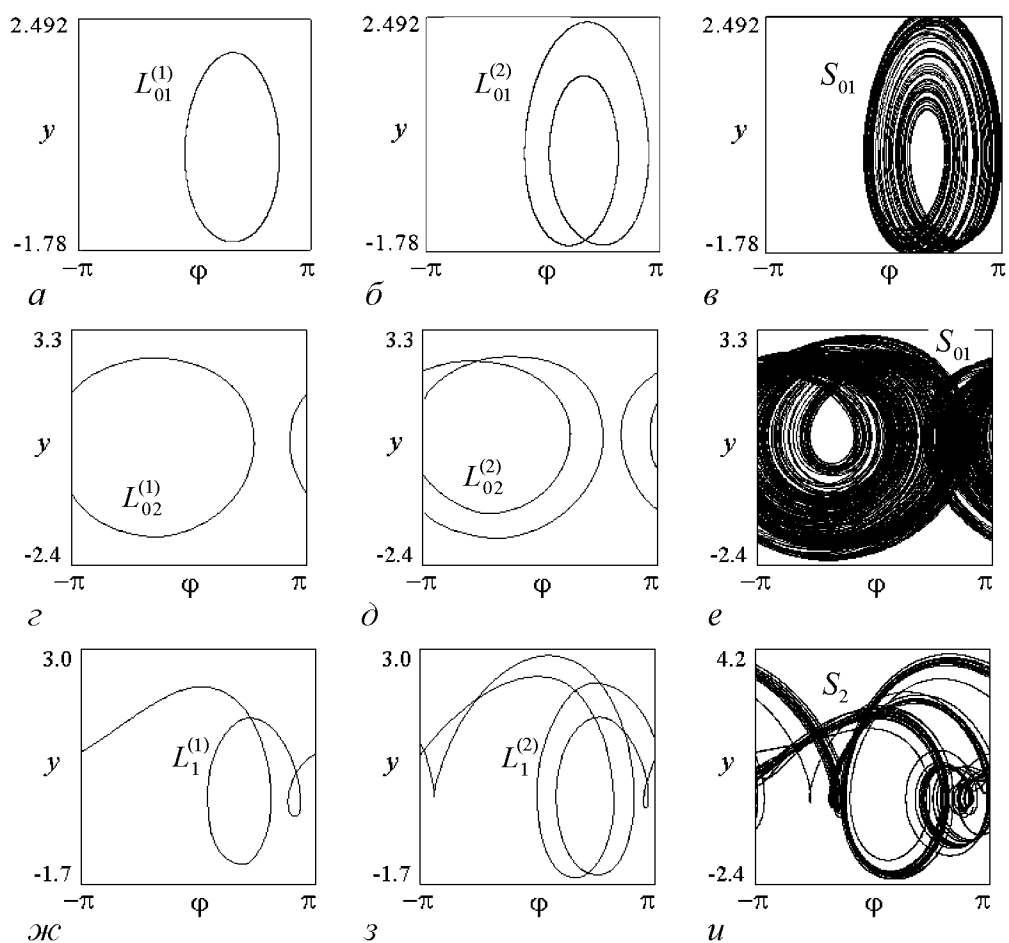


Рис. 2. Проекция фазовых портретов модели (3)

Области D_{H1} и D_{H2} . Каскад бифуркаций удвоения периода циклов $L_{01}^{(k)}$ начиная с $L_{01}^{(1)}$ приводит к возникновению хаотического аттрактора S_{01} . Область существования этого аттрактора D_{H1} на рис. 1, *a* выделена серым цветом. Каскад бифуркаций удвоения циклов $L_{02}^{(k)}$ приводит к возникновению хаотического колебательного аттрактора S_{02} (рис. 2, *e*), который имеет место в области параметров D_{H2} . Эта область на рис. 1, *a* отмечена темно-серым цветом. Аттракторы S_{01} (рис. 2, *в*) и S_{02} (рис. 2, *e*) соответствуют режимам хаотической квазисинхронизации. В этих режимах на выходе ФАП имеются хаотически модулированные колебания со стабилизированной по опорному сигналу средней частотой.

Области D_4 и D_5 . В области D_4 (D_5) глобальная устойчивость синхронного (регулярного квазисинхронного) режима нарушается появлением регулярных или хаотических аттракторов вращательного типа (охватывающих фазовый цилиндр U). В модели (3) аттракторы вращательного типа соответствуют режиму биений, в котором разность фаз синхронизируемых колебаний постоянно нарастает, а разность частот изменяется около некоторого значения, не равного нулю. В режимах биений на выходе ФАП имеют место периодически (хаотически) модулированные колебания, средняя частота которых не стабилизирована опорным сигналом. На рис. 1, *a* об-

ласть существования аттракторов вращательного типа выделена вертикально-горизонтальной штриховкой. Границей этой области служит пунктирная линия 5, которая разделена точкой a на две части. Справа от точки a линия 5 отвечает за бифуркацию петли сепаратрис седла или седло-фокуса с отрицательной седловой величиной. При пересечении этого участка кривой в сторону увеличения параметра γ в фазовом пространстве модели (2) появляется устойчивый вращательный предельный цикл $L_1^{(1)}$ (рис. 2, ж). Слева от точки a , в областях D_4 и D_5 численно установлено существование бифуркации петли сепаратрис седло-фокуса с положительной седловой величиной. Согласно [9, 10], в окрестности двояко-асимптотической траектории петли сепаратрисы седло-фокуса существует счетное множество устойчивых и неустойчивых периодических траекторий различных периодов. В области существования вращательных движений, расположенной левее точки a , циклы вращательного типа могут претерпевать бифуркацию удвоения периода, порождая циклы большей кратности (рис. 2, з), исчезать в результате касательных бифуркаций, а также трансформироваться в различного вида хаотические аттракторы (рис. 2, и).

