

Журнал включен в «Перечень периодических научных и научно-технических изданий РФ,
рекомендованных для публикации основных результатов диссертаций
на соискание ученой степени доктора наук»

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений
ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА
научно-технический журнал

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 18, № 3 (103), 2010, Саратов

СО Д Е Р Ж А Н И Е

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ	
<i>Филатова А.Е., Артемьев А.Е., Короновский А.А., Павлов А.Н., Храмов А.Е.</i> Успехи и перспективы применения вейвлетных преобразований для анализа нестационарных нелинейных данных в современной геофизике	3
ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС	
<i>Кузнецов С.П., Соха Ю.И.</i> Гиперхаос в модельной неавтономной системе с каскадной передачей возбуждения по спектру	24
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН	
<i>Иванченко М.В.</i> Конкуренция в двухкомпонентной модели ансамбля иммунных Т-клеток	33
<i>Петров В.С., Осипов Г.В.</i> Влияние пассивных элементов на синхронизацию осцилляторных ансамблей	46
<i>Корюкин И.В.</i> Идентичная хаотическая синхронизация некогерентно связанных полупроводниковых лазеров и двунаправленная передача информации	60
<i>Куликова Н.В., Хмелевская В.С., Бондаренко В.В.</i> Самоподобие на разных масштабных уровнях в облученных металлических материалах	70
АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ	
<i>Курушина С.Е., Иванов А.А.</i> Диссипативные структуры в системе реакция-диффузия в поле мультипликативных флуктуаций	85
НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ	
<i>Куркин С.А., Короновский А.А., Левин Ю.И., Храмов А.Е.</i> Широкополосная хаотическая генерация и оптимизация ее характеристик в СВЧ-генераторе с электронной обратной связью и магнитной периодической фокусирующей системой	104
<i>Баланов А.Г., Короновский А.А., Сельский А.О., Храмов А.Е.</i> Влияние температуры на дрейфовую скорость электронов в полупроводниковой сверхрешетке в продольном электрическом и наклонном магнитном полях	128
БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ	
<i>Пономаренко В.П.</i> Бифуркации и колебательные режимы в сложной системе с фазовым управлением	140
НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. СОЛИТОНЫ	
<i>Давидович М.В., Стефюк Ю.В.</i> Нелинейное прохождение электромагнитной волны через слой с квадратичной и дробно-полиномиальной зависимостями диэлектрической проницаемости	160
ДЕБЮТ	
<i>Васильев А.А., Волощук С.С.</i> О влиянии отражений и затухания в ЛОВ на величину первого резонансного пика амплитуды выходного сигнала на начальном этапе переходного процесса	178
МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ	
Моделирование нелинейной динамики глобальных процессов. <i>Под ред. И.В.Ильина, Д.И. Трубецкова</i>	183
КНИЖНАЯ ПОЛКА СТУДЕНТА	
<i>Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е.</i> Лекции по нелинейной динамике	186
<i>Кудряшов Н.А.</i> Методы нелинейной математической физики	192
Правила для авторов	195

CONTENTS

REVIEWS OF ACTUAL PROBLEMS OF NONLINEAR DYNAMICS

- Filatova A.E., Artemiev A.E., Koronovskii A.A., Pavlov A.P., Hramov A.E.* Progress and prospect of wavelet transform application to the analysis of nonstationary nonlinear dates in contemporary geophysics..... 3

DETERMINISTIC CHAOS

- Kuznetsov S.P., Sokha Yu.I.* Hyperchaos in model nonautonomous system with a cascade excitation transmission through the spectrum..... 24

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATIONS AND WAVE THEORY

- Ivanchenko M.V.* Competition in the two-component model of the immune T-cell ensemble.. 33
Petrov V.S., Osipov G.V. Influence of passive elements on the synchronization of oscillatory ensembles..... 46
Koryukin I.V. Identical chaotic synchronization and bidirectional message transmission in incoherently coupled semiconductor laser diodes 60
Kulikova N.V., Khmelevskaya V.S., Bondarenko V.V. Self-similarity at different scale levels in irradiated solid materials..... 70

AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION

- Kurushina S.E., Ivanov A.A.* Dissipative structures of reaction–diffusion system simulation in multiplicative fluctuation phone 85

INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

- Kurkin S.A., Koronovskii A.A., Levin Yu.I., Hramov A.E.* Wideband chaotic generation and optimization of characteristics in microwave generator with electronic feedback and magnetic periodic focusing system..... 104
Balanov A.G., Koronovskii A.A., Selskii A.O., Hramov A.E. Temperature effect on drift velocity of electrons in superlattice in electric and tilted magnetic fields..... 128

BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS

- Ponomarenko V.P.* Bifurcations and oscillatory modes in complex system with phase control 140

NONLINEAR WAVES. SOLITONS

- Davidovich M.V., Stephuk J.V.* Nonlinear electromagnetic wave passing through the layer with quadratic and fractionally-polynomial permittivity dependences on amplitude.. 160

DEBUT

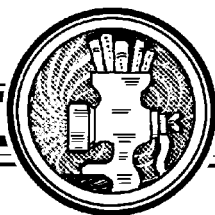
- Vasiliev A.A., Voloshchuk S.S.* Influence both of reflections and dissipation in the backward-wave oscillator on first resonance peak of amplitude at the transient beginning 178

MODELING OF GLOBAL PROCESSES

- Modeling Nonlinear Dynamics of Global Processes. *Eds. I.V. Iljin, D.I. Trubetskoy* 186

STUDENT'S BOOKSHELF

- Anishchenko V.S., Vadivasova T.E.* Lectures on Nonlinear Dynamics..... 186
Kudryashov N.A. Methods of Nonlinear Mathematical Physics 192
 Author's rules..... 195



УСПЕХИ И ПЕРСПЕКТИВЫ ПРИМЕНЕНИЯ ВЕЙВЛЕТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ АНАЛИЗА НЕСТАЦИОНАРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДАННЫХ В СОВРЕМЕННОЙ ГЕОФИЗИКЕ

*А.Е. Филатова, А.Е. Артемьев, А.А. Короновский,
А.Н. Павлов, А.Е. Храмов*

Работа представляет собой обзор и анализ современного состояния методов геофизических исследований на основе вейвлетных преобразований. Отмечаются существующие проблемы и перспективы применения вейвлетного анализа при решении задач обработки и интерпретации геофизических материалов сейсмической разведки. Предлагается новый метод диагностики волн-помех звукового и поверхностного типов по данным наземной сейсморазведки.

Ключевые слова: Вейвлетный анализ, геофизика, сейсморазведка, временной ряд, полезные ископаемые.

Введение

Многие процессы в окружающем мире являются нестационарными и демонстрируют изменения во времени статистических свойств. Анализ соответствующих экспериментальных данных на основе классических вероятностных и спектральных методов зачастую приводит к проблемам в интерпретации полученных результатов. К настоящему времени достигнут значительный прогресс в создании новых, более эффективных методов исследования нестационарных процессов, наиболее известным среди которых является вейвлетный анализ [1–3]. Первоначально он был предложен в качестве альтернативы классическому спектральному анализу, но почти сразу после своего появления вейвлетный анализ стал восприниматься в качестве инструмента прикладных исследований практически во всех естественных науках и многих областях техники. Основной областью применения данного математического аппарата в естествознании является обработка нестационарных (во времени) и/или неоднородных (в пространстве) случайных и хаотических процессов [4–10]. Именно поэтому вейвлетный анализ представляет значительный интерес для геофизических наук, открывая новые возможности цифровой обработки данных сейсморазведки.

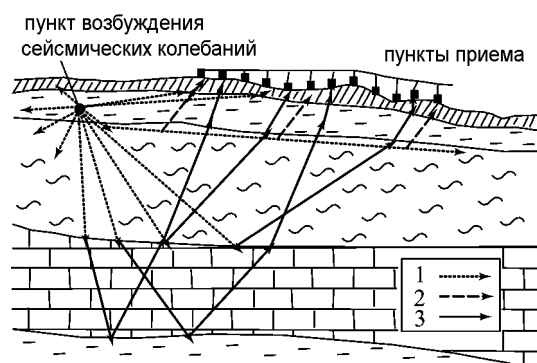


Рис. 1. Схема полевых сейсморазведочных работ. Лучи упругих волн: 1 – прямые и проходящие волны, 2 – преломленные, 3 – отраженные

Российской Федерации в Западной и Восточной Сибири, Поволжье, Прикаспийской впадине, Тимано-Печорском регионе. В результате проведения экспериментальных полевых работ получают исходные материалы для решения поставленных геологических задач.

На сегодняшний день преобладающая часть полевых сейсморазведочных работ ведется на основе метода отраженных волн. На рис. 1 приведена условная схема полевых сейсмических наблюдений. На ней показаны траектории некоторых волн (прямых, преломленных, отраженных), возбуждаемых взрывом заряда в неглубокой скважине и принимаемых на поверхности в ряде точек с помощью сейсмоприемников, подключаемых через многоканальный кабель к сеймостанции, осуществляющей запись колебаний и, возможно, их первичную обработку.

Извлечение полезной геологической информации из полевых сейсмических записей происходит в процессе камеральных геофизических работ – обработки и интерпретации. При этом получение искомой геолого-геофизической информации о разрезе базируется на решении обратной задачи теории сейсморазведки – задачи определения сейсмогеологических параметров среды на изучаемой территории по наблюдаемому в ходе экспериментальных полевых работ полю упругих волн. Решение обратной задачи теории сейсморазведки предполагает многоэтапную обработку, включающую ослабление колебаний-помех различного характера, расчет и коррекцию статических и кинематических поправок, корректирующую фильтрацию сейсмозаписей и многие другие.

В современной геофизической сейсмической разведке можно выделить два основных подхода к обработке полевых сейсмических материалов – кинематическая и динамическая обработка. Первый подход – **кинематическая обработка** – позволяет по наблюдаемым временам прихода фронтов полезных отраженных волн восстановить положение отдельных сейсмических границ и изучить в первом приближении распределение скоростей в среде. На сегодняшний день кинематическая обработка сейсмоматериалов является на практике преобладающей и позволяет проводить последующую структурную интерпретацию сейсмогеологических разрезов. Однако, современное состояние запасов и темпов освоения нефтяных месторождений обуславливает необходимость существенного повышения разрешенности и точности методов сейсморазведки для изучения продуктивных пластов мелких залежей и доизучения старых площадей, что достигается с помощью второго подхода – **динами-**

В настоящее время сейсмическая разведка является ведущим методом геофизических исследований земной коры, лидирующее положение которого обуславливается большой глубиной при высокой детальности исследований. Сейсморазведка играла и играет важную, а подчас преобладающую роль в задачах прогнозирования литологического состава и нефтегазоносности глубоко залегающих отложений при освоении крупнейших нефтегазоносных провинций на территории

ческой обработки, основанной на одновременном количественном и качественном анализе как времени прихода, так и формы и интенсивности зарегистрированных сейсмических колебаний. В настоящее время именно динамическая обработка является ведущим направлением развития новых методов и алгоритмов камеральных сейсморазведочных сухопутных исследований. Быстрое и эффективное совершенствование методов обработки позволяет утверждать, что в недалеком будущем на основе подходов динамической обработки станет возможным получение важных и достоверных сведений не только о форме сейсмических границ, но и о характере распределения во всем разрезе акустической жесткости и коэффициентов поглощения упругих волн.

Целью динамической обработки является извлечение из материалов сейсморазведки дополнительной информации о тонких особенностях строения изучаемой геологической среды, а именно:

- восстановление истории формирования осадочной толщи в районе исследований;
- изучение детальных особенностей структуры геологических границ и фациального состава отдельных слоев;
- установление наличия и типа флюидов в слоях и т. п.

Для решения перечисленных задач все процедуры обработки должны быть выполнены в режиме сохранения относительных амплитуд сейсмических колебаний для всего временного интервала их регистрации. Отметим, что при динамической обработке полевых данных сейсмической разведки наиболее остро встает проблема аккуратного и тщательного анализа зарегистрированных приемным устройством многих десятков тысяч отраженных волн, из которых полезными, несущими извлекаемую информацию, являются лишь десятки. В качестве характерного примера можно выделить задачу фильтрации зоны регистрации помех, обусловленных звуковыми и поверхностными волнами (волны Релея, Лява и др.). Для решения задачи подавления наблюдаемых волн-помех и шумов в мировой и российской практике используются различные методы – алгоритмы, основанные на полосовой фильтрации в частотно-пространственной области, фильтрации в области частота–волновое число, медианной фильтрации и некоторые другие. Общими недостатками указанных алгоритмов являются: во-первых, неспособность метода сохранить полезную информацию, содержащуюся в сейсмическом сигнале и осложненную зарегистрированными высокоинтенсивными волнами-помехами; во-вторых, в районах сейсморазведочных работ, характеризующихся своеобразным рыхлым строением приповерхностной зоны, спектральный состав регистрируемых помех рассматриваемого типа ограничивает возможности частотной селекции полезной и шумовой компонент сигнала. Кроме того, поверхностные сейсмогеологические условия и петрофизические характеристики района проводимой сейсморазведки могут быть весьма изменчивы, что приводит к сильным пространственно-временным вариациям кинематических и динамических характеристик звуковых и поверхностных волн, что, в конечном итоге, делает невозможным осуществление их фильтрации в автоматическом режиме. Увеличение количества ручной работы приводит к удорожанию проводимых исследований и увеличению сроков их проведения. Создание новых методов на основе традиционных алгоритмов и их модификаций оказывается, как правило, весьма сложным и неэффективным. Все это делает актуальным разработку методов на основе сравнительно

новых для области практической разведочной геофизики современных алгоритмов, таких как вейвлетный анализ, который бы позволил провести не только автоматизацию некоторых стадий обработки, но и обеспечить высокую степень сохранности полезной сейсмической информации.

В последние годы в области камеральных работ разведочной геофизики интерес к исследованиям с использованием вейвлетов постепенно растет. Однако большинство работ, результаты которых внедряются в практику сейсморазведки, связано с применением быстрого дискретного вейвлет-преобразования для сжатия данных и кратномасштабного анализа в задачах очистки сигналов от высокочастотных шумов [11, 12]. Тем не менее, возможности вейвлетного анализа отнюдь не ограничиваются решением подобных задач и могут быть успешно использованы для цифровой обработки сигналов разведочной сейсмической геофизики как инструмент анализа и фильтрации различных компонент зарегистрированных колебаний, например, разделения полезной отраженной волны и паразитных звуковых, поверхностных или частично- и полнократных волн. В частности, вейвлет-анализ может эффективно применяться для распознавания близких по форме, интенсивности и частотным характеристикам сигналов на фоне шума. Кроме того, большие возможности вейвлетного преобразования для анализа конкретных особенностей натуральных сигналов позволяют осуществлять простую и эффективную фильтрацию диагностируемых паразитных компонент зарегистрированных данных. Публикации результатов многочисленных исследований, проводимых в различных областях естествознания [2, 8, 13, 14], неопровержимо доказывают, что вейвлет-анализ представляет собой мощный инструмент исследования, применимый к коротким, зашумленным, многокомпонентным и нестационарным процессам. Поскольку именно такие процессы регистрируются и являются предметом дальнейшей обработки при разведочных геофизических сейсмических работах, развитие методов, базирующихся на вейвлет-преобразовании, является актуальной задачей современной геофизики.

Данная работа посвящена обзору известных из научных источников примеров современного использования вейвлетного преобразования в камеральных геофизических работах и рассмотрению возможностей более широкого применения методик на основе данного подхода.

1. Анализ на основе вейвлетного преобразования в современной разведочной геофизике

Терминология «вейвлетов» (от англ. *wavelet*, что в дословном переводе означает «маленькая волна») сформировалась в восьмидесятих годах двадцатого века [1]. Первоначально данный математический аппарат был предложен в качестве альтернативы классическому спектральному анализу, основанному на преобразовании Фурье. Возникновение теории вейвлетов считается одним из важнейших событий в математике за последние десятилетия, поскольку это, пожалуй, единственная новая математическая концепция, которая сразу же после ее появления стала восприниматься в качестве инструмента *прикладных* исследований практически во всех естественных науках и многих областях техники [2, 3, 7]. В настоящее время вейвлеты широко используются при решении задач анализа и синтеза различных сигналов, для обра-

ботки изображений, для сжатия больших объемов информации и цифровой фильтрации, для распознавания образов, при изучении сильно развитой турбулентности, при решении некоторых дифференциальных уравнений и т.п. Применения вейвлетов известны в радиофизике, нелинейной динамике, акустике, оптике, физике твердого тела, сейсмологии, динамике жидкостей, биологии и медицине, экономике и т.д.

Начнем изложение современного применения анализа на основе вейвлетного преобразования с краткого математического экскурса в данный метод. Непрерывное вейвлетное преобразование осуществляется путем свертки

$$W(s, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{s, t_0}^*(t) dt \quad (1)$$

анализируемой функции $f(t)$ с двухпараметрической вейвлетной функцией $\psi_{s, t_0}(t)$, которая получается из материнского вейвлета $\psi_0(t)$ посредством масштабных преобразований и сдвигов по времени

$$\psi_{s, t_0}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi_0\left(\frac{t - t_0}{s}\right). \quad (2)$$

Параметр s , называемый масштабом вейвлетного преобразования ($s \in \mathbb{R}^+$), отвечает за ширину вейвлета, а $t_0 \in \mathbb{R}$ — параметр сдвига, определяющий положение вейвлета на оси t . За подробным описанием математических тонкостей выбора вида функции материнского вейвлета, численной реализации вейвлетного преобразования и связи вейвлетных временных масштабов и частот классического спектрального анализа отсылаем читателя к многочисленным обзорным статьям и монографиям, посвященных изложению основных понятий и сущности вейвлетного преобразования (например, [2, 7, 13, 14]).

Одними из первых практических приложений вейвлетного преобразования стали анализ и изучение временных рядов геофизической природы, полученных в ходе наблюдений за сейсмической активностью [15, 16], изменениями метеорологических параметров того или иного атмосферного или океанического процесса [17–22] и т. п. В настоящее время методы на основе вейвлетного преобразования используются в теории магнитного поля Земли [23], метеорологии [24–26], геодезии [27], гравиразведке [11, 28], магниторазведке [12] и электроразведке [29]. В работах [30, 31] рассмотрены возможности применения вейвлетного преобразования для решения обратных задач геофизики. Как известно, обратные задачи геофизики являются некорректно поставленными задачами. В упомянутых работах вейвлетные преобразования используются в контексте классического метода регуляризирующего функционала А.Н. Тихонова. Тем не менее, отметим, что потенциальные возможности методов на основе вейвлетного анализа при обработке геофизических данных исчерпаны далеко не в полной мере. В первую очередь, сказанное относится к обработке данных ведущего метода при нефтегазопроисловых работах – сейсморазведки, в области которой авторы настоящей работы занимаются обработкой данных. Учитывая сложность и стоимость проведения сейсмической съемки, разработка алгоритмов детального анализа сейсмических волновых полей, позволяющих максимизировать получаемую информацию и проводить корректные преобразования данных, остается актуальной

проблемой во всем мире. Автоматизация процессов цифровой обработки и геологической интерпретации данных, дающая значительную экономию времени и трудозатрат, также является важной на сегодняшний день задачей. В настоящее время во многих российских геофизических организациях до сих пор преобладают устаревшие методы обработки данных, не использующие современные подходы к анализу нестационарных полей. Для решения этих проблем требуется не только разработка новых и усовершенствование старых алгоритмов обработки, но и разработка их эффективных программных реализаций. За последнее десятилетие работы, посвященные применению вейвлет-анализа, уже продемонстрировали его эффективность во многих областях геофизики. Тем не менее, как показывает практика, основанные на этом преобразовании алгоритмы практически не внедрены в процессы обработки российских геофизических организаций. Это обусловлено недостатком доступных практических реализаций и сравнительно малым количеством подробных работ, посвященных применению вейвлет-анализа в конкретных геофизических задачах на русском языке, в то время как практическая заинтересованность в анализе на основе этого преобразования существует и возрастает.

К числу наиболее перспективных направлений применения вейвлетного преобразования в сейсморазведке относятся следующие два направления.

1. Селекция упругих волн различных типов, с целью максимизации соотношения сигнал/помеха (задача фильтрации).

2. Расчет информативных атрибутов сейсмической записи, позволяющих извлекать полезную информацию о петрофизических свойствах горных пород, а также диагностировать зоны, представляющие повышенный интерес в нефтегазопроисхождении (задача прогнозирования геологического разреза и прямого прогноза нефтегазоносности).

Кроме этого, определенный интерес могут представлять следующие направления.

- Решение обратных динамических задач сейсморазведки.
- Задача выбора оптимальных управляющих сигналов при вибросейсморазведке.
- Сжатие информации.

Начнем изложение материалов обзора, посвященного использованию вейвлетного анализа в геофизике, с рассмотрения работ, целью которых является повышение отношения сигнал/шум. Отметим, что проведение вейвлетной фильтрации в современных практических приложениях является весьма востребованным, часто используемым и перспективным для различных целей. В качестве одного из успешных примеров приведем цифровую обработку фото- и видеоинформации, осуществляемую с помощью дискретных вейвлетов [26]. Тем не менее, как показывает анализ доступных современных источников, задачам подавления волн-помех, регистрируемых на геофизических материалах, посвящено крайне мало научных работ.

Из известных публикаций [24, 26, 32, 33] выделим направление, посвященное разработке оптимального фильтра, основанного на одномерном вейвлет-преобразовании. В качестве материнского вейвлета использовались вейвлеты DOG-семейства, хотя данный класс базисных вейвлетных функций не является оптимальным для решения поставленной задачи. Результаты прямого вейвлетного преобразования (скейлограммы, скейлограммы и т. д.) в явном виде в работе [24] не приводятся, поэто-

му оценить эффективность диагностики волн-помех, содержащихся в сейсмических записях, не представляется возможным. В качестве результата приведены сейсмограммы до и после применения фильтрации основанной на вейвлет-преобразовании, а также их разность – то есть отфильтрованные помехи (рис. 2). Следует отметить, что приведенные на рис. 2 сейсмограммы не являются характерными для наземной сейсмической разведки, а вычтенные помехи нельзя идентифицировать как волны-помехи поверхностного типа, заявленные для фильтрации в публикации. Скорее, на представленных рисунках наблюдаются кратно-преломленные волны-помехи, для вычитания которых в камеральных работах сейсморазведки давно и успешно применяются другие методы (например, алгоритмы многоканальной веерной режекторной фильтрации в области частота–волновое число). Тем не менее, в ряде публикаций продемонстрированы результаты эффективного применения фильтрации на основе вейвлетного преобразования для подавления волн-помех различных классов (например, работы [26, 33]). Особо отметим работу [33], в которой приводятся сравнительные оценки использования для фильтрации вейвлетного преобразования на основе стандартного базисного Морле-вейвлета и адаптивных (зависящих от исходных данных) материнских вейвлетных функций. К сожалению, в указанной работе рассматриваются только отдельные сейсмические трассы и сигналы, без приведения полных сейсмограмм, а также отсутствует окончательный результат – сейсмограммы, очищенные от волн-помех. Рис. 3 иллюстрирует результаты применения адаптивного анализирующего вейвлета в сравнении со стандартным материнским вейвлетом Морле. Из рис. 3 наглядно видно, что адаптивный вейвлет обладает более высокой разрешающей способностью как в частотной, так и во временной областях. Аналогичные результаты по высокому качеству анализа сигналов с помощью адаптивных вейвлетов были получены и в ряде других работ [34, 35] при анализе сигналов негеофизической природы.

Отметим, что выбор анализирующего материнского вейвлета является одним из ключевых вопросов для проведения успешной обработки любых сложных сигналов и, в частности, записей сейсмической разведки. Материнский вейвлет должен

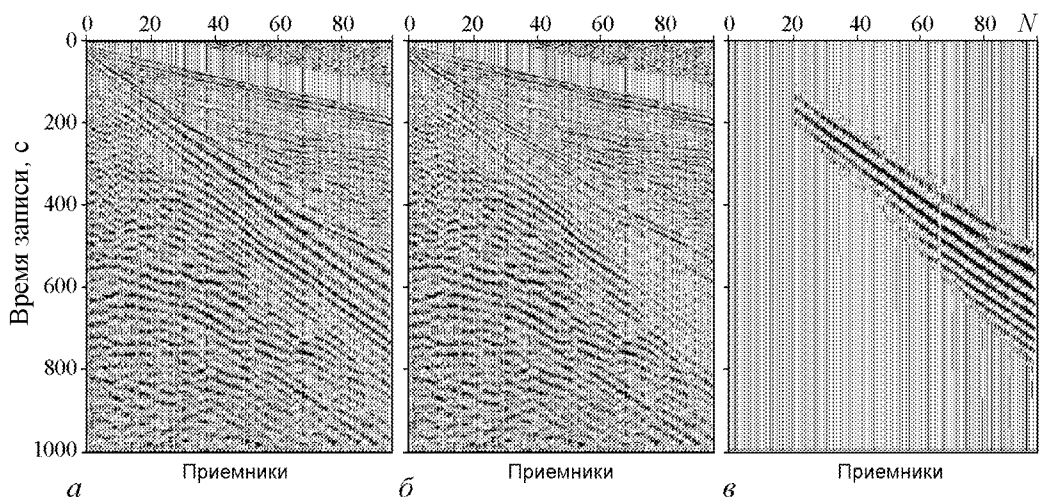


Рис. 2. Результаты применения вейвлет-фильтрации к сейсмическим данным: *a* – исходные данные; *б* – результат фильтрации; *в* – вычтенные помехи (из работы [24])

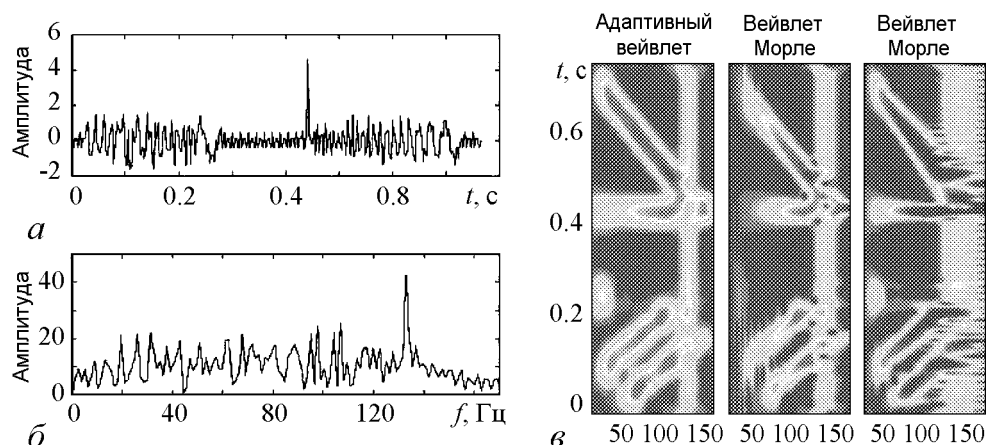


Рис. 3. Сопоставление результатов применения различных анализирующих вейвлетов: *a* – исходный сейсмический сигнал; *b* – амплитудно-частотный спектр сейсмической записи; *в* – результаты преобразования анализируемой трассы, полученные с помощью адаптивного вейвлетного базиса и материнского Морле-вейвлета с параметрами $\omega_0 = 6.0$ и $\omega_0 = 16.0$ (из работы [33])

быть максимально приближен к классу функций, описывающих сигнал. Иными словами, желательно, чтобы форма материнской вейвлетной функции отражала поведение сигнала и его составляющих.

Однако сложность адекватного выбора базисной функции заключается в том, что зарегистрированный сейсмический сигнал представляет собой суперпозицию полезных волн и волн-помех, подлежащих фильтрации. Поэтому целесообразность использования адаптивного вейвлета, то есть импульса, извлеченного непосредственно из исходных полевых данных, является спорной и требует тщательного исследования. Авторы настоящей работы, опираясь как на имеющийся обширный опыт практического использования непрерывного вейвлетного анализа в различных областях естествознания (нелинейная динамика, СВЧ-электроника, нейрофизиология и так далее [7, 36–39]), так и на изученные работы в области прикладной геофизики, предлагают следующие варианты выбора вида материнской вейвлетной функции.

1. Использование стандартных материнских вейвлетных функций (Morlet, МНАТ и аналогичные).
2. Использование в качестве базисных вейвлетов стандартных функций аналитической аппроксимации отраженного сигнала, принятых в сейсморазведке (например, импульсы Пузырева, Берлаге, Риккера, Клаудера [40, 41]).
3. Поиск аналитических аппроксимаций сигналов волн-помех, подлежащих исключению.
4. Тестирование адаптивных вейвлетов.

Очевидным и главным преимуществом первого и второго вариантов является простота их реализации. Одновременно, лежащим на поверхности недостатком первого и второго методов является сильная переменность вида колебаний, регистрируемых при геофизических разведочных полевых работах, проводимых в различных сейсмогеологических и петрофизических условиях. Однако для ряда территорий со сходными характеристиками вполне можно выбрать заданную форму материнской функции вейвлетного преобразования, позволяющей решить задачи анализа и фильтрации требуемых волн-помех. Наименее перспективным авторам представляется

решение поставленной задачи по третьему пути развития, поскольку поиск аналитических аппроксимаций сигналов волн-помех представляет собой предмет отдельной обширной научно-технической проблемы, решение которой является нетривиальным, а для ряда ситуаций определено не существующим. Значительно проще с технической точки зрения численной реализации выглядит четвертый вариант, заключающийся в использовании адаптивного вейвлет-анализа. Кроме того, важным преимуществом использования адаптивного вейвлетного анализа для изучения сейсмических колебаний является возможность точной настройки создаваемых фильтров на конкретные особенности сигналов, отражающие строение изучаемой геологической среды.

Проводя обзор современных методов обработки на основе вейвлетного преобразования, на первое место следует поставить широко используемое в практике сейсморазведочных работ преобразование Габора [42], являющееся модификацией оконного преобразования Фурье и, своего рода, прообразом вейвлетного анализа. Преобразование Габора Γ^α функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ определяется формулой

$$(\Gamma^\alpha f)(\omega, b) = \int_{\mathbb{R}} (e^{-j\omega t} f(t)) g_\alpha(t - b) dt. \quad (3)$$

Данное преобразование ставит в соответствие функции одного переменного функцию двух переменных. Функция g_α играет роль временного окна:

$$g_\alpha(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}, \quad (4)$$

где α – некоторый фиксированный параметр. Параметр b используется для сдвига окна с целью покрыть всю анализируемую временную область, на которой определена функция $f(t)$. Очевидно, что преобразование Габора $(\Gamma^\alpha f)(\omega, b)$ локализует преобразование Фурье вокруг точки $t = b$.

В работе [43] обработка материалов сейсморазведки производилась с помощью преобразования Габора с целью подготовки сейсмограмм двумерной наземной сейсмической разведки методом обратных волн методики общей глубинной точки для AVO-анализа* – относительно нового, быстро развивающегося метода динамической интерпретации сейсмозаписей.

Из отечественных публикаций, посвященных вейвлетному анализу полевого материала, отметим работы [44–49], в которых на основе одномерных вейвлетных преобразований проводится кратномасштабный анализ нестационарных геофизических полей, в частности, данных, полученных в рамках проведения наземной сейсмической разведки. Такой анализ позволяет изучить полную структуру принятого сигнала, идентифицировать ее составляющие, в частности – выделить и локализовать аномальные, шумовые и полезные информационные компоненты. Однако для полного решения задачи фильтрации необходимо применять эффективные алгоритмы обратного вейвлетного преобразования, позволяющие осуществлять фильтрацию больших массивов экспериментальных данных, количество информации, содержащейся в которых, может исчисляться гигабайтами.

* Amplitude variation with offsets – изменение амплитуд в зависимости от удалений.

Кроме фильтрации сейсмограмм, в современной научной литературе можно обнаружить примеры применения вейвлетного преобразования к фильтрации временных разрезов. Например, в работе [50] исследуются возможности вейвлетного преобразования для подавления случайных (некогерентных) шумов. Для решения этой задачи в современной сейсморазведке обычно применяются различные варианты медианных и когерентных фильтров. Однако в связи с актуальной в последнее время проблемой сохранения истинных динамических характеристик сейсмических записей использование вейвлет-фильтров может оказаться значительно более целесообразным.

Второе из выделенных авторами наиболее перспективных направлений применения вейвлетного анализа в геофизике связано с популярным в настоящее время направлением развития интерпретационных методов – расчетом и анализом так называемых атрибутов сейсмических записей. Следует отметить, что для современной сейсмической интерпретации направление развития атрибутного анализа весьма актуально [51], и в современной научно-технической литературе оно получило значительно более широкое освещение по сравнению с анализом и фильтрацией на основе вейвлетного преобразования полевых записей (сейсмограмм) (например, работы [25, 52–56]). Хорошее и достаточно полное описание применения атрибутного анализа в сейсморазведке приведено в курсе лекций одного из создателей теории динамической интерпретации, профессора Хьюстонского университета К. Марфурта [52, 53]. Согласно [53], атрибуты сейсмической записи, основанные на вейвлетном преобразовании, можно охарактеризовать как одни из наиболее информативных для целей анализа литологического состава, стратиграфических особенностей, а также прямого прогноза перспектив нефтегазоносности геологического разреза. Продолжая тему атрибутного анализа сейсмических записей, выделим работу [54], в которой предлагается атрибут SPICE сейсмической записи. Для вычисления данного атрибута используется одномерное непрерывное вейвлетное преобразование с анализирующим вейвлетом Морле. В результате получают разрезы атрибута SPICE, два из которых приведены на рис. 4.

В верхней части рис. 4 показаны суммарные временные разрезы общей глубинной точки – основные результаты, используемые для интерпретации данных сейсморазведки отраженными волнами. На временном разрезе слева, черным эллипсом отмечен участок, осложненный определенными стратиграфическими особенностями. На временном разрезе справа, хорошо прослеживается дизъюнктивное нарушение – разрыв непрерывности слоистых толщ. В нижней части рисунка приведены соответствующие разрезы атрибута SPICE. По мнению авторов работы [54], эффективность выявления различных стратиграфических особенностей и точность локализации дизъюнктивных нарушений по разрезам атрибута SPICE значительно выше по сравнению с данными стандартной сейсморазведки, и одновременно превосходит уже существующие методы атрибутного анализа, например, расчет мгновенных фаз и частот сейсмических записей.

В русскоязычной литературе вейвлетный анализ временных разрезов рассматривается в работах [46, 57–60]. А.А. Никитин в своей обзорной статье [46] проводит аналогии вейвлетного анализа с давно разработанным и широко применяемым методом – спектрально-временным анализом (СВАН). Технология СВАН основана на непрерывной по времени и по частоте развертке любого геофизического параметра, в том числе сейсмических трасс и кривых ГИС. Метод СВАН подробно описан в работах [61, 62]. Традиционно, при проведении СВАН используются такие параметры волнового поля как видимый период, ширина спектра в различных диапазонах частот

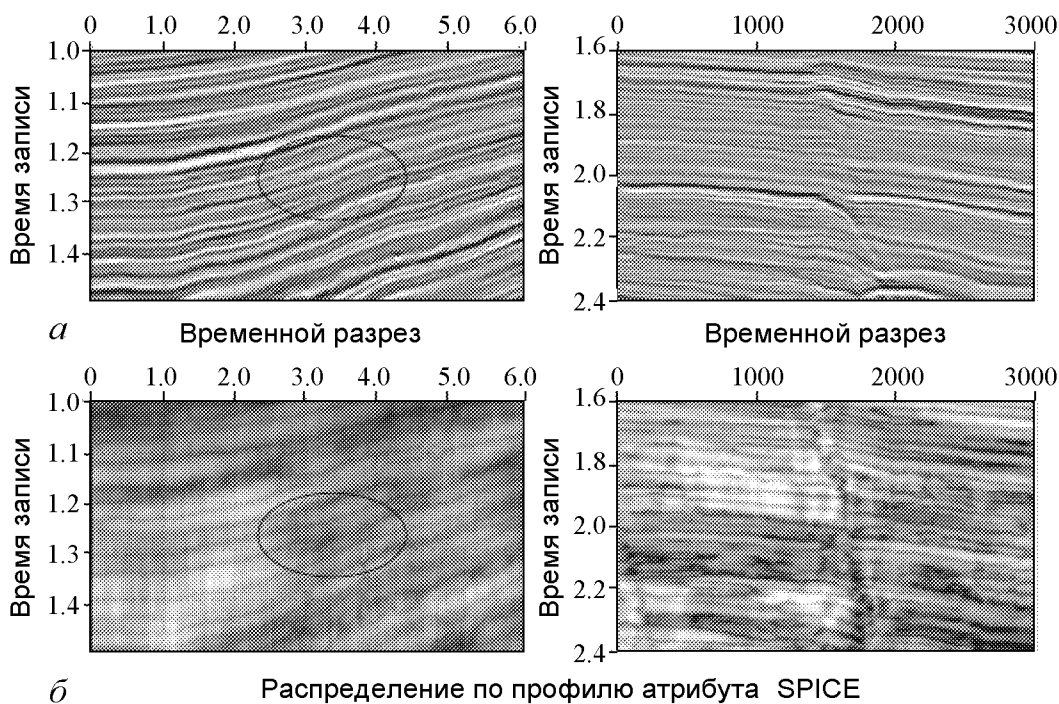


Рис. 4. Результаты атрибутного анализа, проведенного с помощью расчета атрибута SPICE: *a* – исходный суммарный разрез общей глубинной точки после процедуры миграции, полученный с помощью двумерной наземной сейсмической разведки метода отраженных волн; *б* – результаты расчета атрибута SPICE, проведенного по соответствующему сейсмическому разрезу (из работы [54])

и т. п. Как справедливо отмечает А.А. Никитин в работе [46], частотно-временная локализация геофизических сигналов, заложенная в процедуре вейвлетного анализа, существенно расширяет возможности технологии СВАН. Обработка волнового поля при этом сводится к реализации следующих процедур:

- исходное волновое поле, полученное в широком диапазоне частот, преобразуется в поле коэффициентов вейвлет-преобразования;
- по полю вейвлет-коэффициентов выделяется наиболее энергоемкая область временного разреза, отражающая перспективную на углеводородонасыщение ассоциацию тонкослоистых пластов;
- в пределах выделенной области рассчитывается дисперсия амплитуды временного разреза в скользящем окне;
- дисперсия амплитуд временного разреза подвергается вейвлет-преобразованию, что обеспечивает локализацию энергии амплитуд в частотно-временной области;
- характер флюидонасыщения (нефть, газ) по временному разрезу определяется в различных частотных диапазонах в конкретном временном интервале для района прогнозируемой залежи. При локализации нефтегазовых залежей отмечается их проявление в области более низких частот для нефтяных месторождений, а для газовых – в области как низких, так и высоких частот.

Описанная выше технология вейвлет-преобразования опробована в пределах известных месторождений Приазовья, а также при прогнозе углеводородонасыщения целевых объектов шельфа Каспийского и Азовского морей. Из последних публикаций следует отметить работу [57], в которой проводится анализ двумерных сей-

смических изображений (временных разрезов профилей и разрезов выделяемых горизонтов из данных наземной пространственной сейсморазведки) с использованием двумерных вейвлетов. Наиболее интересные результаты получены с применением анализирующих вейвлетов Добеши. В этом случае многомасштабный анализ строится в пространстве $L^2(R^2)$ функций двух переменных. Авторы работы [57] показывают, что использование двумерного вейвлетного преобразования предоставляет возможность выделять и анализировать по отдельности (в разных диапазонах длин волн) аппроксимирующие горизонтальные, диагональные и вертикальные особенности 2D и 3D изображений и на их основе локализовать аномальные составляющие. Такие особенности характерны для горизонтов, содержащих залежи углеводородов и других полезных ископаемых. На рис. 5 показаны некоторые результаты двумерного вейвлетного анализа. В левой части этого рисунка изображен временной суммарный разрез общей глубинной точки, на котором отмечены аномальные зоны распределения вейвлет-коэффициентов, которые отождествляются с перспективными в нефтегазопроисковом отношении объектами. В правой части рис. 5 показано распределение вейвлет-коэффициентов по сечению куба сейсмических данных, соответствующего поверхности целевого отражающего горизонта. Черными точками обозначены местоположения скважин с углеводородной продукцией.

На рис. 6 приведен еще один пример из работы [57]. В данном случае в качестве материнской функции для дискретного вейвлетного преобразования была использована функция Хаара. Положение скважин с продукцией обозначено верти-

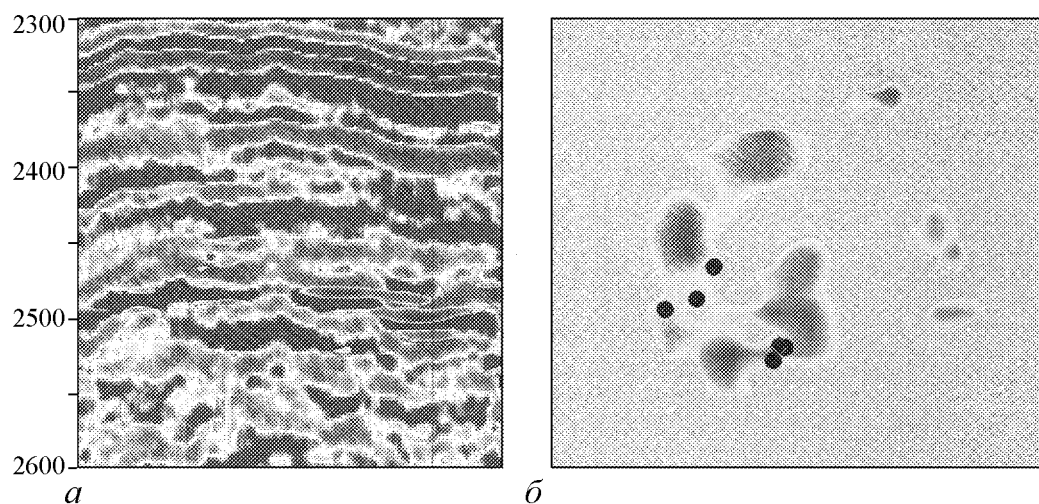


Рис. 5. Результаты двумерного вейвлетного анализа сейсмических изображений, полученных с помощью трехмерной наземной сейсморазведки методом отраженных волн по методике общей глубинной точки (из работы [57]): *а* – распределение вейвлет-коэффициентов на профиле; *б* – распределение вейвлет-коэффициентов на заданном горизонте 3D-изображения

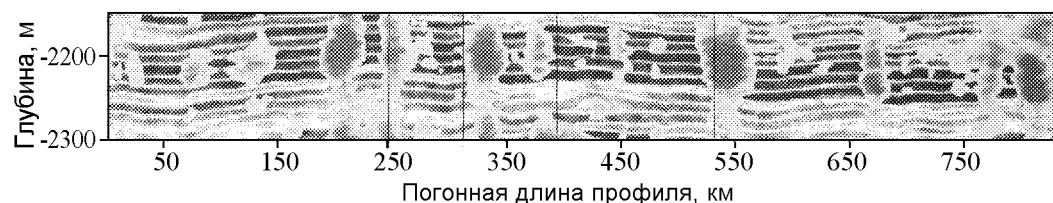


Рис. 6. Распределение вейвлет-коэффициентов вдоль двумерного сейсмического профиля, суммарный временной разрез по профилю дан в виде подложки (из работы [57])

кальными черными линиями. Можно отметить определенную корреляцию между аномалиями в распределении вейвлет-коэффициентов и положением продуктивных скважин. При этом на временном разрезе, показанном на рис. 6, не выделяется визуально заметных аномалий амплитуд.

Итак, приведенные в данном обзоре результаты и описания современных приложений вейвлетного преобразования в геофизических разведочных исследованиях, в частности, в камеральных работах (обработки и интерпретации данных сейсмической разведки) убедительно свидетельствуют о высокой эффективности и большой практической значимости этого направления для развития методов анализа, диагностики и фильтрации полевых материалов и сейсмических разрезов в нефтегазовой сейсморазведке.

2. Перспективы дальнейшего развития методов исследования и фильтрации сложных экспериментальных сигналов на основе вейвлетного анализа

Проведя анализ зарубежных и отечественных публикаций, отметим, что в настоящее время использование методов анализа сигналов на основе непрерывного вейвлетного преобразования в геофизических науках либо не продвигается дальше теоретических исследований временных рядов на длительных временных интервалах, носящих фундаментальный характер [15–21], либо остаются на уровне способов расчета частотно-амплитудных характеристик временных разрезов сумм общей глубинной точки полевого материала и последующей их визуализации. Анализ вышеуказанных информационных источников показал, что ниша использования вейвлетного анализа для непосредственного изучения, диагностики различных компонент и последующей фильтрации компонент-помех на экспериментальных полевых материалах является на сегодняшний день практически свободной. Однако для ряда приложений, например, проблемы фильтрации звуковых и поверхностных волн, наиболее оптимальным способом будет являться реализация вейвлетного преобразования с последующим исключением областей, соответствующих помехам. В таком случае, реализация решения поставленной задачи может быть осуществлена двумя путями.

- Анализ и обработка полевого материала хорошо разработанными методами дискретного вейвлетного анализа в его приложении к обработке изображений [63–66]. Сейсмограммы в сортировке общего пункта возбуждения полевого материала рассматриваются как изображения, и дальнейшая обработка проводится с каждым отдельным файлом, относящимся к соответствующему пункту возбуждения. В простейшем случае для реализации данного метода решения поставленной проблемы после корректно проведенных процедур восстановления истинного соотношения помех [40, 41, 67] необходимо: а) провести дискретное вейвлетное преобразование; б) на полученном трехмерном объекте вручную выделить паттерны, соответствующие искомым помехам; в) реализовать обратное преобразование с исключением соответствующих областей. Подобный способ хотя и представляется возможным для практического использования, однако, весьма уязвим для критики. Во-первых, подобный способ обработки даже в тестовом режиме предлагает весьма большой объем вычислений. Например, сейсмическая разведка весьма небольшой глубинности со следующими параметрами: длительность записи – 3 с, дискретизация – 2 мс и количество пунктов приема – 181 канал, потребует расчета изображения, состоящего из 10^6 отсчетов. Во-вторых, дискретное вейвлетное преобразование

не сохраняет всю информацию, содержащуюся в исходном сигнале. Иными словами, некоторые высоко-, низкочастотные и малоамплитудные составляющие будут автоматически отфильтрованы при проведении прямого и обратного преобразований. Для задач сейсмической разведки, целью которых является получение весьма дорогостоящей информации, такое свойство данного метода представляется нежелательным, поскольку в таком случае говорить о четкой динамической обработке информации уже не приходится.

- Анализ и обработка полевого материала методами анализа одномерных сигналов на базе непрерывного вейвлетного анализа. При данном подходе вейвлетный анализ играет роль одноканального преобразования для каждой трассы полевого материала. Полученные проекции распределения амплитуд и фаз вейвлетного преобразования позволяют изучить сигнал, записанный на каждом пункте приема, и оценить наличие или отсутствие в нем регулярных компонент, соответствующих искомому волнам-помехам. Выделив на одной из трасс диапазон присутствия зоны регистрации звуковых и поверхностных волн, можно в автоматическом режиме просканировать весь полевой материал и получить для каждого пункта возбуждения точные границы подлежащей фильтрации зоны помех. Затем, фильтрация указанной области может быть осуществлена как с помощью обратного вейвлетного преобразования, так и любым другим способом (например, одноканальным частотным фильтром, работающим в найденном диапазоне). Использование данной схемы обработки материала дает целый ряд преимуществ, наиболее важные из которых следующие: простота конструкции и численной реализации данного метода; сокращение времени цифровой обработки сигнала за счет одноканальной проработки полевого материала и возможность исключить из анализа заведомо недействительные трассы (например, дальние каналы пунктов приема); интегрируемость данного метода в уже применяющиеся методики фильтрации (например, на основе преобразования Радона) и некоторые другие.

Исходя из вышесказанного, актуальными и перспективными представляются создание и оптимизация методов непрерывного вейвлетного анализа для исследования, диагностики и фильтрации цифровых записей наземной сейсмической разведки метода отраженных волн по методике общей глубинной точки, как элементов современной динамической обработки, которые сочетали бы высокую степень сохранности формы и интенсивности полезного сейсмического сигнала с преимуществами быстрых одноканальных методов кинематической обработки.

3. Диагностика волн-помех звукового и поверхностного типов по цифровым данным наземной сейсморазведки на основе непрерывного вейвлетного анализа

Как уже отмечалось, решение обратной задачи теории сейсморазведки предполагает многоэтапную обработку, включающую ослабление волн-помех различного характера, расчет и коррекцию статических и кинематических поправок, корректирующую фильтрацию сейсмозаписей и многое другое. Для решения перечисленных задач все процедуры обработки должны быть выполнены в режиме сохранения относительных амплитуд сейсмических колебаний для всего временного интервала их регистрации. В настоящем разделе обзора обсудим возможности автоматической диагностики помех, обусловленных звуковыми и поверхностными волнами (волны Релея, Лява и др.), на основе вейвлетного анализа по цифровым данным наземной сейсморазведки.

На рис. 7, *a* представлена типичная сейсмограмма общего пункта возбуждения из первичного полевого материала, полученного на территории Саратовской области. Полученные первичные полевые материалы сейморазведки характеризуются высоким уровнем прослеживания отраженных волн от целевых горизонтов, регистриру-

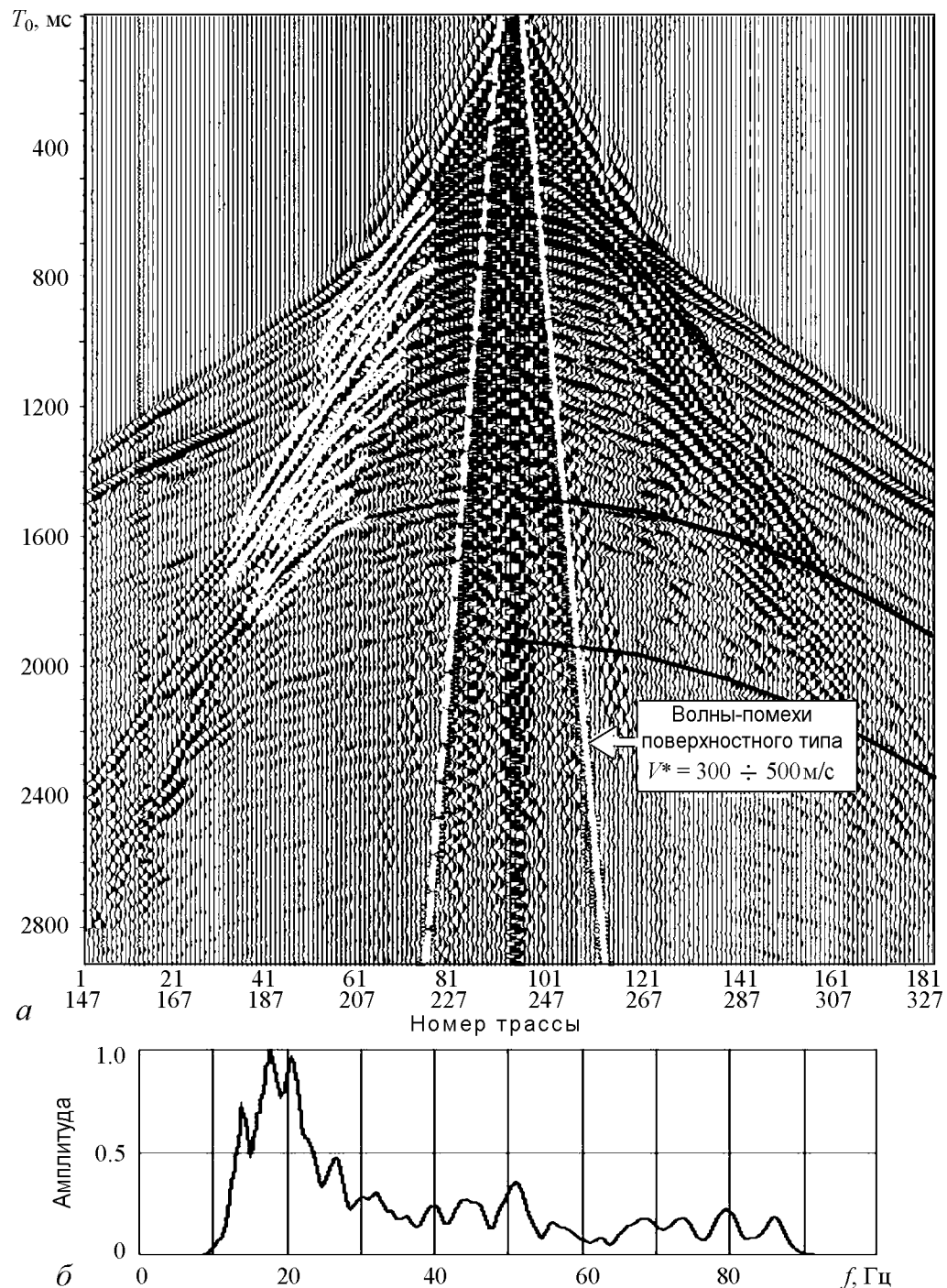


Рис. 7. Характеристика волнового поля первичного полевого материала: *a* – сейсмограмма общего пункта возбуждения; *b* – частотная характеристика сейсмограммы

емых в интервале $500 \div 2300$ мс. В волновом поле сейсмограммы можно уверенно выделить ряд годографов, предположительно идентифицируемых как отражения от горизонтов. В волновом поле присутствуют регулярные волны-помехи и случайный шум, выделенные на рис. 7, а, кроме того, сейсмограммы характеризуются выраженным затуханием амплитуд сейсмического сигнала с увеличением времен регистрации, а также весьма неоднородным уровнем амплитуд на трассах различных пунктов приема. Наиболее интенсивными помехами являются среднескоростные волны на средних и дальних трассах (кажущаяся скорость $v^* = 1800 \div 2500$ м/с). Отражения, вызванные высокоскоростными кратными волнами, регистрируются на дальних каналах, начиная с 1200 мс. Амплитудно-частотная характеристика исходного материала представлена на рис. 7, б и характеризуется преобладанием низкочастотных составляющих в диапазоне $15 \div 25$ Гц, что обусловлено интенсивной зоной регистрации помех поверхностных и звуковых волн.

Очевидно, что проведение качественной динамической обработки подобного полевого материала ставит перед геофизиком среди прочего задачу повышения частоты сейсмических записей, что достигается проведением поверхностно-согласованной деконволюции по полемому материалу, максимально очищенному от всех наблюдаемых волн-помех. Отметим, что в число необходимых процедур фильтрации, требующейся для рассматриваемого полевого материала, необходимо включить фильтрацию в области частота–волновое число для подавления среднескоростных волн-помех, медианную фильтрацию для подавления случайных шумов, а также проведение полосовой фильтрации в диапазоне $13 \div 18$ Гц в области регистрации звуковых и поверхностных помех. Однако для пунктов возбуждения, располагающихся в различных поверхностных сейсмогеологических условиях, границы области регистрации звуковых и поверхностных помех будут варьировать в достаточно широких пределах. Кроме того, частотный состав поверхностных и звуковых волн изменяется от сейсмограммы к сейсмограмме даже по небольшому району работ. В совокупности, можно утверждать, что на практике провести диагностику и последующую фильтрацию данного типа помех с помощью стандартных методов обработки в автоматическом режиме не удастся без редакции границ пространственной области обработки и диапазона частот исключаемых шумов на разных сейсмограммах. Таким образом, основная проблема, исключающая реализацию фильтрации рассматриваемых помех в автоматическом режиме, заключается в невозможности выделить критерий для ее проведения.

Предлагаемая в настоящей работе методика для диагностики зарегистрированных волн-помех звукового и поверхностного типов основана на непрерывном вейвлетном преобразовании, производимом в одноканальном режиме по полемому материалу. На рис. 8 показан типичный вид проекции распределения амплитуды $|W(t, s)|$ вейвлетного преобразования, полученного с помощью базисного вейвлета Морле, построенного для центральных трасс рассматриваемого полевого материала (см. рис. 7, а). На проекции $|W(t, s)|$ присутствует легко идентифицируемый выраженный максимум, соответствующий рассматриваемым помехам. Отметим, что интенсивность колебаний соответствующих временных масштабов настолько велика, что визуализация всех остальных зарегистрированных компонент сейсмической записи становится невозможной. Таким образом, для каждой трассы можно четко выявить зону регистрации поверхностных волн и, при необходимости, уточнить частотный состав помех, выполнив пересчет от масштабов вейвлетного преобразова-

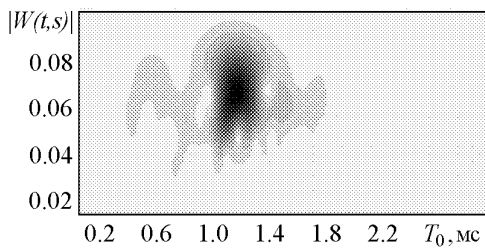


Рис. 8. Проекция распределения амплитуды $|W(t, s)|$ вейвлетного преобразования одной из центральных трасс рассматриваемого полевого материала (см. рис. 7, а), полученного с помощью базисного материнского вейвлета Морле

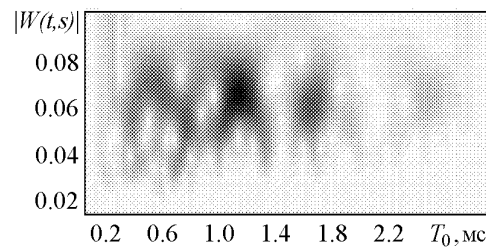


Рис. 9. Проекция распределения амплитуды $|W(t, s)|$ вейвлетного преобразования трассы, представленной на рис. 8, рассматриваемого полевого материала после фильтрации зарегистрированных звуковых и поверхностных волн

ния к частотам преобразования Фурье [7]. Например, для рассматриваемой трассы полевого материала изучаемые помехи регистрируются на временах $1.12 \div 1.28$ мс и требуют фильтрации в диапазоне частот $14 \div 16$ Гц.

На рис. 9 продемонстрирована проекция распределения амплитуды $|W(t, s)|$ вейвлетного преобразования, полученного с помощью базисного вейвлета Морле, построенного для той же трассы рассматриваемого полевого материала после проведенной фильтрации. Наглядно видно, что после удаления выше обозначенных классов помех на вейвлетной поверхности можно визуализировать все волновые компоненты, наблюдающиеся в полевом материале.

Таким образом, предлагаемый метод однокального вейвлетного преобразования позволяет отследить зону зарегистрированных высокоинтенсивных волн звукового и поверхностного типа и, затем, отфильтровать данные помехи. Кроме того, наличие четких критериев, по которым можно выделить требуемые помехи на поверхности распределения амплитуды $|W(t, s)|$ вейвлетного преобразования, а именно - возрастание интенсивности мод колебаний и четкая локализация по времени и шкале временных масштабов, дает возможность проведения необходимой фильтрации в автоматическом режиме.

Заключение

Таким образом, в работе были выполнены обзор и анализ современного состояния методов геофизических исследований на основе вейвлетного преобразования, применяемого в камеральных работах по обработке и интерпретации геофизических материалов сейсмической разведки. На основе рассмотренных информационных источников и опыта авторского научного коллектива по применению вейвлетного анализа к сложным сигналам различной природы выявлены перспективы расширения областей применения рассматриваемых способов, а также принципиально новые возможности использования вейвлетного анализа для автоматизации некоторых процедур обработки материалов наземной сейсморазведки. Предложен новый метод диагностики волн-помех звукового и поверхностного типов по цифровым данным наземной сейсморазведки на основе непрерывного вейвлетного анализа с базовым комплексным материнским вейвлетом Морле.

Работа была поддержана Федеральной целевой программой «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы.

Библиографический список

1. Grossman A., Morlet J. SIAM J. Math. Anal. 1984. Vol. 15, № 4. P. 273.
2. Addison P.S. The Illustrated Wavelet Transform Handbook: Introductory Theory and Applications in Science Engineering, Medicine and Finance. Bristol: Institute of Physics Publishing, 2002.
3. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
4. Torrence C., Compo G.P. // Bulletin of the American Meteorological Society. 1998. Vol. 79. P. 61.
5. Wavelets in Physics / Edited by J.C. van der Berg. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
6. Aldroubi A., Unser M. Wavelets in Medicine and Biology. CRC-Press, 1996.
7. Короновский А.А., Храмов А.Е. Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003.
8. Храмов А.Е., Короновский А.А., Пonomarenko V.I., Prokhorov M.D. // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 75, № 5. 056207.
9. Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Brazhe N.A., Brazhe A.R., Erokhova L.A., Maksimov G.V., Mosekilde E. // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 94. 218103.
10. Короновский А.А., Храмов А.Е. // Plasma Physics Reports. 2002. Vol. 28, № 8. 666.
11. Пискун П.В. Программно-алгоритмическое обеспечение непрерывного вейвлет-преобразования при обработке и интерпретации геофизических полей. М.: МГУ, 2006.
12. Пискун П.В., Петров А.В., Зиновкин С.В. Тезисы докладов VII международной научно-практической конференции «Геомодель-2005», 2005. 42.
13. Астафьева Н.М. // УФН. 1996. Т. 166, № 11. С. 1145.
14. Дремин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А. // УФН. 2001. Т. 171, № 5. С. 465.
15. Стаховский И.Р. // ДАН. 1996. Т. 350, № 3. С. 393.
16. Mallat S.G. // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. Vol. 315. P. 69.
17. Wirtki K. // Journal Physics Oceanography. 1975. Vol. 5. P. 572.
18. Rayner N.A., Horton E.B., Parker D.E., Folland C.K., Hackett R.B. Version 2.2 of the global sea-ice and sea surface temperature data set 1903-1994. CRTN 74, Hadley Centre for Climate Prediction and Research, 1996.
19. Mac Kenzie D. // New Scientist. 1987. Vol. 16. P. 16.
20. Shaowu W. // Acta Meteorologica Sinica. 1992. Vol. 6, № 1. P. 47.
21. Hudgins L., Friehe L.A., Mayer M.E. // Physical Review Letters. 1993. Vol. 71. 3279.
22. Сонечкин Д.М., Даценко Н.М., Иващенко Н.Н. // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Vol. 4, № 4,5. P. 108.
23. Manda M., Balasis G. // Geophys. J. Int. 2006. Vol. 167. P. 586.
24. Corso G., Kuhn P.S., Lucena L.S., Thom Z.D. // Physica A. 2003. Vol. 318. P. 551.
25. Naveau P., Oh H. // IEEE Transactions on Image Processing. 2004. Vol. 13, № 6. P. 35.
26. Yuen D.A., Vincent A.P., Kido M., Vecsey L. // Pure and Applied Geophysics. 2001. Vol. 159. 2285.

27. *Петров А.В., Никитин А.А., Пискун П.В., Зиновкин С.В.* Тезисы докладов VIII международной научно-практической конференции «Геомодель-2006», 2006. 315.
28. *Albora M., Bal A., Ucan O.N.* // Pure and Applied Geophysics. 2007. Vol. 164. P. 199.
29. *Светов Б.С., Пискун П.В.* // Геофизика. 2005. Vol. 4. P. 43.
30. *Gholami A., Siahkoohi H.R.* // Geophysical Prospecting. 2009. Vol. 57. P. 847.
31. *Gholami A., Siahkoohi H.R.* // Geophys. J. Int. 2009. Vol. 176. P. 151.
32. *Kumar P., Fofoula-Georgiou E.* // Reviews of Geophysics. 1997. Vol. 35. P. 385.
33. *Kritski A., Vincent P., Yuen D.A., Carlsen T.* // Geophysics. 2007. Vol. 72. V1–V11.
34. *Гусев В.А., Короновский А.А., Храмов А.Е.* // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29, № 18. С. 61.
35. *Sitnikova E., Hramov A.E., Koronovskii A.A., Luijtelaar E.L.* // Journal of Neuroscience Methods. 2009. Vol. 180. P. 304.
36. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Непрерывный вейвлетный анализ в приложениях к задачам нелинейной динамики. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2002.
37. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2001. Т. 9, № 4,5. С. 3.
38. *Koronovskii A.A., Hramov A.E.* // Technical Physics Letters. 2001. Vol. 27, № 1. P. 1.
39. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30, № 14. С. 29.
40. *Гурвич И.И., Боганик Г.Н.* Сейсмическая разведка. М.: Недра, 1980.
41. *Yilmaz O.* Seismic Data Analysis. V. I, II. USA: Tulsa, Society of Exploration Geophysicists, 2001.
42. *Воробьев В.И., Грибунин В.Г.* Теория и практика вейвлетного преобразования. С.-Петербург: ВУС, 1999.
43. *Reine C., Van der Baan N., Clark R.* // Geophysics. 2009. Vol. 74, № 2. WA123.
44. *Алексеев В.И.* Доклады на 10-й научно-практической конференции «Современные геофизические технологии в ОАО "Хантымансийскгеофизика" и перспективы их использования для повышения эффективности поисков, разведки и разработки месторождений нефти и газа». 2008, 111.
45. *Земцова Д.П., Никитин А.А., Пискун П.В.* // Тезисы докладов VII международной научно-практической конференции «Геомодель-2005», 2005. 68.
46. *Никитин А.А.* // Геофизика. 2006. Т. 4. С. 11.
47. *Никитин А.А., Петров А.В.* // Геофизика. 2007. Vol.3. P. 63.
48. *Пискун П.В., Никитин А.А., Зиновкин С.В., Петров А.В.* // Известия вузов. Геология и разведка. 2005. Т. 3. С. 39.
49. *Хачай О.А., Кукса Ю.И., Хачай О.Ю.* // Геофизика. 2003. Т. 5. С. 46.
50. *Broadhead M.K., Aramco S., Dhahran N.* // The Leading Edge. 2008. P. 226.
51. *Ампилов Ю.П.* Сейсмическая интерпретация: опыт и проблемы. М.: Изд-во «Геоинформмарк», 2004.
52. *Chopra S., Marfurt K.J.* Seismic attribute mapping of structure and stratigraphy: Society of Exploration Geophysicists, Distinguished Instructor Short Course Series. USA: Tulsa, 2006.
53. *Chopra S., Marfurt K.J.* Seismic attributes for prospect identification and reservoir characterization: Society of Exploration Geophysicists. OK: Tulsa, 2007.

54. *Liner C., Li C., Gersztenkorn A., Smythe J.* // SEG Abstract. 2004. 52.
55. *Boroscheck R.L., Comte D.Y.* // Journal Seismology. 2006. Vol. 10. P. 353.
56. *Domingues M.O., Mendes O.J., Mendes da Costa A.* // Advances in Space Research. 2005. Vol. 35. P. 831.
57. *Алексеев В.И., Бобрышев А.Н.* // Геофизика. 2009. Т. 3. С. 12.
58. *Пискун П.В., Никитин А.А., Земцова Д.П.* Тезисы докладов 6-х Геофизических чтений им. В. В. Федынского. Центр ГЕОН, 2004. 26.
59. *Масюков А.В., Масюков В.В., Шленкин С.И.* Математические методы в геофизике: Труды международной конференции, 2003.
60. *Копилевич Е.А., Афанасьев М.Л., Петров А.Ю.* // Нефтяное хозяйство. 2006. Т. 9. С. 10.
61. *Давыдова Е.А., Копилевич Е.А., Мушин И.А.* // Доклады РАН. 2002. Т. 385, № 5. С. 682.
62. *Копилевич Е.А., Давыдова Е.А., Самаркин М.А.* // Геофизика. 2004. Т. 2. С. 21.
63. *Strutz T., Muller E.* // Picture Coding Symposium'97, 10–12 September. Berlin. Germany. 1997, 67.
64. *Strutz T., Schwarz H., Muller E.* // Proceedings of SPIE. 1997. 3164. P. 279.
65. *Frick P., Baliunas S.L., Galyagin D., Sokoloff D., Soon W.* // The Astrophysical Journal. 1997. Vol. 483. P. 426.
66. *Новиков Л.В.* // Научное приборостроение. 1999. Vol. 9, № 2. P. 47.
67. *Бондарев В.И., Крылатков С.М.* Основы обработки и интерпретации данных сейсморазведки. Екатеринбург: Изд-во УГГТА, 2001.
- Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского* *Поступила в редакцию* *18.12.2009*

PROGRESS AND PROSPECT OF WAVELET TRANSFORM APPLICATION TO THE ANALYSIS OF NONSTATIONARY NONLINEAR DATES IN CONTEMPORARY GEOPHYSICS

A.E. Filatova, A.E. Artemiev, A.A. Koronovskii, A.P. Pavlov, A.E. Hramov

The presented paper is an analytical review of the methods and examples of applications of the continuous and discrete wavelet transform in geophysical study. The possibility of the extension of application of the wavelet-based methods in geophysics is also considered.

Keywords: Wavelet analysis, geophysics, seismic prospecting, time series, minerals.



Филатова Анастасия Евгеньевна – родилась в Саратове (1983). Окончила факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2005). Кандидат физико-математических наук (2008). Старший научный сотрудник лаборатории физики нелинейных явлений отделения физики нелинейных систем Саратовского государственного университета. Область научных интересов – нелинейная динамика систем различной природы, методы анализа динамических систем, вейвлетный анализ. Автор ряда статей в рецензируемых отечественных и зарубежных журналах.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: anefila@gmail.com



Артемьев Александр Евгеньевич – родился в Саратове (1975). Окончил геологический факультет Саратовского государственного университета (1997). Кандидат геолого-минералогических наук (2001). Доцент кафедры геофизики геологического факультета Саратовского государственного университета. Основные научные интересы связаны с развитием методики обработки и интерпретации данных сейсморазведки, моделированием процессов распространения упругих волн и вейвлетным анализом. Автор ряда статей в рецензируемых научных журналах.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: aartemiev@gmail.com



Короновский Алексей Александрович – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995), доктор физико-математических наук (2007), профессор кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой деятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. Автор ряда статей в центральной печати, а также монографий (в соавторстве) «Нелинейная динамика в действии» и «Непрерывный вейвлетный анализ», вышедших в Издательстве ГосУНЦ «Колледж», двухтомной монографии «Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот» (М.: Физматлит, 2009, под редакцией А.А. Короновского, А.А. Кураева, Д.И. Трубецкова и А.Е. Храмова), монографии «Моделирование нелинейной динамики глобальных процессов» (М.: Изд.-во МГУ, 2010, под редакцией С.И. Ильина и Д.И. Трубецкова) и др.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: alkor@nonlin.sgu.ru



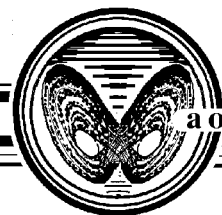
Павлов Алексей Николаевич – родился в Саратове (1973). Окончил физический факультет Саратовского университета по специальности радиофизика и электроника (1995). Кандидат физико-математических наук (1998). В настоящее время работает доцентом на кафедре радиофизики и нелинейной динамики. Область научных интересов: анализ временных рядов. Имеет более 80 работ, опубликованных в отечественной и зарубежной печати.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: pavlov_lesha@mail.ru



Храмов Александр Евгеньевич – окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1996). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1999) и доктора (2006) физ.-мат. наук. Профессор, заместитель заведующего кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов – радиофизика в той ее части, которая связана со взаимодействием свободных электронов с электромагнитными полями, нелинейная динамика распределенных активных сред, методы анализа и моделирования динамических систем. Опубликовал (в соавторстве) книгу «Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков» (Т. 1, М.: Физматлит, 2003; Т. 2, М.: Физматлит, 2004), монографию «Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения» (Москва: Наука, Физматлит, 2003), двухтомную коллективную монографию «Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот» (М.: Физматлит, 2009), коллективную монографию «Моделирование нелинейной динамики глобальных процессов» (М.: Изд.-во МГУ, 2010) и др.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: aeh@nonlin.sgu.ru



ГИПЕРХАОС В МОДЕЛЬНОЙ НЕАВТОНОМНОЙ СИСТЕМЕ С КАСКАДНОЙ ПЕРЕДАЧЕЙ ВОЗБУЖДЕНИЯ ПО СПЕКТРУ

С.П. Кузнецов, Ю.И. Соха

Одна из ключевых идей теории турбулентности – каскадная передача энергии по спектру от крупномасштабных образований к мелкомасштабным. Как представляется, эту идею можно попытаться привлечь для реализации сложной динамики в системах различной природы, даже когда уравнения заведомо не похожи на гидродинамические. В настоящей работе рассмотрена модель из четырех осцилляторов ван дер Поля, в которой генерация хаоса осуществляется благодаря каскадной передаче возбуждения от одного осциллятора к другому с удвоением частоты. В силу медленной принудительной модуляции параметра, отвечающего за возникновение автоколебаний, две пары осцилляторов становятся активными попеременно. В начале каждой новой стадии активности возбуждение осцилляторов со второго по четвертый стимулируется воздействием со стороны осциллятора вдвое меньшей частоты через квадратичный нелинейный элемент. От последнего осциллятора к первому возбуждение передается сигналом, получающимся на квадратичной нелинейности в присутствии вспомогательного гармонического сигнала. Согласно результатам численного исследования, в системе имеет место режим гиперхаоса с двумя положительными показателями Ляпунова.

Ключевые слова: Гиперхаос, связанные осцилляторы, показатели Ляпунова.

Введение

Теоретические представления, лежащие в основе понимания развитой гидродинамической турбулентности, основываются на идее каскадной передачи энергии по спектру от образований, характеризующихся большими пространственно-временными масштабами, к малым масштабам [1,2]. Эта идея с очевидностью носит общий характер и, по-видимому, ее имеет смысл использовать для построения систем различной природы с хаотической динамикой как руководящий принцип даже в ситуациях, когда уравнения не похожи на гидродинамические. Это можно отнести, в частности, к радиотехнике и электронике, для которых генерация хаоса традиционно представляет интерес, в том числе, для маскировки сигналов, шумовой локации, постановки помех, разработки систем скрытой коммуникации.

Недавно был предложен подход к построению генераторов хаоса, основанный на использовании попеременно возбуждающихся осцилляторов, которые передают возбуждение друг другу по очереди, так что последовательность фаз генерируемой последовательности радиоимпульсов описывается хаотическим отображением – растягивающим отображением окружности или отображением Аносова на торе [3–9]. Это позволило представить конкретные примеры физически реализуемых систем с однородно гиперболическими аттракторами. Аналогичные методики были применены для реализации систем, демонстрирующих ряд других феноменов сложной динамики, в частности, грубый странный нехаотический аттрактор, множества Мандельброта и Жюлиа [10,11].

В настоящей работе предлагается и исследуется численно генератор хаоса на основе четырех неавтономных осцилляторов ван дер Поля, функционирование которого обеспечивается каскадной передачей возбуждения от одного осциллятора к другому с последовательным удвоением частоты. Как показывает проведенное численное исследование, в системе в широком диапазоне изменения параметров имеет место режим гиперхаоса [12] с двумя положительными показателями Ляпунова.

1. Основная модель и ее принцип действия

Рассмотрим систему, построенную из четырех осцилляторов ван дер Поля, с рабочими частотами $\omega_0, 2\omega_0, 4\omega_0, 8\omega_0$, как показано на рис. 1. Параметр, управляющий бифуркацией Андронова–Хопфа, в каждом осцилляторе полагаем медленно изменяющимся во времени с амплитудой A и периодом $T = 2\pi/\Omega$, где $\Omega \ll \omega_0$, причем модуляция параметра производится в одной фазе для первого и третьего осцилляторов, и в противоположной фазе для второго и четвертого. Подходящей моделью служит система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (A \cos \Omega t - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x &= \varepsilon w \cos 7\omega_0 t, \\ \ddot{y} - (-A \cos \Omega t - y^2)\dot{y} + 4\omega_0^2 y &= \varepsilon x^2, \\ \ddot{z} - (A \cos \Omega t - z^2)\dot{z} + 16\omega_0^2 z &= \varepsilon y^2, \\ \ddot{w} - (-A \cos \Omega t - w^2)\dot{w} + 64\omega_0^2 w &= \varepsilon z^2, \end{aligned} \quad (1)$$

где переменные x, y, z, w представляют собой обобщенные координаты осцилляторов, соответственно, с первого по четвертый. Считаем, что имеет место соотношение $\omega_0 T = 2\pi N$, где N – целое число, так что неавтономная система уравнений имеет периодические во времени коэффициенты.

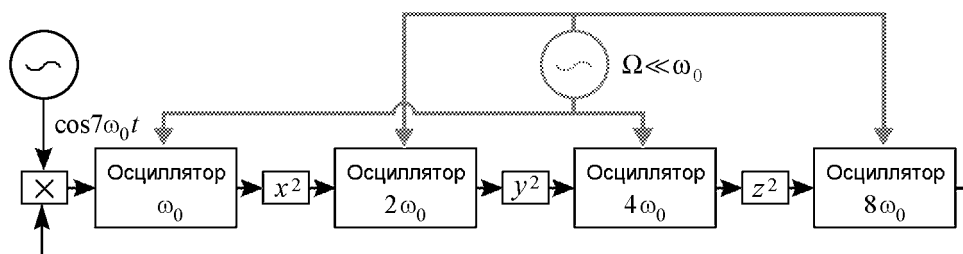


Рис. 1. Блок-схема исследуемой системы

Благодаря принятому способу модуляции параметра, активными по очереди становятся две пары осцилляторов. Стимуляция возбуждения в начале каждой новой стадии активности для второго, третьего и четвертого осцилляторов осуществляется передачей возбуждения от осциллятора вдвое меньшей частоты через квадратичный нелинейный элемент. При этом надо заметить, что преобразование сигнала на квадратичной нелинейности сопровождается появлением второй гармоники, благодаря чему стимуляция носит резонансный характер. При передаче возбуждения величина, определяющая фазовый сдвиг, удваивается. Действительно, при квадратичном преобразовании сигнала $\cos(\omega t + \varphi)$ имеем $\cos^2(\omega t + \varphi) = 1/2 + (1/2) \cos(2\omega t + 2\varphi)$, где надо принимать во внимание только составляющую на второй гармонике, поскольку именно она попадает в резонанс с возбуждаемым осциллятором. От четвертого осциллятора к первому возбуждение передается посредством составляющей разностной частоты, которая получается смещением сигнала на квадратичной нелинейности со вспомогательным сигналом частоты $7\omega_0$. При этом фаза колебаний передается без изменения. В самом деле, $\cos(8\omega_0 t + \theta) \cos 7\omega_0 t = (1/2) \cos(\omega_0 t + \theta) + \dots$, где опущено нерезонансное слагаемое, несущественное с точки зрения стимуляции возбуждения осциллятора с рабочей частотой ω_0 .

