

Журнал включен в «Перечень периодических научных и научно-технических изданий РФ,
рекомендованных для публикации основных результатов диссертаций
на соискание ученой степени доктора наук»

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

научно-технический журнал

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 23, № 3, 2015, Саратов

СО Д Е Р Ж А Н И Е

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ

Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Трубецков Д.И., Селиверстова Е.С. Удивительный Роберт Адлер: Лампа Адлера, уравнение Адлера и многое другое 3

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Дмитриев В.В., Смолянский С.А., Яхиббаев Р.М. Поиск приближенных методов описания нелинейных процессов вакуумного рождения e^-e^+ пар в электромагнитных полях 27

Волощук С.С. Нелинейная модель взаимодействия двух электронных потоков и ее тестирование 38

Кильдякова О.А., Фунтов А.А. Некоторые вопросы теории резистивного усилителя М-типа 47

Корчагин С.А., Терин Д.В., Романчук С.П. Синергетика математических моделей для анализа композиционных материалов 55

НАУКА – ОБРАЗОВАНИЮ

Трубецков Д.И. Экология профессора Богданкевича 65

Материалы XVI Международной зимней школы-семинара по радиофизике и электронике СВЧ Саратов, Россия, 2–7 февраля 2015

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

Кузнецов А.П., Станкевич Н.В. Автономные системы с квазипериодической динамикой. Примеры и свойства: Обзор 71

НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ

Семенов Е.С., Планкин О.П., Розенталь Р.М. Развитие методов анализа электронно-оптических систем гиротронов с нарушениями азимутальной симметрии 94

Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Садовников С.А., Скороходов В.Н. Генерация хаотических широкополосных импульсов микроволнового диапазона на основе ЛБВ автогенератора 106

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ

Петелин М.И. Относительность по-древнегречески 115

PERSONALIA

Андрушкевич В.С. Шулим Ефимович Цимринг: Годы совместной работы 119

C O N T E N T S

HISTORY OF NONLINEAR DYNAMICS. PERSONALIA

- Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Trubetskov D.I., Seliverstova E.S.* Amazing Robert Adler: Adler's tube, Adler's equation, and more 3

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

- Dmitriev V.V., Smolyansky S.A., Yahibbaev R.M.* Search for approximate methods for description of nonlinear vacuum e^-e^+ pairs creation processes in electromagnetic fields..... 27
- Voloshchuk S.S.* Nonlinear model of two electron beam and testing 38
- Kildyakova O.A., Funtov A.A.* Some questions of the theory of resistive wall amplifier M-type 47
- Korchagin S.A., Terin D.V., Romanchuk S.P.* Synergetics of mathematical models for analysis of composite materials 55

SCIENCE FOR EDUCATION

- Trubetskov D.I.* Ecology by professor Bogdankevich 65

*Transactions of the XVI International winter
school-seminar on microwave electronics and radiophysics
Russia, Saratov, February 2–7, 2015*

REVIEWS OF ACTUAL PROBLEMS OF NONLINEAR DYNAMICS

- Kuznetsov A.P., Stankevich N.V.* Autonomous systems with quasiperiodic dynamics. Examples and their properties: Review 71

INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

- Semenov E.S., Plankin O.P., Rozental R.M.* Development of methods of gyrotrons electron-optics systems with axial symmetry distortion 94
- Dmitriev B.S., Zharkov Yu.D., Sadovnikov S.A., Skorokhodov V.N.* Generation of chaotic wide-band impulses in UHF range by TWT autogenerator 106

HISTORY OF NONLINEAR DYNAMICS. PERSONALIA

- Petelin M.I.* Relativity a la Ancient Greek 115

PERSONALIA

- Andrushkevich V.S.* Shulim Efimovich Tsimring: Years of team-work 119

**УДИВИТЕЛЬНЫЙ РОБЕРТ АДЛЕР****Лампа Адлера, уравнение Адлера и многое другое**

*А. П. Кузнецов^{1,2}, И. Р. Сатаев¹,
Д. И. Трубецков^{2,3}, Е. С. Селиверстова²*

¹Саратовский филиал ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН

²Саратовский государственный университет

³НИЯУ «МИФИ», Москва

Статья посвящена Роберту Адлеру, совмещавшему в своей деятельности работу физика-теоретика, физика-экспериментатора и инженера-изобретателя, имеющего более 200 патентов. Приводятся краткие биографические данные об этом удивительном человеке, и дано более подробное изложение результатов двух его знаменитых исследований, вошедших в науку как лампа Адлера и уравнение Адлера. Для тех, кто интересуется вкладом Адлера в акустоэлектронику, важно прочитать статью Kent J., Fakeuchi M., Laux G. Robert Adler's Touchscreen Inventions (IEEE Ultrasonics Symposium. 2007. P. 9–20), материал которой дал импульс к написанию данной статьи. Кроме того, приводятся оригинальные результаты обобщения уравнения Адлера и анализ обобщенных моделей с использованием современных методов нелинейной динамики.

Ключевые слова: Лампа Адлера, параметрический усилитель, микроволновая акустика, синхронизация, обобщенное уравнение Адлера, связанные контакты Джозефсона.

Введение

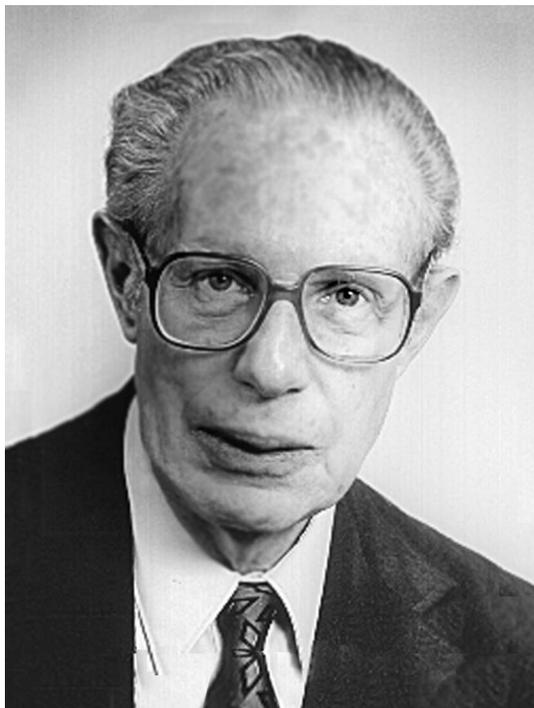
«For everything you have done your life from your years to your 90s, we thank you Robert Adler!»

[1, p. 17]

Впервые имя Роберта Адлера стало известно пишущим эту статью как изобретателя усилителя циклотронных волн, который в научной литературе сразу стали называть лампой Адлера (см., например, [2–4]).

Потом в период активных исследований в области акустоэлектроники это имя звучало в научных докладах и статьях об исследовании поверхностных акустических волн Релея и Лава и устройствах на основе их использования. Наконец, мы познакомились с ранней работой Адлера [5] и, как будет ясно из нашей статьи, никак с ней не расстанемся: знакомство с уравнением Адлера затянулось.

1. Краткие биографические данные [1]



Роберт Адлер родился в Вене в 1913 году в семье Макса Адлера и Дженни Хершманн Адлер. Его родители были социальными идеалистами. Мать получила степень в области медицины в 1905 году и посвятила себя деятельности по обеспечению безопасности рабочих. Макс Адлер был социологом и теоретиком в области политики. Его считали основателем венской школы марксизма.

Профессор истории Принстонского университета Ансон Рабинбах пишет о Максе Адлере следующее [1. Ref. 53, p. 20]: «Макс Адлер известен как человек, который пытался соединить марксизм и кантианство. Это значит, что он не принимал жесткий детерминизм и “телеологию” в марксистской доктрине, утверждая вместо этого, что причинная связь не зависит от великого замысла и что марксисты должны принять принципы научного метода, особенно эмпирицизма. Большой его

практический вклад имеется в области педагогики. Он пропагандировал то, что можно назвать педагогической социальной идеей, и то, что нужно сделать властям “Красной Вены”, – создать синтез улучшений социальных условий – жилищных, образовательных, здравоохранения и культурных – с демократичной политикой для электората».

В юности Адлер, почерпнув интерес к физике от своей матери, увлекался радиотехникой, опубликовал первую работу в 16 лет. Как указано в [1], в личных бумагах Адлера есть список его публикаций с 1929 года по 1938 год: «Первые двенадцать публикаций по теме “Паразитная емкость проводов наушников – метод ее подавления с помощью специальной катушки индуктивности” (FUNK. Berlin, 1929. 52)» [1. Ref. 4, p. 18]. Адлер учился в гимназии в Вене, которую окончил в июне 1932 года. В Венском университете он учился между зимним семестром 1932/33 годов и летним 1936 года. Выпуск состоялся в мае 1937 года. Из копии зачетной книжки Адлера [1, p. 14, fig. 12] следует, что он изучал механику, электромагнетизм, оптику, термодинамику и квантовую теорию под руководством профессора Ганса Тиринга. Приведем слова доктора Вольфганга Ретера, касающиеся учебы Адлера в Венском университете [1. Ref. 47, p. 19]: «Учителя Адлера в Венском университете были выдающимися. Вводный курс по экспериментальной физике читал Эренхафт, хорошо известный из-за его спора с Робертом Милликеном по поводу электрического зряда электрона, его “открытия” субэлектронов и магнитных монополей и других странностей. Тиринг был его учителем по теоретической физике вместе с Коттлером. Вычисления преподавал Менгер, работающий в области топологии, математической логики и экономики, и он же был наставником Гёделя. Филипп Фортванглер, ученик Феликса Клейна и один из лидеров теоретиков своего времени, был еще одним его учителем математики: Нацисты уволили около 53% профессоров, имена которых собраны в “Meldungsbuch” (именно из этой книги скопирована зачетная книжка [1, fig. 12]). Этот факт является показателем того, что богатая интеллектуальная и научная жизнь в Австрии закончилась в марте 1938 года».