Область $D_6 = D_6^1 \cup D_6^2 \cup D_6^3$. При значениях параметров из области D_6 в фазовом пространстве модели (2) существуют только аттракторы вращательного типа, то есть режимы биений глобально устойчивы. Область D_6^1 расположена выше бифуркационной кривой двукратного состояния равновесия (штрихпунктирная прямая $\gamma=1$); область D_6^2 ограничена бифуркационной кривой петли сепаратрис 1-го рода (линия б), граница разрушения хаотического аттрактора S_{01} выделяет область D_6^3 .

Сопоставление результатов приведенного выше анализа с результатами работ [4, 7] позволяет сделать следующий общий вывод. Для малых μ в области сравнительно малых значений параметра ε наблюдается динамика, характерная для системы ФАП со сложным фильтром без учета запаздывания, а в области больших значений ε наблюдается динамика, характерная для системы ФАП с фильтром первого порядка при учете запаздывания. Разделение на области малых и больших ε можно условно произвести по отношению к значению $\varepsilon^* = (\mu/d)^{-1/2}$, при котором достигается минимум бифуркационной кривой Андронова–Хопфа на плоскости (ε, γ) , или по отношению к значениям $\varepsilon_{1,2} = (0.5 \pm \sqrt{0.25 - d\mu})/n$ – точкам пересечения этой кривой с осью абсцисс (см. рис. 1, б, на котором приведены бифуркационные кривые Андронова–Хопфа при различных значениях параметра μ). В области $\varepsilon \sim \varepsilon^*$ (или $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$) оба фактора являются существенными, то есть динамика системы обладает свойствами, характерными как для системы ФАП со сложным фильтром, так и для системы ФАП с запаздыванием. Анализ расположения областей синхронизации и квазисинхронизации на рис. 1 позволяет заключить, что в рассматриваемой системе для малых значений γ характерно установление режима квазисинхронизации, который при увеличении начальной частотной расстройки γ сменяется режимом синхронизации.

3. Характеристики автомодуляционных колебаний

Перейдем к рассмотрению характеристик автомодуляционных колебаний (режима квазисинхронизации), то есть аттракторов колебательного типа [11]. В качестве таких характеристик будем использовать: амплитуды колебаний $\Delta\varphi$ и $\Delta\omega$ пе-