Чтобы яснее представить преобразование фаз в процессе функционирования системы, обратимся к таблице. Столбцы таблицы отвечают осцилляторам с первого по четвертый, а строки – последовательным полупериодам медленной модуляции параметра. Начальная строка соответствует стадии активности первого и третьего осцилляторов, характеризующихся фазами φ_0 и θ_0 . Второй и четвертый осцилляторы на этом этапе не активны и не имеют хорошо определенной фазы, так что соответствующие ячейки оставлены пустыми. Они оказываются возбужденными на следующем полупериоде и, как следует из приведенных выше пояснений, получают фазы, соответственно, $2\varphi_0$ и $2\theta_0$ (с точностью до постоянной добавки). Далее процесс повторяется. В таблице для большей ясности приведено несколько строк, отвечающих последовательным шагам преобразования.

Как можно видеть из таблицы, за один период медленной модуляции параметров трансформация фаз двух изначально активных осцилляторов определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= 2\varphi_n + \text{const} \pmod{2\pi}, \\ \theta_{n+1} &= 4\varphi_n + \text{const} \pmod{2\pi}. \end{aligned} \tag{2}$$

Таблица

Преобразование фаз осцилляторов с номерами 1–4 на последовательных стадиях активности

	1	2	3	4
0	φ_0		θ_0	
1/2		$2\varphi_0 + \text{const}$		$2\theta_0 + \text{const}$
1	$2\theta_0 + \text{const}$		$4\varphi_0 + \text{const}$	
3/2		$4\theta_0 + \text{const}$		$8\varphi_0 + \text{const}$
2	$8\varphi_0 + \text{const}$		$8\theta_0 + \text{const}$	

Иными словами, двумерный вектор $\mathbf{v}_n = (\varphi_n, \theta_n)$, компоненты которого определены по модулю 2π , отображается в другой вектор $\mathbf{v}_{n+1} = (\varphi_{n+1}, \theta_{n+1})$ такого же типа, то есть имеет место отображение, определенное на двумерном торе. Оно обладает специфическим вырождением, а именно полная последовательность фаз φ_n или θ_n составлена из двух независимых подпоследовательностей, так что в процессе временной эволюции их члены чередуются. Динамика подпоследовательностей хаотическая. За два шага малые возмущения для каждой из них увеличиваются восьмикратно. Поэтому отображение (2) характеризуется присутствием двух одинаковых положительных показателей Ляпунова $\Lambda_{1,2} = (1/2) \ln 8 \approx 1.0397$.

В следующем разделе даны результаты численного решения системы дифференциальных уравнений (1) и продемонстрировано, что при надлежащем выборе параметров поведение модели соответствует приведенным качественным рассуждениям.

2. Численные результаты исследования динамики модели

Для численного решения задачи применялся конечно-разностный метод второго порядка точности.

Расчеты показывают, что ожидаемый тип динамики реализуется в достаточно широком диапазоне изменения параметров. Для детального анализа выбран случай $\omega_0 = 2\pi$, $T = 8$, $A = 4.5$, $\varepsilon = 0.6$. На рис. 2 показаны зависимости динамических переменных для четырех осцилляторов от времени. Каждый осциллятор генерирует последовательность радиоимпульсов, следующих друг за другом регулярно через интервал времени T . Частоты заполнения соответствуют рабочей частоте осцилляторов. Хаос выражается в том, что фаза заполнения от импульса к импульсу меняется

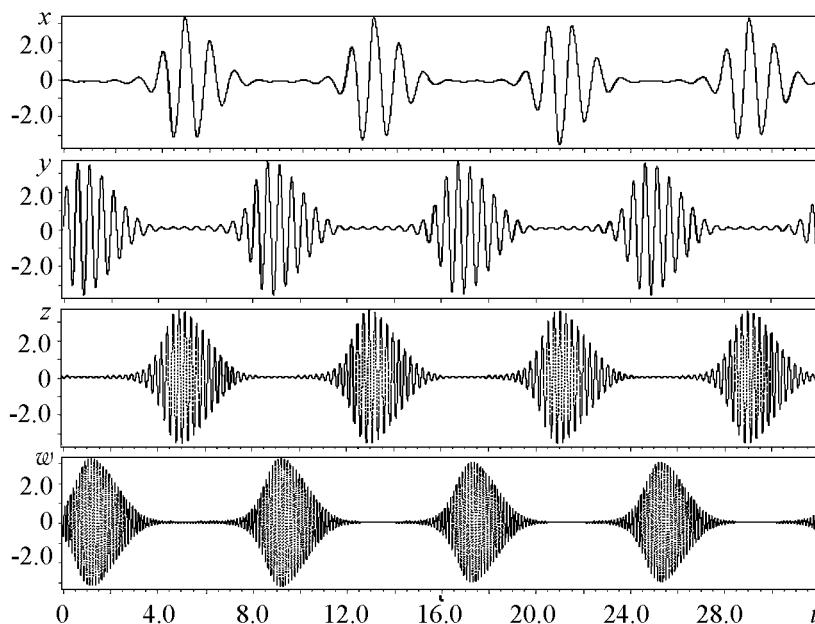


Рис. 2. Зависимости динамических переменных для составляющих систему четырех осцилляторов от времени при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 8$, $A = 4.5$, $\varepsilon = 0.6$

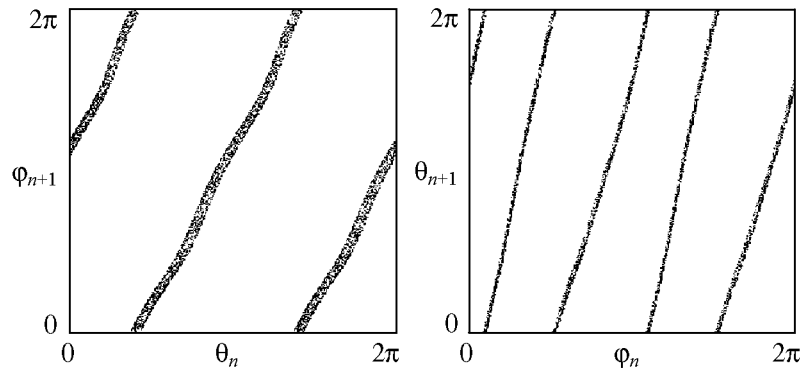


Рис. 3. Итерационные диаграмма для фаз первого и третьего осцилляторов, обозначенных, соответственно, φ_n и θ_n , на последовательных стадиях их активности при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 8$, $A = 4.5$, $\varepsilon = 0.6$

хаотическим образом. Присутствие хаоса обусловлено описанным выше механизмом передачи фазы между осцилляторами и от предыдущих стадий процесса к последующим.

На рис. 3 показаны итерационные диаграммы для фаз, из которых видно, что их динамика действительно соответствует в известном приближении отображению (2). Фазы, отвечающие каждой очередной стадии активности первого и третьего осциллятора, определяются в момент времени, фиксированный по отношению к сигналу, обеспечивающему медленную модуляцию параметра, по формуле

$$\varphi_n = \begin{cases} \arctan \frac{\dot{x}}{\omega_0 x}, & x > 0, \\ \arctan \frac{\dot{x}}{\omega_0 x} + \pi, & x < 0, \end{cases} \quad \theta_n = \begin{cases} \arctan \frac{\dot{z}}{4\omega_0 z}, & z > 0, \\ \arctan \frac{\dot{z}}{4\omega_0 z} + \pi, & z < 0. \end{cases} \quad (3)$$

На рис. 4 показан портрет аттрактора в проекции из расширенного восьмимерного фазового пространства на фазовую плоскость первого осциллятора (x, \dot{x}) . Изображение

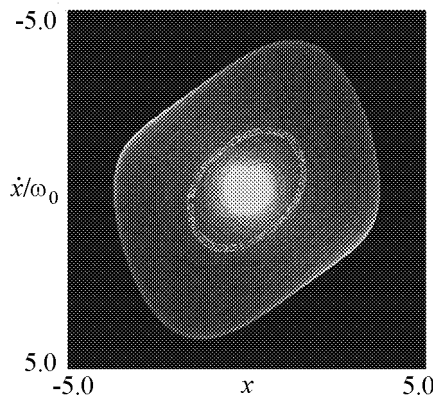


Рис. 4. Аттрактор в проекции на фазовую плоскость первого осциллятора. Белым цветом выделены точки, отвечающие максимуму значения бифуркационного параметра в первом осцилляторе, которые образуют портрет аттрактора в сечении Пуанкаре

представлено тонами серого цвета, так что более светлые пиксели отвечают относительно большей вероятности пребывания изображающей точки.

Для расчета показателей Ляпунова использовалась реализованная в виде компьютерной программы процедура, осуществляющая выполнение отображения Пуанкаре и вычисление матрицы Якоби. При многократных итерациях этой процедуры отслеживалась эволюция восьми векторов малых возмущений путем их умножения на получаемые в ходе итераций матрицы Якоби. После каждой итерации выполнялась ортогонализация Грама–Шмидта и нормализация для этих восьми векторов [13,14]. Показатели Ляпунова определяются как

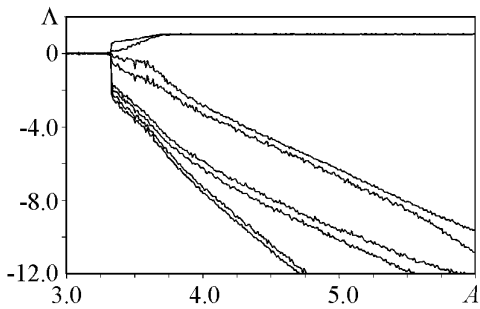


Рис. 5. Зависимость показателей Ляпунова от параметра глубины модуляции A при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 8$, $\varepsilon = 0.6$

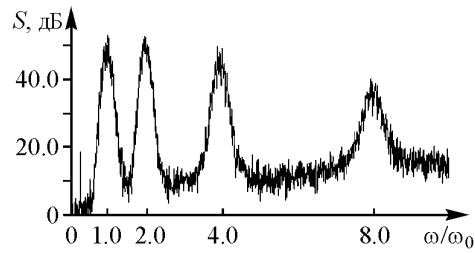


Рис. 6. Спектр мощности сигнала $X = x + y + z + w$, генерируемого системой, при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 8$, $A = 4.5$, $\varepsilon = 0.6$

средние скорости роста или уменьшения накапливающихся сумм логарифмов норм для векторов возмущения (после ортогонализации, но перед нормализацией).

На рис. 5 показана зависимость показателей Ляпунова от параметра глубины модуляции A при фиксированных остальных параметрах. В широком интервале изменения параметра два наибольших показателя остаются почти постоянными и близкими к $(\ln 8)/2$. В частности, при $A = 4.5$ показатели Ляпунова составляют

$$\begin{aligned} \Lambda_1 = 1.038, \quad \Lambda_2 = 1.037, \quad \Lambda_3 = -4.622, \quad \Lambda_4 = -5.077, \\ \Lambda_5 = -7.914, \quad \Lambda_6 = -8.403, \quad \Lambda_7 = -10.335, \quad \Lambda_8 = -10.722, \end{aligned} \quad (4)$$

а размерность аттрактора в сечении Пуанкаре, по Каплану–Йорке [14], равна 2.449.

На рис. 6 показан спектр генерируемого системой сигнала, в качестве которого рассматривалась сумма переменных, относящихся ко всем четырем осцилляторам, $X = x + y + z + w$. Для его построения использовался метод статистической оценки спектральной плотности мощности, рекомендуемый в теории случайных процессов [15] и состоящий в разбиении имеющейся реализации на участки конечной протяженности, выполнении преобразования Фурье для каждого участка и последующем усреднении квадратов амплитуд спектральных компонент.

Спектр сплошной, что отражает хаотическую природу динамики на аттракторе. В спектре можно видеть четыре хорошо выраженных пика; максимумы соответствуют частотам четырех составляющих систему осцилляторов. Дискретная составляющая, которую можно видеть в левой части спектра, отвечает частоте медленной периодической модуляции параметров.

Заключение

В настоящей работе введена в рассмотрение неавтономная система из четырех осцилляторов ван дер Поля, генерирующая колебания в виде последовательности импульсов, фаза заполнения которых изменяется хаотически. Интересным принципиальным моментом представляется использование для построения генератора хаоса одной из ключевых идей теории гидродинамической турбулентности – каскадной

передачи энергии по спектру. Аналогия, впрочем, носит скорее качественный и эвристический характер: в данном случае речь идет о передаче возбуждения по цепочке осцилляторов, становящихся активными попеременно, с последовательными удвоениями частоты.

Показано, что в широкой области параметров режим динамики характеризуется присутствием двух положительных показателей Ляпунова, которые близки по величине и слабо зависят от параметров, в то время как остальные шесть показателей отрицательны. Схема с очевидностью допускает реализацию в виде радиотехнического устройства.

Особенность системы состоит в том, что полная частотная полоса генерируемого сигнала довольно велика. Это объясняется наличием совокупности осцилляторов, каждый из которых функционирует в своей полосе частот. Количество осцилляторов в цепочке можно увеличить, что обеспечит дальнейшее расширение частотной полосы генерируемого хаотического сигнала.

Вопрос, является ли аттрактор системы гиперболическим, в данной работе не обсуждается и требует специального исследования.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 09-02-00426), а также Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках Программы развития научного потенциала высшей школы (грант № 2.1.1/1738)).

Библиографический список

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
2. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Наука, 1965. 640 с. Ч. 2. М.: Наука, 1967. 720с.
3. Kuznetsov S.P. Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale–Williams type // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95. 144101.
4. Кузнецов С.П., Селезнев Е.П. Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла–Вильямса // ЖЭТФ. 2006. Vol. 129, № 2. С. 400.
5. Кузнецов С.П., Сатаев И.Р. Проверка условий гиперболичности хаотического аттрактора в системе связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 5. Р. 3.
6. Isaeva O.B., Jalnina A.Yu. and Kuznetsov S.P. Arnold's cat map dynamics in a system of coupled nonautonomous van der Pol oscillators // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 74, 046207.
7. Kuznetsov S.P. and Pikovsky A. Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors // Physica D. 2007. Vol. 232. P. 87.
8. Кузнецов С.П. О реализации некоторых классических моделей и феноменов нелинейной динамики на основе связанных неавтономных осцилляторов // В кн.: Нелинейные волны' 2006 / Отв. ред. А.В. Гапонов-Грехов, В.И. Некоркин. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2007. С. 68.

9. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Пиковский А.С., Тюрюкина Л.В. Хаотическая динамика в системах связанных неавтономных осцилляторов с резонансным и нерезонансным механизмом передачи возбуждения // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 6. С. 75.
 10. Жалнин А.Ю., Кузнецов С.П. О возможности реализации в физической системе странного нехаотического аттрактора Ханта и Отта // ЖТФ. 2007. Т. 77, № 4. С. 10.
 11. Кузнецов С.П., Исаева О.Б., Осбалдестин А. Феномены комплексной аналитической динамики в системе связанных неавтономных осцилляторов с поочередным возбуждением // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33, вып. 17. С. 69.
 12. Rössler O.E. An equation for hyperchaos // Phys. Lett. A. 1979. Vol. 71, № 2–3. С. 155.
 13. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. Part I: Theory. Part II: Numerical application // Meccanica. 1980. Vol. 15. P. 9.
 14. Kaplan J.L. and Yorke J.A. Lecture Notes in Mathematics 730 (Springer-Verlag, Berlin 1979). P. 204.
 15. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. М.: Наука. Главная редакция Физико-математической литературы, 1968. 464 с.
- СФ ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН Поступила в редакцию 15.06.2009
Саратовский государственный После доработки 4.09.2009
университет им. Н.Г. Чернышевского

HYPERCHAOS IN MODEL NONAUTONOMOUS SYSTEM WITH A CASCADE EXCITATION TRANSMISSION THROUGH THE SPECTRUM

S.P. Kuznetsov, Y.I. Sokha

One of the key turbulence theory idea is a cascade energy transmission through the spectrum from large to small scales. It appears that this idea could be used for complex dynamics realization in a different-nature systems even when equations are knowingly differ from hydrodynamical. The system of four van der Pol oscillators is considered in this paper. Chaos generation is realized by cascade excitation transmission from one oscillator to another with frequency doubling. Due to slow forced modulation of the parameters responsible for the self-excitation two pair of oscillators become active turn by turn. In the beginning of each new active stage the excitation of oscillators from second to fourth are stimulated by oscillators with the half frequencies through quadratic nonlinear element. Excitation from the last oscillator to the first one is transmitted by the signal accepted via quadratic nonlinearity in the presence of auxiliary harmonic signal. In accordance with the results of numeric investigation the two positive Lyapunov exponents hyperchaos mode takes place.

Keywords: Hyperchaos, coupled oscillator, Lyapunov exponents.



Кузнецов Сергей Петрович – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). С 1988 – сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, в настоящее время – заведующий лабораторией теоретической нелинейной динамики. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора (1987) по специальности радиофизика. Профессор кафедры динамических систем. Автор учебно-научной монографии «Динамический хаос» и учебника «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 180 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под руководством С.П. Кузнецова защищены семь кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994–1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».

410019, Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН
им. В.А. Котельникова
E-mail: spkuz@rambler.ru



Соха Юрий Иванович – родился в городе Балаково Саратовской области (1985), окончил Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского (2007). В настоящее время – аспирант факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Участник всероссийских школ-конференций «Нелинейные дни в Саратове для молодых» (2003, 2006, 2007, 2009 гг.). Участник конференции молодых ученых «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика», Саратов. Имеет опубликованные работы в сборниках трудов школы-конференции.

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: ysokha@yandex.ru



КОНКУРЕНЦИЯ В ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ МОДЕЛИ АНСАМБЛЯ ИММУННЫХ Т-КЛЕТОК

М.В. Иванченко

Исследован процесс конкурентного взаимодействия в двухкомпонентной модели ансамбля иммунных Т-клеток, лежащий в основе селекции наиболее эффективных семейств (клонотипов) Т-клеток. Показано отсутствие периодических колебаний, определены границы между режимами сосуществования, частичного и полного вымирания клонотипов в пространстве параметров модели. Указаны границы применимости приближения среднего поля. Обсуждается биологический смысл полученных результатов.

Ключевые слова: Конкуренция, бифуркации, иммунная система.

Введение

Изучение конкуренции и самоорганизации в больших ансамблях нелинейных элементов со сложными связями является одной из фундаментальных проблем современной теоретической физики. Полученные результаты находят широкое применение в различных прикладных областях: в оптике [1], нелинейных сетях синхронизации [2], химии [3], экологии, экономике и социологии [4, 5]. В последнее время методы исследования сложных радиофизических систем успешно распространяются на высоко актуальные биологические задачи, где явления конкуренции и самоорганизации присутствуют повсеместно. При этом преобладающая доля работ приходится на нейродинамику: одним из примеров является теория организации последовательной активности, механизмов памяти и распознавания на основе конкуренции в нейронных ансамблях [6, 7].

Проблема регуляции иммунной системы является одним из актуальных вопросов современной иммунологии [8], и в настоящее время интерес к применению методов нелинейной динамики и статистической радиофизики в этой области переживает бурный рост [9]. На фоне различных задач ярко выделяется проблема механизмов саморегуляции численного и видового состава популяции Т-клеток, лимфоцитов, отвечающих за функционирование приобретенного иммунитета. Экспериментальные данные свидетельствуют, что у взрослых людей число Т-клеток находится

вблизи некоторого равновесного значения (порядка 10^{11} – 10^{12} Т-клеток, формирующих порядка 10^7 – 10^8 различных клонотипов). Существуют теоретические и экспериментальные указания о характере такой регуляции: в отсутствие инфекции Т-клетки конкурируют за «стимулы выживания», получаемые от специализированных клеток; полное их число сохраняется вблизи равновесного состояния [10, 11]. Однако для надежной работы иммунной системы одного большого числа лимфоцитов недостаточно: необходимо, чтобы в ансамбле сосуществовали различные клонотипы Т-клеток, вызывающие специфическую иммунную реакцию на различные возможные патогены. Вопрос о том, какой механизм обеспечивает равномерное распределение защиты в пространстве патогенов, остается практически неисследованным.

Существенный прогресс был достигнут в [12], где была построена математическая модель, представляющая собой ансамбль взаимосвязанных стохастических процессов рождения и уничтожения Т-клеток различных клонотипов. Было показано, что равномерность покрытия пространства патогенов достигается за счет резкого ускорения вымирания тех клонотипов Т-клеток, которые интенсивно конкурируют за одни и те же области этого пространства.

Исследование многомерного марковского стохастического процесса рождения-уничтожения – исключительно сложная задача, по всей видимости, аналитически неразрешимая. Среди открытых принципиальных вопросов – существование (квази)стационарного распределения вероятности, его характеристики, время вымирания отдельных клонотипов. Результаты работы [12] получены в приближении среднего поля, с помощью которого задача сводится к одномерной модели, что, в свою очередь, существенно ограничивает область применения. В связи с этим особый интерес представляет исследование многомерных динамических и стохастических моделей конкуренции Т-клеток, анализ реализуемых динамических режимов, установление закономерностей различных сценариев конкуренции. Шагом к достижению этой цели является настоящая работа, где рассматривается двумерная динамическая модель конкуренции.

В разделе 1 обсуждается двухкомпонентная математическая модель ансамбля Т-клеток. В разделе 2 изучаются глобальные свойства фазового портрета. В разделе 3 исследуются существование и устойчивость состояний равновесия. В Заключение формулируются основные результаты исследования.

1. Математическая модель

Т-клетки, присутствующие в иммунной системе человека, представлены ансамблем различных семейств (клонотипов), каждый из которых характеризуется уникальным рецептором, активирующимся при контакте с определенным классом дендритных клеток. Клонотипы, имеющие общее подмножество активаторов, конкурируют таким образом за «стимулы выживания». Получившая «стимул выживания», Т-клетка делится; независимо от этого, клетка может погибнуть в некоторый момент времени. Простейшей стохастической моделью такого поведения ансамбля Т-клеток является марковский процесс рождения-уничтожения [12]. Конкуренция за доступ к

«стимулам выживания» описывается коэффициентами рождения (для одной клетки) следующим образом:

$$\lambda_i = \sum_{q \in Q_i} \frac{\gamma}{n_q} = \sum_{q \in Q_i} \frac{\gamma}{n_i + n_{iq}}, \quad (1)$$

где i – индекс клонотипа; Q_i – множество «стимулов выживания», активирующих клетки данного клонотипа; n_i – число клеток данного клонотипа; γ – коэффициент активации; n_{iq} – суммарное число клеток конкурирующих клонотипов; n_q – полное число клеток, конкурирующих за доступ к «стимулам выживания» с индексом q . Таким образом, коэффициент рождения тем больше, чем слабее конкуренция за «стимулы выживания». В данной модели предполагается, что вероятность гибели любой Т-клетки в единицу времени не зависит от числа клеток конкретного клонотипа, поэтому коэффициент уничтожения (для одной клетки) μ_i постоянен. Для i -го клонотипа как популяции коэффициенты рождения и уничтожения равны $n_i \lambda_i$ и $n_i \mu_i$, соответственно.

В приближении среднего поля коэффициент рождения (1) принимает вид [12]

$$\lambda_i \approx \frac{\gamma Q_i}{n_i + v_i \langle n \rangle}, \quad (2)$$

где $\langle n \rangle$ – средний размер клонотипа по ансамблю, а v_i – эффективный коэффициент конкуренции данного клонотипа с остальными. Динамика математического ожидания числа Т-клеток в этом клонотипе описывается нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка [13]

$$\dot{n}_i = n_i \left(\frac{\gamma Q_i}{n_i + v_i \langle n \rangle} - \mu_i \right). \quad (3)$$

В зависимости от параметров уравнения, устойчивым может оказаться как нулевое состояние равновесия (отвечает вымиранию клонотипа), так и нетривиальное (выживание).

Недостатки приближения среднего поля очевидны уже из уравнения (3): величина среднего поля нечувствительна к вариациям n_i . Более того, условием справедливости данной аппроксимации является малость дисперсии размеров клонотипов и их эффективных коэффициентов конкуренции по отношению к соответствующим средним величинам [12]. Легко видеть, что это условие нарушается, когда, например, вымирает существенная часть клонотипов, либо когда коэффициенты конкуренции сильно варьируют.

Вопрос о грубости (структурной устойчивости) среднеполевого решения по отношению к подобным отклонениям, если они малы, и о характере режимов, если они велики, остается по-прежнему чрезвычайно сложным в рамках исходной многомерной модели. Как указано выше, в настоящей работе ставится более простая задача и ищется ответ на данные вопросы в рамках модели конкуренции двух неидентичных (в том числе, **сильно неидентичных**) клонотипов на фоне среднеполевого описания влияния остальных клонотипов.

Используя методику, аналогичную предложенной в [12], можно получить следующие выражения для коэффициентов рождения в двумерном марковском процессе [14]:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{\gamma Q_{12}}{n_1 + n_2 + \nu \langle n \rangle} + \frac{\gamma Q_1}{n_1 + \nu_1 \langle n \rangle}, \\ \lambda_2 = \frac{\gamma Q_{12}}{n_1 + n_2 + \nu \langle n \rangle} + \frac{\gamma Q_2}{n_2 + \nu_2 \langle n \rangle}, \end{cases} \quad (4)$$

где Q_{12} – размер подмножества «стимулов выживания», общих для двух клонотипов; $Q_{1,2}$ – размеры подмножеств «стимулов выживания», общих для каждого из двух клонотипов и остального ансамбля; ν, ν_1, ν_2 – коэффициенты конкуренции между первым и вторым, первым и остальными, вторым и остальными клонотипами, соответственно. Как указано выше, в отличие от среднеполевого описания, рассматривающего динамику только одного клонотипа в явном виде, данное приближение допускает сильную неидентичность между двумя клонотипами как в параметрах, так и в результирующих размерах.

В данной работе исследуется динамика математических ожиданий числа Т-клеток клонотипов. Соответствующие уравнения имеют вид [13]

$$\begin{cases} \dot{n}_1 = n_1 \left(-\mu_1 + \frac{\gamma Q_{12}}{n_1 + n_2 + \nu \langle n \rangle} + \frac{\gamma Q_1}{n_1 + \nu_1 \langle n \rangle} \right), \\ \dot{n}_2 = n_2 \left(-\mu_2 + \frac{\gamma Q_{12}}{n_1 + n_2 + \nu \langle n \rangle} + \frac{\gamma Q_2}{n_2 + \nu_2 \langle n \rangle} \right), \end{cases} \quad (5)$$

или после замены переменных $\tilde{t} = \mu_1 t$, $\mu = \mu_2/\mu_1$, $p_{1,2} = Q_{12}/(Q_{12} + Q_{1,2})$, $u_{1,2} = \mu_{1,2}/(\gamma(Q_{12} + Q_{1,2}))n_{1,2}$, $\alpha = p_1/(\mu p_2)$, $\tilde{\nu} = \nu\mu_1/(\gamma(Q_{12} + Q_1))\langle n \rangle$, $\tilde{\nu}_{1,2} = \nu_{1,2}\mu_1/(\gamma(Q_{12} + Q_1))\langle n \rangle$ (знак «тильда» в дальнейшем для краткости опускаем) получаем

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_1 \left(-1 + \frac{p_1}{u_1 + u_2 + \tilde{\nu}} + \frac{1 - p_1}{u_1 + \tilde{\nu}_1} \right), \\ \dot{u}_2 = \mu u_2 \left(-1 + \frac{\alpha p_2}{u_1 + u_2 + \tilde{\nu}} + \frac{\alpha(1 - p_2)}{u_2 + \tilde{\nu}_2} \right). \end{cases} \quad (6)$$

Здесь все переменные и параметры являются безразмерными и неотрицательными: $u_{1,2} \geq 0$ – число Т-клеток каждого из клонотипов; μ – отношение коэффициента уничтожения для второго клонотипа к первому; $\mu\alpha$ – имеет смысл аналогичного отношения префакторов для коэффициентов рождения; $0 \leq p_{1,2} \leq 1$ – доля одновременно распознаваемых патогенов ($p_1 = \alpha p_2$); ν, ν_1, ν_2 – среднеполевой вклад остальной части популяции Т-клеток в конкуренцию за общие и собственные патогены, соответственно. Обозначим левую часть первого уравнения как $P(u_1, u_2)$, а второго – как $Q(u_1, u_2)$.

Поскольку система двумерная, квазипериодические и хаотические колебания отсутствуют. Как будет показано в дальнейшем, предельные циклы также не могут реализоваться. Легко видеть, что возможны следующие виды состояний равновесия: (а) тривиальное $u_{1,2} = 0$ (существует всегда); (б) частично тривиальные

$u_1 = 0, u_2 \neq 0$ и $u_1 \neq 0, u_2 = 0$; (в) нетривиальные $u_{1,2} \neq 0$. Таким образом, ключевым вопросом являются существование и устойчивость состояний равновесия, определяющие результат процесса конкуренции.

2. Глобальная динамика

Отсутствие предельных циклов вытекает из критерия Бендиксона–Дюлака. В самом деле, при выборе $B(u_1, u_2) = 1/(u_1 u_2)$ сумма $(BP)'_{u_1} + (BQ)'_{u_2}$ является строго отрицательной для всех $u_{1,2}$

$$\begin{cases} (BP)'_{u_1} = -\frac{1}{u_2} \left(\frac{p_1}{(u_1 + u_2 + v)^2} + \frac{1 - p_1}{(u_1 + v_1)^2} \right) < 0, \\ (BQ)'_{u_2} = -\frac{\mu\alpha}{u_1} \left(\frac{p_2}{(u_1 + u_2 + v)^2} + \frac{1 - p_2}{(u_2 + v_2)^2} \right) < 0. \end{cases} \quad (7)$$

Кроме того, удается сконструировать поглощающую область, которая гарантирует отсутствие траекторий, уходящих на бесконечность и наличие по крайней мере одного устойчивого состояния равновесия внутри.

Правые части уравнения (1) ограничены снизу

$$\begin{cases} -1 + \frac{p_1}{u_1 + u_2 + v} + \frac{1 - p_1}{u_1 + v_1} \geq -1 + \frac{1 - p_1}{u_1 + v_1} > 0 \text{ при } u_1 < 1 - p_1 - v_1, \\ -1 + \frac{\alpha p_2}{u_1 + u_2 + v} + \frac{\alpha(1 - p_2)}{u_2 + v_2} \geq -1 + \frac{\alpha(1 - p_2)}{u_2 + v_2} > 0 \text{ при } u_2 < \alpha(1 - p_2) - v_2. \end{cases} \quad (8)$$

Таким образом,

$$\begin{cases} \dot{u}_1 > 0 \text{ при } u_1 < 1 - p_1 - v_1, \\ \dot{u}_2 > 0 \text{ при } u_2 < \alpha(1 - p_2) - v_2. \end{cases} \quad (9)$$

Следовательно, нижние границы поглощающей области задаются уравнениями

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1^+ : u_1 = \max\{1 - p_1 - v_1, 0\}, \\ \mathcal{L}_2^+ : u_2 = \max\{\alpha(1 - p_2) - v_2, 0\}. \end{cases} \quad (10)$$

Аналогично

$$\begin{cases} -1 + \frac{p_1}{u_1 + u_2 + v} + \frac{1 - p_1}{u_1 + v_1} \leq -1 + \frac{p_1}{u_1 + v} + \frac{1 - p_1}{u_1 + v_1} \leq -1 + \frac{1}{u_1 + \min\{v, v_1\}} < 0, \\ \text{при } u_1 > 1 - \min\{v, v_1\}, \\ -1 + \frac{\alpha p_2}{u_1 + u_2 + v} + \frac{\alpha(1 - p_2)}{u_2 + v_2} \leq -1 + \frac{\alpha p_2}{u_2 + v} + \frac{\alpha(1 - p_2)}{u_2 + v_2} \leq -1 + \frac{\alpha}{u_2 + \min\{v, v_2\}} < 0, \\ \text{при } u_2 > \alpha - \min\{v, v_2\}. \end{cases} \quad (11)$$

Отсюда

$$\begin{cases} \dot{u}_1 < 0 \text{ при } u_1 > 1 - \min\{v, v_1\}, \\ \dot{u}_2 < 0 \text{ при } u_2 > \alpha - \min\{v, v_2\}, \end{cases} \quad (12)$$

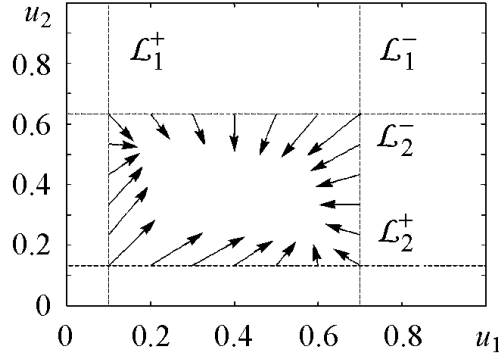


Рис. 1. Поглощающая область при $p_1 = 0.5$, $p_2 = 0.6$, $v = 0.3$, $v_1 = 0.4$, $v_2 = 0.2$, $\mu = 1$, $\alpha = 5/6$. Стрелки указывают направление потока

и верхние границы поглощающей области задаются формулами

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1^- : u_1 = 1 - \min\{v, v_1\}, \\ \mathcal{L}_2^- : u_2 = \alpha - \min\{v, v_2\}. \end{cases} \quad (13)$$

Таким образом, поглощающая область ограничена линиями $\mathcal{L}_{1,2}^{+,-}$ (рис. 1), и все нетривиальные состояния равновесия находятся внутри нее. Если границы $\mathcal{L}_{1,2}^+$ лежат в первом квадрате и не совпадают с осями координат, в системе существует, по крайней мере, одно устойчивое нетривиальное состояние равновесия.

3. Локальная динамика

3.1. Тривиальное состояние равновесия. Тривиальное состояние равновесия $\mathcal{O}^{0,0} : \{u_{1,2} = 0\}$ существует при любых параметрах системы. Его устойчивость определяется характеристическими показателями

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1 + \frac{p_1}{v} + \frac{1-p_1}{v_1} < 0 \text{ при } v_1 > v_1^*, \\ \lambda_2 = \mu \left(-1 + \alpha \frac{p_2}{v} + \alpha \frac{1-p_2}{v_2} \right) < 0 \text{ при } v_2 > v_2^*, \end{cases} \quad (14)$$

где $v_1^* = v(1-p_1)/(v-p_1)$, $v_2^* = v\alpha(1-p_2)/(v-\alpha p_2)$. Устойчивость $\mathcal{O}^{0,0}$ ($\lambda_{1,2} < 0$) соответствует вымиранию обоих клонотипов. При $v < p_1$ первый показатель заведомо положителен: $\lambda_1 > 0 \forall v_1$, а при $v < \alpha p_2$ заведомо положительным становится второй: $\lambda_2 > 0 \forall v_2$. Указанные ограничения сверху на v означают, что при

не слишком большой конкуренции с остальной популяцией один или оба клонотипа получают достаточно стимулов выживания от специфичных распознаваемых антигенов, и вымирания не происходит. Бифуркационная диаграмма для тривиального состояния равновесия в плоскости параметров $\{v_1, v_2\}$ представлена на рис. 2.

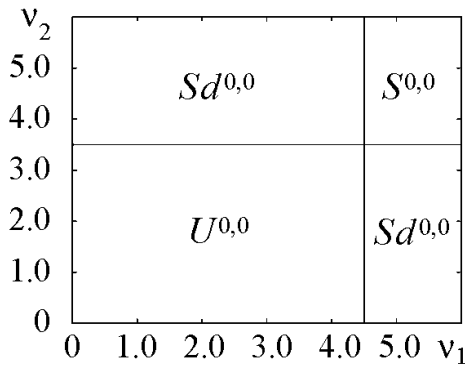


Рис. 2. Устойчивость $\mathcal{O}^{0,0}$ при $p_1 = 0.5$, $p_2 = 0.6$, $v = 0.3$, $\mu = 1$, $\alpha = 5/6$. $S^{0,0}$ – устойчивый узел, $Sd^{0,0}$ – седло, $U^{0,0}$ – неустойчивый узел

Система (1) обладает инвариантными многообразиями $\mathcal{M}_1 : \{u_1 = 0\}$ и $\mathcal{M}_2 : \{u_2 = 0\}$. Они глобально устойчивы при $P(u_1, u_2) < 0 \forall u_{1,2} > 0$ и $Q(u_1, u_2) < 0 \forall u_{1,2} > 0$,

соответственно. Это условие имеет вид

$$\begin{cases} -1 + \frac{p_1}{v} + \frac{1-p_1}{v_1} < 0, \\ -1 + \frac{\alpha p_2}{v} + \frac{\alpha(1-p_2)}{v_2} < 0, \end{cases} \quad (15)$$

что совпадает с условием отрицательности характеристических показателей для $\mathcal{O}^{0,0}$ (14). Когда одно из инвариантных многообразий становится устойчивым, траектории системы асимптотически приближаются к нему по соответствующей переменной. Когда они устойчивы одновременно, значения обеих переменных стремятся к нулю, и других состояний равновесия не существует. **Биологической интерпретацией этих режимов является вымирание одного или обоих клонотипов, соответственно.**

3.2. Частично тривиальные состояния равновесия. Исследуем существование и устойчивость частично тривиальных состояний равновесия $\mathcal{O}^{1,0} : \{u_1 = u_1^* \neq 0, u_2 = 0\}$ и $\mathcal{O}^{0,1} : \{u_1 = 0, u_2 = u_2^* \neq 0\}$.

Для $\mathcal{O}^{0,1}$ стационарное значение u_2^* удовлетворяет уравнению

$$-1 + \frac{\alpha p_2}{u_2^* + v} + \frac{\alpha(1-p_2)}{u_2^* + v_2} = 0, \quad (16)$$

откуда следует

$$(u_2^*)_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\alpha - v - v_2 \pm \sqrt{(\alpha - v - v_2)^2 - 4vv_2(1 - \alpha \frac{1-p_2}{v_2} - \alpha \frac{p_2}{v})} \right). \quad (17)$$

Характеристические показатели имеют противоположные знаки, когда $1 - \frac{\alpha(1-p_2)}{v_2} - \alpha \frac{p_2}{v} < 0$ и одинаковые – в обратном случае. Предположим, что $\alpha - v - v_2 > 0$, тогда $\alpha > v + v_2$ и $1 - \alpha \frac{1-p_2}{v_2} - \alpha \frac{p_2}{v} < 1 - (1-p_2) \frac{v+v_2}{v_2} - p_2 \frac{v+v_2}{v} = -(1-p_2) \frac{v}{v_2} - p_2 \frac{v_2}{v} < 0$. Таким образом, $(u_2^*)_- \leq 0$, и только одно частично тривиальное состояние равновесия $\mathcal{O}^{0,1} : \{u_1 = 0, u_2 = (u_2^*)_+\}$ может существовать. Возьмем теперь $(u_2^*)_+$. Как показано выше, $\alpha - v - v_2$ становится отрицательным (например, при увеличении v_2) прежде чем $1 - \alpha \frac{1-p_2}{v_2} - \alpha \frac{p_2}{v}$ становится положительным. Это означает, что $(u_2^*)_+ > 0$ пока $1 - \alpha \frac{1-p_2}{v_2} - \alpha \frac{p_2}{v} < 0$. Следовательно,

$$\mathcal{P}_{ex}^{0,1} : \left\{ 1 - \alpha \frac{1-p_2}{v_2} - \alpha \frac{p_2}{v} = 0 \right\} \quad (18)$$

задает бифуркационное многообразие в пространстве параметров, соответствующее влипанию $\mathcal{O}^{0,1}$ в $\mathcal{O}^{0,0}$ (транскритическая бифуркация). По одну сторону существует единственное частично тривиальное состояние равновесия $\mathcal{O}^{0,1}$, по другую – ни

одного. Обратим внимание, что эта граница точно совпадает с изменением устойчивости многообразия \mathcal{M}_2 и знака λ_2 у $\mathcal{O}^{0,0}$ (14), (15). Аналогично, для $\mathcal{O}^{1,0}$ имеем

$$(u_1^*)_+ = \frac{1}{2} \left(1 - v - v_1 + \sqrt{(\alpha - v - v_1)^2 - 4vv_1 \left(1 - \frac{1-p_1}{v_1} - \frac{p_1}{v}\right)} \right) \quad (19)$$

и бифуркационное многообразие

$$\mathcal{P}_{ex}^{1,0} : \left\{ 1 - \frac{1-p_1}{v_1} - \frac{p_1}{v} = 0 \right\}. \quad (20)$$

Заметим, что $\mathcal{O}^{0,0}$ становится устойчивым после последовательного слияния с $\mathcal{O}^{1,0}$ и $\mathcal{O}^{0,1}$.

Исследуем теперь устойчивость частично тривиальных состояний равновесия. Характеристические показатели $\mathcal{O}^{0,1}$ задаются диагональными коэффициентами матрицы линеаризации

$$\begin{cases} \lambda_1 = P'_{u_1} = -1 + \frac{p_1}{u_2^* + v} + \frac{1-p_1}{v_1}, \\ \lambda_2 = Q'_{u_2} = \mu \left(-1 + \alpha \frac{p_2 v}{(u_2^* + v)^2} + \alpha \frac{(1-p_2)v_2}{(u_2^* + v_2)^2} \right) \leq \mu \left(-1 + \alpha \frac{p_2}{u_2^* + v} + \alpha \frac{1-p_2}{u_2^* + v_2} \right) = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Легко видеть, что $\lambda_2 = 0$ в момент слияния с $\mathcal{O}^{0,0}$: $u_2^* = 0$. Поскольку $\lambda_1 = -1 + \frac{p_1}{u_2^* + v} + \frac{1-p_1}{v_1} \leq -1 + \frac{p_1}{v} + \frac{1-p_1}{v_1}$, его значение отрицательно в момент исчезновения $\mathcal{O}^{1,0}$ (20). Таким образом, $\mathcal{O}^{0,1}$ устойчиво при условии, что $\mathcal{O}^{1,0}$ не существует. Однако это условие лишь достаточное: бифуркация, приводящая к приобретению устойчивости, происходит до исчезновения $\mathcal{O}^{1,0}$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} Q(0, u_2^*) = -1 + \frac{\alpha p_2}{u_2^* + v} + \frac{\alpha(1-p_2)}{u_2^* + v_2} = 0, \\ \lambda_1 = -1 + \frac{p_1}{u_2^* + v} + \frac{1-p_1}{v_1} = 0. \end{cases} \quad (22)$$

можно получить точное выражение, отвечающее бифуркационному многообразию

$$\mathcal{P}_{st}^{0,1} : \left\{ v_2 = v + \frac{\frac{p_1 v_1}{v_1 - 1 + p_1} \left(\alpha - \frac{p_1 v_1}{v_1 - 1 + p_1} \right)}{\frac{p_1 v_1}{v_1 - 1 + p_1} - \alpha p_2} \right\}. \quad (23)$$

Устойчивость $\mathcal{O}^{1,0}$ определяется следующими характеристическими показателями:

$$\begin{cases} \lambda_1 = P'_{u_1} = -1 + \frac{p_1 v}{(u_1^* + v)^2} + \frac{(1-p_1)v_1}{(u_1^* + v_1)^2} \leq -1 + \frac{p_1}{u_1^* + v} + \frac{1-p_1}{u_1^* + v_1} = 0, \\ \lambda_2 = Q'_{u_2} = \mu \left(-1 + \alpha \frac{p_2}{u_1^* + v} + \alpha \frac{1-p_2}{v_2} \right) \leq \mu \left(-1 + \alpha \frac{p_2}{v} + \alpha \frac{1-p_2}{v_2} \right). \end{cases} \quad (24)$$

Аналогично предыдущему случаю, $\mathcal{O}^{1,0}$ устойчиво, если $\mathcal{O}^{0,1}$ не существует. Бифуркационное многообразие приобретения устойчивости задается выражением

$$\mathcal{P}_{st}^{1,0} : \left\{ v_1 = v + \frac{\frac{\alpha p_2 v_2}{v_2 - \alpha(1-p_2)} \left(1 - \frac{\alpha p_2 v_2}{v_2 - \alpha(1-p_2)} \right)}{\frac{\alpha p_2 v_2}{v_2 - \alpha(1-p_2)} - p_1} \right\}. \quad (25)$$

Итак, $\mathcal{O}^{1,0}$ и $\mathcal{O}^{0,1}$ меняют устойчивость в области своего существования (см. пример бифуркационной диаграммы на рис. 3). В частности, они становятся устойчивыми при увеличении v_2 и v_1 , соответственно (при дальнейшем увеличении происходит влипание в тривиальное состояние равновесия). Особо следует обратить внимание на тот факт, что отсутствие одного из состояний гарантирует устойчивость другого (в области существования). Биологическая интерпретация данного эффекта такова: когда один из клонотипов испытывает слишком большую конкуренцию, он вымирает, и выживает только другой.

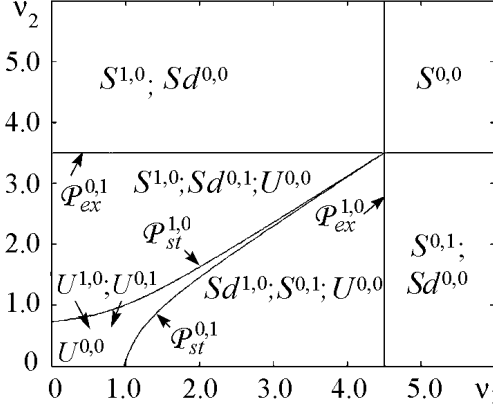


Рис. 3. Устойчивость частично тривиальных состояний равновесия в плоскости параметров $\{v_1, v_2\}$ при $p_1 = 0.5$, $p_2 = 0.6$, $v = 0.3$, $\mu = 1$, $\alpha = 5/6$. $S^{1,0}$ и $S^{0,1}$ – устойчивые узлы, $Sd^{1,0}$ и $Sd^{0,1}$ – седла, $U^{1,0}$ и $U^{0,1}$ – неустойчивые узлы

Обратимся наконец к вопросу о существовании и устойчивости нетривиальных состояний равновесия $\mathcal{O}^{1,1} : \{u_{1,2} \neq 0\}$ системы (1). Они удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} -1 + \frac{p_1}{u_1 + u_2 + v} + \frac{1-p_1}{u_1 + v_1} = 0, \\ -1 + \frac{\alpha p_2}{u_1 + u_2 + v} + \frac{\alpha(1-p_2)}{u_2 + v_2} = 0. \end{cases} \quad (26)$$

Решения отвечают точкам пересечения кривых $u_2 = \mathcal{F}_1(u_1)$ и $u_1 = \mathcal{F}_2(u_2)$, задаваемых соответственно первым и вторым уравнениями,

$$\begin{cases} u_2 = \mathcal{F}_1(u_1) = -u_1 - v + \frac{p_1(u_1 + v_1)}{-1 + p_1 + u_1 + v_1}, \\ u_1 = \mathcal{F}_2(u_2) = -u_2 + p_2\alpha - v + \frac{(1-p_2)p_2\alpha^2}{(-1 + p_2)\alpha + u_2 + v_2}. \end{cases} \quad (27)$$

Функции $\mathcal{F}_{1,2}(u_{1,2})$ являются непрерывными внутри поглощающей области, то есть над прямыми $\mathcal{L}_{1,2}^+$ (6). Поскольку все нетривиальные состояния равновесия принадлежат этой области, ограничимся исследованием этих функций в ней. Пусть $u_{1,2}^*$ являются решением системы

$$\begin{cases} u_2^* = \mathcal{F}_1(u_1^*), \\ u_1^* = \mathcal{F}_2(u_2^*). \end{cases} \quad (28)$$

Тогда u_1^* является решением уравнения

$$\mathcal{F}_{21}(u_1) = \mathcal{F}_2(\mathcal{F}_1(u_1)) - u_1 = 0, \quad (29)$$

и $[\mathcal{F}_{21}(u_1)]'_{u_1} = [\mathcal{F}_2(u_2)]'_{u_2} [\mathcal{F}_1(u_1)]'_{u_1} - 1$. Подстановка (27) дает

$$\begin{cases} [\mathcal{F}_1(u_1)]'_{u_1} = -1 - \frac{(1-p_1)p_1}{(-1+p_1+u_1+v_1)^2} < -1, \\ [\mathcal{F}_2(u_2)]'_{u_2} = -1 - \frac{(1-p_2)p_2\alpha^2}{(-(1-p_2)\alpha+u_2+v_2)^2} < -1. \end{cases} \quad (30)$$

Таким образом, $[\mathcal{F}_{21}(u_1)]'_{u_1} > 0$ и (29) имеет не более одного решения. Аналогичные рассуждения могут быть проведены по отношению к $\mathcal{F}_{12}(u_2) = \mathcal{F}_1(\mathcal{F}_2(u_2)) - u_2 = 0$.

Итак, система (1) не может иметь более одного нетривиального состояния равновесия. Если $\mathcal{L}_{1,2}^+$ лежат в первом квадранте и не совпадают с осями координат (то есть $1-p_1-v_1 > 0$, $\alpha(1-p_2)-v_2 > 0$), то $\mathcal{O}^{1,1}$ существует, единственно и устойчиво. В противном случае, ни существование, ни стабильность не гарантированы (устойчивыми могут быть частично тривиальное или тривиальное состояния равновесия). Наконец, когда инвариантные многообразия $\mathcal{M}_{1,2}$ становятся глобально устойчивыми (28) (одновременно с приобретением устойчивости $\mathcal{O}^{0,0}$), никаких иных состояний равновесия существовать не может.

Какая бифуркация приводит к устойчивости $\mathcal{O}^{0,1}$? (Пока оно неустойчиво, $\mathcal{O}^{1,1}$ обязательно существует и устойчиво. Здесь мы предполагаем, что $\mathcal{O}^{1,0}$ либо неустойчиво, либо не существует, поскольку устойчивость $\mathcal{O}^{1,0}$ и $\mathcal{O}^{0,1}$ взаимоисключающи. Аналогичный анализ можно провести в предположении устойчивости $\mathcal{O}^{1,0}$.)

Покажем, что $\mathcal{O}^{1,1}$ сливается с $\mathcal{O}^{0,1}$ как раз в тот момент, когда $\mathcal{O}^{0,1}$ приобретает устойчивость (23). В самом деле, предполагая $u_1 = 0$ в (26)

$$\begin{cases} -1 + \frac{p_1}{u_1+u_2+v} + \frac{1-p_1}{u_1+v_1} = 0, \\ -1 + \frac{\alpha p_2}{u_1+u_2+v} + \frac{\alpha(1-p_2)}{u_2+v_2} = 0, \\ u_1 = 0, \end{cases} \quad (31)$$

получаем

$$\begin{cases} -1 + \frac{p_1}{u_2+v} + \frac{1-p_1}{v_1} = 0, \\ -1 + \frac{\alpha p_2}{u_2+v} + \frac{\alpha(1-p_2)}{u_2+v_2} = 0, \end{cases} \quad (32)$$

что идентично (22). Таким образом, $\mathcal{O}^{0,1}$ становится устойчивым в результате транскритической бифуркации с устойчивым узлом $\mathcal{O}^{1,1}$.

Убедимся, что после бифуркации формальное решение $\mathcal{O}^{1,1}$ имеет $u_1^* < 0$ и не существует в области неотрицательных размеров клонотипов. Вследствие большого числа параметров, переход между $(1-p_1)/v_1 = 1$ (влипание \mathcal{L}_1^+ в ось y) и $(1-p_1)/v_1 = 1-p_1/v$ (\mathcal{M}_1 становится устойчивым) можно осуществить бесконечным числом путей (как и в ситуации с \mathcal{L}_2^+ и \mathcal{M}_2). Тем не менее, каждый из них содержит транскритическую бифуркацию $\mathcal{O}^{1,1}$ и $\mathcal{O}^{0,1}$. Будем, для определенности,

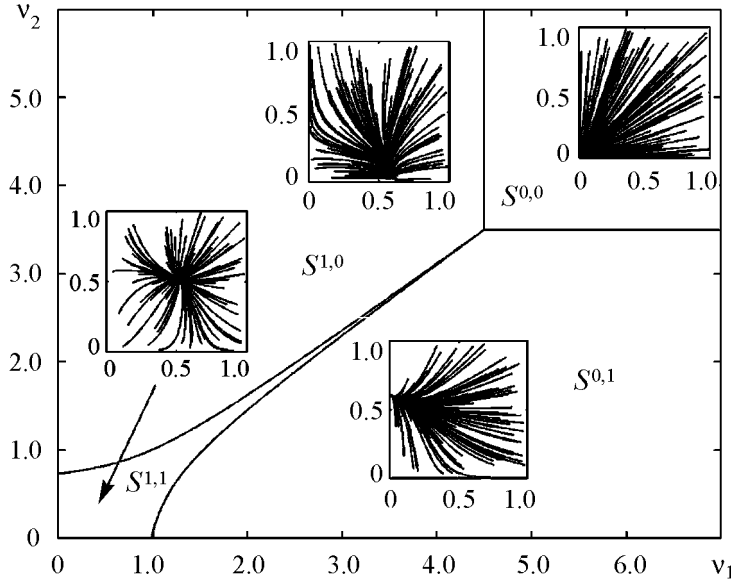


Рис. 4. Устойчивые состояния равновесия в плоскости параметров $\{v_1, v_2\}$ при $p_1 = 0.5$, $p_2 = 0.6$, $v = 0.3$, $\mu = 1$, $\alpha = 5/6$. Вставки: примеры локальных фазовых портретов, по горизонтали – u_1 , по вертикали – u_2

увеличивать v_1 при постоянных значениях остальных параметров. Тогда u_1^* является функцией переменной v_1 .

Легко показать, что $\partial_{v_1} u_1^* < 0$ и, следовательно, $u_1^* < 0$ и $\mathcal{O}^{1,1}$ не существует после бифуркации. Координаты состояния равновесия удовлетворяют уравнению (29)

$$\mathcal{F}_{21}(u_1^*, v_1) = \mathcal{F}_2(\mathcal{F}_1(u_1^*, v_1)) - u_1^* = 0. \quad (33)$$

Частные производные по v_1 равны

$$\begin{aligned} \partial_{v_1} [\mathcal{F}_2(\mathcal{F}_1(u_1^*, v_1)) - u_1^*] &= \partial_{u_2^*} \mathcal{F}_2 [\partial_{u_1^*} \mathcal{F}_1 \partial_{v_1} u_1^* + \partial_{v_1} \mathcal{F}_1] - \partial_{v_1} u_1^* = \\ &= \partial_{v_1} u_1^* [\partial_{u_2^*} \mathcal{F}_2 \partial_{u_1^*} \mathcal{F}_1 - 1] + \partial_{u_2^*} \mathcal{F}_2 \partial_{v_1^*} \mathcal{F}_1 = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Отсюда

$$\partial_{v_1} u_1^* = \frac{\partial_{u_2^*} \mathcal{F}_2 \partial_{v_1^*} \mathcal{F}_1}{1 - \partial_{u_2^*} \mathcal{F}_2 \partial_{u_1^*} \mathcal{F}_1}. \quad (35)$$

Из (30) и $\partial_{v_1^*} \mathcal{F}_1 = -p_1(1 - p_1)/(u_1 + v_1 + p_1 - 1)^2 < 0$ следует $1 - \partial_{u_2^*} \mathcal{F}_2 \partial_{u_1^*} \mathcal{F}_1 < 0$, $\partial_{u_2^*} \mathcal{F}_2 \partial_{v_1^*} \mathcal{F}_1 > 0$ и, окончательно, $\partial_{v_1} u_1^* < 0$, что завершает доказательство.

В результате, типичное разбиение плоскости параметров $v_{1,2}$ на области устойчивости различных состояний равновесия имеет вид, представленный на рис. 4.

Заключение

В работе исследована динамика двухкомпонентной модели популяции Т-клеток. Показано, что периодические колебания в системе невозможны, и траектории асимптотически приближаются к состоянию равновесия. Определены области существования и устойчивости различных состояний равновесия. Установлено, что для всех

значений параметров лишь одно из них является устойчивым. В зависимости от конкретных значений, определяющих конкурентное преимущество одного из клонотипов над другим, или остальной части популяции (описываемой в среднеполевом приближении) над обоими, возможны: (1) сосуществование двух клонотипов, (2) вымирание одного из них, (3) вымирание обоих. **Таким образом, среднеполевое приближение неприменимо при больших вариациях характеристик клонотипов (режимы вымирания одного или обоих), однако обладает свойством грубости по крайней мере относительно небольших вариаций характеристик второго клонотипа, выделенного из среднеполевого описания (режим сосуществования).**

Полученные результаты дают представление о динамике многомерной стохастической модели в частности и регуляции численности и состава в популяции иммунных Т-клеток в целом: отсутствие периодических колебаний моментов случайных величин – размеров клонотипов, единственность и устойчивость (квази)стационарного распределения вероятности размеров, границы областей вымирания отдельных клонотипов. **Они поддерживают гипотезу о природе механизма регуляции численности и видового разнообразия Т-клеток, воспроизводят экспериментально наблюдаемые отсутствие периодических колебаний в составе ансамбля Т-клеток и быстрое возвращение к прежнему равновесному состоянию в постинфекционный период.**

Представленный анализ, будучи ограниченным случаем двух клонотипов, складывается, вместе с тем, основу для развития теории конкуренции в многокомпонентных моделях иммунной системы. Предварительные аналитические и численные результаты для трех- и N -компонентных моделей (последние уже не используют приближение среднего поля) указывают на то, что автоколебания не возникают и в таких системах, а состояние равновесия (будь то нетривиальное, тривиальное или одно из $2^N - 2$ частично тривиальных состояний) всегда существует и, по-видимому, единственно.

Автор благодарит К. Молина-Парис (С. Molina-Paris), Г. Лайт (G. Lythe) и Э. Стирк (E. Stirk) за плодотворные дискуссии, а также рецензента за конструктивные замечания и предложения, которые позволили существенно улучшить статью.

Библиографический список

1. *Arecchi F.T. et al.* Pattern formation and competition in nonlinear optics // *Physics Reports*. 1999. Vol. 318. P. 1.
2. *Afraimovich V.S., Nekorkin V.I., Osipov G.V., Shalfeev V.D.* Stability, Structures and Chaos in Nonlinear Synchronization Networks. Singapore: World Scientific, 1994.
3. *Kuramoto Y.* Chemical oscillations and turbulence. Tokio: Springer, 1984.
4. *Короновский А.А., Трубецков Д.И.* Нелинейная динамика в действии. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2002.
5. *Murray J.D.* Mathematical Biology. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2002.
6. *Rabinovich M.I., Varona P., Selverston A.I. et al.* Dynamical principles in neuroscience // *Rev. Mod. Phys.* 2006. Vol. 78. P. 1213.

7. *Nekorkin V.I., Shapin D.S., Dmitrichev A.S. et al.* Heteroclinic contours and self-replicated solitary waves in a reaction-diffusion lattice with complex threshold excitation // *Physica D*. 2008. Vol. 237. P. 2463.
8. *Jameson S.C.* Maintaining the norm: T-cell homeostasis // *Nature Reviews Immunology*. 2002. Vol. 2. P. 547.
9. *Perelson A. and Weisbuch G.* Immunology for physicists // *Reviews of Modern Physics*. 1997. Vol. 69. P. 1219.
10. *Freitas A.A. and Rocha B.B.* Lymphocyte lifespans: homeostasis, selection and competition // *Immun. Today*. 1993. Vol. 14. P. 25.
11. *de Boer R. and Perelson A.* Competitive control of the self-renewing T cell repertoire // *International Immunology*. 1997. Vol. 9. P. 779.
12. *Stirk E.R., Molina-Paris C., and van den Berg H.* Stochastic niche structure and diversity maintenance in the T cell repertoire // *J. Theor. Biol.* 2008. Vol. 255. P. 237.
13. *Gillespie D.T.* Stochastic simulation of chemical kinetics // *Annu. Rev. Phys. Chem.* 2007. Vol. 58. P. 35.
14. *Stirk E., Lythe G., van den Berg H., Hurst G. and Molina-Paris C.* The limiting conditional distribution in a stochastic model of T cell repertoire maintenance // *Math. Biosciences*, 2010 (in print).

*University of Leeds
United Kingdom*

*Поступила в редакцию 3.12.2009
После доработки 24.02.2010*

COMPETITION IN THE TWO-COMPONENT MODEL OF THE IMMUNE T-CELL ENSEMBLE

M.V. Ivanchenko

We study the process of competition in the two-component model of the immune T-cells ensemble that underpins the selection mechanism of the most efficient T-cell species (clonotypes). We demonstrate the absence of periodic oscillations, determine the regions of coexistence, partial and mutual extinction of clonotypes. Applicability of the mean field approximation is analyzed. The biological implications of the results are discussed.

Keywords: Competition, bifurcations, immune system.



Иванченко Михаил Васильевич – родился в 1981 году. Окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (2004), там же защитил кандидатскую диссертацию (2007). В настоящее время является сотрудником кафедры прикладной математики университета Лидса (Великобритания). Область научных интересов – нелинейная динамика, математическая иммунология, локализация энергии в нелинейных решеточных системах, синхронизация, нейродинамика. Имеет около 35 печатных работ по данной тематике. Был удостоен медали Российской академии наук в конкурсе 2004 года на лучшие научные работы по направлению «Общая физика и астрономия».

Leeds, United Kingdom, LS2 9JT
University of Leeds, Department of Applied Mathematics
E-mail: M.Ivanchenko@leeds.ac.uk



ВЛИЯНИЕ ПАССИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА СИНХРОНИЗАЦИЮ ОСЦИЛЛЯТОРНЫХ АНСАМБЛЕЙ

В.С. Петров, Г.В. Осипов

В данной работе рассматривается влияние пассивных элементов на синхронизацию в ансамблях связанных неидентичных осцилляторов Бонхоффера–ван дер Поля. С помощью численного моделирования было получено, что введение пассивных элементов может приводить как к увеличению, так и к уменьшению порога глобальной синхронизации в системе. Данные результаты были подтверждены аналитически с использованием кусочно-линейной аппроксимации модели Бонхоффера–ван дер Поля. Результаты перенесены также на случаи цепочек и двумерных регулярных решеток автоколебательных элементов.

Ключевые слова: Синхронизация, автоколебательный ансамбль, пассивный элемент.

Введение

Изучение коллективной динамики больших систем связанных элементов является на сегодняшний день одной из наиболее важных задач, которые возникают в физике, химии, биологии. В таких системах могут наблюдаться всевозможные динамические эффекты, например, синхронизация, распространение плоских, концентрических и спиральных волн, а также формирование различных пространственно-временных структур. Несмотря на то, что большинство естественных систем являются неоднородными, то есть состоят из различных элементов, отличающихся индивидуальной динамикой, на данный момент большая часть опубликованных работ посвящена исследованию динамики однородных сред [1–5]. Тем не менее изучение именно неоднородных систем, представляющих собой смеси пассивных, возбудимых и автоколебательных элементов, является важным и интересным. Примером такой системы является сердце. В сердце клетки рабочего миокарда, так называемые кардиомиоциты, являются возбудимыми; клетки, принадлежащие водителям ритма, являются автоколебательными; кроме этого, существует особый тип клеток – фибробласты, которые являются пассивными. Автоколебательные элементы могут генерировать периодический ритм независимо от внешних условий. Разница между

возбудимыми и пассивными элементами состоит в том, что первые могут производить так называемый потенциал действия в ответ на входящий стимул, в то время как последние лишь релаксируют к состоянию равновесия. С точки зрения качественной теории динамических систем разница сводится к наличию у возбудимых элементов порогового множества (например, кривая медленных движений или входящая сепаратриса седла). Очевидно, что только рассмотрение совокупности всех указанных элементов, а также особенностей их взаимодействия позволяет получить наиболее адекватные результаты при исследовании динамики подобных биологических систем. Заметим, что такие динамические процессы, как распространение концентрических или спиральных волн, имеют прямое отношение к работе сердца [6]. В частности, в отсутствие каких-либо патологий сино-атриальный узел – один из водителей ритма в сердце – генерирует концентрические волны электрической активности. Когда фронт такой волны проходит через клетки рабочего миокарда (кардиомиоциты), он инициирует сокращение мышечной ткани. Однако при развитии патологий может произойти разрушение фронта концентрической волны и рождение спиральной волны или хаоса спиральных волн. В сердце такие эффекты соответствуют различным аритмиям: тахикардии и фибрилляции, борьба с которыми является крайне актуальной задачей. Совмещение подходов биологии и нелинейной динамики позволяет наиболее эффективно исследовать подобные эффекты.

Одним из весьма важных вопросов динамики разнородных ансамблей является проблема синхронизации [7]. Так, в частности, пассивные элементы могут оказывать существенное влияние на свойства синхронизации в осцилляторных ансамблях, представляющих собой совокупность связанных неидентичных автоколебательных элементов [8]. Эта проблема находится в центре рассмотрения данной статьи. Кроме того, приложение подобной задачи может быть найдено при рассмотрении функционирования синусного узла сердца. Синусный узел состоит из автоколебательных и пассивных сердечных клеток – пейсмейкеров и фибробластов, соответственно, причем число последних может достигать 70%. Необходимым условием нормальной работы сердца является синхронизация клеток в пределах синусного узла, так как именно эти клетки формируют ритм всего сердца в целом. Поэтому данная задача является важной и актуальной.

В данной работе представлены результаты численных и аналитических исследований с использованием модели Бонхоффера–ван дер Поля [9]. В контексте моделирования сердечной активности данная модель является простой, но тем не менее достаточно точной аппроксимацией сердечной клетки. Кроме этого, важным достоинством данной модели является возможность моделирования как пассивных, так и автоколебательных элементов одним и тем же набором уравнений, что заметно упрощает исследования.

Данная статья состоит из двух частей. В первой части представлены результаты исследований трех связанных элементов Бонхоффера–ван дер Поля: двух автоколебательных и одного пассивного. Здесь рассматривается влияние пассивного элемента на порог синхронизации автоколебательных элементов. Во второй части статьи полученные результаты перенесены на случай распределенной двумерной системы.

1. Синхронизация двух автоколебательных элементов под влиянием пассивного

Прежде чем перейти к рассмотрению трех связанных элементов, остановимся коротко на одном элементе Бонхоффера–ван дер Поля и различных динамических режимах, наблюдаемых в данной модели.

1.1. Модель Бонхоффера–ван дер Поля. Используемая нами при исследовании модель Бонхоффера–ван дер Поля представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - x^3/3 - y, \\ \dot{y} &= \varepsilon(x - y + a). \end{aligned} \tag{1}$$

При моделировании динамики сердечных клеток динамическим переменным x, y можно придать физический смысл потенциала действия мембраны клетки и суммарного ионного тока, протекающего через нее, соответственно. Для введения понятий автоколебательного, возбудимого и пассивного элементов рассмотрим фазовое пространство системы (1). Изоклина вертикальных наклонов $y = x - x^3/3$ (кривая медленных движений) изображена сплошной линией на рис. 1. Изоклины горизонтальных наклонов $y = x + a$ для различных значений параметра a изображены штрихпунктирными линиями. Параметр a является контрольным и позволяет получать различные динамические режимы в данной модели. Если $|a| < (1 - \varepsilon)^{3/2}/3$, то система является автоколебательной. В этом случае имеется единственное неустойчивое состояние равновесия, расположенное на неустойчивой ветке кривой медленных движений (отрезок AC) и устойчивый предельный цикл (последовательность ABCD на рисунке). Если $|a| > 8/3$, то элемент является пассивным. Для всех остальных значений a элемент является возбудимым. Разница между пассивным и возбудимым режимом состоит в данном случае в расположении состояния равновесия.

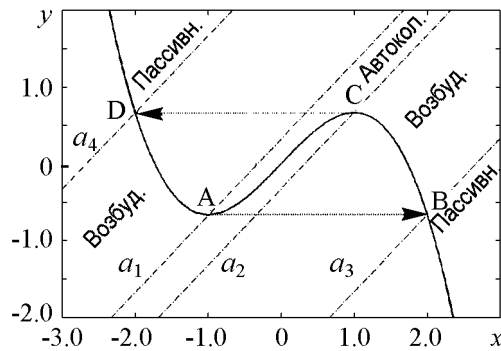


Рис. 1. Фазовое пространство одного элемента Бонхоффера–ван дер Поля. Сплошная линия – кривая медленных движений $y = x - x^3/3$, наклонные штрихпунктирные – изоклины горизонтальных наклонов $y = x + a$ для различных значений a : $a_1 = 1/3(1 - \varepsilon)^{3/2}$, $a_2 = -1/3(1 - \varepsilon)^{3/2}$, $a_3 = -8/3$, $a_4 = 8/3$

Для возбудимого режима оно находится на отрезке AD (CB) (см. рис. 1). В этом случае достаточно большой внешний стимул, прикладываемый к первому уравнению системы (1), выводит изображающую точку вправо (влево) от кривой медленных движений, являющейся в данном случае пороговым множеством. В результате этого, прежде чем вернуться в состояние равновесия система пройдет по участку BC (AD) кривой медленных движений и произведет, таким образом, потенциал действия. В случае же пассивного элемента потенциал действия не производится, так как система возвращается в состоя-

ние равновесия, не захватывая противоположный кусок кривой медленных движений. В случае автоколебательного элемента контрольный параметр a отвечает также за частоту колебаний: чем ближе значение a к нулю, тем больше частота.

1.2. Три связанных элемента. В данном разделе рассмотрено влияние пассивного элемента модели на динамику двух связанных автоколебательных элементов, а именно на свойства синхронизации в данной системе. В первую очередь исследуем, каким образом пассивный элемент влияет на частотную расстройку между двумя автоколебательными элементами. Для этого рассмотрим систему вида

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_1 - x_1^3/3 - y_1 + d_{po}(x_p - x_1) + d_{oo}(x_2 - x_1), \\
 \dot{y}_1 &= \varepsilon(x_1 - y_1 + a_1), \\
 \dot{x}_2 &= x_2 - x_2^3/3 - y_2 + d_{po}(x_p - x_2) + d_{oo}(x_1 - x_2), \\
 \dot{y}_2 &= \varepsilon(x_2 - y_2 + a_2), \\
 \dot{x}_p &= x_p - x_p^3/3 - y_p + d_{op}(x_1 + x_2 - 2x_p), \\
 \dot{y}_p &= \varepsilon(x_p - y_p + a_p).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь (x_1, y_1) и (x_2, y_2) – переменные автоколебательных элементов, для которых $|a_i| < 1/3(1 - \varepsilon)^{3/2}$; (x_p, y_p) – переменные пассивного элемента, причем $a_p < -8/3$. Три коэффициента d_{oo}, d_{op}, d_{po} описывают силу диффузионной связи: между автоколебательными элементами, со стороны автоколебательных элементов на пассивные и со стороны пассивных элементов на автоколебательные, соответственно. Для простоты начальных исследований ограничимся следующим предельным случаем: $d_{oo} = d_{op} = 0, d_{po} = d$. Это соответствует несвязанным автоколебательным элементам и предельному случаю односторонней связи со стороны пассивного элемента $d_{op} = 0$, что упростит дальнейшие аналитические выкладки. Пассивный элемент при этом находится в устойчивом состоянии равновесия $x_p = P = -\sqrt[3]{3a_p}$. В численных экспериментах $P = 2.5$. Параметр $d_{po} = d$ является контрольным и меняется в ходе численных экспериментов. Более общий случай ненулевых значений d_{oo} и d_{op} рассмотрен далее.

Для исследования поставленной задачи был выполнен следующий численный эксперимент: при фиксированном значении $a_1 = 0.3$ и различных значениях параметров $a_2 \in [0.3, 0.35]$, $d \in [0, 0.2]$ вычислялись средние частоты автоколебательных элементов ω_1, ω_2 . Затем для каждой пары (a_2, d) вычислялась эффективная частотная расстройка между этими элементами. Результаты вычислений представлены на рис. 2. Здесь по оси абсцисс отложены значения параметра связи с пассивным элементом d от 0 до 0.2, по оси ординат отложена разность $a_1 - a_2$, определяющая различные значения частотной расстройки между автоколебательными элементами в отсутствие связи с пассивным элементом. Рассмотренный диапазон изменения параметра a_2 охватывает все возможные частотные расстройки для элемента Бонхоффера–ван дер Поля. Градации серого цвета представляют различные значения эффективной частотной расстройки $|\omega_1 - \omega_2|$. Из рисунка видно, что введение связи со стороны пассивного элемента может приводить как к уменьшению, так и

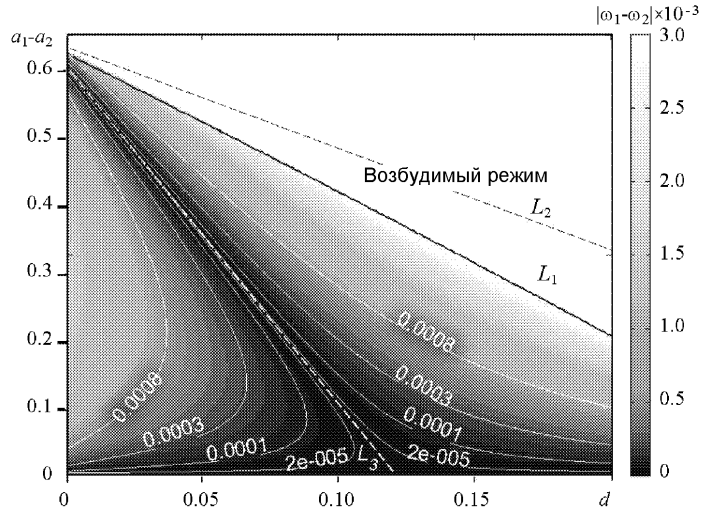


Рис. 2. Зависимость эффективной частотной расстройки $|\omega_1 - \omega_2|$ между двумя автоколебательными элементами (градации серого цвета) от разности параметров $a_1 - a_2$ и от связи с пассивным элементом d . Наблюдается увеличение и уменьшение $|\omega_1 - \omega_2|$ в зависимости от d . Прямая L_1 соответствует переходу второго автоколебательного элемента в возбудимый режим через субкритическую бифуркацию Андронова-Хопфа. Прямая L_2 – аналитическая аппроксимация той же зависимости $|\omega_1 - \omega_2|$ от $a_1 - a_2$ и d в кусочно-линейном случае. Белые контурные линии – аналитическая аппроксимация зависимости $|\omega_1 - \omega_2|$ от $a_1 - a_2$ и d в кусочно-линейном случае. Прямая L_3 – соответствует соотношению $\omega_1(a_1 - a_2, d) = \omega_2(a_1 - a_2, d)$ в кусочно-линейном случае.

к увеличению эффективной частотной расстройки между автоколебательными элементами. Так, например, для $a_1 - a_2 = 0.325$ наблюдается уменьшение $|\omega_1 - \omega_2|$ от примерно 0.002 при $d = 0$ практически до нуля при $d \approx 0.06$ и дальнейшее увеличение расстройки до 0.003 при $d \approx 0.15$. Также очевидно, что при $a_1 - a_2 = 0$ значение $|\omega_1 - \omega_2|$ равняется нулю для любого значения d (горизонтальная область черного цвета), однако следует заметить, что сами значения частот ω_1, ω_2 меняются при изменении d . Прямая L_1 разделяет плоскость параметров $(a_1 - a_2, d)$ на две области: ниже L_1 , где оба элемента являются автоколебательными, и выше L_1 , где один или оба элемента перешли в возбудимый режим. Так как $a_2 \leq a_1 = 0.3$, то при заданных a_1 и a_2 второй элемент всегда переходит в возбудимый режим при меньших значениях d по сравнению с первым, поэтому L_1 соответствует переходу второго элемента из автоколебательного режима в возбудимый. Линия L_1 была получена аналитически. Для ее получения и для исследования бифуркации перехода элемента от автоколебательного режима к возбудимому из-за влияния пассивного элемента рассмотрим систему вида

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_o &= x_o - x_o^3/3 - y_o + d(x_p - x_o), \\
 \dot{y}_o &= \varepsilon(x_o - y_o + a_o), \\
 \dot{x}_p &= x_p - x_p^3/3 - y_p, \\
 \dot{y}_p &= \varepsilon(x_p - y_p + a_p).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Так как первый и второй элементы в системе (2) не связаны между собой, то переход к системе (3), состоящей только из двух элементов – автоколебательного (x_o, y_o) и

пассивного (x_p, y_p) , никак не влияет на исследуемую бифуркацию и искомую линию L_1 . Полагая правые части системы (3) равными нулю, получим уравнение для координаты x_o состояния равновесия

$$x_o^3 + 3dx_o + 3(a_o - dP) = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) имеет единственный действительный корень

$$x_o^* = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\xi} - \frac{2d}{\sqrt[3]{\xi}}, \quad (5)$$

где

$$\xi = -12(a_o - dP) + 4\sqrt{4d^3 + 9(a_o - dP)^2}. \quad (6)$$

Устойчивость состояния равновесия (5) определяется корнями $\lambda_{1,2}$ характеристического уравнения

$$\lambda^2 + \lambda(d + x_o^{*2} + \varepsilon - 1) + \varepsilon(d + x_o^{*2}) = 0 \quad (7)$$

Действительная и мнимая части корней $\lambda_{1,2}$ уравнения (7) для фиксированных значений $a_o = 0.3, P = 2.5$ представлены на рис. 3. Из рисунка видно, что изначально неустойчивый фокус ($\text{Re}(\lambda_{1,2}) > 0, \text{Im}(\lambda_{1,2}) \neq 0, d \in [0, 0.041]$) с ростом d становится сначала неустойчивым узлом ($\text{Re}(\lambda_{1,2}) > 0, \text{Im}(\lambda_{1,2}) = 0, d \in [0.041, 0.22]$), а затем снова неустойчивым фокусом. Затем для $d \approx 0.29$ реальные части двух комплексно-сопряженных корней уравнения (7) обращаются в нуль и становятся отрицательными при дальнейшем росте d . Таким образом, состояние равновесия системы (3) приобретает устойчивость в результате бифуркации Андронова–Хопфа. Детальный анализ показал, что данная бифуркация является субкритической и сопровождается рождением неустойчивого предельного цикла. В итоге, при $d \approx 0.298$ устойчивый и неустойчивый циклы сливаются и исчезают в результате бифуркации слияния предельных циклов. После этого элемент переходит в возбуждимый режим, и колебания в системе (3) вымирают [10].

Для построения L_1 (см. рис. 2) достаточно построить кривую, определяемую уравнением

$$\text{Re}(\lambda_{1,2}(a_o, d)) = 0, \quad (8)$$

что и было сделано для второго автоколебательного элемента системы (2).