После нацистской оккупации Австрии в 1938 году жизнь Адлера оказалась под угрозой, поскольку его родители имели еврейское происхождение, а отец был известным марксистом. Интересно, что Адлер сумел сбежать из Австрии в Англию с помощью нацистского паспорта. «Много лет спустя архивы этого темного периода человеческой истории стали доступны в Мемориальном Музее Холокоста в округе Вашингтон путем интерактивного представления, основанного на сенсорных экранах поверхностных акустических волн (ПАВ) Роберта Адлера... [1, р.14]». Жизнь и работа в Англии устраивали Адлера, но в преддверии войны с Германией английские друзья убедили его, что с австрийским акцентом, который настораживал, а иногда вызывал гнев окружающих, лучше бежать в США. Адлер уехал и вскоре начал работать в Zenith Radio Corporation (ZRC), которая с началом участия США в войне сосредоточилась на исследованиях в области радиолокации. Но человека с «нацистским паспортом» к исследованиям военного назначения не допустили, и он стал заниматься фильмами на ПАВ, которые потом нашли практическое применение в радиолокации. Постепенно Адлер стал лидером в области акустоэлектроники. В статье [1] указано, что список патентов Адлера содержит более 190 различных изобретений в США и других странах. При этом авторы [1] подчеркивают следующее: «В данной статье упоминаются не все изобретения Роберта Адлера. За пределами охвата этой статьи стоят изобретения Роберта Адлера, касающиеся лазеров, изобретения во время его работы в Extel, относящиеся к принтерам, изобретения, касающиеся экранов, изобретения, касающиеся технологии видеодисков и изобретения в других областях» [1. Ref. 63, p. 20]. Адлер изобрел первое акустическое устройство, использующееся в быту, для дистанционного управления телевизором. Любопытно, что когда один из авторов статьи [1] спросил Адлера, какое из своих изобретений он считает самым важным, тот назвал не дистанционное управление телевизором, а работы в области радиоприема, не указав при этом на конкретное изобретение. Возможно, это был малошумящий параметрический усилитель – лампа Адлера, о которой далее расскажем отдельно. Отдельно обсудим и знаменитую статью Адлера [5]. В ней выведено уравнение для описания фазовой синхронизации, которое в литературе носит название «уравнения Адлера».

Не будем подробно касаться его исследований в акустоэлектронике, поскольку о них и полно, и эмоционально написано в статье [1], правда, с большим акцентом на изобретение и разработку сенсорного ПАВ экрана. Значимость работ Адлера хорошо подчеркивает цитата из статьи [1, р. 11]: «В личной библиотеке Адлера есть копия цитируемой книги¹ – “Механические фильтры в электронике”. На внутренней ее обложке обнаружена следующая рукописная запись: “Д-ру Роберту Адлеру, кто первым показал миру, что можно на практике применять механические фильтры, от Боба Джонсона, автора и одного из Ваших почитателей”». Автор книги ссылается на инновационное открытие, сделанное во времена Второй мировой войны.

Для характеристики Адлера как честного, глубоко порядочного, доброго, смелого и доступного человека приведем еще несколько цитат и фактов из статьи [1].

Комментарии Джофа Вилсона: «В середине девяностых при подготовке внешнего “брейн-ринга” с ведущими специалистами R&D, адресованного определенной проблемной технической задаче, я дал понять, что в качестве активного участника возьму Боба

¹Robert A. Johnson. Mechanical Filters in Electronics. John Wiley&Sons, 1983

Адлера – он будет полезен мне, не только из-за его обширного опыта в сенсорных технологиях в общем и того, что он вдохновляет моих сотрудников, но также и из-за его врожденной способности работать честно и непредвзято озвучивать все подходы к решению проблемы» [1. Ref. 33, p. 18].

«Роберт Адлер никогда не использовал термин “лампа Адлера”. Он пытался обратить всеобщее внимание на достижения других, а термин “лампа Адлера” заставлял его чувствовать себя некомфортно» [1. Ref. 34, p. 18].

«...в 1959 году лампа Адлера действительно являлась ключом к вводу в эксплуатацию Иллинойского 400-футового радиотелескопа. Роберт Адлер обладал интеллектуальной честностью и великодушием, отстаивая великие идеи других. Иллюстрирует это лампа Адлера» [1, p. 13].

Дело в том, что главным элементом лампы была квадрупольная секция накачки, предложенная Гленом Вейдом, что всегда подчеркивал Адлер. Он довел исследование квадрупольного усилителя до прибора, который использовался в радиотелескопе. Вейд был удивлен и счастлив, узнав об этом.

«Во времена безобразного маккартизма, или “Красной угрозы” в 1950-х годах могло быть много неприятностей, если бы правительство установило связь между Робертом Адлером и его отцом-марксистом. Можно только вообразить, какой смелостью и глубоким чувством справедливости необходимо было обладать, чтобы в тот период написать письмо в ФБР в защиту коллеги, ложно обвиненного в предательском “коммунизме”» [1. Ref. 54, p. 20].

Комментарии Эрвина Рошке: «...даже когда Адлер был вице-президентом, его дверь была открыта для любого человека с любыми проблемами, и люди, выходя из его офиса, выглядели более счастливыми, чем, когда они заходили туда. У меня никогда не было такого внимательного начальника» [1. Ref. 59, p. 20].

2. Лампа Адлера

Р. Адлер с принципиально важным участием Глена Вейда (см., например, [2–4, 6–11]) предложил прибор, который был назван параметрическим усилителем. Именно этот прибор в литературе называется лампой Адлера (об отношении Адлера к этому названию упоминалось в разделе 1 статьи). Используем далее книгу [10] и статью [12]. Схема прибора представлена на рис. 1.

С исторической точки зрения интересно описать первые конструкции и физику процессов в них (в предыдущей фразе говорится только об одном приборе).

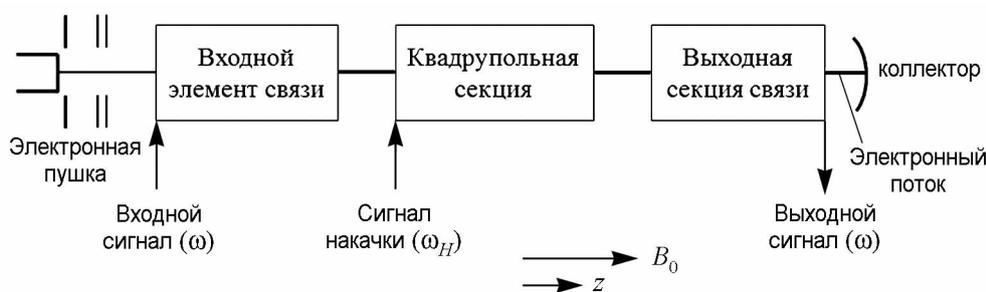


Рис. 1. Схематическое изображение лампы Адлера

Именно эти работы вылились впоследствии в самостоятельное научное направление в сверхвысокочастотной электронике [11]. Во входной и выходной секциях этого прибора используется взаимодействие высокочастотного (ВЧ) поперечного электрического поля с электронным потоком, в котором возбуждаются циклотронные волны. Возрастание поперечных смещений достигается за счет использования внешнего источника энергии, работающего на частоте накачки ω_H , которая выше частоты сигнала ω . Необходим также вспомогательный резонансный элемент, работающий на частоте $(\omega - \omega_H)$ (за исключением особого случая, когда $\omega_H = 2\omega$). Во входной и выходной секциях применяются резонаторы, через которые проходит электронный поток, фокусируемый однородным магнитным полем, напряженность которого выбрана так, что циклотронная частота $\omega_c = \omega$. Параметрическое усиление происходит в квадрупольной системе электродов, к которой приложен сигнал накачки с частотой $2\omega_c$. В таком приборе периодически изменяющимся параметром является кинетическая энергия электронов, движущихся по спиральной траектории. ВЧ сигнал, подаваемый во входную секцию, приводит к появлению ВЧ поперечных смещений электронов, движущихся по расширяющейся спирали. Длина входной секции подбирается такой, чтобы на выходе ее имело место полное подавление входного сигнала. В этом случае поперечные ВЧ смещения электронов становятся максимальными, поскольку энергия входного сигнала полностью переходит в энергию поперечных колебаний электронов.

Квадрупольная секция предназначена для постепенного увеличения амплитуды ВЧ поперечных смещений электронов (радиуса электронных траекторий). Степень возрастания последних характеризует коэффициент усиления прибора. В квадрупольной секции, показанной на рис. 2, поле на оси отсутствует и при удалении от оси возрастает линейно с расстоянием, поэтому, чем больше радиус окружности, по которой движется электрон, тем большей кинетической энергией он обладает.

Электроны, движущиеся по спиральной траектории и попадающие в ускоряющий полупериод поля, естественно назвать правильнофазными, а попадающие в отрицательный полупериод, – неправильнофазными. Синхронизм электронов и ВЧ поля имеет место из-за равенства частоты сигнала циклотронной частоте. Это условие обеспечивает эффективное взаимодействие электронов и поля, приводя к экспоненциальному изменению переменных величин вдоль z . В среднем результирующий выходной сигнал будет больше входного, так как экспоненциальное нарастание всегда преобладает над экспоненциальным ослаблением.