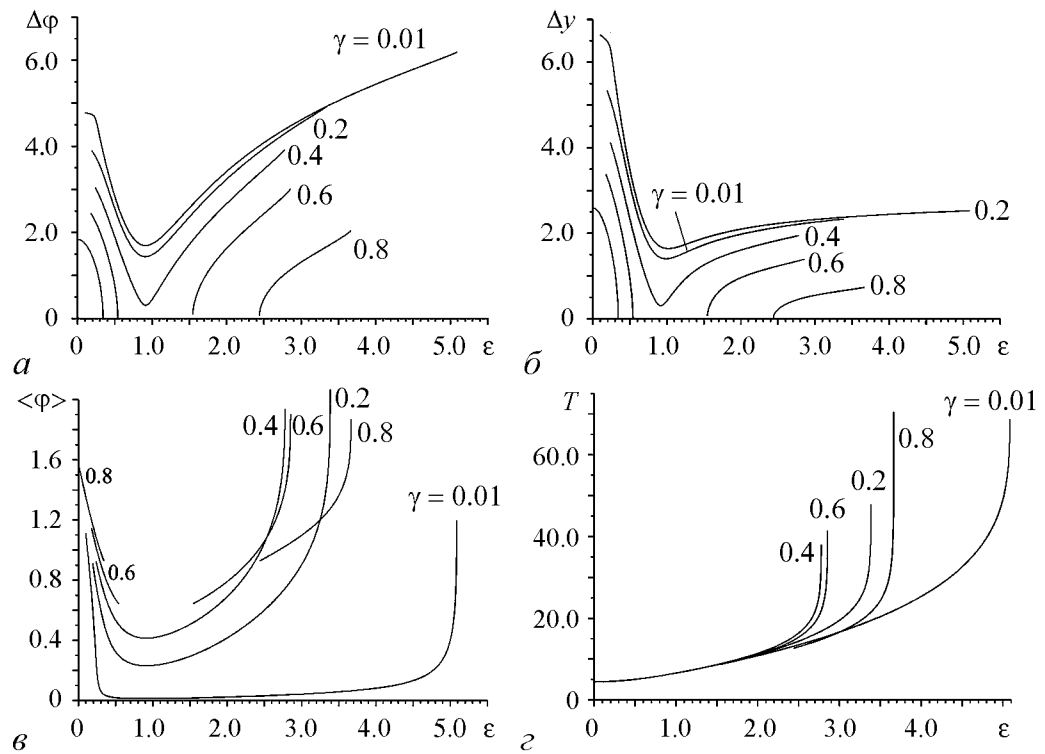


Рис. 3. Характеристики регулярных автомодуляционных колебаний

ременных φ и y при движении по аттрактору, поскольку они определяют глубины модуляции выходного сигнала по фазе и частоте; средние значения $\langle \varphi \rangle$ переменной φ , характеризующие средние фазовые ошибки стабилизации подстраиваемого генератора опорным сигналом; периоды автомодуляционных колебаний T . На рис. 3 представлены зависимости указанных характеристик автомодуляционных колебаний для регулярного режима квазисинхронизации от параметра фильтра ε и начальной расстройки γ , рассчитанные по особым траекториям модели (2) для $\mu = 0.5$, $d = 0.6$. Отметим, что, как следует из рисунка, кривые зависимостей $\Delta\varphi$, Δy , $\langle \varphi \rangle$ от ε имеют характерный минимум. Наличие такого минимума позволяет осуществить в некоторых пределах управление характеристиками автомодуляционных колебаний путем соответствующего выбора параметров. Период T автомодуляционных колебаний практически не зависит от γ , при увеличении ε , стартуя с некоторого постоянного значения, период сначала растет почти линейно, потом резко устремляется в бесконечность. Такой быстрый рост периода колебаний объясняется приближением параметров к бифуркационной кривой петли сепаратрис, где предельный цикл влипает в гомоклиническую кривую седла с бесконечным периодом обращения.

Заключение

В работе проведено исследование автомодуляционных режимов в системе ФАП с фильтром второго порядка при учете запаздывания. Показано, что учет инерционности фильтра и запаздывания приводит к нарушению устойчивости синхронного

режима и установлению режима квазисинхронизма – регулярных или хаотических автомодуляционных колебаний на выходе ФАП, средняя частота которых стабилизирована по опорной частоте. Изучены некоторые характеристики таких колебаний в зависимости от параметров системы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 10-02-00865), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (контракты № П2308, № 02.740.11.0565, № 02.740.11.0075).

Библиографический список

1. *Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А.* Системы фазовой автоподстройки частоты. 2-е изд., доп. и перераб. М.: Связь, 1972.
2. *Капранов М.В.* Полоса захвата при фазовой автоподстройке частоты // Радиотехника. 1956. Т. 11, № 12. С. 37.
3. *Белюстина Л.Н.* Исследование нелинейной системы фазовой автоподстройки частоты // Изв. вузов. Радиофизика. 1959. Т. 2, № 2. С. 277.
4. *Бакунов Г.М., Матросов В.В., Шалфеев В.Д.* О регулярных квазисинхронных режимах в системе фазовой автоподстройки частоты // Вестник ННГУ. 2010. № 6. С. 43.
5. *Дмитриев А.С., Клецов А.В., Лактюшкин А.М. и др.* Широкополосная беспроводная связь на основе динамического хаоса // Радиотехника и электроника, 2006. Т. 51, № 10. С. 1193.
6. *Матросов В.В., Шалфеев В.Д.* Динамический хаос в фазовых системах. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2007. С. 25.
7. *Бакунов Г.М., Матросов В.В., Шалфеев В.Д.* О квазисинхронных режимах в системе фазовой автоподстройки частоты с фильтром второго порядка // Вестник ННГУ. 2011. № 3. С. 62.
8. *Матросов В.В.* Динамика нелинейных систем. Программный комплекс для исследования нелинейных динамических систем с непрерывным временем: учебно-методическая разработка // Нижний Новгород: ННГУ, 2002.
9. *Шильников Л.П.* О некоторых случаях рождения периодических движений из особых траекторий // Мат. сб. 1963. Т. 61, № 104. С. 443.
10. *Шильников Л.П.* К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокуса // Мат. сб. 1970. Т. 81, № 123. С. 92.
11. *Бакунов Г.М.* Об автомодуляционных колебаниях в системе фазовой автоподстройки частоты // Материалы 9-й Международной школы «Хаотические автоколебания и образование структур», 4–9 октября 2010, Саратов, Россия. С. 74.

*Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского*

Поступила в редакцию 20.04.2011

ON QUASI-SYNCHRONOUS REGIMES IN A PHASE LOCK LOOP WITH THE SECOND-ORDER FILTER AND APPROXIMATE INCLUSION OF THE DELAY

G.M. Bakunov, V.V. Matrossov, V.D. Shalfeev

For a typical phase lock loop with the second-order filter and delayed feedback, conditions of appearance and characteristics of regular and chaotic automodulation regimes are studied.

Keywords: Phase lock loops, dynamic regimes, automodulation oscillations, synchronization, bifurcations.



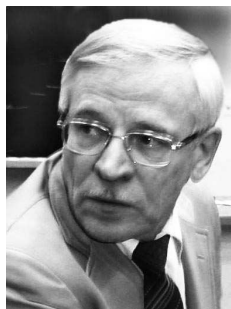
Бакунов Глеб Михайлович – родился в 1986 году в Нижнем Новгороде, окончил Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (2008). Аспирант кафедры теории колебаний и автоматического регулирования радиофизического факультета Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. Опубликовал ряд работ по динамике моноимпульсных систем фазовой синхронизации.