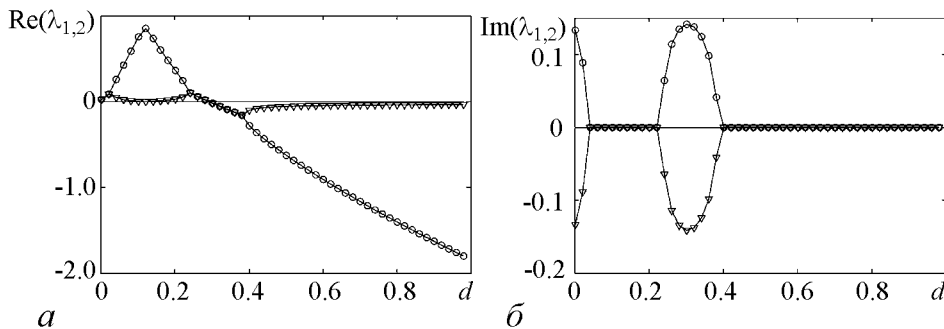


Рис. 3. Реальная (а) и мнимая (б) части корней $\lambda_{1,2}$ характеристического уравнения (7) для различных значений параметра d при фиксированных $a_o = 0.3, P = 2.5$. В результате субкритической бифуркации Андронова–Хопфа состояние равновесия системы (3) приобретает устойчивость при $d \approx 0.29$

Таким образом, было получено, что введение пассивного элемента может приводить как к увеличению, так и к уменьшению эффективной частотной расстройки между автоколебательными элементами (см. рис. 2). Приведем также аналитическое описание данного эффекта.

1.3. Три связанных элемента. Кусочно-линейная аппроксимация. Рассмотрим систему трех связанных элементов Бонхоффера–ван дер Поля в кусочно-линейной аппроксимации

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= F(x_1, y_1) + d(x_p - x_1), \\
 \dot{y}_1 &= \varepsilon(x_1 - y_1 + a_1), \\
 \dot{x}_2 &= F(x_2, y_2) + d(x_p - x_2), \\
 \dot{y}_2 &= \varepsilon(x_2 - y_2 + a_2), \\
 \dot{x}_p &= F(x_p, y_p), \\
 \dot{y}_p &= \varepsilon(x_p - y_p + a_p),
 \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$F(x_i, y_i) = \begin{cases} -\frac{4}{3}x_i - 2 - y_i, & x_i \leq -1, \\ \frac{2}{3}x_i - y_i, & |x_i| \leq 1, \\ -\frac{4}{3}x_i + 2 - y_i, & x_i \geq +1, \quad i = 1, 2, p. \end{cases} \tag{10}$$

Ограничимся случаем односторонней связи со стороны пассивного элемента, тогда последний все время будет находиться в состоянии равновесия $x_p = P$. Кривая медленных движений $F(x) + d(P - x)$ автоколебательных элементов изображена сплошной линией на рис. 4. Заметим, что данная кривая изменяется с ростом d ,

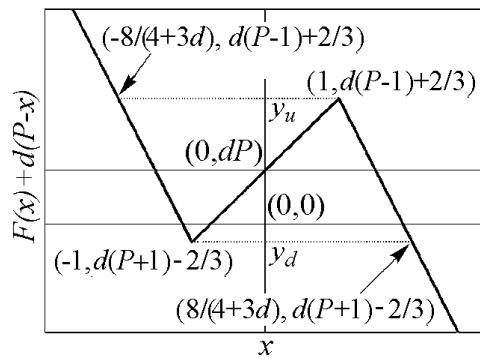


Рис. 4. Кривая медленных движений $F(x) + d(P - x)$ кусочно-линейного автоколебательного элемента Бонхоффера–ван дер Поля, находящегося под воздействием пассивного элемента с состоянием равновесия $(x_p = P, y_p = P + a_p)$ и коэффициентом связи d

в частности, при $d = 2/3$ она не имеет локальных максимумов и в этом случае не может быть использована в качестве аппроксимации элемента Бонхоффера–ван дер Поля. Однако мы ограничиваемся диапазоном изменения параметра d от 0 до 0.2 и, таким образом, не выходим за рамки кусочно-линейного приближения.

Найдем частоту колебаний первого элемента. Для этого в системе (9) сделаем замену времени $\tau = t/\varepsilon$. Тогда, используя соотношение $F(x_1, y_1) + d(P - x_1) = 0$ и решая систему (9), найдем траекторию движения первого элемента $y_1(t)$ по правой ветви кривой

медленных движений

$$y_1(t) = (\xi e^{\tau/\eta} + \text{const})e^{-\tau/\eta}, \quad (11)$$

где

$$\xi = \frac{3d(P + a_1) + 4a_1 + 6}{7 + 3d} \quad (12)$$

и

$$\eta = \frac{4 + 3d}{7 + 3d}. \quad (13)$$

Используя решение (11) и условия

$$\begin{aligned} y_1(0) &= y_d = (P + 1)d - 2/3, \\ y_1(T_r) &= y_u = (P - 1)d + 2/3, \end{aligned} \quad (14)$$

найдем время движения по правой ветви кривой медленных движений:

$$T_r = \eta \ln \frac{\xi - y_d}{\xi - y_u}.$$

Аналогично находится время движения первого элемента по левой ветви кривой медленных движений

$$T_l = \eta \ln \frac{v - y_u}{v - y_d},$$

где

$$v = \frac{3d(P + a_1) + 4a_1 - 6}{7 + 3d}.$$

Теперь, делая обратную замену времени и полагая, что движение между левой и правой ветвями кривой медленных движений происходит моментально, получим частоту колебаний элемента:

$$\omega_1(a_1, d) = \frac{\varepsilon}{T_r + T_l} \quad (15)$$

Аналогичной формулой дается частота колебаний второго элемента. Тогда, используя (15), можно получить зависимость $\omega_1(a_1 - a_2, d) - \omega_2(a_1 - a_2, d)$. Линии уровня данной поверхности построены на рис. 2 белыми линиями. Как видно из рисунка, аналитическое приближение с использованием кусочно-линейной модели Бонхоффера–ван дер Поля дает достаточно точное описание результатов, полученных в численном эксперименте.

В данном приближении также имеет место вымирание колебаний при достаточно больших значениях коэффициента связи с пассивным элементом. Условием вымирания автоколебательного элемента в данном случае является касание изоклины горизонтальных наклонов $\dot{y} = 0$ с вершиной $(1, d(P - 1) + 2/3)$ кривой медленных движений (см. рис. 4):

$$a = (P - 1)d - 1/3. \quad (16)$$

Линия L_2 на рис. 2, построенная согласно (16), является аналогом L_1 на том же рисунке. Разница между ними объясняется тем, что N-образная изоклина горизонтальных наклонов в нелинейном и кусочно-линейных случаях различным образом изменяется при увеличении влияния пассивного элемента.

На плоскости параметров $(a_1 - a_2, d)$ получим также прямую, на которой эффективная частотная расстройка между автоколебательными элементами равна нулю, то есть $\omega_1(a_1 - a_2, d) - \omega_2(a_1 - a_2, d) = 0$. Используя полученное ранее выражение для частоты (15), получим

$$\frac{\xi_1 - y_d \nu_1 - y_u}{\xi_1 - y_u \nu_1 - y_d} = \frac{\xi_2 - y_d \nu_2 - y_u}{\xi_2 - y_u \nu_2 - y_d}. \quad (17)$$

Решая это квадратное уравнение относительно a_2 , получим два корня

$$a_2 = a_1, \quad a_2 = 2dP - a_1. \quad (18)$$

Первый корень – прямая $a_1 - a_2 = 0$, $d \in [0, 0.2]$, представлен горизонтальной областью черного цвета на рис. 2. Второй корень, переписанный в виде $a_1 - a_2 = 2(a_1 - dP)$, при $a_1 = 0.3$ представляет собой линию L_3 на рис. 2. Как видно, данная линия очень хорошо ложится на результаты численных экспериментов (узкая вытянутая черная область на рис. 2, расположенная под углом).

1.4. Синхронизация в ансамбле из трех элементов. Ранее нами рассматривался случай $d_{oo} = 0$, соответствующий не связанным осцилляторным элементам. В данной ситуации говорить о синхронизации в системе не имеет смысла, поскольку связь между элементами отсутствует. Поэтому до сих пор речь шла лишь об изменении эффективной частотной расстройки между двумя автоколебательными элементами при введении влияния со стороны пассивного элемента. В данном разделе мы рассмотрим систему (2) в случае $d_{oo} \neq 0$. В частности, нас интересует зависимость порогового значения коэффициента связи между автоколебательными элементами d_{oo} , при котором возникает синхронизация, от связи с пассивным элементом d_{po} . Данное пороговое значение связи будем обозначать d^{thr} .

Ранее было показано, что введение влияния пассивного элемента в системе (2) приводит сначала к уменьшению эффективной частотной расстройки между автоколебательными элементами до нуля и при дальнейшем росте d_{po} – к ее возрастанию до исходной величины и даже более. Этот эффект имеет место при любых значениях параметров a_1, a_2 , поэтому в данном разделе мы без потери общности ограничимся конкретными значениями $a_1 = 0.3, a_2 = 0.25$.

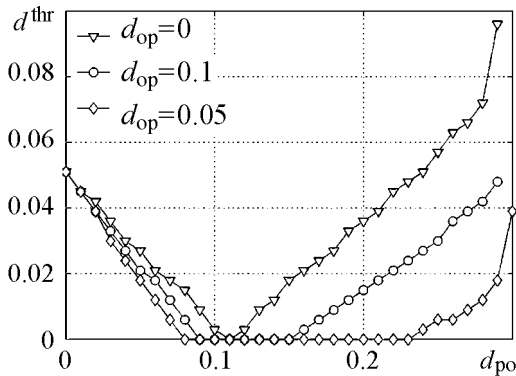


Рис. 5. Зависимости порога синхронизации d^{thr} от связи с пассивным элементом для трех значений обратной связи со стороны автоколебательных элементов d_{op}

На рис. 5 представлены зависимости порога синхронизации d^{thr} от связи с пассивным элементом для трех значений обратной связи со стороны автоколебательных элементов d_{op} : 0; 0.05; 0.1. Как видно из графика для $d_{op} = 0$, увеличение влияния пассивного элемента приводит к снижению порога синхронизации до нуля ($d_{po} = 0.11$). Синхронизация автоколебательных элементов при бесконечно малом значении связи между ними ($d^{thr} = 0$) в данном случае возможна за счет того, что эффективная частотная расстройка между элементами

при данных параметрах становится равной нулю. При дальнейшем увеличении d_{po} порог синхронизации вновь возрастает, до тех пор пока не реализуется эффект вымирания колебаний в осцилляторных элементах из-за сильного воздействия пассивного элемента.

Ранее, во всех предыдущих разделах нами рассматривался только предельный случай одностороннего влияния со стороны пассивного элемента на автоколебательные. Определим теперь, как влияет обратная связь со стороны автоколебательных элементов (d_{op}) на характер зависимости $d^{thr}(d_{po})$. Очевидно, что для исследуемой системы (2) даже при $d_{oo} = 0$ введение ненулевого значения d_{op} означает введение ненулевой связи между автоколебательными элементами посредством пассивного. В этом случае возможно возникновение синхронизации в системе для $d_{oo} = 0$ в некотором диапазоне значений d_{po} . Это подтверждается соответствующей кривой на рис. 5 (круглый маркер). Здесь синхронизация с нулевым порогом $d^{thr} = 0$ имеет место для $d_{po} \in [0.09; 0.15]$. Заметим также, что увеличение связи d_{op} приводит к увеличению полосы синхронизации с нулевым порогом d^{thr} .

Таким образом, введение обратной связи со стороны автоколебательных элементов на пассивный приводит к появлению области параметра d_{po} , в которой синхронизация в системе возможна даже при нулевых значениях связи d_{oo} . Заметим также, что, несмотря на это, качественная картина зависимостей на рис. 5 сохраняется, а именно, наблюдается уменьшение порога синхронизации d^{thr} до нуля с ростом влияния пассивного элемента d_{po} , и затем возрастание d^{thr} с увеличением d_{po} .

2. Синхронизация в двумерном автоколебательном ансамбле

В данном разделе результаты, полученные для трех связанных элементов, перенесены на случай двумерных решеток. Отметим, что последние являются аппроксимацией некоторых реальных автоколебательных сред, например, синусного узла сердца, вытянутого в двух измерениях и имеющего маленькую толщину. Топология рассматриваемой системы представлена на рис. 6. Данная топология представляет собой две регулярные $N \times N$ ($N = 120$) решетки, расположенные параллельно друг другу. Белым цветом изображена решетка пассивных элементов с $x_p = P = 2.5$, серым цветом – решетка автоколебательных элементов со случайным разбросом $a_i \in [0.05; 0.25]$, $i = 1, \dots, N * N$. Линии соответствуют связям между элементами. Нотация коэффициентов $d_{oo}, d_{pp}, d_{op}, d_{po}$ осталась прежней.

Для исследования синхронизации в данной системе были выполнены следующие расчеты. Для случая односторонней связи со стороны пассивных элементов ($d_{op} = d_{pp} = 0$) и связи между автоколебательными элементами $d_{oo} = 0.002$ выполнялось численное интегрирование системы на временном интервале $t \in [0; 2\ 000\ 000]$ для различных значений параметра d_{po} . Для каждого случая выполнялся расчет частот колебаний элементов второй решетки.

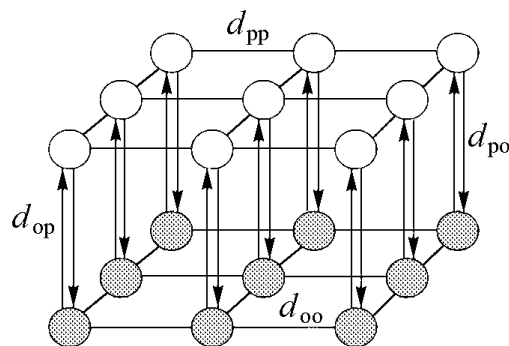


Рис. 6. Топология рассматриваемой системы: две регулярные $N \times N$ ($N = 120$) решетки, расположенные параллельно друг другу

Результаты данных вычислений представлены на рис. 7. Здесь для каждого рассмотренного значения d_{po} изображены значения частот ω_i всех автоколебательных элементов, кроме этого для трех значений d_{po} представлены распределения $N(\omega)$ числа автоколебательных элементов, имеющих частоту ω . Из рисунка видно, что изначально ($d_{po} = 0$) синхронизации в системе нет, о чем говорит достаточно широкое распределение $N(\omega)$ (вставка (а)). Заметим, однако, что это распределение не является равномерным, несмотря на случайность распределения параметра a между автоколебательными элементами. Это обуславливается наличием ненулевого параметра связи $d_{oo} = 0.002$. Увеличение воздействия со стороны пассивных элементов приводит к сближению частот колебаний автоколебательных элементов, то есть к возникновению все более синхронного поведения в системе. Так, например, для $d_{po} = 0.03$ распределение $N(\omega)$ становится заметно уже и выше (вставка (б) на рис. 7), что говорит о проявлении синхронизации. В итоге для достаточно больших d_{po} в системе устанавливается режим глобальной синхронизации, при котором все элементы осциллируют с одной частотой. Об этом свидетельствует, например, точка на рис. 7 для $d_{po} = 0.06$, а также распределение $N(\omega)$ (вставка (в)), ставшее очень узким и высоким.

Таким образом, частотные характеристики данной системы формально позволяют судить о синхронизации в рассмотренном ансамбле. Однако более наглядно можно наблюдать синхронизацию по моментальным снимкам переменной x элементов решетки, полученным на последнем шаге вычислений, то есть по конечному

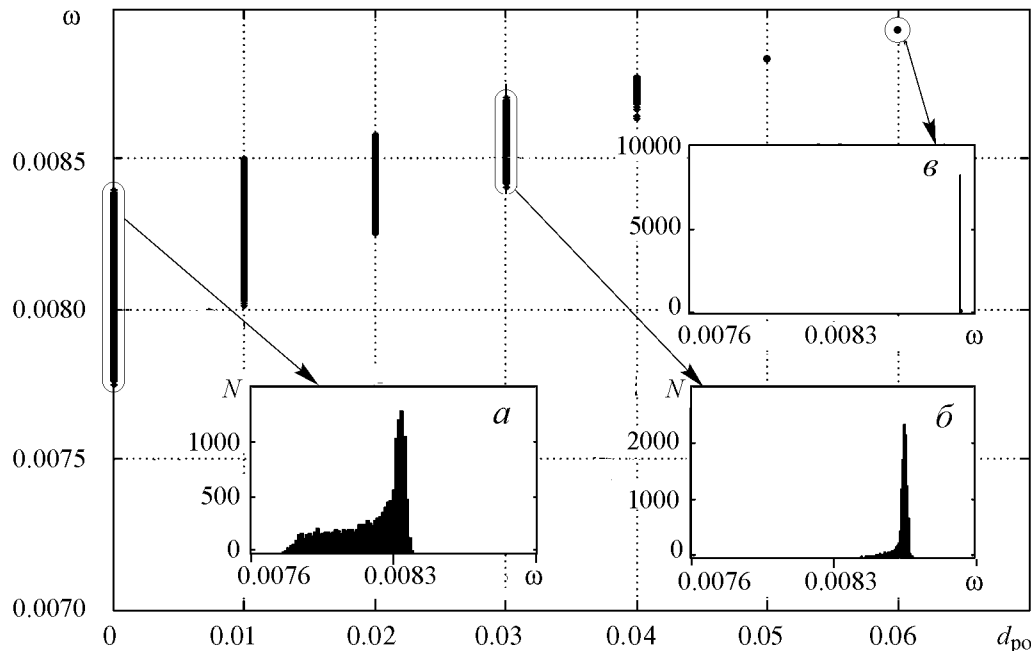


Рис. 7. Зависимость частот ω_i всех автоколебательных элементов от параметра связи с пассивными элементами d_{po} . На вставках – соответствующие распределения $N(\omega)$ числа автоколебательных элементов, имеющих частоту ω для $d_{po} = 0$ (а); 0.03 (б); 0.06 (в)

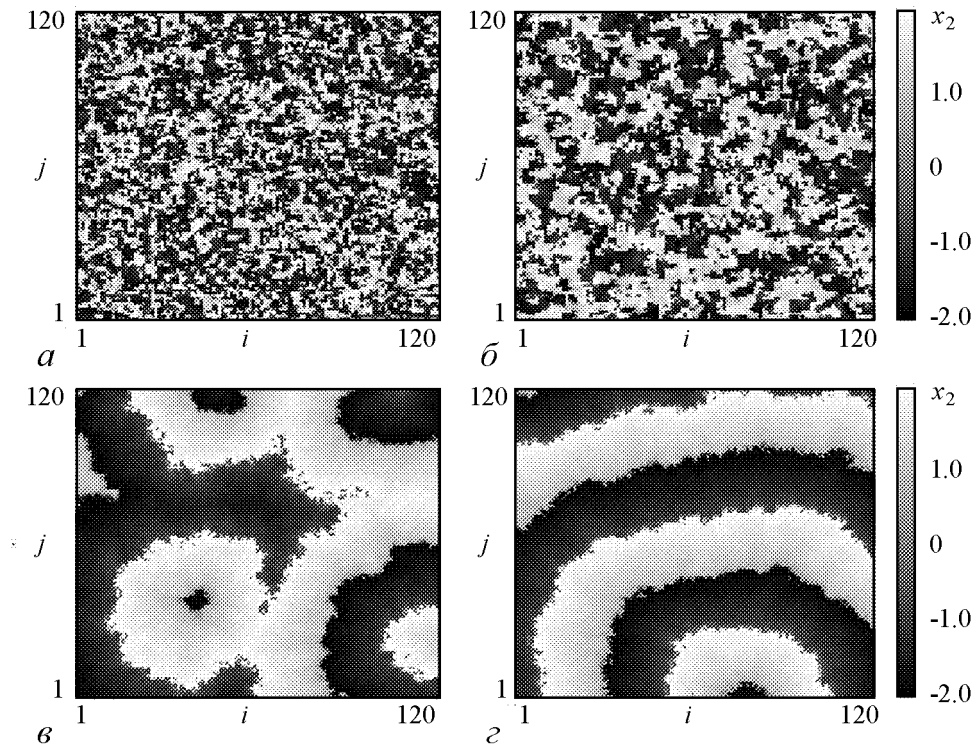


Рис. 8. Моментальные снимки переменной x элементов решетки после интегрирования системы на интервале $t \in [0; 2\,000\,000]$ для четырех значений d_{po} : 0 (а); 0.02 (б); 0.05 (в); 0.06 (г)

состоянию системы. Эти моментальные снимки для четырех значений d_{po} представлены на рис. 8. Цвет на рисунках соответствует величине переменной x каждого автоколебательного элемента. Как видно, сначала для $d_{po} = 0$ (рис. 8, а) поведение в системе беспорядочное. С ростом d_{po} до 0.02 (рис. 8, б) появляются небольшие области одного цвета, говорящие о том, что некоторые группы элементов начинают колебаться синхронно, то есть имеет место кластерная синхронизация. Для больших значений d_{po} , например 0.06 (рис. 8, г), в системе наблюдается режим глобальной синхронизации, выраженный распространяющейся концентрической волной, причем частота данной волны – есть частота глобальной синхронизации в системе. Кроме того, для случая $d_{po} = 0.05$ также наблюдается режим синхронизации согласно вычисленным частотам (см. рис. 7). Однако на моментальном снимке (рис. 8, в) мы видим конкуренцию нескольких источников волн. Это объясняется конечностью времени счета, то есть на интервале времени $t \in [0; 2\,000\,000]$ мы все еще имеем дело с процессом установления, который из-за близости частот наблюдаемых источников волн может протекать весьма долго.

Заключение

В данной работе нами рассмотрено влияние пассивных элементов на свойства синхронизации в неоднородных автоколебательных ансамблях с использованием модели Бонхоффера–ван дер Поля.

При помощи численного моделирования продемонстрировано, что в случае трех связанных элементов введение пассивного элемента может приводить как к

уменьшению, так и к увеличению порога синхронизации, в зависимости от величины связи. Данный результат был подтвержден аналитически при помощи кусочно-линейной аппроксимации модели Бонхоффера–ван дер Поля.

Во второй части статьи результаты, полученные ранее, были обобщены на случай двумерного неоднородного автоколебательного ансамбля. Была продемонстрирована возможность получения эффекта синхронизации за счет введения пассивных элементов. О возникновении синхронизации в данном случае можно судить как по изменению частотных характеристик системы, так и по виду устанавливающихся в системе пространственно-временных режимов. Основным результатом, полученным в последней части данной статьи, является наиболее важным, особенно в контексте исследования динамики сердца. Из результатов многочисленных биологических экспериментов известно, что количество пассивных клеток в синусном узле сердца может существенно увеличиваться с возрастом человека и достигать 70%. В свою очередь, согласно полученным результатам, влияние пассивных элементов может приводить, в том числе, к разрушению синхронного режима работы синусного узла сердца. Механизмы возникновения и срыва синхронных режимов в подобных системах, предложенные в данной работе, могут лежать в основе эффектов, наблюдаемых в биологических экспериментах.

Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013гг. (контракты № П2018, П15, П2308, 02.740.11.5138, П942, 02.740.11.5188), при поддержке РФФИ (гранты 08-02-92004, 08-02-970049, 10-02-00940) и при поддержке корпорации Intel.

Особая благодарность А.К.Крюкову и М.А.Комарову за полезные обсуждения.

Библиографический список

1. *Bub G., Shrier A. and Glass L.* Spiral wave generation in heterogeneous excitable media // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 88. 058101.
2. *Bub G., Shrier A. and Glass L.* Global organization of dynamics in oscillatory heterogeneous excitable media // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 94. 028105.
3. *Blasius B. and Tönjes R.* Quasiregular concentric waves in heterogeneous lattices of coupled oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 95. 084101.
4. *Kheowan O.-U., Mihaliuk E., Blasius B., Sendiña-Nadal I. and Showalter K.* Wave mediated synchronization of nonuniform oscillatory media // *Phys. Rev. Lett.* 2007. Vol. 98. 074101.
5. *Hwang S., Yea K. and Lee K.J.* Complex-periodic spiral waves in confluent cardiac cell cultures induced by localized inhomogeneities // *Phys. Rev. Lett.* 2004. Vol. 92. 198103.
6. *Ten Tusscher K.H.W.J. and Panfilov A.V.* // *Europace.* 2007. Vol. 9. P. 38.
7. *Пиковский А.С., Розенблюм М.Г., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М: Техносфера, 2003.
8. *Pazó D. and Montbrió E.* // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 73. 055202(R).
9. *Bonhoeffer K.F.* Modelle der Nervenerregung // *Naturwissenschaften.* 1953. Vol. 40. P. 301.

10. Kryukov A.K., Petrov V.S., Averyanova L.S., Osipov G.V., Chen W., Drugova O. and Chan C.K. // Chaos. 2008. Vol. 18. 037129.

Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского

Поступила в редакцию
После доработки

10.11.2009
25.02.2010

INFLUENCE OF PASSIVE ELEMENTS ON THE SYNCHRONIZATION OF OSCILLATORY ENSEMBLES

V.S. Petrov, G.V. Osipov

This paper deals with the influence of the passive elements on the synchronization in the ensembles of coupled non-identical Bonhoeffer–van der Pol oscillators. With a help of numerical experiment it was demonstrated that the introduction of passive elements may lead to both increase and decrease of global synchronization threshold in the system. These results were confirmed analytically using piecewise linear approximation of the Bonhoeffer–van der Pol model. The results obtained for the ensemble of three coupled elements are generalized to the case of two dimensional lattices of non-identical oscillators.

Keywords: Synchronization, oscillatory ensemble, passive element.



Петров Валентин Сергеевич – родился в 1986 году, окончил Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (2008). Аспирант кафедры теории управления и динамики машин факультета ВМК ННГУ. Область научных интересов: структуры синхронизации в нелинейных системах, моделирование динамики биологических сред. Имеет 12 публикаций (в соавторстве) в том числе 4 журнальных. Лауреат стипендии имени академика Г.А. Разуваева (2009).

603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: valentin.s.petrov@gmail.com



Осипов Григорий Владимирович – родился в Горьком (1960), окончил Горьковский государственный университет им.Н.И.Лобачевского (1982). В 1986–1988 годах учился в аспирантуре Научного совета по комплексной проблеме «Кибернетика» (НСК) АН СССР. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в НСК (1988) по математическому моделированию и доктора физико-математических наук в ННГУ (2004) по радиофизике. С 1988 года работает в ННГУ, с 2007 года заведует кафедрой Теории управления и динамики машин. Один из авторов монографий «Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации» и «Synchronization in oscillatory networks». Опубликовал 120 научных статей (в том числе 2 обзора) по теории колебаний и волн и математическому моделированию.

603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: osipov@vmk.unn.ru



ИДЕНТИЧНАЯ ХАОТИЧЕСКАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ НЕКОГЕРЕНТНО СВЯЗАННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ЛАЗЕРОВ И ДВУНАПРАВЛЕННАЯ ПЕРЕДАЧА ИНФОРМАЦИИ

И.В. Корюкин

Исследована недавно предложенная оптическая схема скрытой передачи информации посредством хаотической несущей (Opt. Lett. 32, 403, 2007). Рассмотрен случай некогерентной оптической связи между полупроводниковыми лазерами, который возникнет при использовании такой схемы в действующих системах волоконно-оптической связи. Путем численного моделирования показано, что при некогерентной связи, как и при когерентной, возможна идентичная синхронизация хаотических колебаний интенсивности двух полупроводниковых лазеров и скрытая двунаправленная передача информационного сигнала между ними. Однако возникающий хаотический режим принципиально отличается от режима, реализующегося при когерентной связи. Это – незатухающие релаксационные колебания со сложной хаотической огибающей. Показано, что при такой хаотической несущей скорость передачи информации ограничена величиной релаксационной частоты.

Ключевые слова: Хаотическая синхронизация, скрытая передача информации, оптическая связь, полупроводниковые лазеры.

Введение

Явление хаотической синхронизации нелинейных динамических систем может служить основой для создания систем связи с высокой степенью защиты информации [1–4]. Особый интерес привлекает хаотическая синхронизация полупроводниковых лазеров, которые широко используются в существующих системах оптической связи и рассматриваются как основные устройства, на которых будут создаваться оптические системы связи с хаотической несущей [5–9]. Хаотические колебания интенсивности излучения с высокой размерностью могут быть легко получены в полупроводниковых лазерах с помощью оптоэлектронной или оптической обратной связи. Получаемая в результате широкополосная хаотическая несущая позволяет скрытно передавать информационный сигнал со скоростями до единиц гигабит в секунду, что было продемонстрировано как в лабораторных экспериментах [10], так

и при передаче через действующую коммерческую волоконно-оптическую сеть [11]. Большая часть таких экспериментов была проведена со схемами, использующими однонаправленную оптическую связь (излучение одного лазера инжектируется в другой) и допускающими только однонаправленную передачу информации. Для одновременной передачи информации в двух направлениях придется использовать две таких системы или, как минимум, удвоить число используемых полупроводниковых лазеров. Кроме того, уровень конфиденциальности, обеспечиваемый однонаправленными системами, может оказаться недостаточным, по крайней мере, при использовании одномодовых по продольному индексу полупроводниковых лазеров [12].

Хаотическая синхронизация полупроводниковых лазеров, связанных двунаправленной оптической связью, была впервые продемонстрирована в работе [13]. Было показано, что даже при полностью симметричной связи (одна и та же часть излучения каждого лазера инжектировалась в лазер-партнер) и практически одинаковых лазерах происходит спонтанное нарушение симметрии – появляется лазер-лидер, а интенсивность второго лазера повторяет хаотические колебания интенсивности лидера с задержкой, равной времени распространения излучения от одного лазера до другого. Вследствие такого вида хаотической синхронизации (синхронизация с временной задержкой или лаг-синхронизация) передача информационного сигнала оказалась возможной только в одну сторону – от лазера-лидера, как и в случае однонаправленной оптической связи. Проблема двунаправленного обмена информацией в оптически связанных полупроводниковых лазерах была решена лишь недавно [14–16]. В работе [16] предложена очень простая схема, состоящая из частично прозрачного зеркала, помещаемого в канал оптической связи между лазерами (рис. 1). Это зеркало обеспечивает как оптическую обратную связь для каждого лазера, необходимую для перехода в режим хаотической генерации, так и симметричную двунаправленную связь между лазерами. В такой схеме возможна идентичная (полная) хаотическая синхронизация интенсивностей связанных лазеров. Идентичная синхронизация характеризуется отсутствием временного сдвига между колебаниями лазерных интенсивностей и делает возможной двунаправленную передачу информационного сигнала.

Однако в работе [16] рассматривалась лабораторная ситуация, когда расстояние между лазерами меньше длины когерентности излучения этих лазеров. Следовательно, сигнал собственной обратной связи, так же как и излучение, инжектируемое в лазер от его партнера, складывается в лазере с собственным излучением когерентно. В то же время, ширина линии полупроводниковых лазеров, используемых в телекоммуникационных системах, составляет сотни килогерц, что приводит к длине когерентности, существенно меньшей (≤ 1 км), чем типичные расстояния передачи в волоконно-оптических системах связи. При попытке использовать предложенную схему в реальных системах оптической связи неизбежно возникнет противоположная ситуация – некогерентного сложения оптических сигналов, о которой на основании результатов работы [16] никаких выводов и предположений

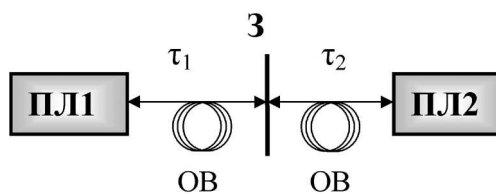


Рис. 1. Схема двунаправленной оптической связи двух полупроводниковых лазеров (ПЛ1, ПЛ2) через частично прозрачное зеркало З; ОВ – оптическое волокно

сделать нельзя. В настоящей работе численно исследуется динамика и хаотическая синхронизация двух полупроводниковых лазеров, связанных не когерентно по схеме, предложенной в работе [16], и рассматривается вопрос о применимости такой схемы для скрытой передачи информационного сигнала через существующие системы оптической связи.

1. Модель

В качестве исходной была взята модель одномодового полупроводникового лазера с некогерентной оптической обратной связью [17,18] и адаптирована для рассматриваемой схемы (см. рис. 1). Получившиеся в результате уравнения, после перехода к безразмерным переменным имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{dI_1(t)}{dt} &= [N_1 - 1 - k_{f_1} I_1(t - 2\tau_1) - k_{21} I_2(t - \tau_1 - \tau_2)] I_1(t), \\ \frac{dI_2(t)}{dt} &= [N_2 - 1 - k_{f_2} I_2(t - 2\tau_2) - k_{12} I_1(t - \tau_1 - \tau_2)] I_2(t), \\ T \frac{dN_{1,2}(t)}{dt} &= P_{1,2} + 1 - N_{1,2}(t) - N_{1,2}(t) I_{1,2}(t).\end{aligned}\quad (1)$$

В этих уравнениях индексами 1,2 отмечены переменные и параметры, относящиеся, соответственно, к первому и второму лазеру (ПЛ1 и ПЛ2 на рисунке), I – интенсивность лазерного излучения, N – концентрация неравновесных носителей (инверсная разность населенностей), k_f – коэффициент обратной связи, k_{21} (k_{12}) – сила инжекции (коэффициент связи) для первого (второго) лазера. Параметр накачки $P = J/J_{th} - 1$, где J и J_{th} – ток накачки и его пороговое значение для лазера без обратной связи. Время t нормировано на время жизни фотонов в резонаторе τ_{ph} , $T = \tau_s/\tau_{ph}$, где τ_s – время жизни неравновесных носителей, τ_1 , (τ_2) – время распространения излучения от лазера 1 (2) до полупрозрачного зеркала.

Для численного интегрирования системы (1) использовался модифицированный Дорманом и Принсом метод Рунге–Кутты 4(5) порядка, адаптированный для решения уравнений с запаздывающим аргументом [19]. При расчетах внутренние параметры обоих лазеров и параметры накачки предполагались одинаковыми. Они были выбраны близкими к использованным в работе [16]: $T = 10^3$ ($\tau_s = 1$ нс, $\tau_{ph} = 1$ пс), $P = 1.2$ ($J = 2.2J_{th}$). Оптическая схема предполагалась симметричной по обратной связи и инжекции – соответствующие коэффициенты считались попарно совпадающими: $k_{f_1} = k_{f_2} \equiv k_f$, $k_{12} = k_{21} \equiv k_c$. Однако это не касалось времен распространения света от лазера до зеркала – τ_1 и τ_2 могли быть различными (что соответствует несимметричному расположению зеркала) и варьировались от единиц наносекунд до единиц микросекунд.

2. Динамика полупроводникового лазера с некогерентной оптической связью и хаотическая синхронизация

Прежде чем исследовать хаотическую синхронизацию, необходимо определить, какие динамические, в том числе, хаотические режимы могут быть получены в отдельном, не связанном полупроводниковом лазере с некогерентной обратной связью, то есть исследовать динамику одного лазера. Для этого может быть использована

на система уравнений (1), если положить в ней $k_c = 0$ и оставить только уравнения, относящиеся к первому лазеру:

$$\begin{aligned} \frac{dI_1(t)}{dt} &= [N_1 - 1 - k_{f_1} I_1(t - 2\tau_1)] I_1(t), \\ T \frac{dN_1(t)}{dt} &= P_1 + 1 - N_1(t) - N_1(t) I_1(t). \end{aligned} \quad (2)$$

Без обратной связи ($k_{f_1} = 0$) система (2) имеет единственное стационарное решение $I_1 = P_1$, $N_1 = 1$, соответствующее непрерывной генерации с постоянной интенсивностью. Оно устойчиво и малые отклонения затухают колебательным образом с характерной частотой $\Omega_R = \sqrt{P/T}$ и декрементом $\theta_R = -(P + 1)/T$. В лазерной динамике эти колебания принято называть релаксационными [20]. Для выбранных параметров частота релаксационных колебаний составляет примерно 5.5 ГГц. Если коэффициент обратной связи k_{f_1} превышает некоторое критическое значение, стационарное состояние теряет свою устойчивость через суперкритическую бифуркацию Андронова–Хопфа. Лазер переходит в режим регулярных колебаний интенсивности с небольшой амплитудой и частотой, близкой к релаксационной. Дальнейшее увеличение k_{f_1} ведет к увеличению амплитуды колебаний, усложнению режима и появлению динамического хаоса. Типичное поведение интенсивности в хаотическом режиме представлено на рис. 2. Этот режим кардинально отличается от хаотического режима коллапса когерентности, возникающего в той же области параметров при когерентной обратной связи [16].

В режиме коллапса когерентности хаотическое поведение имеет вид так называемых дестабилизированных релаксационных колебаний с нерегулярностями, имеющими временной масштаб порядка периода релаксационных колебаний. В то же время, в рассматриваемом случае некогерентной обратной связи незатухающие релаксационные колебания регулярны (рис. 2, в), а их амплитуда колеблется сложным хаотическим образом с намного более низкими, чем релаксационная, частотами (рис. 2 а, б). Основная частота модуляции определяется временем обхода петли обратной связи – $f_m = 1/2\tau_1 = 10$ МГц (см. рис. 2, а). Спектр колебаний огибающей содержит также ряд гармоник основной модуляционной частоты (см. рис. 2, б).

Динамика лазера класса В (лазера с инерционной активной средой [20]) при некогерентной обратной связи исследовалась недавно в работе [18]

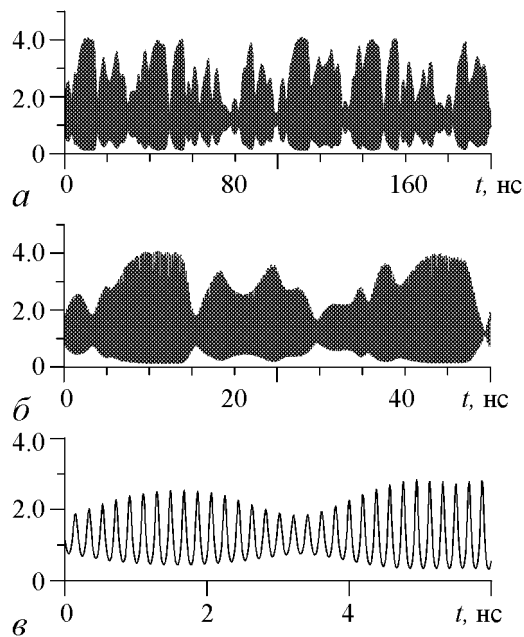


Рис. 2. Динамика интенсивности излучения одиночного несвязанного лазера ($k_c = 0$) с некогерентной обратной связью при $T = 10^3$, $P = 1.2$, $\tau_1 = 50$ нс, $k_{f_1} = 3 \times 10^{-3}$. Показаны три различных временных масштаба, на самом быстром (в) видны релаксационные колебания, на самом медленном – колебания с периодом задержки (а)

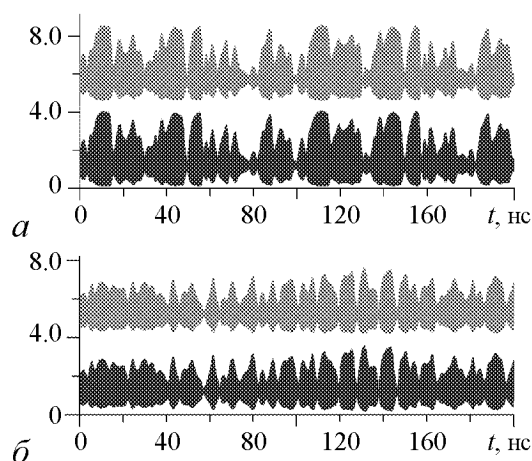


Рис. 3. Идентичная хаотическая синхронизация двух полупроводниковых лазеров; *a* – зеркало в центре $\tau_1 = \tau_2 = 50$ нс, *b* – вблизи одного из лазеров $\tau_1 = 91$ нс, $\tau_2 = 9$ нс. Интенсивность ПЛ1 – черная кривая, ПЛ2 – серая и сдвинута вверх для наглядности. $k_f = 1.5 \times 10^{-3}$, $k_c = 1.5 \times 10^{-3}$, остальные параметры те же, что и на рис. 2

критическое значение. Установлено, что пороговое значение k_c на порядок величины меньше, чем величина коэффициентов собственной обратной связи k_f . Так, для параметров рис. 2 и k_f в диапазоне $(2.6...2.8) \times 10^{-3}$ пороговое значение k_c составляет $(1.5...3) \times 10^{-4}$. Выше порога синхронизации хаотический режим качественно не зависит от соотношения k_f и k_c , если сохраняется суммарная сила инжекции $k_f + k_c$. Для зеркала, равноудаленного от обоих лазеров ($\tau_1 = \tau_2 \equiv \tau$), идентичная хаотическая синхронизация существует в широком диапазоне времен задержек (расстояний между лазерами) от $\tau = 2$ нс до $\tau = 2$ мкс (рис. 3, *a*). Более удобным для практики может оказаться асимметричное расположение зеркала. При таком расположении, даже если зеркало находится очень близко к одному из лазеров, синхронизация сохраняется (рис. 3, *b*). Немного меняется лишь сам хаотический режим – огибающая незатухающих релаксационных колебаний обогащается колебаниями с периодом, равным разнице времен задержек τ_1 и τ_2 . В дальнейшем, при исследовании передачи информационного сигнала, без потери общности будем использовать симметричную конфигурацию $\tau_1 = \tau_2$, чтобы не заботиться о компенсации временного сдвига между синхронизованными лазерными интенсивностями.

3. Двухнаправленная передача информации

Наиболее простой и широко используемый способ добавления информационного сигнала к несущей в системах связи, использующих в качестве передатчика полупроводниковые лазеры, – модуляция тока накачки. Для проверки отклика рассматриваемой системы на такую модуляцию использовался одиночный прямоугольный импульс, модулирующий ток накачки первого лазера (ПЛ1). Длительность импульса

в модели, аналогичной нашей модели (2). Исследовался случай длинной петли обратной связи при параметрах, типичных для твердотельных лазеров ($T = 10^5$). Наблюдался режим модулированных релаксационных колебаний, но модуляция была регулярной, а ее период существенно превышал время обхода петли обратной связи. В нашем случае полупроводникового лазера, когда характерное значение параметра T на два порядка меньше ($T = 10^3$), преобладала хаотическая модуляция, и никогда не наблюдались частоты модуляции ниже f_m .

Идентичная синхронизация двух лазеров, работающих в описанном выше хаотическом режиме, возникает пороговым образом, когда коэффициент связи k_c в уравнениях (1) превышает

составляла 2 нс, а его амплитуда предполагалась малой по сравнению с постоянной составляющей тока накачки и была не более $0.05J$. Возникающая вследствие модуляции десинхронизация лазерных интенсивностей и последующее восстановление хаотической синхронизации представлены на рис. 4. Когда интенсивности лазеров отличны друг от друга, то различаются как частоты незатухающих релаксационных колебаний, так и их огибающие (рис. 4, *a*). Ошибка синхронизации $I_1(t) - I_2(t)$ отлична от нуля не только во время действия импульса, но и в течение заметного времени после его окончания (рис. 4, *б*). Время ее затухания составляет несколько наносекунд и практически не зависит от амплитуды и длительности модулирующего импульса, а также от большинства лазерных параметров ($P, \tau_1, \tau_2, k_f, k_c$). Такое поведение ошибки синхронизации принципиально отличается от того, что наблюдалось в случае когерентной связи, где синхронизация восстанавливалась сразу после прекращения действия модулирующего импульса [16]. Очевидно, что это различие – следствие различия в динамических режимах, реализующихся в когерентном и некогерентном случаях.

На первый взгляд, несовпадение длительности импульса модуляции и времени нахождения системы в десинхронизованном состоянии существенно затрудняет корректное восстановление передаваемого сигнала на стороне приема и ограничивает скорость передаваемой информации. Однако оказалось, что использование цифровой фильтрации сигнала десинхронизации полностью решает эту проблему (рис. 4, *в*). Применялся цифровой нерекursивный фильтр низких частот с окном Ланцоша и частотой отсечки в несколько раз меньшей, чем частота релаксационных колебаний [21]. На рис. 4, *в* показана ошибка синхронизации после фильтрации и исходный модулирующий импульс. Видно, что длительность восстановленного импульса близка к длительности исходного и на нее практически не оказывает влияния продолжительный процесс восстановления синхронизации.

Для оценки максимально достижимой скорости передачи информации (битрейта) в рассматриваемой схеме использовалась псевдослучайная битовая последовательность, добавляемая к току накачки ПЛ1 (передаваемый сигнал). В приемнике (ПЛ2) информация извлекалась путем фильтрации ошибки синхронизации. Использо-

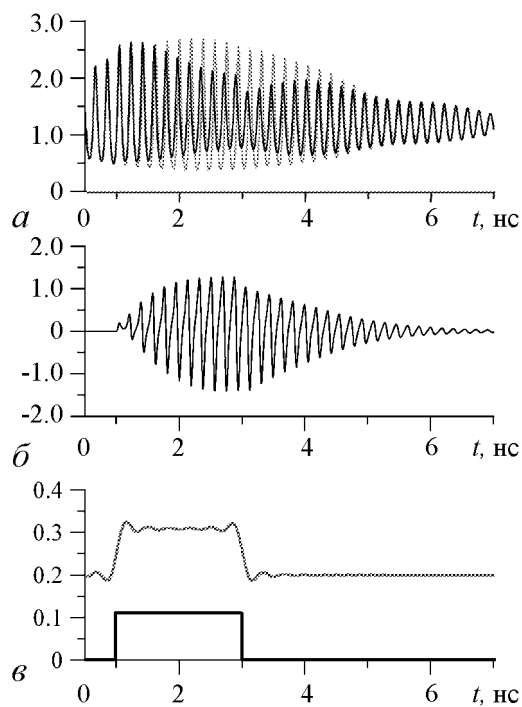


Рис. 4. Десинхронизация двух полупроводниковых лазеров при модуляции тока накачки: *a* – интенсивности ПЛ1 (черная кривая) и ПЛ2 (серая кривая), *б* – ошибка синхронизации, *в* – импульс модуляции (черная кривая) и ошибка синхронизации после фильтра (серая кривая). Параметры те же, что и для рис. 3, *a*

зовались различные амплитуды передаваемого сигнала ΔJ_1 (от $0.01J_1$ до $0.05J_1$), малые по сравнению с постоянной составляющей тока накачки, для надежного сокрытия передаваемой информации в хаотической несущей. Параметры лазеров варьировались вокруг своих типичных значений $T = 10^3$, $P = 1.2$, $\tau_1 = \tau_2 = 50$ нс, $k_f = k_c = 1.5 \times 10^{-3}$. Было обнаружено, что для этих параметров и амплитуды передаваемого сигнала $\Delta J_1 = 0.05J_1$ максимально достижимый битрейт, при котором происходит безошибочное восстановление передаваемого сигнала, составляет приблизительно 1 Гбит/с. Большие скорости передачи информации достигаются при уменьшении амплитуды модуляции ΔJ . Однако в реальной системе этот способ повышения битрейта будет ограничен шумами – как самих лазеров, так и шумами канала связи. Увеличение P и k_f также позволяет повысить скорость передачи, например, при $P = 2$ максимально достижимый битрейт составляет 2.5 Гбит/с ($\Delta J = 0.05J$). В отличие от вышеупомянутых параметров, увеличение T приводит к противоположному эффекту. Детальное исследование показало, что определяющую роль для этого эффекта играет величина частоты релаксационных колебаний. Было установлено, что для безошибочного восстановления сигнала минимальная длительность передаваемого импульса должна быть в два-три раза больше, чем период релаксационных колебаний. Следовательно, все изменения параметров, которые увеличивают частоту релаксационных колебаний, также увеличивают и максимально возможную скорость передачи информации.

При одновременной модуляции тока накачки обоих лазеров (ΔJ_1 и ΔJ_2) двумя независимыми битовыми последовательностями может быть осуществлена двунаправленная передача информации. Пример такой передачи представлен на рис. 5, где показана разность между передаваемыми сигналами $\Delta J_1(t) - \Delta J_2(t)$, в качестве которых использовались псевдослучайные последовательности с битрейтом 1 Гбит/с, и сигнал, извлеченный из ошибки синхронизации. Видно, что восстановленный сигнал

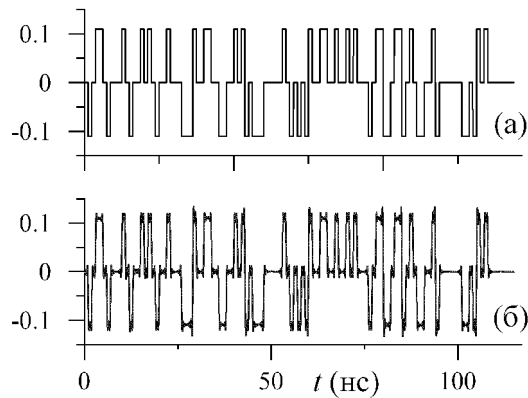


Рис. 5. Восстановление информационного сигнала при двунаправленной передаче: *a* – передаваемые сигналы $\Delta J_1(t) - \Delta J_2(t)$, *б* – сигнал, восстановленный по ошибке синхронизации. Параметры: $\Delta J = 0.05J$, $T = 10^3$, $P = 1.2$, $\tau_1 = \tau_2 = 50$ нс, $k_f = 1.5 \times 10^{-3}$, $k_c = 1.5 \times 10^{-3}$

корректно воспроизводит исходный. Таким образом, исследуемая схема скрытой передачи информации посредством хаотической несущей, работает не только в когерентном варианте, но и при некогерентной оптической связи то есть при расстоянии между лазерами, превышающем длину когерентности их излучения. Как показано в работе [16], она может быть использована для обмена скрытым ключом через открытый канал связи. При этом стороны должны договориться использовать только те биты, которые совпадают в обеих передаваемых последовательностях и дают ноль в разностном сигнале. В таком случае подслушиватель, который может извлечь сигналы лазеров

и их разность из канала связи, не сможет определить значение передаваемого ПЛ1 и ПЛ2 бита – ноль это или единица [16].

Все результаты, касающиеся скорости передачи информации и ее зависимости от параметров, полученные выше при исследовании однонаправленной передачи, справедливы и при двунаправленном обмене. В случае двунаправленной передачи максимальный битрейт также ограничен релаксационной частотой, и относительно легко могут быть получены скорости обмена информацией в несколько Гбит/с.

Заключение

Рассмотрен некогерентный вариант системы скрытой передачи информации посредством хаотической несущей, реализующийся при расстояниях между связанными полупроводниковыми лазерами, превышающих длину когерентности их излучения. Показано, что при некогерентной связи, так же как и в когерентном случае, возможна идентичная синхронизация хаотических колебаний интенсивности двух полупроводниковых лазеров и скрытая двунаправленная передача информационного сигнала между ними. Однако возникающий хаотический режим принципиально отличается от режима, реализующегося при когерентной связи. Это – незатухающие релаксационные колебания со сложной хаотической огибающей. Показано, что при такой хаотической несущей скорость передачи информации ограничена величиной релаксационной частоты, и при типичных для полупроводниковых лазеров параметрах составляет единицы Гбит/с. Однако это обстоятельство не препятствует использованию рассматриваемой схемы для обмена скрытым ключом через открытый канал связи.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 09-02-01158-а и гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ НШ-1931.2008.2.

Библиографический список

1. Pecora L.M. and Carroll T.L. Synchronization in chaotic systems // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64. P. 821.
2. Colet P. and Roy R. Digital communication with synchronized chaotic lasers // Opt. Lett. 1994. Vol. 19. P. 2056.
3. Дмитриев А.С., Панас А.И. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002.
4. Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е. О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации // УФН. 2009. Т. 179, № 12. С. 1281.
5. Mirasso C.R., Colet P., and Garcia-Fernandez P. Synchronization of chaotic semiconductor lasers: Application to encoded communications // IEEE Phot. Tech. Lett. 1996. Vol. 8. P. 299.

6. Takiguchi Y., Fujino H., and Ohtsubo J. Experimental synchronization of chaotic oscillations in externally injected semiconductor lasers in a low-frequency fluctuation regime // *Opt. Lett.* 1999. Vol. 24. P. 1570.
7. Sivaprakasam S. and Shore K.A. Demonstration of optical synchronization of chaotic external-cavity laser diodes // *Opt. Lett.* 1999. Vol. 24. P. 466.
8. Sivaprakasam S. and Shore K.A. Message encoding and decoding using chaotic external-cavity diode lasers // *IEEE J. Quant. Electron.* 2000. Vol. 36. P. 35.
9. Fischer I., Liu Y., and Davis P. Synchronization of chaotic semiconductor laser dynamics on subnanosecond time scales and its potential for chaos communication // *Phys. Rev. A.* 2000. Vol. 62, 011801(R).
10. Tang S. and Liu J.-M. Effects of message encoding and decoding on synchronized chaotic optical communications // *IEEE J. Quant. Electron.* 2003. Vol. 39. P. 1468.
11. Argyris A., Syvridis D., Larger L., Annovazzi-Lodi V., Colet P., Fischer I., Garcia-Ojalvo J., Mirasso C.R., Pesquera L., and Shore K.A. Chaos-based communications at high bit rates using commercial fibre-optic links // *Nature.* 2005. Vol. 238. P. 343.
12. Пономаренко В.И., Прохоров М.Д., Корюкин И.В. Определение параметров полупроводникового лазера с оптической обратной связью по временным рядам // *Письма в ЖТФ.* 2005. Т. 31. С. 79.
13. Heil T., Fischer I., Elsasser W., Mulet J., and Mirasso C. Chaos synchronization and spontaneous symmetry-breaking in symmetrically delay-coupled semiconductor lasers // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 86. P. 795.
14. Klein E., Gross N., Kopelowitz E., Rosenbluh M., Khaykovich L., Kinzel W., Kanter I. Public-channel cryptography based on mutual chaos pass filters // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 74, 046201.
15. Kanter I., Gross N., Klein E., Kopelowitz E., Yoskovits P., Khaykovich L., Kinzel W., Rosenbluh M. Synchronization of mutually coupled chaotic lasers in the presence of a shutter // *Phys. Rev. Lett.* 2007. Vol. 98, 154101.
16. Vicente R., Mirasso C.R. and Fischer I. Simultaneous bidirectional message transmission in a chaos-based communication scheme // *Opt. Lett.* 2007. Vol. 32. P. 403.
17. Grigorieva E.V., Kaschenko S., Loiko N.A., and Samson A.M. Nonlinear dynamics in a laser with a negative delayed feedback // *Physica D.* 1992. Vol. 59. P. 297.
18. Pieroux D. and Mandel P. Low-frequency pulsations in class-B solid-state lasers with delayed feedback // *Opt. Lett.* 2002. Vol. 27. P. 1528.
19. Хайпер Э., Ваннер Г., Нёрсерт С. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990;
<http://www.unige.ch/haierer/software.html>
20. Ханин Я.И. Основы динамики лазеров. М.: Наука. Физматлит, 1999.
21. Хемминг Р.В. Цифровые фильтры / Пер. с англ. под ред. А.М. Трахтмана. М.: Сов. Радио, 1980.

*Институт прикладной физики РАН,
Нижний Новгород*

*Поступила в редакцию 22.01.2010
После доработки 12.03.2010*

**IDENTICAL CHAOTIC SYNCHRONIZATION
AND BIDIRECTIONAL MESSAGE TRANSMISSION
IN INCOHERENTLY COUPLED SEMICONDUCTOR LASER DIODES**

I.V. Koryukin

A chaos-based communication scheme allowing simultaneous bidirectional message transmission (Opt. Lett. 32, 403, 2007) is investigated numerically. Incoherent feedback and coupling case is analyzed, which is expected in real long-distance optical communication systems. It is shown that identical synchronization of chaotic laser waveforms and bidirectional message transmission are possible as in the coherent coupling case. However, the chaotic regime at incoherent feedback and coupling is quite different. It is regular destabilized relaxation oscillations with the chaotic envelope. Such dynamics leads to restriction of the transmitting signal bit rate by a portion of relaxation oscillations frequency.

Keywords: Chaotic synchronization, secure information transmission, optical communications, semiconductor lasers.



Корюкин Игорь Валерьевич – родился в 1963 году в Нижнем Новгороде (Горьком), окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета в 1986 году. После окончания университета работает в Институте прикладной физики РАН, в настоящее время – старший научный сотрудник. Защитил диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук (2000) по низкочастотной динамике многомодовых лазеров. Опубликовал более 35 научных статей. Область научных интересов – физика и динамика лазеров, в том числе нелинейная динамика твердотельных и полупроводниковых лазеров, хаотическая синхронизация в лазерных системах.

Россия 603950 Нижний Новгород
Институт прикладной физики РАН
E-mail: igor@appl.sci-nnov.ru



САМОПОДОБИЕ НА РАЗНЫХ МАСШТАБНЫХ УРОВНЯХ В ОБЛУЧЁННЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛАХ

Н.В. Куликова, В.С. Хмелевская, В.В. Бондаренко

В работе представлены некоторые аспекты исследований структур пространственной самоорганизации после ионного облучения металлических сплавов с помощью метода фрактального формализма. Описана компьютерная методика определения масштабной инвариантности обнаруженных диссипативных структур. Показано, что наблюдаемые после облучения структуры могут характеризоваться наличием свойства инвариантности своего строения на разных масштабных уровнях.

Ключевые слова: Фрактал, самоорганизация, самоподобие, фрактальная размерность, диссипативные структуры

Введение

Внимание к теоретическим и экспериментальным исследованиям свойств неравновесных систем было привлечено сравнительно недавно, несмотря на то, что большая часть окружающих нас процессов относится именно к подобным системам. В состав неравновесных систем обычно входят структурно-кинематические элементы, связанные непосредственно с внутренними параметрами системы и объединенные определенной закономерностью. Неравновесные состояния открытой системы часто сопровождаются явлениями самоорганизации структурных элементов, составляющих такую систему [1–2]. Примером подобной системы является твёрдое тело, а облучаемое твёрдое тело представляет собой простой случай открытой системы, поскольку материал здесь находится под воздействием внешнего потока энергии, а в некоторых случаях также и потока чужеродных атомов (ионов). Динамика процессов самоорганизации в таких системах оказывается крайне сложной и нерегулярной, что отражается на поведении многих физических характеристик системы.

Иными словами, при радиационном воздействии вещество, подверженное приходу энергии извне, оказывается в неравновесном состоянии. В нем могут происходить фазовые превращения, ускоренные облучением или радиационно-индуцированные, то есть такие, которые не могут быть реализованы при других видах воздействия на материал, в том числе при термической обработке. Облучение металлических материалов существенно изменяет их структуру. Структурно-кинетические

элементы облучённой системы благодаря наличию динамических связей самоорганизуются. При этом, как правило, существенно изменяются и физические свойства вещества.

Наряду с этим, во многих областях физики в последнее время стало вызывать большой интерес исследование фрактальных множеств. Известно, что многие случайные природные среды являются фрактальными структурами. Самоорганизация диссипативных структур сопровождается нарушением симметрии исходного состояния в системе и может быть охарактеризована величиной фрактальной размерности. Иными словами, в процессе самоорганизации изменяются фрактальные характеристики этой системы, что определяет возможность объединения подходов описания явлений самоорганизации и теории фракталов.

Общим для систем, обладающих свойством самоорганизации, является взаимодействие большого числа подсистем, приводящее к коллективным эффектам с характерными пространственными масштабами, существенно превосходящими размеры отдельных подсистем. При изменении определённых условий или управляющих параметров в системе могут образовываться качественно новые структуры в макроскопическом масштабе. Такие системы способны находиться в различных устойчивых состояниях, поддерживаемых за счёт непрерывного притока вещества или энергии в систему. Следствием этого является развитие неустойчивости разных масштабов, возникающей в результате конкуренции стабилизирующих и возмущающих эффектов. В результате в системе возникают крупномасштабные корреляции, то есть происходит самоорганизация, а сама система приобретает неоднородное распределение параметров (тепла, деформаций, повреждений, концентраций и т.д.). Этот процесс обретения системой неоднородностей самоподобен и распространяется на всё большие масштабы, что приводит к появлению у системы принципиально новых свойств.

1. Постановка задачи

В данной работе исследуются впервые полученные состояния самоорганизации в металлических сплавах, подвергнутых ионному облучению. Облучение металлических материалов может существенно изменять их структуру и свойства. В веществе могут происходить фазовые переходы, ускоренные облучением или радиационно-индуцированные. При этом существенно изменяются свойства вещества, относящиеся как к ионной, так и к электронной подсистемам металла, однако завершённой картины всего комплекса наблюдаемых явлений в текущий момент не имеется.

Как известно, диссипативные структуры возникают в открытой неравновесной системе при некотором пороговом воздействии и при наличии особых динамических связей. Этому условию удовлетворяет облучаемое твердое тело. В такой системе под действием внешней силы непрерывно создаются и аннигилируют дефекты, что приводит к возникновению неких стационарных структур, свойства которых существенно влияют на характеристики исследуемых образцов. Однако является ли воздействие малым или оно выше порогового, во многих случаях возможно решить только по поведению системы. Надёжных аналитических инструментов, позволяющих выявить момент перехода системы в когерентный режим, не имеется. В то же время, при переходе системы в это особое состояние наблюдаются признаки самоорганизации в её микроструктуре. Поверхность облучённого металлического образца в определённом интервале интенсивности облучения может быть фрактальной как

на макроскопическом, так и на микроскопическом масштабе. В таком случае наблюдаемые структуры численно можно описать в терминах фрактального анализа.

В то же время, возникновение самоорганизации элементов микроструктуры после облучения (наблюдается впервые) сопровождается сильным изменением свойств материала, поэтому данный эффект представляет существенный интерес с практической точки зрения при радиационном модифицировании материалов. Однако условия возникновения и природа наблюдаемых пространственных корреляций всё ещё остаются не ясными. Наблюдаемые процессы самоорганизации носят крайне сложный характер и трудно поддаются описанию. Требуется ограничить область радиационных параметров и особенностей материала, где возникает данное состояние вещества. В этой связи создание алгоритмов прогнозирования поведения исследуемых материалов в областях, далёких от состояния равновесия, в которых проявляются свойства самоорганизации и детерминированного хаоса, а также определение взаимосвязи особенностей пространственного упорядочивания с изменением физических свойств этих материалов в условиях высоких доз и температур облучения представляется актуальным, так как позволит разработать принципы управления структурой материалов в неравновесных условиях для получения материалов с заданными свойствами.

2. Физический эксперимент

В результате внешнего воздействия на систему в объёме облучённого вещества непрерывно создаются дефекты, которые вследствие происходящих в твёрдом теле процессов также непрерывно исчезают. В результате баланса этих процессов поддерживается некоторая стационарная концентрация дефектов. Сами дефекты распределены по объёму приблизительно равномерно. Однако экспериментально были получены состояния, в которых картина радиационных повреждений существенно отличается от описанной [3–6]. Было обнаружено, что при воздействии на металлические материалы (сплавы Fe–Cr–Ni, Ni–Cr, Cu–Ni, Fe–Cr, V–Cr–Ti и чистые металлы Ti и Zr) ионных пучков высокой интенсивности в ускорителях или плазменных установках в некоторой области радиационных параметров (доз, температур мишени и плотностей ионного потока) формируется особое состояние вещества, обладающее необычными структурой и свойствами. В этих состояниях наблюдаются пространственно самоорганизованные структуры с элементами самоподобия на разных масштабных уровнях. Поверхность материала до облучения и примеры самоорганизованных структур после облучения представлены на рис. 1. До облучения поверхность сплава была однородной, и её микроструктура не имела каких-либо особенностей. После облучения возникла пространственно упорядоченная структура. Объекты на рис. 1 получены методом оптической металлографии после облучения в ионном ускорителе «Vita» ионами Ag^+ с энергией 30 кэВ до дозы 1.5×10^{18} ион/см² при температурах от 400 до 700°С. Подобные радиационно-индуцированные состояния после ионного облучения были детально исследованы для 40 различных металлических материалов [2–6]. Было показано, что они являются неравновесными, поскольку связанные с ними изменения структуры и свойств исчезают в процессе пострадиационного отжига при температурах, не превышающих температуру мишени в процессе облучения.

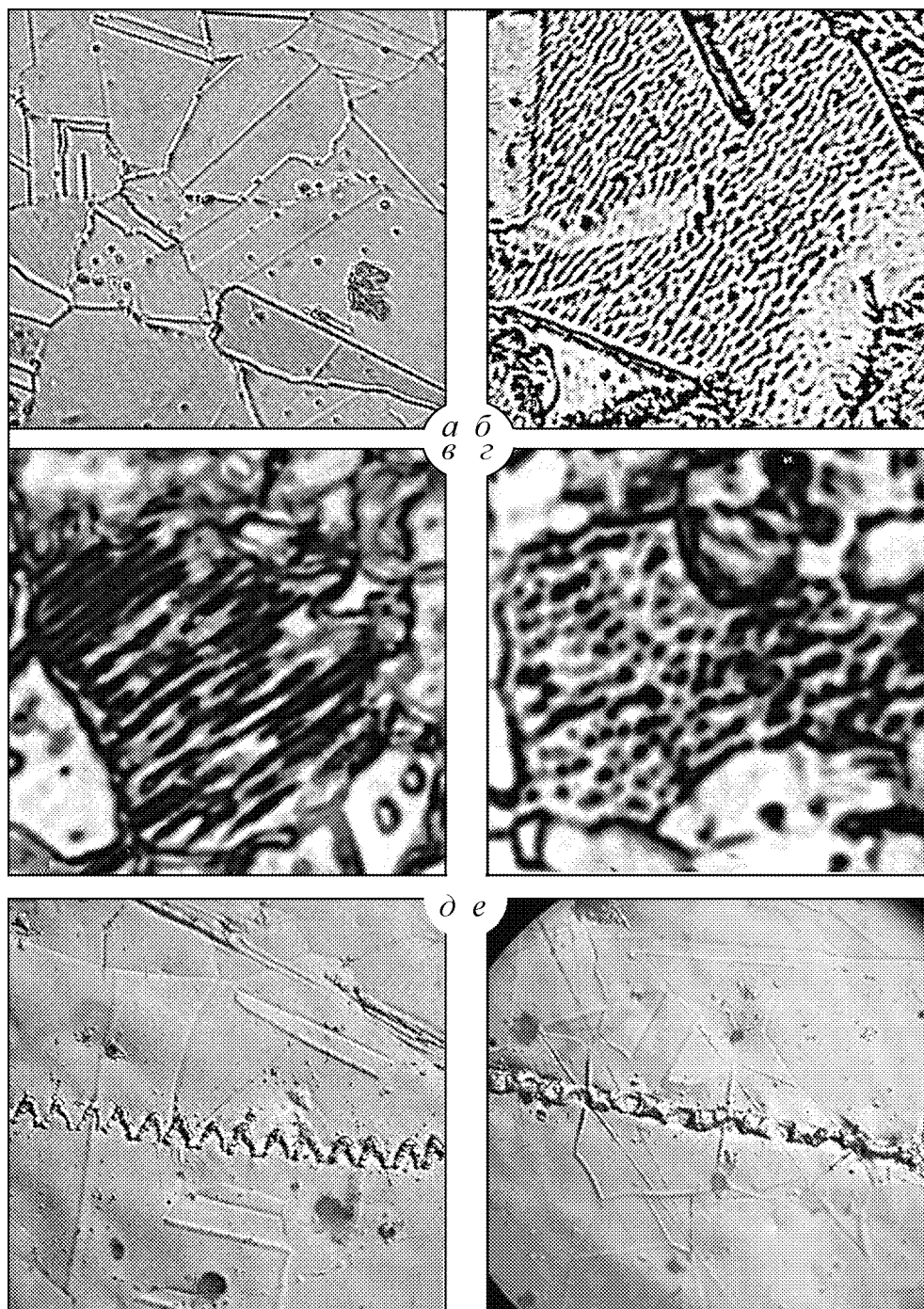


Рис. 1. Материал до облучения и пространственно самоорганизованные структуры после облучения ионами Ag^+ , 30кэВ. Поликристаллический сплав Fe-18Cr до облучения (а) и после облучения – температура мишени 400°С (б). Поликристаллический сплав V-4Cr-Ti после облучения, температура мишени 700°С, первое зерно (в) и второе зерно (г). Сплав Ni-Cr-Fe (Ti,Al) – первая форма самоорганизации (д) и вторая форма самоорганизации (е)

При оптическом увеличении мельчайшие фрагменты диссипативной структуры получаются очень похожими на объекты большого масштаба. Это предопределяет масштабную инвариантность (скейлинг) основных геометрических особенностей наблюдаемых объектов, их неизменность при изменении масштаба. Однако следует отметить, что для этих структур существуют некоторые минимальный и максимальный масштабы длины, ограничивающие область (область скейлинга), вне пределов которой основное свойство этих структур – самоподобие – пропадает. Понимание природы и причины возникновения диссипативных структур на разных масштабных уровнях, а также принципов формирования подобных радиационно-индуцированных состояний может быть основой развития новых технологий радиационного модифицирования материалов.

Обнаруженные структуры крайне сложны и нерегулярны, содержат произвольно малые масштабы, имеют некоторую форму самоподобия как на единичном, так и на множественных масштабных уровнях. Использование объектов классической геометрии для их моделирования представляется крайне затруднительным. Однако можно заметить, что эти структуры часто характеризуются бесконечным повторением одного и того же рельефа облученной поверхности, увеличенного или уменьшенного в несколько раз. Известно, что подобное проявление свойства самоподобия характерно для фракталов [7]. В связи с этим, исследуемые объекты могут быть идентифицированы как фракталы [8–9]. Известно, что метод фрактального анализа в течение ряда лет используется в материаловедении [10–11], однако в этих работах объектом исследования были зёрновая структура или пористые материалы. В данной работе рассматривается эффект масштабной инвариантности для впервые полученных пространственно организованных структур после ионного облучения. В следующих разделах приведены используемая методика и результаты исследования полученных после облучения структур с привлечением метода фрактального анализа.

3. Фрактальная параметризация

Тенденции развития современного научного направления в области физики открытых систем для объяснения наблюдаемых комплексных явлений требуют объединения таких областей знаний, как детерминированный хаос, фрактальная геометрия и теория информации. Создание с помощью математического фрактального аппарата компьютерных моделей даст возможность осуществлять вероятностно-статистические исследования связей между изменениями физических свойств системы и различных типов процессов самоорганизации, позволит выделить общие закономерности физических процессов, происходящих в объеме и на поверхности образца в интенсивных внешних полях. Следуя Бенуа Мандельброту [8], в данной работе принимается точка зрения, согласно которой фракталы должны определяться в терминах дробной (фрактальной) размерности. В связи с этим, для количественного описания процессов самоорганизации и оценки взаимосвязи между характеристиками фрактальной структуры и параметрами внешнего воздействия могут быть применены методы фрактального анализа [8,12]. При наличии у изучаемого объекта свойства самоподобия, его можно количественно характеризовать величиной фрактальной размерности [8,12].

Пусть d – обычная Евклидова размерность пространства, в котором находится фрактальный объект. Покрыв этот объект целиком d -мерными «шарами» радиуса I , предположим, что потребовалось для этого не менее, чем $N(I)$ шаров. Тогда общее определение фрактальной размерности D можно переписать в виде

$$D = - \lim_{I \rightarrow 0} \frac{\ln N(I)}{\ln I}.$$

При оценке фрактальной размерности получается тот же результат, если использовать процедуру покрытия фрактала кубами (квадратами, если фрактальный объект располагается на плоскости). В силу того что для природного фрактала интервал самоподобия ограничен, размер ячейки покрытия для него может варьироваться в определённом диапазоне, максимальное значение которого определяется размерами объекта, а минимальное – его элементарным структурным элементом (в случае изображения – пикселем). Таким образом, для оценки размерности необходимо применение численного алгоритма, который заключается в следующих шагах: получение зависимости числа ячеек покрытия фрактала от размера ячейки; выделение на ней линейного участка (в двойном логарифмическом масштабе); аппроксимация зависимости на этом участке линейной функцией.

В данной работе оценка фрактальной размерности осуществлялась следующим образом:

- использовалось чёрно-белое изображение фрактала размером 1000×1000 пикселей;
- определялась зависимость количества квадратов N , покрывающих исследуемый объект, от их размера ϵ (масштаба рассмотрения). Размеры клетки ϵ в пикселях составляли следующие значения: 500, 400, 300, 200, 150, 125, 100, 90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 29, 28... 2, 1;
- строился график зависимости $\log N(\epsilon)$ от $\log \epsilon$, и оценивался тангенс угла наклона линии для этой зависимости, являющейся оценкой фрактальной размерности.

Для применения описанной методики были получены цифровые отображения фотографий на рис. 1. Они были приняты как реализация пространственного стохастического процесса, определённого на некоторой области размерности 2 [8,10]. При анализе фотографий используется непрерывное прямоугольное ограничение, в котором наиболее наглядно представлен процесс самоорганизации. В ходе компьютерного анализа цифровое изображение структуры рассматривается в виде последовательности матриц, получаемых разбиением фотографий квадратными сетками, состоящими из одинаковых по размеру ячеек, размер которых последовательно уменьшается [8,12]. Если в покрываемой ячейкой блоке изображения присутствует тёмное пятно, ячейке присваивается значение 1, в противном случае – 0 [13]. Размер блока покрытия изображения первой аппроксимирующей матрицы выбирается сопоставимым по размеру с элементом наблюдаемой структуры.

4. Точность оценки фрактальной размерности

Практическое определение фрактальных размерностей часто оказывается весьма трудоёмким занятием, что, в свою очередь, приводит к результатам, надёжность которых не всегда удовлетворительна. Практически в клеточном методе не удаётся определить фрактальную размерность с точностью более одного или двух десятичных разрядов [7], что, конечно, не всегда приемлемо. Тем не менее численная оценка фрактальной размерности может быть применена для решаемой в этой работе задачи определения эффекта масштабной инвариантности свойств самоорганизованных объектов, когда требуется определить фрактальную размерность объектов на разных масштабных уровнях.

Компьютерные алгоритмы вычисления фрактальной размерности d обычно опираются на следующее соотношение: $\log N(\epsilon) = \log c - d \log \epsilon$, где c – константа. График зависимости $\log N(\epsilon)$ от $\log \epsilon$ есть прямая с угловым коэффициентом $(-d)$. Для определения неизвестных параметров c и d используется метод линейной регрессии.

Величина фрактальной размерности существенным образом зависит от выбора участка, на котором она вычисляется. Соответственно возникает необходимость выбора одного значения величины из некоторого набора получающихся значений. Одним из возможных вариантов, который был принят в этой работе, является следующий: можно отыскать некоторое множество отрезков на графике зависимости $\log N(L)$ от $\log L$, использование которых для определения величины размерности позволяет получить множество значений, не сильно отличающихся друг от друга, и использовать усреднённую по этому множеству величину как характеристику самоподобного объекта.

Кроме того, необходимо отметить, что величина фрактальной размерности также существенно зависит от структуры и качества изображения, по которому ведётся расчёт. Это может быть проиллюстрировано следующим примером. На рис. 1, *a* представлена фотография поверхности сплава Fe–Cr до облучения. Видно, что поверхность практически гладкая, на ней наблюдаются только границы зёрен и небольшое количество дефектов. Для расчёта фрактальной размерности необходимо привести изображение от градаций серого к двухцветному изображению, состоящему только из чёрного и белого цвета. При этом чёрный цвет в изображении будет указывать на наличие рельефа на поверхности материала, а белый – на его отсутствие. Как видно на рис. 1, *a*, границы зёрен имеют при данном увеличении определённую ширину и после перехода от оттенков серого к двухцветному изображению будут занимать определённую площадь нового изображения. Пример полученного таким образом растрового изображения показан на рис. 2, *a*. Вместе с тем, линии и другие объекты на поверхности, заполненные чёрным цветом, не несут никакой дополнительной информации. При анализе рельефа поверхности имеет значение лишь граница перехода между рассматриваемыми объектами, и поэтому данные объекты могут быть заменены контуром обводки. Пример замены растрового изображения контурным изображением показан на рис. 2, *б*.

В силу того что границы зёрен на необлучённой поверхности представляют собой отрезки прямой линии разной длины (теоретическое значение размерности линии известно), следует ожидать, что фрактальная размерность для рассматриваемых фотографий необлучённой поверхности не должна существенно отличаться от единицы. Однако данное предположение выполняется только для изображений,

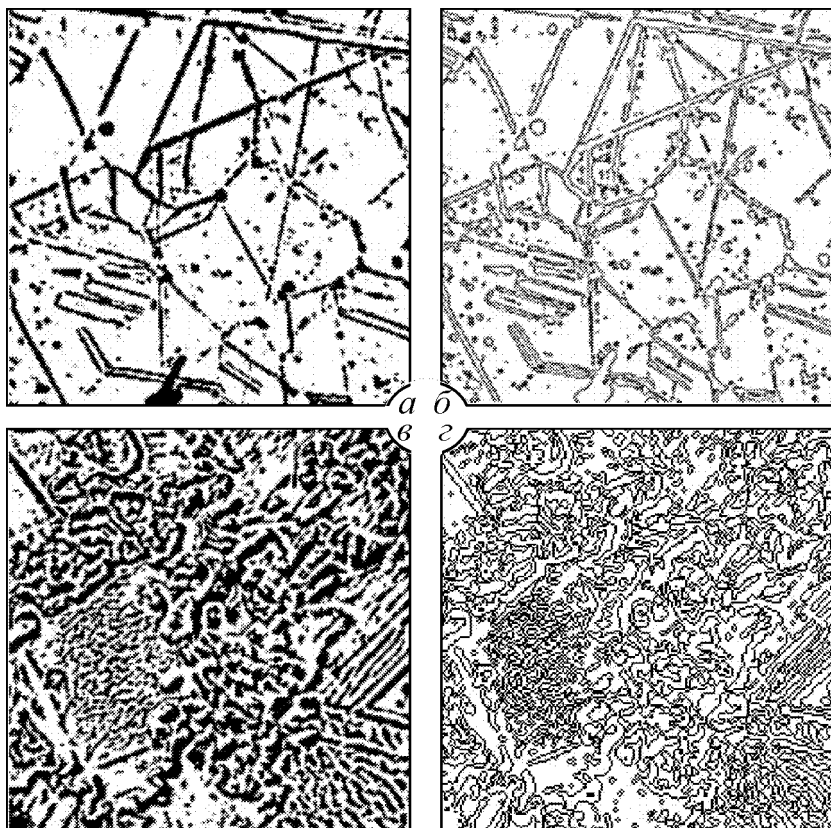


Рис. 2. К определению погрешности расчёта размерности Минковского для различных типов изображений: растровое (а) и контурное (б) изображение необлучённой поверхности материала; растровое (в) и контурное (г) изображение облучённой поверхности материала

полученных контурным методом (см. рис. 2, б). Для этих изображений среднее значение фрактальной размерности составляет 1.05 ± 0.03 . Для растровых изображений необлучённой поверхности среднее значение фрактальной размерности значительно превосходит единицу, и составляет 1.41 ± 0.04 . Разница для растрового и контурного изображения составляет 0.3646. Следовательно, использование контурных изображений облучённой поверхности представляется более надёжным.