Из квадрупольной секции электронный поток поступает в выходную секцию. Электроны, движущиеся по спирали, возбуждают электромагнитное поле, и, если секция правильно нагружена, то это поле приводит к движению электронов по суживающейся спирали и, следовательно, к полной отдаче полю их кинетической энергии.

Уже в первых статьях [3,4] Адлер с соавторами указал, что такой усилитель является малошумящим,

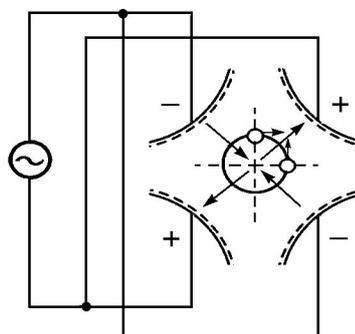


Рис. 2. Схематическое изображение квадрупольной секции

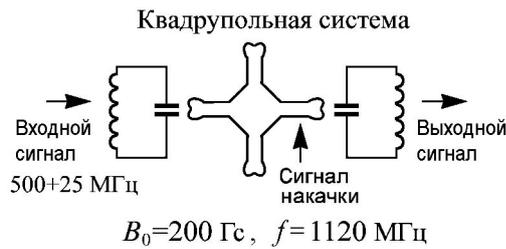


Рис. 3. Схема резонансной лампы Адлера

Один из первых экспериментов описан в статье [4]. Он относится к резонансному прибору, схема которого приведена на рис. 3.

Использовалось очень низкое напряжение V_0 потока, чтобы в короткой лампе уместилось значительное число циклотронных орбит. При $V_0 = 6 \text{ В}$, число орбит, приходящихся на 1 см, равнялось четырем. Квадрупольная секция была длиной 1 см. При мощности накачки в несколько милливатт был получен коэффициент усиления до 20 дБ.

В одном из макетов лампы коэффициент шума составлял 1.3 дБ, причем 0.4 дБ авторы отнесли к влиянию нерегулярностей в электронном потоке, вторичной электронной эмиссии и ряда других явлений, не имеющих принципиального значения, так что полученный коэффициент шума при устранении подобных нерегулярностей может быть снижен. Еще одно достоинство лампы Адлера в том, что описанный прибор однонаправленный и чрезвычайно стабильный.

Изложим простейшую теорию усилителя Адлера, следуя [12] и [10]. В лампе Адлера принцип параметрического усиления используется для получения нарастающей быстрой циклотронной волны, поскольку ее усиление выгодно с точки зрения получения низкого уровня шумов. В классической конструкции лампы Адлера процесс собственно параметрического усиления происходит в области резонатора, называемого резонатором накачки. Как уже указывалось, электрические поля в резонаторе должны быть такими, чтобы радиусы орбит электронов увеличивались после того, как электроны покинут входной элемент связи, а следовательно, увеличивалась энергия электронов. Подобным резонатором может быть отрезок квадратного волновода, в котором возбуждается TE_{11} -волна, или отрезок круглого волновода при возбуждении в нем TE_{21} -волны. В таких резонаторах реализуется квадрупольная структура поля.

Пусть в системе накачки созданы квадрупольные электрические поля вида

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{V_0}{a^2} 2x \cos \omega_H t, \\ E_y &= \frac{V_0}{a^2} 2y \cos \omega_H t, \end{aligned} \quad (1)$$

где V_0 и a – постоянные. Поля (1) могут, в частности, соответствовать статическому потенциалу квадрупольной структуры в форме

$$V = \frac{V_0}{a^2} (y^2 - x^2),$$

причем, $y^2 - x^2 = \text{const}$ описывает эквипотенциальную поверхность. Тогда $y^2 - x^2 = a^2$, V_0 – потенциал электродов; размер a показан на рис. 4.

поскольку, если входная секция – резонатор, то он, будучи правильно нагруженным источником сигнала с омическим внутренним сопротивлением, поглощает шумовую мощность, содержащуюся в электронном потоке. В идеальном случае шумы полностью подавляются.

С учетом соотношений (1) линеаризованные уравнения движения электронов в области накачки (см. рис. 2) запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial z} + \omega_c \tilde{v}_y = \Omega^2 \tilde{x} (e^{j\omega_H t} + e^{-j\omega_H t}), \\ \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial z} - \omega_c \tilde{v}_x = -\Omega^2 \tilde{y} (e^{j\omega_H t} + e^{-j\omega_H t}), \end{cases} \quad (2)$$

где \tilde{v}_x, \tilde{v}_y – переменные составляющих скорости электронов в x и y направлениях, соответственно; $\Omega^2 = \eta V_0 / a^2$, $\partial \tilde{x} / \partial t = \tilde{v}_x$, $\partial \tilde{y} / \partial t = \tilde{v}_y$, $\eta = e / m$; e, m – заряд и масса электрона, v_0 – постоянная составляющая скорости вдоль оси z ; $\omega_c = \eta B_0$; $\vec{B} = B_0 \vec{z}$, \vec{B} – вектор индукции магнитного поля.

Решения системы уравнений (2) будем искать в виде [12]

$$\tilde{v}_x = \sum_{-\infty}^{\infty} v_{xn}(z) e^{j\omega_n t}, \quad \tilde{v}_y = \sum_{-\infty}^{\infty} v_{yn}(z) e^{j\omega_n t}, \quad (3)$$

где $\omega_n = n\omega_H + \omega$.

Подставляя соотношения (3) в уравнения (2), учитывая связь между \tilde{v}_x, \tilde{v}_y и \tilde{x}, \tilde{y} , а также используя соотношение ортогональности

$$\int_0^T e^{j\omega_n t} e^{j\omega_m t} dt = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ T, & m = n \end{cases}$$

перепишем (2) в виде

$$\begin{cases} \Delta_n v_{xn} + \omega_c v_{yn} - \Omega^2 [\Delta_{n-1}^{-1} v_{xn-1} + \Delta_{n+1}^{-1} v_{xn+1}] = 0, \\ \Delta_n v_{yn} + \omega_c v_{xn} + \Omega^2 [\Delta_{n-1}^{-1} v_{yn-1} + \Delta_{n+1}^{-1} v_{yn+1}] = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где $(j\omega_n + v_0(\partial/\partial z)) = \Delta_n$, $(j\omega_{n\mp 1} + v_0(\partial/\partial z))^{-1} = \Delta_{n\mp 1}^{-1}$ – операторы обратные $\Delta_{n\mp 1}$. Полагая, что можно ограничиться случаем $n = 0, -1$ [20] и считая, что все переменные величины изменяются вдоль z по закону $e^{-\beta z}$, получим из (4) следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} (j\omega - v_0\beta)v_{x0} + \omega_c v_{y0} - \left[\frac{\Omega^2}{j(\omega - \omega_H) - v_0\beta} \right] v_{x-1} &= 0, \\ -\omega_c v_{x0} + (j\omega - v_0\beta)v_{y0} + \left[\frac{\Omega^2}{j(\omega - \omega_H) - v_0\beta} \right] v_{y-1} &= 0, \\ -\left[\frac{\Omega^2}{j(\omega - \omega_H) - v_0\beta} \right] v_{x0} + [j(-\omega_H + \omega - v_0\beta)] v_{x-1} + \omega_c v_{y-1} &= 0, \\ \left[\frac{\Omega^2}{j(\omega - \omega_H) - v_0\beta} \right] v_{y0} - \omega_c v_{x-1} + [j(\omega - \omega_H) - v_0\beta] v_{y-1} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

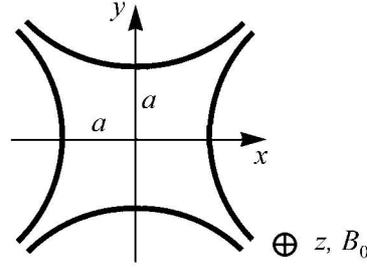


Рис. 4. К объяснению структуры полей в квадруполье

Из условия совместности системы уравнений (5), находим дисперсионное уравнение анализируемой схемы

$$\frac{1}{2} \left(\frac{v_0}{\Omega} \right)^4 = \frac{(j\beta_e - \beta) [j(\beta_e - \beta_H) - \beta] + \beta_c^2}{(j\beta_e - \beta)[j(\beta_e - \beta_H) - \beta][(j\beta_e - \beta)^2 + \beta_c^2] \{ [j(\beta_e - \beta_H) - \beta]^2 + \beta_c^2 \}}, \quad (6)$$

где $\beta_e = \omega/v_0$, $\beta_H = \omega_H/v_0$, $\beta_c = \omega_c/v_0$. Будем искать решение уравнения (6), предполагая, что фазовая скорость искомой нарастающей волны близка к фазовой скорости быстрой циклотронной волны электронного потока, то есть

$$\beta = j(\beta_e - \beta_c) - \left(\frac{\Omega^2}{v_0\omega_c} \right) \delta, \quad (7)$$

где $\Omega^2\delta/(v_0\omega_c)$ – малая величина. С учетом (7) уравнение (6) принимает вид

$$\delta(\delta + jb) = 1, \quad (8)$$

где $b = \frac{2\omega_e - \omega_H}{\Omega^2/\omega_c}$. Из уравнения (8) следует, что

$$\delta_{1,2} = -j\frac{b}{2} \pm \left[1 - \left(\frac{b}{2} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (9)$$

Как видно из (9), для существования нарастающей парциально волны необходимо, чтобы $|b/2| < 1$ или $|2\omega_c - \omega_H| < 2\Omega^2/\omega_c$. Максимальное значение действительной части δ достигается при $b = 0$, то есть при $\omega_H = 2\omega_c$ имеем $\delta = \pm 1$ и $\text{Re } \beta = \pm \Omega^2/(v_0\omega_c)$. Асимптотическая формула для коэффициента усиления на частоте сигнала ($n = 0$) и на так называемой «холостой частоте» ($n = -1$) имеет вид

$$G_{\text{дБ}} = -6.02 + 8.68 \left(\frac{\Omega^2}{v_0\omega_c} L \right), \quad (10)$$

где L – длина секции накачки. Формула (10), соответствующая только нарастающей парциальной волне, получена в предположении, что при $b = 0$ амплитуды парциальных волн в секции накачки равны между собой и каждая равна половине соответствующего значения переменной на входе.