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: gleb@bakunov.com



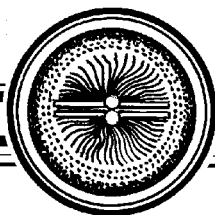
Матросов Валерий Владимирович – родился в 1960 году, окончил Горьковский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (1982) по специальности «прикладная математика». Защитил диссертации на соискание ученых степеней кандидата физико-математических наук (1994), доктора физико-математических наук (2007). С 1999 года работает на радиофизическом факультете ННГУ, в настоящее время профессор кафедры теории колебаний и автоматического регулирования. Область научных интересов – динамика нелинейных систем, динамический хаос, синхронизация и управление хаосом, математическое моделирование. Имеет более 100 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях, является соавтором двух монографий и трех учебных пособий.

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: matrossov@rf.unn.ru



Шалфеев Владимир Дмитриевич – родился в 1941 году, окончил Горьковский университет в 1963 году. Заведующий кафедрой теории колебаний Нижегородского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор, действительный член Академии инженерных наук РФ. Область научных интересов: динамика нелинейных систем, теория синхронизации, пространственно-временной хаос, структуры. Соавтор монографий «Системы фазовой синхронизации», «Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации», «Динамический хаос в фазовых системах», «Нелинейная динамика систем фазирования в антенных решетках».

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: shalfeev@rf.unn.ru



**ВАРИАБЕЛЬНОСТЬ РИТМА СЕРДЦА
И МЕДЛЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГЕМОДИНАМИКИ:
НЕЛИНЕЙНЫЕ ФЕНОМЕНЫ В КЛИНИЧЕСКОЙ ПРАКТИКЕ**

А.Н. Флейшман

©Издательство НИИ КППЗ СО РАМН, 2005

©Флейшман А.Н., 2005

©Флейшман А.Н., 2009, 2-е изд., испр. и доп.

Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2009. 194 с.

ISBN 978-5-7692-1079-2

В руководстве представлены современные данные по вариабельности ритма сердца, ее физиологическим нейровегетативным основам.

Систематически описаны нелинейные инструменты анализа, комплексная классификация ВРС и клинико-ВРС синдромов. Освещаются нелинейные аспекты анализа ВРС, принципы клинического использования. Руководство хорошо иллюстрировано (89 рисунков и 13 таблиц). Контрольные задания к главам и многочисленные литературные ссылки делают удобной работу с руководством. По сравнению с предыдущими изданиями настоящее руководство включает новые разделы, посвященные нелинейным феноменам (перемежаемость, предельные циклы, турбулентность, межсистемная синхронизация, проблемы устойчивости) и общим принципам клинического анализа ВРС.

Книга предназначена для врачей по программе физиологии сердечно-сосудистой и вегетативной нервной системы и функциональной диагностики вегетативных нарушений в неврологической и терапевтической клинике, а также для обучения студентов медицинских университетов.

Введение

Новые диагностические компьютерные технологии, отражающие метаболическое и нейровегетативное обеспечение организма, его резервы и устойчивость, в основе которых лежит анализ медленных волновых процессов кардиоритма и других показателей гемодинамики, становятся неотъемлемой частью врачебной практики и характеризуют интегративные тенденции в медицине.

Эти технологии помогают выбрать лекарство, прогнозируют течение и осложнения различных болезней и их возникновение в кардиологии, неврологии, эндокринологии, санаторно-курортной терапии, акушерстве, педиатрии, определяют последовательность анестезиологических пособий и т.д.

Информацию, которую мы получаем с помощью новой техники анализа вариабельности ритма сердца и других показателей гемодинамики, нельзя получить другим способом.

В международных рекомендациях по использованию показателей вариабельности ритма сердца для клинических целей изложены только отдельные примеры применения этих методов диагностики в терапии и кардиологии и отсутствуют какие-либо общие принципы их использования [Heart Rate Variability. Standards of Measurement, Physiological Interpretation, and Clinical Use / Task Force of the European Society of Cardiology and the North American Society of Cardiology and Electrophysiology // *Circulation*. 1996. Vol. 95, № 5. P. 1043–1065].

В российских методических рекомендациях клинические аспекты вообще отсутствуют [Баевский Р.М. и др. Анализ вариабельности сердечного ритма при использовании различных электрокардиографических систем (методические рекомендации) // *Вестник аритмологии*. 2001. № 24. С. 65–86]. К настоящему времени опубликовано большое количество отдельных работ в кардиологии, неврологии, акушерстве, эндокринологии, где вариабельность ритма сердца используется для решения частных задач в диагностике и прогнозе.

В 1994 г. мы опубликовали общие методические принципы применения медленных колебаний гемодинамики и вариабельности ритма сердца для клинических целей. Эти принципы базируются на энергетической классификации ВРС, сопряженной с общими патофизиологическими закономерностями в организме, и основаны на нейроэндокринных и метаболических моделях анализа ВРС, а также на представлениях о клинико-медленноволновых синдромах [Флейшман А.Н. Медленные колебания гемодинамики: теория, практическое применение в клинической медицине и профилактике. Новосибирск: Наука, СИФ РАН, 1999; Флейшман А.Н. Предельные циклы кардиоритма // *Инжиниринг в медицине. Колебательные процессы в гемодинамике: сб. научн. тр. III Всерос. симпоз. Челябинск, 2004. С. 160–172*].

В дальнейшем эти принципы были развиты на основе нелинейных динамических представлений о вариабельности физиологических процессов и функционирования организма. Эти исследования продолжаются в настоящее время и направлены на изучение межсистемных закономерностей, дальнейших клинических корреляций медленноволновых процессов, на совершенствование методики, в том числе на расширение частотного спектрального диапазона оценок.