Пример растрового изображения поверхности сплава Fe–Cr после облучения показан на рис. 2, в, а на рис. 2, г – пример контурного изображения той же поверхности. Для обоих изображений рассчитаны значения фрактальной размерности. Значение размерности для изображения облучённой поверхности в растровом формате составило 1.74 ± 0.05 , а для изображения облучённой поверхности в контурном формате – 1.52 ± 0.06 . Разница для растрового и контурного изображения составила 0.2251. В дальнейшем, если это не ведёт к потере информации, для расчётов применяются, по возможности, контурные изображения структуры.

5. Самоподобие на разных масштабных уровнях

Часто наблюдаемые в процессе ионного облучения самоорганизованные структуры обладают правильной геометрической формой и имеют тонкую структуру [6]. Эти объекты могут объединяться в однотипные области (см. рис. 2, в), а множества таких однотипных объектов могут заполнять крупные области рельефа поверхно-

сти облучённого материала, а также характеризуются дробной размерностью [14]. Однако для всех рассмотренных примеров самоорганизованных структур для определения фрактальной размерности использовались результаты оптической микроскопии с увеличением, не превышающим 1000. И хотя даже при таком увеличении на рассматриваемых объектах удаётся визуально наблюдать внутреннюю структуру, исследование этой структуры в связи с низкой разрешающей способностью метода не представляется возможным. Вместе с тем, расчёт значений фрактальной размерности объектов самоорганизации на разных масштабных уровнях позволит проверить правильность используемой методики расчёта, так как ожидается, что в силу свойства инвариантности фрактала к преобразованию масштаба фрактальная размерность, рассчитанная для самоорганизованных объектов в одном и том же материале на разных масштабных уровнях, должна совпадать.

Для определения фрактальной размерности на разных масштабных уровнях требуется применение электронной микроскопии в широком интервале изменения увеличения и разрешения. На рис. 3 показан пример самоорганизованной структуры, полученной на поверхности сплава Fe–Cr после ионного облучения с энергией 20 кэВ при температуре мишени 500°C. На рис. 3, *а* с увеличением 450× показана микроструктура сплава Fe–Cr после облучения, наблюдаемая методом оптической металлографии. До облучения поверхность сплава была гладкой и однородной. После облучения видна упорядоченная структура, состоящая из двух систем полос. Кроме того, при внимательном изучении представленной фотографии можно обратить внимание на наличие внутри каждой полосы слабо различимого на данном увеличении внутреннего строения. На рис. 3, *б* показана эта же самая структура с увеличением 45000×, полученная с помощью электронного микроскопа. Здесь тоже видно упорядоченное расположение элементов, представляющее собой четырёхугольные бенароподобные ячейки. Тело ячейки и границы ячейки различаются по контрасту. Наличие самоорганизации на разных масштабных уровнях может свидетельствовать о наличии масштабной инвариантности или скейлинга наблюдаемых объектов.

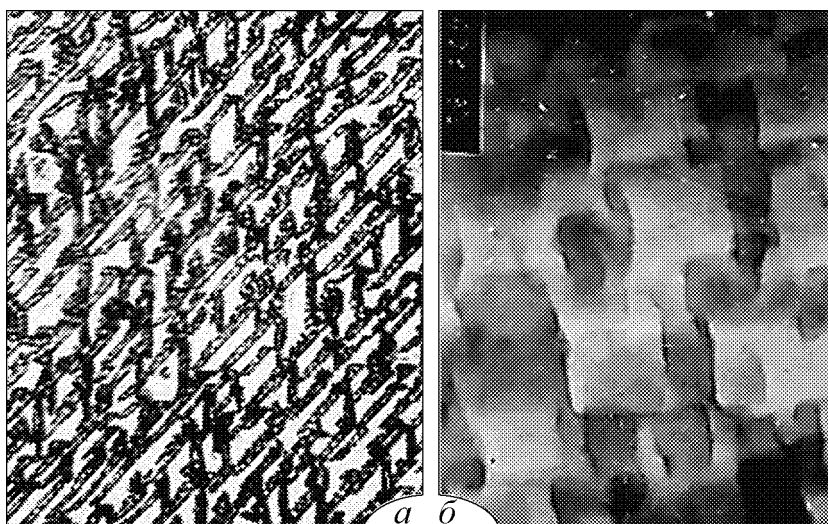


Рис. 3. Самоорганизованные структуры на поверхности сплава Fe–Cr после облучения ионами Ag⁺ (30 кэВ, температура мишени 500°C) с разным увеличением: 450× – видна структура с характерным размером 3 мкм (*а*); 45000× – видна структура с характерным размером 0.05...0.1 мкм (*б*)

Для более детального анализа этой гипотезы была рассчитана фрактальная размерность для представленных структур на обоих масштабах. Исходя из смысла определения размерности фрактала, при любом изменении масштаба наклон прямой линии, проводимой методом наименьших квадратов через множество точек соответствующего масштаба, остаётся неизменным. Кроме того, параллельное смещение линии не изменяет множество точек, то есть прямая инвариантна относительно переноса и изменения масштаба (обладает свойством самоподобия). Исходя из этого, можно ожидать, что размерность для одной и той же структуры при увеличении $450\times$ (см. рис. 3, *a*) и $45000\times$ (см. рис. 3, *б*) должны совпадать несмотря на разницу в увеличении в сто раз. Для определения фрактальной размерности для рассматриваемых объектов в соответствии с описанной в п. 3 методикой разобьём области, содержащие объекты, на квадратные клетки нескольких размеров в диапазоне от 500 пикселей до 1 пикселя. Количество клеток соответствующего размера, необходимых для покрытия структуры на увеличении $450\times$ и $45000\times$, записывается.

Для полученных таким образом на разном увеличении зависимостей выделяется линейный участок в двойном логарифмическом масштабе, который аппроксимируется линейной функцией. Угол наклона этого участка определяет размерность рассматриваемой структуры. Для увеличения $450\times$ полученный график представлен на рис. 4, *a*, для увеличения $45000\times$ – на рис. 4, *б*.

Из построенных графиков для двух представленных на рис. 3 фотографий видно, что угол наклона аппроксимирующих линий для расчёта фрактальных размерностей структур при увеличении $450\times$ и увеличении $45000\times$ имеют близкие значения, то есть линии располагаются практически параллельно. В результате расчёта фрактальной размерности для нескольких фотографий структур самоорганизации на увеличении $450\times$ и на увеличении $45000\times$ оказалось, что среднее значение фрактальной размерности для структуры на увеличении $450\times$ составляет $D = 1.69 \pm 0.06$, а среднее значение фрактальной размерности для структуры на увеличении $45000\times$ составляет $D = 1.64 \pm 0.08$, то есть практически эти значения совпадают. Действительно, как видно из рис. 5, *a*, если расположить на одном графике аппроксимирующие линии для структур при увеличении $450\times$ и $45000\times$, то линии пройдут практически параллельно.

Параллельное смещение линии не изменяет множество точек. В этом случае для расчётов по фотографии на увеличении $450\times$ возможно выполнить операцию изменения или приведения масштаба к увеличению $45000\times$. Для этого необходимо определить новое количество клеток и их размер. Процедура преобразования масштаба заключается в увеличении в 100 раз по сравнению с исходным размера

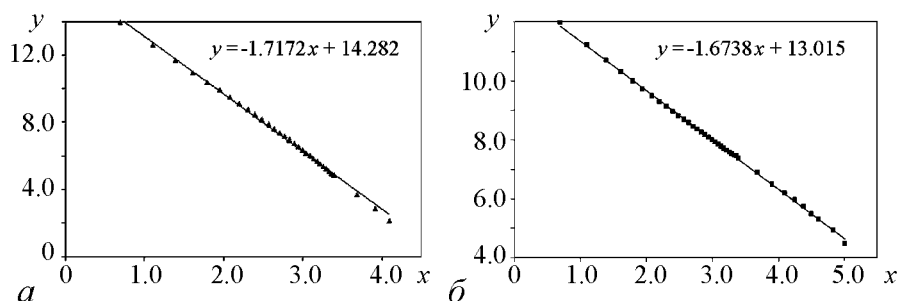


Рис. 4. Определение тангенса угла наклона зависимости $y = \log N(\epsilon)$ от $x = \log \epsilon$: при увеличении $450\times$ (*a*), $45000\times$ (*б*)

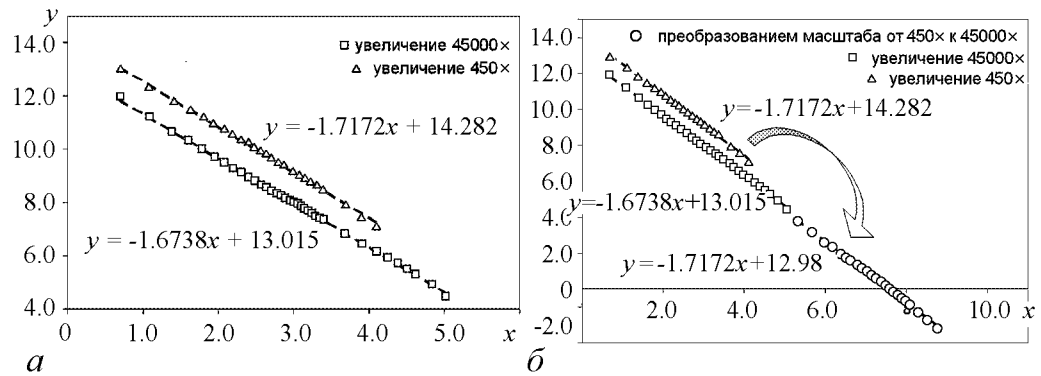


Рис. 5. Преобразование масштаба в расчётах фрактальной размерности от увеличения 450× к увеличению 45000×: совмещение линий, соответствующих увеличению 450× и 45000× (а); параллельный перенос путём преобразования масштаба (б)

стороны одной клетки и уменьшении в 10000 раз количества покрывающих изображение клеток. Например, если до преобразования масштаба при увеличении 450× для покрытия изображения клетками с размером стороны 100 пикселей требовалось 425 клеток, то после преобразования масштаба к увеличению 45000× для покрытия того же изображения клетками с размером стороны 10000 пикселей потребуется 0.0425 клетки. Описание алгоритма преобразования представлено на рис. 6, а.

На графике результат преобразования масштаба от увеличения 450× к увеличению 45000× будет представляться путём параллельного переноса точек, образующих линию для увеличения 450×. Будет получена серия точек, образующая новую, третью линию (на рис. 5, б указана стрелкой), параллельную двум предыдущим и являющуюся продолжением нижней длинной линии, полученной для увеличения 45000×. Это и будет результатом преобразования масштаба.

Из рис. 5, б видно, что полученные параллельным переносом точки располагаются практически параллельно линии, соответствующей увеличению 45000×. В этом случае через набор точек, полученный параллельным переносом, и через набор точек для увеличения 45000× можно провести одну линию, которая определит единую фрактальную размерность инвариантной по отношению к преобразованию масштаба самоорганизованной структуры.

Расположим точки, полученные при расчёте количества покрывающих ячеек структуры с увеличением 45000×, и точки, полученные путём масштабирования от увеличения 450× к увеличению 45000×, на одной плоскости и проведём через них одну прямую. Получим совмещённую для разных масштабов линию для определения фрактальной размерности. Пример такого преобразования для двух фотографий рис. 3 представлен на рис. 6, б.

Таким образом, можно констатировать, что наблюдаемые на разном увеличении самоорганизованные объекты инвариантны по отношению к преобразованию масштаба, обладают одинаковой фрактальной размерностью и являются элементами одного фрактала. Это заключение также можно проиллюстрировать геометрическими преобразованиями. Для этого аппроксимируем наблюдаемые на рис. 3, б бенароподобные ячейки типовым элементом в форме контура квадрата (рис. 7, а). Для более полного соответствия представленной на рис. 7, а обводки реальному рельефу, контуры перекрывающихся друг с другом квадратов объединяются в одну фигуру.

Пример полученной в результате объединения контура обводки бенароподобных ячеек показан на рис. 7, б. Масштаб полученной обводки соответствует масшта-

бу бенароподобных ячеек с увеличением в 45000 раз. Полученный контур был переведён в векторный формат и без потери качества изображения уменьшен в 100 раз. Полученное таким образом изображение по своему масштабу будет соответствовать представленной на рис. 7, а микроструктуре, но уже с увеличением в 450 раз. Видно, что полученное с помощью описанного преобразования подобия изображение представляет собой серию связанных полос и напоминает по своей форме фрагмент показанной на рис. 3, а системы полос.

Кроме того, в результате проведенных расчётов оказалось, что фрактальная размерность для поверхности необлучённого образца Fe-18Cr (см. рис. 1, а) составляет 1.05 ± 0.03 . Среднее значение фрактальной размерности для поверхности облучённого образца при температуре мишени 400°C (см. рис. 1, б) составило 1.52 ± 0.06 , а при температуре мишени 500°C – 1.73 ± 0.07 . На рис. 1, д, е показаны цифровые изображения пространственно самоорганизованных структур после ионного облучения сплава Ni-Cr-Fe(Ti,Al). В результате расчётов фрактальная размерность для поверхности образца сплава составила: $D = 1.84 \pm 0.05$.

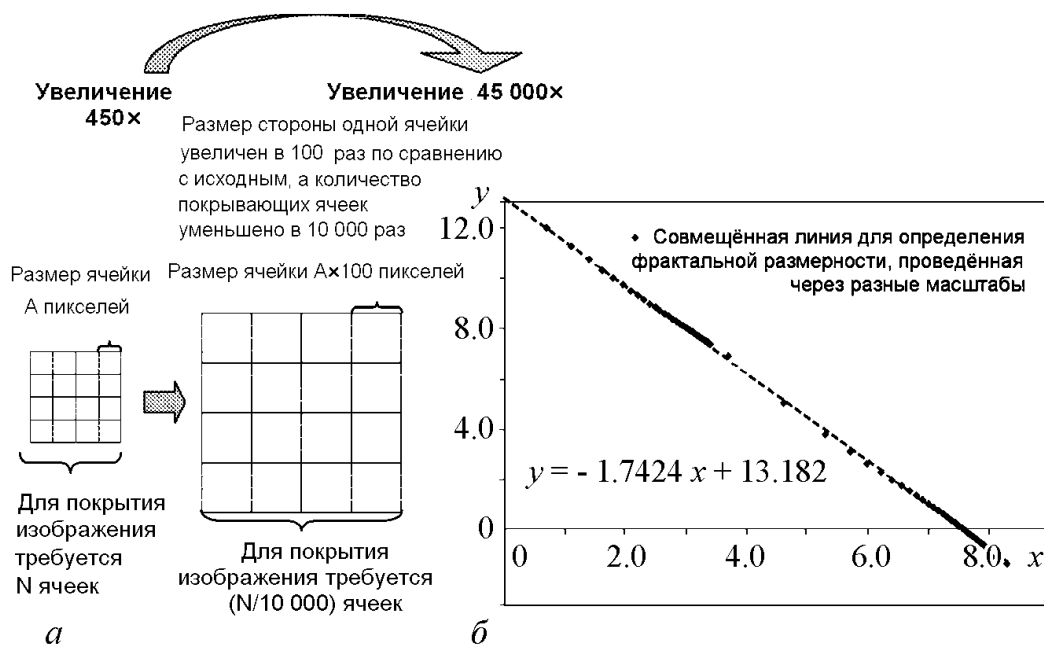


Рис. 6. Определение единой фрактальной размерности после преобразования масштаба: процедура преобразования масштаба путём перехода от увеличения $450\times$ к увеличению $45000\times$ (а); совмещение линий для разных масштабов (б)

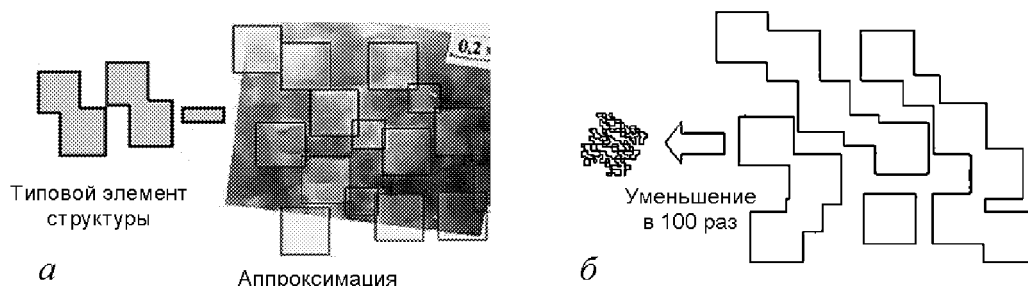


Рис. 7. Геометрическая модель: аппроксимация типовым элементом структуры малого масштаба (а); уменьшение аппроксимации в 100 раз и переход к элементам структуры другого масштаба (б)

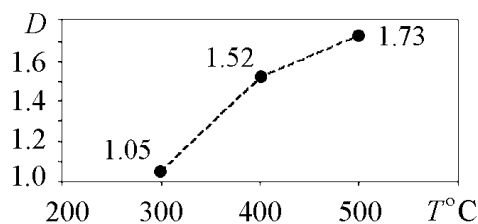


Рис. 8. Зависимость фрактальной размерности от температуры мишени в сплаве Fe-18Cr

На рис. 8 представлена зависимость фрактальной размерности от температуры мишени для сплава Fe-18Cr. Видно, что с ростом температуры мишени среднее значение фрактальной размерности также возрастает. В таблице приведены значения микротвёрдости и фрактальной размерности для различных необлучённых и облучённых иона-

ми материалов. Видно, что в области возникновения диссипативных структур наряду со значительным увеличением микротвёрдости наблюдается существенное увеличение фрактальной размерности. В этом случае изменение значения фрактальной размерности может служить эффективным тестовым признаком, позволяющим распознать и идентифицировать данное состояние.

Таким образом, наблюдаемые после облучения на материале Fe-Cr самоорганизованные структуры имеют отличающиеся от исходного значения микротвёрдости; могут характеризоваться свойством инвариантности своего строения на разных масштабных уровнях и наличием дробной метрической размерности. Кроме того, строение наблюдаемых фракталов для сплавов системы Fe-Cr при разных типах облучения часто оказывается сходным. Подобие в структуре наблюдаемых фракталов имеет место и при облучении разных видов сплавов (Fe-Cr, Ni-Cr, Ni-Cr-Fe).

Таблица

Среднее значение фрактальной размерности и микротвёрдости для различных материалов при ионном облучении

Материал	Ионное облучение	Микротвёрдость, МПа	Фрактальная размерность*
Fe-Cr	Не облучён	2000	1.05 ± 0.03
	Облучён	10000	1.73 ± 0.07
Fe-Cr-Ni	Не облучён	1500	1.05 ± 0.03
	Облучён	7000	1.84 ± 0.05
V-Ti-Cr	Не облучён	1600	1.05 ± 0.03
	Облучён	12000	1.45 ± 0.09

*Для каждого значения в таблице указана предельная абсолютная погрешность.

Заключение

При высоких уровнях радиационного повреждения на поверхности облучённого образца наблюдаются сильные изменения структурной морфологии. В результате облучения структурные элементы в материалах оказываются пространственно самоорганизованными. Возникающие множества объектов обладают тонкой структурой, то есть содержат произвольно малые масштабы, слишком нерегулярны, чтобы быть описаны на традиционном геометрическом языке, и имеют некоторую форму самоподобия. Кроме того, наблюдается иерархия самоорганизованных структур, упорядоченных на различных масштабных уровнях. Можно сделать вывод о том, что наблюдаемые на одном масштабном уровне (увеличение $450\times$) крупные самоорганизованные образования построены по тому же закону, что и малые самоорганизованные образования, наблюдаемые на следующем масштабном уровне (увеличение $45000\times$),

так как величина фрактальной размерности для них совпадает. Подобные свойства являются основной характеристикой фрактала, то есть иерархичного объекта, более или менее единообразно устроенного в широком диапазоне масштабов. Таким образом, можно утверждать, что наблюдаемые на разных масштабных уровнях самоорганизованные структуры являются конструктивными элементами одного и того же фрактального объекта. Это предопределяет масштабную инвариантность (скейлинг) основных особенностей наблюдаемых самоорганизованных объектов, то есть их неизменность при изменении масштаба. В этом случае, можно ожидать, что обнаруженные геометрические особенности наблюдаемых на макро уровне самоорганизованных объектов повторяются и на микро уровне. Понимание природы и причины возникновения диссипативных структур, а также принципов формирования подобных радиационно-индуцированных состояний может быть основой развития новых технологий радиационного модифицирования материалов. Создание компьютерных методов и моделей для адекватного описания процессов и явлений самоорганизации, знание их существенных признаков и выявление в наблюдаемом процессе самоорганизации структурно-устойчивых элементов с заданными физическими свойствами является крайне актуальным, так как с помощью компьютерного анализа физических процессов могут быть определены структурные параметры, которые невозможно выявить вне использованного фрактального формализма. Разработчик нового материала или новой технологии обработки получает в результате новый инструмент контроля свойств материалов и видит новый путь разработки новых материалов.

Библиографический список

1. *Пригожин И.* От существующего к возникающему. М.: Наука, 1985. 327 с.
2. *Хмелевская В.С.* Неравновесные состояния в твёрдом теле. Обнинск, 2004.
3. *Хмелевская В.С., Малынкин В.Г.* // *Материаловедение.* 1998, № 2. С. 25.
4. *Khmelevskaya V.S. and Malynkin V.G.* // *Phase Transitions.* 1997. Vol. 60. P. 59.
5. *Хмелевская В.С., Малынкин В.Г., Базалеев Е.В.* // *Письма в ЖТФ.* 1994. Т. 20, вып. 23. С. 21.
6. *Хмелевская В.С., Малынкин В.Г., Канунников М.Ю.* // *Письма в ЖТФ.* 1998. Т. 24, № 23. С. 1.
7. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах // Москва: Постмаркет, 2000, 352 с.
8. *Mandelbrot B.B.* *The Fractal Geometry of Nature.* New York: W.N. Freeman and Co., 1982. 480 p.
9. *Морозов А.Д.* Введение в теорию фракталов. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского университета, 1999. 140 с.
10. *Иванова В.С., Баланкин А.С., Бунин И.Ж., Оксогоев А.А.* Синергетика и фракталы в материаловедении. М.: Наука, 1994. 363 с.
11. *Колмаков А.Г., Встовский Г.В., Масляев С.А., Пименов В.Н.* // *Перспективные материалы.* 1999, № 4. С. 5.
12. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991. 249 с.
13. *Встовский Г.В., Колмаков А.Г., Бунин И.Ж.* Введение в мультифрактальную параметризацию структур материалов. Москва; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 115 с.

14. Куликова Н.В., Хмелевская В.С., Бондаренко В.В. Компьютерный анализ процессов самоорганизации в металлических материалах // Математическое моделирование. 2006. Т. 18, № 1. С. 88.

Обнинский государственный технический университет атомной энергетики Поступила в редакцию 26.08.2009
После доработки 30.11.2009

SELF-SIMILARITY AT DIFFERENT SCALE LEVELS IN IRRADIATED SOLID MATERIALS

N.V. Kulikova, V.S. Khmelevskaya, V.V. Bondarenko

Self-organized structures after ion-beam irradiation in solid materials have been studied using the method of fractal dimension. General computer method of the scale invariance evaluation for exposed dispersive structures is described. It was demonstrated that structures after irradiation can be characterized by the compatibility of scale invariance properties at different scale levels.

Keywords: fractal, self-organization, self-similarity, fractal dimension, dissipative structures.



Куликова Нэлли Васильевна – родилась в Смоленске (1938). Окончила Ленинградский государственный университет им. А.А. Жданова по специальности «математика» (1960). Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1972) по специальности «геофизика» в Институте экспериментальной метеорологии города Обнинска и доктора наук (1989) по специальности «астрометрия и небесная механика» в ГАИШ МГУ им. М.В. Ломоносова. В настоящее время – профессор кафедры вычислительной техники Обнинского государственного технического университета атомной энергетики. Получила 6 авторских свидетельств на изобретения. Автор более 130 научных и учебных публикаций, 2 монографий.

249020, Калужская область, Обнинск
Обнинский государственный технический университет атомной энергетики
E-mail: kulikova@iate.obninsk.ru



Хмелевская Вита Сергеевна – родилась в 1936 году. Доктор физико-математических наук, профессор Обнинского института атомной энергетики. Область научных интересов – взаимодействия излучения с веществом, фазовые превращения, индуцированные облучением, неравновесные структуры в области, удаленной от равновесия. Автор более 100 научных работ.

249020, Калужская область, Обнинск
Обнинский государственный технический университет атомной энергетики
E-mail: khmel@iate.obninsk.ru



Бондаренко Владимир Владимирович – родился в Обнинске (1979), окончил Обнинский государственный технический университет (2002). Кандидат технических наук, преподаватель Обнинского государственного технического университета атомной энергетики.

249020, Калужская область, Обнинск
Обнинский государственный технический университет атомной энергетики
E-mail: blondy_b@mail.ru



ДИССИПАТИВНЫЕ СТРУКТУРЫ В СИСТЕМЕ РЕАКЦИЯ–ДИФфуЗИЯ В ПОЛЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ

С.Е. Курушина, А.А. Иванов

Исследовано влияние мультипликативных флуктуаций параметров системы на образование диссипативных структур при возникновении неустойчивости типа мягкой моды в системах реакция–диффузия на примере модели Гирера–Майнхардта. Получена система уравнений, описывающих взаимодействие незатухающих мод (параметров порядка). Показано, что флуктуации параметров приводят к изменению собственных значений неустойчивых мод, увеличению их числа и параметрическому возбуждению системы. Проведено численное моделирование эволюции рассматриваемой системы. Исследовано изменение уровня флуктуаций динамических переменных в процессе формирования диссипативных структур при различных интенсивностях шума.

Ключевые слова: Система реакция–диффузия, диссипативные структуры, мультипликативные флуктуации, неустойчивые моды, параметрическое возбуждение.

Введение

Изучению системы типа реакция–диффузия

$$\frac{\partial x_k}{\partial t} = f_k(x_k, t) + D_{x_k} \Delta x_k, \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (1)$$

традиционно посвящается большое количество работ в силу широты области ее приложений в активных физических, химических, экологических и экономических системах. Одним из важнейших направлений исследований систем типа (1) является изучение условий возникновения и протекания автоволновых процессов в таких системах и, в частности, диссипативных структур (ДС). Особенности формирования ДС в автономных системах типа (1) изучены аналитически и численно достаточно подробно [1–8].

Известно много работ, посвященных изучению влияния шумов на системы типа (1). Внешние шумы могут вызывать параметрическую неустойчивость [1,3,9–12],

бистабильность систем [9], способствовать неограниченному росту высших моментов динамических переменных [10,13], вызывать фазовые переходы [9,14], кинетические переходы типа «заселения среды» [15–17] и т.д. Однако строгая теория флуктуаций в активных распределенных средах еще далека от завершения.

Существует ограниченное число работ, посвященных исследованию влияния внешних шумов на процесс формирования ДС. Образование ДС в поле флуктуаций исследовалось как аналитически [18], так и численно [19–22].

В работе [18] аналитическими методами проведен корреляционный анализ кинетических флуктуаций, возникающих в системе с аддитивными δ -коррелированными шумами вблизи однородного состояния и при переходе к точке бифуркации в линейном приближении. Было показано, что амплитуды флуктуаций динамических переменных и их радиусы корреляций сильно возрастают при приближении к точке бифуркации Тьюринга, а последние в самой точке бифуркации стремятся к бесконечности. Однако линейное приближение неприемлемо вблизи порога самоорганизации. Поэтому в [18] вблизи порога неустойчивости исследуется стохастическое уравнение для одной критической моды в тьюринговой системе на основе ее двухъяичной модели. Получено соответствующее уравнение Фоккера–Планка и стационарное распределение вероятности для данной моды.

Численные исследования линеаризованной модели из [18] проведены в работе [19]. Было обнаружено, что в области бифуркации Тьюринга флуктуации динамических переменных, вызванные шумом параметров, велики и что существует область параметров, в которой на отрезке конечной длины существует несколько ДС различных периодов. Было установлено, что в области контрастных ДС варибельность заметно меньше и даже при наличии флуктуаций образуются четко выраженные и устойчивые контрастные ДС.

В работе [20] методом Монте-Карло осуществлено моделирование переходов частиц в дискретном одномерном реакторе по схеме, являющейся аналогом дискретной формы записи уравнений распределенного брасселятора. Показано, что флуктуации значительно ускоряют начальную стадию развития ДС, выбирая наиболее быстро растущие моды. В работе также изучался уровень флуктуаций в зависимости от близости к точке бифуркации Тьюринга.

Однако в [18–20] не проводилось аналитическое исследование влияния флуктуаций на условия возникновения ДС, а в [19] не учитывался нелинейный характер автокаталитических реакций.

В работах [21,22] исследовано влияние аддитивного однородного изотропного поля гауссовых флуктуаций динамических переменных на образование ДС при мягком режиме их возбуждения. Показано, что вдали от бифуркации Тьюринга флуктуации увеличивают скорость образования ДС, что согласуется с результатами работы [20], и изменяют порядок расположения отдельных пиков. Аналитически показано, что действительная часть собственных чисел неустойчивых мод пропорциональна интенсивности флуктуаций и некоторой степени радиуса корреляции, зависящей от размерности реакционно-диффузионного пространства. Показано, что наличие шума приводит к увеличению числа неустойчивых мод.

Тем не менее весьма широкий класс задач требует анализа поведения динамических систем в присутствии мультипликативных флуктуаций. Такие ситуации имеют место при изучении влияния «естественных» (внутренних) шумов, роль которых существенно возрастает в системах с малым числом взаимодействующих объектов или в системах, близких к своим точкам бифуркаций и т.д. [1]. Кроме того, когда

между неравновесной системой и окружающей ее средой нет обратной связи и среда не претерпевает систематических изменений во времени, флуктуации среды (внешние шумы) приводят к случайному поведению параметров системы [9]. Это, в свою очередь, приводит к появлению в уравнениях, описывающих эволюцию системы, слагаемых, содержащих шумы, величины которых пропорциональны динамическим переменным.

В связи с вышеизложенным в работе исследовано влияние мультипликативных флуктуаций параметров системы, обусловленных случайным изменением внешней среды и описываемых случайным однородным изотропным гауссовым полем, на образование диссипативных структур при возникновении неустойчивости типа мягкой моды в системах (1).

1. Математическая модель

Процесс образования диссипативных структур в поле двумерных мультипликативных флуктуаций рассмотрен на примере широко известной модели морфогенеза Гирера–Майнхардта [6,23–26]. Скорости изменения концентраций автокаталитической и демпфирующей переменных (активатора a и ингибитора h , соответственно) описываются системой уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial t} &= \rho + k \frac{a^2}{h} - \mu a + D_a \Delta a, \\ \frac{\partial h}{\partial t} &= ca^2 - \nu h + D_h \Delta h.\end{aligned}\tag{2}$$

Здесь ρ – скорость образования автокаталитической переменной, μ – ее постоянная распада, D_a – коэффициент диффузии активатора; ν – постоянная скорости распада демпфирующей переменной, член ca^2 задает скорость образования ингибитора, D_h – коэффициент диффузии ингибитора; Δ – оператор Лапласа. Слагаемое ka^2/h учитывает, что увеличение концентрации ингибитора снижает скорость автокаталитического процесса.

Введем безразмерные величины $\mathbf{r}' = \mathbf{r} \sqrt{\nu/D_a}$; $t' = \nu t$; $a' = ca/k$; $h' = \nu h/k^2$; $D = D_h/D_a$. Учитывая влияние внешней флуктуирующей среды, зададим параметры $\rho c/\nu k$ и μ/ν , зависящие от коэффициентов задачи (2): $\rho c/\nu k = (\rho' c'/\nu' k') \times (1 + f_2(\mathbf{r}', t'))$ и $\mu/\nu = (\mu'/\nu')(1 + f_1(\mathbf{r}', t'))$, где ρ' , c' , ν' , k' , μ' – пространственно-временные средние соответствующих коэффициентов. Перепишем уравнения (2) следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{\partial a'}{\partial t'} &= \frac{\rho' c'}{\nu' k'} (1 + f_2(\mathbf{r}', t')) + \frac{a'^2}{h'} - \frac{\mu'}{\nu'} (1 + f_1(\mathbf{r}', t')) a' + \Delta' a'; \\ \frac{\partial h'}{\partial t'} &= a'^2 - h' + D \Delta' h'.\end{aligned}\tag{3}$$

Таким образом, учитываются случайные изменения отношений параметров системы (2). Случайные поля $f_i(\mathbf{r}', t')$ определяют пространственно-временные гауссовы флуктуации этих параметров с корреляционным тензором $\langle f_i(\mathbf{r}', t') f_j(\mathbf{r}'', \tau) \rangle = F_i(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|) \delta(t' - \tau) \delta_{ij}$ ($i, j = 1, 2$) и нулевыми средними значениями. $F_i(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|)$

определяет пространственную зависимость корреляций однородного и изотропного случайного поля [27,28]; δ -коррелированность во времени фактически означает, что время корреляции случайного поля гораздо меньше всех характерных времен задачи. Далее везде штрихи у безразмерных переменных опущены.

2. Уравнения для параметров порядка

Для дальнейшего анализа перепишем уравнения (3) в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - K(\Delta) \right) \mathbf{q} = \mathbf{g} + \mathbf{F}, \quad (4)$$

$$\text{где } K(\Delta) = \begin{pmatrix} \mu_0 \left(\frac{2}{\rho_0 + 1} - 1 \right) + \Delta & \frac{-\mu_0^2}{(\rho_0 + 1)^2} \\ \frac{2}{\mu_0} (\rho_0 + 1) & -1 + D\Delta \end{pmatrix}; \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad q_1 = a - a_0 \text{ и}$$

$q_2 = h - h_0$ описывают отклонения концентраций относительно стационарных состояний $a_0 = (\rho_0 + 1)/\mu_0$ и $h_0 = (\rho_0 + 1)^2/\mu_0^2$; $\rho_0 = \rho'c'/\nu'k'$, $\mu_0 = \mu'/\nu'$. Вектор \mathbf{g} содержит квадратичные и кубические слагаемые, полученные разложением в ряд детерминированных слагаемых в правой части уравнения (3)

$$\mathbf{g} = \left((q_1^2/h_0 - (q_1^2 q_2 + 2a_0 q_1 q_2)/h_0^2 + (2a_0 q_1 q_2^2 + a_0^2 q_2^2)/h_0^3 - a_0^2 q_2^3/h_0^4), q_1^2 \right).$$

Вектор \mathbf{F} содержит случайные компоненты: $\mathbf{F} = ((\rho_0 f_2(\mathbf{r}, t) - \mu_0 f_1(\mathbf{r}, t))(q_1 + a_0), 0)$.

Представим вектор \mathbf{q} в виде суперпозиции

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, j} \mathbf{O}^{(j)} \xi_{\mathbf{k}}^{(j)}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (5)$$

где $\mathbf{O}^{(j)}$ – собственные векторы линейного оператора $K(\Delta)$ задачи (4) ($j = 1, 2$). Тогда, после преобразований, описанных в [2], из (4)–(5) следует система уравнений для амплитуд $\xi_{\mathbf{k}}^{(j)}$:

$$\begin{aligned} & \frac{d\xi_{\mathbf{k}}^{(j)}}{dt} - \lambda_j(k) \xi_{\mathbf{k}}^{(j)} = \\ & = \frac{O_1^{*(j)}(k)}{h_0} \left\{ \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''} \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' - \mathbf{k}) [\Xi_{1\mathbf{k}'} \Xi_{1\mathbf{k}''} - \frac{2a_0}{h_0} \Xi_{1\mathbf{k}'} \Xi_{2\mathbf{k}''} + \frac{a_0^2}{h_0^2} \Xi_{2\mathbf{k}'} \Xi_{2\mathbf{k}''}] - \right. \\ & - \left. \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''\mathbf{k}'''} \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' + \mathbf{k}''' - \mathbf{k}) [\Xi_{1\mathbf{k}'} \Xi_{1\mathbf{k}''} \Xi_{2\mathbf{k}'''} + \frac{2a_0}{h_0^2} \Xi_{2\mathbf{k}'} \Xi_{2\mathbf{k}''} \Xi_{1\mathbf{k}'''} - \frac{a_0^2}{h_0^3} \Xi_{2\mathbf{k}'} \Xi_{2\mathbf{k}''} \Xi_{2\mathbf{k}'''}] \right\} + \\ & + O_2^{*(j)}(k) \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''} \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' - \mathbf{k}) \Xi_{1\mathbf{k}'} \Xi_{1\mathbf{k}''} + \\ & + O_1^{*(j)}(k) \left\{ \rho_0 z_{2,\mathbf{k}}(t) - \mu_0 a_0 z_{1,\mathbf{k}}(t) - \mu_0 \sum_{\mathbf{k}'} \Xi_{1\mathbf{k}'} z_{1,(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} (t) \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\Xi_{pq} = O_p^{(1)}(q) \xi_q^{(1)} + O_p^{(2)}(q) \xi_q^{(2)}$; $O_l^{*(j)}(k)$ – компоненты собственных векторов оператора, сопряженного к $K(\Delta)$. Выражения для $\lambda_j(k)$ и компонент векторов $\mathbf{O}^{(j)}$ и $\mathbf{O}^{*(j)}$ имеют вид:

$$\mathbf{O}^{(j)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2(\rho_0 + 1)}{\mu_0(1 + Dk^2 + \lambda_j)} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{O}^{*(j)} = \begin{pmatrix} (-1)^j \frac{1 + Dk^2 + \lambda_j}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ (-1)^j \frac{\mu_0(1 + Dk^2 + \lambda_1)(1 + Dk^2 + \lambda_2)}{2(\rho_0 + 1)(\lambda_1 - \lambda_2)} \end{pmatrix};$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha(k)}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2(k)}{4} - \beta(k)}; \quad \alpha(k) = -(D + 1)k^2 + \frac{2\mu_0}{\rho_0 + 1} - \mu_0 - 1;$$

$$\beta(k) = (k^2 + \mu_0)(Dk^2 + 1) - \frac{2\mu_0 Dk^2}{\rho_0 + 1}.$$

Входящие в (6) величины $z_{j,\mathbf{k}}(t) = \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} f_j(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}$ – компоненты случайного векторного поля $\mathbf{z}_q(t)$, имеющие нулевые средние, j и \mathbf{k} – индексные аргументы этого поля. Корреляционные функции для компонент поля $\mathbf{z}(t)$ имеют вид [27, 28]: $\langle z_{j,\mathbf{k}}(t) z_{l,\mathbf{k}'}(\tau) \rangle = g_{jl}(|\mathbf{k}|) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(t - \tau) \delta_{jl}$. Положим далее для определенности $F_j(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \theta_j \exp(-k_{fj} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$. Здесь k_{fj} – величины, обратные радиусам корреляций. Тогда для двумерной среды $g_{jj} = 2\pi\theta_j k_{fj} / (k^2 + k_{fj}^2)^{3/2}$.

Чтобы выделить из системы (6) уравнения для амплитуд неустойчивых мод $\xi_{\mathbf{k}u}^{(1)}(t)$, проведем процедуру адиабатического исключения устойчивых мод. В результате с точностью до кубических слагаемых включительно получим систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)}}{\partial t} - \lambda_1(k_u) \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)} &= \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''u} \omega_1(k_u, k'_u, k''_u) \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)} \delta(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}''_u - \mathbf{k}_u) + \\ &+ \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''\mathbf{k}'''u} \left(\omega_2(k_u, k'_u, k''_u, k'''_u) - \omega_3(k'_u, \hat{k}_s, k_u, k''_u, k'''_u) \right) \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}'''u}^{(1)} \delta(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}''_u + \mathbf{k}'''_u - \mathbf{k}_u) + \\ &+ \sum_{\mathbf{k}'u} \alpha(k_u, k'_u, \hat{k}_s, \mathbf{z}_q(t)) \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} + \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''u} \beta(k_u, k'_u, k''_u, \hat{k}_s, \mathbf{z}_q(t)) \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)} + f(\mathbf{z}_q(t)), \end{aligned} \quad (7)$$

где функции $\omega_1(k_u, k'_u, k''_u)$, $\omega_2(k_u, k'_u, k''_u, k'''_u)$, $\omega_3(k'_u, \hat{k}_s, k_u, k''_u, k'''_u)$, $\alpha(k_u, k'_u, \hat{k}_s, \mathbf{z}_q(t))$, $\beta(k_u, k'_u, k''_u, \hat{k}_s, \mathbf{z}_q(t))$ и $f[\mathbf{z}_q(t)]$ определены в Приложении. Индексы u и s обозначают неустойчивые и устойчивые моды, соответственно. Функции $\delta(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}''_u - \mathbf{k}_u)$, $\delta(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}''_u + \mathbf{k}'''_u - \mathbf{k}_u)$, $\delta(\mathbf{k}'_u + \hat{\mathbf{k}}_s - \mathbf{k}_u)$ и $\delta(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}''_u - \hat{\mathbf{k}}_s)$ дают «правила отбора» для взаимодействующих мод. При $\theta_j = 0$ из (7) получается система уравнений для параметров порядка, приведенная в [2].

Усредним уравнения системы (7) по ансамблю реализаций. В результате, принимая во внимание ее формальные решения и раскрывая корреляторы $\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} z_{j,\mathbf{k}_1}(t) \rangle$, $\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} z_{1,\mathbf{k}_1}(t) \rangle$, $\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)} z_{1,\mathbf{k}_1}(t) \rangle$ с помощью многомерного обобщения формулы Фурутцу–Новикова [10], окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \xi_{\mathbf{k}\mathbf{u}}^{(1)} \rangle}{\partial t} = & \widehat{L}_0(k_{\mathbf{u}}) + \widehat{L}_1(k_{\mathbf{u}}, k'_{\mathbf{u}}, k''_{\mathbf{u}}, \hat{k}_{\mathbf{s}}) \langle \xi_{\mathbf{k}'\mathbf{u}}^{(1)} \rangle + \widehat{L}_2(k_{\mathbf{u}}, k'_{\mathbf{u}}, k''_{\mathbf{u}}, k'''_{\mathbf{u}}, \hat{k}_{\mathbf{s}}) \langle \xi_{\mathbf{k}''\mathbf{u}}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}'''\mathbf{u}}^{(1)} \rangle + \\ & + \widehat{L}_3(k_{\mathbf{u}}, k'_{\mathbf{u}}, k''_{\mathbf{u}}, k'''_{\mathbf{u}}, k^{IV}_{\mathbf{u}}, \hat{k}_{\mathbf{s}}, \hat{k}'_{\mathbf{s}}) \langle \xi_{\mathbf{k}''\mathbf{u}}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}'''\mathbf{u}}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}^{IV}\mathbf{u}}^{(1)} \rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

Операторы \widehat{L}_j ($j = 0, 1, 2, 3$) определены в Приложении.

Отметим здесь, что процедура раскрытия описанных выше корреляторов будет приводить к появлению аналогичных корреляторов для других взаимодействующих мод. Поэтому процедуру нужно проводить до тех пор, пока не будут учтены все слагаемые, содержащие необходимую степень интенсивности флуктуаций. Остальными корреляторами можно пренебречь ввиду их малости, так как после их раскрытия получатся слагаемые, пропорциональные более высокой степени интенсивности шума. В данной работе учтены члены, квадратичные по θ_j .

Отметим следующие особенности уравнения (8).

Во-первых, после усреднения системы (7) в (8) возникают дополнительные детерминированные слагаемые (см. оператор $\widehat{L}_0(k_{\mathbf{u}})$ в Приложении), не зависящие от $\langle \xi_{\mathbf{k}\mathbf{u}}^{(1)}(t) \rangle$, как если бы каждая мода $\langle \xi_{\mathbf{k}\mathbf{u}}^{(1)}(t) \rangle$ находилась в поле постоянной силы, зависящей от параметров задачи, вида корреляционной функции g_{jj} , интенсивности флуктуаций и волнового числа данной моды. Наличие таких слагаемых в уравнениях типа (8) обычно приводит к смещению стационарного состояния соответствующих переменных.

Во-вторых, в системе (8) возникают дополнительные слагаемые, пропорциональные $\langle \xi_{\mathbf{k}\mathbf{u}}^{(1)}(t) \rangle$, что приводит к изменению собственных чисел каждой моды и, как следствие, к изменению области неустойчивости (см. оператор $\widehat{L}_1(k_{\mathbf{u}}, k'_{\mathbf{u}}, k''_{\mathbf{u}}, \hat{k}_{\mathbf{s}})$ в Приложении). Пусть значения θ_j настолько малы, что в (8) можно ограничиться только членами, линейными по интенсивности шума. Выделим из $\widehat{L}_1(k_{\mathbf{u}}, k'_{\mathbf{u}}, k''_{\mathbf{u}}, \hat{k}_{\mathbf{s}})$ слагаемые, дающие вклад в собственное значение данной моды. В результате получим

$$\begin{aligned} \lambda = \lambda_1(k_{\mathbf{u}}) + \theta_1 \pi \left\{ \frac{\mu_0^2 (O_1^{*(1)}(k_{\mathbf{u}}))^2 (O_1^{(1)}(k_{\mathbf{u}}))^2}{k_{f1}^2} - \frac{2\mu_0^2 a_0 O_1^{*(1)}(k_{\mathbf{u}}) O_1^{(1)}(k_{\mathbf{u}}) \sigma_1(k_{\mathbf{u}}, 0, k_{\mathbf{u}})}{k_{f1}^2} + \right. \\ \left. + \frac{\mu_0^2 a_0^2 \sigma_1^2(k_{\mathbf{u}}, 0, k_{\mathbf{u}})}{k_{f1}^2} - \mu_0^2 \left[\frac{\sigma_2(k_{\mathbf{u}}, k_{\mathbf{u}}, k_{\mathbf{u}})}{k_{f1}^2} + \frac{k_{f1} \sigma_2(k_{\mathbf{u}}, 0, k_{\mathbf{u}})}{(k_{\mathbf{u}}^2 + k_{f1}^2)^{3/2}} \right] - \right. \\ \left. - k_{f1} \mu_0^2 a_0 O_1^{*(1)}(k_{\mathbf{u}}) \frac{2\sigma_4(0, k_{\mathbf{u}}, k_{\mathbf{u}}, k_{\mathbf{u}}) + \sigma_3(k_{\mathbf{u}}, 0, k_{\mathbf{u}}, k_{\mathbf{u}}) + \sigma_3(k_{\mathbf{u}}, 2k_{\mathbf{u}}, k_{\mathbf{u}}, 0)}{(k_{\mathbf{u}}^2 + k_{f1}^2)^{3/2}} \right\} + \\ \left. + \frac{\theta_2 \pi \sigma_1^2(k_{\mathbf{u}}, 0, k_{\mathbf{u}}) \rho_0}{k_{f2}^2}. \right. \end{aligned} \quad (9)$$

При выводе выражения (9) учтено, что $\xi_{-\mathbf{k}}^{(j)} = \xi_{\mathbf{k}}^{*(j)} = \xi_{\mathbf{k}}^{(j)}$, так как решения уравнений (7) должны быть действительными. Из выражения (9) для собственных значений λ неустойчивых мод видно, что их действительная часть пропорциональна интенсивностям флуктуаций θ_j и зависит от радиусов корреляции $r_{fj} = 1/k_{fj}$.

Наконец, обратим внимание на то, что при малой интенсивности флуктуаций параметров, в процессе образования ДС данная неустойчивая мода с волновым числом k_u , кроме мод с волновыми числами $k'_u + k''_u = k_u$ и $k'_u + k''_u + k'''_u = k_u$, с которыми реализуется ее взаимодействие в отсутствие флуктуаций, взаимодействует с двумя другими неустойчивыми модами, для которых выполняется условие $2k'_u - k''_u = k_u$. При увеличении интенсивности шума в подобное взаимодействие включается все большее число мод.

3. Численный анализ и моделирование эволюции системы

Вначале проведем численный анализ соотношения (9).

В работе [2] показано, что в отсутствие шума в системе (2) неустойчивость типа мягкой моды наступает при $\rho_0 \leq \rho_{0C}$, где $\rho_{0C} = 2\sqrt{\mu_0 D} / (2 + \sqrt{\mu_0 D} + 1/\sqrt{\mu_0 D}) - 1$. В соответствии с этим, сначала численно исследуем зависимости действительной части собственных значений λ от волнового числа k и величины области неустойчивых мод Δk (рис. 1, а) от интенсивности шума θ_1 при разных радиусах корреляции r_{f1} в закритической области $\rho_0 \leq \rho_{0C}$. Величина θ_2 полагается равной нулю, так как $f_2(\mathbf{r}, t)$ представляет собой аддитивный вклад в флуктуации, а влияние аддитивного шума на систему (3) описано в [21,22].

В работе рассматриваются флуктуации параметров, вызванные случайными изменениями внешней среды. Поэтому разумно предположить, что интенсивность этих флуктуаций должна определяться по отношению к пространственно-временным средним параметров и выражаться в процентах. Берется отношение среднеквадратичного отклонения шума, равного корню из дисперсии (интенсивности), к пространственно-временному среднему соответствующего параметра. Диапазон изменения интенсивности мультипликативного шума, рассматриваемого в работе, достаточно велик: $0 \leq \theta_1 \leq 0.2$, то есть приблизительно от 0 до 45% при $\mu_0 = 1$.

Результаты численных расчетов для двумерной среды приведены на рис. 1.

Из рис. 1, б видно, что при увеличении интенсивности флуктуаций θ_1 область неустойчивых мод, для которых $\text{Re}\lambda > 0$, увеличивается, причем тем быстрее, чем больше радиус корреляции. Кроме того, $\text{Re}\lambda \gg \text{Re}\lambda_1(k_u)$ (см. рис. 1, а), то есть при наличии мультипликативного шума амплитуды неустойчивых мод нарастают значительно быстрее, чем в его отсутствии, что ускоряет процесс разрушения однородного состояния и образования ДС. Аналогичные результаты получены численно в [20].

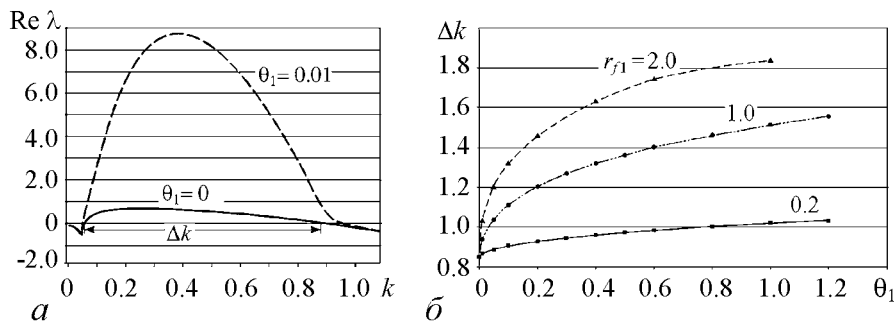


Рис. 1. а – Характерная зависимость собственного значения λ от волнового числа k в закритической области вдали от точки бифуркации Тьюринга. Для сравнения значений λ на рисунке приведена кривая при $\theta_1 = 0$. б – Зависимость величины области неустойчивых мод Δk от интенсивности шума θ_1 при разных радиусах корреляции r_{f1} . Параметры модели: $\rho_0 = 0.1$; $\mu_0 = 1$; $D = 400$; $\theta_2 = 0$. ($\rho_{0C} = 0.814$)

На рис. 2 приведены зависимости действительной части собственных значений от волнового числа в докритической области $\rho_0 \geq \rho_{0C}$ при различных интенсивностях шума θ_1 и разных радиусах корреляции r_{f1} . Параметр $\rho_0 = 1$.

Сплошной линией показана соответствующая зависимость при отсутствии флуктуаций. Видно, что $\text{Re}\lambda(k) < 0$. Неустойчивость не возникает. Для маргинального состояния, когда неустойчивой становится только одна мода при наличии шума, зависимость $\text{Re}\lambda(k)$ показана линией из коротких штрихов. Из приведенных на рис. 2 зависимостей видно, что в области $\rho_0 > \rho_{0C}$ для каждого ρ_0 существует такая критическая интенсивность флуктуаций θ_C , начиная с которой возникает неустойчивость. Причем, чем ближе к точке бифуркации, тем меньше величина θ_C . В окрестности ρ_{0C} критическая интенсивность флуктуаций становится очень малой величиной, что свидетельствует о важности малых флуктуаций вблизи точки бифуркации. Таким образом, шум индуцирует параметрическую неустойчивость в области

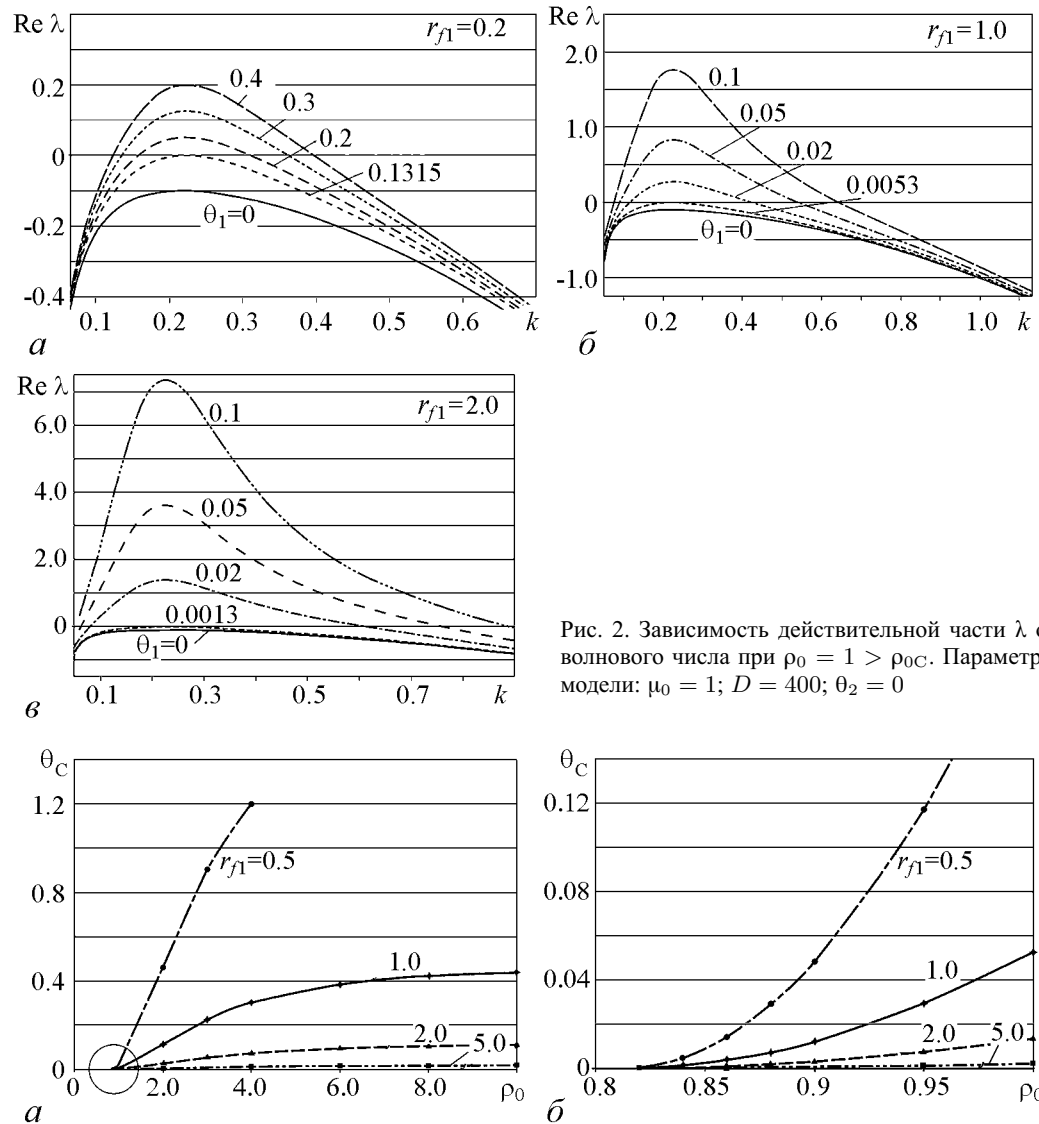


Рис. 2. Зависимость действительной части λ от волнового числа при $\rho_0 = 1 > \rho_{0C}$. Параметры модели: $\mu_0 = 1$; $D = 400$; $\theta_2 = 0$

Рис. 3. *a* – Зависимости критической интенсивности флуктуаций θ_C от ρ_0 . *б* – Подробное изображение области, обведенной окружностью на рис. 3, *a*. Параметры модели: $\mu_0 = 1$; $D = 400$; $\theta_2 = 0$

$\rho_0 > \rho_{0C}$. Графики зависимости θ_C от ρ_0 при различных радиусах корреляции r_{f1} приведены на рис. 3. Чтобы подчеркнуть роль малых флуктуаций вблизи точки бифуркации, область $\rho_0 \in [\rho_{0C}, 1]$ на рис. 3, б изображена в крупном масштабе.

Для описания нелинейной стадии образования ДС было проведено численное моделирование эволюции двумерной системы (3) с граничными условиями вида:

$$\left. \frac{\partial a}{\partial x} \right|_{x=0,y} = \left. \frac{\partial a}{\partial x} \right|_{x=l_1,y} = \left. \frac{\partial a}{\partial y} \right|_{x,y=0} = \left. \frac{\partial a}{\partial y} \right|_{x,y=l_2} = 0;$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=0,y} = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=l_1,y} = \left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{x,y=0} = \left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{x,y=l_2} = 0.$$

Формирование контрастных ДС автокаталитической переменной в закритической области представлено на рис. 4, 5. Кроме обычной картины распределения концентрации активатора по поверхности слоя на этих рисунках добавлен соответ-

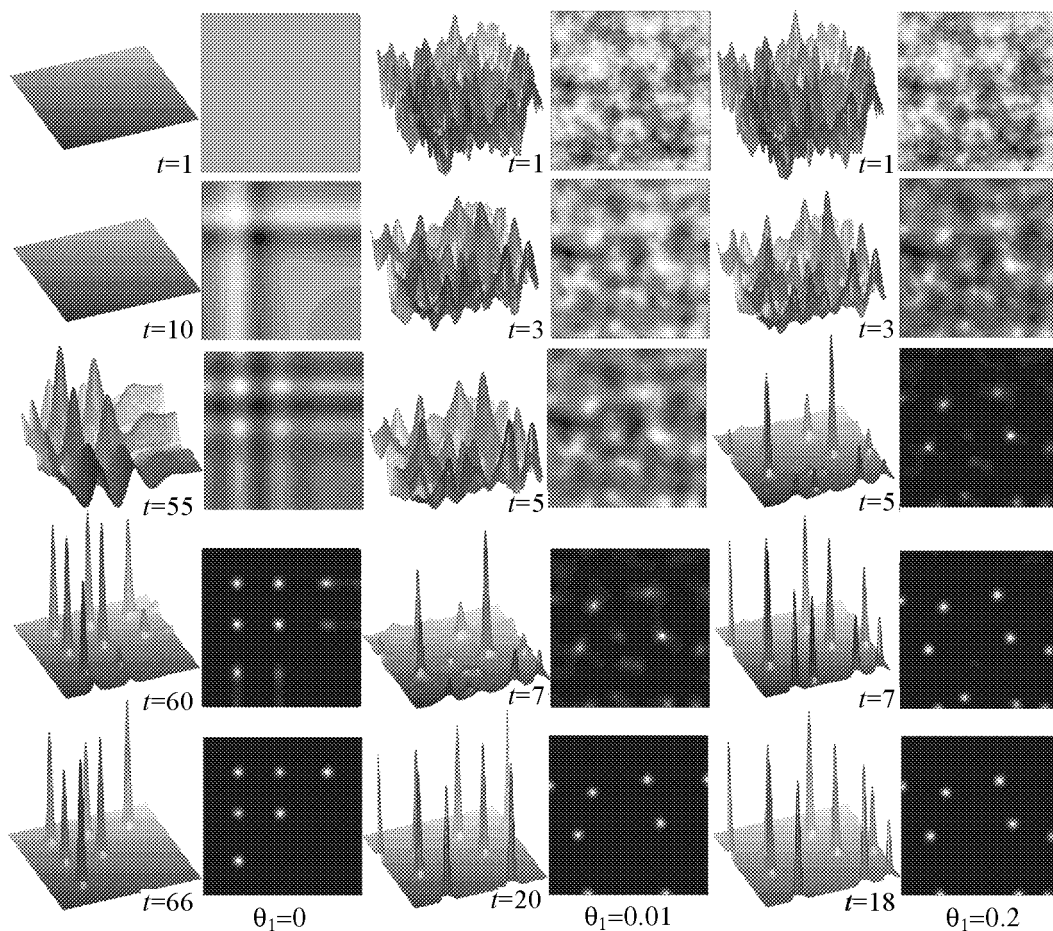


Рис. 4. Формирование контрастных ДС автокаталитической переменной. Слой 100×100 единиц. В середине указаны моменты модельного времени. Нижняя строка соответствует моментам установления статистически стационарного состояния. Изменение θ_1 указано снизу. Параметры модели: $\rho_0 = 0.1$; $\mu_0 = 1$; $D = 400$; $k_{f1} = k_{f2} = 1$, $\theta_2 = 0$

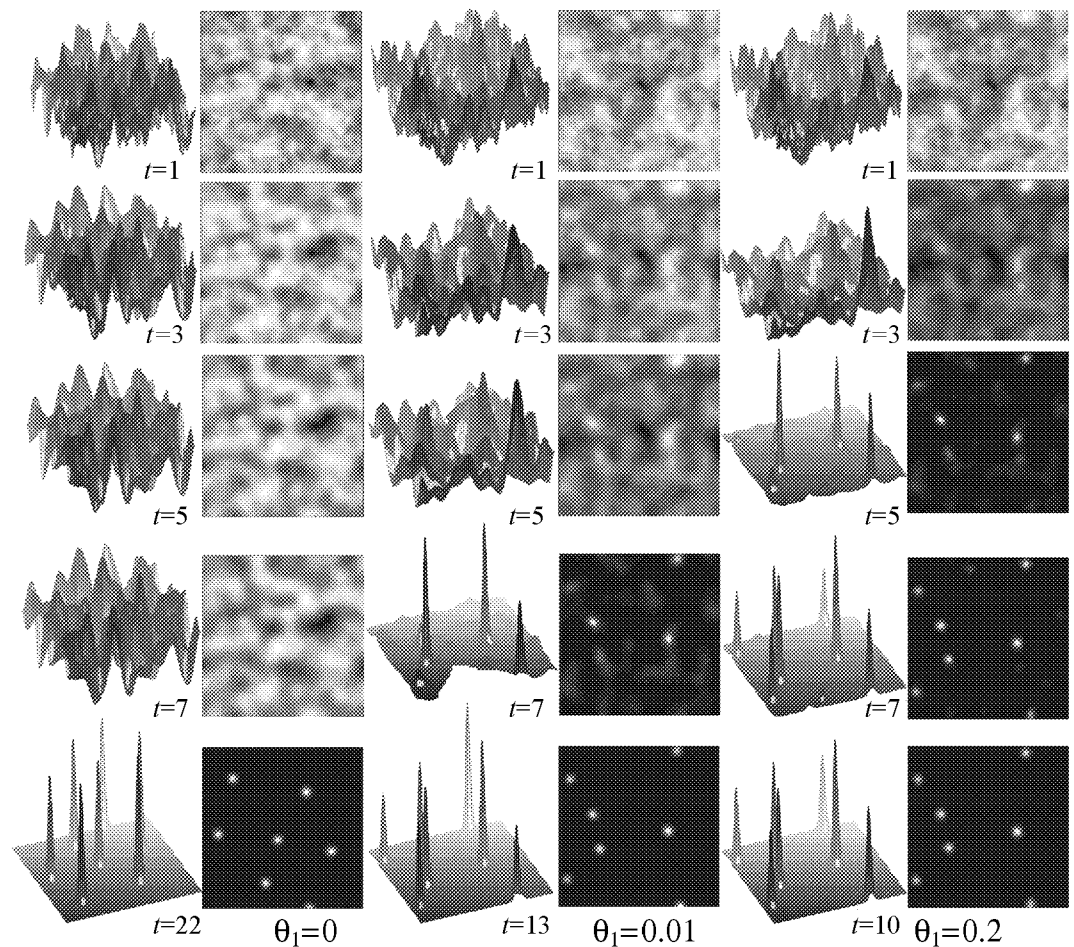


Рис. 5. Формирование контрастных ДС автокаталитической переменной. Слой 100×100 единиц. Параметры модели: $\rho_0 = 0.1$; $\mu_0 = 1$; $D = 400$; $k_{f1} = k_{f2} = 1$, $\theta_2 = 0.01$. См. описание к рис. 4

ствующий вид сверху, дающий более наглядное представление о конфигурации ДС. Для изображения сверху градиент цвета от черного к белому визуализирует изменение значений переменной от минимального до максимального, соответственно. Из рис. 4, 5 видно, что при увеличении θ_1 и θ_2 процесс разрушения однородного состояния и формирования статистически стационарной ДС происходит быстрее, что качественно соответствует теоретическим выводам, сделанным выше. Из сравнения рис. 4 и 5 можно заметить, что наличие аддитивной компоненты внешнего шума еще больше ускоряет указанные процессы. Видеофайлы эволюции системы (3) в полях мультипликативных и аддитивных флуктуаций приведены на сайте <http://sites.google.com/site/morfogenez/>.

Кроме того, численно исследовался вопрос об изменении уровня флуктуаций динамических переменных при переходе системы от однородного состояния к ДС. На рис. 6 приведены усредненные по поверхности слоя флуктуации динамических переменных $\sigma = \left\langle \sqrt{\langle a^2 \rangle - \langle a \rangle^2} \right\rangle_S$ в зависимости от времени. Эти графики иллюстрируют тот факт, что в области перехода флуктуации концентраций реагентов в системе возрастают до макроскопических масштабов. На рис. 6 также видны моменты начала и конца переходного режима.

На рис. 7 представлена эволюция поля концентраций активатора и ингибитора для моментов времени $t = 1, 390, 403, 430$ в докритической области. Для моделирования были выбраны параметры: $\rho_0 = 1; \mu_0 = 1; D = 400; \theta_1 = 0.2, k_{f1} = 0.2; \theta_2 = 0.1, k_{f2} = 1$. Соответствующие графики зависимостей действительной и мнимой частей собственных значений неустойчивых мод от волнового числа, полученные на основании выражения (9), а также усредненных по поверхности слоя флуктуаций концентраций реагентов, представлены на рис. 8, *a* и 9. На рис. 8, *б* изображены зависимости действительной и мнимой частей собственных значений задачи (4) в отсутствие флуктуаций при тех же параметрах модели ρ_0, μ_0, D . Как видно из рисунка, при данных параметрах модели в отсутствие шума действительная часть всех собственных значений отрицательна, а мнимая равна нулю, то есть неустойчивость отсутствует. Устойчивым решением является однородное распределение концентраций по поверхности слоя. При наличии внешнего шума

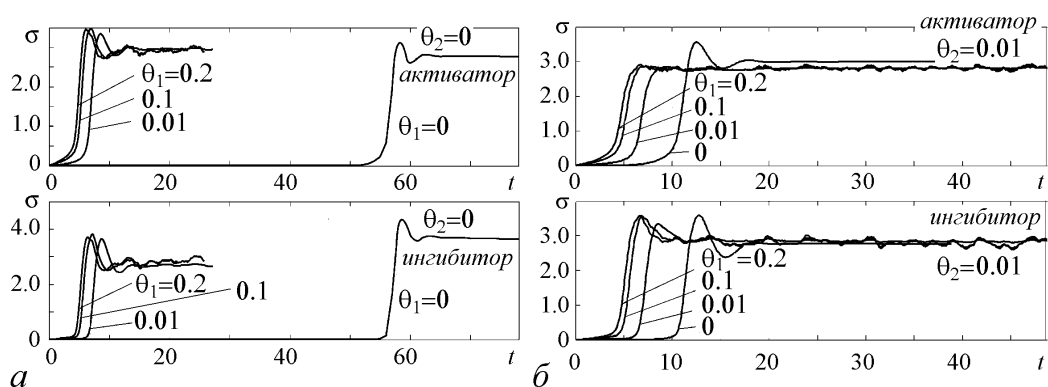


Рис. 6. Усредненные по поверхности слоя флуктуации динамических переменных при различных интенсивностях мультипликативного шума. Параметры модели: $\rho_0 = 0.1; \mu_0 = 1; D = 400; k_{f1} = k_{f2} = 1; \theta_2 = 0$ (*a*), 0.01 (*б*)

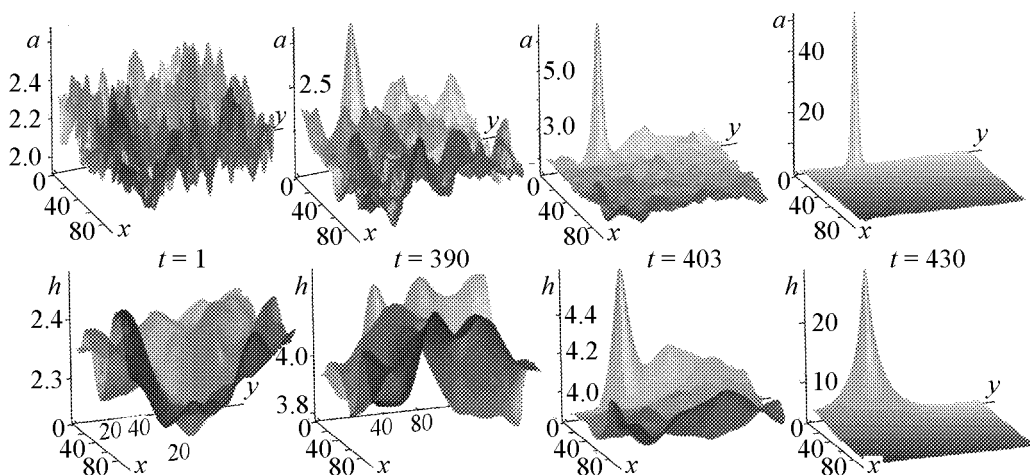


Рис. 7. Формирование ДС при параметрическом возбуждении в докритической области. Верхний ряд – концентрация активатора, нижний – концентрация ингибитора. Параметры модели: $\rho_0 = 1; \mu_0 = 1; D = 400; \theta_1 = 0.2, k_{f1} = 0.2; \theta_2 = 0.1, k_{f2} = 1$

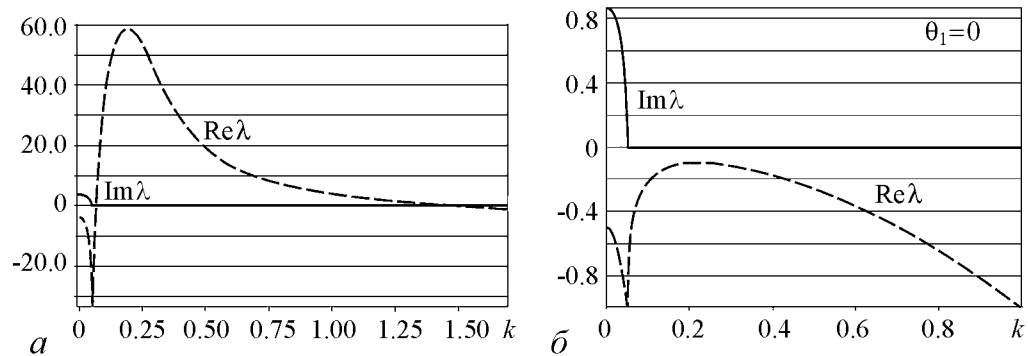


Рис. 8. Зависимости действительной и мнимой частей λ от волнового числа k при $\rho_0 > \rho_{0c}$. Параметры модели: $\rho_0 = 1$; $\mu_0 = 1$; $D = 400$; $a - \theta_1 = 0.2$, $k_{f1} = 0.2$; $\theta_2 = 0.1$, $k_{f2} = 1$. $\bar{\sigma} - \theta_1 = \theta_2 = 0$

(см. рис. 8, *a*) некоторые моды приобретают положительный инкремент, при этом мнимая часть их собственных значений остается равной нулю. Таким образом, при выбранных параметрах моделирования, согласно выражению (9), возникает неустойчивость типа мягкой моды, вызванная флуктуациями параметров – параметрическая неустойчивость. Так как подобная неустойчивость возникает только при интенсивности внешнего шума больше некоторой критической, интенсивность внешнего шума при этом наряду с ρ_0 является бифуркационным параметром системы (3). Как и при жестком возбуждении структур в докритической области, связанным с некоторым начальным возбуждением критической амплитуды, возникающая при параметрической неустойчивости ДС имеет солитоноподобный вид (см. рис. 7, $t = 430$). Однако физическая причина его происхождения иная.

Из графиков зависимостей средних по поверхности слоя флуктуаций (см. рис. 9) видно, что в случае параметрической неустойчивости в процессе образования уединенной ДС флуктуации возрастают до макроскопического уровня. Однако уровень флуктуаций при установившейся статистически стационарной структуре (см. значения σ после $t = 410$ на рис. 9) значительно меньше, чем соответствующий уровень в закритической области (см. рис. 6).

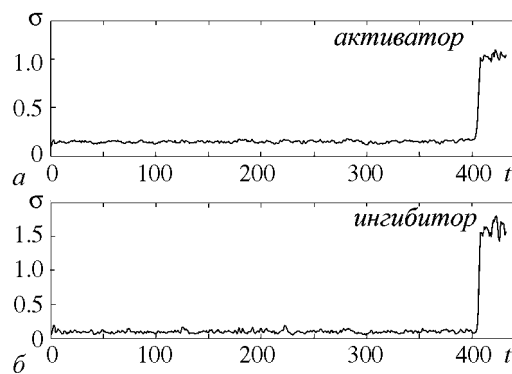


Рис. 9. Усредненные по поверхности слоя флуктуации динамических переменных при параметрическом возбуждении. Параметры модели: $\rho_0 = 1$; $\mu_0 = 1$; $D = 400$; $\theta_1 = 0.2$, $k_{f1} = 0.2$; $\theta_2 = 0.1$, $k_{f2} = 1$

Из рис. 9 также видно, что длительность процесса разрушения однородного состояния в докритической области значительно превосходит аналогичную длительность при $\rho_0 < \rho_{0c}$. Это явление можно объяснить критическим замедлением всех процессов вблизи точки бифуркации. Распределения концентраций активатора и ингибитора в процессе разрушения однородного состояния показаны на рис. 7 ($t = 1$ и $t = 390$).

Переходному режиму соответствует момент $t = 403$ на рис. 7 и временной промежуток приблизительно 390...410 единиц модельного времени на

рис. 9. Длительность переходного режима много меньше времени существования статистически стационарных состояний.

Интересным является вопрос о сравнении процессов формирования ДС в поле аддитивных и мультипликативных флуктуаций. Данные о процессе формирования ДС в поле аддитивных флуктуаций взяты из работы [21]. Сравнение проводилось на основании исследований усредненных по поверхности слоя флуктуаций и норм матриц разности распределений концентрации динамических переменных от времени.

Метод анализа на основе норм матриц разности распределений концентрации предложен в [22]. Здесь приведем краткое его описание. Пусть $U^k \in R^{n \times n}$ – распределение концентрации реагента в момент времени k , а $U_{i,j}^k \in R$, $i, j = 1, \dots, n$ – его концентрация в точке с координатой (i, j) в момент времени k . Введем норму $C^k = \|U^{k+1} - U^k\|_\infty$. Здесь для любой матрицы A максимальная строковая матричная норма определена соотношением $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$. C^k показывает близость соседних состояний друг к другу.

Для сравнения выбраны следующие параметры: $\rho_0 = 0.1$; $\mu_0 = 1$; $D = 400$; $k_{f1} = k_{f2} = 1$; мультипликативный шум: $\theta_1 = 0.01$, $\theta_2 = 0$; аддитивный шум: $\theta_1 = \theta_2 = 0.01$, то есть величины интенсивности флуктуаций малы. Из приведенных на рис. 10 зависимостей видно, что:

1) разрушение однородного состояния в поле мультипликативных флуктуаций происходит быстрее;

2) время переходного режима в поле аддитивных флуктуаций в среднем больше ($\Delta\tau_2 > \Delta\tau_1$ на рис. 10, б);

3) в статистически стационарном состоянии при наличии мультипликативных флуктуаций состояния системы в двух близких временных точках различаются значительно больше (на рис. 10, б после момента $t = 20$ C^k испытывает значительные скачки (см. черную кривую)). Это прослеживается на видеоизображении как своеобразное «мерцание» пичков – изменение диаметра их основания и амплитуды.

4) Уровень флуктуаций, а также статистические средние значения амплитуды ДС примерно одинаковы в случайных полях обоих типов.

Сравнение процессов формирования ДС во внешних случайных полях с большой интенсивностью флуктуаций затруднено, так как при мультипликативном шуме возникают значительные по величине флуктуации параметров, приводящие к разрушению одних пичков и формированию других, то есть происходит чередование режимов с различными конфигурациями ДС.