Теория лампы Адлера и один из экспериментов изложены здесь для поддержания историчности статьи в стиле и на основании ранних работ.

Современное состояние, проблемы и перспективы использования поперечных (циклотронных и синхронных) волн электронного потока в различных устройствах СВЧ электроники изложены в обстоятельном обзоре В.А. Ванке [11]. В обзоре описаны устройства, которые произошли от лампы Адлера – защитные устройства, параметрические и электростатические усилители, перестраиваемые усилители – фильтры, лампы с бегущей циркулярно поляризованной волной, преобразователи СВЧ энергии в энергию постоянного тока, клистроны с комбинированным взаимодействием.

3. Уравнение Адлера или фазовая синхронизация по Роберту Адлеру [5,13]

Цели своих исследований в статье [2] Р. Адлер формулирует следующим образом.

«Целью настоящей статьи является вывод выражения для скорости вращения фазы напряжения генератора в произвольный момент времени исходя из соотношений между

фазами и амплитудами напряжений генератора и внешнего сигнала в этот момент времени. Иными словами, задача заключается в отыскании дифференциального уравнения для фазы генератора как функции времени. Это уравнение должно описывать случай синхронизации, когда всякое кратковременное возмущение затухает во времени и система входит в установившийся режим, в котором разность фаз генератора и внешнего сигнала постоянна. Оно должно также определять частоту и форму сигнала биений и тогда, когда синхронизация не происходит. Чтобы охватить оба эти случая, уравнение должно содержать параметр, который позволяет судить, затухает ли переходный член во времени, то есть представляет собой эквивалент критериев синхронизации, получаемых иными методами. Наконец, это уравнение должно приводить к механической аналогии, в достаточной степени простой для создания ясной картины явлений, протекающих при подаче на генератор внешнего сигнала.

Проводимый ниже анализ исходит из предположения, что внешний сигнал и собственные колебания имеют близкие частоты».

Анализ Адлера относится к схеме генератора, изображенной на рис. 5.

Предположим, вслед за Адлером, что напряжение в цепи сетки некоторый момент времени можно изобразить векторной диаграммой (рис. 6). Пусть вектор E_1 неподвижен и отображает, следовательно, угловую частоту ω_1 внешнего сигнала. Вектор, вращающийся по часовой стрелке с угловой скоростью $d\alpha/dt$, будет соответствовать угловой частоте $(\omega_1 + d\alpha/dt)$ или угловой частоте биений

$$\Delta\omega = \frac{d\alpha}{dt}, \quad (11)$$

отсчитываемой от внешнего сигнала. С учетом того, что $E_1 \ll E$, из векторной диаграммы находим Φ – отставание по фазе в анодном контуре E относительно E_g в следующем виде:

$$\Phi = \frac{[E_1 \sin(-\alpha)]}{E} = -(E_1/E) \sin \alpha. \quad (12)$$

Типичная зависимость фазового сдвига от частоты для одиночного колебательного контура приведена на рис. 7. Применительно к анализируемой схеме можно счи-

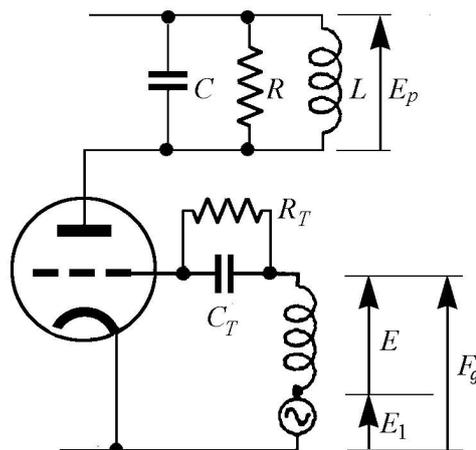


Рис. 5. Схема анализируемого генератора: E – ЭДС, наводимая на сеточную обмотку; E_1 – внешний сигнал ($E_1 \ll E$); E_g – результирующее сеточное напряжение; E_p – напряжение на анодной нагрузке [5]

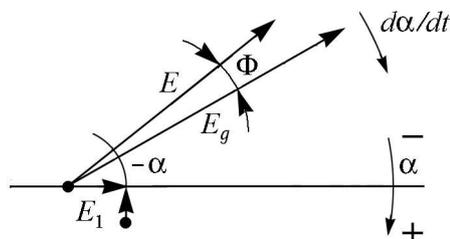


Рис. 6. Векторная диаграмма мгновенных напряжений [5]

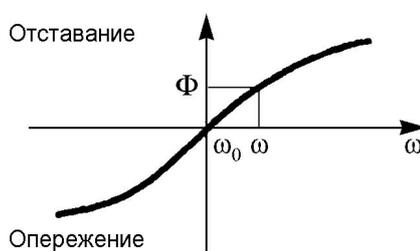


Рис. 7. Зависимость фазы от частоты для колебательного контура [5]

тать, что эта кривая выражает опережение или отставание по фазе напряжения E по отношению к E_g в зависимости от частоты. Если бы генератор работал на частоте собственных колебаний ω_0 , указанного отставания не было бы. Но теперь частота в этот момент времени превышает ω_0 (частоту колебания без внешнего воздействия) на величину, которая создаст в анодном контуре отставание по фазе, равное Φ .

Из рис. 7 можно определить мгновенную частоту ω . Для одиночного колебательного контура $\omega_0/(2Q) \gg \Delta\omega_0$, где Q – добротность контура LCR , образующего анодную нагрузку, $\Delta\omega_0 = \omega_0 - \omega_1$ – «невозмущенная» частота биений, если контур должен воспроизводить изменения ω без заметной задержки. Иными словами, полоса пропускания анодного контура настолько широка, что все частоты оказываются вблизи ее центра. Можно поэтому воспользоваться небольшой центральной частью зависимости Φ от ω , приближенно выразив ее прямой линией с наклоном

$$A = \frac{d\Phi}{d\omega}. \quad (13)$$

Фазовый угол для любой частоты ω , близкой к ω_0 , равен

$$\Phi = A(\omega - \omega_0) \quad (14)$$

или

$$\Phi = A(\omega - \omega_0) = A[(\omega - \omega_1) - (\omega_0 - \omega_1)] = A(\Delta\omega - \Delta\omega_0), \quad (15)$$

где $\Delta\omega$ есть разность между ω и частотой внешнего сигнала ω_1 . Подставляя теперь (12) в левую, а (11) в правую часть соотношения (15), получим

$$-\left(\frac{E_1}{E}\right) \sin \alpha = A \left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right) - \Delta\omega_0 \right]$$

или

$$\frac{d\alpha}{dt} = -B \sin \alpha + \Delta\omega_0, \quad (16)$$

где $B = (E_1/E)(1/A)$.

Уравнение (16) можно переписать в виде

$$\omega = -B \sin \alpha + \omega_0, \quad (17)$$

если добавить к обеим частям (16) частоту внешнего сигнала ω_1 . Комментируя соотношение (17), Адлер пишет следующее.

«Физический смысл этого соотношения заключается в том, что мгновенная частота испытывает сдвиг относительно частоты собственных колебаний на величину, пропорциональную синусу фазового угла между напряжениями генератора и внешнего сигнала. Этот сдвиг также пропорционален внешнему сигналу E_1 , но обратно пропорционален амплитуде сеточного напряжения генератора E и наклону A линии, выражающей зависимость фазы от частоты для используемой колебательной системы».

В любом учебнике по теории колебаний для одиночного колебательного контура можно найти формулу

$$\operatorname{tg} \Phi = 2Q(\omega - \omega_0)/\omega_0, \quad (18)$$

а для малых углов

$$\Phi = 2Q(\omega - \omega_0)/\omega_0. \quad (19)$$

Подставляя (19) в формулу (13), находим

$$A = \frac{d\Phi}{d\omega} = 2Q/\omega_0 \quad (20)$$

и, следовательно,

$$B = \left(\frac{E_1}{E}\right) \omega_0/(2Q). \quad (21)$$

Окончательно в случае одиночного колебательного контура уравнение (16) с учетом (21) примет вид

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\left(\frac{E_1}{E}\right) \left[\frac{\omega_0}{2Q}\right] \sin \alpha + \Delta\omega_0. \quad (22)$$

В стационарном состоянии $d\alpha/dt = 0$ и

$$\sin \alpha = 2Q \left(\frac{E}{E_1}\right) \Delta\omega_0/\omega_0. \quad (23)$$

Так как $\sin \alpha$ может принимать значения между $+1$ и -1 , стационарное состояние невозможно, если правая часть (23) окажется вне этих пределов. Отсюда условие синхронизации имеет вид

$$\left|2Q \left(\frac{E}{E_1}\right) \Delta\omega_0/\omega_0\right| < 1 \quad (24)$$

или

$$\frac{E_1}{E} > 2Q |\Delta\omega_0/\omega_0|. \quad (25)$$

Для генератора, у которого анодная нагрузка не простой колебательный контур, условие синхронизации записывается так:

$$\frac{E_1}{E} > |A\Delta\omega_0|, \quad (26)$$

где $A = d\Phi/d\omega$.