В настоящем учебном руководстве по ВРС и МКТ в сжатом виде представлены основные современные концепции, включая разработанные и апробированные классификации ВРС (энергетическая, частотно-амплитудного профиля, нелинейной динамики), новая нейроэндокринно-метаболическая модель анализа ВРС, описаны устойчивые клинико-медленноволновые синдромы, феномены нелинейной динамики, новые подходы к выбору лекарственных средств, представлены алгоритмы работы врача, пользующегося новыми методами исследования.

Быстрое развитие прикладных направлений ВРС привело к необходимости создания учебных курсов для врачей. В частности, курс, который нами преподается на базе Новокузнецкого ГИУВа «Медленные колебания гемодинамики в клиниче-

ской медицине. Теоретические и клинические аспекты анализа variability ритма сердца», состоит из лекций и практических занятий от 60 до 200 часов. Отечественных учебных пособий для преподавания практически нет. Настоящее краткое иллюстрированное учебное пособие создано на материалах наших исследований за последние 7 лет и служит дополнением к имеющимся крупным научным работам, безусловно, не заменяя их [Флейшман А.Н. Медленные колебания гемодинамики: теория, практическое применение в клинической медицине и профилактике. Новосибирск: Наука, СИФ РАН 1999; Медленные колебательные процессы в организме человека. Теоретические и прикладные аспекты нелинейной динамики в физиологии и медицине: Сб. научн. тр. V Всерос. симпоз. с междунар. участием и III Школы-семинара, 15–18 мая 2007 / Под ред. А.Н. Флейшмана. Новокузнецк, 2007 и др.].

Автор благодарит сотрудников лаборатории физиологии медленных волновых процессов и Центра диагностики и коррекции нейровегетативных нарушений НИИ КПППЗ СО РАМН за помощь в сборе материала и его обсуждении.

Содержание

Предисловие автора

Из предисловия автора к изданию 2008 г.

Из предисловия автора к изданию 2005 г.

Введение

Глава 1. Variability ритма сердца. Введение в нелинейно-динамические аспекты

- 1.1. Основные задачи и цели изучения нелинейных процессов в клинике (14).
- 1.2. Нелинейные феномены в физиологии и медицине (17).
- 1.3. Сравнительная оценка детерминистских и вероятностных подходов (18).
- 1.4. Новый взгляд на старые проблемы и традиционные показатели ВРС (20).

Глава 2. Определения. Природа медленных колебаний гемодинамики. Актуальность. Стандарты и рекомендации по анализу variability ритма сердца

- 2.1. Периоды колебаний в сосудистой системе (23).
- 2.2. Определения (24).
- 2.3. Природа медленных колебаний variability ритма сердца (24).
 - 2.3.1. Энергетический (метаболический) процесс (24).
 - 2.3.2. Нейровегетативная (автономная) регуляция (25).
 - 2.3.3. Процессы самоорганизации (26).
- 2.4. Актуальность исследований variability ритма сердца и других показателей гемодинамики (27).
- 2.5. Стандарты (27).

Глава 3. Методы регистрации и анализа variability ритма сердца

- 3.1. Методические аспекты анализа variability ритма сердца и variability реоэнцефалограмм (30).
 - 3.1.1. Методы анализа нелинейной динамики ВРС: физиологические аспекты (31).
 - 3.1.2. Методические ограничения в анализе ВРС (32).
 - 3.1.3. Фазовые портреты ВРС (33).
 - 3.1.4. Длительность записи ВРС (34).
 - 3.1.5. Детрентный флуктуационный анализ (35).
 - 3.1.6. Аппроксимированная энтропия (36).
 - 3.1.7. Алгоритм формирования реотахограммы из реосигналов (37).
- 3.2. Протоколы исследований (38).
- 3.3. Алгоритм анализа ВРС (40).
- 3.4. Математические методы получения первичных характеристик ВРС и медленных колебаний гемодинамики (42).

Глава 4. Физиологические основы анализа variability ритма сердца

4.1. Энергетические аспекты ВРС (45). 4.2. Частотные характеристики ВРС и МКГ. Физиологическая интерпретация (48). 4.2.1. Высокочастотные колебания кардиоритма – HF (0.16–0.4 Гц) (по международной классификации 1996 года) (48). 4.2.2. Медленные колебания – LF (0.05–0.15 Гц). 10-секундные ритмы Мейера (49). 4.2.3. Очень медленные колебания – VLF (0.003–0.03 Гц) (51). 4.2.4. Ультранизкочастотные колебания – ULF (менее 0.0033 Гц) (52).

Глава 5. Классификация variability ритма сердца

5.1. Введение (54). 5.2. Теоретические аспекты энергетической классификации (54).

Глава 6. Модели анализа variability ритма сердца

6.1. Нейрогенные модели регуляции variability ритма сердца (59). 6.1.1. Нейрогенная многоуровневая модель регуляции variability ритма сердца (59). 6.1.2. Барорецепторные интегративные центры (62). 6.1.3. Праволеполошарные модели влияния ЦНС на кардиодинамику (64). 6.1. Метаболическая (нейроэндокринно-метаболическая) модель регуляции ВРС (68). 6.2.1. Метаболизм, лептины и variability ритма сердца (69). 6.2.2. Метаболическая модель – обоснование (70). 6.3. Онтогенетическая модель изменений variability ритма сердца (70). 6.3.1. Изменения медленных колебаний кардиоритма от периода новорожденности до 20 лет (71). 6.3.2. Старость и утрата сложности. Динамика от 50 до 90 лет (73).