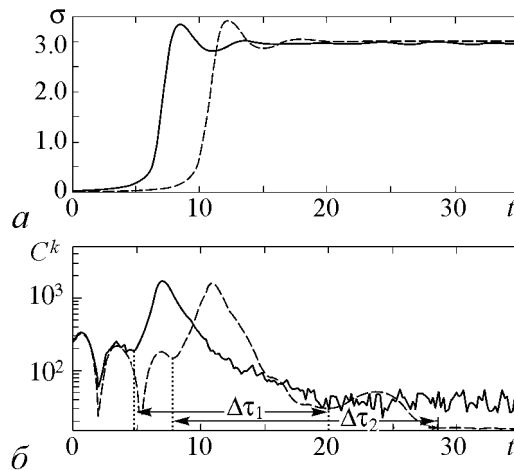


Рис. 10. Сравнение процессов формирования ДС в поле мультипликативных (черная линия) и аддитивных (серая штриховая линия) флуктуаций. а – Усредненные по поверхности слоя флуктуации активатора. б – Норма матрицы разности распределений концентрации активатора

Заключение

Исследовано влияние мультипликативных флуктуаций параметров системы, описываемых случайным однородным изотропным гауссовым полем, на образование диссипативных структур при возникновении неустойчивости типа мягкой моды в системах реакция–диффузия на примере модели Гирера–Майнхардта. С точностью до слагаемых, квадратичных по интенсивности флуктуаций и кубических по амплитуде неустойчивых мод, получена система уравнений, описывающих взаимодействие этих мод (параметров порядка). Показано, что мультипликативные флуктуации параметров системы приводят к смещению стационарного состояния каждой моды, изменению собственных значений задачи, а также увеличению области неустойчивых мод и параметрическому возбуждению системы. Из полученной системы уравнений для параметров порядка также следует, что при малой интенсивности шума процесс формирования диссипативных структур определяется взаимодействием трех и четырех мод, а при увеличении интенсивности этот процесс определяется многомодовым взаимодействием. Исследованы зависимости величины области неустойчивых мод от интенсивности флуктуаций в закритической области и критической интенсивности флуктуаций от постоянной компоненты скорости образования автокаталитической переменной при различных радиусах корреляции при параметрическом возбуждении. Проведено численное моделирование эволюции рассматриваемой системы. Исследовано изменение уровня флуктуаций динамических переменных в процессе формирования диссипативных структур при различных интенсивностях мультипликативного шума. Проведено сравнение процессов формирования диссипативных структур в поле аддитивных и мультипликативных флуктуаций для случая малых интенсивностей шума.

Приложение

Функции уравнения (7) $\omega_1(k_u, k'_u, k''_u)$, $\omega_2(k_u, k'_u, k''_u, k'''_u)$, $\omega_3(k'_u, \hat{k}_s, k_u, k''_u, k'''_u)$, $\alpha(k_u, k'_u, \hat{k}_s, \mathbf{z}_q(t))$, $\beta(k_u, k'_u, k''_u, \hat{k}_s, \mathbf{z}_q(t))$ и $f[\mathbf{z}_q(t)]$:

$$\begin{aligned} \omega_1(k_u, k'_u, k''_u) &= \\ &= \frac{O_1^{*(1)}(k_u)}{h_0} \left(O_1^{(1)}(k'_u) O_1^{(1)}(k''_u) + \frac{a_0^2}{h_0^2} O_2^{(1)}(k'_u) O_2^{(1)}(k''_u) - \frac{2a_0}{h_0} O_1^{(1)}(k'_u) O_2^{(1)}(k''_u) \right) + \\ &\quad + O_2^{*(1)}(k_u) O_1^{(1)}(k'_u) O_1^{(1)}(k''_u), \\ \omega_2(k_u, k'_u, k''_u, k'''_u) &= O_1^{*(1)}(k) \left(\frac{2a_0}{h_0^3} O_1^{(1)}(k') O_2^{(1)}(k'') O_2^{(1)}(k''') - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{h_0^2} O_1^{(1)}(k') O_1^{(1)}(k'') O_2^{(1)}(k''') - \frac{a_0^2}{h_0^4} O_2^{(1)}(k') O_2^{(1)}(k'') O_2^{(1)}(k''') \right), \\ \omega_3(k'_u, \hat{k}_s, k_u, k''_u, k'''_u) &= \frac{\varepsilon_1(k'_u, \hat{k}_s, k_u) \delta_1(\hat{k}_s, k''_u, k'''_u)}{\lambda_1(\hat{k}_s)} + \frac{\varepsilon_2(k'_u, \hat{k}_s, k_u) \delta_2(\hat{k}_s, k''_u, k'''_u)}{\lambda_2(\hat{k}_s)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha(k_u, k'_u, \hat{k}_s, \mathbf{z}_q(t)) &= -\mu_0 O_1^{*(1)}(k_u) O_1^{(1)}(k'_u) z_{1,(\mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u)}(t) - \\ &\quad - \sum_{\hat{\mathbf{k}}, s} \sigma_1(k'_u, \hat{k}_s, k_u) \delta(\mathbf{k}'_u + \hat{\mathbf{k}}_s - \mathbf{k}_u) \left(\rho_0 z_{2, \hat{\mathbf{k}}_s}(t) - \mu_0 a_0 z_{1, \hat{\mathbf{k}}_s}(t) \right) - \\ &\quad - \mu_0^2 \sum_{\hat{\mathbf{k}}, s} \sigma_2(k_u, \hat{k}_s, k'_u) z_{1,(\mathbf{k}_u - \hat{\mathbf{k}}_s)}(t) z_{1,(\hat{\mathbf{k}}_s - \mathbf{k}'_u)}(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta(k_u, k'_u, k''_u, \hat{k}_s, \mathbf{z}_q(t)) &= \mu_0 \sum_{\hat{\mathbf{k}}, s} \sigma_3(k'_u, \hat{k}_s, k_u, k''_u) \delta(\mathbf{k}'_u + \hat{\mathbf{k}}_s - \mathbf{k}_u) z_{1,(\hat{\mathbf{k}}_s - \mathbf{k}''_u)}(t) + \\ &\quad + \mu_0 \sum_{\hat{\mathbf{k}}, s} \sigma_4(\hat{k}_s, k'_u, k''_u, k_u) \delta(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}''_u - \hat{\mathbf{k}}_s) z_{1,(\mathbf{k}_u - \hat{\mathbf{k}}_s)}(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f[\mathbf{z}_q(t)] &= O_1^{*(1)}(k_u) (\rho_0 z_{2, \mathbf{k}_u}(t) + \mu_0 a_0 z_{1, \mathbf{k}_u}(t)) + \\ &\quad + \mu_0 \sum_{\hat{\mathbf{k}}, s} \beta_1(k_u, \hat{k}_s) z_{1,(\mathbf{k}_u - \hat{\mathbf{k}}_s)}(t) \left(\rho_0 z_{2, \hat{\mathbf{k}}_s}(t) - \mu_0 a_0 z_{1, \hat{\mathbf{k}}_s}(t) \right). \end{aligned}$$

Здесь

$$\beta_1(k_u, \hat{k}_s) = O_1^{*(1)}(k_u) \left(\frac{O_1^{(1)}(\hat{k}_s) O_1^{*(1)}(\hat{k}_s)}{\lambda_1(\hat{k}_s)} + \frac{O_1^{(2)}(\hat{k}_s) O_1^{*(2)}(\hat{k}_s)}{\lambda_2(\hat{k}_s)} \right),$$

$$\beta_2(k'_u, k''_u, \hat{k}'_s) = O_1^{(1)}(k''_u) \beta_1(k'_u, \hat{k}'_s) = \sigma_2(k'_u, \hat{k}'_s, k''_u),$$

$$\sigma_1(k''_u, \hat{k}'_s, k'_u) = \frac{\varepsilon_1(k''_u, \hat{k}'_s, k'_u)}{\lambda_1(\hat{k}'_s)} + \frac{\varepsilon_2(k''_u, \hat{k}'_s, k'_u)}{\lambda_2(\hat{k}'_s)},$$

$$\sigma_3(k''_u, \hat{k}'_s, k'_u, k'''_u) = O_1^{(1)}(k'''_u) \sigma_1(k''_u, \hat{k}'_s, k'_u),$$

$$\sigma_4(\hat{k}'_s, k''_u, k'''_u, k'_u) = \left(\frac{\delta_1(\hat{k}'_s, k''_u, k'''_u) O_1^{(1)}(\hat{k}'_s)}{\lambda_1(\hat{k}'_s)} + \frac{\delta_2(\hat{k}'_s, k''_u, k'''_u) O_1^{(2)}(\hat{k}'_s)}{\lambda_2(\hat{k}'_s)} \right) O_1^{*(1)}(k'_u),$$

$$\delta_j(\hat{k}_s, k''_u, k'''_u) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{O_1^{*(j)}(\hat{k}_s)}{h_0} \left(O_1^{(1)}(k''_u) O_1^{(1)}(k'''_u) + \frac{a_0^2}{h_0^2} O_2^{(1)}(k''_u) O_2^{(1)}(k'''_u) - \frac{2a_0}{h_0} O_1^{(1)}(k''_u) O_2^{(1)}(k'''_u) \right) + \\ &\quad + O_2^{*(j)}(\hat{k}_s) O_1^{(1)}(k''_u) O_1^{(1)}(k'''_u), \quad j = 1, 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_j(k'_u, \hat{k}_s, k_u) &= \frac{2O_1^{*(1)}(k_u)}{h_0} \left(O_1^{(1)}(k'_u) O_1^{(j)}(\hat{k}_s) + \frac{a_0^2}{h_0^2} O_2^{(1)}(k'_u) O_2^{(j)}(\hat{k}_s) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2a_0}{h_0} (O_1^{(1)}(k'_u) O_2^{(j)}(\hat{k}_s) + O_1^{(j)}(\hat{k}_s) O_2^{(1)}(k'_u)) \right) + \\ &\quad + 2O_2^{*(1)}(k_u) O_1^{(1)}(k'_u) O_1^{(j)}(\hat{k}_s), \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Операторные функции уравнения (8):

$$\begin{aligned}
\widehat{L}_0(k_u) &= -\mu_0^2 a_0 g_{11}(k_u/2) \beta_1(k_u, k_u/2) + \\
&+ \frac{\mu_0^2 a_0}{2} O_1^{*(1)}(k_u) O_1^{(1)}(k_u/2) O_{1k}^{*(1)}(k_u/2) g_{11}(k_u/2) - \\
&- \frac{\sigma_1(k_u/2, k_u/2, k_u)}{2} O_1^{*(1)}(k_u/2) (\rho_0^2 g_{22}(k_u/2) + \mu_0^2 a_0^2 g_{11}(k_u/2)) + \\
&+ \frac{\mu_0}{4} \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}', \text{uuss}} \sigma_3(k'_u, \hat{k}_s, k_u, k''_u) g_{11}(|\hat{\mathbf{k}}_s - \mathbf{k}''_u|) \beta_1(k'_u, \hat{k}'_s) O_1^{*(1)}(k''_u) (\rho_0^2 \mu_0 g_{22}(\hat{k}'_s) + \\
&\quad + \mu_0^3 a_0^2 g_{11}(\hat{k}'_s)) \delta(\mathbf{k}'_u + \hat{\mathbf{k}}_s - \mathbf{k}_u) \delta(\mathbf{k}'_u - \hat{\mathbf{k}}'_s - \hat{\mathbf{k}}_s + \mathbf{k}''_u) \delta(\mathbf{k}''_u - \hat{\mathbf{k}}'_s) + \dots \\
\widehat{L}_1(k_u, k'_u, k''_u, \hat{k}_s) &= -\lambda_1(k_u) \delta_{\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u} \delta_{\mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u} + \\
&+ \frac{\mu_0^2}{2} \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}'', \text{uu}} O_1^{*(1)}(k_u) O_1^{(1)}(k'_u) O_1^{*(1)}(k'_u) O_1^{(1)}(k''_u) g_{11}(|\mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u|) \delta(2\mathbf{k}'_u - \mathbf{k}''_u - \mathbf{k}_u) - \\
&- \frac{\mu_0^2 a_0}{2} \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''\hat{\mathbf{k}}, \text{uus}} O_1^{*(1)}(k_u) O_1^{(1)}(k'_u) g_{11}(|\mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u|) \sigma_1(k''_u, \hat{k}_s, k'_u) \delta(\mathbf{k}''_u + \hat{\mathbf{k}}_s - \mathbf{k}'_u) \times \\
&\quad \times \delta(\hat{\mathbf{k}}_s - \mathbf{k}_u + \mathbf{k}'_u) + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''\hat{\mathbf{k}}, \text{uus}} \sigma_1(k'_u, \hat{k}_s, k_u) \sigma_1(k''_u, \hat{k}_s, k'_u) \delta(\mathbf{k}'_u + \hat{\mathbf{k}}_s - \mathbf{k}_u) \times \\
&\quad \times \delta(\mathbf{k}''_u + \hat{\mathbf{k}}_s - \mathbf{k}'_u) (\rho_0^2 g_{22}(\hat{k}_s) + \mu_0^2 a_0^2 g_{11}(\hat{k}_s)) - \\
&- \frac{\mu_0^2 a_0}{2} \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''\hat{\mathbf{k}}, \text{uus}} O_1^{*(1)}(k'_u) O_1^{(1)}(k''_u) g_{11}(\hat{k}_s) \sigma_1(k'_u, \hat{k}_s, k_u) \times \\
&\quad \times \delta(\mathbf{k}'_u + \hat{\mathbf{k}}_s - \mathbf{k}_u) \delta(\mathbf{k}'_u - \mathbf{k}''_u - \hat{\mathbf{k}}_s) - \\
&- \frac{\mu_0^2}{2} \sum_{\mathbf{k}'\hat{\mathbf{k}}, \text{us}} \sigma_2(k_u, \hat{k}_s, k'_u) g_{11}(|\mathbf{k}_u - \hat{\mathbf{k}}_s|) \delta(2\hat{\mathbf{k}}_s - \mathbf{k}'_u - \mathbf{k}_u) \delta_{\mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u} - \\
&- \frac{\mu_0^2 a_0}{2} \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''\hat{\mathbf{k}}, \text{uus}} \sigma_3(k'_u, \hat{k}_s, k_u, k''_u) g_{11}(|\hat{\mathbf{k}}_s - \mathbf{k}''_u|) \delta(\mathbf{k}'_u + \hat{\mathbf{k}}_s - \mathbf{k}_u) \times \\
&\quad \times [O_1^{*(1)}(k'_u) \delta(\mathbf{k}'_u - \hat{\mathbf{k}}_s + \mathbf{k}''_u) + O_1^{*(1)}(k''_u) \delta(2\mathbf{k}''_u - \hat{\mathbf{k}}_s) \delta_{\mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u}] - \\
&- \frac{\mu_0^2 a_0}{2} \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''\hat{\mathbf{k}}, \text{uus}} \sigma_4(\hat{k}_s, k'_u, k''_u, k_u) g_{11}(|\mathbf{k}_u - \hat{\mathbf{k}}_s|) \delta(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}''_u - \hat{\mathbf{k}}_s) \times \\
&\quad \times [O_1^{*(1)}(k'_u) \delta(\mathbf{k}'_u - \mathbf{k}_u + \hat{\mathbf{k}}_s) + O_1^{*(1)}(k''_u) \delta(\mathbf{k}''_u - \mathbf{k}_u + \hat{\mathbf{k}}_s) \delta_{\mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u}] + \\
&+ \frac{\mu_0^4}{4} \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}', \text{uuss}} \sigma_2(k_u, \hat{k}_s, k'_u) \beta_2(k'_u, k''_u, \hat{k}'_s) g_{11}(|\mathbf{k}_u - \hat{\mathbf{k}}_s|) g_{11}(|\hat{\mathbf{k}}_s - \mathbf{k}'_u|) \times \\
&\quad \times \delta(\hat{\mathbf{k}}'_s - \mathbf{k}''_u - \hat{\mathbf{k}}_s + \mathbf{k}'_u) \delta(\mathbf{k}'_u - \hat{\mathbf{k}}'_s - \mathbf{k}_u + \hat{\mathbf{k}}_s) + \dots \\
\widehat{L}_2(k_u, k'_u, k''_u, k'''_u, \hat{k}_s) &= \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}'', \text{uu}} \omega_1(k_u, k'_u, k''_u) \delta_{\mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u} \delta(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}''_u - \mathbf{k}_u) - \\
&- \frac{\mu_0^2}{2} \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''\mathbf{k}'''\hat{\mathbf{k}}', \text{uuus}} O_1^{*(1)}(k_u) O_1^{(1)}(k'_u) \sigma_3(k''_u, \hat{k}'_s, k'_u, k'''_u) g_{11}(|\mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u|) \times \\
&\quad \times \delta(\mathbf{k}''_u - \mathbf{k}'_u + \hat{\mathbf{k}}_s) \delta(\hat{\mathbf{k}}'_s - \mathbf{k}'''_u - \mathbf{k}_u + \mathbf{k}'_u) + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \widehat{L}_3 \left(k_u, k'_u, k''_u, k'''_u, k_u^{IV}, \hat{k}_s, \hat{k}'_s \right) = \\ & = \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''\mathbf{k}'''\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{u}} \left(\omega_2(k_u, k'_u, k''_u, k'''_u) - \omega_3(k'_u, \hat{k}_s, k_u, k''_u, k'''_u) \right) \delta(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}''_u + \mathbf{k}'''_u - \mathbf{k}_u) \times \\ & \times \delta_{\mathbf{k}'_u, \mathbf{k}^{IV}_u} + \frac{\mu_0^2}{2} \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''\mathbf{k}'''\mathbf{k}^{IV}\hat{\mathbf{k}}'\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{s}\mathbf{s}} \sigma_3(k'_u, \hat{k}_s, k_u, k''_u) \sigma_3(k_u^{IV}, \hat{k}'_s, k'_u, k'''_u) \times \\ & \times g_{11}(|\hat{\mathbf{k}}_s - \mathbf{k}''_u|) \delta(\mathbf{k}'_u + \hat{\mathbf{k}}_s - \mathbf{k}_u) \delta(\hat{\mathbf{k}}'_s - \mathbf{k}'''_u - \hat{\mathbf{k}}_s + \mathbf{k}''_u) \delta(\mathbf{k}_u^{IV} + \hat{\mathbf{k}}'_s - \mathbf{k}'_u) + \dots \end{aligned}$$

Система (8) здесь полностью не приводится в силу ее крайней громоздкости. Полностью она доступна на сайте <http://sites.google.com/site/morfogenez/>.

Библиографический список

1. Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. Автоволновые процессы. М.: Наука, 1987.
2. Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980.
3. Ланда П.С. Автоколебания в распределенных системах. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. 320 с.
4. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическое моделирование в биофизике (Введение в теоретическую биофизику). Москва; Ижевск: ИКИ, 2004.
5. Эбелинг В. Образование структур при необратимых процессах. Введение в теорию диссипативных структур. Москва; Ижевск: ИКИ НИЦ РХД, 2004.
6. Белинцев Б.Н. Диссипативные структуры и проблема биологического формообразования // УФН. 1983. Т. 141. Вып. 1. С. 55.
7. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979.
8. Meinhardt H. The Algorithmic Beauty of Sea Shells. Berlin, Heidelberg, New York. Springer-Verlag, 1999.
9. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы: теория и применение. М.: Мир, 1987.
10. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения глазами физика. М.: Физматлит, 2001.
11. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио. 1961.
12. Стратонович Р.Л., Романовский Ю.М. //Науч. докл. Высшей шк. 1958. № 4. С. 221.
13. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит. 1978. С. 352
14. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука. Физматлит. 1997. 496 с.
15. Михайлов А.С., Упоров И.В. Критические явления в средах с размножением, распадом и диффузией // УФН. 1984. Т. 144, вып. 1. С. 79.
16. Полак Л.С., Михайлов А.С. Процессы самоорганизации в физико-химических системах. М.: Наука. 1983.

17. *Курушина С.Е., Максимов В.В.* Шумоиндуцированные фазовые переходы в процессах конкуренции во флуктуирующих средах // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 1. С. 88.
18. *Белинцев Б.Н.* Динамические коллективные свойства развивающихся систем. Дисс. . . . канд. физ.-мат. наук. М.: МФТИ, 1979.
19. *Соляник Г.И., Чернавский Д.С.* Математические модели морфогенеза. Препринт ФИАН, 1980, № 8.
20. *Асташкина Е.В., Романовский Ю.М.* Флуктуации в процессе самоорганизации // Математические модели в экологии. Горький: Изд-во Горьковского ун-та. 1980. С. 74.
21. *Курушина С.Е.* Аналитическое исследование и численное моделирование контрастных диссипативных структур в поле флуктуаций динамических переменных // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 6. С. 125.
22. *Громова Л.И., Иванов А.А., Курушина С.Е.* Зависимость времени образования контрастных диссипативных структур от интенсивности и радиуса корреляции поля флуктуаций динамических переменных // Материалы XVI Международной конференции ВМСППС'2009 25–31 мая 2009 г. Алушта, Крым. М.: МАИ-Принт. 2009. С. 245.
23. *Meinhardt H., Gierer A.* Generation and regeneration of sequences of structures during morphogenesis // J. Theor. Biol. 1980. Vol. 85. P. 429.
24. *Gierer A., Meinhardt H.* Biological pattern formation involving lateral inhibition // Lectures on Mathematics in the Life Sciences. 1974. Vol. 7. P. 163.
25. *Meinhardt H., Gierer A.* Applications of a theory of biological pattern formation based on lateral inhibition // Journ. Cell. Sci. 1974. Vol. 15. P. 321.
26. *Белинцев Б.Н.* Физические основы биологического формообразования. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991.
27. *Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. С. 640.
28. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1966.

*Самарский государственный
аэрокосмический университет*

*Поступила в редакцию 7.09.2009
После доработки 3.12.2009*

DISSIPATIVE STRUCTURES OF REACTION–DIFFUSION SYSTEM SIMULATION IN MULTIPLICATIVE FLUCTUATION PHONE

S.E. Kurushina, A.A. Ivanov

The influence of multiplicative fluctuations of parameters of reaction-diffusion system on example of Gierer–Meinhardt model to formation of dissipative structures in soft mode instability regime was investigated. The system described interaction of

non-decreased modes (order parameters) was received. It was shown that fluctuations of parameters are lead to changing of number of unstable modes, shifting of their eigenvalues and parametrical excitation of the system. The numerical simulation of described model evolution was received. The dependences of the dynamical variables fluctuation intensity in process of dissipative structures formation from the noise intensity were founded.

Keywords: Reaction–diffusion system, dissipative structures, multiplicative fluctuations, unstable modes, parametrical excitation.



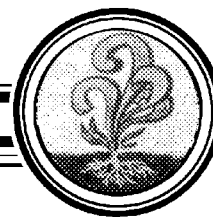
Курушина Светлана Евгеньевна – родилась в Куйбышеве (1971), окончила Самарский государственный университет (1994). После окончания СГУ работает в Самарском государственном аэрокосмическом университете. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГАУ (2002) по специальности 01.04.05 – Оптика. Опубликовала 30 научных работ. Область научных интересов: теория колебаний, волн, структур; динамика нелинейных стохастических систем; теория самоорганизации; прикладная математика; стохастические уравнения.

443086 Самара, Московское шоссе, 34
Самарский государственный аэрокосмический университет
им. академика С.П. Королева
E-mail: kurushina72@mail.ru



Иванов Андрей Александрович – родился в Куйбышеве (1988). В настоящее время является студентом пятого курса Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королева. Область научных интересов – математическое моделирование, прикладная математика, решение СЛАУ больших размерностей. Опубликовал 5 научных работ по направлениям, указанным выше.

443086 Самара, Московское шоссе, 34
Самарский государственный аэрокосмический университет
им. академика С.П. Королева
E-mail: SsauIvanov@gmail.com



ШИРОКОПОЛОСНАЯ ХАОТИЧЕСКАЯ ГЕНЕРАЦИЯ И ОПТИМИЗАЦИЯ ЕЕ ХАРАКТЕРИСТИК В СВЧ-ГЕНЕРАТОРЕ С ЭЛЕКТРОННОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ И МАГНИТНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФОКУСИРУЮЩЕЙ СИСТЕМОЙ

С.А. Куркин, А.А. Короновский, Ю.И. Левин, А.Е. Храмов

В рамках двумерной численной модели исследована нелинейная динамика и генерация широкополосных хаотических сигналов в генераторе на электронном потоке с виртуальным катодом. Обнаружено сильное влияние характеристик внешнего неоднородного магнитного поля на нелинейную динамику виртуального катода в системе. Изучены физические процессы, ответственные за обнаруженную зависимость динамики электронного потока с виртуальным катодом от параметров внешнего неоднородного магнитного поля. Исследованы зависимости выходной мощности генерации в системе с виртуальным катодом от характеристик внешнего неоднородного магнитного поля. Проведена оптимизация параметров магнитной периодической фокусирующей системы генератора для достижения максимальной ширины полосы и мощности хаотической генерации.

Ключевые слова: СВЧ-генератор, интенсивный электронный поток, виртуальный катод, нелинейная динамика, СВЧ-электроника, виркатор, неоднородное магнитное поле, физическая и математическая оптимизация, численное моделирование, метод частиц

Введение

Исследование нелинейных нестационарных процессов в распределённых активных средах, содержащих электронные потоки, взаимодействующие с электромагнитными полями, является одной из важных задач современной сверхвысокочастотной радиофизики и электроники больших мощностей [1–3]. Данные исследования имеют несомненное фундаментальное значение, связанное с выявлением общих закономерностей нелинейных нестационарных процессов в пучково-плазменных активных системах, с анализом физических процессов в распределённых автоколебательных средах, содержащих потоки заряженных частиц, взаимодействующие с электромагнитными полями электродинамических систем. Эти исследования невозможно проводить без привлечения современных методов анализа, развитых в нелинейной динамике. Весьма важным представляется и прикладное значение подобных

теоретических работ, так как они позволяют провести физическую и математическую оптимизацию характеристик существующих устройств и предложить новые модификации мощных приборов СВЧ-диапазона, которые будут иметь новые функциональные возможности.

Среди подобных новых устройств вакуумной электроники особое внимание уделяется генераторам широкополосных хаотических сигналов на основе электронных пучков с виртуальным катодом. Такие приборы, получив название генераторов хаоса с электронной обратной связью или низковольтных виркаторов [1, 4–7], представляют собой перспективные и важные устройства современной СВЧ-электроники для целей телекоммуникаций с использованием хаотических сигналов, шумовой радиолокации, модулей нелинейных антенн, могут быть использованы в технологических процессах и т.д. [8–12]. В настоящее время достигнуты определенные успехи в понимании принципов работы подобных устройств, проведены как теоретические, так и экспериментальные исследования нового класса генераторов широкополосных хаотических сигналов [1, 6, 13–17].

В то же самое время, значительный интерес вызывает дальнейшее исследование различных режимов работы подобных систем и оптимизации процессов в них для получения необходимых характеристик одночастотного, узкополосного и широкополосного хаотического мощного выходного излучения. Одной из центральных здесь является задача улучшения выходных характеристик источников мощного СВЧ-излучения: выходной мощности, КПД, расширения полосы генерируемых частот (или наоборот, получения одночастотной генерации) и т.д. Практическая реализация этих задач представляет собой сложную научную и техническую проблему, решение которой возможно лишь на базе новейшей вычислительной техники с привлечением современных численных методов исследования и физической и математической оптимизации процессов, протекающих в электронных потоках, взаимодействующих с электромагнитными полями [18–20].

Одним из важных направлений работ может стать использование физической оптимизации приборов СВЧ, так как детальное знание физических процессов в подобных системах позволяет предложить различные модификации устройств, в которых удалось бы улучшить и оптимизировать выходные характеристики. Следует отметить, что применение только методов математической оптимизации к уравнениям модели устройства СВЧ-электроники может приводить к решениям, нереализуемым физически. Поэтому необходимо предварительное детальное изучение физических процессов в системе и нахождение физических способов улучшения процессов взаимодействия электронов и полей (например, изменения характера движения электронов за счет различной конфигурации фокусирующих полей, изменения свойств электродинамических систем и т.д.). После того, как тенденция к улучшению характеристик ясна, возможно дальнейшее применение методов математической оптимизации (например, вариационных методов и др.) [19, 20].

Одной из важных задач является разработка оптимальной фокусирующей магнитной системы для генератора на виртуальном катоде. Данная задача имеет несомненный прикладной интерес, однако существует и значительная фундаментальная ценность понимания влияния внешнего магнитного поля на формирование и динамику виртуального катода в электронном потоке. Внешнее магнитное поле можно рассматривать как управляющий фактор, которым можно влиять на поведение

нелинейной активной среды, в частности, управляя процессами образования и взаимодействия электронных структур (электронных сгустков) во внешнем магнитном поле. Одной из первых работ, посвящённых изучению влияния внешнего магнитного поля на характеристики генерации виркатора, была работа [21], в которой были получены экспериментальные зависимости мощности и частоты СВЧ-излучения виркатора от величины внешнего магнитного поля. Позднее аналогичные экспериментальные исследования проводились в работах [22–24], которые также показали сильное влияние внешнего магнитного поля на характеристики СВЧ-излучения виртуального катода. Следует также отметить работу [25], в которой было проведено планомерное изучение влияния внешнего однородного магнитного поля на мощность генерации виртода и показано, что с изменением магнитного поля наблюдаются осцилляции величины выходной мощности в такой системе. Полученные экспериментальные данные были подтверждены результатами численного моделирования. В работе [26] с помощью численного моделирования с использованием релятивистского электромагнитного кода «KARAT» рассматривалась динамика виртуального катода в трубчатом электронном потоке при слабом магнитном поле. Было обнаружено, что в этом случае наблюдаются значительные пульсации проходящего пучка за плоскостью виртуального катода, которые оказывают сильное влияние на характеристики СВЧ-излучения в моделируемой системе. В работе [27] с использованием релятивистского электромагнитного кода «MAGIC» было проведено исследование влияния внешнего магнитного поля на КПД виркатора и обнаружено, что с увеличением магнитного поля КПД монотонно уменьшается, асимптотически стремясь к постоянной величине. Аналогичные результаты были получены в работе [28], где был выявлен физический механизм подобного поведения КПД в зависимости от величины магнитного поля. В работах [29, 30] проводилось исследование влияния внешнего магнитного поля на критический (предельный вакуумный) ток сплошного слабoreлятивистского электронного потока. Наконец, в работе [31] была показана существенная роль собственных магнитных полей пучка заряженных частиц на нелинейную динамику виртуального катода. Как показывает ряд предварительных исследований [32, 33], большую роль играет и неоднородность магнитных полей в области виртуального катода.

Из этого небольшого обзора становится очевидным, что динамика электронного потока со сверхкритическим током, а следовательно, и характеристики генерации приборов с виртуальным катодом, сильно зависят от величины внешнего магнитного поля. Однако систематического исследования данных вопросов не проводилось, поэтому процессы, происходящие в электронном потоке с виртуальным катодом при изменении фокусирующего пучок внешнего магнитного поля, до сих пор остаются плохо изученными и несистематизированными. Их понимание позволит продвигаться в изучении систем с виртуальным катодом, что является весьма важной и актуальной задачей электроники больших мощностей.

В представленной работе приведены результаты численного исследования влияния внешнего неоднородного магнитного поля на динамику виртуального катода и оптимизации параметров магнитной периодической фокусирующей системы низковольтного виркатора для достижения оптимальных характеристик выходного излучения. В работе также рассматриваются особенности нелинейной динамики электронного потока с виртуальным катодом при изменении внешнего магнитного поля,

изучаются различные механизмы хаотизации колебаний виртуального катода, приводящие к усложнению динамики виркаторной системы и к появлению многочастотного спектра излучения генератора с электронной обратной связью.

1. Исследуемая модель

Исследуемая модель генератора с электронной обратной связью (рис. 1, *a*) состоит из трех основных частей – источника электронов (электронной пушки); пространства дрейфа в виде отрезка цилиндрического волновода длиной L и радиусом R ; коллектора электронов отработанного пучка, а также электродинамического элемента, предназначенного для вывода СВЧ-мощности (генерируемого сигнала) из пространства взаимодействия.

В качестве источника электронного потока выступает электронная пушка с изолированным от магнитного поля термокатодом, формирующая аксиально-симметричный электронный поток на входе в пространство взаимодействия [34]. Электронный пучок с прямолинейными траекториями электронов, инжектируемый в пространство взаимодействия, предполагается моноскоростным. Сформированный сплошной электронный пучок с током I инжектируется в пространство взаимодействия через левую (входную) сетку и выводится через правую (выходную) сетку на коллектор, электроны также могут оседать на боковой стенке пространства взаимодействия. Обозначим внешний радиус пучка как R_b , и введём геометрический параметр электронного пучка $\sigma = R_b/R$.

Для вывода мощности в исследуемой модели используется отрезок широкополосной электродинамической системы (обычно отрезок спирали, обладающей широкой полосой частот и большим сопротивлением связи). Заметим, что в исследуемой модели пренебрегается джоулевыми потерями в стенках прибора и возможным излучением СВЧ-энергии в открытое пространство.

Вдоль оси пространства дрейфа, в котором формируется виртуальный катод, прикладывается внешнее фокусирующее неоднородное в пространстве магнитное поле, создаваемое магнитной периодической фокусирующей системой (МПФС) с N магнитными кольцами. Распределение магнитного поля в работе вычислялось с помощью свободно распространяемого пакета прикладных программ Ansoft Maxwell SV*. На оси системы распределение в простран-

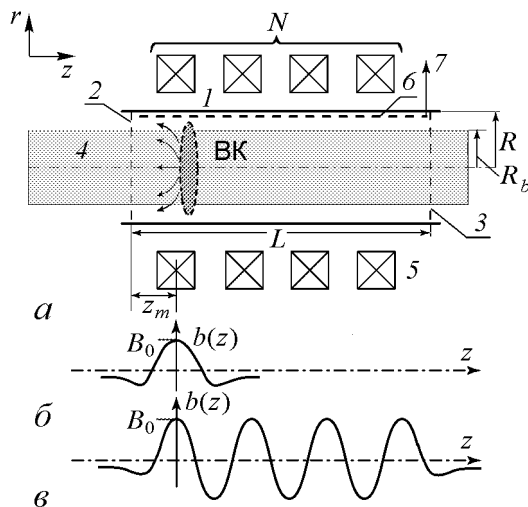


Рис. 1. *a* – схема исследуемого генератора с электронной обратной связью, использующего в качестве активной среды электронный поток с виртуальным катодом: 1 – цилиндрическое пространство дрейфа; 2 и 3 – входные и выходные сетки; 4 – электронный пучок; 5 – МПФС; 6 – широкополосная спиральная электродинамическая система (используемая для вывода выходного сигнала) с выводом энергии; 7. *б* – характерное распределение магнитного поля на оси системы для одного магнитного кольца. *в* – распределение магнитного поля на оси системы для МПФС с четырьмя периодами

*<http://www.ansoft.com/maxwellsv/>

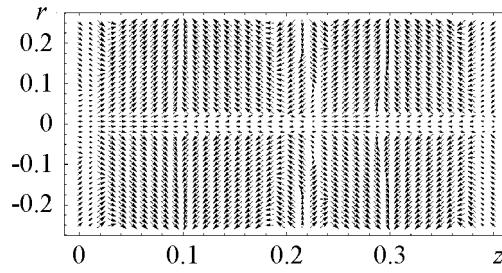


Рис. 2. Силовые линии магнитного поля в пространстве взаимодействия для МПФС с четырьмя магнитными кольцами. Магнитные кольца расположены в точках с безразмерными координатами $z = 0.1, z = 0.2, z = 0.3$ и $z = 0.4$, соответственно

внешнего магнитного поля в области дрейфа пучка на рис. 2 показан характерный вид силовых линий магнитного поля для случая магнитной системы, состоящей из четырех магнитных колец. Расположение МПФС в пространстве характеризуется координатой первого магнита фокусирующей системы z_m . В представленном исследовании число магнитных колец МПФС менялось в диапазоне $0 \leq N \leq 4$, который соответствует экспериментальным макетам низковольтного виркатора [1, 6].

Для описания процессов в генераторе с электронной обратной связью будем рассматривать нестационарную двумерную модель динамики электронного потока в пространстве взаимодействия, которая основана на решении самосогласованной системы уравнений движения заряженных частиц для моделирования динамики электронного пучка и уравнения Пуассона для нахождения самосогласованного поля пространственного заряда [35, 36].

Следует заметить, что нахождение самосогласованного поля пространственного заряда с помощью уравнения Пуассона не позволяет корректно исследовать релятивистские пучки, то есть пучки с релятивистскими скоростями $\beta_0 = v_0/c \geq 0.5$, так как при этом не учитывается собственное магнитное поле электронного потока и связанные с ним эффекты пинчевания пучка. Поэтому в рамках используемой в работе математической модели исследуются только слаборелятивистские электронные потоки.

В уравнениях, описывающих динамику электронного пучка, используются следующие безразмерные величины потенциала φ , напряжённости E поля пространственного заряда, индукции B внешнего магнитного поля, плотности ρ , скорости v и импульса P электронов, а также пространственных координат z и r , времени t :

$$\begin{aligned} \varphi' &= \frac{v_0^2}{\eta_0} \varphi, & E' &= \frac{v_0^2}{L\eta_0} E, & B' &= \frac{v_0}{L\eta_0} B, & \rho' &= \rho_0 \rho, \\ v' &= v_0 v, & P' &= m_e v_0 P, & z' &= Lz, & r' &= Lr, & t' &= \frac{L}{v_0} t, \end{aligned} \quad (1)$$

где штрихом обозначены соответствующие размерные величины, $\eta_0 = e/m_e$ – удельный заряд покоящегося электрона, v_0 и ρ_0 – не зависящие от радиуса статические (невозмущённые) скорость и плотность электронного потока на входе в систему, L – длина пространства взаимодействия.

Численное моделирование нестационарных процессов в электронном пучке при инжекции его в пространство дрейфа проводилось методом крупных частиц. Он заключается в том, что электронный поток представляется в виде совокупности крупных частиц, которые в цилиндрической системе координат имеют вид заряженных колец. Для каждой заряженной частицы решались уравнения движения, записанные через компоненты её импульса. В цилиндрических координатах в безразмерных величинах (1) уравнения движения заряженных частиц записываются в следующем виде:

$$\frac{dP_{ri}}{dt} - \gamma(z_i, \theta_i, r_i) r_i \left(\frac{d\theta_i}{dt} \right)^2 = -E_r - r_i B_z \frac{d\theta_i}{dt}, \quad (2)$$

$$\frac{dP_{\theta i}}{dt} + \gamma(z_i, \theta_i, r_i) \frac{dr_i}{dt} \frac{d\theta_i}{dt} = B_z \frac{dr_i}{dt} - B_r \frac{dz_i}{dt}, \quad (3)$$

$$\frac{dP_{zi}}{dt} = -E_z + r_i B_r \frac{d\theta_i}{dt}, \quad i = 1, \dots, N_0, \quad (4)$$

где

$$\gamma(z_i, \theta_i, r_i) = \left(1 - \beta_0^2 \left[\left(\frac{dr_i}{dt} \right)^2 + \left(r_i \frac{d\theta_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt} \right)^2 \right] \right)^{-1/2}. \quad (5)$$

Здесь z_i , r_i и θ_i – продольная, радиальная и азимутальная координаты заряженных частиц соответственно; $P_{zi} = \gamma \dot{z}_i$, $P_{ri} = \gamma \dot{r}_i$ и $P_{\theta i} = \gamma r_i \dot{\theta}_i$ – продольная, радиальная и азимутальная компоненты импульсов заряженных частиц соответственно; E_z и E_r – продольная и радиальная компоненты электрического поля; $B_z(z, r)$ и $B_r(z, r)$ – продольная и радиальная компоненты индукции магнитного поля (предполагается, что азимутальная составляющая внешнего магнитного поля равна нулю: $B_\theta = 0$); $\beta_0 = v_0/c$, где v_0 – статическая (невозмущённая) скорость электронного потока на входе в систему, c – скорость света; индексом i обозначены номера частиц; N_0 – полное число заряженных частиц, моделирующих электронный поток.

Уравнения движения (2)–(4) для каждой крупной частицы интегрировались численно методом с перешагиванием. Уравнение (3) может привести к неустойчивости азимутальной скорости частицы $\dot{\theta}_i$, так как из него следует, что $\dot{\theta}_i \sim 1/r_i$, и при малых r_i и больших временных шагах численного интегрирования Δt частица ведёт себя «нефизично», очень быстро приобретая вращательный момент. Для корректного решения уравнений движения для частиц, близко подошедших к оси симметрии, интегрирование уравнений производилось с повышенной точностью. Шаг интегрирования уменьшался до значения, когда численная схема становится устойчивой, при этом результаты интегрирования уравнений движения частиц начинают сходиться с уменьшением шага численного интегрирования Δt .

Распределение потенциала в пространстве взаимодействия находится самосогласованным образом с помощью уравнения Пуассона, которое в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = \alpha^2 \rho, \quad (6)$$

где

$$\alpha = L \left(\frac{|\rho_0|}{V_0 \varepsilon_0} \right)^{1/2}, \quad (7)$$

V_0 – ускоряющее напряжение пучка. Здесь α – это безразмерный управляющий параметр (критерий подобия задачи [37]), пропорциональный току пучка, как $\alpha \sim \sqrt{I}$, и длине пространства взаимодействия, как $\alpha \sim L$. Уравнение Пуассона решается при следующих граничных условиях:

$$\varphi(z = 0, r) = 0, \quad \varphi(z = 1, r) = 0, \quad \varphi(z, r = R) = 0, \quad (8)$$

$$\left. \frac{d\varphi}{dr} \right|_{r=0} = 0, \quad (9)$$

где условие (8) задаётся тем, что пучок инжектируется в пространство, ограниченное идеально проводящей поверхностью под нулевым потенциалом; условие (9) на оси симметрии $r = 0$ определяется аксиальной симметрией пространства взаимодействия. Уравнение Пуассона (6) решалось методом сеток. Для нахождения плотности пространственного заряда использовалась снижающая сеточный шум процедура билинейного взвешивания крупных частиц (PIC-метод) [36].

Отметим, что применение уравнения Пуассона справедливо, учитывая нерелятивистские энергии потока, когда можно пренебречь собственным магнитным полем электронного пучка и связанными с ним эффектами пинчевания потока [31]. Действительно, для характерных параметров исследуемого слабoreлятивистского потока ларморовская сила, определяемая собственным магнитным полем пучка, $F_{r1} = \mu_0 e r v_0^2 / 2\pi R_b^2 \sim 10^{-4}$ Н оказывается значительно меньше фокусирующей (дефокусирующей) силы $F_{r2} = r B_0 \dot{\theta}_i \sim 10^4$ Н, определяемой внешним магнитным полем, скоростью и направлением орбитального движения частиц. Из вышесказанного следует, что для рассматриваемого случая нерелятивистских и слабoreлятивистских электронных потоков использование уравнения Пуассона для вычисления самосогласованного поля является справедливым и обоснованным.

Численное моделирование вывода мощности в виде отрезка спиральной замедляющей системы проводилось с помощью метода эквивалентных схем (см. подробнее [13, 38, 39]).

2. Динамика выходного излучения и физические процессы в генераторе с неоднородным магнитным полем в области формирования виртуального катода

На первом этапе исследований были рассмотрены характерные режимы колебаний в генераторе с электронной обратной связью при различных конфигурациях внешнего магнитного поля и различных токах электронного потока (рис. 3). Геометрические параметры пространства взаимодействия виркатора предполагались неизменными. Отметим также, что связь безразмерного параметра внешнего магнитного поля B_0 с соответствующей размерной величиной B' определяется соотношением (1). Для типичных параметров макета низковольтного виркатора [5, 6, 16], рассматриваемых в данной статье (ускоряющее напряжение $V_0 = 4$ кВ, длина пространства дрейфа $L = 5$ см), безразмерной величине параметра магнитного поля $B_0 = 1$ соответствует внешнее магнитное поле $B' = 42$ Гс.

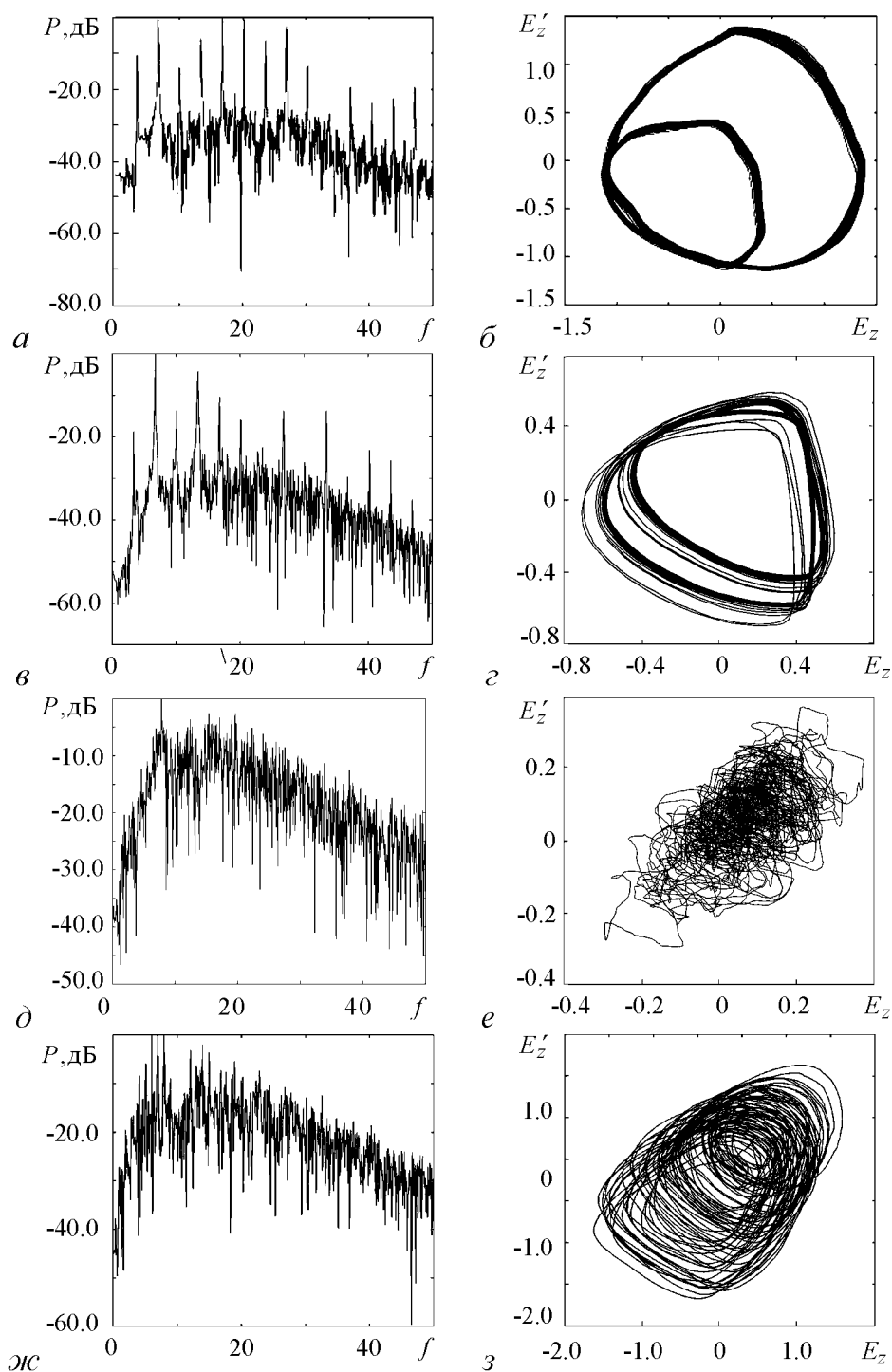


Рис. 3. Спектр мощности выходного поля (*a*, *в*, *д*, *жс*), регистрируемого отрезком спиральной электродинамической системы, и соответствующие проекции фазового портрета колебаний продольного электрического поля (*б*, *з*, *е*, *з*) в области виртуального катода для различных режимов колебаний, уровней фокусирующего магнитного поля и различного числа N кольцевых магнитов (управляющий параметр $\alpha = 20$): *a*, *б* – режим регулярной генерации, малое фокусирующее поле $B_0 = 6$, $N = 1$; *в*, *з* – режим широкополосных хаотических колебаний при увеличении фокусирующего магнитного поля $B_0 = 20$, $N = 1$; *д*, *е* – режим широкополосных хаотических колебаний, большое фокусирующее магнитное поле $B_0 = 80$, $N = 1$; *жс*, *з* – режим широкополосных хаотических колебаний при увеличении числа кольцевых магнитов и среднем уровне фокусирующего поля $B_0 = 20$, $N = 4$

Исследование показало, что при отсутствии внешнего магнитного поля или при его малых величинах (B_0 много меньших оптимального значения B_{\min} , при котором критический ток электронного потока минимален (см. подробнее [29])) в системе наблюдаются близкие к одночастотным режимы генерации. Спектр колебаний ВЧ поля на выходе системы богат высшими гармониками, однако уровень шумового пьедестала достаточно низок, что позволяет рассматривать данные режимы колебаний виртуального катода как режим регулярной генерации. Фазовый портрет колебаний продольного электрического поля в области виртуального катода также свидетельствует в данном случае о периодических колебаниях в системе. Соответствующие режиму характерный спектр мощности выходного поля и построенная методом Такенса проекция фазового портрета колебаний продольного электрического поля в области виртуального катода показаны на рис. *а, б*. Рисунок построен для системы с одним кольцевым магнитом ($N = 1$).

С ростом величины параметра B_0 внешнего магнитного поля в системе с одним кольцевым магнитом наблюдается усложнение колебаний, проявляющееся в росте шумового пьедестала, который поглощает наблюдающиеся гармоники колебаний виртуального катода (*в, з*). При большом параметре магнитного поля в выходном сигнале практически не наблюдается регулярной составляющей и спектр выходного сигнала близок к шумовому, а ширина полосы порядка одной октавы (*д*); фазовый портрет колебаний поля не имеет структуры и свидетельствует также о сложной хаотической динамике системы (*е*).

Аналогичное поведение демонстрирует генератор с электронной обратной связью при увеличении числа N магнитных колец в МПФС, с фиксированным значением параметра магнитного поля на оси системы B_0 . Это демонстрируют рис. *ж, з*, построенный при тех же параметрах, что и рис. *в, з*, но с числом намагниченных колец в МПФС $N = 4$. Сравнивая рис. *в* и *з*, *ж* и *з*, соответственно, можно видеть, что увеличение числа магнитов в МПФС приводит к существенному усложнению динамики выходного излучения в системе с виртуальным катодом, шумовой пьедестал растет, гармонические составляющие колебаний виртуального катода уширяются и исчезают. В итоге, при $N = 4$ спектр колебаний становится шумоподобным с шириной полосы частот порядка одной октавы. Вид спектра при большом числе периодов МПФС подобен спектру излучения при большой величине параметра магнитного поля B_0 (ср. с рис. *д, е*, построенным при $B_0 = 80$).

С чем связана такая динамика системы при изменении параметров магнитного поля? В первую очередь, такое поведение определяется динамикой пространственного заряда электронного потока в области виртуального катода, которая происходит в сильно неоднородном магнитном поле. Известно [40–46], что усложнение и хаотизация выходного излучения виркаторных систем определяется формированием электронных структур, которые, взаимодействуя между собой, приводят к усложнению поведения системы. Введение неоднородного магнитного поля в систему с виртуальным катодом позволяет более эффективно управлять этими процессами по сравнению со случаями системы без магнитного поля [47] или с однородным магнитным полем [48–50] и, как следствие, получить генерацию широкополосного хаотического сигнала с большей мощностью и большей шириной полосы генерируемых частот.

Наиболее просто рассмотреть физические процессы, сопровождающие перестройку динамики электронного потока с виртуальным катодом в генераторе с одним кольцевым магнитом. На рис. 4 показаны мгновенные конфигурационные портреты электронного потока в координатах (r, z) в последовательные моменты времени t_i , построенные для различных значений параметров магнитного поля. Анализ конфигурационных портретов применительно к системам с виртуальным катодом оказывается весьма полезным и продуктивным методом для визуализации и анализа процессов динамики пространственного заряда пучка в подобных системах. Каждая точка на конфигурационном портрете соответствует одной заряженной крупной частице, которые моделируют динамику потока (см. раздел 1).

Рис. 4, *a* соответствует малому магнитному полю. Максимум плотности пространственного заряда (области электронного уплотнения – электронной структуры) соответствует области виртуального катода, где заряженные частицы, тормозясь в его поле, останавливаются и отражаются обратно к плоскости инжекции или на стенки пространства дрейфа. Из рисунка хорошо видно, что динамика отраженных частиц протекает, в основном, в поперечном (радиальном) направлении в пространстве дрейфа. Такое поведение связано, в первую очередь, с силами пространственного заряда, которые не ограничиваются малым фокусирующим магнитным полем и приводят к существенному расширению пучка в поперечном направлении. Как следствие, при малом параметре внешнего магнитного поля формируется единственный электронный сгусток (единственная электронная структура – виртуальный катод). Виртуальный катод совершает периодические (близкие к релаксационным) пространственно-временные осцилляции, определяющие дискретный спектр выходного излучения рассматриваемой системы (см. рис. 3, *a, б*).

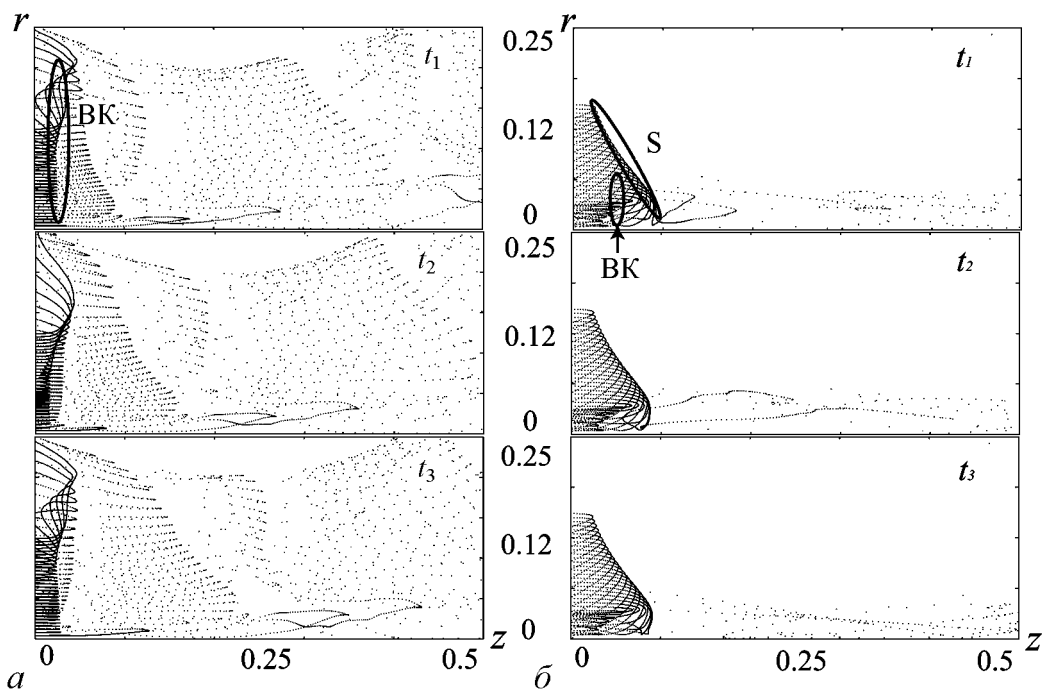


Рис. 4. Мгновенные конфигурационные портреты электронного потока в координатах (r, z) в различные последовательные моменты времени t_i в течение одного периода колебаний виртуального катода, построенные при $\alpha = 20$ и $z_m = 0$, для малого $B_0 = 6$ (*a*) и большого $B_0 = 80$ (*б*) магнитного поля

С ростом величины внешнего фокусирующего магнитного поля, поперечная (радиальная) динамика заряженных частиц в системе оказывается ограниченной, и начинает преобладать динамика в продольном направлении (рис. 4, б, построенный при $B_0 = 80$). Главная электронная структура (виртуальный катод) в данном случае формируется во внутренних слоях электронного потока, где тормозящие поля пространственного заряда достигают максимальных значений. Сильная неоднородность внешнего магнитного поля кольца вдоль радиальной оси системы приводит к тому, что внешние слои потока оказываются в значительно более сильном магнитном поле, по сравнению с внутренними слоями. При определённой амплитуде B_0 внешнего магнитного поля (при безразмерном параметре $B_0 > 20$) внешние слои электронного потока попадают в магнитную ловушку, которая приводит к тому, что траектории заряженных частиц данных слоёв сильно искривляются. Этот эффект приводит к формированию вторичной электронной структуры в системе – вторичного электронного сгустка, который выделен на рис. 4, б символом «S». Взаимодействие между главной и вторичной электронными структурами приводит к появлению внутренней обратной связи, что обуславливает хаотизацию колебаний виртуального катода в электронно-волновом генераторе с электронной обратной связью аналогично тому, как это было показано в работах [43–45, 48].

Рассмотрим теперь физические механизмы усложнения динамики электронного потока с виртуальным катодом в системе с несколькими магнитными кольцами в МПФС. Во-первых, необходимо отметить, что увеличение числа N магнитных колец в МПФС приводит к росту величины магнитного поля в области пространства дрейфа благодаря сложению магнитных полей каждого из магнитов системы. Во-вторых, распределение неоднородного магнитного поля вдоль пространства дрейфа становится существенно другим по сравнению со случаем единственного кольца (см. рис. 1, б и в). В случае МПФС с несколькими периодами распределение продольной компоненты магнитного поля на оси системы становится приблизительно синусоидальным (см., также [34, 51]). Как следствие, электронный поток, проходя через область виртуального катода к коллектору генератора, испытывает действие периодического магнитного поля, что приводит к существенным пульсациям пучка и значительному изменению траекторий частиц в области «виртуальный катод – коллектор».

Для визуализации динамики пучка в этом случае удобно воспользоваться анализом траекторий движения частиц с помощью построения пространственно-временных диаграмм электронного потока в пространстве дрейфа виркатора. Хорошо известно, что данный метод весьма эффективен для изучения особенностей динамики электронного потока с виртуальным катодом [45, 52]. Отметим, что в рассматриваемом случае неоднородного магнитного поля пространственно-временная динамика в различных слоях электронного потока существенно различна, поэтому будем рассматривать внутренние и внешние слои потока отдельно. Каждая заряженная частица с учетом аксиальной симметрии описывается тремя своими координатами (t, z, r) и рис. 5 демонстрирует проекцию траекторий выделенных крупных частиц (для каждого слоя показано примерно 5% частиц, использующихся в моделировании) для внутреннего и внешнего слоев на плоскость (t, z) .

Диаграммы на рис. 5, а, в, построенные для случая $N = 1$, показывают, что заряженные частицы как внешнего, так и внутреннего слоев, формируют нестаци-

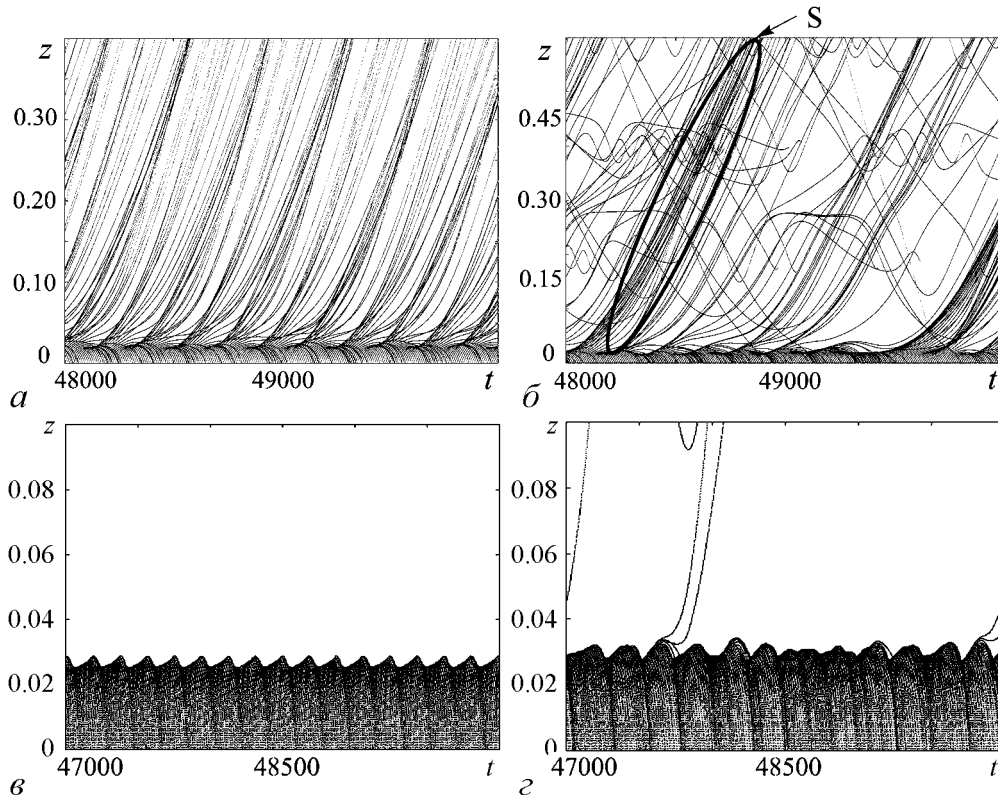


Рис. 5. Пространственно-временные диаграммы электронного потока в безразмерных координатах (t, z) для управляющих параметров $\alpha = 20$, $B_0 = 20$ различных N : 1 для внутреннего (а) и внешнего (в) слоев; 4 для внутреннего (б) и внешнего (г) слоев электронного потока

онарный виртуальный катод (электронный сгусток, растянутый вдоль оси времени t на рисунках), который демонстрирует колебательную динамику близкую к регулярной. Легко видеть, что виртуальный катод периодически отражает часть потока во внутреннем слое обратно к плоскости инжекции. В этом случае ток, проходящий через область виртуального катода, близок к постоянному значению, то есть пространственно-временная модуляция проходящего к коллектору потока достаточно мала. Во внешних слоях, в отличие от внутренних, наблюдается полное отражение потока от виртуального катода, и координата минимума потенциала (виртуального катода) совершает малые колебания в пространстве с течением времени.

С увеличением числа магнитных колец в МПФС (см. пространственно-временную диаграмму (t, z) на рис. 5, б, г для $N = 4$) во внутренних слоях потока также формируется нестационарный колеблющийся виртуальный катод, однако, теперь проходящий ток оказывается сильно промодулированным во времени. МПФС с четырьмя магнитными кольцами формирует протяженную область с сильным неоднородным магнитным полем, которое приводит к нерегулярному формированию вторичных электронных сгустков (электронных структур) в проходящем потоке (отмечены символом «S» на рис. 5) во внутреннем слое электронного потока. Формирующиеся электронные структуры влияют на динамику основной электронной структуры (виртуального катода) через общее поле пространственного заряда в пространстве дрейфа. Такое взаимодействие между структурами приводит к формированию некоторой дополнительной внутренней обратной связи, которая способствует хаотизации

колебаний пространственного заряда в системе [53, 54]. Также данные нестационарные вторичные структуры в проходящем потоке возбуждают шумоподобные некогерентные колебания в выходной электродинамической структуре низковольтного виркатора. Как и в случае одного магнита ($N = 1$) во внешнем слое, расположенном в большем магнитном поле, наблюдается полное отражение заряженных частиц, но колебания положения виртуального катода становятся нерегулярными, что также способствует дополнительной хаотизации выходного излучения генератора с электронной обратной связью с увеличением числа периодов МПФС.

Таким образом, на основе проведенного рассмотрения физических процессов в электронно-волновом генераторе с электронной обратной связью можно заключить, что увеличение величины магнитного поля одного магнита или увеличение числа периодов при использовании МПФС, усложняющее распределение магнитного поля в области формирования виртуального катода, приводит к формированию дополнительных электронных структур в системе, взаимодействие между которыми, в свою очередь, хаотизирует колебания пространственного заряда потока и, как следствие, расширяет полосу частот, генерируемых низковольтным виркаторм.

3. Физическая оптимизация процессов в генераторе с электронной обратной связью

Понимание физических процессов в системе, приводящих к хаотизации колебаний пространственного заряда во внешнем неоднородном магнитном поле и, как следствие, к расширению полосы генерируемых частот, позволяет оптимизировать параметры внешней фокусирующей магнитной системы с точки зрения достижения максимальной ширины и полосы генерируемых частот. Напомним, что основными параметрами, характеризующими исследуемую фокусирующую магнитную систему для генератора с электронной обратной связью, являлись число периодов N МПФС, параметр магнитного поля B_0 и координата z_m первого магнитного кольца фокусирующей системы. Важной характеристикой генератора с электронной обратной связью является также ток пучка, характеризуемый безразмерным параметром α , поэтому будем учитывать и этот параметр при проведении оптимизационных расчетов с помощью предложенной модели генератора.

Из рассмотрения, проведенного в предыдущем разделе, следует, что увеличение числа N магнитов МПФС и рост параметра магнитного поля B_0 должно приводить к хаотизации выходного излучения генератора, которое выражается как в расширении полосы частот, так и в уменьшении изрезанности спектра мощности генерации.

Проанализируем эти процессы более подробно, для чего рассмотрим поведение системы на различных плоскостях управляющих параметров. Анализ и сопоставление карт режимов на плоскостях управляющих параметров позволит выявить наиболее интересные физически реализуемые режимы в системе и определить оптимальные параметры, соответствующие интересующим нас режимам.

Рис. 6 демонстрирует характерные режимы колебаний системы на плоскости параметров (z_m, B_0) для системы с одним кольцевым магнитом. Анализируя карты режимов, можно заключить, что изменение амплитуды и конфигурации (за счет изменения характера неоднородности поля в области виртуального катода

путем варьирования координаты z_m кольца) внешнего магнитного поля в области виртуального катода приводит к перестройке режимов колебаний в системе, которые характеризуются различным спектральным составом излучения. Вопрос о мощности генерируемого излучения будет рассмотрен в следующем разделе.

При величинах внешнего магнитного поля, соответствующих области Р на карте режимов, в системе наблюдается регулярная динамика виртуального катода (см., также рис. 3, *а,б* с характерным видом спектра мощности генерации и проекцией фазового портрета колебаний). Из рис. 6 следует, что регулярный режим динамики электронного

потока с виртуальным катодом возникает при малых амплитудах внешнего магнитного поля. С дальнейшим ростом амплитуды магнитного поля характер выходного электромагнитного излучения усложняется. Сначала электронный поток с виртуальным катодом начинает демонстрировать слабохаотический режим (область C_1 на рис. 6; соответствующие ему спектры и фазовые портреты колебаний представлены на рис. 3, *в,г*), который может рассматриваться как переходный режим между периодической и развитой хаотической генерацией. Последний наблюдается при значительных параметрах B_0 внешнего магнитного поля (область C_2 на рис. 6).

Таким образом, для получения периодической генерации в системе с виртуальным катодом необходимо выбирать малые значения ведущего магнитного поля, для перехода к развитому хаосу требуется существенно увеличивать параметр неоднородного магнитного поля.

Изменение положения фокусирующей магнитной системы (координаты z_m кольцевого магнита) также существенно влияет на поведение выходного излучения генератора с электронной обратной связью. Общая тенденция такова, что смещение магнитного кольца в область формирования виртуального катода, то есть реализация в области виртуального катода неоднородного, увеличивающегося с радиусом магнитного поля с большой величиной B_0 хаотизирует поведение выходного излучения. Механизм такой хаотизации в сильно неоднородном магнитном поле большой амплитуды был рассмотрен в предыдущем разделе.

Из рис. 6 хорошо виден характерный переход от периодической к хаотической генерации $P \rightarrow C_1 \rightarrow C_2$ при увеличении координаты z_m магнита в пространстве дрейфа. Следует отметить простоту данного способа настройки генератора с электронной обратной связью, так как магнитные кольца одеваются на вакуумированное пространство взаимодействия генератора сверху, что позволяет легко перемещать магнитные кольца вдоль пространства дрейфа.

Интересно отметить область регулярной генерации в системе с малым током пучка $\alpha = 20$ при $z_m \approx 0.1$, наблюдающуюся даже при больших величинах B_0

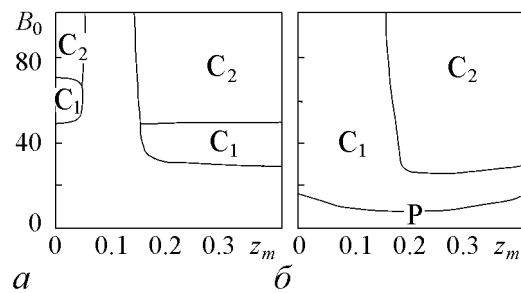


Рис. 6. Результаты расчета по оптимизации генератора с электронной обратной связью: анализ характерных режимов генерации в системе на плоскости управляющих параметров «координата магнитного кольца z_m – параметр магнитного поля B_0 » ($N = 1$) для различных управляющих параметров α : $a - 20$ и $b - 40$. Здесь и далее «Р» – режим периодической генерации, « C_1 » и « C_2 » – режимы узкополосной и широкополосной хаотической генерации, соответственно

параметра магнитного поля (см. рис. 6, а). Это связано с особенностями распределения продольной компоненты магнитного поля намагниченного кольца, которое, как хорошо известно, на оси системы характеризуется кривой с одним максимумом в области центра кольца (типичное распределение показано на рис. 1, б). Положение магнитного кольца $z_m \approx 0.1$ соответствует случаю, когда виртуальный катод формируется в области $z_{вк} \approx 0.2$, где аксиальное магнитное поле близко к нулю и меняет свой знак. Поэтому, рост параметра B_0 в этом случае не приводит к существенному росту магнитного поля в области формирования виртуального катода. Как следствие, при малом токе пучка, при котором виртуальный катод демонстрирует регулярные колебания в сравнительно малом магнитном поле (см. область Р на карте режимов на рис. 6, а), мы наблюдаем регулярную генерацию в системе даже при больших величинах B_0 . Изменение координаты z_m приводит к быстрому установлению развитой хаотической широкополосной генерации за счет попадания виртуального катода в область большого магнитного поля.

При бóльшем токе пучка этот эффект уже не выражен так ярко. Даже небольшое магнитное поле при бóльшем токе пучка приводит к возникновению хаотических режимов колебаний в системе. Это хорошо видно из сравнения рис. 6, а и б. Область периодической генерации при большем токе пучка исчезает при существенно меньшей величине внешнего магнитного поля B_0 , область периодической генерации при положении магнитного кольца $z_m \approx 0.1$ также отсутствует, сменяясь режимом узкополосной хаотической генерации.

Таким образом, изменение тока пучка также является дополнительным фактором, который необходимо учитывать при проведении оптимизации характеристик генератора. Однако управление динамикой генератора путем изменения параметров магнитной фокусирующей системы является более простым способом, чем управление параметрами интенсивного электронного пучка.

Рассмотрим теперь результаты расчетов и оптимизации характеристик генерации при увеличении числа N периодов в магнитной фокусирующей системе. Для определения наиболее оптимальных режимов колебаний были изучены типичные режимы на плоскости управляющих параметров «число N периодов МПФС – параметр B_0 магнитного поля», которая показана на рис. 7. Из представленной карты режимов можно видеть, что регулярная генерация наблюдается при малых величинах параметра внешнего магнитного поля B_0 , что совпадает с результатами предыдущего рассмотрения системы с одним кольцевым магнитом. С увеличением числа магнитных колец в МПФС и величины параметра B_0 характер выходного излучения становится все более сложным (см., например, рис. 3, в, г и д, е), и система последовательно демонстрирует режимы узкополосной C_1

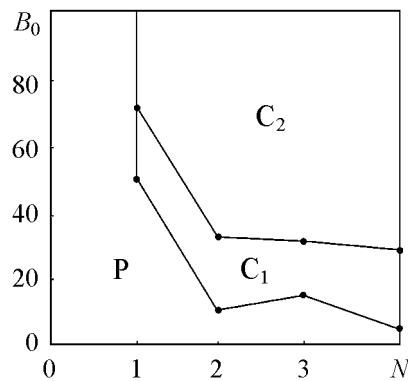


Рис. 7. Результаты расчета по оптимизации генератора с электронной обратной связью и МПФС: анализ характерных режимов генерации в системе на плоскости управляющих параметров «число периодов N МПФС – параметр магнитного поля B_0 » для управляющих параметров $\alpha = 20$ и $z_m = 0.2$

и широкополосной C_2 хаотической генерации. На рис. 7 построена карта режимов для максимального числа периодов МПФС $N = 4$. Дальнейшее увеличение числа N не приводит к изменению поведения системы. Это понятно, так как низковольтный виркатор характеризуется сравнительно коротким пространством взаимодействия и основную роль в выходное излучение вносит динамика пространственного заряда в ограниченной области пространства дрейфа, где происходит формирование виртуального катода. Поэтому анализ периодических фокусирующих магнитных систем с числом периодов $N > 6$ не проводился, а на карте режимов для наглядности показаны результаты для $N = 0...4$. Полученные результаты показывают, что оптимальное число магнитных колец в МПФС для достижения широкой полосы генерируемых частот в рассматриваемом случае соответствует $N = 2 \div 4$. При этих значениях наблюдается широкая полоса генерируемых частот (порядка $0.5 \div 1$ октавы) и не требуется использование лишних магнитных колец, которые усложняют и утяжеляют конструкцию прибора.

4. Расчет и оптимизация мощности выходного широкополосного излучения

В предыдущем разделе статьи были рассмотрены вопросы анализа оптимальных параметров генератора с электронной обратной связью для достижения максимальной ширины полосы генерируемого хаотического излучения. Другим важным вопросом оптимизации генератора хаоса СВЧ-диапазона с электронной обратной связью, как уже обсуждалось во введении, является вопрос о получении максимальной выходной мощности выходного излучения.

Учитывая широкополосный характер выходного поля, рассматривалась интегральная мощность излучения, которая определялась путем усреднения выходного сигнала в течении определенного интервала времени (времени расчета T). Следует отметить, что параметры выходной электродинамической системы были выбраны в соответствии с результатами предыдущего анализа (см. работы [13, 39]). Результаты оптимизационных расчетов выходной мощности виркатора показаны на следующих иллюстрациях. Для поиска оптимальных параметров генератора, соответствующих максимальной выходной мощности, использовался метод математической оптимизации (квазиньютоновский метод [19]) с функцией цели в виде интегральной мощности выходного излучения.

Удобно рассмотреть результаты такой оптимизации, анализируя зависимости интегральной выходной мощности P от параметров генератора. Рассмотрим здесь зависимости P от параметра магнитного поля, координаты z_m и числа N периодов МПФС.

На рис. 8 показана зависимость нормированной выходной мощности от параметра B_0 магнитного поля для генератора с магнитной системой с одним кольцевым магнитом для двух значений тока пучка. Видно, что зависимости демонстрируют схожее поведение.

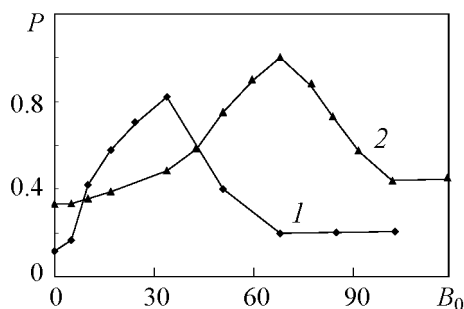


Рис. 8. Зависимость нормированной выходной мощности от параметра B_0 магнитного поля для генератора с магнитной системой с одним кольцевым магнитом для токов пучка α : 1 – 10; 2 – 20

Во-первых, для обоих токов существует оптимальная амплитуда внешнего магнитного поля $B_{\text{опт}}$, при которой мощность выходного излучения максимальна. При $B_0 < B_{\text{опт}}$ с ростом амплитуды внешнего магнитного поля выходная мощность монотонно увеличивается. Напротив, при $B_0 > B_{\text{опт}}$ наблюдается монотонное уменьшение выходной мощности. Во-вторых, при больших параметрах магнитного поля B_0 наблюдается насыщение мощности выходного излучения на низком уровне.

Такое обнаруженное в ходе проведенной математической оптимизации генератора поведение зависимостей мощности P выходного излучения от параметра B_0 внешнего магнитного поля является следствием физических процессов, происходящих в системе при изменении неоднородного магнитного поля. При $B_0 < B_{\text{опт}}$ вследствие значительных сил кулоновского расталкивания в области виртуального катода в пучке преобладает поперечная динамика заряженных частиц к боковой стенке пространства дрейфа, поэтому главная электронная структура (виртуальный катод) в данном случае оказывается сильно растянутой вдоль радиального направления и характеризуется малой плотностью пространственного заряда. Мощность выходного излучения пропорциональна плотности пространственного заряда электронного сгустка, возбуждающего систему, и в рассматриваемом случае она также будет невелика. С ростом величины магнитного поля поперечная динамика заряженных частиц в системе ограничивается, и плотность пространственного заряда в области виртуального катода возрастает. Как следствие, увеличивается мощность выходного излучения (см. рис. 8). При $B_0 \approx B_{\text{опт}}$ поперечная динамика в системе оказывается практически подавленной фокусирующим магнитным полем, и выходная мощность достигает максимального значения. С дальнейшим ростом величины внешнего магнитного поля ($B_0 > B_{\text{опт}}$) часть заряженных частиц (в основном из внешних слоев) оказываются захваченными магнитной ловушкой. Данные частицы формируют вторичный электронный сгусток и перестают участвовать в осцилляциях виртуального катода, не возбуждая выходную электродинамическую систему. Это приводит к уменьшению мощности выходного излучения в системе. Количество таких частиц увеличивается с ростом амплитуды внешнего магнитного поля, и следовательно, выходная мощность уменьшается.

Как можно видеть из рис. 8, величина оптимального магнитного поля $B_{\text{опт}}$ увеличивается с ростом безразмерного параметра тока пучка α (ср. кривые 1 и 2). Очевидно, что расталкивающие силы пространственного заряда увеличиваются

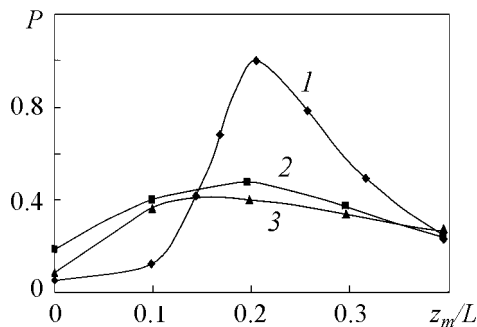


Рис. 9. Зависимости нормированной выходной мощности от координаты магнитного кольца z_m для генератора с одним кольцевым магнитом для $B_0 = 40$ и различных токов пучка α : 1 – 10, 2 – 20, 3 – 30

с ростом тока электронного пучка, который пропорционален α^2 , поэтому оптимальное магнитное поле $B_{\text{опт}}$, требующееся для ограничения поперечной (радиальной) динамики заряженных частиц потока и формирования плотного электронного сгустка в области виртуального катода, растет тоже.