В обсуждаемой работе общие соотношения использованы для приближенного представления процесса захватывания и анализа явлений за пределами области захватывания. Дан также точный анализ процесса захватывания. На наш взгляд, самостоятельный интерес представляет механическая модель Адлера, иллюстрирующая весь диапазон явлений синхронизации. Очевидно, чтобы эта модель обеспечила полную аналогию, она должна описываться уравнением

$$\frac{d\alpha}{dt} = -B \sin \alpha + \Delta\omega_0.$$

Дабы не заниматься пересказом, обратимся к тексту статьи Адлера.

«На время забудем о $\Delta\omega_0$. Оставшаяся часть уравнения будет описывать маятник в вязкой жидкости, причем α – угол между маятником и вертикальной линией. Если мы примем, что вязкость жидкости столь велика, что нет необходимости учитывать инерцию маятника, то угловая скорость этого маятника $d\alpha/dt$ окажется пропорциональной силе, которая приводит его в движение. Форму маятника мы можем подобрать таким образом, что одна единица силы будет давать одну единицу скорости. Тогда, если B – вес маятника, то сила, вынуждающая маятник возвращаться в состояние покоя, будет физически равна $-B \sin \alpha$.

Чтобы учесть член $\Delta\omega_0$, мы должны ввести постоянную силу. Мы можем также перенести $\Delta\omega_0$ в левую часть уравнения; поскольку $d\alpha/dt$ выражает угловую скорость,

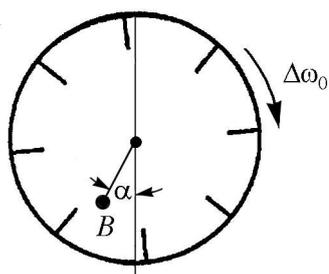


Рис. 8. Механическая модель: маятник во вращающемся сосуде, заполненном вязкой жидкостью [5]

ностью следовать за вращающимся барабаном. Примем, кроме того, что наличие маятника не оказывает заметного влияния на вращение жидкости.

Вспомним теперь, что вертикальное направление выражает фазу приложенного сигнала, тогда как положение маятника соответствует относительному фазовому сдвигу сеточного напряжения генератора. Учитывая сказанное, мы можем, вращая барабан с различными скоростями, соответствующими невозмущенным частотам биений $\Delta\omega_0$, проследить за всем диапазоном явлений.

При малой скорости барабана маятник придет в состояние покоя, характеризуемое определенным углом α_∞ , который по мере повышения скорости барабана будет увеличиваться. При воздействии возмущения маятник будет «спадать» в исходное положение; поскольку инерционные эффекты отсутствуют, он никогда не пройдет мимо положения покоя.

Если мы будем поднимать маятник в направлении по часовой стрелке, перемещая его в любую точку ниже $\alpha_1 = \pi - \alpha_\infty$, он будет возвращаться, поворачиваясь против часовой стрелки; если же мы поднимем его, проходя за это предельное положение либо еще далее вправо, маятник будет возвращаться, поворачиваясь по часовой стрелке. Этим объясняется существование двух различных решений для переходного режима.

При некоторой критической скорости барабана $\omega_{\max} = B$ маятник займет горизонтальное положение; если еще более повысить скорость барабана, «маятник выйдет из синхронизма» и начнет описывать круги, вращаясь быстро вправо и очень медленно влево, причем он будет совершать значительно меньшее число полных оборотов, чем жидкость.

Однако при дальнейшем увеличении скорости быстро вращающаяся жидкость будет увлекать маятник за собой независимо от его веса. Движение будет выглядеть значительно более равномерным, и скорость маятника станет почти равной скорости барабана: средняя частота биений $\Delta\omega$ будет приближаться к невозмущенному значению $\Delta\omega_0$.

$-\Delta\omega_0$ в левой части будет соответствовать постоянному вращательному движению маятника в обратном направлении относительно жидкости. Такую же силу создаст вращательное движение жидкости относительно маятника в прямом направлении с постоянной скоростью. Именно такой интерпретацией мы и воспользуемся в нашей модели, которая представлена на рис. 8.

Вязкая жидкость заключена в барабан, вращающийся с угловой скоростью $\Delta\omega_0$. Снова предполагается, что вязкость жидкости столь велика, что она будет полностью следовать за вращающимся барабаном.

4. Исследование обобщенного уравнения Адлера и некоторые его приложения

4.1. Обобщённое уравнение Адлера. В теории колебаний уравнение Адлера непосредственно получается в фазовом приближении для задач о гармоническом возбуждении осциллятора ван дер Поля и для двух диссипативно связанных осцилляторов [14]. Например, для уравнений двух таких осцилляторов

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= 0, \end{aligned} \quad (27)$$

действуя стандартным методом медленно меняющихся амплитуд [14], можно получить уравнение для относительных фаз осцилляторов – уравнение Адлера

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\Delta}{2} - \mu \sin \theta.$$

Учет дополнительных факторов позволяет получить более общее уравнение. Обратимся к уравнению двух осцилляторов, для которых учтем следующее:

- возможность диссипативной связи;
- возможность реактивной (консервативной) связи;
- дополнительную кубическую нелинейность по типу осциллятора Дуффинга, отвечающую за неизохронность малых колебаний;
- неидентичность по параметру отрицательного трения.

Уравнения (27) с учетом всех этих факторов примут вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda_1 - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 + \varepsilon(x - y) + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda_2 - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta)y + \beta y^3 + \varepsilon(y - x) + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь λ_i – параметры, отвечающий за отрицательное трение в каждом осцилляторе; β – параметр нелинейности по типу осциллятора Дуффинга; μ и ε – коэффициенты диссипативной и реактивной связи; Δ – относительная частотная расстройка осцилляторов. Частота первого осциллятора принята за единицу.

Действуя по стандартной для метода медленно меняющихся амплитуд схеме и используя перенормированные параметры, можно прийти к укороченным уравнениям Ландау–Стюарта²:

$$\begin{aligned} 2\frac{dR}{dt} &= (1 + 2\delta - \mu)R - R^3 + \mu r \cos \theta - \varepsilon r \sin \theta, \\ 2\frac{dr}{dt} &= (1 - \mu)r - r^3 + \mu R \cos \theta + \varepsilon R \sin \theta, \\ \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{\Delta}{2} + \frac{\chi}{2}(r^2 - R^2) + \varepsilon \left(\frac{r}{2R} - \frac{R}{2r} \right) \cos \theta - \mu \left(\frac{r}{2R} + \frac{R}{2r} \right) \sin \theta. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь $\chi = 3\beta$, $\delta = 1/2(\lambda_1/\lambda_2 - 1)$. Для возмущений \tilde{R} , \tilde{r} стационарных орбит $R = r = 1$ из первых двух уравнений (29) получаем

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \frac{1}{2}[\mu(\cos \theta - 1) - \varepsilon \sin \theta + \delta], \\ \tilde{r} &= \frac{1}{2}[\mu(\cos \theta - 1) + \varepsilon \sin \theta - \delta]. \end{aligned} \quad (30)$$

Подставляя $R = 1 + \tilde{R}$ и $r = 1 + \tilde{r}$ в фазовое уравнение (29) с учетом (30), получаем

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\Delta + 2\chi\delta}{2} - (\mu + \chi\varepsilon) \sin \theta - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin(2\theta) - \varepsilon\delta \cos \theta. \quad (31)$$

Это обобщение уравнения Адлера на случай всех существенных факторов. Их влияние приводит к следующим особенностям динамики. Диссипативная связь стремится синхронизовать осцилляторы в фазе. Смена ее знака (активная связь) приводит к

²Детали см. в [14-19].

противофазной синхронизации. Реактивная связь проявляется во втором порядке по величине связи, при этом для нее характерна фазовая бистабильность: возможность сосуществования устойчивого синфазного и противофазного режимов. Остальные факторы проявляются только в комбинации с реактивной связью и также являются эффектами второго порядка. Так неизохронность приводит к притяжению или отталкиванию осцилляторов в зависимости от комбинации знаков соответствующих параметров. В комбинации же с реактивной связью неидентичность по управляющим параметрам дает еще один механизм синхронизации. Он отвечает устойчивому режиму синхронизации со сдвигом фаз между вторым и первым осцилляторами на $3\pi/2$. В неизохронной системе неидентичность также дает еще и аддитивную добавку к частотной расстройке: $\Delta + 2\chi\delta$.

Общая картина эффектов в системе (31) достаточно сложна и обсуждается в [14–19].

4.2. Неавтономное уравнение Адлера. Рассмотрим теперь случай возбуждения осцилляторов, когда внешний сигнал модулирует частоту одного из них [19],

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta + \varepsilon \cos \omega t)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь частота первого осциллятора фиксирована и принята за единицу, Δ – постоянная часть расстройки осцилляторов, ε – амплитуда модуляции частоты второго осциллятора, ω – частота этой модуляции.