Глава 7. Клинико-медленноволновые кардиодинамические синдромы

7.1. Синдромы (76). 7.1.1 Клинико-медленноволновые комплексы взаимосвязанных признаков состояния организма и ВРС (76). 7.1.2. Энергодефицитный синдром: два типа медленноволновых процессов (77). 7.1.2.1. Энергетический волновой коллапс и энергодефицитные состояния (77). 7.1.3. Гиперадаптивный синдром (78). 7.1.4. Барорецепторный синдром (79). 7.1.4.1. Барорецепторная регуляция variability ритма сердца: генетические аспекты (81). 7.1.5. Синдром устойчивой парасимпатической направленности. Доминирование HF-диапазона ВРС (83). 7.1.6. Синдром устойчивой цикличности ВРС (84).

Глава 8. Генетические аспекты variability ритма сердца

8.1. Генные сети регуляции ВРС (86).

Глава 9. Нелинейная динамика variability ритма сердца

9.1. Медицинские аспекты (93). 9.2. Вейвлет-анализ variability ритма сердца и медленных колебаний гемодинамики (93). 9.3. Хаотическая динамика variability ритма сердца (97). 9.4. Феномены нелинейной динамики сложных систем регуляции ВРС (98). 9.4.1. Хаотический тип фазовых портретов. Непрерывное вейвлет-преобразование вейвлетом Морле (спектральный анализ) (99). 9.4.2. Порядок. Предельные циклы. Непрерывное вейвлет-преобразование вейвлетом Морле (спектральный анализ) (99). 9.4.3. Методика анализа фазовых портретов variability ритма сердца в трехмерном пространстве (100). 9.4.4. Последовательный анализ структуры фазового портрета ВРС смешанного циклически-хаотического типа в трехмерном пространстве (100).

9.4.5. Сложность как мера здоровья, адаптивных свойств организма (101). 9.4.6. Упрощение как признак тяжести состояния и снижения адаптивных свойств и мера метаболического энергодефицита организма (102). 9.4.7. Одновременное сочетание хаоса и порядка на фазовых портретах ВРС как единство этих процессов (102). 9.4.8. Самоорганизация ВРС отражает общие положительные адаптивные закономерности в организме человека (103). 9.5. Предельные циклы в нелинейной динамике variability ритма сердца (103). 9.5.1. Нейрокардиальные механизмы образования предельных циклов (107). 9.5.2. Предрасполагающие свойства или условия образования предельных циклов ВРС (108). 9.5.3. Условия образования предельных циклов ВРС и их прогностическая значимость (108). 9.6. Феномен межсистемной синхронизации кардиоритма и дыхания (109). 9.6.1. Модель кардиореспираторной синхронизации (109). 9.7. Феномены перемежаемости и турбулентности (110). 9.7.1. Феномены турбулентности (110). 9.7.2. Феномен перемежаемости ВРС (112).

Глава 10. Проблема устойчивости и нелинейные феномены variability ритма сердца

10.1. Физиологическая и клиническая интерпретация (124). 10.2. Воспроизводимость и устойчивость (127).

Глава 11. Профилактические аспекты использования ВРС-анализа

11.1. Репродуктивное здоровье: эффективность внедрения методов анализа ВРС в практику женской консультации (133)

Глава 12. Фармакология. Медленноволновые аспекты

12.1. Диагностические задачи в неврологической клинике (135). 12.2. Фармакология. Переход от упрощенных фазовых портретов в состоянии возбуждения к циклическим процессам и улучшению состояния (137). 12.3. Фармакология. Влияние на фрактальную структуру движений в период торможения и возбуждения (137). 12.4. Фармакология. Действие гормонов на ВРС (138). 12.5. Фармакология. Действие гормонов, блокирующих функции яичников (139).

Глава 13. Общие принципы клинического анализа variability ритма сердца для диагностики вегетативных нарушений и тактики лечения

13.1. Этапы диагностики вегетативных нарушений и действий врача на основе анализа ВРС (141). 13.2. Основные принципы анализа variability ритма сердца (141). 13.3. Трехкомпонентная схема анализа ВРС-синдромов (145). 13.4. Показания к исследованию variability ритма сердца в клинике (148). 13.5. Основания для направления в лабораторию (148).

Заключение

Список литературы

Словарь определений некоторых терминов и понятий нелинейной динамики, использованных в руководстве

Об авторе и лаборатории

Лаборатория физиологии медленных волновых процессов НИИ КППЗ СО РАМН

Приложение А. Оглавление ранее изданной монографии, статей, симпозиумов и школ 1999–2007 гг.

Приложение Б. Контрольные задания к главам

Список сокращений

РЕЦЕНЗИИ СПЕЦИАЛИСТОВ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ

Сердечный ритм как полигон нелинейной динамики

На сегодняшний день, ввиду чрезвычайной сложности процессов, протекающих в организме человека, и несмотря на бурное развитие прикладных наук (математики, физики, биологии, химии, компьютерных методов и др.), отсутствует сколь угодно адекватная модель кардиодинамических процессов, способная в какой-либо степени помочь в постановке диагноза и/или дать прогноз развития болезни. Именно поэтому большинство клинических исследований в этой области основаны на анализе электрокардиограмм (ЭКГ) и изучении ряда других регистрируемых сигналов. К числу несомненных преимуществ такого подхода можно отнести относительную простоту, доступность, неинвазивность и высокую информативность.