Рассмотрим теперь зависимость мощности выходного излучения от координаты z_m кольца, создающего фокусирующее магнитное поле. На рис. 9 показаны соответствующие зависимости для различных токов пучка. Все зависи-

мости демонстрируют схожее поведение. Существует оптимальная позиция магнитного кольца, при которой выходная мощность максимальна. Физический механизм поведения данной зависимости подобен физическому механизму существования оптимального магнитного поля $B_{\text{опт}}$ и связан с существенной неоднородностью внешнего магнитного поля в области виртуального катода. Действительно, имеется такое расположение кольца, создающего фокусирующее магнитное поле, при котором поперечная динамика электронного потока существенно ограничена сильным магнитным полем и в то же время заряженные частицы еще не оказываются захваченными в магнитную ловушку, связанную с неоднородностью магнитного поля в поперечном направлении. Такое положение магнитного кольца соответствует оптимальной координате $z_{\text{опт}}$, при которой интегральная выходная мощность максимальна. Следует отметить, что магнитное поле на оси системы в области виртуального катода при координате магнитного кольца $z = z_{\text{опт}}$ близко к величине оптимального магнитного поля $B_{\text{опт}}$.

Наконец, рассмотрим кратко характерные зависимости выходной мощности от числа N периодов МПФС, которые показаны на рис. 10 для различных значений параметра внешнего магнитного поля B_0 и тока пучка α . Из представленных на рисунке данных хорошо видно, что выходная мощность монотонно уменьшается с ростом числа периодов МПФС и стремится с ростом N к постоянной величине. Как было показано выше в ходе оптимизации спектральных характеристик генератора с электронной обратной связью, характер выходного излучения усложняется с ростом числа N магнитных колец. Таким образом, усложнение спектрального состава выходного электромагнитного излучения, которое, как было показано выше, определяется расширением спектра генерируемых частот, сопровождается уменьшением мощности выходного излучения (а следовательно, КПД генератора). Как видно из рис. 10, выходная мощность уменьшается с ростом числа магнитных колец МПФС в 2–3 раза по сравнению со случаем отсутствия внешнего фокусирующего магнитного поля. Следует отметить, что данные результаты находятся в хорошем соответствии с известными экспериментальными и теоретическими результатами исследования влияния внешнего однородного магнитного поля на КПД и выходную мощность виркатора. В частности, в работах [13,27,39,55] было показано, что увеличение внешнего продольного магнитного поля приводит к уменьшению эффективности и выходной мощности генерации в системе с виртуальным катодом.

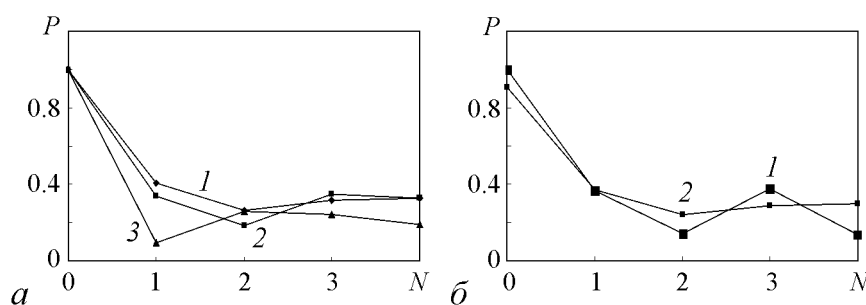


Рис. 10. Зависимости нормированной выходной мощности от числа N периодов МПФС для различных значений токов пучка α и параметра магнитного поля B_0 : $a - \alpha = 20.0$ для B_0 равных 20.0 (1), 40.0 (2), 60.0 (3); $b - B_0 = 20.0$ для α равных 10.0 (1), 20.0 (2)

Таким образом, можно сделать вывод, что условия, накладываемые на оптимизацию генератора с электронной обратной связью, не могут одновременно обеспечить максимум выходной мощности и максимум ширины полосы выходного излучения. Максимальная выходная мощность в системе с одним кольцевым магнитом реализуется при сравнительно узкой полосе генерируемых частот, оптимальные значения параметров магнитной системы при $N = 1$ и безразмерном параметре тока $\alpha = 20$, при которых наблюдается максимальная выходная мощность, соответствуют $B_0 \approx 70$ и $z_m = 0.18$. При меньшем токе пучка $\alpha = 10$ оптимальные значения параметров: $B_0 \approx 30$ и $z_m = 0.2$. Увеличение магнитного поля или увеличение числа периодов МПФС, при котором спектр выходного излучения расширяется и становится менее изрезанным, сопровождается резким уменьшением интегральной мощности СВЧ-излучения, которая уменьшается в 2–3 раза по сравнению со случаем периодической генерации (при $B_0 = 0$ или $N = 0$). В режиме широкополосной генерации выходная мощность излучения слабо зависит от параметров магнитной фокусирующей системы генератора с электронной обратной связью. Поэтому в режимах широкополосной генерации можно не проводить оптимизацию генератора по выходной мощности, а подбирать параметры МПФС из соображений оптимальных спектральных характеристик выходного излучения.

Заключение

В работе в рамках численного двумерного моделирования исследована нелинейная динамика и проведена оптимизация параметров генератора с электронной обратной связью для генерации широкополосных хаотических сигналов. Обнаружено сильное влияние характеристик внешнего неоднородного магнитного поля на нелинейную динамику электронного потока с виртуальным катодом в низковольтном виркаторе. Изучены физические процессы, ответственные за обнаруженную зависимость динамики электронного потока с виртуальным катодом от параметров внешнего неоднородного магнитного поля. Исследованы зависимости выходной мощности генерации в системе с виртуальным катодом от характеристик внешнего неоднородного магнитного поля. Проведена оптимизация параметров магнитной периодической фокусирующей системы генератора для достижения максимальной ширины полосы и мощности хаотической генерации.

Работа поддержана Федеральной целевой программой «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, а также грантами РФФИ (проекты №№ 09-02-00255, 10-02-90002).

Библиографический список

1. Короновский А.А., Трубецков Д. И., Храмов А.Е. Методы нелинейной динамики и хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот. Т. 2. Нестационарные и хаотические процессы. М.: Физматлит, 2009.
2. Benford J., Swegle J.A., Schamiloglu E. High Power Microwaves. CRC Press, Taylor and Francis, 2007.

3. Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков Т. 2. М.: Физматлит, 2004.
4. Анфиногентов В.Г., Калинин Ю.А. Экспериментальное исследование колебательных явлений в электронном пучке с виртуальным катодом // Лекции по СВЧ-электронике и радиофизике. 10-я зимняя школа-семинар. Книга 2. 1996. С. 83.
5. Егоров Е.Н., Калинин Ю.А., Левин Ю.И., Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Вакуумные генераторы широкополосных хаотических колебаний на основе нерелятивистских электронных пучков с виртуальным катодом // Изв. РАН, сер. физич. 2005. Т. 69, № 12. С. 1724.
6. Калинин Ю.А., Короновский А.А., Храмов А.Е., Егоров Е.Н., Филатов Р.А. Экспериментальное и теоретическое исследование хаотических колебательных явлений в нерелятивистском электронном потоке с виртуальным катодом // Физика плазмы. 2005. Т. 31, № 11. С. 1009.
7. Храмов А.Е., Егоров Е.Н., Калинин Ю.А. Электровакуумный прибор СВЧ-диапазона: Патент на изобретение № 2288518, 2006. Изобретения. Полезные модели: Официальный бюллетень Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. Москва: ФИПС, 2006.
8. Meadows B.K., Heath T.H., Neff J.D., et al. Nonlinear antenna technology // Proceedings IEEE. 2002. Vol. 90, № 5. P. 882.
9. Залогин Н.Н., Кислов В.В. Широкополосные хаотические сигналы в радиотехнических и информационных системах. М.: Радиотехника, 2006.
10. Dmitriev B.S., Hramov A.E., Koronovskii A.A., Starodubov A.V., Trubetskov D.I., Zharkov Y.D. First experimental observation of generalized synchronization phenomena in microwave oscillators // Physical Review Letters. 2009. Vol. 102, № 7. P. 074101.
11. Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е. О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации // Успехи физических наук. 2009. Т. 179, № 12. С. 1281.
12. Дмитриев А.С., Панас А.И. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002.
13. Егоров Е.Н., Калинин Ю.А., Короновский А.А., Храмов А.Е. Исследование зависимости мощности СВЧ-генерации низковольтного виркатора от управляющих параметров // ЖТФ. 2007. Т. 77, № 10. С. 139.
14. Калинин Ю.А., Короновский А.А., Храмов А.Е. Исследование широкополосных хаотических СВЧ-колебаний в гибридной системе «лампа бегущей волны – коллектор-генератор» // ЖТФ. 2008. Т. 78, № 5. С. 83.
15. Калинин Ю.А., Куркин С.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е. СВЧ-генераторы хаотических колебаний на основе электронных пучков с виртуальным катодом // Успехи современной радиоэлектроники. 2008. № 9. С. 53.
16. Filatov R.A., Hramov A.E., Bliokh Y.P., Koronovskii A.A., Felsteiner J. Influence of background gas ionization on oscillations in a virtual cathode with a retarding potential // Physics of Plasmas. 2009. Vol. 16, № 3. P. 033106.

17. Калинин Ю.А., Стародубов А.В., Волкова Л.Н. Сверхширокополосные генераторы шумоподобных высокочастотных и сверхвысокочастотных колебаний с электронной обратной связью // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36, № 3. С. 39.
18. Кураев А.А., Трубецков Д.И. Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот. Т. 1: Стационарные процессы. М.: Физматлит, 2009.
19. Батура М.П., Кураев А.А., Сеницын А.К. Основы теории, расчета и оптимизации современных электронных приборов СВЧ. Мн.: БГУИР, 2007.
20. Кураев А.А., Байбурун В.Б., Ильин Е.М. Математические модели и методы оптимального проектирования СВЧ-приборов. Мн.: Навука і тэхніка, 1990.
21. Nikolov N.A., Kostov K.G., Spassovsky I.P., Spassov V.A. High-power microwave generation from virtual cathode in foilless diode (vircator) // Electronics Letters. 1988. Vol. 24, № 23. P. 1445.
22. Kostov K.G., Nikolov N.A., Spassovsky I.P., Spassov V.A. Experimental study of virtual cathode oscillator in uniform magnetic field // Appl. Phys. Lett. 1992. Vol. 60, № 21. P. 2598.
23. Kostov K.G., Nikolov N.A., Spassov V.A. Excitation of transverse electric modes in axially extracted virtual cathode oscillator // Electronics Letters. 1993. Vol. 29, № 12. P. 1069.
24. Kostov K.G., Nikolov N.A. Microwave generation from an axially extracted virtual cathode oscillator with a guide magnetic field // Phys. Plasmas. 1994. Vol. 1, № 4. P. 1034.
25. Гадецкий Н.Н., Магда И.И., Найстетер С.И., Прокопенко Ю.В., Чумаков В.И. Генератор на сверхкритическом токе РЭП с управляемой обратной связью – виртод // Физика плазмы. 1993. Т. 19, № 4. С. 530.
26. Kostov K.G., Yovchev I.G., Nikolov N.A. Numerical investigation of microwave generation in foilless diode vircator // Electron Letters. 1999. Vol. 35, № 19. P. 1647.
27. Jiang W., Kitano H., Huang L., Masugata K., Yatsui K. Effect of longitudinal magnetic field on microwave efficiency of virtual cathode oscillator // IEEE Trans. Plasma Sci. 1996. Vol. 24. P. 187.
28. Егоров Е.Н., Храмов А.Е. Исследование хаотической динамики в электронном пучке с виртуальным катодом во внешнем магнитном поле // Физика плазмы. 2006. Т. 32, № 8. С. 742.
29. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Morozov M.Yu., Mushtakov A.V. Effect of external magnetic field on critical current for the onset of virtual cathode oscillations in relativistic electron beams // Phys. Lett. A. 2008. Vol. 372. P. 876.
30. Морозов М.Ю., Храмов А.Е. Влияние внешнего магнитного поля на величину критического тока электронного пучка, при котором формируется виртуальный катод // Физика плазмы. 2007. Т. 33, № 7. С. 610.
31. Singh G., Chaturvedi S. Secondary virtual-cathode formation in a low-voltage vircator: PIC simulations // IEEE Transactions on Plasma Science. 2008. Vol. 36, № 3. P. 694.
32. Дубинов А.Е., Селемир В.Д. Особенности СВЧ-генерации в виркаторе с неоднородным магнитным полем в области взаимодействия // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27, № 13. С. 64.

33. Куркин С.А., Короновский А.А., Храмов А.Е. Хаотизация колебаний виртуального катода во внешнем магнитном поле, создаваемом кольцевым магнитом // Изв. РАН. Сер. физическая. 2009. Т. 73, № 12. С. 1736.
34. Алимовский И.В. Электронные пучки и электронные пушки. М.: Сов. радио, 1966.
35. Рошаль А.С. Моделирование заряженных пучков. М.: Атомиздат, 1979.
36. Birdsall C.K., Langdon A.B. Plasma physics, via computer simulation. NY: McGraw-Hill, 1985.
37. Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. В 2-х томах. М.: Физматлит, 2003.
38. Morey I.J., Birdsall C.K. Travelling-wave-tube simulation: the IBC code // IEEE Trans. Plasma Sci. 1990. Vol. 18, № 3. P. 482.
39. Егоров Е.Н., Калинин Ю.А., Короновский А.А., Храмов А.Е., Морозов М.Ю. Исследование мощности СВЧ-генерации в нерелятивистском электронном пучке с виртуальным катодом в тормозящем поле // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32, № 9. С. 71.
40. Анфиногентов В.Г. Хаотические колебания в электронном потоке с виртуальным катодом // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 5. С. 69.
41. Анфиногентов В.Г. Взаимодействие когерентных структур и хаотическая динамика в электронном потоке с виртуальным катодом // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21, № 8. С. 70.
42. Анфиногентов В.Г., Храмов А.Е. Сложное поведение электронного потока с виртуальным катодом и генерация хаотических сигналов в виртуальных системах // Изв. РАН, сер. физич. 1997. Т. 61, № 12. С. 2391.
43. Анфиногентов В.Г., Храмов А.Е. К вопросу о механизме возникновения хаотической динамики в вакуумном СВЧ-генераторе на виртуальном катоде // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. XLI, № 9. С. 1137.
44. Короновский А.А., Храмов А.Е. Исследование когерентных структур в электронном пучке со сверхкритическим током с помощью вейвлетной бикогерентности // Физика плазмы. 2002. Т. 28, № 8. С. 722.
45. Егоров Е.Н., Калинин Ю.А., Короновский А.А., Левин Ю.И., Храмов А.Е. Исследование образования структур и хаотической динамики в нерелятивистском электронном пучке с виртуальным катодом в тормозящем поле // Радиотехника и электроника. 2006. Т. 51, № 11. С. 51.
46. Храмов А.Е., Короновский А.А., Левин Ю.И. Исследование процессов структурообразования в электронном пучке с виртуальным катодом с помощью вейвлетной бикогерентности // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28, № 13. С. 57.
47. Егоров Е.Н., Калинин Ю.А., Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Процессы образования и нестационарная динамика виртуального катода в нерелятивистском электронном пучке в тормозящем поле (двумерное приближение) // Известия вузов. Радиофизика. 2006, № 10.
48. Куркин С.А., Короновский А.А., Храмов А.Е. Нелинейная динамика и хаотизация колебаний виртуального катода в трубчатом электронном потоке во внешнем магнитном поле // Физика плазмы. 2009. Т. 35, № 8. С. 684.

49. Куркин С.А., Короновский А.А., Храмов А.Е. Формирование и динамика виртуального катода в трубчатом электронном пучке во внешнем магнитном поле // ЖТФ. 2009. Т. 79, № 10. С. 119.
50. Куркин С.А., Храмов А.Е. Формирование виртуального катода в трубчатом электронном потоке во внешнем магнитном поле // Письма в ЖТФ. 2009. Т. 35, № 1. С. 48.
51. *Tsimring S.E.* Electron beams and microwave vacuum electronics. John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2007.
52. Селемир В.Д., Алёхин Б.В., Ватрунин, В.Е., Дубинов А.Е., Степанов Н.В., Шамро О.А., Шибалко К.В. Теоретические и экспериментальные исследования СВЧ-приборов с виртуальным катодом // Физика плазмы. 1994. Vol. 20, № 7,8. P. 689.
53. *Brandt H.E.* The turbutron // IEEE Trans. Plasma Sci. 1985. Т. 13, № 6. С. 513.
54. *Trubetskov D.I., Mchedlova E.S., Anfinogentov V.G., Ponomarenko V.I., Ryskin N.M.* Nonlinear waves, chaos, patterns in microwave devices // Chaos. 1996. Т. 6, № 3. С. 358.
55. *Davis H.A., Bartsch R.R., Kwan T.J.T., Sherwood E.G., Stringfield R.M.* Experimental confirmation of the reitron concept // IEEE Trans. Plasma Sci. 1988. Vol. 16, № 2. P. 192.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию 10.02.2010
После доработки 8.04.2010*

**WIDEBAND CHAOTIC GENERATION AND OPTIMIZATION
OF CHARACTERISTICS IN MICROWAVE GENERATOR
WITH ELECTRONIC FEEDBACK AND MAGNETIC
PERIODIC FOCUSING SYSTEM**

S.A. Kurkin, A.A. Koronovskii, Yu.I. Levin, A.E. Hramov

With the help of 2D numerical model it has been investigated the nonlinear dynamics and generation of wideband chaotic signals in the generator based on electron beam with the virtual cathode. It has been discovered the strong influence of the external non-uniform magnetic field on the nonlinear dynamics of the virtual cathode in the system. It has been analyzed the physical processes responsible for the discovered dependency of dynamics of the electron beam with the virtual cathode on the parameters of the external non-uniform magnetic field. The dependencies of the output generation power in the system with virtual cathode on the characteristics of the external non-uniform magnetic field were investigated. Optimization of the parameters of magnetic periodic focusing system of the generator for the maximum bandwidth and power of the chaotic generation was carried out.

Keywords: Microwave generator, intensive electron beam, virtual cathode, nonlinear dynamics, microwave electronics, vircator, non-uniform magnetic field, physical and mathematical optimization, numerical simulation, particle method.



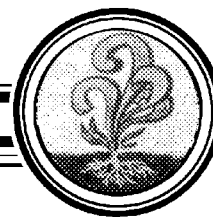
Куркин Семён Андреевич – родился в Саратове (1986). Окончил с отличием факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского по специальности радиофизика и электроника (2008). Аспирант и ассистент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Имеет 8 публикаций в центральных реферируемых журналах, участник Всероссийских и Международных конференций. Область научных интересов – исследование электронно-волновых систем с интенсивными пучками заряженных частиц, изучение нелинейной динамики виртуального катода, а также генераторов, основанных на колебаниях виртуального катода (виркаторов).

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: KurkinSA@gmail.com



Левин Юрий Иванович – родился в Саратове (1942), окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1965), защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1974). В настоящее время является профессором кафедры нелинейной физики СГУ, деканом факультета нелинейных процессов. Автор более 100 научных статей, научно-методических пособий и руководств.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: levin@nonlin.sgu.ru



ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ДРЕЙФОВУЮ СКОРОСТЬ ЭЛЕКТРОНОВ В ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ СВЕРХРЕШЁТКЕ В ПРОДОЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И НАКЛОННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

А.Г. Баланов, А.А. Короновский, А.О. Сельский, А.Е. Храмов

В работе изучается влияние температуры на дрейфовую скорость электронов в полупроводниковой сверхрешетке в продольном электрическом и наклонном магнитном полях. Показано, что в наклонном магнитном поле температурное распределение электронов по скоростям может усиливать эффекты, связанные с резонансом Блоховской и циклотронной частот. В частности, увеличение температуры приводит к более выраженным резонансным максимумам на профиле зависимости дрейфовой скорости электронов от напряжённости продольного электрического поля. Данный эффект объясняется особенностями нелинейной динамики электронов вблизи Блох-циклотронных резонансов.

Ключевые слова: Полупроводниковая сверхрешетка, дрейфовая скорость, нелинейная динамика, хаос, Блох-циклотронный резонанс, температурное распределение.

Введение

Полупроводниковые сверхрешетки представляют собой сложные наноструктуры, содержащие несколько чередующихся тонких (порядка 10 нм) слоев различных полупроводниковых материалов. Предложенные Л. Эсаки и Р. Тсу в 1969 году [1] для исследования разнообразных квантово-механических эффектов, связанных с резонансным туннелированием и блоховскими колебаниями, сверхрешетки являются уникальным полигоном как для изучения и понимания процессов физики твердого тела [2, 3] так и для исследования явлений нелинейной динамики [4–7].

Кроме того, сверхбыстрые блоховские колебания, а также ассоциирующиеся с ними нелинейные процессы [4, 8], делают сверхрешетку перспективным элементом для генерации, усиления и детектирования высокочастотных (до нескольких ТГц) сигналов.

В работах [6, 9] было показано что наклонное магнитное поле, приложенное к сверхрешетке, позволяет эффективно управлять электрическими свойствами

этой структуры. Оказалось, что под воздействием постоянных электрического и наклонного магнитных полей динамика отдельных электронов демонстрирует уникальный тип гамильтонова хаоса, который не может быть описан в рамках теории Колмогорова–Арнольда–Мозера (КАМ – теории) [10]. Этот хаос, возникающий в результате резонанса между циклотронными и блоховскими колебаниями электронов, характеризуется резкой сменой характера движения электронов. Траектории электронов, вне резонансов сильно локализованные в пространстве, при наступлении резонанса становятся неограниченными [6, 9]. При этом в сечении Пуанкаре (или стробоскопическом сечении) фазового пространства возникает элегантная неограниченная структура, известная в литературе как «стохастическая паутина» [10, 11]. Таким образом, небольшое изменение параметров полей может существенно менять дрейфовую скорость электронов и, соответственно, электрическую проводимость сверхрешетки [6, 7, 9, 12]. Показано, что такой резонансный механизм управления электрическими свойствами сверхрешетки в потенциале способен существенно улучшить амплитудно-частотные характеристики полупроводниковых устройств на базе сверхрешеток, работающих как в режиме генерации [13], так и в режиме усиления сверхвысоких частот [14]. Вместе с тем, влияние температуры на транспорт заряда в сверхрешетках, находящихся под воздействием электрического и наклонного магнитного поля, изучены слабо.

В настоящей статье исследуется влияние температуры на дрейфовую скорость электронов в сверхрешетке. Показано, что для сверхрешетки, находящейся в наклонном магнитном поле увеличение температуры приводит к более выраженным резонансным пикам на профиле зависимости дрейфовой скорости электронов от напряженности продольного электрического.

1. Дрейфовая скорость

В полуклассическом приближении дрейфовая скорость электрона в сверхрешетке u_d стартовавшего из состояния покоя и находящегося под воздействием электрического $\mathbf{F} = (-F, 0, 0)$ и магнитного полей $\mathbf{B} = (B \cos \theta, 0, B \sin \theta)$ может определяться соотношением [1, 9]

$$u_d = \frac{1}{\tau} \int_0^{\infty} v_x(t) e^{-t/\tau} dt, \quad (1)$$

где τ – время рассеяния электронов; $v_x(t)$ – x -компонента скорости рассматриваемого электрона, определяемая из уравнений движения электрона в сверхрешетке [6, 7, 9]

$$\ddot{p}_z + \hat{\omega}_c^2 p_z = C \sin(Kp_z - \omega_B t - \phi), \quad (2)$$

где

$$C = -\frac{\Delta m^* \hat{\omega}_c^2 \tan \theta}{2\hbar}, \quad (3)$$

$$K = \frac{d \tan \theta}{\hbar}, \quad (4)$$

$$\phi = \frac{d}{\hbar} (p_z(0) \tan \theta + p_x(0)). \quad (5)$$

В соотношениях (2)–(5) $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ – импульс электрона; Δ – ширина мини-зоны в сверхрешетке; d – период сверхрешетки; $m^* = 0.067m_e$ – эффективная масса электрона в полупроводниковом материале (здесь GaAs); m_e – масса свободного электрона; $\omega_B = eFd/\hbar$ – круговая частота блоховских колебаний электрона; $\hat{\omega}_c = \omega_c \cos \theta$ – круговая частота циклотронных колебаний электрона вдоль оси дрейфа Ox ; $\omega_c = eB/m^*$. Решение уравнения (2), которое в общем виде может быть осуществлено только численно, однозначно определяет все другие компоненты импульса

$$p_x = eFt - p_z \tan \theta, \quad p_y = \frac{\dot{p}_z}{\bar{\omega}_c}, \quad (6)$$

и скорости электрона

$$\dot{x} = \frac{d\Delta}{2\hbar} \sin(Kp_z - \omega_B t - \phi), \quad \dot{y} = \frac{\dot{p}_z}{\bar{\omega}_c m^*}, \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m^*}, \quad (7)$$

что, в свою очередь, позволяет определить дрейфовую скорость электрона (1). В силу того, что $v_x(t)$ определяется решением (2) и зависит от начального импульса $\mathbf{p}_0 = (p_{x0}, p_{y0}, p_{z0})$, дрейфовая скорость u_d также будет зависеть от величины импульса электрона в начальный момент времени

$$u_d = u_d(\mathbf{p}_0). \quad (8)$$

Отметим, что в отсутствие магнитного поля $B = 0$, u_d может быть вычислена аналитически [1], и для нулевых начальных условий $p_{0x} = 0$, $p_{0y} = 0$, $p_{0z} = 0$ она имеет вид

$$u_d = \frac{d\Delta}{2\hbar} \frac{\tau\omega_B}{(1 + \tau^2\omega_B^2)}. \quad (9)$$

Из анализа формулы (9) следует, что без магнитного поля дрейфовая скорость электрона u_d имеет единственный максимум при $\omega_B \tau = 1$.

2. Температурное распределение электронов

Очевидно, что в случае ненулевой температуры для вычисления средней дрейфовой скорости электронов v_d с помощью уравнения (2) необходимо учитывать их тепловое распределение по начальным импульсам $w(\mathbf{p}_0)$

$$v_d = \iiint_V w(\mathbf{p}_0) u_d(\mathbf{p}_0) dp_{0x} dp_{0y} dp_{0z}, \quad (10)$$

где w – вероятность того, что частица имеет некоторый начальный импульс \mathbf{p}_0 из элементарного объема пространства импульсов $dV = dp_{0x} dp_{0y} dp_{0z}$.

В теоретическом полуклассическом рассмотрении часто предполагается бoльцмановская статистика температурного распределения электронов в энергетических зонах сверхрешетки [4, 8, 15, 16]

$$dw = C \exp\left(-\frac{E(\mathbf{p}_0)}{kT}\right) dp_{0x} dp_{0y} dp_{0z}. \quad (11)$$

Здесь T – температура в градусах Кельвина; k – постоянная Больцмана; E – кинетическая энергия электронов. Константа C в соотношении (11) определяется из условия нормировки

$$\iiint_V C \exp\left(-\frac{E(\mathbf{p}_0)}{kT}\right) dp_{0x} dp_{0y} dp_{0z} = 1. \quad (12)$$

Для полупроводниковой сверхрешетки, находящейся в продольном электрическом поле \mathbf{F} (электрическое поле приложено вдоль решетки, чтобы обеспечить направленный дрейф электронов), дисперсионное соотношение между кинетической энергией электрона и импульсом имеет вид [1, 2]

$$E(\mathbf{p}_0) = \frac{\Delta}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{p_{0x}d}{\hbar}\right) \right] + \frac{p_{0y}^2 + p_{0z}^2}{2m^*}, \quad (13)$$

и в этом случае нормировочный множитель, найденный из условия (12), равен

$$C = \frac{d \exp\left(\frac{\Delta}{2kT}\right)}{4\pi^2 \hbar m^* kT I_0\left(\frac{\Delta}{2kT}\right)}, \quad (14)$$

где $I_n(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя.

Таким образом, дрейфовая скорость электронов в сверхрешетке, находящейся в продольном электрическом и наклонном магнитном полях при температуре T , будет определяться как

$$v_d(T) = C \iiint_V u_d(\mathbf{p}_0) \exp\left(-\frac{E(\mathbf{p}_0)}{2kT}\right) dp_{0x} dp_{0y} dp_{0z}. \quad (15)$$

При нулевом магнитном поле ($B = 0$) интеграл (15) может быть вычислен аналитически

$$v_d(T) = \frac{d\Delta}{2\hbar} \frac{\tau\omega_B}{(1 + \tau^2\omega_B^2)} \frac{I_1\left(\frac{\Delta}{2kT}\right)}{I_0\left(\frac{\Delta}{2kT}\right)}. \quad (16)$$

Из сравнения выражения (16) с формулой (9) следует, что увеличение температуры уменьшает пиковую дрейфовую скорость электронов.

В работах [15, 16] было показано, что при малых углах ($\text{tg } \theta \ll 1$, $\text{tg } \theta \ll \omega_B/\bar{\omega}_c$) и сильном электрическом поле дрейфовая скорость электронов может быть приближенно оценена как

$$v_d(T) = \frac{d\Delta}{2\hbar} \frac{I_1\left(\frac{\Delta}{2kT}\right)}{I_0\left(\frac{\Delta}{2kT}\right)} e^{-\alpha T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\tau(\omega_B - n\bar{\omega}_c)}{1 + \tau^2(\omega_B - n\bar{\omega}_c)^2} I_n(\alpha T), \quad (17)$$

где $\alpha = m^*k(d \text{tg } \Theta/\hbar)^2$. Однако в общем случае произвольных значений параметров электрического и магнитного полей формула (15) не допускает аналитического решения, и поэтому должна вычисляться с использованием численных методов.

3. Численное моделирование

Из соотношений (11) и (13) видно, что в полупроводниковой сверхрешетке импульсы электронов в поперечных y и z направлениях подчиняются нормальному (гауссовому) распределению, и в этом случае проблем с численной реализацией подобных распределений не возникает. Так, численное моделирование случайной величины ξ , подчиняющейся распределению Гаусса с единичной дисперсией, может быть реализовано в соответствии с методикой, описанной в [17]. Тогда, распределение электронов по y -составляющей импульса, подчиняющееся соотношению

$$dw_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{m^*kT}} \exp\left(-\frac{p_y^2}{2m^*kT}\right) dp_y, \quad (18)$$

численно может быть получено умножением случайной величины ξ на коэффициент $\sqrt{m^*kT}$. Иными словами, y -компонента импульса каждого отдельного электрона будет определяться соотношением

$$p_y = \xi\sqrt{m^*kT}. \quad (19)$$

Совершенно аналогично может быть промоделирована вторая поперечная составляющая импульса, отвечающая z -компоненте. С моделированием продольной составляющей импульса, x -компоненты, подчиняющейся распределению

$$dw_x = \frac{d \exp\left(\frac{\Delta}{2kT}\right)}{2\pi\hbar I_0 \left(\frac{\Delta}{2kT}\right)} \exp\left(-\frac{\Delta}{2kT} \left[1 - \cos\left(\frac{p_x d}{\hbar}\right)\right]\right) dp_x, \quad (20)$$

ситуация оказывается более сложной и необходимо использовать дополнительное преобразование

$$p_x = \frac{\hbar}{d} f(\xi) \quad (21)$$

случайной величины ξ , равномерно распределенной на интервале $[-\pi; \pi]$, чтобы обеспечить требуемую форму распределения. Вид функции $f(\cdot)$ определяется соотношением

$$f'(\xi) = \frac{I_0\left(\frac{\Delta}{2kT}\right)}{\exp\left(\frac{\Delta}{2kT}\right)} \exp\left(\frac{1 - \cos f(\xi)}{2kT/\Delta}\right). \quad (22)$$

Уравнение (22) не имеет аналитического решения, но может быть решено численно (рис. 1). В силу симметрии распределения (20) выполняется соотношение

$$f(0) = 0, \quad (23)$$

которое может быть использовано в качестве начального условия. Следует обратить внимание, что $f(\pm\pi) = \pm\pi$ для любого значения параметра T .

Используя найденное преобразование $f(\xi)$ случайной величины ξ , равномерно распределенной на интервале $[-\pi; \pi]$, можно осуществить численное моделирование распределения электронов по продольной составляющей импульса, подчиняющееся соотношению (20). Результат использования предложенного метода приведен на рис. 2, где показаны распределения электронов $N(p_x)$ и $N(p_y)$ по x - и y -компонентам импульса, соответственно. Результаты численного моделирования показаны точками, аналитические зависимости изображены сплошными линиями. Для удобства визуализации результаты все распределения нормированы по высоте на единицу. Как видно из рисунка, результаты численного моделирования распределения электронов по всем компонентам импульса находятся в очень хорошем соответствии с аналитическими законами, описывающими данный характер распределения.

Для малых значений температуры ($T < 100$ К) возникают сложности с моделированием распределения электронов по продольной составляющей компоненте импульса p_x , поскольку, как видно из рис. 1 ($T = 50$ К, кривая 1) функция $f(\xi)$ вблизи точек $\xi_{\pm\pi} = \pm\pi$ меняется очень быстро, что не позволяет эффективно использовать данный метод перехода от равномерного распределения к распределению, заданному соотношением (20). Однако в этом случае в силу малых значений безразмерного параметра kT/δ , экспонента в соотношении (20) очень быстро спадает, и, используя разложение косинуса в ряд

$$dw(P_x) = A \exp\left(-\frac{(p_x d/\hbar)^2/2 - (p_x d/\hbar)^4/(4!) + \dots}{2kT/\Delta}\right) dp_x, \quad (24)$$

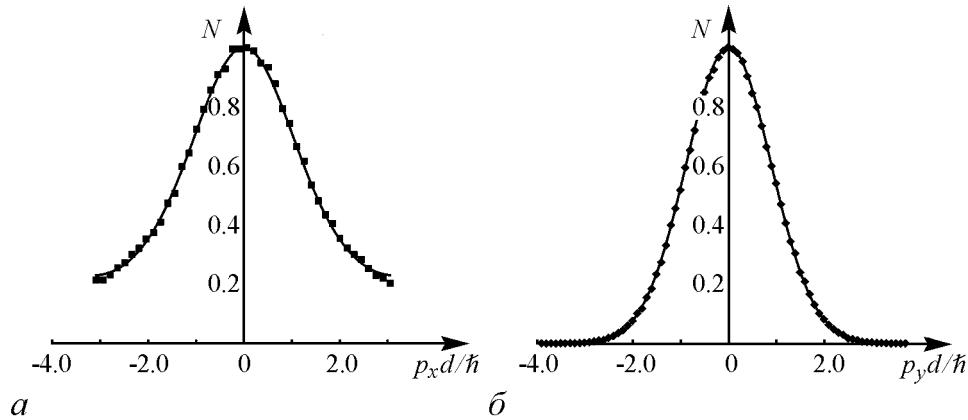


Рис. 2. Начальные распределения электронов по x - и y -компонентам импульса для $T = 150$ К. a – распределение электронов $N(p_x)$, подчиняющееся закону (20). Для удобства по оси абсцисс отложена нормированное значение импульса $(p_x d)/\hbar$. В силу 2π -периодичности дисперсионного соотношения, распределение электронов показано на отрезке $(p_x d)/\hbar \in [-\pi; \pi]$. b – аналогичное распределение $N(p_y)$, являющееся распределением Гаусса с дисперсией $\sigma^2 = m^* kT$

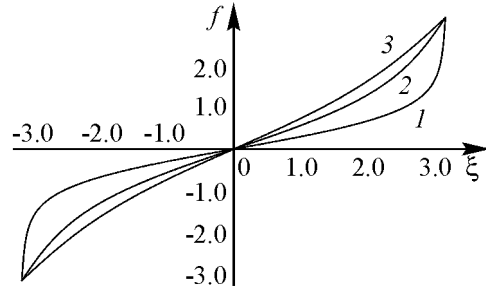


Рис. 1. График функции $f(\xi)$ для трех различных значений температуры T : 1 – 50 К, 2 – 150 К, 3 – 300 К. Параметры сверхрешетки $d = 8.3$ нм, $\Delta = 19.1$ мэВ

можно ограничиться только первым слагаемым. Тогда для низких температур распределение электронов по продольной компоненте импульса p_x будет также иметь вид распределения Гаусса с дисперсией $\sigma^2 = 2kT/\Delta$.

Таким образом, обеспечив корректное моделирование распределения импульсов электронов при заданной температуре, опираясь на основные соотношения (1), (2), (7), (15), можно рассчитать дрейфовую скорость электронов при различных значениях температуры T для фиксированного угла θ наклонного магнитного поля \mathbf{B} . При этом случай $\theta = 0$, допускающий аналитическое решение (16), может рассматриваться в качестве критерия корректности процедуры численного моделирования.

Решение уравнения (2) осуществлялось методом Рунге–Кутты 4-го порядка. При расчете дрейфовой скорости $u_d(\mathbf{p}_0)$ отдельного электрона (см. соотношения (7)) верхний предел интегрирования был заменен на $T_{\max} = 10\tau$, а сам интеграл заменялся суммой. Дрейфовая скорость v_d (соотношение (15)) вычислялась как

$$v_d = \frac{1}{N} \sum_i^N u_d(\mathbf{p}_{0i}), \quad (25)$$

где начальные условия \mathbf{p}_{0i} подчинялись распределению (11), моделируемому способом, описанным выше.

Одной из задач, связанных с корректным осуществлением численного моделирования, является определение числа итераций N , необходимого для расчета

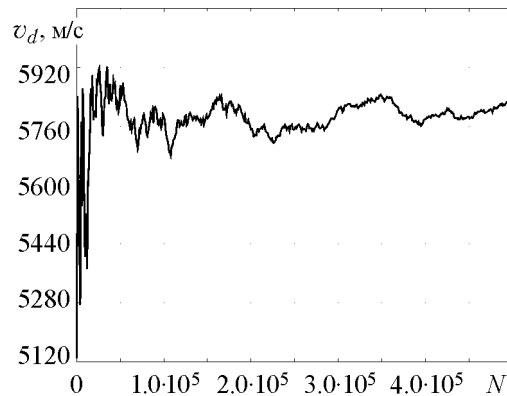


Рис. 3. Зависимость дрейфовой скорости v_d от количества усреднений N , $\theta = 40^\circ$, $T = 300$ К

дрейфовой скорости (25). На рис. 3 показана зависимость дрейфовой скорости v_d от количества усреднений N . Видно, что при $N \geq 2.5 \cdot 10^5$ диапазон изменения значений дрейфовой скорости Δv_d не превышает 1.75%. Соответственно, при нахождении значения дрейфовой скорости количество усреднений было выбрано $N = 2.5 \cdot 10^5$, что позволило получить достаточно хорошую точность при разумных затратах машинного времени.

4. Влияние температуры на дрейфовую скорость электронов

Для подтверждения корректности численного моделирования на рис. 4 и 5 показаны результаты расчета дрейфовой скорости в случае $B = 0$ для различных значений напряженности продольного электрического и температуры и соответствующие им аналитические кривые. Параметры сверхрешетки были выбраны $d = 8.3$ нм, и $\Delta = 19.1$ мэВ. Рис. 4 иллюстрирует зависимость дрейфовой скорости v_d от напряженности продольного электрического поля F при двух фиксированных значениях температуры $T = 4.2$ К и $T = 300$ К, соответственно. Аналитически рассчитанные кривые, определяемые соотношением (16), изображены с помощью кривых 1 и 2, результаты численного моделирования показаны кружочками. Из приведенного ри-

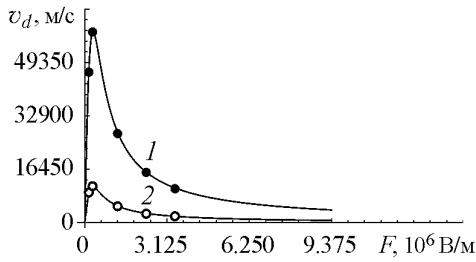


Рис. 4. Аналитически полученные зависимости дрейфовой скорости v_d (16) от напряженности продольного электрического поля F ($\theta = 0$) при $T = 4.2$ К (кривая 1) и $T = 300$ К (кривая 2), кружочками показаны численно полученные значения

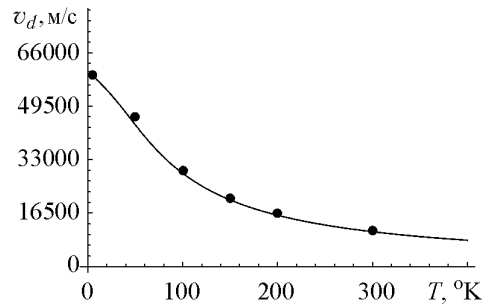


Рис. 5. Аналитически полученная зависимость (16) максимального значения дрейфовой скорости v_d^{\max} от температуры T и соответствующие ей численно полученные значения «•»

сунка видно хорошее соответствие между численно посчитанными и аналитически полученными значениями дрейфовой скорости.

Из соотношения (16) следует, что дрейфовая скорость при $\omega_B \tau = 1$ принимает максимальное значение

$$v_d^{\max}(T) = \frac{d\Delta}{2\hbar} \frac{I_1\left(\frac{\Delta}{2kT}\right)}{I_0\left(\frac{\Delta}{2kT}\right)}, \quad (26)$$

которое уменьшается по мере увеличения температуры T . На рис. 5 показана аналитически полученная зависимость (16) максимального значения дрейфовой скорости от температуры $v_d^{\max}(T)$ и соответствующие этой зависимости значения, полученные численно. Снова видно хорошее соответствие численных данных и теоретических результатов.

Из сопоставления численных данных и аналитически полученных значений для случая $\theta = 0$ можно сделать вывод о корректности процедуры численного моделирования и достоверности полученных результатов. Следовательно, данный метод может быть применен для случая наклонного магнитного поля ($\theta \neq 0$), где аналитическое решение невозможно.

На рис. 6 приведены типичные зависимости дрейфовой скорости от напряженности продольного электрического поля F при различных температурах в присутствии наклонного магнитного поля. Данный рисунок был получен для магнитного поля $B = 15$ Тл с углом наклона $\theta = 40^\circ$. Из рисунка видно, что резонанс между циклотронными и блоховскими колебаниями при $r = \omega_B / \bar{\omega}_c = 1, 2, \dots$ приводит к воз-

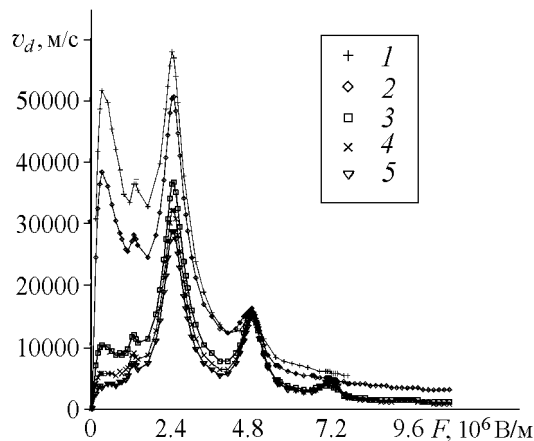


Рис. 6. Зависимость дрейфовой скорости v_d от напряженности продольного электрического поля F ($B = 15$ Тл, $\theta = 40^\circ$) для различных значений температуры T : 1 – 0 К, 2 – 50 К, 3 – 200 К, 4 – 300 К, 5 – 400 К

никновению выраженных пиков в зависимостях дрейфовой скорости электронов от параметров полей. То есть подбором резонансных конфигураций магнитного и электрического полей можно существенно ускорять дрейфовое движение электронов [6, 7, 9].

Вместе с тем, увеличение температуры ведет к качественным изменениям данных зависимостей (см. кривые 2–5 на рис. 6). В то время как первый пик, существовавший и в отсутствие магнитного поля (см. рис. 4), значительно уменьшается с увеличением температуры (также как и в случае $B = 0$), высота резонансных пиков для $r = 1, 2$ меняется слабо. Более того, с увеличением температуры начинают проявляться резонансы с большими r . В частности, при параметрах $B = 15$ Тл и $\theta = 40^\circ$ рост температуры приводит к появлению пика для $r = 3$. Причины появления и роста данного пика могут быть качественно объяснены с помощью рис. 7, где приводится стробоскопическое сечение траекторий электронов, построенное с периодом блоховских колебаний $T_B = 2\pi/\omega_B$ для резонанса $r = 3$. Как можно видеть из рис. 7, *a*, в случае этого резонанса, как и следует из теории [9, 11], хаотические траектории электронов образуют бесконечную стохастическую паутину», которая сформирована узкими стохастическими слоями, родившимися в окрестностях сепаратрис нелинейного резонанса [11]. Между филаментами «стохастической паутины» существуют «острова стабильности», соответствующие регулярным квазипериодическим траекториям (замкнутые кривые в стробоскопическом сечении). В работах [6, 9] было показано, что резонансное увеличение дрейфовой скорости электронов связано с фазовыми траектори-

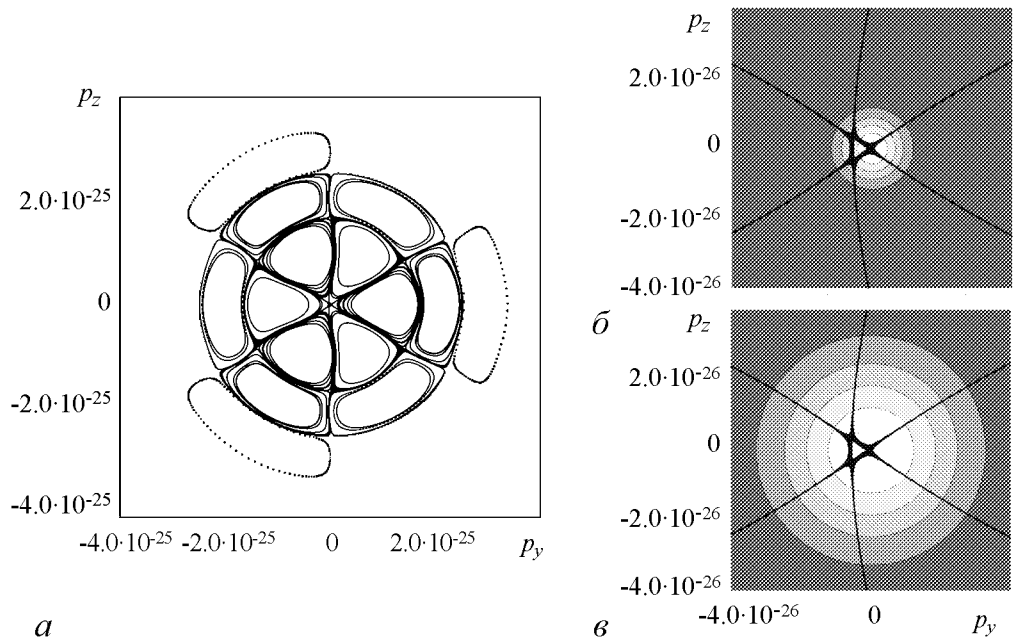


Рис. 7. Стробоскопические сечения траекторий электронов на плоскости (p_y, p_z) , полученные с периодом $T_B = 2\pi/\omega_B$ для $r = 3$ ($\theta = 40^\circ$, $B = 15$ Тл): *a* – «стохастическая паутина» и прилегающие к ней квазипериодические орбиты; *b*, *c* – увеличенная часть «стохастической паутины» (черные точки), вероятность нахождения начального импульса электрона в данной области плоскости (отображена градиациями серого – светлые тона серого соответствуют более высокой вероятности) для температуры: 50°K (*b*) и 400°K (*c*)

ями, лежащими на радиальных филаментах стохастической паутины. Таким образом, чем больше доля электронов, демонстрирующих такие фазовые траектории, тем выше дрейфовая скорость электронов в сверхрешетке.

На рис. 7, б и в показан один и тот же увеличенный фрагмент «стохастической паутины», наложенный на отображенную градициями серого цвета зависимость вероятности нахождения электронов от их координаты на плоскости (p_y, p_z) в соответствии с их температурным распределением. Более светлые тона отражают более высокую вероятность найти электрон с заданными начальными p_y и p_z . При этом, на рис. 7, б распределение электронов соответствует температуре 50°K , в то время как на 7, в распределение рассчитано для температуры 400°K . Как можно видеть из сравнения рисунков, с увеличением температуры вероятность найти начальный импульс электрона на одной из радиальных филамент «стохастической паутины» существенно увеличивается и, таким образом, создаются условия для увеличения дрейфовой скорости электронов.

Таким образом, при высоких температурах блох-циклотронные резонансы начинают играть доминирующую роль в обеспечении высокой дрейфовой скорости электронов.

Заключение

В работе рассмотрена дрейфовая скорость электронов в полупроводниковой сверхрешетке в продольном электрическом и наклонном магнитном полях при различных температурах. Для расчета дрейфовой скорости предложен метод, позволяющий получить случайное распределение импульсов электронов в полупроводниковой сверхрешетке во широком диапазоне значений температуры T . Результаты численного моделирования сопоставлены с рядом известных аналитических зависимостей, достигнуто хорошее соответствие результатов численного моделирования теоретическим закономерностям.

Показано, что для сверхрешетки, находящейся в наклонном магнитном поле, увеличение температуры приводит к появлению на профиле зависимости дрейфовой скорости электронов от напряженности продольного электрического поля максимумов, соответствующих высоким резонансам блоховской и циклотронной частот, причем с ростом температуры этот эффект становится все более отчетливо выражен. Данный эффект может быть объяснен тем, что с ростом температуры доля электронов, демонстрирующих хаотическую делокализацию орбит и характеризующихся высокой продольной скоростью [6, 7, 9], существенно увеличивается.

Примечательно, что представляемые результаты качественно согласуются с формулой (17), полученной в работах [15, 16] в приближении очень малых углов наклонного магнитного поля и очень сильного электрического поля. Хотя данная формула не годится для количественного описания динамики электронов для реалистичных значений параметров полей, рассматриваемых в данной работе, тем не менее, ее анализ позволяет сделать ряд выводов схожих с описанными выше. В частности, из анализа (17) можно заключить, что рост температуры увеличивает вклад резонансных членов $\tau (\omega_B - n\bar{\omega}_c) / [1 + \tau^2 (\omega_B - n\bar{\omega}_c)^2]$, которые соответствуют резонансам для $r = n$, что коррелирует с выводами данной работы.

Таким образом, полученные результаты позволяют заключить, что в присутствии наклонного магнитного поля температура может нетривиально влиять на пе-

пераспределение заряда в полупроводниковой сверхрешетке и на ассоциирующихся с ним коллективные эффекты [13], что открывает новые возможности для использования сверхрешеток при высоких (от комнатной и выше) температурах.

Работа выполнена при поддержке федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы.

Библиографический список

1. *Esaki L. and Tsu R.* Superlattices and negative differential conductivity in semiconductors // IBM J. Res. Develop. 1970. Vol. 14. P. 61.
2. *Шук А.Я.* Сверхрешетки – периодические полупроводниковые структуры // ФТП. 1974. Т. 8. С. 1841.
3. *Tsu R.* Superlattices to nanoelectronics. Elsevier, 2005.
4. *Wacker A.* Semiconductor superlattices: A model system for nonlinear transport // Phys. Rep. 2002. Vol. 357. P. 1.
5. *Bonilla L.L. and Grahn H.T.* Non-linear dynamics of semiconductor superlattices // Rep. Prog. Phys. 2005. Vol. 68. P. 577.
6. *Fromhold T.M., Patanè A., Bujkiewicz S., Wilkinson P.B., Fowler D., Sherwood D., Stapleton S.P., Krokhin A.A., Eaves L., Henini M., Sankeshwar N.S., and Sheard F.W.* Chaotic electron diffusion through stochastic webs enhances current flow in superlattices // Nature London. 2004. Vol. 428. P. 726.
7. *Balanov A.G., Fowler D., Patanè A., Eaves L., and Fromhold T.M.* Bifurcations and chaos in semiconductor superlattices with a tilted magnetic field // Phys. Rev. E. 2008. Vol. 77. 026209.
8. *Игнатов А.А., Шапкин В.И.* Блоховские осцилляции электронов и неустойчивость волн пространственного заряда в полупроводниковых сверхрешетках // ЖЭТФ. 1987. Vol. 93. P. 935.
9. *Fromhold T.M., Krokhin A.A., Tench C.R., Bujkiewicz S., Wilkinson P.B., Sheard F.W., and Eaves L.* Effects of stochastic webs on chaos electron transport 673 in semiconductor superlattices // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 87. 046803.
10. *Zaslavsky G.M., Sagdeev R.Z., Usikov D.A. and Chernikov A.A.* Weak Chaos and Quasi-Regular Patterns. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
11. *Sagdeev R.Z., Usikov D.A. and Zaslavsky G.M.* Nonlinear Physics. NY: Harwood Academic Publishers, 1988.
12. *Fowler D., Hardwick D.P.A., Patanè A., Greenaway M.T., Balanov A.G., Fromhold T.M., Eaves L., Henini M., Kozlova N., Freudenberger J., and Mori N.* Magnetic-field-induced miniband conduction in semiconductor superlattices // Phys. Rev. B. 2007. Vol. 76. 245303.
13. *Greenaway M.T., Balanov A.G., Schöll E., and Fromhold T.M.* Controlling and enhancing terahertz collective electron dynamics in superlattices by chaos-assisted miniband transport // Phys. Rev. B. 2009. Vol. 80. 205318.
14. *Hyart T., Mattas J., and Alekseev K.N.* Model of the influence of an external magnetic field on the gain of terahertz radiation from semiconductor superlattices // Phys. Rev. Lett. 2009. Vol. 103. 117401.
15. *Басс Ф.Г., Зорченко В.В., Шапорова В.И.* Штрак-циклотронный резонанс в полупроводниках со сверхрешеткой // Письма в ЖЭТФ. 1980. Т. 31. С. 345.

16. *Басс Ф.Г., Зорченко В.В., Шашора В.И.* К теории гальваномагнитных и высокочастотных явлений в полупроводниках со сверхрешеткой // *Физика и техника полупроводников.* 1981. Т. 15. С. 459.
17. *Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., and Flannery B.T.* Numerical recipes in Fortran: The art of scientific computing. Cambridge University Press, 1986.

Саратовский госуниверситет
Loughborough University, UK

Поступила в редакцию 12.11.2009
После доработки 18.02.2010

TEMPERATURE EFFECT ON DRIFT VELOCITY OF ELECTRONS IN SUPERLATTICE IN ELECTRIC AND TILTED MAGNETIC FIELDS

A.G. Balanov, A.A. Koronovskii, A.O. Selskii, A.E. Hramov

The work studies the effects of temperature on drift velocity of the electrons in semiconductor superlattices in electric and tilted magnetic fields. It is shown that a thermal distribution of the electrons can counter-intuitively enhance the phenomena related to resonances between the Bloch and the cyclotron frequencies of electron motion in superlattices. In particular, the increase of temperature leads to more prominent resonant maxima in the dependence of drift velocity of electrons on the strength of an electric field. This effect can be explained by peculiarities of nonlinear dynamics of electrons in the vicinities of Bloch-cyclotron resonances.

Keywords: Semiconductor superlattice, drift velocity, nonlinear dynamics, chaos, Bloch-cyclotron resonance, thermal distribution.



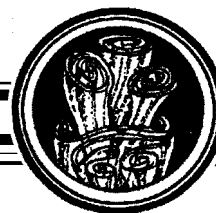
Баланов Александр Геннадьевич – родился в Саратове (1973), окончил Саратовский государственный университет (1995). После окончания СГУ работал инженером в том же университете. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2000). В настоящее время на постоянной основе работает в университете Лафборо (Великобритания), по совместительству является ведущим научным сотрудником СГУ. Научные интересы – нелинейная динамика классических и квантовых систем. Опубликовал около 100 научных работ по вышеуказанной тематике.

England, Loughborough, LE11 3TU
Loughborough University
E-mail: a.balanov@lboro.ac.uk



Сельский Антон Олегович – родился в 1989 году в Саратове, учится в Саратовском государственном университете им. Н.Г. Чернышевского. Параллельно с обучением работает лаборантом исследователем в Лаборатории № 5 ОФНС НИИ ЕН СГУ.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: feanorberserk@mail.ru



БИФУРКАЦИИ И КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ В СЛОЖНОЙ СИСТЕМЕ С ФАЗОВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

В.П. Пономаренко

Приведены результаты исследования режимов динамического поведения автогенераторной системы с фазовой автоподстройкой частоты и автоматическим регулированием усиления, проведенного на основе математической модели с двумя степенями свободы в цилиндрическом фазовом пространстве. Установлено расположение областей параметров с различными динамическими состояниями системы, выделена область устойчивости синхронного режима, изучены процессы, развивающиеся в области неустойчивости этого режима. Выяснено, что изменением параметров инерционности цепей управления, начальной частотной расстройки и степени связи через управляющие сигналы можно стимулировать в системе генерацию разнообразных периодических и хаотических колебаний.

Ключевые слова: Системы с фазовым управлением, динамические состояния, устойчивость, бифуркации, аттракторы, синхронный и несинхронные режимы, динамический хаос.

Введение

В последнее время проявляется заметный интерес к исследованию свойств динамического поведения автогенераторных систем, использующих принцип фазового управления частотой генерируемых колебаний. Область научно-технических приложений таких систем достаточно широка и включает в себя, в частности, решение таких задач, как стабилизация частоты колебаний, оптимальный прием, синхронизация и обработка сигналов, создание новых коммуникационных технологий и др. [1–5]. С позиции теории колебаний и нелинейной динамики модели систем с фазовым управлением представляют собой особый класс нелинейных динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством. Эта особенность систем с фазовым управлением объединяет их с такими объектами, как физические маятники, электрические машины, вибрационные механизмы, системы со сверхпроводящими переходами и многими другими объектами и системами из различных областей естествознания и техники. Все эти объекты имеют сходные математические модели,

следовательно, свойства динамического поведения, которые демонстрируют системы с фазовым управлением, будут наблюдаться и в динамике других объектов, динамические модели которых определены в цилиндрическом фазовом пространстве. По этой причине математические модели систем с фазовым управлением во многих случаях рассматривают как базовые модели объектов, состояние которых определяется циклическими координатами. Привлекательным свойством систем с фазовым управлением является легко реализуемая возможность эффективного воздействия на свойства и области существования возникающих динамических состояний с помощью изменения параметров цепи фазового управления.

В связи с большим научным интересом и прикладной значимостью систем с фазовым управлением изучение процессов и явлений нелинейной динамики в разнообразных вариантах таких систем продолжает оставаться актуальной задачей. Данная работа посвящена исследованию динамических режимов и бифуркаций в модели автогенераторной системы с фазовой автоподстройкой частоты (ФАП) и автоматическим регулированием усиления (АРУ) в цепи управления частотой колебаний генератора. Происхождение и традиционное применение систем с такой структурой связано с решением задач передачи и обработки информации в радиотехнических системах со сложными сигналами, которые получают все большее распространение в радиоавтоматике, радионавигации и радиосвязи. В решении этих задач системы ФАП–АРУ применяются как схемные реализации оптимальных алгоритмов следящей оценки изменяющихся параметров радиосигналов с амплитудной модуляцией [4, 6, 7]. При этом система ФАП обеспечивает совпадение частот входного сигнала и колебаний управляемого генератора, а петля АРУ производит оценку постоянной амплитуды входного сигнала и регулирует в соответствии с этой оценкой коэффициент усиления в цепи автоподстройки частоты, уменьшая тем самым влияние изменения амплитуды сигнала на качество работы системы ФАП.

Систему ФАП–АРУ можно представлять как вариант адаптивной системы фазовой автоподстройки, в которой адаптация осуществляется следящей подстройкой коэффициента усиления петли фазового управления. Интересно отметить, что в [8] вариант системы фазовой автоподстройки с автоматической регулировкой усиления в цепи обратной связи рассматривается в качестве радиофизической интерпретации обобщенной модели модифицированного генератора с инерционной нелинейностью, для которой характерна неединственность состояний равновесия.

Динамика системы ФАП–АРУ в простейшем случае использования в цепях управления фильтров низких частот первого порядка исследована в [9], где выяснено, что система демонстрирует регулярное поведение и имеет два стационарных режима: синхронный режим – режим слежения за параметрами входного сигнала и периодический несинхронный режим. В фазовом пространстве соответствующей динамической модели режиму слежения отвечает устойчивое состояние равновесия, а несинхронному режиму – устойчивый предельный цикл вращательного типа (охватывающий фазовый цилиндр). В пространстве параметров выделены области: глобальной устойчивости синхронного режима, одновременного существования синхронного и несинхронного режимов, существования несинхронного режима. В данной работе мы рассмотрим особенности динамики системы в случае, когда в цепях

управления подсистемы ФАП и петли АРУ используются фильтры соответственно второго и первого порядка. Такие фильтры интересны тем, что они соответствуют моделям динамики оцениваемых параметров принимаемого сигнала, используемым в ряде актуальных прикладных задач синтеза оптимальных систем приема и обработки [4, 6]. Обращение к исследованию динамики системы ФАП–АРУ вызвано, с одной стороны, стремлением выяснить новые явления, возникающие в системе при усложнении фильтра в цепи фазового управления и обязанные своим происхождением потере устойчивости режима слежения, а с другой стороны, наблюдаемой сейчас тенденцией к расширению функциональных возможностей систем с фазовым управлением за счет использования различных несинхронных режимов в качестве рабочих процессов систем (в частности, попытками создания на этой основе новых коммуникационных систем с хаотическими сигналами [10–12]). Организация статьи следующая. В первом разделе обсуждается математическая модель исследуемой системы. Второй раздел посвящен анализу устойчивости и условий реализации синхронного режима. В третьем разделе рассмотрены особенности сложной динамики системы в области неустойчивости режима слежения. Четвертый раздел содержит результаты исследования двухчастотных несинхронных режимов. В Заключении сформулированы полученные результаты.

1. Модель системы

Будем рассматривать один из наиболее интересных вариантов системы ФАП–АРУ, в которой имеется связь между подсистемами через управляющие сигналы [7, 9]. Уравнения, описывающие динамику такой системы, получаем из выведенных в [7] уравнений для оценок A^* и ψ^* амплитуды A и фазы ψ входного сигнала. При этом в связи со сложностью рассматриваемой задачи будем считать амплитуду A постоянным параметром, принимающим произвольные положительные значения, и не будем учитывать влияние помех. В этом случае удобно ввести фазовое рассогласование $\varphi = \psi - \psi^*$ и отношение амплитуд $x = A^*/A$, тогда уравнения динамики рассматриваемой системы в операторной форме ($p \equiv d/dt$) можно представить в виде [9]

$$p\varphi/k_1 = \gamma - K_1(p)x \sin \varphi, \quad x = \delta_0 + k_2 K_2(p)(\cos \varphi - x + \alpha x \sin \varphi). \quad (1)$$

В уравнениях (1) $\gamma = p\psi/k_1$ – начальная расстройка частот, k_1 – полоса удержания системы ФАП, $\delta_0 = A_0/A$, A_0 – среднее значение амплитуды входного сигнала, k_2 – коэффициент преобразования петли АРУ, α – степень связи через управляющие сигналы, $K_1(p)$ и $K_2(p)$ – операторные коэффициенты передачи фильтров низких частот в цепях управления подсистем. Типы этих фильтров определяются используемыми моделями изменения оцениваемых параметров ψ и A [4, 6].

Для рассматриваемых в данной работе фильтров с коэффициентами передачи $K_1(p) = 1/[(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)]$ и $K_2(p) = 1/(1 + T_3 p)$, где T_1, T_2 и T_3 – постоянные времени, из уравнений (1) получаем следующую математическую модель динамики

системы ФАП–АРУ:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{d\tau} &= y, \\ \frac{dy}{d\tau} &= z, \\ \mu \frac{dz}{d\tau} &= \gamma - x \sin \varphi - \varepsilon_1 z - y, \\ \varepsilon_2 \frac{dx}{d\tau} &= \delta - \beta x + \cos \varphi + \alpha x \sin \varphi,\end{aligned}\tag{2}$$

где $\tau = k_1 t$, $\delta = \delta_0/k_2$, $\beta = 1 + 1/k_2$, $\varepsilon_1 = (T_1 + T_2)k_1$, $\varepsilon_2 = T_3 k_1/k_2$, $\mu = T_1 T_2 k_1^2$. Система уравнений (2) в силу периодичности правых частей по фазовой переменной φ с периодом 2π является динамической системой с четырехмерным цилиндрическим фазовым пространством $U = \{\varphi(\text{mod } 2\pi), y, z, x\}$ и семимерным пространством параметров $\Lambda = \{\gamma, \delta, \beta, \alpha, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \mu\}$. Параметры $\delta, \beta, \mu, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ положительны по физическому смыслу. В силу инвариантности системы (2) относительно замены $(\gamma, \alpha, \varphi) \rightarrow (-\gamma, -\alpha, -\varphi)$ достаточно рассматривать ее при значениях $\alpha \geq 0$.

При исследовании динамики системы ФАП–АРУ на основе математической модели (2) в данной работе рассмотрены следующие две задачи. Первая задача связана с определением условий существования и реализации режима слежения, в котором система осуществляет автоматическую подстройку частоты и амплитуды колебаний управляемого генератора к аналогичным параметрам входного сигнала. Эта задача представляет наибольший интерес для традиционного применения систем ФАП–АРУ как устройств, реализующих оптимальные алгоритмы приема сигналов с непостоянной амплитудой. Вторая задача имеет целью получить представление о возможных типах несинхронных режимов и сценариях их эволюции при изменении параметров модели (2). Эта задача представляет интерес для проблемы расширения функциональных возможностей систем с фазовым управлением. В фазовом пространстве U режиму слежения отвечает устойчивое состояние равновесия модели (2), несинхронным (квазисинхронным и асинхронным) режимам соответствуют устойчивые предельные циклы, притягивающие торы и хаотические аттракторы колебательного, вращательного и колебательно-вращательного типа.

Квазисинхронные режимы, определяемые аттракторами колебательного типа модели (2), характеризуются непостоянством разности фаз φ , которая изменяется в ограниченном диапазоне значений. В асинхронных режимах, определяемых аттракторами вращательного и колебательно-вращательного типа модели (2), наблюдается либо возрастание (убывание) разности фаз φ , то есть имеет место вращение φ (режимы вращательного типа), либо чередование стадий неограниченного изменения (вращения) и колебательного поведения φ в ограниченном диапазоне значений (режимы колебательно-вращательного типа). В несинхронных режимах имеют место периодические или хаотические автомодуляционные колебания управляемого генератора системы ФАП–АРУ. В [7, 8] обоснована предпочтительность колебательно-вращательных хаотических асинхронных режимов для получения в системе с фазовым управлением широкополосных колебаний с хаотической фазой и равномерной в полосе спектральной плотностью.

Важно отметить, что и в решении первой задачи исследование несинхронных режимов имеет принципиальное значение – бифуркации, в результате которых появляются несинхронные режимы, определяют границы областей параметров модели (2), в которых обеспечивается существование и глобальная устойчивость режима слежения в исследуемой системе. Таким образом, знание особенностей поведения системы в несинхронных режимах и способов воздействия на развитие колебательных процессов имеет большое значение для правильного выбора режимов и значений параметров системы в различных конкретных приложениях. Решение поставленных задач проведено при помощи качественно-численных методов нелинейной динамики [3, 13, 14] и компьютерного моделирования с использованием программного комплекса «ДНС» [15].

2. Устойчивость режима слежения

Полагая в системе (2) $d\varphi/d\tau = dy/d\tau = dz/d\tau = dx/d\tau = 0$, получаем следующие уравнения для определения координат состояний равновесия

$$\gamma - x \sin \varphi = 0, \quad \delta - \beta x + \cos \varphi + \alpha x \sin \varphi = 0, \quad y = 0, \quad z = 0. \quad (3)$$

На плоскости (φ, x) в полосе $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ первое уравнение в (3) определяет кривую $X_1(\varphi) = \gamma / \sin \varphi$, второе уравнение – кривую $X_2(\varphi) = (\delta + \cos \varphi) / (\beta - \alpha \sin \varphi)$; точки пересечения кривых $X_1(\varphi)$ и $X_2(\varphi)$ определяют значения φ и x , соответствующие состояниям равновесия. Анализ взаимного расположения кривых $X_1(\varphi)$ и $X_2(\varphi)$ показывает, что в зависимости от соотношения между параметрами γ, δ, β и α может быть либо четыре, либо две, либо ни одной точки их пересечения. Границы областей существования состояний равновесия, определяемые из условий касания кривых $X_1(\varphi)$ и $X_2(\varphi)$, находим из равенств

$$\gamma_i(\delta, \beta, \alpha) = \sin^3 \varphi_{mi} / (\beta \cos \varphi_{mi}), \quad (4)$$

в которых $\varphi_{mi} (i = 1, 2, \dots, 6)$ – координаты точек касания кривых $X_1(\varphi)$ и $X_2(\varphi)$ – определяются из уравнения

$$\beta \cos \varphi (\delta + \cos \varphi) - \sin^2 \varphi (\beta - \alpha \sin \varphi) = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) при значениях $\alpha > \beta$ имеет два корня $\varphi = \varphi_{m1}$ и $\varphi = \varphi_{m2}$ ($-\pi/2 < \varphi_{m1} < 0, -\pi < \varphi_{m2} < -\pi/2$), когда $0 < \delta < \sqrt{1 - \beta^2/\alpha^2}$; четыре корня $\varphi = \varphi_{m1}, \varphi = \varphi_{m2}, \varphi = \varphi_{m3}$ и $\varphi = \varphi_{m4}$ ($-\pi/2 < \varphi_{m1} < 0, -\pi < \varphi_{m2} < -\pi/2, \pi/2 < \varphi_{m3} < \varphi_{m4} < \pi$), когда $\sqrt{1 - \beta^2/\alpha^2} < \delta < 1$; два корня $\varphi = \varphi_{m1}$ и $\varphi = \varphi_{m3}$ ($-\pi/2 < \varphi_{m1} < 0, \pi/2 < \varphi_{m3} < \pi$), когда $\delta > 1$. При значениях $\alpha < \beta$ уравнение (5) имеет четыре корня $\varphi = \varphi_{m1}, \varphi = \varphi_{m2}, \varphi = \varphi_{m5}$ и $\varphi = \varphi_{m6}$ ($-\pi/2 < \varphi_{m1} < 0, -\pi < \varphi_{m2} < -\pi/2, 0 < \varphi_{m5} < \pi/2, \pi/2 < \varphi_{m6} < \pi$), когда $\delta < 1$, и два корня $\varphi = \varphi_{m1}$ и $\varphi = \varphi_{m5}$, когда $\delta > 1$. При этом φ_{m1} соответствует касанию кривых $X_1(\varphi)$ и $X_2(\varphi)$ в области $x > 0$ при значениях $\gamma < 0$; φ_{m2} – в области $x < 0$ при значениях $\gamma > 0$; $\varphi_{m3}, \varphi_{m4}$ и φ_{m6} – в области $x < 0$ при значениях $\gamma < 0$; φ_{m5} – в области $x > 0$ при значениях $\gamma > 0$.

На рис. 1 представлен качественный вид кривых γ_i , определяемых из (5) и выделяющих на плоскости (γ, δ) области с различным числом состояний равновесия

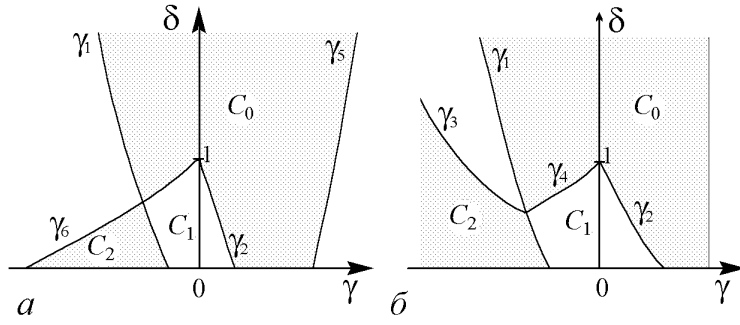


Рис. 1. Разбиение плоскости параметров (γ, δ) на области с различным числом состояний равновесия модели (2) при значениях $0 < \alpha < \beta$ (а) и $\alpha > \beta$ (б)

при значениях $0 < \alpha < \beta$ (рис. 1, а) и $\alpha > \beta$ (рис. 1, б). Для значений γ и δ из области C_1 модель (2) имеет четыре состояния равновесия: $A_1(\varphi_1, x_1, 0, 0)$, $A_2(\varphi_2, x_2, 0, 0)$, $A_3(\varphi_3, x_3, 0, 0)$ и $A_4(\varphi_4, x_4, 0, 0)$, причем A_1 и A_2 расположены в области $x > 0$, а A_3 и A_4 – в области $x < 0$ фазового пространства U . При значениях γ и δ из области C_0 модель (2) имеет два состояния равновесия $A_1(\varphi_1, x_1, 0, 0)$ и $A_2(\varphi_2, x_2, 0, 0)$, при значениях γ и δ из области C_2 – два состояния равновесия $A_3(\varphi_3, x_3, 0, 0)$ и $A_4(\varphi_4, x_4, 0, 0)$.

Характер состояний равновесия устанавливаем из анализа коэффициентов характеристического уравнения

$$\lambda^4 + [(\beta\mu - \alpha\mu \sin \varphi_j + \varepsilon_1\varepsilon_2)/(\varepsilon_2\mu)]\lambda^3 + [(\beta\varepsilon_1 - \alpha\varepsilon_1 \sin \varphi_j + \varepsilon_2)/(\varepsilon_2\mu)]\lambda^2 + [(\beta - \alpha \sin \varphi_j + \varepsilon_2x_j \cos \varphi_j)/(\varepsilon_2\mu)]\lambda + (\beta x_j \cos \varphi_j - \sin^2 \varphi_j)/(\varepsilon_2\mu) = 0, \quad (6)$$

где $j = 1, 2, 3, 4$. Состояния равновесия A_1 и A_3 могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми, состояния равновесия A_2 и A_4 – неустойчивые седлового типа. Условия устойчивости состояний равновесия A_1 и A_3 находим, применяя к уравнению (6) критерий Рауса–Гурвица, и записываем в виде

$$\begin{aligned} \beta\mu - \alpha\mu \sin \varphi_j + \varepsilon_1\varepsilon_2 > 0, \quad \beta\varepsilon_1 - \alpha\varepsilon_1 \sin \varphi_j + \varepsilon_2 > 0, \\ \beta - \alpha \sin \varphi_j + \varepsilon_2x_j \cos \varphi_j > 0, \quad \beta x_j \cos \varphi_j - \sin^2 \varphi_j > 0, \\ (\beta - \alpha \sin \varphi_j + \varepsilon_2x_j \cos \varphi_j)[(\beta\mu - \alpha\mu \sin \varphi_j + \varepsilon_1\varepsilon_2) \times \\ \times (\beta\varepsilon_1 - \alpha\varepsilon_1 \sin \varphi_j + \varepsilon_2) - (\beta - \alpha \sin \varphi_j + \varepsilon_2x_j \cos \varphi_j)\varepsilon_2\mu] - \\ - (\beta\mu - \alpha\mu \sin \varphi_j + \varepsilon_1\varepsilon_2)^2(\beta x_j \cos \varphi_j - \sin^2 \varphi_j) > 0, \quad j = 1, 3. \end{aligned} \quad (7)$$

При выполнении условий (7) в системе ФАП–АРУ существуют стационарные режимы слежения, определяемые состояниями равновесия A_1 и A_3 . В режиме состояния равновесия A_1 колебания управляемого генератора системы ФАП с точностью до величины φ_1 синфазны, а в режиме состояния равновесия A_3 – с точностью до величины φ_3 противофазны с колебаниями на входе системы. Основным режимом слежения является режим состояния равновесия A_1 , так как в этом режиме выше точность оценки параметров входного сигнала, характеризуемая величинами φ_1 и x_1 , которые определяются из уравнений (3). Из уравнений (3) следует, что при значениях $\delta = \delta_s(\gamma, \beta, \alpha)$, где $\delta_s = \beta - \alpha\gamma - \sqrt{1 - \gamma^2}$, в основном режиме слежения

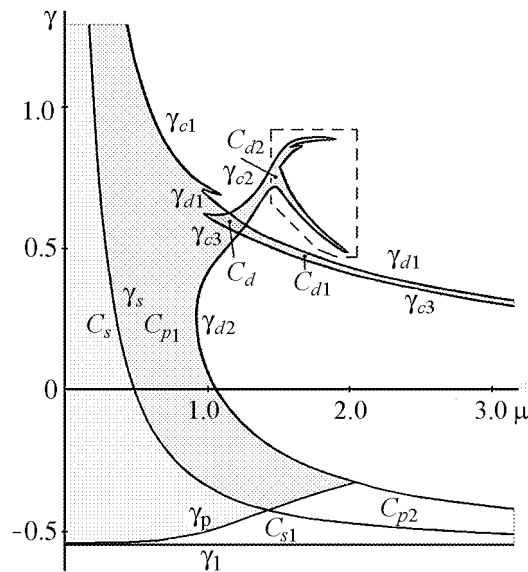


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма для модели (2), разделяющая плоскость параметров (μ, γ) на области, соответствующие различным динамическим режимам, при значениях параметров $\alpha = 2$, $\beta = 1.1$, $\delta = 1.25$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 2$

Область C_0 разделяется кривой γ_p , соответствующей бифуркации петли сепаратрисы Π_φ седло-фокуса A_2 ($\text{Re}\lambda_{1,2} < 0$, $\text{Im}\lambda_{1,2} \neq 0$, $\lambda_3 < 0$, $\lambda_4 > 0$, где $\lambda_{1,2,3,4}$ – корни характеристического уравнения (6) для состояния равновесия A_2), на области $C_s : \{\max(\gamma_1, \gamma_p) < \gamma < \gamma_s\}$ и $C_{s1} : \{\gamma_1 < \gamma < \min(\gamma_p, \gamma_s)\}$. Для значений μ и γ из области C_s состояние равновесия A_1 является единственным (по результатам численного исследования модели (2)) аттрактором в фазовом пространстве U . Следовательно, область C_s – это область захвата в основной режим слежения, для значений параметров из этой области режим слежения устанавливается в системе при любых начальных условиях.