Пусть частота воздействия ω мала по сравнению с собственными частотами осцилляторов: $\omega \ll 1$. Тогда можно применить метод медленно меняющихся амплитуд. Действуя стандартным образом, нетрудно получить соответствующие уравнения для фаз первого и второго осцилляторов

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \frac{\mu}{2} \sin(\psi_2 - \psi_1), \\ \dot{\psi}_2 &= \frac{\Delta + \varepsilon \cos \omega t}{2} + \frac{\mu}{2} \sin(\psi_1 - \psi_2). \end{aligned} \quad (33)$$

Отметим, что здесь все параметры нормированы на λ . Для относительной фазы $\theta = \psi_2 - \psi_1$ теперь можно записать

$$\dot{\theta} = \frac{\Delta}{2} - \mu \sin \theta + \frac{\varepsilon}{2} \cos \omega t. \quad (34)$$

Таким образом, мы получили неавтономное уравнение Адлера с возбуждением в виде гармонического сигнала. Неавтономное уравнение Адлера может быть получено также для сильно демпфированного за счет затухания маятника с нелинейностью синуса и с постоянным вращающим моментом. Оно также появляется в теории контактов Джозефсона [14]. Отметим, что случай возбуждения в виде прямоугольных импульсов может быть рассмотрен аналитически [19].

При анализе неавтономного уравнения Адлера также следует выделять два случая: захвата и биений автономных осцилляторов, которые реализуются, соответственно, при $2\mu > |\Delta|$ и $2\mu < |\Delta|$.

Карта ляпуновских показателей³ для режима захвата автономных осцилляторов для системы (34) представлена на рис. 9. Здесь и далее тип режима определялся в стробоскопическом сечении через период внешнего воздействия, так что темным цветом показаны периодические режимы, а серым – квазипериодические. Примеры реализаций, то есть зависимости фазы от времени $\theta(t)$ для трех характерных точек плоскости параметров приведены на рис. 10. Черные точки на реализациях отмечают стробоскопические сечения, построенные через период внешнего воздействия, рядом справа приведены портреты в стробоскопическом сечении (θ_n, θ_{n+1}) .

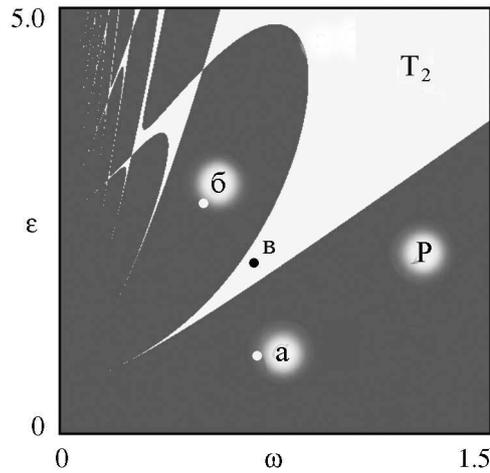


Рис. 9. Ляпуновская карта возбуждаемой системы (34) для режима захвата в автономной модели, $\mu = 0.75, \Delta = 1$

Нижнюю часть карты занимает область, для которой портреты режимов представлены на рис. 10, а. В этом случае амплитуда сигнала невелика. Однако

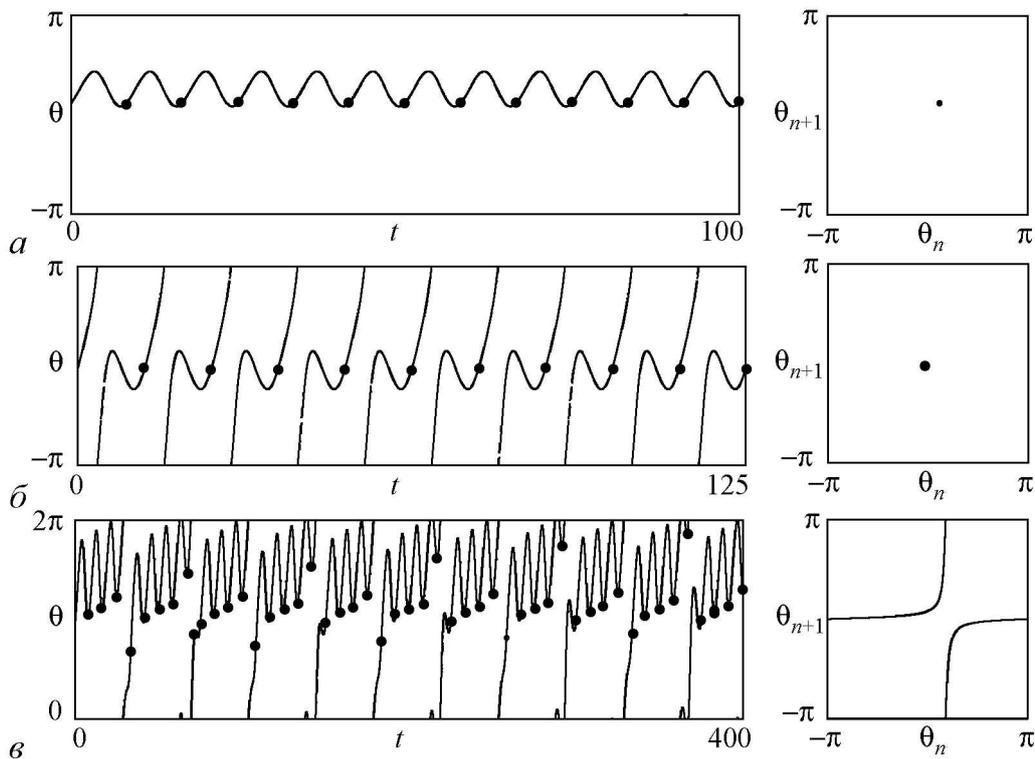


Рис. 10. Реализации и портреты в стробоскопическом сечении системы (34) в режиме захвата в автономной модели: а – $\omega = 0.75, \epsilon = 1$; б – $\omega = 0.5, \epsilon = 2.4$; в – $\omega = 0.75, \epsilon = 2$. Остальные параметры $\mu = 0.75, \Delta = 1$

³О ляпуновских картах см., например, [20].

точный захват осцилляторов разрушается, и относительная фаза θ колеблется около равновесного значения $\theta = 0$, отвечающего синфазному режиму автономных осцилляторов. Таким образом, при наличии внешнего сигнала наблюдается режим частичного взаимного захвата осцилляторов. В тоже время в стробоскопическом сечении реализуется неподвижная точка, то есть осцилляторы захвачены внешним сигналом.

Выше указанной области на карте располагается система периодических режимов другого типа. Для основного языка такого типа реализация $\theta(t)$ показана на рис. 10, б. В этом случае относительная фаза «бежит», то есть внешний сигнал разрушает взаимный захват осцилляторов. В стробоскопическом сечении, однако, также наблюдается неподвижная точка. Это означает, что осцилляторы синхронизованы внешним сигналом.

В свою очередь, в точке B фаза неограниченно нарастает, а портрет в стробоскопическом сечении отвечает уже квазипериодической динамике. Соответственно изменяется и цвет на ляпуновской карте.

Карта ляпуновских показателей и примеры реализаций для случая биений автономных осцилляторов даны на рис. 11 и 12. В этом случае исчезают периодические режимы при малых амплитудах воздействия, и вместо них возникает область квазипериодических колебаний. В нее встроена система языков периодических режимов, имеющая характерные «перемычки» при возрастании амплитуды.

Пример реализации внутри основного языка приведен на рис. 12, а. В этом случае фаза монотонно нарастает, то есть относительного захвата осцилляторов нет, но в стробоскопическом сечении наблюдается неподвижная точка. Рис. 12, б иллюстрирует изменение динамики внутри этого же языка, но выше «перемычки». Теперь амплитуда сигнала велика, и осцилляции фазы увеличивают размах настолько, что он превышает 2π .

Отметим, что для второго языка динамика фазы аналогична рис. 12, а, но полный набег фазы между точками стробоскопических сечений уже не 2π , а 4π . Для

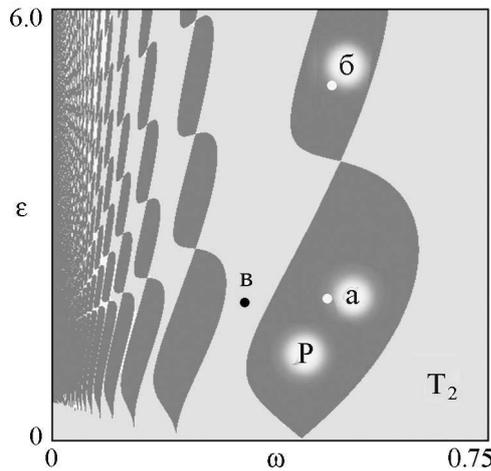


Рис. 11. Ляпуновская карта возбуждаемой системы (34) для режима биений в автономной модели, $\mu = 0.25$, $\Delta = 1$

третьего языка имеем полный набег фазы 6π и т.д.⁴ На рис. 12, в приведен пример динамики для квазипериодического режима, наблюдающегося в промежутке между языками.

Перейдем теперь к исходной системе (32). Рассмотрим случай небольшого значения управляющего параметра $\lambda = 0.1$. Ляпуновская карта для наиболее интересного случая биений автономных осцилляторов представлена на рис. 13. Величина связи и частотная расстройка выбраны равными $\mu = 0.025$ и $\Delta = 0.1$. Эти значения отвечают случаю фазовой модели на рис. 11. (В соответствии с правилами нормировки на

⁴Или, иначе говоря, число существенных пересечений графика $\theta(t)$ с границами рисунка в промежутке между стробоскопическими сечениями последовательно увеличивается с одного (см. рис. 12, а) до двух, трех и т.д.