Изучение нарушений работы нормального сердечного ритма, основанные на анализе ЭКГ, ведутся уже не один десяток лет. Но, к сожалению, до сих пор в обычной клинической практике ограничиваются лишь самыми элементарными методами. В то же время имеется целый ряд методик, которые могут помочь при исследовании состояния пациента, основанного на анализе его кардиодинамики. Были получены новые результаты, в основном, в области, называемой теорией динамических систем, которая относится к математике. Однако успехи этой теории в прикладном аспекте позволяют надеяться, что полученные здесь результаты будут очень полезны как в прогностическом плане, так и при постановке первичного диагноза.

Существует большое число функционально важных систем, участвующих в регуляции кардиодинамики, для которых пока отсутствуют адекватные модели, но в то же время необходим анализ и прогноз их состояний. Это привело исследователей к разработке большого числа разнообразных подходов. Исходя из цели идентификации состояний пациентов с различными патологическими процессами, в монографии А.Н. Флейшмана описаны новые методы исследования вариабельности ритма сердца (BPC).

Международные рекомендации, посвященные анализу BPC (см., например, *Heart Rate Variability. Standards of measurement, physiological interpretation, and clinical use / Task Force of the European Society of Cardiology and the North American Society of Pacing and Electrophysiology // Circulation. – 1996*), основаны преимущественно на простых статистических исследованиях и поэтому они дают ограниченную информацию о функциональном состоянии человека и не отвечают на многие вопросы практической работы. С другой стороны, медицина и физиология нуждаются в новых общеметодических подходах для решения фундаментальных проблем регуляции необычайно сложного функционирования организма, его взаимоотношения с окружающей средой. Такие принципиально новые подходы сегодня содержатся в современных теориях сложных систем нелинейной динамики, синергетики, проблемах хаоса и порядка.

Рецензируемая книга посвящена феноменам нелинейной динамики BPC и ее практическим приложениям. По существу, это одна из немногих в нашей стране книг подобного рода, где большинство нелинейных феноменов представлено не только в виде математических формул, но также в форме конкретных приложений, имеющих медицинское и физиологическое содержание.

В основе книги – результаты многолетних исследований руководимого автором междисциплинарного коллектива, где наряду с врачами, физиологами работают программисты, физики, математики.

Книга состоит из Введения, 13 глав и Заключения, написана преимущественно на материале собственных исследований, которые включают более 5 тыс. наблюдений. При этом почти каждая глава содержит новые данные. В методике анализа сложных физиологических процессов ВРС автор использует как традиционные, рекомендованные ранее показатели (временные, частотно-спектральные показатели, Фурье анализ), а также современные нелинейные инструменты анализа: фазовые портреты ВРС, детрентно-флуктуационный анализ, энтропия, непрерывный вейвлет-анализ, а также нелинейные физиологические модели поведения ВРС – энергетические, нейрогенные, онтогенетические и другие. Заслугой автора является новая комбинативная классификация ВРС, сочетающая классификации изменений энергетики колебательных процессов, спектрального профиля и фазовых портретов. Также впервые описана классификация клинико-медленноволновых синдромов.

Большое значение в монографии придается изменениям энергетики колебательных процессов. Был выделен экспериментально нормированный «коридор» изменений мощности околominутных ритмов колебаний ВРС при спокойном бодрствующем состоянии и нагрузок малой интенсивности (углубленное дыхание, счет в уме) в который стремятся возвратиться колебания ВРС после нагрузочных тестов. Колебания ВРС ниже нормированного энергетического «коридора» и выше было подчинено нелинейным закономерностям. Нарушение медленноволнового гомеостаза ВРС влекло за собой усиление взаимоотношений между макроколебаниями ВРС и процессами, протекающими на клеточном уровне (обменными, дыхательными и т.д.). Положенная в основу анализа функционального состояния человека нелинейная энергетическая классификация ВРС и ее взаимоотношение с обменными и иммунными процессами привела к развитию понимания энергодефицитных состояний и их коррекции. Разработанная классификация ВРС нашла хорошее клиническое применение и успешно используется в течение многих лет. Классификация стала обязательным первым этапом последовательных шагов анализа ВРС в клинике.

В I главе рассматриваются основные задачи и цели изучения нелинейных процессов в клинике. Дается сравнительная оценка детерминистских и вероятностных подходов. Эта глава вводит в курс динамических аспектов ВРС. Популярно рассмотрены некоторые показатели, используемые в нелинейной динамике, а также их особенности. Сравняются традиционные детерминистические подходы к анализу ВРС и современные представления об особенностях нелинейных динамических регуляций волновых процессов. Описывается, что дают дополнительные характеристики ВРС для клинической практики.

Во II главе даны определения медленных колебаний гемодинамики и ВРС, обсуждается природа медленных колебаний ВРС: энергетические процессы, нейровегетативная регуляция и процессы самоорганизации, актуальность ВРС в клинических исследованиях, недостатки международных стандартов и рекомендации ранее опубликованных рекомендаций.