При переходе с увеличением μ (или с уменьшением γ) через границу γ_p в область C_{s1} из петли Π_φ появляется устойчивый (так как седловая величина $\sigma = \lambda_4 + \text{Re}\lambda_i < 0$, $i = 1, 2, 3$) 2π -периодический по φ вращательный предельный цикл L_0 . Численное исследование модели (2) показывает, что при движении в области C_{s1} с изменением μ и γ возможно исчезновение цикла L_0 в результате седло-узловой бифуркации и возникновение хаотического аттрактора вращательного типа через перемежаемость. На рис. 3, а, б приведены (φ, y) -проекции фазовых портретов и фрагменты временных реализаций колебательных процессов $y(\tau)$, соответствующие режимам цикла L_0 и хаотического аттрактора. Установлено также существование сложных многооборотных вращательных предельных циклов. Таким образом, в области C_{s1} модель (2) демонстрирует бистабильное поведение – в фазовом пространстве U одновременно существуют устойчивое состояние равновесия A_1 и аттракторы вращательного типа. Следовательно, в зависимости от начального состояния системы в ней реализуется либо синхронный, либо периодический или хаотический асинхронный режим. Для реализации синхронного режима начальные значения фазовых переменных должны принадлежать области притяжения состоя-

осуществляется точная оценка амплитуды входного сигнала ($x_1 = 1$) с величиной фазового рассогласования $\varphi_1 = \arcsin \gamma$; при $\delta > \delta_s$ величина $x_1 > 1$, при $\delta < \delta_s$ величина $x_1 < 1$.

Уравнения (3) и (5), равенство (4) и неравенства (7) позволяют определять границы области C_0 существования основного режима слежения. На рис. 2 приведены кривые $\gamma = \gamma_1$ и $\gamma = \gamma_s$ на плоскости параметров (μ, γ) , выделяющие область C_0 , построенные при значениях параметров $\alpha = 2$, $\beta = 1.1$, $\delta = 1.25$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 2$. Линия γ_1 , определяемая из (3)–(5), является границей области существования состояний равновесия A_1 и A_2 . Линия γ_s – это граница области устойчивости состояния равновесия A_1 , определяемой условиями (7). Область $C_0 : \{\gamma_1 < \gamma < \gamma_s\}$ является областью удержания режима сле-

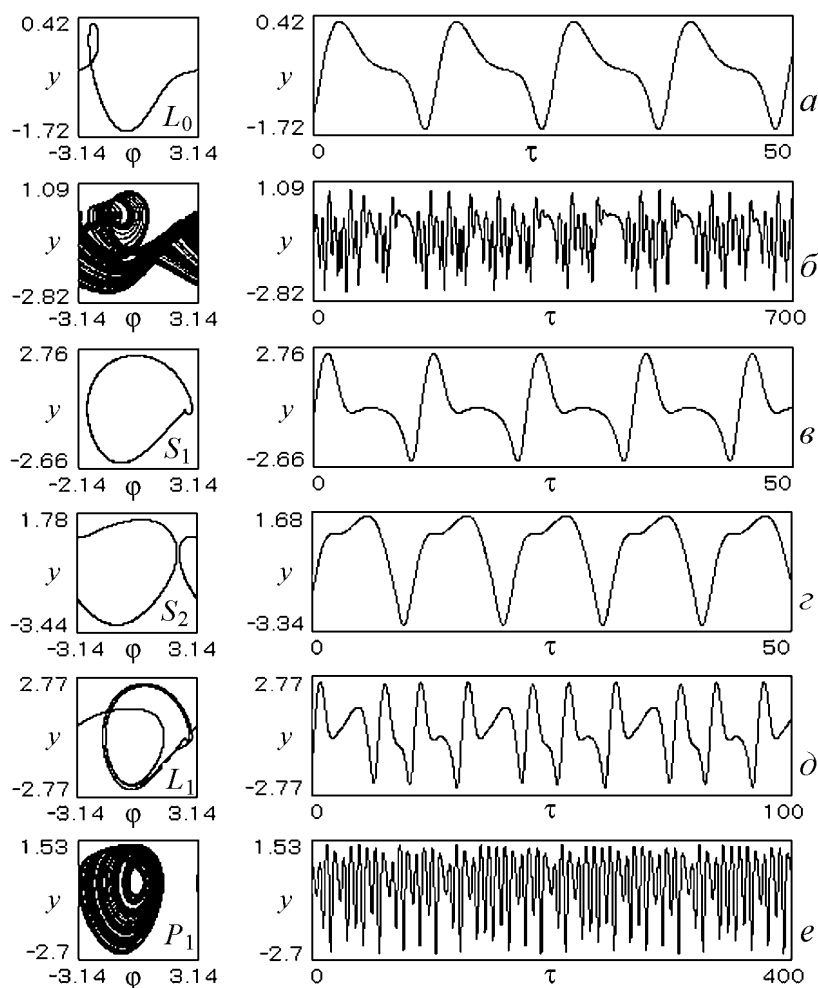


Рис. 3. Несинхронные режимы системы при значениях $\gamma = -0.54, \mu = 1.6$ (а), 2.63 (б); $\gamma = 0.86, \mu = 0.727$ (в), 1.56 (з), 0.74 (д), 1.24 (е) ($\alpha = 2, \beta = 1.1, \delta = 1.25, \varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 2$)

ния равновесия A_1 . Области C_0 и C_s служат основными динамическими характеристиками системы ФАП–АРУ при решении задачи следящей оценки изменяющихся параметров входного сигнала. Подбором величины и знака параметра связи α можно изменять величины этих областей.

3. Особенности динамики системы в области неустойчивости режима слежения

Для значений параметров модели (2) вне области C_0 режим слежения не существует, стационарными режимами системы являются несинхронные (квазисинхронные и асинхронные) режимы, которые могут быть как регулярными, так и хаотическими. Вначале рассмотрим качественные изменения в поведении системы ФАП–АРУ, связанные с потерей устойчивости режима слежения, наблюдаемой при выходе из области C_0 . Для этого снова обратимся к двухпараметрической бифуркационной диаграмме (μ, γ), приведенной на рис. 2. Будем использовать следую-

шие обозначения аттракторов модели (2): S_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) – колебательные предельные циклы; P_j ($j = 1, 2, 3, 4$) – колебательные хаотические аттракторы; L_k ($k = 1, 2, 3, 4$) – вращательные и колебательно-вращательные предельные циклы; W_l ($l = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$) – хаотические аттракторы асинхронных режимов; T_m ($m = 1, 2, 3, 4, 5$) – двумерные торы.

При пересечении с увеличением μ границы γ_s области устойчивости C_0 в модели (2) наблюдается суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа, когда в решении характеристического уравнения (6) появляется пара комплексно-сопряженных корней с положительной реальной частью. В результате этой бифуркации в фазовом пространстве U мягко рождается устойчивый предельный цикл S_1 , охватывающий состояние равновесия A_1 , то есть происходит мягкий переход системы ФАП–АРУ от режима слежения к периодическому квазисинхронному режиму. На рис. 3, в изображены (φ, y) -проекция фазового портрета и зависимость $y(\tau)$, соответствующие режиму колебательного предельного цикла S_1 .

Режим цикла S_1 существует в области C_{p0} , заключенной между кривой γ_s и частями кривых $\gamma_{c1}, \gamma_{d1}, \gamma_{c2}, \gamma_{c3}$ и γ_{d2} (см. рис. 2). Кривые γ_{c1}, γ_{c2} и γ_{c3} соответствуют седло-узловым бифуркациям, а кривые γ_{d1} и γ_{d2} – бифуркациям удвоения периода колебательных предельных циклов модели (2). Бифуркационная кривая γ_p разделяет область C_{p0} на области C_{p1} и $C_{p2} : \{\gamma_s < \gamma < \min(\gamma_p, \gamma_{d2})\}$. В области C_{p1} предельный цикл S_1 глобально устойчивый, то есть квазисинхронный режим, соответствующий этому циклу, реализуется в системе при любых начальных условиях. Область C_{p2} – это область с бистабильным поведением модели (2). При значениях параметров из этой области в фазовом пространстве U одновременно существуют колебательный предельный цикл и аттракторы вращательного типа, которые могут быть как регулярными, так и хаотическими. Хаотизация колебаний осуществляется через бифуркации удвоения периода вращательных предельных циклов, а также через перемежаемость, как и в области C_{s1} .

С седло-узловыми бифуркациями колебательных предельных циклов, происходящих на линиях γ_{c2} и γ_{c3} , связано существование области C_d на плоскости (μ, γ) (см. рис. 2), ограниченной частями кривых $\gamma_{c2}, \gamma_{c3}, \gamma_{d1}$ и γ_{d2} , для точек которой в фазовом пространстве U , кроме предельного цикла S_1 , существует еще один предельный цикл колебательного типа S_2 . Соответствующие этому циклу (φ, y) -проекция фазового портрета и зависимость $y(\tau)$ приведены на рис. 3, г. Квазисинхронные режимы системы ФАП–АРУ, определяемые циклами S_1 и S_2 , различаются амплитудами колебаний переменных x и y . В области C_d также имеет место бистабильное поведение модели (2), какой из этих режимов реализуется в системе – это зависит от начальных условий. При переходе из области C_d в область C_{p1} через кривые γ_{c2} и γ_{c3} происходит исчезновение одного из предельных циклов S_1 и S_2 . Таким образом, область $C_p^* = C_{p1} \cup C_d$, граничащая с областью C_s , – это область периодических квазисинхронных режимов системы ФАП–АРУ.

Теперь рассмотрим перестройки поведения системы, находящейся в квазисинхронном режиме, которые происходят при пересечении границ области C_p^* с изменением параметра μ . Характер этих перестроек оказывается различным в зависимости от того, через какую из бифуркационных границ γ_{c1}, γ_{d1} и γ_{d2} происходит выход из области C_p^* . При переходе через кривую γ_{c1} (см. рис. 2) квазисинхронный режим исчезает, в системе наблюдается жесткий переход к периодическому асинхронному режиму колебательно-вращательного предельного цикла L_1 . На рис. 3, д даны

(φ, y) -проекция фазового портрета и зависимость $y(\tau)$, соответствующие этому режиму. При пересечении кривой γ_{d1} вначале система мягко переходит к квазисинхронному режиму предельного цикла S_1^2 , который появляется в результате бифуркации удвоения периода цикла S_1 , а затем следует жесткий переход от режима цикла S_1^2 к периодическому асинхронному режиму колебательно-вращательного типа. При переходе через кривую γ_{d2} и последующем удалении от нее наблюдается иное поведение системы – реализуется последовательность бифуркаций удвоения периода колебательного предельного цикла, которая завершается возникновением хаотического аттрактора P_1 в фазовом пространстве U . Таким образом, в этом случае имеет место мягкий переход системы к хаотическому квазисинхронному режиму аттрактора P_1 . Примеры соответствующих такому режиму (φ, y) -проекции фазового портрета и зависимости $y(\tau)$ приведены на рис. 3, *e*.

Рассмотрим динамическое поведение модели (2) в области C_c , расположенной на диаграмме (μ, γ) (см. рис. 2) справа от области C_{p0} ($C_{p0} = C_p^* \cup C_{p2}$). Область C_c – это область со сложной динамикой модели (2). Для значений параметров из этой области в системе реализуются квазисинхронные и асинхронные режимы различной сложности. При этом в областях C_{d1} и C_{d2} ($C_{d1}, C_{d2} \subset C_c$) существуют и периодические квазисинхронные режимы предельных циклов S_1 и S_2 соответственно. Отметим, что правая граница области C_{d2} имеет сложный характер, она образована бифуркационными кривыми, соответствующими бифуркациям удвоения периода и седло-узловым бифуркациям предельного цикла S_2 .

При исследовании модели (2) в области C_c в качестве варьируемого параметра был выбран параметр инерционности μ , который характеризует степень влияния фильтра второго порядка в цепи фазового управления. С целью получения представления о возможных несинхронных режимах системы ФАП–АРУ, развивающихся в области C_c , обратимся к однопараметрическим бифуркационным диаграммам (μ, y) (рис. 4, *a*) и (μ, x) (рис. 5, *a*), а также к (φ, y) - и (φ, x) -проекциям фазовых портретов и зависимостям $y(\tau)$ и $x(\tau)$, соответствующим аттракторам модели (2) при различных значениях параметра μ (рис. 4, *b–н*, рис. 5, *b–z*).

Диаграмма (μ, y) на рис. 4, *a* построена при значении расстройки $\gamma = 0.625$; она характеризует режимы поведения и бифуркационные переходы, наблюдаемые при выходе из области C_d через границу γ_{d1} и последующем удалении от этой границы. Эта диаграмма отображает эволюцию одновременно существующих квазисинхронных режимов предельных циклов S_1 и S_2 при изменении параметра μ от 1.16 до 2.1. Для динамики системы характерны переходы между периодическими и хаотическими несинхронными режимами. При этом для большей части исследуемого интервала значений μ в системе наблюдаются хаотические асинхронные режимы. Можно выделить следующие три характерные области значений параметра μ . В области $M_1 : \{1.16 < \mu < 1.423\}$ чередующиеся асинхронные режимы сложных предельных циклов и хаотических аттракторов колебательно-вращательного типа существуют одновременно с квазисинхронным периодическим или хаотическим режимом, то есть модель (2) демонстрирует бистабильное поведение. При переходе в область $M_2 : \{1.423 < \mu < 1.676\}$ в системе наблюдается жесткий переход от асинхронного режима хаотического аттрактора W_1 (рис. 4, *b*) к квазисинхронному режиму хаотического аттрактора P_1 (рис. 4, *в*).

В области M_2 поведение системы характеризуется преобразованием режима аттрактора P_1 через периодический квазисинхронный режим предельного цикла S_3

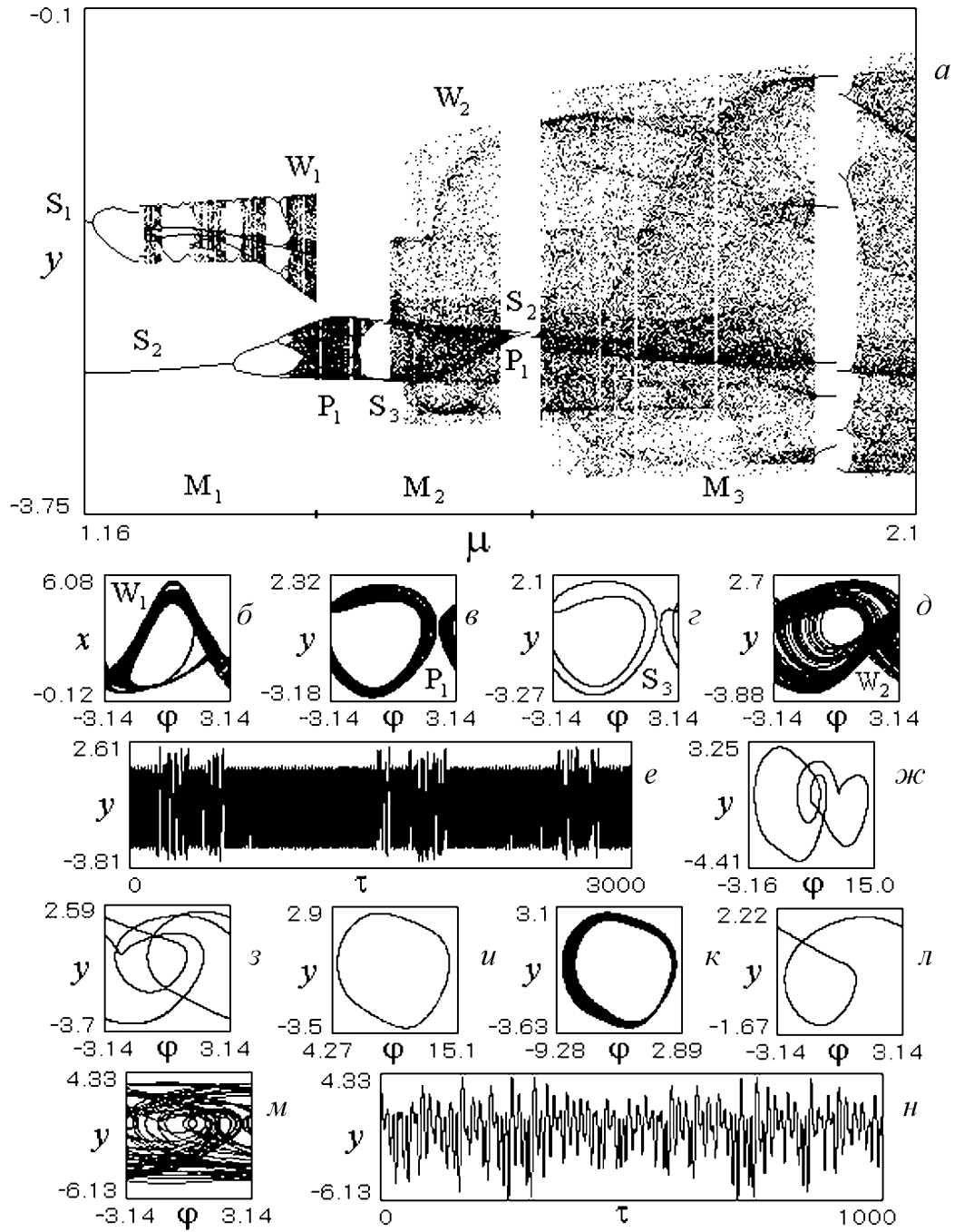


Рис. 4. Диаграмма развития квазисинхронных режимов предельных циклов S_1 и S_2 при изменении параметра μ (а), проекции фазовых портретов и временные реализации $y(\tau)$ для различных несинхронных режимов (б-н) при значениях $\mu=1.422$ (б); 1.47 (в); 1.5 (г); 1.6 (д); 1.63 (е); 1.99 (ж); 2.24 (з); 2.74 (и); 3.07 (к); 4.15 (л); 4.6 (м,н) ($\gamma = 0.625$, $\alpha = 2$, $\beta = 1.1$, $\delta = 1.25$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 2$)

(рис. 4, *з*) в асинхронный режим колебательно-вращательного хаотического аттрактора W_2 (рис. 4, *д*). Примечательно, что с увеличением μ происходит уменьшение числа витков вращательных траекторий в структуре аттрактора W_2 , далее наблюдается явление перемежаемости типа «хаос–хаос». Это явление, иллюстрируемое рис. 4, *е*, характеризуется нерегулярным чередованием на хаотическом аттракторе W_2 коротких стадий вращательных движений и длинных стадий колебательных движений. После исчезновения вращательных движений на аттракторе W_2 система возвращается к квазисинхронному режиму хаотического аттрактора P_1 , который затем мягко преобразуется в периодический квазисинхронный режим предельного цикла S_2 .

При значениях $\mu \in M_3 : \{\mu > 1.676\}$ система, наряду с асинхронными режимами, демонстрирует квазисинхронные режимы иного типа, определяемые колеба-

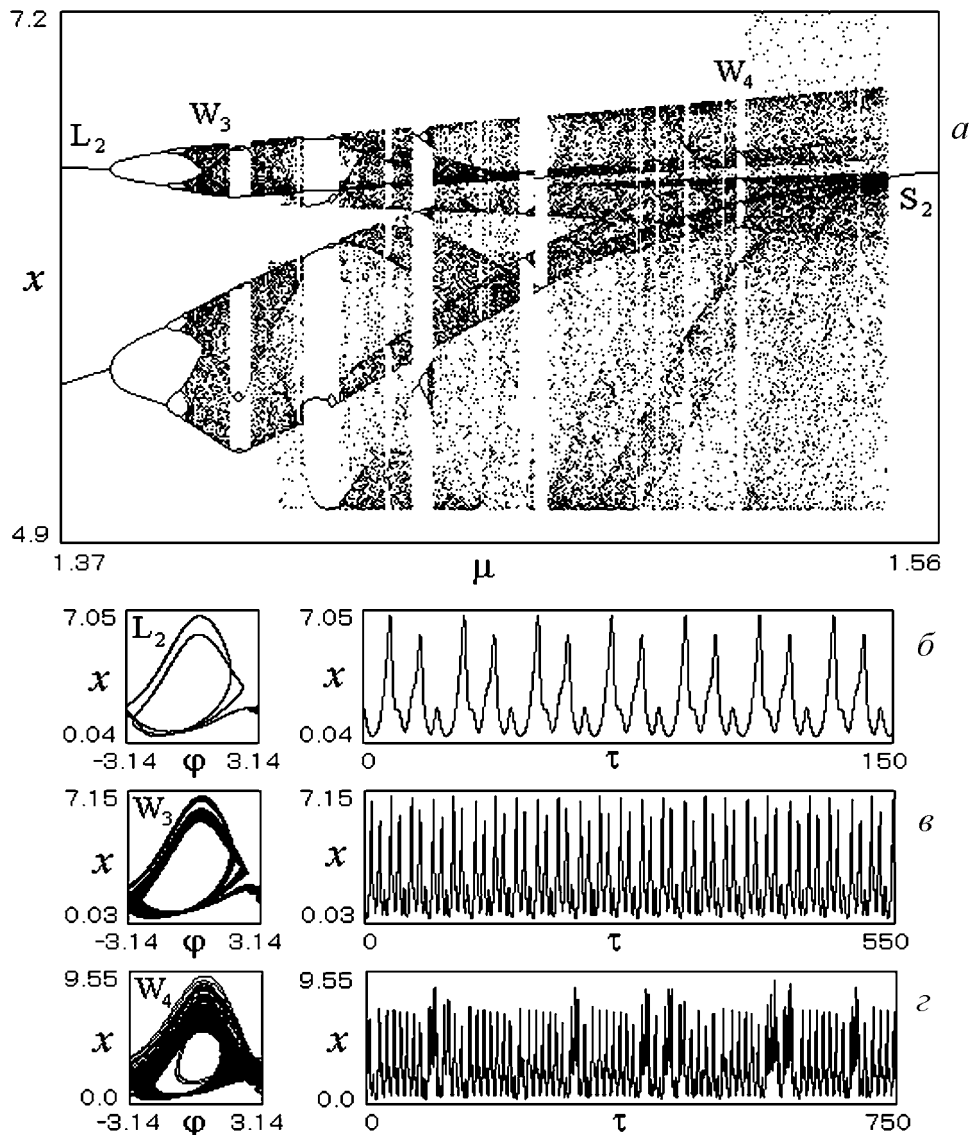


Рис. 5. Развитие асинхронного режима предельного цикла L_2 при изменении параметра μ (*a*) и несинхронные режимы системы при значениях $\mu=1.37$ (*б*); 1.405 (*в*); 1.54 (*г*) ($\gamma = 0.86$, $\alpha = 2$, $\beta = 1.1$, $\delta = 1.25$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 2$)

тельными предельными циклами и хаотическими аттракторами модели (2) с ограниченным диапазоном изменения разности фаз φ , превышающим 2π . Некоторые из таких аттракторов, соответствующих так называемым квазисинхронным режимам с проворотом фазы, изображены на рис. 4, *ж,и,к*. На рис. 4, *з,л,м,н* даны примеры аттракторов асинхронных режимов, которые сменяют квазисинхронные режимы при изменении μ . Переходы к хаотическим квазисинхронным режимам происходят через бифуркации удвоения периода колебательных предельных циклов с проворотом фазы. Хаотические асинхронные режимы возникают на базе хаотических квазисинхронных режимов через перемежаемость типа «хаос–хаос».

Диаграмма (μ, x) на рис. 5, *а* соответствует значению $\gamma = 0.86$ и отражает развитие периодического асинхронного режима, на который система переходит в результате пересечения границы γ_{c1} области C_p^* . В соответствии с этой диаграммой, где стартовым состоянием системы является периодический асинхронный режим колебательно-вращательного предельного цикла L_2 (рис. 5, *б*), динамика системы при изменении параметра μ от 1.37 до 1.56 характеризуется следующими явлениями: переходом к асинхронному режиму колебательно-вращательного хаотического аттрактора W_3 (рис. 5, *в*) через бифуркации удвоения периода цикла L_2 ; нерегулярным чередованием периодических и хаотических режимов колебательно-вращательного типа; жестким переходом от режима колебательно-вращательного хаотического аттрактора W_4 (рис. 5, *г*) к квазисинхронному режиму предельного цикла S_2 (см. рис. 3, *з*). При дальнейшем увеличении μ режим цикла S_2 жестко сменяется режимом колебательно-вращательного хаотического аттрактора, область существования которого прерывается узкими «окнами» сложных предельных циклов. Отметим, что и в рассматриваемом случае хаотические асинхронные режимы колебательно-вращательного типа наблюдаются для большей части исследуемого диапазона изменения параметра μ .

Результаты, представленные на рис. 4 и 5, свидетельствуют о сложной картине перестроек динамического поведения модели (2) при движении внутри области C_c . Численное исследование модели (2) позволило установить, что закономерности ее динамического поведения, представленные на рис. 2–5 (потеря устойчивости синхронного режима, бифуркации периодических движений, переходы к хаотическому поведению по различным сценариям, нерегулярное чередование квазисинхронных и асинхронных режимов различной сложности, существование разнообразных колебательно-вращательных предельных циклов и хаотических аттракторов в фазовом пространстве U , преобразование регулярных колебательно-вращательных аттракторов в хаотические и обратно, изменение соотношения колебательных и вращательных движений в структуре аттракторов, существование колебательных аттракторов с проворотом фазы), характерны и для других значений параметров $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon_1$ и ε_2 . На основании этого можно полагать, что результаты, приведенные на рис. 2–5, являются типичными для динамического поведения системы ФАП–АРУ.

Кроме этих результатов, при исследовании модели (2) обнаружено бистабильное поведение системы при изменении параметра связи α , выяснено, что при больших значениях параметра инерционности ε_2 наблюдаются новые явления сложной динамики модели (2), связанные с возможностью существования притягивающих двумерных торов в фазовом пространстве U , которым соответствуют двухчастотные несинхронные режимы системы ФАП–АРУ. Обсудим качественные особенности процессов возникновения и развития таких режимов.

4. Двухчастотные несинхронные режимы

При численном исследовании модели (2) выявлена существенная роль параметра связи α в возникновении и развитии двухчастотных квазисинхронных режимов. Рассмотрим случай, когда значения параметров $\beta = 1.1$, $\delta = 1.25$, $\gamma = 0.1$, $\mu = 5$, $\varepsilon_1 = 1.97$, $\varepsilon_2 = 150$, а параметр α изменяется от 1.6 до 2.6. На рис. 6 и 7 приведены построенные в этом случае бифуркационная диаграмма $\{\alpha, x\}$ и (φ, x) -проекции фазовых портретов, (y, x) -проекции сечения Пуанкаре и временные реализации $x(\tau)$, соответствующие аттракторам модели (2). Начальным состоянием системы при $\alpha = 1.6$ является квазисинхронный режим предельного цикла S_4 (рис. 7, а). При увеличении α цикл S_4 теряет устойчивость, и в фазовом пространстве рождается притягивающий двумерный тор T_1 колебательного типа (рис. 7, б), которому в отображении Пуанкаре соответствует замкнутая инвариантная кривая Γ_1 (рис. 7, в). Тору T_1 соответствует двухчастотный квазисинхронный режим системы ФАП-АРУ.

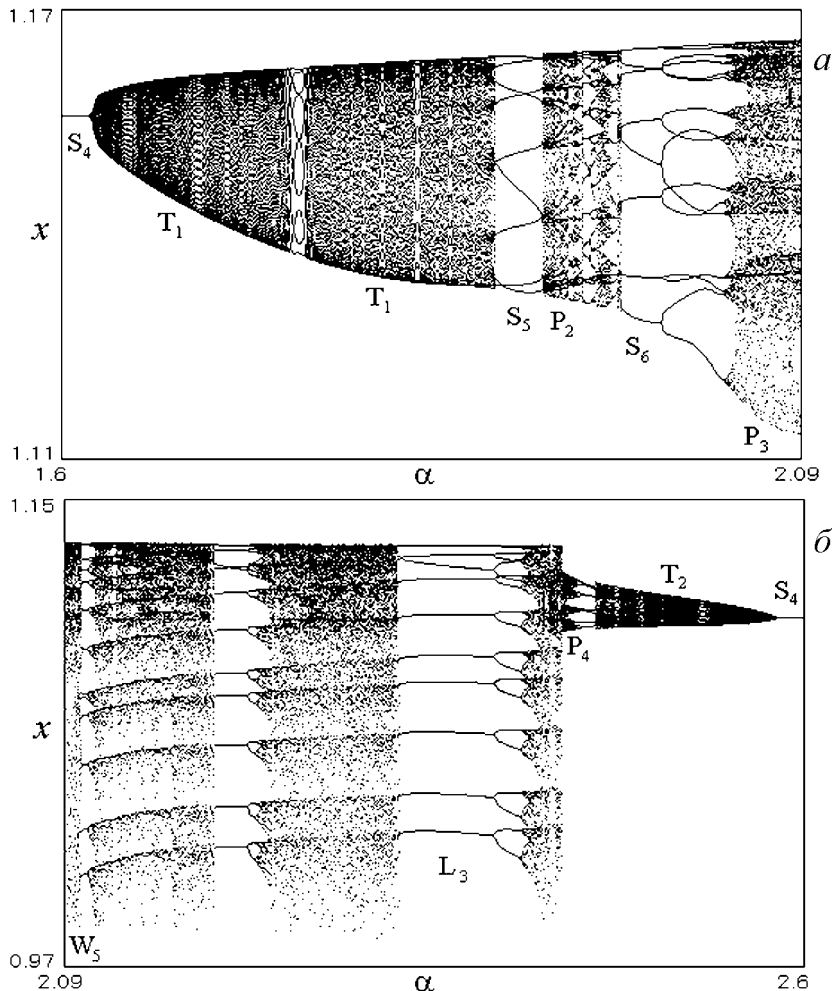


Рис. 6. Эволюция квазисинхронного режима предельного цикла S_4 при изменении параметра связи α ($\gamma = 0.1$, $\mu = 5$, $\beta = 1.1$, $\delta = 1.25$, $\varepsilon_1 = 1.97$, $\varepsilon_2 = 150$)

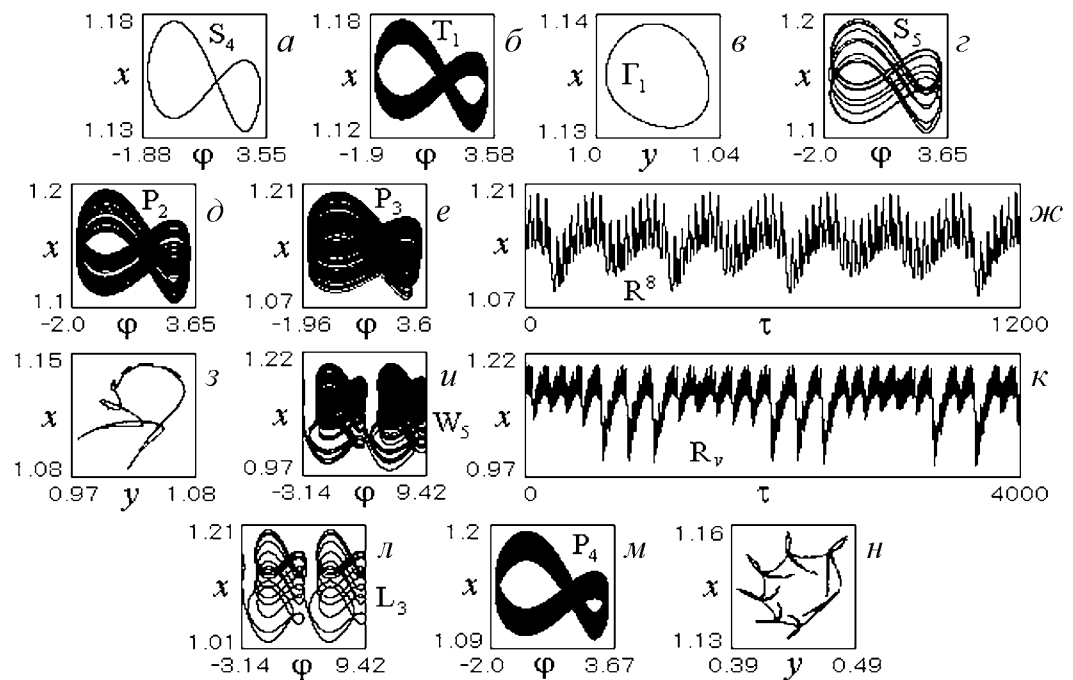


Рис. 7. Аттракторы несинхронных режимов при значениях параметра $\alpha = 1.6$ (а); 1.65 (б,в); 1.9 (з); 1.946 (д); 2.08 (е,ж,з); 2.097 (и,к); 2.35 (л); 2.436 (м,н) ($\gamma = 0.1, \mu = 5, \beta = 1.1, \delta = 1.25, \varepsilon_1 = 1.97, \varepsilon_2 = 150$)

Далее в интервале $1.623 < \alpha < 1.92$ имеет место чередование режима тора T_1 и режимов резонансных многооборотных колебательных предельных циклов, один из которых – девятиоборотный цикл S_5 приведен на рис. 7, з. Начиная со значения $\alpha = 1.92$, наблюдается искажение формы замкнутой инвариантной кривой Γ_1 , что свидетельствует о постепенном преобразовании тора T_1 в хаотический аттрактор P_2 (рис. 7, д) типа тор-хаос [13]. Режим аттрактора P_2 прерывается режимами многооборотных колебательных предельных циклов, из которых наибольшую область существования имеет восьмиоборотный цикл S_6 . При дальнейшем увеличении α режим цикла S_6 через бифуркации удвоения периода преобразуется в режим колебательного хаотического аттрактора P_3 (рис. 7, е,ж,з). При $\alpha > 2.088$ в структуре аттрактора P_3 появляются витки вращательных фазовых траекторий, что свидетельствует о преобразовании его в колебательно-вращательный хаотический аттрактор W_5 (рис. 7, и,к).

При изменении α в интервале $2.09 < \alpha < 2.432$ динамика системы характеризуется чередованием хаотических аттракторов и сложных предельных циклов колебательно-вращательного типа, которые отличаются числом витков колебательных траекторий. На рис. 7, л приведен один из таких циклов – цикл L_3 с девятью витками колебательных движений. Хаотизация колебаний в режимах этих циклов осуществляется через бифуркации удвоения периода. Когда α превышает значение 2.432, система через перемежаемость «хаос-хаос» переходит от режима колебательно-вращательного хаотического аттрактора к квазисинхронному режиму хаотического аттрактора P_4 (рис. 7, м,н). С дальнейшим увеличением α режим аттрактора P_4 преобразуется через режим предельного цикла, подобного циклу S_5 (рис. 7, з), в квазисинхронный двухчастотный режим тора T_2 , подобного тору T_1

(рис. 7, б, в). Затем режим тора T_2 мягко преобразуется в квазисинхронный режим предельного цикла, подобного циклу S_4 (рис. 7, а) – система возвращается к исходному квазисинхронному режиму.

Существование двумерных вращательных торов в фазовом пространстве модели (2) установлено в случае, когда значения параметров $\beta = 1.1$, $\delta = 1.25$, $\alpha = 5$, $\mu = 5$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 150$, а расстройка γ является варьируемым параметром. На рис. 8 и 9 приведены примеры (φ, y) -проекций фазовых портретов, (y, x) -проекций сечений Пуанкаре и реализаций колебательных процессов $y(\tau)$, отвечающих различным регулярным и хаотическим режимам системы ФАП–АРУ при изменении γ от 0.85 до 0.32. При $\gamma = 0.85$ в фазовом пространстве U существует двухоборотный (4л-периодический по φ) вращательный предельный цикл L_4 (рис. 8, а). При уменьшении γ происходит потеря устойчивости цикла L_4 через бифуркацию рождения устойчивого двумерного вращательного тора T_3 (рис. 8, б), которому соответствуют замкнутые инвариантные кривые Γ_2^1 и Γ_2^2 отображения Пуанкаре (рис. 8, в). Тору T_3 отвечает двухчастотный асинхронный режим системы.

При дальнейшем уменьшении γ наблюдаются следующие явления: чередование режима тора T_3 и периодических асинхронных режимов на многооборотных вращательных предельных циклах; постепенное вырождение тора T_3 в хаотический аттрактор W_6 типа тор-хаос (рис. 8, г, д); чередование хаотических режимов (рис. 8, е, ж, з) и периодических режимов двухоборотного, четырехоборотного (8л-периодического по φ) (рис. 8, и) и трехоборотного (6л-периодического по φ) (рис. 8, к) вращательных предельных циклов. Затем наблюдается эффект потери

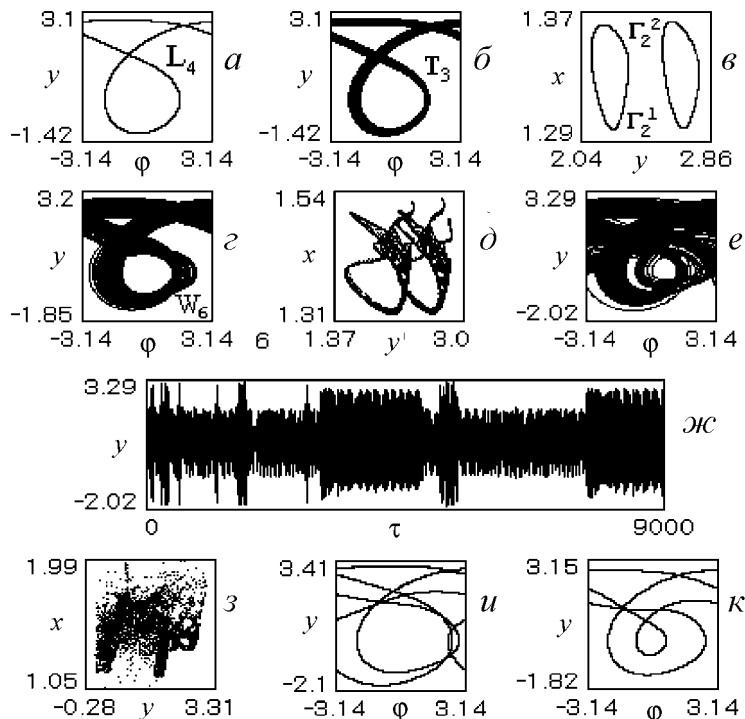


Рис. 8. Аттракторы асинхронных режимов при значениях $\gamma = 0.853$ (а); 0.845 (б, в); 0.819 (г, д); 0.818 (е, ж, з); 0.8038 (и); 0.65 (к) ($\mu = 5$, $\alpha = 5$, $\beta = 1.1$, $\delta = 1.25$, $\varepsilon_1 = 1.97$, $\varepsilon_2 = 150$)

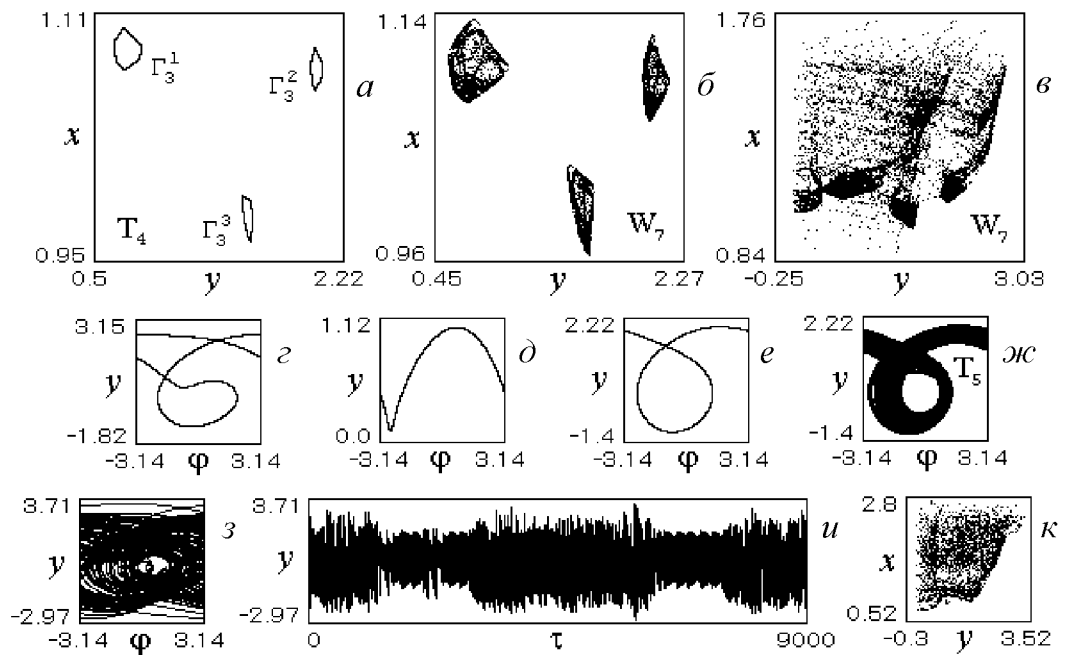


Рис. 9. Асинхронные режимы, развивающиеся на базе трехоборотного вращательного предельного цикла при уменьшении расстройки γ : $\gamma = 0.646$ (а); 0.643 (б); 0.636 (в); 0.625 (з); 0.45 (д); 0.362 (е); 0.323 (ж); 0.32 (з,и,к) ($\mu = 5$, $\alpha = 5$, $\beta = 1.1$, $\delta = 1.25$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 150$)

устойчивости трехоборотного цикла с рождением в фазовом пространстве U притягивающего двумерного тора T_4 , которому соответствуют замкнутые инвариантные кривые Γ_3^1 , Γ_3^2 и Γ_3^3 отображения Пуанкаре (рис. 9, а). Дальнейшее движение по параметру γ приводит к разрушению тора T_4 и переходу к режиму хаотического аттрактора W_7 (рис. 9, б, в). Область существования аттрактора W_7 прерывается областями, в которых существуют периодические асинхронные режимы вращательных предельных циклов (рис. 9, з, д, е). При этом переходы между периодическими и хаотическими режимами осуществляются через прямые и обратные бифуркации удвоения периода, через перемежаемость, а также в результате седло-узловых бифуркаций предельных циклов. Далее на базе вращательного предельного цикла, (φ, y) -проекция фазового портрета которого приведена на рис. 9, е, снова возникает двухчастотный асинхронный режим тора T_5 (рис. 9, ж), который затем также преобразуется в хаотический асинхронный режим (рис. 9, з, и, к).

Заключение

В данной работе приведены результаты изучения режимов поведения и явлений нелинейной динамики в автогенераторной системе с фазовой автоподстройкой частоты и автоматическим регулированием усиления, полученные с помощью качественно-численного исследования соответствующей математической модели (2) – динамической системы с двумя степенями свободы в цилиндрическом фазовом пространстве. Установлено, что модель (2) может иметь аттракторы различной сложности – от состояния равновесия до хаотических аттракторов колебательного, вращательного и колебательно-вращательного типа, которым соответствуют синхронный,

квазисинхронные и асинхронные режимы исследуемой системы. Получены условия существования синхронного режима, определяющие границу области C_0 удержания этого режима.

Выяснено, что потеря устойчивости синхронного режима сопровождается мягким возникновением периодического квазисинхронного режима, в то время как исчезновение синхронного режима приводит к жесткому переходу системы к периодическому или хаотическому асинхронному режиму. Внутри области удержания C_0 выделены область C_s глобальной устойчивости синхронного режима (область захвата) и область C_{s1} , соответствующая сосуществованию синхронного и асинхронных режимов различной сложности. Границы области захвата определяются бифуркациями модели (2), связанными с потерей устойчивости состояния равновесия, образованием петли сепаратрисы седло-фокуса и слиянием устойчивого и седлового состояний равновесия. Проанализировано изменение поведения системы при переходе через границы областей захвата и удержания. В области неустойчивости синхронного режима выделены область периодических квазисинхронных режимов, примыкающая к области захвата, и область со сложной динамикой модели (2), в которой у системы существуют периодические и хаотические несинхронные режимы колебательного, вращательного и колебательно-вращательного типа. Обнаружена сложная картина перестройки динамического поведения системы при движении с изменением параметров внутри области со сложной динамикой, свидетельствующая о неоднородной структуре этой области.

Сравнительный анализ результатов, полученных при исследовании модели (2), с результатами исследования динамики отдельной системы фазовой автоподстройки частоты с фильтром второго порядка, полученными в [12], показывает, что многие динамические режимы и явления, обнаруженные в такой системе (потеря устойчивости синхронного режима, бифуркационные механизмы возникновения несинхронных режимов, квазисинхронные режимы с проворотом фазы), свойственны и системе ФАП–АРУ. Это свидетельствует о сильном влиянии свойств поведения цепи фазового управления на динамику системы ФАП–АРУ. Наряду с этим установлена возможность существования в системе ФАП–АРУ двухчастотных квазисинхронных и асинхронных режимов, обусловленная наличием цепи автоматического регулирования амплитуды. Выяснено, что в процессах возникновения и развития таких режимов значительную роль играют параметр связи и начальная частотная расстройка. Примечательно, что, в отличие от отдельной системы ФАП, система ФАП–АРУ демонстрирует различное поведение в зависимости от знака начальной частотной расстройки γ . Это связано с отсутствием у модели (2) свойства симметрии структуры разбиения пространства параметров относительно замены $\gamma \rightarrow -\gamma$.

Для применения системы ФАП–АРУ в задачах следящей оценки параметров принимаемого сигнала наибольший интерес представляют результаты о границах области захвата C_s , которая является характеристикой устойчивости реализуемого системой ФАП–АРУ алгоритма оптимальной обработки по отношению к вариациям параметров системы, и результаты об изменении характера динамики системы при переходе границ областей захвата и удержания. Эти результаты также дают представление об особенностях поведения системы в процессе вхождения в режим слежения и после нарушения этого режима. В плане расширения круга возможного применения рассматриваемой системы представляют интерес приведенные в работе результаты о развитии и преобразовании несинхронных режимов в области со

сложной динамикой модели (2) при изменении параметров инерционности, степени связи и начальной частотной расстройки. Эти результаты могут быть использованы при решении задач управления свойствами и областями существования различных несинхронных режимов с помощью изменения указанных параметров системы с целью ее перевода в желаемый стационарный режим.

Библиографический список

1. *Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А.* Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972.
2. *Линдсей В.* Системы синхронизации в связи и управлении. М.: Сов. радио, 1978.
3. Системы фазовой синхронизации / Под ред. В.В. Шахгильдяна, Л.Н. Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982.
4. *Тихонов В.И., Кульман Н.К.* Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. М.: Сов. радио, 1975.
5. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос. Новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002.
6. *Ярлыков М.С.* Применение марковской теории нелинейной фильтрации в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1980.
7. *Кульман Н.К., Жеронкина Н.Н.* Помехоустойчивость оптимального приема квазигармонического процесса со взаимно коррелированными амплитудой и фазой // Радиотехника и электроника. 1969. Т. 14, № 11. С. 2050.
8. *Постнов Д.Э., Баланов А.Г.* Синхронизация в хаотических системах со счетным числом состояний равновесия // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 1. С. 69.
9. *Пономаренко В.П.* О режимах работы и области захвата системы фазовой синхронизации с целью автоматического регулирования усиления (АРУ) // Радиотехника и электроника. 1986. Т. 21, № 10. С. 2023.
10. *Дмитриев А.С., Широков М.Е.* Выбор генератора для прямохаотической системы связи // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 7. С. 840.
11. *Дмитриев А.С., Клецов А.В., Кузьмин Л.В.* Генерация сверхширокополосного фазового хаоса в дециметровом диапазоне // Радиотехника и электроника. 2009. Т. 54, № 7. С. 709.
12. *Матросов В.В., Шалфеев В.Д.* Динамический хаос в фазовых системах: Учебное пособие. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 2007.
13. *Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. Москва; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009.
14. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
15. Динамика нелинейных систем. Программный комплекс для исследования нелинейных динамических систем с непрерывным временем: Учебно-методическая разработка / Сост. В.В. Матросов. Н.Новгород: ННГУ, 2002.

*НИИ Прикладной математики
и кибернетики ННГУ*

*Поступила в редакцию 28.09.2009
После доработки 23.03.2010*

BIFURCATIONS AND OSCILLATORY MODES IN COMPLEX SYSTEM WITH PHASE CONTROL

V.P. Ponomarenko

The results are produced of research of dynamical modes and bifurcation in a complex system with phase control, based on mathematical model with two degrees of freedom in the cylindrical phase space. The location of domains corresponding to different dynamical states of the system is established. The processes developing in the system as a result of loss stability of the synchronous mode, and scenarios of evolution of nonsynchronous modes under variation of system parameters are investigated. The possibility to stimulate the generation of various periodic and chaotic oscillations changing the parameters of control loops inertia, coupling power and the initial frequency detuning is revealed.

Keywords: Systems with phase control, dynamic states, stability, bifurcation, attractors, synchronous and nonsynchronous modes, dynamical chaos.

Пономаренко Валерий Павлович – родился в Мурманске (1941), окончил Горьковский университет (1963). С 1968 года работает в Научно-исследовательском институте прикладной математики и кибернетики при Нижегородском университете (НИИ ПМК при ННГУ). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук (1972) и доктора физико-математических наук (1993) в области теории синхронизации, теории колебаний и динамики систем. С 1991 года – заместитель директора НИИ ПМК при ННГУ. Область научных интересов – теория колебаний и волн, применение нелинейной динамики в радиоавтоматике синхронизация автоколебательных систем, математическое моделирование. Один из авторов монографий «Фазовая синхронизация» и «Системы фазовой синхронизации». Опубликовал много научных статей по направлениям, указанным выше.

603005, Н. Новгород, ул. Ульянова, 10
НИИ Прикладной математики и кибернетики при ННГУ
E-mail: povp@uic.nnov.ru





НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОХОЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ СЛОЙ С КВАДРАТИЧНОЙ И ДРОБНО-ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТЯМИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

М.В. Давидович, Ю.В. Стефюк

Рассмотрены и решены интегральные уравнения для дифракции сильной плоской электромагнитной волны на слое с дробно-полиномиальной и кубической нелинейностями. Решения получены несколькими численными методами: последовательных приближений, минимальных невязок, разложением в степенной ряд, Рунге–Кутты, типа Штермера, а также в ряде случаев аналитически. Показана возможность сверхэкспоненциального затухания, ограничения мощности и ряд других эффектов, характерных для полупроводниковой плазмы в режиме ударной ионизации.

Ключевые слова: Нелинейное волновое уравнение, дифракция, электромагнитное туннелирование, полупроводниковая плазма, ударная ионизация, ограничение мощности, жесткие дифференциальные уравнения.

Введение

Нелинейные задачи дифракции для сильных электромагнитных волн (ЭМВ) возникают в ряде областей знаний: теории плазмы [1–3], физике твердого тела [4,5], оптике [6–8], магнитостатике [9], квантовой электронике [10]. Как обобщение сказанного – это электродинамика нелинейных и неоднородных сред и структур [1,3–18]. Нелинейность приводит к многочастотности и нестационарности. Нестационарный подход универсален и не дает усложнений алгоритма при переходе от линейных моделей к нелинейным [19]. Он предпочтителен решению большого числа связанных спектральных уравнений и формулируется, например, в виде метода конечных элементов или конечных разностей в пространственно-временной области. В ряде случаев нелинейная задача может рассматриваться как одночастотная в спектральной области [3–7,11–18]. Примером служит прохождение (туннелирование) монохроматической ЭМВ через газоразрядную или полупроводниковую плазму [3,4]. Здесь греющее поле приводит к зависимости диэлектрической проницаемости от усредненного за период квадрата электрического поля. Ниже рассмотрен этот случай нелинейности с формулировкой в виде одномерных интегральных уравнений

и дифференциальных уравнений в спектральной области, которые решены итерационными методами на основе интегральных уравнений, методом Рунге–Кутты и предложенными новыми алгоритмами типа Штермера. Для одномерных нелинейных задач хорошо развиты приближенные методы [3,4,11–17] и широко используются прямые явные и неявные одношаговые, многошаговые и многозначные численные методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений типа метода Рунге–Кутты, Штермера, Адамса–Мултона, Гира и другие. Они весьма эффективны и для них имеются хорошо разработанные пакеты программ. Решение координатных трехмерных задач методами типа интегральных соотношений [20] и следующими из него методами (полос, прямых, неполным методом Галеркина) также возможно с использованием подобных алгоритмов [15–17]. Актуальным здесь является развитие итерационных алгоритмов: метода прямой итерации, метода минимальных невязок, метода наискорейшего спуска.

Цель данной работы состоит в получении и исследовании ограничения мощности и сверхэкспоненциального затухания прошедшей волны при дробно-линейной зависимости ϵ от квадрата электрического поля. Исследование осуществлено численно и аналитически с целью моделирования ограничителей мощности (например, в виде полупроводниковых включений в плоскопараллельном волноводе) на примере полупроводника InSb, для чего рассмотрены и исследованы дробно-полиномиальная и (как ее частный случай) кубическая (типа Керра) нелинейности. Задача формулируется на основе интегральных уравнений и решается несколькими методами интегрирования, включая метод рядов, что позволило кроме численных результатов получить и ряд аналитических решений. Анализ характерен для сильной плоской ЭМВ в слое полупроводниковой плазмы InSb в условиях ударной ионизации. Результаты по ограничению мощности хорошо совпадают с данными, полученными ранее для двух полупроводниковых пластин в прямоугольном волноводе неполным методом Галеркина на основе других зависимостей диэлектрической проницаемости с насыщением [16,17]. В качестве численных методов использовались: метод Рунге–Кутты четвертого порядка, метод Штермера пятого порядка, метод прямой итерации и метод минимальных невязок в случае нелинейности Керра, а также предложенные в работе методы интегрирования волнового уравнения и алгоритмы седьмого и восьмого порядков. Эти алгоритмы сравнены по точности и эффективности со стандартной схемой метода Рунге–Кутты, а также с результатами работы [13].

Моделирование реальных полупроводниковых устройств является сложной трехмерной нелинейной задачей для линий передачи. Ее численная реализация осуществляется обычно на основе проекционных методов: метода моментов для интегральных уравнений, неполного метода Галеркина [15,17] в сочетании с решением получаемых нелинейных дифференциальных уравнений и т.п. В последнем случае связанная система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет высокий порядок (равный числу учтенных мод) и требует многократного решения с неизвестными начальными условиями для минимизации невязок граничных условий [15–17]. В силу этого разработка и исследование новых методов и алгоритмов нелинейной дифракции ЭМВ, в том числе и основанных на итерационных подходах, является актуальной задачей, что также является целью настоящей работы. На актуальность разработки новых эффективных алгоритмов даже для одномерных плоскостойких линейных структур указывается, например, в недавних публикациях [21–24]. В [24] дан сравнительный анализ эффективности ряда применяемых подходов (прямые ме-

тоды для дифференциальных уравнений, метод матриц передачи, ВКБ, метод, использованный в работе [23]), а также и итерационных подходов для метода рядов, метода интегральных уравнений неоднородных линий и интегральных уравнений на основе уравнения Риккати. Заметим, что в [23] допущена неточность (см. [24]). В ряде случаев быстрой сходимости итерационные алгоритмы весьма эффективны и могут существенно превосходить проекционные. Таким образом, обозначенная комплексная цель работы является актуальной.

1. Постановка задачи, дифференциальные и интегральные уравнения

Рассмотрим падение плоской электромагнитной волны на слой нелинейного диэлектрика толщины d . Предположим, что материальное уравнение для указанного диэлектрика имеет вид

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t)) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

где $\varepsilon(\tilde{u})$ – диэлектрическая проницаемость, скалярная функция квадрата электрического поля $\tilde{u} = \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t)$. Соотношение (1) означает пренебрежение процессами запаздывания (мгновенное установление поляризации). Иначе (1) должно представлять собой интегральный оператор, связывающий электрическую индукцию и поле [1] с нелинейным ядром. Если на слой падает циркулярно поляризованная ЭМВ, то квадрат поля и ε не зависят от времени [4]. Часто для плазмы можно считать [4], что процессы поляризации вещества не успевают за быстропеременным полем, а ε зависит от усредненного за период квадрата поля $u = \langle \tilde{u} \rangle$ (скобки означают усреднение за период $T_0 = 2\pi/\omega$) и определяется разогревом вещества, процессами рассеяния, генерации и рекомбинации. Средний квадрат поля есть функция только продольной координаты z . Решение задачи для линейно поляризованной волны будем искать в виде

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{x}_0 E(z, t) = \mathbf{x}_0 \text{Re} [E(z) \exp(j(\omega t - \gamma(z)))], \quad (2)$$

где введено комплексное поле $E(z) = |E(z)| \exp(j\varphi)$, \mathbf{x}_0 – орт-вектор оси x , при этом

$$\langle \mathbf{E}(z, t) \rangle = u(z) = |E(z)|^2 / 2. \quad (3)$$

Можно считать функцию $E(z)$ действительной, то есть $\varphi \equiv 0$. Комплексная функция $\dot{E}(z) = E(z) \exp(-j\gamma(z))$ с амплитудой $E(z)$ удовлетворяет волновому уравнению [4]

$$d^2 \dot{E}(z) / dz^2 + k_0^2 \varepsilon(u) \dot{E}(z) = 0, \quad (4)$$

в котором ε может зависеть от частоты $\omega = ck_0$ и быть комплексной. Рассмотренное нелинейное уравнение (4) Гельмгольца (Шредингера) исследовалось и решалось различными численными и приближенными аналитическими методами (см. [3–18]), среди которых эффективны прямые методы интегрирования. Слабая нелинейность исследуется разложением ε в ряд Тейлора по u в окрестности нуля. Оставляя члены до первого порядка, получим модель Керра. Рассмотрим подобную зависимость ε при положительном параметре нелинейности p :

$$\varepsilon(u(z)) = \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(2)} u^p(z) = \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(2)} (E^2(z)/2)^p, \quad (5)$$

а также и более общую феноменологическую зависимость ε с насыщением

$$\varepsilon(E) = \left[\left(\sqrt[s]{\varepsilon^{(0)}} + \sqrt[s]{\varepsilon_{\infty}} (E/E_0)^p \right) / (1 + r (E/E_0)^q) \right]^s.$$

Безразмерные величины $\varepsilon^{(0)}$ и ε_{∞} характеризуют ε соответственно в бесконечно слабом и сильном полях. Если $p = q$, то $r = 1$, и в сильном поле ε достигает значения насыщения ε_{∞} . При $q = 0$ следует полагать $r = 0$, а в остальных случаях этот параметр произвольный. Величина E_0 соответствует некоторому внутреннему характеристическому полю [4,17]. Если $p = q = 0$ или $r = \varepsilon_{\infty} = 0$, то реализуется линейный случай. Введение феноменологических зависимостей позволяет обойти решение кинетических уравнений при исследовании процессов в полупроводниковой плазме. В работах [16,17] рассмотрены две другие подобные феноменологические модели и неполным методом Галеркина с использованием решения дифференциальных уравнений на основе метода Рунге–Кутты исследовано ограничение мощности устройством в виде отрезка прямоугольного волновода с двумя частично заполняющими его поперечное сечение тонкими полупроводниковыми пластинами. Толщина пластин много меньше размера широкой стенки, поэтому уравнения в [16,17] не очень жесткие. Далее (5) будем рассматривать в случае $p = 1$. Интегрируя уравнение (4) дважды в пределах от нуля до z , получаем интегральное уравнение

$$\dot{E}(z) = \dot{E}(0) + \dot{E}'(0)z - k_0^2 \int_0^z dz' \int_0^{z'} dz'' \left[\varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(2)} \left| \dot{E}(z'') \right|^{2p} / 2 \right] \dot{E}(z''). \quad (6)$$

Здесь $\left| \dot{E}(z) \right| = E(z)$, штрих у поля означает производную по z , а точка – комплексную амплитуду. Рассмотрим решение интегрального уравнения (6) в виде ряда по z и решим методом последовательных приближений. Тогда для $p = 1$ и приближения k внутри слоя

$$\dot{E}^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^N e_n^{(k)} z^n, \quad \left| \dot{E}^{(k)}(z) \right|^2 = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N e_n^{(k)} e_m^{(k)*} z^{n+m}. \quad (7)$$

В качестве нулевого приближения возьмем $\dot{E}^{(0)}(z) = e_0^{(0)} + e_1^{(0)}z = \dot{E}(0) + \dot{E}'(0)z$. Все остальные коэффициенты в (7) при $k = 0$ равны нулю. Пусть слой имеет небольшую электрическую толщину $k_0 d \sim 1$. Тогда число членов в (7) можно взять порядка нескольких десятков. Подставляя приближение k в (6), получим для приближения $k + 1$ рекуррентную формулу

$$e_i^{(k+1)} = -k_0^2 \varepsilon^{(0)} \frac{e_{i-2}^{(k)}}{i(i-1)} - \frac{k_0^2 \varepsilon^{(2)}}{2} \sum_{\substack{l=0, m=0, n=0 \\ l+m+n+2=i}}^N \frac{e_l^{(k)} e_m^{(k)*} e_n^{(k)}}{(l+m+1)(l+m+2)},$$

$$i = 2, 3, \dots, \quad (8)$$

где $e_0^{(k)} = e_0^{(0)} = \dot{E}(0)$, $e_1^{(k)} = e_1^{(0)} = \dot{E}'(0)$. Сшивая электрическое поле при $z = 0$ и $z = d$, найдем

$$A(1+R) = e_0^{(0)} = \dot{E}(0), \quad AT^{(k)} = E(d) \sum_{n=0}^N e_n^{(k)} d^n. \quad (9)$$

Здесь k означает порядок приближения. В (9) коэффициент отражения R (в отличие от коэффициента прохождения T) не зависит от номера приближения k и определяется амплитудой поля при $z = 0$ и амплитудой падающей волны A . Зависимость рассматриваемых величин от N и k_0 явно не указана. Магнитное поле имеет только компоненту y : $\dot{H}_y(z) = (-j\omega\mu_0)^{-1} \dot{E}'(z)$. Сшивая магнитное поле при $z = 0$ и $z = d$, получим

$$\begin{aligned} A(1 - R) &= e_1^{(0)} (-jk_0)^{-1} = \dot{E}'(0) (-jk_0)^{-1}, \\ AT^{(k)} &= \dot{E}'(d) \dot{E}'(0) (-jk_0)^{-1} = \sum_{n=1}^N n e_n^{(k)} d^{n-1}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} Z &= (1 + R) / (1 - R) = -jk_0 e_0^{(0)} / e_1^{(0)}, \\ 1 &= -jk_0 \sum_{n=0}^N e_n^{(k)} d^n / \sum_{n=1}^N n e_n^{(k)} d^{n-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Если известны значения $e_0^{(0)}$ и $e_1^{(0)}$, то они не изменяются в рекуррентных формулах и определяют все другие коэффициенты, а также входной нормированный импеданс Z и коэффициент отражения $R = (Z - 1) / (Z + 1)$. Из (10) определяется амплитуда A и коэффициент T . Но $e_0^{(0)}$ и $e_1^{(0)}$ изначально неизвестны. Значение $e_0^{(0)}$ связано с амплитудой падающей волны, поэтому должно задаваться при решении уравнения (6), тогда как $e_1^{(0)}$ необходимо определять. Для этого используем (11). Тогда

$$e_1^{(k)} = - \left(jk_0 e_0^{(0)} + \sum_{n=2}^N e_n^{(k)} d^{n-1} [jk_0 d + n] \right) / (1 + jk_0 d), \quad (12)$$

и в качестве нулевого приближения следует взять $e_1^{(0)} = -jk_0 e_0^{(0)} / (1 + jk_0 d)$. Таким образом, задавая $e_0^{(0)}$, определяем $e_1^{(0)}$, и по формулам (8) находим $e_i^{(1)}$, $i = 2, 3, 4, 5$. Далее определяем $e_1^{(1)}$ и с помощью (8) получаем второе приближение и т.д.

Как иллюстрацию рассмотрим линейный случай $\varepsilon^{(2)} = 0$. Полагая $e_0^{(0)} = 1$ и $e_1^{(0)} = 0$, получим решение $E_0(z) = \cos(k_0 z \sqrt{\varepsilon^{(0)}})$. Полагая $e_0^{(0)} = 0$ и $e_1^{(0)} = 1$, найдем другое решение: $E_1(z) = \sin(k_0 z \sqrt{\varepsilon^{(0)}}) / k_0$. Общее решение есть $\dot{E}(z) = A_0 E_0(z) + A_1 E_1(z)$, где A_0, A_1 – некие комплексные коэффициенты, однозначно определяемые через $A, E(d)$ и $E'(d)$,

$$A(1 + R) = A_0, \quad AT = A_0 E_0(d) + A_1 E_1(d), \quad (13)$$

$$A(1 - R) = A_1 E_1'(d) / (-jk_0), \quad AT = [A_0 E_0'(d) + A_1 E_1'(d)] / (-jk_0). \quad (14)$$

Отметим основные свойства предложенного подхода. Он весьма прост и дает параметры рассеяния тонкого слоя, которые можно представить матрицей передачи, зависящей от амплитуды падающей волны. Доказать сходимость можно в предположении слабой нелинейности $\varepsilon^{(0)} \ll |\varepsilon^{(2)}| \left| \dot{E}(z'') \right|^{2p}$, при этом сходимость при электрической длине $k_0 d \sqrt{\varepsilon^{(0)}} \sim 1$ весьма быстрая. При $k_0 d \sqrt{\varepsilon^{(0)}} \ll 1$ требуется всего две-три итерации и учет нескольких членов ряда [24]. Применять его для

$k_0 d \sqrt{\varepsilon^{(0)}} \gg 1$ не целесообразно. В этом случае отрезок d надо разбить на малые области размера Δd , ($k_0 \Delta d \ll 1$) и применять алгоритм последовательно.

Рассмотрим основанный на (6) прямой метод интегрирования, обозначив $\Delta d = h$, $(d^k/dz^k) \dot{E}(z)_{z=(m-1)h} = a_m^k$, $\eta_m^k = (\partial^k/\partial E)\varepsilon(E(z))_{E=E_{m-1}^{(0)}}$, предполагая зависимость $\varepsilon(E(z))$ и разложив решение в окрестности каждой точки $z = kh$ в ряд Тейлора: $\dot{E}(z) = a_k^0 + a_k^1 z + a_k^2 z^2/2 + \dots$. Формулы алгоритма седьмого порядка для первых трех членов имеют вид

$$\begin{aligned} a_m^2 &= -k_0^2 \eta_m^0 a_m^0, \\ a_m^3 &= -k_0^2 (\eta_m^0 + \eta_m^1 a_m^0) a_m^1, \\ a_m^4 &= -k_0^2 \{ (\eta_m^0 + \eta_m^1 a_m^0) a_m^2 + [2\eta_m^1 + \eta_m^2 a_m^0] a_m^{12} \}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Для подынтегрального выражения в интегральном уравнении (6) при целом p получаются простые явные схемы любого порядка точности. Так, при $p = 1$ для схемы восьмого порядка для первых трех членов имеем

$$\begin{aligned} a_m^2 &= -k_0^2 (\varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(2)} a_m^{02}) a_m^0, \\ a_m^3 &= -k_0^2 (\varepsilon^{(0)} + 3\varepsilon^{(2)} a_m^{02}) a_m^1, \\ a_m^4 &= -k_0^2 [(\varepsilon^{(0)} + 3\varepsilon^{(2)} a_m^{02}) a_m^2 + 6\varepsilon^{(2)} a_m^0 a_m^{12}], \\ &\dots \end{aligned}$$

Достоинством подхода является согласованность формул с видом интегральных уравнений. Его отличие от метода Штермера в том, что последний аппроксимирует подынтегральную функцию полиномом Ньютона (а не Тейлора) с использованием квадратурной формулы. Хотя порядок формул определяется их построением, для его проверки использовался процесс Эйткена расчета на кратных шагах. Оценивалась также невязка дифференциальных уравнений (1) по чебышевской и среднеквадратичной нормам (по норме Чебышева точного и численных решений «1», а также среднеквадратичная «2» и чебышевская «3» невязки для уравнения (4) в зависимости от числа шагов интегрирования). Оценки показали, что метод эффективнее стандартного метода Рунге–Кутты на 2–3 порядка. Результаты даны в таблице.

Таблица

Метод	Метод Рунге–Кутты 4-го порядка			Метод 8-го порядка		
	1	2	3	1	2	3
N						
20	$2.2 \cdot 10^{-4}$	$6.1 \cdot 10^{-4}$	$2.0 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-5}$	$4.7 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-4}$
40	$1.4 \cdot 10^{-5}$	$3.7 \cdot 10^{-5}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$9.2 \cdot 10^{-8}$	$1.8 \cdot 10^{-7}$	$5.5 \cdot 10^{-7}$
80	$8.7 \cdot 10^{-7}$	$2.3 \cdot 10^{-6}$	$7.8 \cdot 10^{-6}$	$2.5 \cdot 10^{-11}$	$7.3 \cdot 10^{-11}$	$2.2 \cdot 10^{-10}$

Рассмотрим другой подход к решению данной задачи, основанный на методе объемного интегрального уравнения [19]. Метод объемного интегрального уравнения основан на представлении дифрагированного поля через токи поляризации с помощью функций Грина [24] и пригоден для любой размерности и анизотропии. В силу одночастотности ток поляризации содержит одну основную гармонику, поэтому можно использовать спектральную скалярную функцию Грина $G(\omega, \mathbf{r})$. Поскольку поля не зависят от x и y , объемное интегральное уравнение является одномерным с функцией Грина $g(\omega, z) = -j \exp(-jk_0 |z|) / (2k_0)$ [24] и имеет вид

$$\dot{E}(z) = A \exp(-jk_0 z) + k_0^2 \int_0^d g(\omega, z - z') \left[\varepsilon^{(0)} - 1 + \varepsilon^{(2)} \left| \dot{E}(z') \right|^2 / 2 \right] \dot{E}(z') dz'. \quad (15)$$

Первое слагаемое в (15) определяет падающее поле с явным заданием его амплитуды, а второе (интеграл) – поле дифракции. Падающее поле может быть взято как начальное приближение в методах итераций. Коэффициент отражения определяется через решение интегральных уравнений (15) как амплитуда бегущей влево волны в точке $z = 0$

$$R = A^{-1} k_0^2 \int_0^d g(\omega, 0 - z') \left[\varepsilon^{(0)} - 1 + \varepsilon^{(2)} \left| \dot{E}(z') \right|^2 / 2 \right] \dot{E}(z') dz'. \quad (16)$$

Соответственно коэффициент прохождения есть амплитуда бегущей вправо волны, взятая при $z = d$. Рассмотрим линейный случай. Тогда интегральное уравнение (15) и соответственно уравнения (4) и (6) имеют точное решение: $\dot{E}(z) = A^+ \exp(-j\gamma z) + A^- \exp(j\gamma z)$, где

$$\begin{aligned} A^+ &= 2A \left(\sqrt{\varepsilon^{(0)}} - 1 \right) / \left\{ (\varepsilon^{(0)} - 1) [1 - R_0^2 \exp(-2j\gamma d)] \right\}, \\ A^- &= A^+ R_0 \exp(-2j\gamma d), \\ \gamma &= k_0 \sqrt{\varepsilon^{(0)}} = \omega \sqrt{\varepsilon^{(0)}} / c, \\ R_0 &= (k_0 - \gamma) / (k_0 + \gamma) = \left(1 - \sqrt{\varepsilon^{(0)}} \right) / \left(1 + \sqrt{\varepsilon^{(0)}} \right). \end{aligned}$$

Величина R_0 представляет собой коэффициент отражения от границы раздела: вакуум-диэлектрик. Это решение соответствует задаче о падении плоской волны на однородный слой линейного диэлектрика и получается также сшиванием. Через это решение определяется коэффициент отражения от слоя

$$R^{(l)} = k_0^2 \left(\varepsilon^{(0)} - 1 \right) A^{-1} \int_0^d g(\omega, -z') \dot{E}(z') dz' = \frac{-j \tan(\gamma d) (\varepsilon^{(0)} - 1)}{2\sqrt{\varepsilon^{(0)}} + j (\varepsilon^{(0)} + 1) \tan(\gamma d)}, \quad (17)$$

и коэффициент прохождения

$$T^{(l)} = 2 / \left[2 \cos(\gamma d) + j \left(\sqrt{\varepsilon^{(0)}} + 1 / \sqrt{\varepsilon^{(0)}} \right) \sin(\gamma d) \right],$$

где индекс l означает линейный случай. Это линейное приближение также может быть использовано в качестве начального приближения при решении как интегрального уравнения (15), так и (6).

Комплексное уравнение (4) записывается в виде двух уравнений для действительных функций $E(z)$ и $\gamma(z)$, которые в случае недиссипативных сред интегрируются в квадратурах [4]

$$z(E) = \pm \frac{1}{2} \int_{E^2(0)/2}^{E^2/2} \frac{du}{[Wu - k_0^2 (\varepsilon^{(0)}u^2 + \varepsilon^{(2)}u^3/2) - M^2]^{1/2}}, \quad (18)$$

$$\gamma(z) = \gamma(0) \pm \frac{M}{4} \int_{E^2(0)/2}^{E^2/2} \frac{du}{u [Wu - k_0^2 (\varepsilon^{(0)}u^2 + \varepsilon^{(2)}u^3/2) - M^2]^{1/2}}. \quad (19)$$

Здесь W и M – некие константы интегрирования, при этом $z \geq 0$. Константы W , M , $E(0)$, $\gamma(0)$, а также $E(d)$ и $\gamma(d)$ определены условиями $A(1+R) = \dot{E}(0) = E(0) \exp(-j\gamma(0))$, $AT = \dot{E}(d) = E(d) \exp(-j\gamma(d))$, определяющими R, T, A , или соответственно условиями

$$\begin{aligned} -jk_0A(1-R) &= \dot{E}'(0) = \\ &= \left\{ \pm \sqrt{2W - k_0^2 \left[\varepsilon^{(0)}E^2(0) + \varepsilon^{(2)}\frac{E^4(0)}{4} \right] - \frac{M^2}{E^2(0)} - \frac{jM}{E(0)}} \right\} \exp(-j\gamma(0)), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} -jk_0A(1-R) &= \dot{E}'(d) = \\ &= \left\{ \pm \sqrt{2W - k_0^2 \left[\varepsilon^{(0)}E^2(d) + \varepsilon^{(2)}\frac{E^4(d)}{4} \right] - \frac{M^2}{E^2(d)} - \frac{jM}{E(d)}} \right\} \exp(-j\gamma(d)), \end{aligned}$$

$$\gamma(d) = \gamma(0) \pm \frac{M}{4} \int_{E^2(0)/2}^{E^2(d)/2} \frac{du}{u [Wu - k_0^2 (\varepsilon^{(0)}u^2 + \varepsilon^{(2)}u^3/2) - M^2]^{1/2}}$$

$$d = \pm \frac{1}{2} \int_{E^2(0)/2}^{E^2(d)/2} \frac{du}{[Wu - k_0^2 (\varepsilon^{(0)}u^2 + \varepsilon^{(2)}u^3/2) - M^2]^{1/2}}.$$

В качестве примера исследуем возможность экспоненциального и квазиэкспоненциального затухания волны в слое бесстолкновительной полупроводниковой плазмы. Для ε имеет место общее соотношение [4]

$$\varepsilon(E(z)) = [M^2 - E^3(z)E''(z)] / (k_0^2 E^4(z)). \quad (21)$$

Будем искать решение в форме $E''(z) = M^2/E^3(z) - \varepsilon_r k_0^2 E(z) + c^2 \omega_p^2(E(z))E(z)$. Тогда ε представляется как $\varepsilon(E(z)) = \varepsilon_r - \omega_p^2(E(z))/\omega^2$ с нелинейной зависимостью плазменной частоты от поля. Здесь ε_r – относительная диэлектрическая проницаемость кристаллической решетки. Учитываются только носители заряда одного

типа, имеем для квадрата плазменной частоты $\omega_p^2(E) = n(E) e^2 / (\varepsilon_0 m_e)$. Функция $n(E)$ может иметь разные виды в зависимости от механизмов рассеяния носителей [4]. Одна из простейших феноменологических зависимостей концентрации от поля имеет вид

$$n(E) = \left[n_0^{1/q} + n_2 E^2(z) \right]^q. \quad (22)$$

Случаю кубической нелинейности соответствует $q = 1$, при этом n_0 – концентрация в слабом поле. Для (22) возможны как рост, так и падение ($n_2 < 0$) концентрации с увеличением поля. При $q = -1$ также возможно уменьшение и увеличение концентрации (при $n_2 < 0$) с ростом поля. Для экспоненциального затухания с декрементом α из (21) имеем

$$\varepsilon(E(z)) = (M^2/E^4(z) - \alpha^2) k_0^2. \quad (23)$$

При $M \neq 0$ (имеется поток вектора Пойтинга \mathbf{P}) указанный закон физически не реализуем, поскольку функция (23) не ограничена в нуле, то есть экспоненциального решения быть не может. При $M = 0$ имеем $P_z = 0$, и в линейном случае $\alpha = \sqrt{\gamma_0^2 - k_0^2 \varepsilon_r} > 0$, $k_0^2 \varepsilon_r < \gamma_0^2$. В случае кубической нелинейности имеем $E''(z) = M^2/E^3(z) - \varepsilon_r k_0^2 E(z) + \omega_{p0}^2 c^{-2} E(z) [1 + E^2(z)/E_0^2]$, где ω_{p0} – малосигнальная плазменная частота, $E_0 = \sqrt{n_0/n_2}$. При $M = 0$, $W = 0$ из (18) получаем реализуемое при $\omega \sqrt{\varepsilon_r} < \omega_{p0}$ решение в двух формах

$$z(E) = \frac{2cE_0}{\omega_{p0}} \int_E^{E(0)} \frac{dE}{E \sqrt{b^2 + E^2}} = -\frac{2cE_0}{b\omega_{p0}} \ln \left(\frac{\sqrt{b^2 + E^2(0)} + b}{\sqrt{b^2 + E^2(0)} - b} \cdot \frac{\sqrt{b^2 + E^2(z)} - b}{\sqrt{b^2 + E^2(z)} + b} \right),$$

$$E(z) = 2b \left\{ \frac{\sqrt{b^2 + E^2(0)} - b}{\sqrt{b^2 + E^2(0)} + b} \right\}^{1/2} \left[1 - \frac{\sqrt{b^2 + E^2(0)} - b}{\sqrt{b^2 + E^2(0)} + b} \exp(-az) \right]^{-1} \exp(-az/2),$$

где $b^2 = (2E_0^2/\omega_{p0}^2) (\omega_{p0}^2 - \varepsilon_r \omega^2) > 0$, $a = b\omega_{p0}/(2cE_0)$.