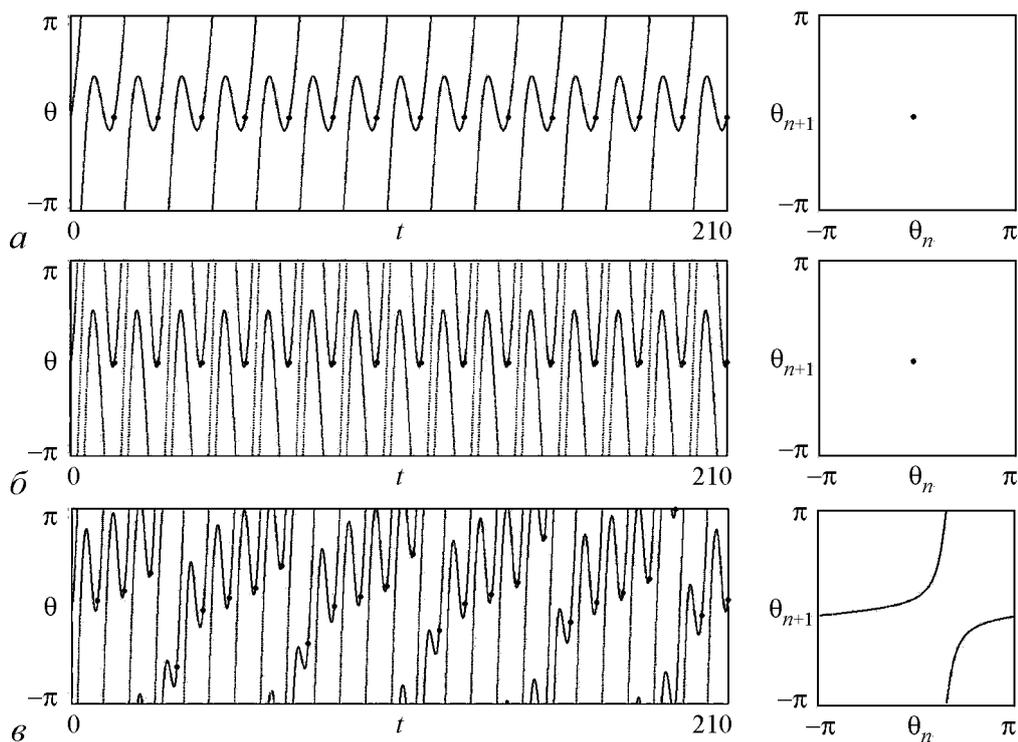


Рис. 12. Реализации и портреты в стробоскопическом сечении системы (34) в режиме биений в автономной модели: $a - \omega = 0.45, \varepsilon = 2$; $б - \omega = 0.45, \varepsilon = 5$; $в - \omega = 0.37, \varepsilon = 2$. Остальные параметры $\mu = 0.25, \Delta = 1$

значение $\lambda = 0.1$ параметры фазовой модели уменьшены в 10 раз.) При сопоставлении рисунков только следует иметь в виду, что изменен масштаб по частоте возбуждения ω . На рис. 13 он уменьшен, так что использовано максимальное значение $\omega = 0.025$, что отвечает левой трети рис. 11. Это сделано для того, чтобы лучше визуализировать систему мелкомасштабных языков.

Отмечаем, что для исходной системы (32) произошло изменение типов режимов, а именно: периодическим режимам неавтономного уравнения Адлера (34) теперь соответствуют двухчастотные квазипериодические режимы T_2 , а двухчастотным – трехчастотные T_3 . Причина понятна – она состоит в том, что для неавтономного уравнение Адлера тип режима определялся для фазы в стробоскопическом сечении. В остальном неавтономное уравнение Адлера очень хорошо дает картину режимов диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля с модуляцией частоты (32) при значении управляющего параметра $\lambda = 0.1$.

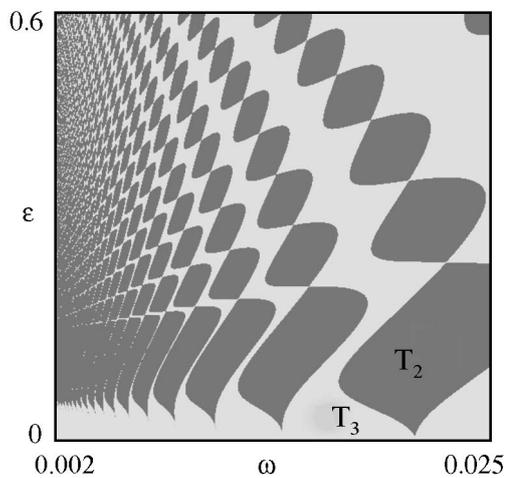


Рис. 13. Ляпуновская карта двух диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля с модулированной частотной расстройкой (32) в случае биений автономных осцилляторов. Значения параметров $\lambda = 0.1, \mu = 0.025, \Delta = 0.1$

4.3. Связанные уравнения Адлера: неидентичные контакты Джозефсона.

Несколько контактов Джозефсона⁵, включенных в общую цепь, при определенных условиях приводят к *связанным уравнениям Адлера*. В этом случае можно считать, что волновые функции для каждого из образующих контакт сверхпроводников не зависят от времени и характеризуются своей фазой. Уравнение для N контактов имеют вид [14,21–23]

$$\begin{aligned} \frac{\hbar}{2e}\dot{\varphi}_n + I_n \sin \varphi_n &= I - \varepsilon\dot{Q}, \\ L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} &= \frac{\hbar}{2e} \sum_{n=1}^N \dot{\varphi}_n. \end{aligned} \quad (35)$$

Здесь \hbar – постоянная Планка; e – заряд электрона; $I_n \sin \varphi_n$ – сверхпроводящий ток; I_n – критический ток через соответствующий контакт; R, L, C – элементы цепи, в которую включены контакты; I – внешний ток; \dot{Q} – ток через параллельную RLC -нагрузку.

Первое уравнение (35) описывает n -й контакт, а второе представляет собой уравнения Кирхгофа для электрической цепи, в которую включены контакты. Выполнив соответствующую перенормировку, можно получить следующие безразмерные уравнения [23]:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_n &= I - I_n \sin \varphi_n - \varepsilon\dot{Q}, \\ L\ddot{Q} + \gamma\dot{Q} + \omega_0^2 Q &= I - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N I_n \sin \varphi_n. \end{aligned} \quad (36)$$

В случае двух контактов с разными критическими токами получаем

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= I - \sin \varphi_1 - \varepsilon\dot{Q}, \\ \dot{\varphi}_2 &= I - (1 + \xi) \sin \varphi_2 - \varepsilon\dot{Q}, \\ \ddot{Q} + \gamma\dot{Q} + \omega_0^2 Q &= I - \frac{1}{2}[\sin \varphi_1 + (1 + \xi) \sin \varphi_2]. \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь в силу правила нормировки критический ток в первом контакте принят за единицу, а параметр ξ характеризует неидентичность контактов по величине критического тока.

Плоскость параметров (ξ, I) и ее увеличенный фрагмент приведены на рис. 14. На рисунке представлена ляпуновская карта, на которой разными цветами показаны область периодических режимов P (все показатели отрицательные), квазипериодичности T_2 (один нулевой показатель) и хаоса C (один положительный показатель). Также буквами E_q обозначена область, где система приходит в устойчивое состояние равновесия.

При выключенной связи уравнения (37) распадаются на два уравнения Адлера. Границы области синхронизации для них даются очевидными соотношениями

$$I = 1, \quad I = 1 + \xi. \quad (38)$$

⁵Эффект Джозефсона состоит в протекании тока через контакт двух сверхпроводников, разделенных потенциальным барьером [14]. Ток образуют куперовские пары, туннелирующие через барьер. Этот эффект находит широкое применение в генераторах и приемниках сигналов очень высокой частоты.

По свойствам уравнения Адлера, ниже первой линии (рис. 14, *a*) первый контакт захвачен, а ниже второй линии – захвачен второй контакт. Из рисунка можно видеть, что фактически эти же линии ограничивают основные области периодических режимов и состояние равновесия и в связанной системе. Однако имеется и множество узких язычков периодических режимов другого типа, погруженных в область квазипериодической динамики.

Примеры портретов на плоскости двух фаз (φ_1, φ_2) даны на рис. 15. Случай, приведенный на рис. 15, *a* отвечает инвариантной кривой, для которой первая фаза почти постоянна, а вторая меняется во всем диапазоне от нуля до 2π . Таким образом, это режим частичного захвата первого контакта. Соответственно, рис. 15, *б* отвечает частичному захвату второго контакта. Рис. 15, *в* дает пример более сложных режимов, реализующихся в узких резонансных языках. Эти режимы допускают топологическую классификацию по числу существенных пересечений вертикальной и горизонтальной осей.