В III главе представлены методы регистрации и алгоритмы анализа ВРС. Здесь описываются методические аспекты анализа ВРС и реоэнцефалограмм. Подчеркиваются достоинства анализа фазовых портретов ВРС, теория детрентного флуктуационного анализа и аппроксимированной энтропии. Представлены протоколы исследования, алгоритмы анализа и математические методы получения первичных характеристик ВРС.

В IV главе подробно излагаются физиологические основы анализа ВРС, многофакторный вклад в регуляцию ВРС различных систем организма, описываются энергетические аспекты ВРС, с том числе показатель Херста (Hurst). Кроме того, дается определение медленно волнового гомеостаза и физиологическая интерпретация частотных характеристик. Описана также сложная двухкомпонентная структура очень медленных колебаний (VLF) и схема фрактальной повторяемости свойств колебательных процессов в организме.

V глава посвящена важнейшей проблеме комплексной классификации ВРС – описанию различных типов энергоизмененных состояний, вегетативного профиля и фазовых портретов.

В VI главе представлены результаты исследований медленно волновых кардиодинамических синдромов и дана их классификация. Подчеркивается, что это интегральные понятия, на основе которых базируется патогенетическая терапия и прогноз в клинических исследованиях. Выделено 7 синдромов: энергодефицитные, гиперадаптивные, барорецепторные, синдром устойчивой парасимпатикотонии, нелинейные, циклические, нормативные. Протоколы исследования включают графическое представление информации со сводной таблицей показателей в цифровом виде как линейных, так и нелинейных, а также график динамики изменений трехкомпонентного спектра ВРС в 5 этапах исследования.

В VII главе подробно излагаются генетические аспекты ВРС, которые получены на основе литературных данных зарубежных и отечественных исследований, а также собственных наблюдений.

В VIII главе описываются медицинские аспекты нелинейной динамики ВРС. Феномены нелинейной динамики сведены в таблицу и подробно проиллюстрированы на собственном материале. Дается понятие сложности фазового портрета, исследуются процессы самоорганизации, феномены перемежаемости, типы предельных циклов и модели их формирования.

IX глава представляет собой сжатое описание вейвлет-анализа ВРС и модели кардио-респираторной синхронизации.

X глава посвящена проблемам устойчивости ВРС с точки зрения физиологической и медицинской интерпретации.

В XI главе излагаются профилактические аспекты использования анализа ВРС, в частности в области физиологии труда, процессах утомления, а также репродуктивного здоровья.

XII глава посвящена новым медленно волновым аспектам фармакологии и выбору медикаментозной терапии.

В главе XIII приведены результаты исследования значений анализа ВРС в диагностике и патогенетической терапии. Подводятся итоги основных достижений нелинейно-динамических подходов. Предлагаются алгоритмы диагностики и тактики врачебной деятельности на основе ранее найденных нелинейных закономерностей и классификации ВРС. Обсуждаются актуальные синдромологические подходы в диагностике и лечении. Предлагается схема рассмотрения основных клинко-медленноволновых синдромов в трех направлениях:

1. Описание признаков ВРС совместно с клиническими проявлениями болезни и физиологической их интерпретацией.
2. Выявление источников и причин этих изменений.

3. Планирование или стратегия патогенетической терапии на основе комплексного клинко-физиологического обследования.

В Заключении рассматриваются перспективы дальнейшего совершенствования методов анализа ВРС, в том числе влияния шума и психологических факторов на вегетативную регуляцию и особенности поведения ВРС при положительных и отрицательных эмоциях. Приводятся классификации нарушений вегетативной нервной системы, при которых анализ ВРС может быть эффективно использован.

В конце пособия представлен список литературы, содержащий 245 источников, и дан словарь определений и терминов нелинейной динамики, используемых в руководстве.

Монография хорошо иллюстрирована (67 рисунков, 10 таблиц) и написана вполне доступным для врача языком. Она окажется полезной специалистам, интересующимся данной проблемой, студентам и аспирантам медицинских вузов. Кроме того, книга является хорошим пособием для дальнейшего углубления знаний в области прикладной нелинейной динамики и поэтому может быть рекомендована для издания в качестве методического руководства по современному анализу ВРС в клинической практике.

А.Ю. Лоскутов, профессор МГУ

...Нелинейная динамика продолжает завоевывать позиции научного направления, формирующего базу для важнейших приложений. Изучение живых систем, решение задач физиологии, медицинской диагностики, экономики, климатологии в настоящее время проводится с использованием методов, многие десятилетия развиваемых математиками, радиофизиками, исследователями течений. Ярким примером тому является книга «Вариабельность ритма сердца и медленные колебания гемодинамики (нелинейные феномены в клинической практике)» доктора медицинских наук А.Н. Флейшмана, в сферу научных интересов которого входят неврология, клиническая патофизиология, функциональная диагностика психосоматических нарушений, заболеваний и повреждений нервной системы...

Книга должна вызвать интерес широкого круга читателей нашего журнала примерами специфического использования многих известных им методов представления информации и обработки сложных сигналов – от построения фазовых портретов и анализа бифуркаций до вейвлет-анализа записей временных рядов. В структуре книги проявился и богатый педагогический опыт автора – в ней несколько информативных приложений, словарь определений, богатая библиография.

Б.П. Безручко, профессор СГУ