Нетрудно видеть, что это решение удовлетворяет граничному условию при $z = 0$. При $M = 0$ в силу $P_z = 0$ набег фазы волны $\gamma(z) = \gamma(0)$ постоянен, а модуль коэффициента отражения равен единице, что соответствует входному импедансу

$$Z = \frac{1 + R}{1 - R} = \frac{jk_0(1 - D^2)^2 E(0)}{abD(1 + D^2)}.$$

Здесь обозначено $D = (\sqrt{b^2 + E^2(0)} - b) / (\sqrt{b^2 + E^2(0)} + b)$. При $z > 0$ волнового движения нет, а поля E и H находятся в квадратуре. Этот случай не реализуется для конечного слоя.

В диссипативном случае точный интеграл (18) не имеет места, а вместо него возникает нелинейное интегральное уравнение

$$E(z) = E(0) \pm \int_0^z dz' \left\{ 2W(z') - 2k_0^2 \int_0^{E(z')} v \varepsilon'(v) dv - \frac{M^2(z')}{E^2(z')} \right\}^{1/2}, \quad (24)$$

в котором введены монотонно убывающие (для диссипативных сред) функции

$$M(z) = M(0) - k_0^2 \int_0^z \varepsilon''(E(z')) E^2(z') dz',$$

$$W(z) = W(0) - k_0^2 \int_0^z M(z') \varepsilon''(E(z')) dz'.$$

Как нетрудно видеть, величина $W(z)$ определяет квадрат производной поля

$$W(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{dE(z)}{dz} \right)^2 + \frac{M^2(z)}{2E^2(z)} + k_0^2 \int_0^{E(z)} \varepsilon'(v) v dv.$$

Подкоренное выражение в интегральном уравнении (24) неотрицательно, так как оно совпадает с величиной $(dE(z)/dz)^2$. Получив его решение, найдем определенную с точностью до $\gamma(0)$ фазу

$$\gamma(z) = \gamma(0) + \int_0^z [M(z')/E^2(z')] dz'.$$

Постоянные $E(0)$ и $M(0)$ также определяют производную фазы. Удобно считать амплитуду падающей волны A действительной. Обозначим $R = |R| \exp(j\varphi)$. Тогда постоянная $\gamma(0)$ связана с фазой коэффициента отражения соотношением $\tan(\gamma(0)) = -|R| \sin(\varphi) / (1 + |R| \cos(\varphi))$. Поскольку на слой падает волна только слева, физический смысл имеет решение с условием $M(z) \geq 0$ (заметим, что в нелинейном случае возможно равенство $M(d) = 0$). При этом также всегда имеет место условие $0 \leq M(z) \leq M(0) \leq k_0 E^2(0)$, так как

$$A^2 = (1 - |R|^2) M(0) =$$

$$= k_0 E^2(0) (1 + \tan^2(\gamma(0))) / \left[1 + \sqrt{|R|^2 - (1 - |R|^2) \tan^2(\gamma(0))} \right]^2.$$

Рассмотрим смысл констант интегрирования, входящих в (24). Величина $E(0)$ определяет амплитуду, $M(0)$ – продольную компоненту вектора Пойтинга $P_z(0)$, а $W(0)$ – квадрат производной поля в нуле. Знак этой производной определяется знаком в интегральном уравнении (24). Обозначим P_{z0} усредненную за период компоненту вектора Пойтинга слева от слоя. Поскольку $P_{z0} = 0.5A^2/Z_0 = (1 - |R|^2) P_z(0)$ и $M(z) = 2\omega\mu_0 P_z(z) = 2k_0 Z_0 P_z(z)$, $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$, то для коэффициента прохождения по мощности имеем соотношение $|T|^2 = P(d)/P_0 = (1 - |R|^2) M(d)/M(0)$. Если потери отсутствуют, то M сохраняется и выполняется уравнение баланса мощности $|R|^2 + |T|^2 = 1$.

Как видно, для решения (6) или (24) необходимо задать две константы (например, $E(0)$ и $M(0)$, или $E(0)$ и $E'(0)$, и т.д.). Действительно, имеет место связь

$$(k_0 E(0))^2 + (E'(0))^2 + (\gamma'(0) E(0))^2 = 2(k_0 A)^2 \left[1 + (E(0)/A - 1)^2 \right],$$

при этом сразу получается $|R|$. Это означает, что решение уравнения (24) в произвольном случае, вообще говоря, не есть решение задачи дифракции. Действительно, из сшивания полей при $z = d$ следуют два условия, которым должно удовлетворять такое решение: $E'(d) = 0$, $\gamma'(d) = k_0$. Поэтому удобно задать $E(d)$ и $\gamma(d)$, переформулировав интегральное уравнение (24) относительно начальной точки $z = d$. Это позволяет найти все величины в нуле. Постоянная $E(d)$ определяет величины A и R , а постоянная $\gamma(d)$ – их фазы.

Рассмотрим случай экспоненциального убывания потока мощности: $M(z) = M(0) \exp(-\alpha z)$. Тогда имеем функциональное уравнение

$$E(z) = \sqrt{\alpha M(0) / [k_0^2 \varepsilon''(E(z))]} \exp(-\alpha z/2), \quad (25)$$

из которого можно найти функцию $E(z) = F(z, \alpha, k_0, M(0))$. Пусть, например, $\varepsilon''(E(z)) = \varepsilon_0'' + \varepsilon_2'' E^2(z)$. Тогда из (26) следует, что $E^2(z)$ определяется как положительный корень квадратного уравнения. Если $\varepsilon''(E(z)) = \varepsilon_0'' + \varepsilon_1'' E(z)$, то $E(z)$ определяется по формулам Кардано как положительный корень кубического уравнения. При малой нелинейности это ближайший корень к значению (25) с проницаемостью ε_0'' . Подставляя решение (24) в (25), получим

$$F(z, \alpha, k_0, M(0)) = F(0, \alpha, k_0, M(0)) + \pm \int_0^z dz' \left\{ 2W(z') - 2k_0^2 \int_0^{F(z', \alpha, k_0, M(0))} v \varepsilon'(v) dv - \frac{M^2(0) \exp(-2\alpha z')}{F^2(z', \alpha, k_0, M(0))} \right\}^{1/2}. \quad (26)$$

Это есть интегральное уравнение для определения функции $\varepsilon'(E)$. Экспоненциальное убывание потока мощности не может достигаться при произвольных функциональных зависимостях ε от поля, поскольку их реальные части должны удовлетворять (26). Например, если $\varepsilon''(E(z)) = \varepsilon_0'' + \varepsilon_2'' E^2(z)$, то, обозначая $E_0 = \sqrt{\varepsilon_0'' / (2\varepsilon_2'')}$, найдем

$$E(z) = \sqrt{\sqrt{E_0^4 + \exp(-\alpha z) \alpha M(0) / (k_0^2 \varepsilon_2'')} - E_0^2}, \quad (27)$$

$$E'(z) = -\frac{\alpha}{4E} \frac{(E^2(z) + E_0^2)^2 - E_0^4}{E^2(z) + E_0^2},$$

$$E''(z) = -\frac{E'^2}{E} - \frac{8E'^3 (E^2 + E_0^2)^2 + E_0^4}{E^2 \alpha (E^2 + 2E_0^2)^2},$$

$$\varepsilon'(E) = \frac{\alpha^2}{16k_0^2} \left[\frac{E^2 + 2E_0^2}{E^2 + E_0^2} \right]^2 \left\{ 1 - \frac{2}{(E^2 + 2E_0^2)} \frac{(E^2 + E_0^2)^2 + E_0^4}{(E^2 + E_0^2)} + 16 \left(\frac{k_0^2 \varepsilon_2''}{\alpha^2} \right)^2 (E^2 + E_0^2)^2 \right\}.$$

Диэлектрическая постоянная должна изменяться от значения $\varepsilon'(0) = \alpha^2 / (4k_0^2) \times \left\{ -1 + 4 (k_0^2 \varepsilon_0'' / \alpha^2)^2 \right\}$ в слабом поле до значений без насыщения в сильном поле

$$\varepsilon'(E) = \alpha^2 / (16k_0^2) \left\{ -1 + 16 (k_0^2 \varepsilon_2'' / \alpha^2)^2 E^4 \right\}. \quad (28)$$

Случаю линейных потерь $\varepsilon_2'' = 0$ соответствует ε слабого поля (28), при этом поле (27) ограничено. Действительно, при $\varepsilon_2'' \rightarrow 0$ имеем $E_0 \rightarrow \infty$, и из (27) получаем экспоненциально затухающее решение $E(z) = \sqrt{\alpha M(0) / (k_0^2 \varepsilon_0'')} \exp(-\alpha z / 2)$. Этот закон физически реализуем только в линейном случае, при этом для больших потерь $\varepsilon_0'' > \alpha^2 / (2k_0^2)$ и $\varepsilon' > 0$. В отсутствие потерь указанный режим возможен только при отрицательной диэлектрической постоянной $\varepsilon' = -\alpha^2 / (4k_0^2)$. В этом случае для константы затухания имеем $\alpha^2 = 4\omega_{p0}^2 / c^2 - 4k_0^2 \varepsilon_r > 0$. В диссипативном нелинейном случае реализуется сверхэкспоненциальное затухание. При произвольной $\varepsilon(E) = \varepsilon'(E) - j\varepsilon''(E)$ нелинейные уравнения (6), (15), (18)–(19), (24) решаются итерационными и прямыми методами интегрирования. Для попадания в окрестность сходимости удобны методы спуска из нескольких начальных приближений с выбором оптимальной точки.

2. Численные результаты

Введем функцию $\eta(z) = |\varepsilon^{(2)}| \left| \dot{E}(z) \right|^2 / (2 |\varepsilon^{(0)}|)$, определяющую отношение амплитуд нелинейной и линейной частей электрического поля в точке z , а также безразмерный коэффициент нелинейности $\eta = \eta(0) = |\varepsilon^{(2)}| \left| e_0^{(0)} \right|^2 / (2 |\varepsilon^{(0)}|)$. Он зависит от амплитуды падающего поля и коэффициента отражения, поскольку $\left| e_0^{(0)} \right| = \left| \dot{E}(0) \right| = |A(1+R)|$. Для произвольной зависимости ε определим эту функцию в виде $\eta(z) = [\varepsilon(E(z)) - \varepsilon(0)] / \varepsilon(0)$. Интегральное уравнение (15) решалось путем дискретизации с применением метода Галеркина. Использована наиболее простая кусочно-постоянная (ступенчатая) дискретизация, основанная на кусочно-постоянных конечных элементах, а также применена и кусочно-линейная аппроксимация в виде соответствующих конечных элементов. В результате получены две дискретные формулировки в виде системы нелинейных алгебраических уравнений, которые решались методом прямой итерации в форме метода последовательных приближений, а также с использованием метода минимальных невязок. Сходимость метода прямой итерации и метода минимальных невязок в случае компактных линейных отображений доказана. В нелинейном случае параметр итерации метода минимальных невязок определялся из кубического уравнения по формулам Кардано, поэтому возникала проблема выбора одного корня. В предположении малой невязки в качестве такового брался корень, ближайший к линейному решению.

На рис. 1 приведены результаты метода последовательных приближений при вычислении поля в области $0 \leq z \leq d$ для уравнения (15) при $kd = 2$ и $\varepsilon^{(0)} = 2$ для разных нелинейностей. Для $e_{i0} = 1$ метод последовательных приближений сходится в случае $-1.193002809... < \varepsilon^{(2)} < 0$ и $0 < \varepsilon^{(2)} < 0.087626...$ В приведенных результатах сходимость достигалась за несколько десятков итераций. В качестве начальной итерации взято падающее поле. Использование метода наименьшего спуска и метода минимальных невязок с линеаризацией позволило за 3–5 итераций получить реше-

ние в области значений, где метод последовательных приближений расходится. На рис. 2 представлены коэффициенты отражения и прохождения по мощности, а также баланс мощности $|R|^2 + |T|^2 \approx 1$. Указанные результаты сравнивались с решениями уравнения (4) описанным выше методом 8-го порядка, методом Рунге–Кутты 4-го порядка и методом Штермера 5-го порядка для линейного случая $\varepsilon = 4$, $k_0d = 10$ с известным аналитическим решением. Соответствующие данные для невязки численных и точного решений в чебышевской норме и для невязки уравнения (4) в чебышевской и среднеквадратичной нормах, представленные в таблице, показывают, что эффективность первого метода на порядки выше стандартного метода Рунге–Кутты. На рис. 3 представлены вычисления для аналогичного слоя с зависимостью ε от поля в виде $\varepsilon(E^2) = (\varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(\infty)}E^2) / (1 + E^2)$. Здесь $\varepsilon^{(0)}$ – диэлектрическая проницаемость в слабом поле, $\varepsilon^{(\infty)}$ – проницаемость в бесконечно сильном поле. Рис. 3

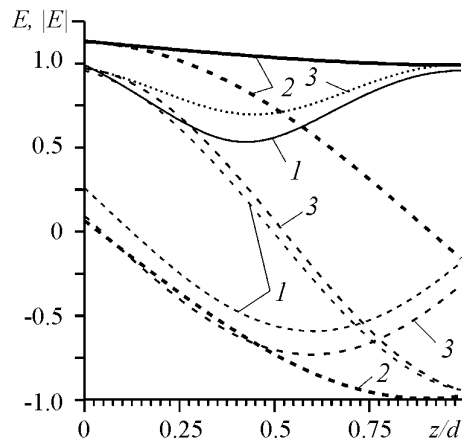


Рис. 1. Распределение модуля электрического поля (сплошные кривые), его реальной (штрих) и мнимой (пунктир) частей вдоль пластины при различных нелинейностях для $k_0d = 2, \varepsilon^{(0)} = 2$: 1 – линейный случай ($\varepsilon^{(2)} = 0$); 2 – $\varepsilon^{(2)} = -0.5$, $e_{i0} = 1.5$; 3 – $\varepsilon^{(2)} = 0.05$, $e_{i0} = 1$

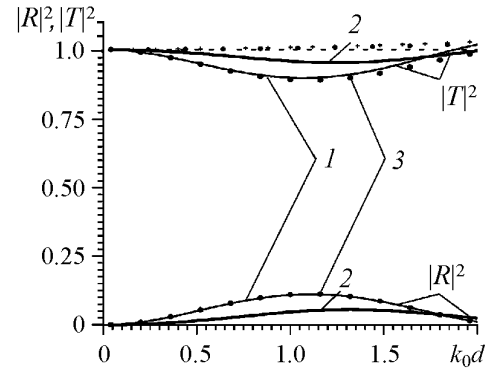


Рис. 2. Коэффициент отражения, коэффициент прохождения по мощности и баланс мощности для решения уравнения (17) при различных нелинейностях для $\varepsilon^{(0)} = 2$: 1 – линейный случай ($\varepsilon^{(2)} = 0$); 2 – $\varepsilon^{(2)} = -0.5$, $e_{i0} = 1$; 3 – $\varepsilon^{(2)} = 0.01$, $e_{i0} = 1$. Штриховая линия, звездочки и крестики – полная мощность $|R|^2 + |T|^2$ соответственно для случаев 1, 2, 3

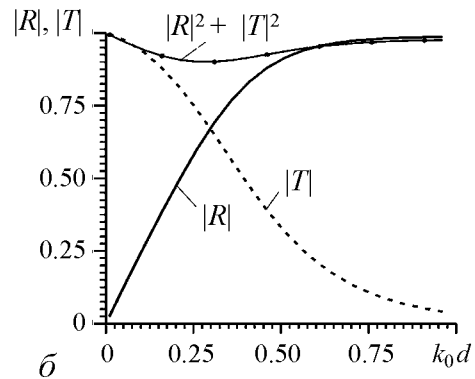
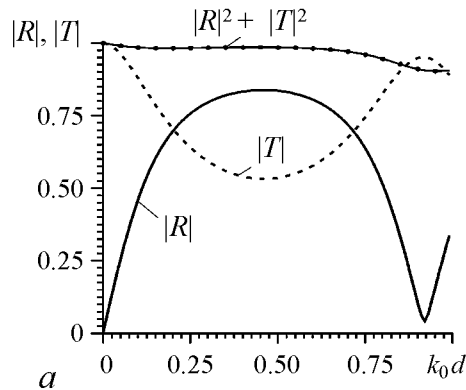


Рис. 3. Частотные зависимости модулей коэффициентов отражения и прохождения и баланса мощности при различных уровнях падающей мощности для слоя с параметрами $\varepsilon^{(0)} = 12 - 0.2j$, $\varepsilon^{(\infty)} = -20 - 1j$ и $\chi = 1$: а – слабый сигнал, б – сильный сигнал

иллюстрирует управление передачей мощности при изменении интенсивности падающей волны. В приведенных результатах амплитуда падающей волны изменялась от 0.1 (случай *a*) до 10 (случай *b*). Соответственно η изменялся до значений много меньших единицы до величин, существенно ее превышающих. Для изучения ограничения мощности использовалась частотно зависящая формула ε вида

$$\varepsilon(E) = \varepsilon_r - \omega_{0p}^2 / [\omega(\omega - j\omega_{0c})] - \omega_{0p}^2 \tilde{n} / [\omega(\omega - j\omega_{0c} \tilde{n}^\alpha)],$$

$$\tilde{n} = 1 + (n_\infty - 1) E^p / (E_0^p + E^p).$$
(29)

Здесь $\varepsilon_r = 17 - 0.01j - \varepsilon$ кристаллической решетки, $\omega_{0p} = 500$ и $\omega_{0c} \sim 50 - 100$ ГГц – плазменная частота и частота столкновений в слабом поле, \tilde{n} – относительное

увеличение концентрации при ударной ионизации, E_0 – внутренне поле, параметр α связан с диссипацией за счет рассеяния и рассматривался в пределах $0 < \alpha < 1$, $n_\infty = 100$ – относительное увеличение концентрации в сильном поле. Взятые параметры качественно соответствуют слою полупроводниковой плазмы в InSb при азотной температуре. Соответствующие результаты по ограничению мощности представлены на рис. 4. Как видно, уровень ограничения слабо зависит от α , n_∞ и определяется в основном начальными частотами ω_{0p} и ω_{0c} , а также длиной. Для всех результатов $0.46 < |R| < 0.57$, что говорит об ограничении в основном за счет потерь. На рис. 5 приведено распределение электрического поля и его модуля для одной точки графика рис. 4. Результаты рис. 5 получены приведенным выше прямым методом 7-го порядка. Использовано 3000 точек и 1500 точек, при этом кривые практически совпали. Звездочками обозначены расположенные через 60 шагов точки на менее точных кривых. Результаты дополнительно контролировались методом наискорейшего спуска, методом Рунге–Кутты и методом Штермера 5-го порядка. Для получения совпадения результатов метода Рунге–Кутты с двойной точностью в трех значащих цифрах потребовалось 150000 точек.

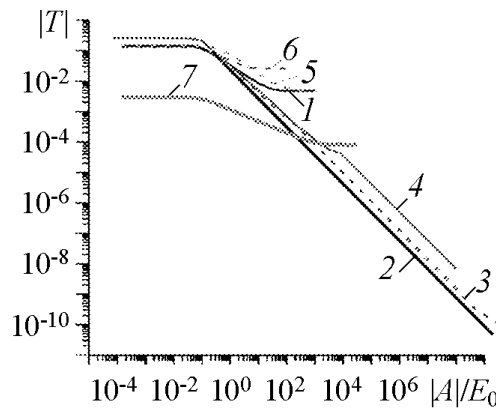


Рис. 4. Ограничение мощности волны в полупроводниковой плазме на длине $d = 2$ см при различных параметрах: $\alpha = 1$ (1, 4–7); $\alpha = 0.5$ (2); $\alpha = 0.8$ (3) и $n_\infty = 100$ (1–4, 6, 7), $n_\infty = 10$ (5), а также различных малосигнальных значений плазменной частоты (в ГГц) $\omega_{0p} = 300$ (1–3, 5, 6); $\omega_{0p} = 500$ (7) и частоты столкновений $\omega_{0c} = 100$ (1–3, 5, 7); $\omega_{0c} = 50$ (4); $\omega_{0c} = 150$ (6). Использованы параметры: $\omega = 150$ ГГц, $k_0 d = 10$

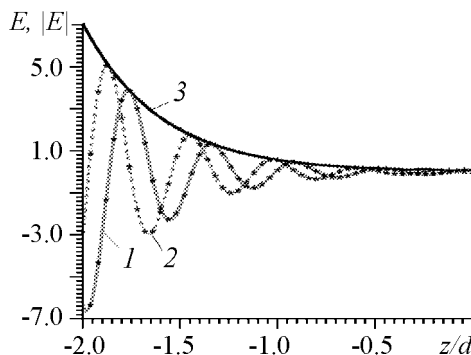


Рис. 5. Зависимость распределения электрического поля: 1 – $\text{Re}(\dot{E}(z))$, 2 – $\text{Im}(\dot{E}(z))$, 3 – $|\dot{E}(z)|$ от нормированной координаты при $A/E_0 = 14$, $k_0 d = 10$, $n_\infty = 100$, $\omega = 150$, $\omega_{0p} = 300$, $\omega_{0c} = 100$ (в ГГц)

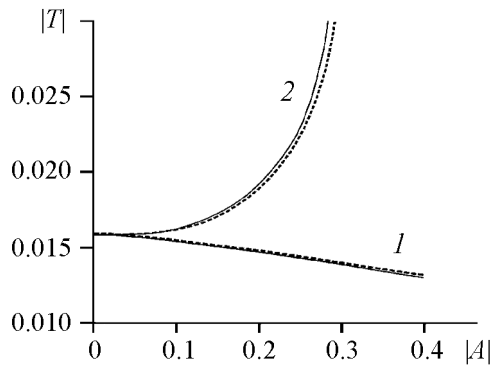


Рис. 6. Результаты сравнения данных работы [13] (сплошные линии) зависимости коэффициента прохождения от амплитуды с предложенным методом седьмого порядка (штриховые) при $N = 1500$. В наших обозначениях данные из [13] соответствуют значению $k_0 d = 10$ и параметрам: $\varepsilon^{(0)} = -11.1$, $\varepsilon^{(2)} = 4.033$ (1); $\varepsilon^{(0)} = 13.1$, $\varepsilon^{(2)} = -4.033$ (2)

Сравнение результатов, полученных с двойной точностью методом 8-го порядка, с оцифрованными данными из [13] приведено на рис. 6. Результаты [13] получены модифицированным методом Гира – многошаговым неявным методом интегрирования назад переменного порядка в представлении Нордсика. Следует заметить, что решенные выше явными схемами задачи не были очень жесткими, поскольку использовалось интегрирование назад при плавном затухании поля в прямом направлении из-за потерь, а значение $k_0 d = 1$ (вполне достаточное для ограничения мощности) не является большим. Для очень жестких дифференциальных уравнений схемы Розенброка с комплексными коэффициентами предпочтительнее методу Гира.

Выводы

1. Численно и аналитически исследовано ограничение мощности при дифракции плоской волны на пластине с обобщенной дробно-полиномиальной зависимостью диэлектрической проницаемости от амплитуды электрического поля, имеющей насыщение и моделирующей полупроводниковый слой InSb в условиях ударной ионизации сильным полем при азотной температуре. Показано, что характер ограничения качественно соответствует ограничению при дифракции волны H_{10} в прямоугольном волноводе с имеющими насыщение экспоненциальными зависимостями [16,17]. Аналитически и численно показаны возможность сверхэкспоненциального затухания в пластине и эффективное ограничение мощности.

2. Получены оригинальные итерационные алгоритмы интегрирования нелинейного волнового уравнения и соответствующего ему интегрального уравнения на основе модификации метода рядов для нелинейного интегрального уравнения в области, а также и прямые схемы типа Штермера 7 и 8-го порядков, основанные на интегральном уравнении и разложении Тейлора в окрестности левого узла. Указанные схемы не требуют дополнительных начальных условий, могут быть адаптированы для переменного шага и высокого требуемого порядка точности, а также для нескольких шагов. В случае разложения исходного интегрального уравнения около правого узла получают соответствующие неявные схемы. Неявную схему 3-го порядка для нелинейности Керра можно разрешить относительно вычисляемого значения. Достоинством схем является явный учет структуры волнового уравнения и типа нелинейности. Это же приводит и к недостатку в плане переносимости: при изменении уравнения (например, появлении члена с первой производной) необходимо заново получать схему. Для задачи дифракции сильной плоской ЭМВ на слое нелинейного диэлектрика исследовано влияние нелинейности Керра на дифракцию от амплитуды поля. Результаты с точностью до оцифровки графика соответствуют

данным из [13]. Исследованы и получены границы сходимости метода последовательных приближений для нелинейности Керра, связанные с устойчивостью метода последовательных приближений для соответствующего кубического уравнения. Показана существенная эффективность предложенных алгоритмов применительно к рассмотренным задачам в сравнении с методом Рунге–Кутты 4-го порядка.

3. Получено и решено итерационными методами объемное одномерное интегральное уравнение. Решение трехмерных нелинейных задач проекционными методами интегральных соотношений (частными случаями которых являются метод прямых и неполный метод Галеркина) и методом сеток сталкивается с трудностями для открытых некоординатных задач и анизотропных сред. Одна из альтернатив здесь – метод объемных интегральных уравнений, обладающий универсальностью постановки, но имеющий при дискретизации объемными конечными элементами большую размерность. Его реализация возможна с использованием итерационных процедур [25]. Решение 3-D задач методом объемных интегральных уравнений с размерностью СЛАУ порядка 10^5 – 10^6 в литературе продемонстрировано.

Авторы выражают благодарность Е.Ю. Альтшулеру за обсуждение вопросов, связанных с параметрами твердотельной плазмы.

Библиографический список

1. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М. Физматгиз, 1960. 550 с.
2. Ахиезер А.И., Ахиезер И.А., Половин Р.В., Ситенко А.Г., Степанов К.Н. Электродинамика плазмы. М.: Наука, 1974. 720 с.
3. Литвак А.Г. Динамические нелинейные электромагнитные явления в плазме // Вопросы теории плазмы. Вып. 10. М.: Атомиздат, 1980. С. 164.
4. Басс Ф.Г., Гуревич Ю.Г. Горячие электроны и сильные электромагнитные волны в плазме полупроводников и газового разряда. М.: Наука, 1975. 400 с.
5. Любченко В.Е., Мартяхин В.А. Усиление миллиметровых волн при взаимодействии с дрейфующими электронами в слоистых полупроводниковых диэлектрических волноводах // РЭ. 1993. Т. 38, № 10. С. 1900.
6. Глуценко А.Г. Теория волноведущих структур СВЧ с нелинейными пленками // Изв. Вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31, № 9. С. 1098.
7. Смирнов Ю.Г. О распространении электромагнитных волн в цилиндрических диэлектрических волноводах, заполненных нелинейной средой // РЭ. 2005. Т. 50, № 2. С. 196.
8. Лерер А.М. Простой метод исследования распространения электромагнитных волн в нелинейных диэлектрических средах // РЭ. 1997. Т. 42, № 6. С. 649 .
9. Макеева Г.С., Голованов О.А. Электродинамический анализ взаимодействия электромагнитных волн с нелинейными гиромагнитными включениями в волноведущих структурах // РЭ. 2006. Т. 51, № 3. С. 261.
10. Никогосян А.С. Генерация УКИ миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов в волноводе, частично заполненном нелинейным кристаллом // Квантовая электроника. 1988. Т. 15, № 5. С. 969.
11. Молотков И.А., Вакуленко С.А. Сосредоточенные нелинейные волны. Л.: Изд-во Ленинградск. ун-та, 1988. 240 с.

12. *Молотков И.А., Вакуленко С.А.* Нелинейные локализованные волновые процессы. М.: Янус-К, 1999. 176 с.
13. *Молотков И.А. Маненков А.Б.* О нелинейных туннельных эффектах // РЭ. 2007. Т. 52, № 7. С. 799.
14. *Мионов В.А.* От нелинейном просветлении плоского плазменного слоя // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. Т. 14. 1450.
15. *Исаков М.В. Пермяков В.А.* Численный анализ распространения Н-волны в прямоугольном волноводе с включением нелинейного диэлектрика // Изв. вузов. РФ. 1988. Т. 31, № 9. С. 1139.
16. *Альтиулер Е.Ю., Давидович М.В.* Дифракция сильной электромагнитной волны на полупроводниковых элементах в прямоугольном волноводе // Успехи современной радиоэлектроники. 2008. № 10. С. 39.
17. *Альтиулер Е.Ю., Давидович М.В.* Нелинейная дифракция электромагнитной волны на полупроводниковом элементе в прямоугольном волноводе // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2008. Т. 11, № 4. С. 64.
18. *Голованов О.А.* Электродинамический анализ нерегулярных волноводов и резонаторов с нелинейными средами // РЭ. 1990. Т. 35, № 9. С. 1853.
19. *Давидович М.В.* Метод конечных элементов в пространственно-временной области для нестационарной электродинамики // ЖТФ. 2006. Т. 76, вып. 1. С. 13.
20. *Белоцерковский О.М. Давыдов Ю.М.* Метод крупных частиц в газовой динамике. Вычислительный эксперимент. М.: Наука, 1982. 392 с.
21. *Тихонровов А.В., Трубецков М.К.* Новые задачи многослойной оптики // РЭ. 2005. Т. 50, № 2. С. 265.
22. *Голант Е.И., Голант К.М.* Новый метод расчета спектра и радиационных потерь вытекающих мод многослойных оптических волноводов // ЖТФ. 2006. Т. 86, вып. 8. С. 99.
23. *Лаговский Б.А.* Поглощающие и просветляющие плавно неоднородные покрытия для электромагнитных волн // РЭ. 2006. Т. 51, № 1. С. 74.
24. *Давидович М.В., Алексутова С.В.* Дифракция плоских волн на неоднородном магнитодиэлектрическом слое: сравнительный анализ методов // Излучение и рассеяние электромагнитных волн ИРЭМВ-2007. Труды международной конференции. Таганрог: ТРТУ, 2007. С. 357.
25. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975. 558 с.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию 3.12.2008
После доработки 2.03.2010*

**NONLINEAR ELECTROMAGNETIC WAVE PASSING THROUGH
THE LAYER WITH QUADRATIC AND FRACTIONALLY-POLYNOMIAL
PERMITTIVITY DEPENDENCES ON AMPLITUDE**

M.V. Davidovich, J.V. Stephuk

The integral equations for powerful flat electromagnetic wave diffraction on nonlinear dielectric layer with cubic nonlinearity and fractionally-polynomial permittivity dependence

on wave amplitude have been considered and solved. There are results which have been obtained by several numerical methods: series approaching, minimal discrepancy, power series expansion, and Runge–Kutt methods. Also the some analytical results are presented. The possibilities of power limiting, super-exponential damping and some other effects in semi-conducting plasma have been shown by numerical simulation.

Keywords: Nonlinear wave equation, diffraction, electromagnetic tunneling, semiconductor plasma, impact ionization, power limiting, stiff differential equations.

Давидович Михаил Владимирович – родился в Саратове (1950). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета по специальности физика (специализация – теоретическая и ядерная физика, 1972). С 1972 по 1974 служил в СА. Около 20 лет проработал на предприятиях электронной промышленности Саратова. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в области радиофизики (1991) и доктора физико-математических наук в области применения вычислительной техники, математического моделирования и математических методов в научных исследованиях (2000). Профессор кафедры радиотехники и электродинамики СГУ, профессор (2002), Соросовский доцент (2000), Соросовский профессор (2001), Member, IEEE (1995), Senior Member, IEEE (2001), IEEE MTT/ED/AP/CPMT Saratov-Penza Chapter Vice Chair, профессор РАН (2009). Область научных интересов – решение краевых задач, интегральные и интегродифференциальные уравнения, метод конечных элементов, вариационные методы, электродинамика и оптика волноведущих и неоднородных структур в спектральной области, решение обратных задач, микроволновое зондирование, нестационарная нелинейная электродинамика структур и диспергирующих сред. Автор более 250 работ по указанным направлениям, опубликованных в отечественной и зарубежной печати. Редактор сборника «Modeling in Applied Electromagnetics and Electronics», член редакционной коллегии журнала «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия физика».

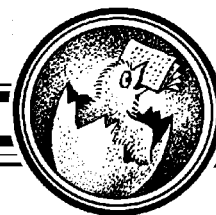
410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: davidovichmv@info.sgu.ru



Стефюк Юлия Валентиновна – родилась в Саратове (1973), окончила СГУ (2004), в настоящее время является начальником отдела в правительстве Саратовской области и учится в заочной аспирантуре кафедры радиотехники и электродинамики СГУ. Имеет 13 научных публикаций. Область научных интересов – численные методы, итерационные методы в электродинамике.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: ystephuk@yandex.ru





**О ВЛИЯНИИ ОТРАЖЕНИЙ И ЗАТУХАНИЯ В ЛОВ
НА ВЕЛИЧИНУ ПЕРВОГО РЕЗОНАНСНОГО ПИКА
АМПЛИТУДЫ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА
НА НАЧАЛЬНОМ ЭТАПЕ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА**

А.А. Васильев, С.С. Волощук

Сделана попытка оценить влияние затухания и отражений на величину резонансного пика в зависимости амплитуды выходного сигнала от времени в модели ЛОВО.

Ключевые слова: Лампа обратной волны, резонансный пик излучения, начальный этап переходного процесса.

Введение

Уже в первых работах по нестационарной теории лампы обратной волны (ЛОВ) применительно к ЛОВ М-типа и ЛОВ О-типа (см. [1–3]) было показано, что на определенном временном интервале имеет место резкий всплеск амплитуды выходного сигнала (рис. 1). Как следует из расчётов, пиковое значение мощности превосходит в несколько раз постоянную мощность пучка. В последнее время к упомянутому эффекту проявляется повышенный интерес (см., например, [4]). В настоящей работе сделана попытка оценить влияние затухания и отражений на величину резонансного пика в зависимости амплитуды выходного сигнала от времени в модели ЛОВО.

Для описания системы была выбрана рассмотренная в [1] модель, позволяющая рассчитывать характеристики колебаний, а также положения частиц в дискретных точках. Вычисления производились в узлах двумерной решётки, что позволило получить значения амплитуды поля в дискретных координатах в дискретные моменты времени. Запишем исходные уравнения для ЛОВ [1]:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial q}\right)^2 \Phi_m &= -\operatorname{Re}(F e^{i\Phi_m}), \\
\frac{1}{u} \frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial q} + dF &= -\frac{2}{M} \sum_{m=1}^M e^{-i\Phi_m}, \\
\Phi_m|_{q=0} &= \frac{2\pi m}{M}, \\
\left[\frac{\partial \Phi_m}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial q}\right]_{q=0} &= 0, \\
F|_{q=l} &= 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

где q и τ – безразмерные координата и время, F – амплитуда поля, Φ_m – фаза электрона, d – коэффициент затухания, u – отношение групповой скорости волны $V_{гр}$ к скорости пучка V_0 .

Записанные граничные условия соответствуют лампе без отражений: поле на коллекторном конце равно нулю. Для введения отражений необходимо переписать последнее граничное условие в виде:

$$\begin{aligned}
F(l, \tau) &= e^{-\alpha l} R_0 R_l F\left(0, \tau - \frac{l}{V}\right) e^{j \cdot (\psi + \psi + 2\beta l)}, \\
u &= V/V_0,
\end{aligned} \tag{2}$$

R_0, R_l – модули коэффициентов отражения, ϕ_k, ϕ_n – фазы коэффициентов отражения, $\phi_k + \phi_n + 2\beta l = \varphi$ – фаза сдвига, $R_0 R_l = r$ – коэффициент отражения.

Граничное условие, в таком виде определяющее перенос энергии поля от выходного конца лампы в коллекторный конец и обратно, соответствует дополнительной внутренней обратной связи; то есть поле представляет собой суперпозицию волн, распространяющихся в прямом и обратном направлениях. Будем считать, что прямая волна не взаимодействует эффективно с электронным потоком, поскольку находится с ним в рассинхронизме.

В данной работе рассмотрены режимы установления колебаний в ЛОВО в зависимости от различных параметров системы: длины лампы, затухания, коэффициента отражения (дополнительной обратной связи). Однако особый интерес представляет исследование параметров выходной амплитуды лампы на начальном этапе установления колебаний. Из полученных зависимостей амплитуды колебания от времени при некоторых параметрах ЛОВО можно выделить временной отрезок, на котором амплитуда колебаний намного больше амплитуды установившихся колебаний (или максимума амплитуды последующих автоколебаний) (см. рис. 1). Была рассмотрена зависимость значений полученного максимума от параметров (коэффициен-

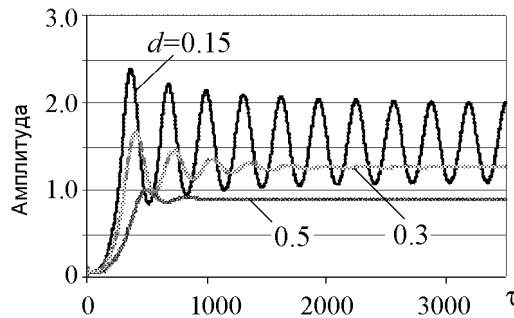


Рис. 1. Зависимость амплитуды выходного сигнала от времени (в безразмерных единицах) на начальном этапе колебаний при различных значениях коэффициента затухания d

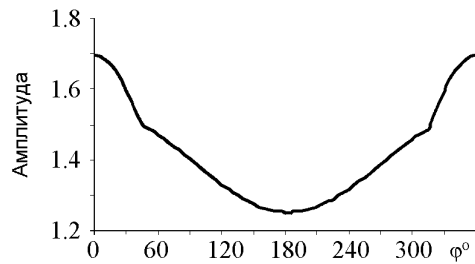


Рис. 2. Зависимость амплитуды колебаний от φ

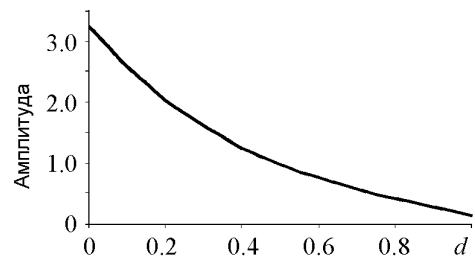


Рис. 3. Зависимость максимальной амплитуды колебаний от коэффициента затухания

та затухания и фазы отражений) лампы. Полученные зависимости представлены на рис. 2 и рис. 3.

На рис. 2 представлена зависимость максимума выходной амплитуды колебаний от сдвига фазы при отражениях (φ). Рассматриваемый отрезок фаз $[0^\circ, 360^\circ]$ можно разбить на три промежутка: $[0^\circ, 50^\circ]$, $[50^\circ, 310^\circ]$, $[310^\circ, 360^\circ]$. График, представленный на рис. 2, при φ , принадлежащем отрезку $[0^\circ, 50^\circ]$ или $[310^\circ, 360^\circ]$, отражает зависимость выходного максимума, приходящегося не на первый всплеск амплитуды, а на какой-либо последующий. В то же время при фазе отражений φ , лежащей в пределах отрезка $[50^\circ, 310^\circ]$, график, представленный на рис. 2, отражает зависимость первого всплеска амплитуды колебаний от φ . Как видно, минимум амплитуды колебаний достигается при $\varphi = 180^\circ$, поскольку волны при данном φ складываются в противофазе.

На рис. 3 представлена зависимость максимума амплитуды выходного сигнала от коэффициента затухания d . При значениях d близких к 1 становится невозможным выделить начальный всплеск амплитуды колебаний. Таким образом, для наблюдения всплеска выходной амплитуды необходимо использовать лампы, обладающие небольшими значениями коэффициента затухания.

Также в данной работе были определены области существования начального максимума выходной амплитуды (рис. 4) при этом для простоты расчётов затухание в системе считается пренебрежимо малым.

Точки, лежащие под представленным на рис. 4 графиком, соответствуют параметрам лампы, при которых начальный максимум выходной амплитуды существует (и при этом является абсолютным максимумом выходной амплитуды).

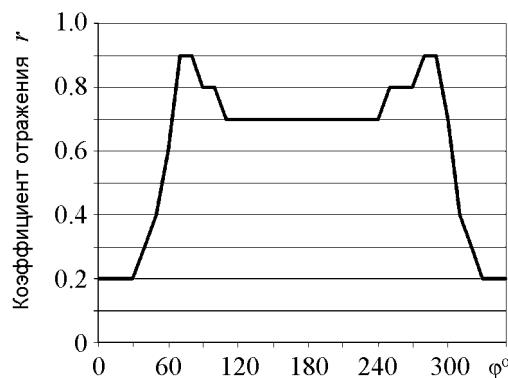


Рис. 4. Области существования начального пика выходной амплитуды

Наряду с этим были определены области одинаковых значений максимума выходной амплитуды (рис. 5).

На рис. 5 представлены области одинаковых значений максимума выходной амплитуды в плоскости «коэффициент отражения – фаза». Как можно видеть из данного рисунка, при фазе отражений, близкой к 90° и 270° градусам, удаётся получить первый резонансный максимум выходной амплитуды лампы даже при очень больших значениях коэффициента отражения, чего при этих же коэффициентах отражения

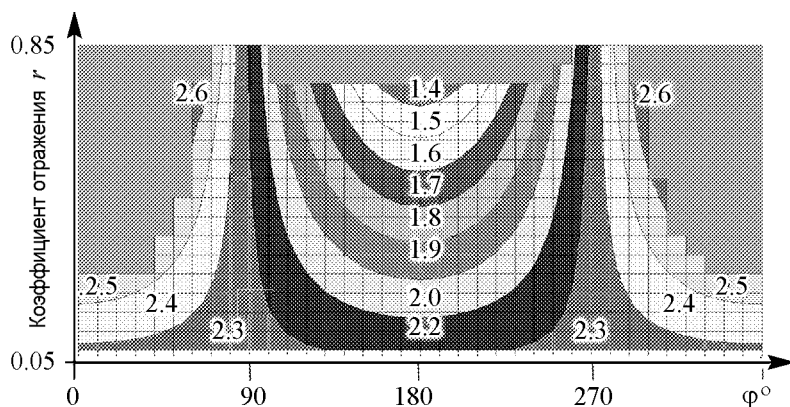


Рис. 5. Области одинаковых значений максимума выходной амплитуды

нельзя получить при другой фазе отражения. Также видно, что амплитуда поля при фазе отражений, близкой к 90 или 270 градусам, мало меняется при различных значениях коэффициента отражения и лежит вблизи значения 2.3. Примечательно, что максимум выходного сигнала лампы при отсутствии отражения также лежит в окрестности значения 2.3.

Библиографический список

1. Кузнецов С.П., Трубецков Д.И. Две лекции по нестационарной теории взаимодействия электронных пучков с электромагнитными волнами. В книге «Лекции по электронике СВЧ. 3-я зимняя школа-семинар инженеров». Кн. 5. Изд-во СГУ, 1974. С. 88.
2. Электроника ламп с обратной волной / Под ред. В.Н. Шевчика и Д.И. Трубецкова. Гл. III. Изд-во СГУ, 1975.
3. Безручко Б.П., Гинзбург Н.С., Кузнецов С.П. Теоретическое и экспериментальное исследование переходных процессов в ЛОВО-генераторе. В кн. «Лекции по электронике СВЧ. 4-я зимняя школа-семинар инженеров». Кн. 5. Изд-во СГУ. 1978. С. 236.
4. Korovin S.D. et al. Generation of Cherenkov superradiance pulses with a peak power exceeding the power of driving short electron beam // Phys. RevE. 2006. Vol. 74. 016501.

Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию
После доработки

15.04.2010
20.05.2010

INFLUENCE BOTH OF REFLECTIONS AND DISSIPATION IN THE BACKWARD-WAVE OSCILLATOR ON FIRST RESONANCE PEAK OF AMPLITUDE AT THE TRANSIENT BEGINNING

A.A. Vasiliev, S.S. Voloshchuk

In the present work an effort to analyze dissipation and the wave reflection influence on the first resonant pulse in the time dependence of the output signal of the BWO has been taken.

Keyword: Backward-wave oscillator, resonance peak, transient beginning.



Васильев Андрей Алексеевич – родился в 1990 году в Саратове, после окончания лицея прикладных наук в 2008 году поступил в Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского на факультет нелинейных процессов, студент 2го курса.

410021 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: andrew_vasiliev@rambler.ru



Волощук Сергей Сергеевич – родился в 1990 году в Саратове, после окончания лицея прикладных наук в 2008 году поступил в Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского на факультет нелинейных процессов, студент 2го курса.

410021 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: ss.voloshchuk@gmail.com



Серия «Библиотека факультета глобальных процессов МГУ»

**МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ
ГЛОБАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ**

Под ред. И.В.Ильина, Д.И. Трубецкова

ISBN 978-5-211-05866-8

М.: Изд-во Московского университета, 2010. 412 с.

© И.А.Алешковский, А.В.Иванов, И.В.Ильин, А.А.Короновский,
Л.М.Страхова, А.Д.Трубецков, Д.И.Трубецков, А.Е.Храмов, 2010

© Факультет глобальных процессов МГУ, 2010

© Издательство Московского университета, 2010

В монографии рассматриваются глобальные процессы в неживой природе, органическом мире и социальной жизни с позиций нелинейной динамики. Обсуждается современная картина мира и место нелинейной науки в ней, приводится классификация глобальных процессов, характеризуются модели глобальных процессов эволюции Земли, жизни и общества, а также мировой экономики и политики.

Для широкого круга специалистов в области наук о Земле, жизни и обществе, а также моделирования глобальных процессов. Книга будет полезной также аспирантам и студентам вузов, чья будущая профессия связана с глобалистикой и математическим моделированием процессов различной природы, а также всем, кто интересуется глобальными исследованиями.

Авторский коллектив: *И.А. Алешковский* (гл.7), *А.В. Иванов* (гл.3), *И.В. Ильин* (гл. 2, 3, 4), *А.А. Короновский* (гл. 4–7), *Л.М. Страхова* (гл.2), *А.Д. Трубецков* (гл. 6), *Д.И. Трубецков* (гл. 1, 2, 4–7), *А.Е. Храмов* (гл. 4, 6)

Содержание

Предисловие ректора МГУ В.А. Садовниченко

Глава 1. Современная картина мира и место нелинейной науки в ней

1.1. Роль эволюционизма в современной картине мира. 1.2. Расширяющаяся Вселенная. 1.3. Эволюция биосферы и ноосфера. 1.4. Об основных представлениях нелинейной науки. Самоорганизация.

Глава 2. Глобализация. Базовые модели глобальных процессов

2.1. Глобальные процессы и глобализация. 2.2. Первые модели глобальной динамики.

Глава 3. Моделирование глобальных геопроцессов

3.1. Геопроцессы и нелинейность. 3.2. Науки о Земле и физика. 3.3. Нелинейная геофизическая модель геологической среды. 3.4. Основные геодинамические модели. 3.5. Фрактально-ячеистая модель геосфер. 3.6. Пример модели опасных геопроцессов – цунами. 3.7. Ритмичность процессов в истории Земли. 3.8. Глобально-климатические модели.

Глава 4. Моделирование глобального процесса эволюции жизни

4.1. Проблема эволюции биологических видов. 4.2. Источники данных об эволюции видов. 4.3. Простые нелинейные модели эволюции жизни. 4.4. Об искусственной жизни.

Глава 5. Моделирование роста народонаселения Земли

5.1. Логистическое уравнение и динамика численности народонаселения. 5.2. Моделирование динамики численности народонаселения с помощью нелинейного уравнения диффузии. 5.3. Дискретные модели динамики численности народонаселения. 5.4. Феноменологическая теория роста населения Земли.

Глава 6. Моделирование глобальных процессов в человеческом обществе

6.1. Нелинейность в человеческом обществе. 6.2. Моделирование глобального развития. 6.3. Глобальные проблемы сельского хозяйства и производства биоресурсов. 6.4. Феномен логистического уравнения при моделировании глобальных процессов.

Глава 7. Экономические, социально-политические и исторические процессы с позиций нелинейной динамики

7.1. Модели экономической динамики. 7.2. Модели социально-политической динамики. 7.3. Модели исторических процессов. 7.4. О теории риска и безопасности с позиций нелинейной динамики. 7.5. Моделирование миграционных процессов.

Предисловие

В последние десятилетия человечество активно учится «думать глобально». В науке постепенно складывается представление о процессах, протекающих сразу в нескольких сферах Земли и затрагивающих интересы всего человечества. Современная наука стремится не только обладать огромным массивом оперативных данных о состоянии всех элементов этой сложнейшей системы, но и прогнозировать, предвидеть ее развитие на многие годы и даже столетия. Эта задача невыполнима без использования новейших достижений вычислительной математики, математического моделирования и нелинейной динамики.

Потребность в широкообразованных специалистах, не только изучивших основы социально-гуманитарных и естественно-научных дисциплин, но и умеющих применить к их проблематике математический аппарат, уже осознана в ведущих центрах глобальных исследований.

В Московском университете при участии лауреата Нобелевской премии И.Р. Пригожина уже в 1995 году создан Институт математических исследований сложных систем. На повестке дня – вопрос об опережающей подготовке специалистов для решения комплексных глобальных проблем на международном уровне.

Отрадно, что созданный пять лет назад в Московском университете факультет глобальных процессов начал готовить специалистов именно такого уровня, а эта задача требует новых учебников, новых интегративных, междисциплинарных курсов.

Представленная книга подготовлена учеными двух научно-образовательных центров – факультета глобальных процессов МГУ имени М.В. Ломоносова и факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского. Это первый и очень важный шаг на пути к последовательному изложению идей, методов и результатов моделирования глобальных процессов с использованием аппарата нелинейной динамики.

Следующим шагом могло бы стать создание серии монографий и учебников в данной области с привлечением специалистов не только Московского и Саратовского университетов, но и других отечественных и зарубежных научно-образовательных центров.

Авторы посчитали естественным начать книгу с изложения современной картины мира, в которой главную роль играют три концепции:

- теория расширяющейся вселенной,
- представление о биосфере и ноосфере,
- нелинейная наука – синергетика, нелинейная динамика, теория самоорганизации.

Основное содержание книги связано с вопросами моделирования глобальных процессов с позиций нелинейной науки.

Описанию конкретных моделей и их анализу предшествует обсуждение различных представлений о глобальных процессах, глобализации, глобалистике. Сделана попытка представить на качественном уровне иерархию глобальных моделей и выделить наиболее важные.

В последующих главах рассмотрен широкий круг вопросов, связанных с моделями геосистем, с глобальными эволюционными процессами, с анализом моделей роста населения Земли и исторической динамикой, с политическими процессами и т.п.

По существу, каждая из глав книги может стать темой для создания отдельного курса, написания отдельной работы. Думаю, что в этом есть смысл, поскольку в одной книге и нет возможности детально изложить особенности математического аппарата и компьютерных программ в применении к моделям глобальных процессов различной природы.

Сердечно поздравляю факультет глобальных процессов Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова с 5-летием со дня основания, желаю его преподавателям и студентам плодотворной работы, интересной учебы и больших успехов в одной из самых интересных междисциплинарных областей знания – глобалистике.

май 2010 г.

*В.А. Садовничий, Президент Российского
Союза ректоров, ректор МГУ имени
М.В. Ломоносова, вице-президент РАН*

**ЛЕКЦИИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ***В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова*

ISBN 978-5-292-03977-8

Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. 322 с.: ил.

© Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., 2010

© Саратовский государственный университет, 2010

В лекционном курсе по фундаментальным аспектам нелинейной динамики детерминированных и стохастических систем излагаются основы теории динамических систем, теории устойчивости и бифуркаций, теории фракталов и размерности; анализируются основные нелинейные эффекты, такие как генерация регулярных и хаотических колебаний и синхронизация; обсуждаются проблемы флуктуаций в нелинейных системах, включая влияние шумов на автогенераторы регулярных и хаотических колебаний, стохастический резонанс и стохастическую синхронизацию.

Для магистров, аспирантов и молодых ученых в области радиофизики, статистической радиофизики, теории колебаний и волн, а также для студентов естественно-научных специальностей классических университетов.

Рекомендовано УМО РАО по классическому университетскому и техническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям: (013800) – «Радиофизика и электроника», (010400) – «Физика» (Протокол № 239 от 20 октября 2009 г.)

Оглавление**Предисловие****Лекция 1. Динамические системы**

- 1.1. Введение.
- 1.2. Динамическая система и ее математическая модель.
- 1.3. Кинематическая интерпретация системы дифференциальных уравнений.
- 1.4. Определение динамической системы, классификация.
- 1.5. Колебательные системы и их свойства.
- 1.6. Фазовые портреты типовых колебательных систем.
- 1.7. Автоколебательные системы.
- 1.8. Регулярные и хаотические аттракторы.
- 1.9. Системы с дискретным временем. Отображения последования.
- 1.10. Заключение.

Лекция 2. Устойчивость динамических систем. Линейное приближение

2.1. Введение. 2.2. Определение устойчивости. 2.3. Линейный анализ устойчивости. 2.4. Устойчивость фазовых траекторий в системах с дискретным временем. 2.5. Заключение.

Лекция 3. Бифуркации динамических систем

3.1. Введение. 3.2. Бифуркация «двукратное равновесие». 3.3. «Мягкие» и «жесткие» бифуркации. Катастрофы. 3.4. Бифуркация «трехкратное равновесие». 3.5. Бифуркация Андронова–Хопфа. 3.6. Бифуркации предельных циклов. 3.7. Нелокальные бифуркации. Гомоклинические траектории и структуры. 3.8. Заключение.

Лекция 4. Динамические системы с одной степенью свободы

4.1. Введение. 4.2. Предельные множества и аттракторы на фазовой плоскости. Предельный цикл Андронова–Пуанкаре. 4.3. Структурная устойчивость систем на фазовой плоскости. Системы Андронова–Понтрягина. 4.4. Генераторы с одной степенью свободы. 4.5. Анализ уравнения Ван дер Поля. Возникновение автоколебаний. 4.6. Генератор с жестким возбуждением автоколебаний. 4.7. Заключение.

Лекция 5. Системы с размерностью фазового пространства $N > 3$. Детерминированный хаос

5.1. Введение. 5.2. Детерминированность. 5.3. Хаос. 5.4. Устойчивость и неустойчивость. 5.5. Нелинейность. 5.6. Неустойчивость и нелинейное ограничение. 5.7. Детерминированный хаос. 5.8. Перемешивание. 5.9. Вероятностные свойства детерминированных систем. 5.10. Детерминированный хаос – математическая экзотика или типичное свойство материального мира? 5.11. Странные хаотические аттракторы. 5.12. Странные нехаотические и хаотические нестранные аттракторы. 5.13. Заключение.

Лекция 6. От порядка к хаосу: бифуркационные сценарии (часть I)

6.1. Введение. 6.2. Переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. Универсальность Фейгенбаума. 6.3. Жесткие переходы к хаосу. Кризис и перемежаемость.

Лекция 7. От порядка к хаосу: бифуркационные сценарии (часть II)

7.1. Переход к хаосу через разрушение квазипериодических колебаний. 7.2. Переход к хаосу через разрушение эргодического тора. Странные нехаотические аттракторы. 7.3. Заключение.

Лекция 8. Грубые и негрубые динамические системы. Классификация типов аттракторов

8.1. Введение. 8.2. Гомоклинические и гетероклинические кривые. 8.3. Структурно-устойчивые системы в $RN, N > 3$. Свойство гиперболичности. 8.4. Структурно-неустойчивые динамические системы. 8.5. Квазигиперболические аттракторы. Аттракторы типа Лоренца. 8.6. Квазиаттракторы и их свойства. 8.7. Заключение.

Лекция 9. Фракталы в нелинейной динамике

9.1. Введение. 9.2. Понятие фрактала. Классические примеры фрактальных множеств. 9.3. Природа фрактальности в ДС. 9.4. Фрактальные размерности множеств. 9.5. Соотношение между различными размерностями. 9.6. Заключение.

Лекция 10. Генератор хаотических автоколебаний Анищенко–Астахова

10.1. Введение. 10.2. Генератор Теодорчика. 10.3. Модификация генератора с инерционной нелинейностью. Генератор Анищенко–Астахова. 10.4. Заключение.

Лекция 11. Генератор квазипериодических колебаний с двумя независимыми частотами

11.1. Введение. 11.2. Пути реализации двухчастотных колебаний и их свойства. 11.3. Формулировка уравнений генератора. 11.4. Бифуркационная диаграмма генератора квазипериодических колебаний. 11.5. Бифуркация удвоения двумерного тора. 11.6. Заключение.

Лекция 12. Синхронизация периодических автоколебаний

12.1. Введение. 12.2. Внешняя синхронизация генератора Ван дер Поля. Укороченные уравнения для амплитуды и фазы. 12.3. Анализ синхронизации в фазовом приближении. 12.4. Бифуркационный анализ системы укороченных уравнений. 12.5. Бифуркационный анализ неавтономного генератора Ван дер Поля. 12.6. Заключение.

Лекция 13. Синхронизация двухчастотных автоколебаний

13.1. Введение. 13.2. Воздействие внешней периодической силы на резонансный предельный цикл в системе связанных генераторов. 13.3. Основные бифуркации квазипериодических режимов при синхронизации резонансного предельного цикла. 13.4. Заключение.

Лекция 14. Синхронизация хаотических колебаний

14.1. Введение. 14.2. Частотно-фазовая синхронизация хаотических автоколебаний. 14.3. Исследование вынужденной синхронизации генератора спирального хаоса в натурном эксперименте. 14.4. Полная синхронизация взаимодействующих хаотических систем. 14.5. Количественные характеристики степени синхронности хаотических автоколебаний. 14.6. Заключение.

Лекция 15. Основы теории случайных процессов

15.1. Введение. 15.2. Основные характеристики случайных процессов. 15.3. Основы теории марковских процессов. 15.4. Стохастические дифференциальные уравнения (СДУ). 15.5. Заключение.

Лекция 16. Флуктуации в квазигармонических и хаотических автогенераторах

16.1. Введение. 16.2. Флуктуации в квазигармоническом генераторе с источником шума. 16.3. Заключение.

Лекция 17. Влияние шума на эффект синхронизации колебаний

17.1. Введение. 17.2. Вынужденная синхронизация зашумленных автоколебаний внешней гармонической силой. 17.3. Взаимная синхронизация квазигармонических автогенераторов в присутствии шума. 17.4. Синхронизация хаотических автоколебаний в присутствии шума. 17.5. Синхронизация автоколебаний узкополосным шумом. 17.6. Заключение.

Лекция 18. Стохастический резонанс

18.1. Введение. 18.2. Физические основы эффекта стохастического резонанса. 18.3. Характеристики эффекта стохастического резонанса. 18.4. Теория двух

состояний. 18.5. Стохастический резонанс в хаотических системах с сосуществующими аттракторами. 18.6. Физический эксперимент. 18.7. Стохастический резонанс в механорецепторах речного рака. 18.8. Заключение.

Лекция 19. Синхронизация стохастических колебаний

19.1. Введение. 19.2. Внешняя синхронизация процесса переключений в бистабильном осцилляторе под действием шума и периодического сигнала. 19.3. Внешняя стохастическая синхронизация триггера Шмитта. 19.4. Внешняя и взаимная стохастическая синхронизация процессов переключений в хаотических системах. 19.5. Стохастическая синхронизация как индуцированный шумом порядок. 19.6. Заключение.

Лекция 20. Реконструкция динамических систем

20.1. Введение. 20.2. Определение размерности вложения и реконструкция аттрактора. 20.3. Расчет старшего показателя Ляпунова по временному ряду. 20.4. Реконструкция динамической системы. 20.5. Пример реконструкции динамической системы. 20.6. Заключение.

Лекция 21. Динамический хаос и диагностика в биологии и медицине

21.1. Введение. 21.2. Количественные характеристики хаотических сигналов. 21.3. Динамические болезни. 21.4. Моделирование динамики сердечного ритма. 21.5. Синхронизация кардиоритма. 21.6. Степень хаотичности как критерий диагностики. 21.7. Заключение.

Список рекомендуемой литературы

*100-летию Саратовского ордена Трудового
Красного Знамени государственного универ-
ситета имени Н.Г. Чернышевского и памя-
ти основателя кафедры радиофизики СГУ
профессора Венедикта Ивановича Калинина
посвящают свой труд авторы*

Предисловие

Вашему вниманию предлагается книга лекций по нелинейной динамике. Нелинейная динамика, предметом исследований которой является анализ сложных эволюционных процессов в принципиально нелинейных системах, сформировалась в качестве научного направления сравнительно недавно, примерно за последние 25-30 лет. Пока не создано четкой программы, тем более стандарта этой дисциплины, которая продолжает интенсивно развиваться. На физико-математических факультетах классических университетов мира ведущие профессора включают вопросы нелинейной динамики в курсы лекций по теории колебаний и волн, теории динамических систем, статистической физики, а также в спецкурсы по теории самоорганизации или синергетике. В то же время в ряде университетов появились самостоятельные курсы лекций по нелинейной динамике. Анализ содержания этих курсов лекций свидетельствует о том, что ряд научных проблем, составляющих базовую основу нелинейной

динамики, входит в программу курсов практически у всех лекторов. К таким проблемам относятся элементы теории динамических систем, теория устойчивости и бифуркаций, механизмы формирования режимов детерминированного хаоса, теория фракталов и размерности. Отличия в содержании курсов лекций в основном касаются уровня строгости изложения указанных разделов и, главным образом, представления прикладных аспектов нелинейной динамики. Вопросы изложения прикладных проблем, как правило, носят индивидуальный характер, что связано с научными задачами, которые решаются профессором, читающим курс лекций.

Вниманию читателей предлагается наша версия программы курса лекций по нелинейной динамике, которая не претендует на истину в последней инстанции, но базируется на большом опыте научной и педагогической работы авторов. Содержание программы отражает оглавление и собственно название лекций. В основу книги положены лекции по курсу «Введение в нелинейную динамику», который на протяжении многих лет читается студентам кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ одним из авторов. Материалы лекций существенно переработаны и дополнены. Предлагаемый курс лекций характеризуется рядом особенностей. Содержание и объем представленных лекций удовлетворяют достаточно высокому уровню требований, предъявляемых сегодня к научным работникам в области нелинейной динамики. В связи с этим полный текст лекций ориентирован на магистров, аспирантов и молодых ученых, работающих в данной области. В то же время материалы лекций при определенном сокращении можно использовать для чтения студентам старших курсов естественно-научных специальностей университетов. Вторая особенность книги заключается в том, что помимо проблем нелинейной динамики детерминированных (динамических) систем, лекции включают большой материал по описанию и исследованию динамики нелинейных систем в условиях воздействия внешних флуктуаций. В результате предлагаемый курс лекций служит, по существу, развитием и дополнением содержания классических курсов теории нелинейных колебаний и статистической радиофизики применительно к современным требованиям.

Нелинейная динамика как новое научное направление, связанное с изучением колебательных явлений в принципиально нелинейных системах, сформировалось, как уже упоминалось, совсем недавно. Коллектив кафедры радиофизики и нелинейной динамики в силу ряда благоприятных обстоятельств оказался в числе тех, кто принимал активное участие в создании этого научного направления и внес свой небольшой, но заметный вклад в содержание этой дисциплины. Поэтому третьей особенностью настоящей книги является то, что лекции органически включают ряд научных результатов, полученных сотрудниками и аспирантами кафедры под руководством авторов книги.

Относительно литературы. К лекциям мы прилагаем список рекомендуемой литературы, который содержит наиболее важные монографии и учебники. Подробных ссылок на оригинальные научные статьи в лекциях мы не даем. Однако при необходимости читатель может найти всю информацию, используя подробную библиографию, представленную в рекомендованных учебниках и монографиях.

Пользуемся приятной возможностью выразить глубокую благодарность сотрудникам кафедры, совместные научные результаты которых в той или иной степени использованы нами при написании книги. Среди них особо отметим В.В. Аста-

хова, А.Б. Неймана, Д.Э. Постнова, А.Н. Павлова, М.А. Сафонову, Б.В. Шульгина, Н.Б. Янсон, Г.И. Стрелкову, С.М. Николаева, С.В. Астахова, А.С. Захарову и других. В частности, мы благодарны В.В. Астахову и А.Н. Павлову за материалы, использованные нами при написании лекций 4 и 20, соответственно.

Считаем своим долгом выразить особую благодарность нашим учителям и коллегам, которые привили нам интерес к этой области знания и благодаря общению с которыми в итоге стало возможным написание этой книги. Среди них в первую очередь отметим Ю.Л. Климонтовича, Л.П.Шильникова, М.И. Рабиновича, А. Хибника, В.Н. Белых, В. Эбелинга, Л. Чуа, Л. Шиманского-Гайера, Ф. Мосса и С.П. Кузнецова. Мы выражаем глубокую благодарность Г.И. Стрелковой и С.Ю. Маловой за большой труд по изготовлению электронного макета книги для печати.

Книга посвящается 100-летию юбилею со дня основания Саратовского государственного университета и памяти одного из выдающихся профессоров СГУ, основателя кафедры радиофизики и саратовской радиофизической школы, Калинина Венедикта Ивановича, столетие со дня рождения которого отмечалось в 2008 году.

Мы благодарны руководству СГУ и, в частности, профессору Е.Г. Елиной за проявленный интерес к этой книге и поддержку ее издания.

В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова

Саратов, январь 2010

**МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ***Учебное пособие**Н.А. Кудряшов*

ISBN 978-5-7262-0943-2

М.: МИФИ, 2008. 352 с.

© Московский инженерно-физический институт (государственный университет), 2008

Основное внимание в книге уделено методам построения аналитических решений нелинейных дифференциальных уравнений. Для решения задач Коши для уравнений Кортевега–де Вриза и \sin -Гордона представлен метод обратной задачи рассеяния. Для ряда других нелинейных дифференциальных уравнений предложены методы, с помощью которых находятся точные решения.

Для демонстрации методов, представленных в книге, выбраны наиболее популярные нелинейные дифференциальные уравнения: уравнение Кортевега–де Вриза, нелинейное уравнение Шредингера, уравнение \sin -Гордона, уравнение Курамото–Сивашинского, уравнение Гинзбурга–Ландау, уравнение нелинейной теплопроводности и хорошо известные системы уравнений: система Лоренца и система Хенона–Хейлеса. Книгу можно рассматривать как справочник по наиболее известным нелинейным дифференциальным уравнениям и методам их решения. В ней дается краткая история открытия известных нелинейных дифференциальных уравнений и предлагается информация о физических процессах, при описании которых они встречаются.

Предназначена для студентов, аспирантов и научных работников интересующихся нелинейными математическими моделями, теорией солитонов и методами построения решений нелинейных дифференциальных уравнений.

Пособие подготовлено в рамках Инновационной образовательной программы.

Предисловие**Глава 1. Нелинейные математические модели**

1.1. Уравнение Кортевега–де Вриза для описания волн на воде. 1.2. Иерархия уравнений Кортевега–де Вриза. 1.3. Уравнение Кадомцева–Петвиашвили. 1.4. Модель для описания возмущений в цепочке одинаковых масс. 1.5. Иерархия модифицированного уравнения Кортевега–де Вриза. 1.6. Уравнение Буссинеска. 1.7. Фазовая и групповая скорости волн. 1.8. Нелинейное уравнение Шредингера для огибающей волнового пакета. 1.9. Уравнение Гинзбурга–Ландау. 1.10. Уравнение \sin -Гордона для описания дислокаций в твердом теле.

1.11. Нелинейное уравнение переноса и уравнение Бюргерса. 1.12. Уравнение Кортевега–де Вриза–Бюргерса для описания волн в вязкоэластичной трубке. 1.13. Уравнение Курамото–Сивашинского для описания волновых процессов. 1.14. Уравнение для описания волн в жидкости с конвекцией. 1.15. Уравнение пятого порядка для описания волн под ледяным покровом. 1.16. Нелинейное уравнение шестого порядка для описания процессов турбулентности. 1.17. Уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова. 1.18. Уравнение Бюргерса–Хаксли. 1.19. Уравнения фильтрации газа в пористой среде. 1.20. Нелинейное уравнение теплопроводности. 1.21. Модель Хенона–Хейлеса. 1.22. Система Лоренца.

Глава 2. Элементы группового анализа дифференциальных уравнений

2.1. Однопараметрическая группа преобразований Ли. 2.2. Инварианты. Инфинитезимальный оператор группы преобразований. 2.3. Инвариантные уравнения. 2.4. Групповой анализ дифференциальных уравнений. 2.5. Группы преобразований, допускаемые обыкновенным дифференциальным уравнением 2-го порядка. 2.6. Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих группы преобразований. 2.7. Группы преобразований для линейного уравнения теплопроводности. 2.8. Группы преобразований для нелинейного уравнения теплопроводности. 2.9. Группы преобразований для уравнения Кортевега–де Вриза.

Глава 3. Аналитические свойства нелинейных дифференциальных уравнений

3.1. Классификация особых точек функций комплексной переменной. 3.2. неподвижные и подвижные особые точки. 3.3. Уравнения, не имеющие решений, с критическими подвижными особыми точками. 3.4. Определение свойства Пенлеве и уравнения Пенлеве. 3.5. Алгоритм Ковалевской анализа дифференциальных уравнений. 3.6. Локальные представления решений уравнений типа Пенлеве. 3.7. Трансцендентная зависимость решений первого уравнения Пенлеве. 3.8. Преобразования Бэклунда для решений второго уравнения Пенлеве. 3.9. Рациональные и специальные решения второго уравнения Пенлеве. 3.10. Дискретные уравнения Пенлеве. 3.11. Пары Лакса для уравнений Пенлеве. 3.12. Алгоритм Конта–Форди–Пикеринга для анализа уравнений на тест Пенлеве. 3.13. Применение алгоритма Конта–Форди–Пикеринга. 3.14. Преобразование Миуры и пара Лакса для уравнения Кортевега–де Вриза. 3.15. Законы сохранения для уравнения Кортевега–де Вриза. 3.16. Преобразования Бэклунда для уравнения Кортевега–де Вриза. 3.17. Преобразования Бэклунда для уравнения \sin -Гордона. 3.18. Семейство уравнений Кортевега–де Вриза. 3.19. Тест Абловица–Рамани–Сигура для нелинейных уравнений в частных производных. 3.20. Метод Вайса–Табора–Карневейля для анализа нелинейных уравнений. 3.21. Пенлеве-анализ уравнения Бюргерса методом Вайса–Табора–Карневейля. 3.22. Решение задачи Коши для уравнения Бюргерса. 3.23. Анализ уравнения Кортевега–де Вриза методом Вайса–Табора–Карневейля. 3.24. Построение пары Лакса для уравнения Кортевега–де Вриза методом ВТК.

Глава 4. Методы решения интегрируемых нелинейных уравнений в частных производных

4.1. Общие, частные и точные решения дифференциальных уравнений. 4.2. Простейшие решения уравнения Кортевега–де Вриза. 4.3. Автомодельные решения уравнения Кортевега–де Вриза. 4.4. Метод обратной задачи рассеяния решения

задачи Коши для уравнения Кортевега–де Вриза. 4.5. Метод Хироты для нахождения солитонных решений уравнения Кортевега–де Вриза. 4.6. Простейшие решения модифицированного уравнения Кортевега–де Вриза. 4.7. Автомодельные решения модифицированного уравнения Кортевега–де Вриза. 4.8. Решения уравнения Кортевега–де Вриза пятого порядка в переменных бегущей волны. 4.9. Уединенные волны, описываемые нелинейным уравнением Шредингера и групповой солитон. 4.10. Простейшие решения уравнения \sin -Гордона и топологический солитон. 4.11. Метод обратной задачи рассеяния для решения задачи Коши для уравнения \sin -Гордона.

Глава 5. Методы построения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений

5.1. Метод укороченного разложения для поиска точных решений нелинейных дифференциальных уравнений. 5.1.1. Точные решения уравнения Шарма–Тассо–Олвера. 5.1.2. Точные решения уравнения Бюргерса–Хаксли. 5.1.3. Точные решения уравнения Кортевега–де Вриза–Бюргерса.

5.2. Метод экспоненциальной функций для поиска точных решений нелинейных дифференциальных уравнений. 5.2.1. Точные решения уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова. 5.2.2. Точные решения уравнения Гарднера с учетом диссипации.

5.3. Метод гиперболического тангенса для поиска точных решений нелинейных дифференциальных уравнений. 5.3.1. Точные решения нелинейного уравнения пятого порядка. 5.3.2. Точные решения уравнения Гинзбурга–Ландау.

5.4. Метод простейших уравнений для поиска точных решений. 5.4.1. Уединенные волны, описываемые уравнением Курамото–Сивашинского. 5.4.2. Периодические волны уравнения Курамото–Сивашинского. 5.4.3. Уединенные волны на поверхности жидкости с конвекцией. 5.4.4. Периодические волны на поверхности жидкости с конвекцией.

5.5. Применение многоугольников при построении точных решений. 5.5.1. Точные решения обобщенного уравнения Курамото–Сивашинского. 5.5.2. Автомодельные решения уравнения Кортевега–де Вриза пятого порядка. 5.5.3. Автомодельные решения модифицированного уравнения Кортевега–де Вриза пятого порядка. 5.5.4. Уединенные волны нелинейного эволюционного уравнения шестого порядка.

5.6. Аналитические свойства системы уравнений Лоренца. 5.6.1. Тест Пенлеве для системы уравнений Лоренца. 5.6.2. Первые интегралы системы уравнений Лоренца. 5.6.3. Точно решаемые случаи системы Лоренца. 5.6.4. Точные решения системы уравнений Лоренца.

5.7. Аналитические свойства системы уравнений Хенона–Хейлеса. 5.7.1. Тест на свойство Пенлеве для системы уравнений Хенона–Хейлеса. 5.7.2. Точные решения системы уравнений Хенона–Хейлеса.

5.8. Автомодельные решения задач нелинейной теплопроводности. 5.8.1. Автомодельные решения задачи о распространении тепловой волны из мгновенного точечного источника. 5.8.2. Приближенные решения задачи нелинейной теплопроводности при заданной температуре на границе. 5.8.3. Приближенные решения задачи нелинейной теплопроводности при экспоненциальной зависимости температуры от времени на границе. 5.8.4. Автомодельные решения плоской задачи при заданном потоке на границе.

Литература

ПРАВИЛА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ

Рукописи, объемом не более 16 стр. и 8 рис. принимаются в редакцию в 2 вариантах: бумажном и электронном.

1. **Бумажный вариант** должен быть напечатан через 1,5 интервала и распечатан в **2-х экз.** Если рисунки (только черно-белые!) не вставлены в текст, то они выполняются на отдельных страницах также в 2-х экз. Под рисунком указывается его номер, фамилии авторов, название статьи; подрисуночные подписи печатаются на отдельном листе и не должны дублировать внутритекстовое описание рисунка.

Требования к оформлению текста. На первой странице перед текстом статьи должны быть напечатаны: индекс УДК, название статьи, инициалы и фамилии авторов, краткая аннотация статьи с ключевыми словами, составленная по форме удобной для непосредственного включения ее в РЖ, издаваемые ВИНИТИ.

К статье прилагаются в 1 экз.:

- перевод на английский язык названия статьи, инициалов и фамилий авторов, аннотации, **ключевых слов.**

- краткие сведения об авторах с фотографиями в графических форматах JPG, GIF и т.д., или сканированные с разрешением не менее 300dpi без дополнительной компьютерной обработки, **e-mail каждого автора и почтовый адрес организации.**

- *Краткие сведения об авторах составляются по следующей форме:*

Сидоров Петр Иванович – родился в 1938 году в Москве, окончил Московский физико-технический институт в 1961 году. После окончания МФТИ работает в ФИАН заведующим отделом. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1964) и доктора физико-математических наук (1977) в области теории колебаний и волн. Автор монографии «Детерминированный хаос и экономика» и учебника «Волны в экологии» (в соавторстве с...). Опубликовал 120 научных статей по направлениям, указанным выше. Лауреат Государственной премии СССР. Редактор журнала International Journal of Chaos Theory и член редакционной коллегии журнала «Физика и жизнь».

В библиографическом списке нумерация источников должна соответствовать очередности ссылок на них в тексте. В списке указываются:

а) для книг – фамилия автора, инициалы, название книги, город, издательство, год издания, том;

б) для журнальных статей – фамилия автора, инициалы, название статьи, название журнала, серия, год, том, номер, выпуск, первая страница статьи;

в) для депонированных статей – название статьи, инициалы, фамилия автора, название организации, в которой выполнена работа, город, год, объем статьи, название депонирующей организации, дата депонирования, регистрационный номер;

г) для препринта – фамилия автора, инициалы, название издания, полное название издающей организации, год, количество страниц;

д) для материалов конференций, школ, семинаров – фамилия автора, инициалы, название статьи, название издания, время и место проведения конференции, город, издательство, год, первая страница статьи.

В конце статьи авторы должны указать наименование программы, в рамках которой выполнена работа, или наименование фонда поддержки.

2. **Электронный вариант.** Статья оформляется с использованием макропакета $L^A T_{E}X 2\epsilon$. Рекомендуется пользоваться компилятором MiKTeX (MiKTeX2.4), так как именно им пользуются в редакции. В редакцию присылать только TEX-файл (с англ. аннотацией и ав. сведениями) без стилевых файлов и PDF статьи. Все иллюстрации, включенные в оригинал-макет, предоставляются в виде отдельных файлов, записанных в любом из форматов: TIFF, GIF, JPEG, EPS. Название файла должно соответствовать номеру рисунка в тексте.

В виде исключения принимаются статьи, подготовленные с помощью текстового редактора Microsoft Word (все формулы должны быть набраны при помощи Equation или MathType).

Все публикации в журнале, в том числе и публикации аспирантов, бесплатные.

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина*
Оформление художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, О.Н. Строгановой
в пакете *L^AT_EX*

Подписка на 2011 год осуществляется
по каталогу Агентства Роспечать
«Газеты. Журналы», индекс 73498,
и по договору между Подписчиком
(юридическим или физическим лицом)
и Издателем (Саратовским государственным университетом)

Стоимость подписки на 2011 год 720 руб. (6 номеров)
Заявки на заключение договора принимаются
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64
E-mail: and@nonlin.sgu.ru

Распространение журнала осуществляется
редакцией журнала по адресной системе

Сдано в набор 20.05.2010. Подписано к печати 24.06.2010
Формат 70x108/16. Бумага «Балет». Печать трафаретная
Усл. печ. л. 17,15(12,25). Уч.-изд. л. 17,0. Тираж 200. Заказ 422

Отпечатано на ризографе GR 3750 редакции журнала

© Редакция журнала
«Известия вузов. ПНД», 2010
© Оформление художника
Д.В. Соколова, 2010