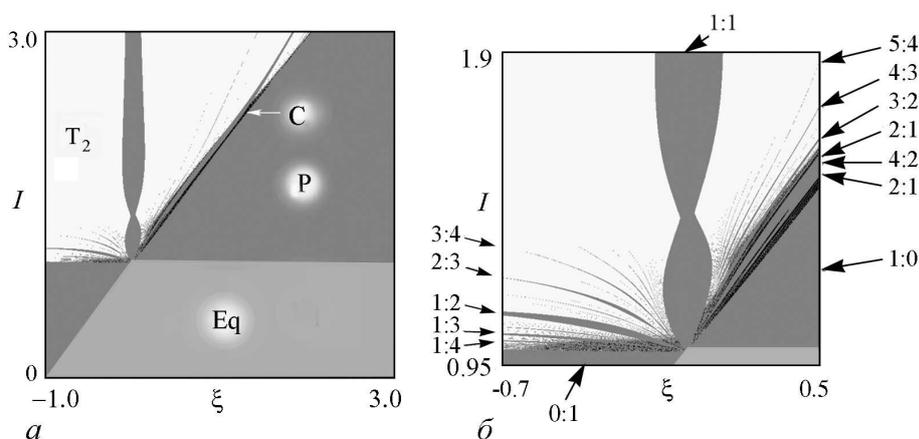


Рис. 14. Плоскость параметров двух неидентичных контактов Джозефсона (37) и ее увеличенный фрагмент, $\varepsilon = 0.5$, $\gamma = 1$, $\omega_0^2 = 1.2$

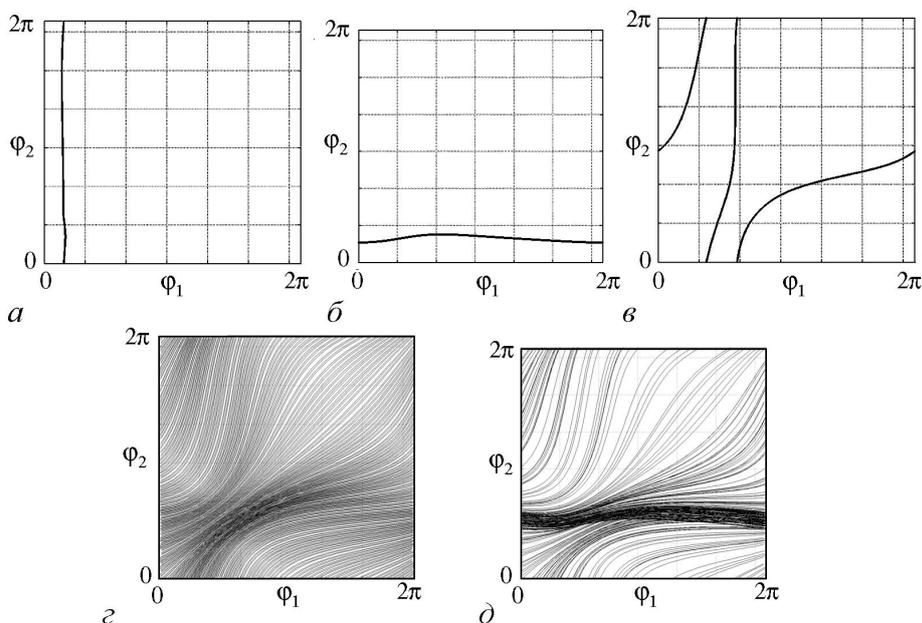


Рис. 15. Фазовые портреты системы (37) на плоскости двух фаз

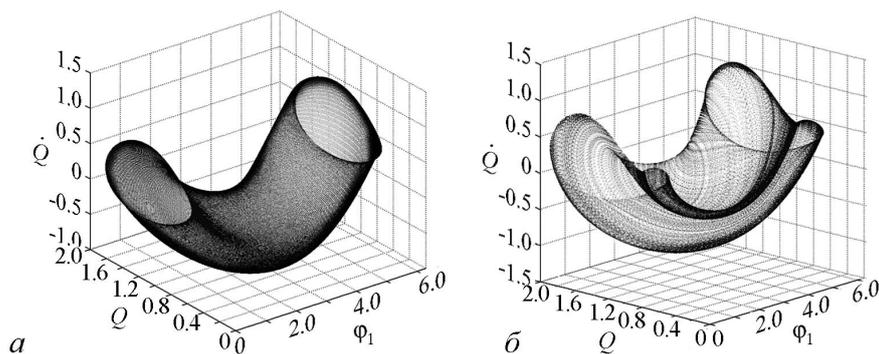


Рис. 16. Фазовые портреты системы (37) в квазипериодическом режиме (а) и хаоса (б)

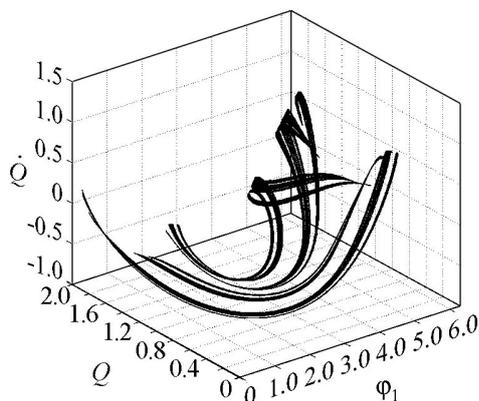


Рис. 17. Фазовый портрет системы (37) в области фейгенбаумовского хаоса

зонтальной сторон фазового квадрата. Так показанный на рис. 15, в режим характеризуется фактором $1:2$. Такие числа вращения подписаны у некоторых основных языков на рис. 14, б. Отметим, что режимы частичного захвата можно классифицировать, как $0:1$ и $1:0$. На рис. 15, г показан квазипериодический режим – теперь фазовые траектории всюду плотно покрывают фазовый квадрат. В системе возможен также хаос в некоторых узких областях пространства параметров. Соответствующий фазовый портрет приведен на рис. 15, д.

На рис. 16, а показан фазовый портрет такого квазипериодического режима в расширенном фазовом пространстве с учетом переменных, характеризующих внешнюю цепь. Можно видеть инвариантный тор, который образуется при замыкании картинка по фазовой переменной⁶. На рис. 16, б приведен хаотический режим, отвечающий разрушению тора.

В системе в узком диапазоне изменения параметров возможны удвоения периода и переход к хаосу по Фейгенбауму. Это кажется несколько неожиданным с точки зрения динамики двух фаз связанных уравнений Адлера, но объясняется тем, что система (19) в целом имеет размерность четыре. В результате таких удвоений на плоскости фазовых переменных из режима типа $2:1$ в озникают режимы $4:2$, $8:4$ и т.д. (см. обозначения по правому краю рис. 14, б.) На рис. 17 показан формирующийся хаотический режим в расширенном фазовом пространстве. Его интересно сравнить с разрушенным тором на рис. 16, б.

Вместо Заключения мы повторим эпиграф к нашей статье: «For everything you have done your life from your years to your 90s, we thank you Robert Adler!» [1, p. 17].

Работа выполнена при государственной поддержке ведущих научных школ России, грант НШ-828.2014.2 и грант НШ-1726.2014.2, и при поддержке грантов РФФИ № 12-02-00342, 13-02-01209, 14-02-00329 и 14-02-00085.

⁶Подробнее о динамике неидентичных контактов, правда, для несколько иной формы уравнений, можно ознакомиться в [22].

Библиографический список

1. *Kent J., Fakeuchi M., Laux G.* Robert Adler's touchscreen inventions // IEEE Ultrasonics Symposium. 2007. P.9.
2. *Adler R.* Parametric amplification of the fast electron wave // Proc. IRE. 1958. Vol. 46, №6. P. 1300.
3. *Adler R., Hrbek G., Wade G.* A low noise electron-beam parametric amplifier // Proc. IRE. 1958. Vol. 46, №10. P.1756.
4. *Adler R., Hrbek G., Wade G.* The quadrupole amplifier a low noise parametric device // Proc. IRE. 1959. Vol. 47. P.1713.
5. *Adler R.A.* Study of locking phenomena in oscillators // Proc. IRE. 1946. Vol. 34, June. P. 351.
6. *Люиселл У.* Связанные и параметрические колебания в электронике. М.: Изд-во иностранной литературы, 1963.
7. *Лопухин В.М., Рошаль А.С.* Электронно-лучевые параметрические усилители поперечных волн // УФН. 1965. Т. 85, №2. С. 297.
8. *Лопухин В.М., Магалинский В.Б., Мартынов В.П., Рошаль А.С.* Шумы и параметрические явления в электронных приборах сверхвысоких частот. М.: Наука, 1966.
9. *Лопухин В.М., Рошаль А.С.* Электроннолучевые параметрические усилители. М.: Сов. радио, 1968.
10. *Шевчик В.Н., Трубецков Д.И.* Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М.: Сов. радио, 1970.
11. *Ванке В.А.* Поперечные волны электронного потока в микроволновой электронике // УФН. 2005. Т. 175, № 9. С. 957.
12. *Johnson C.C.* Theory of fast-wave parametric amplification // J. Appl. Phys. 1960. Vol. 31, № 2. P. 338.
13. *Трубецков Д.И.* Синхронизация: Ученый и время. Лекции на школах «Нелинейные дни в Саратове для молодых». Вып. 2. Саратов: Изд-во Гос УНЦ «Колледж», 2006. С. 51.
14. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 494 с.
15. *Ivanchenko M., Osipov G., Shalfeev V., Kurths J.* Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators // Physica D. 2004. Vol. 189, № 1–2. P. 8.
16. *Rand R., Holmes P.J.* Bifurcation of periodic motions in two weakly coupled van der Pol oscillators // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1980. Vol. 15. P. 387.
17. *Кузнецов А.П., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В.* Связанные осцилляторы ван дер Поля и ван дер Поля–Дуффинга: Фазовая динамика и компьютерное моделирование Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика // 2008. Vol. 16, № 4. P. 101.
18. *Kuznetsov A.P., Stankevich N.V., Turukina L.V.* Coupled van der Pol–Duffing oscillators: Phase dynamics and structure of synchronization tongues // Physica D. 2009. Vol. 238, 14. P. 1203.
19. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 360 с.

20. *Wiesenfeld K., Colet P., Strogatz S.H.* Synchronization Transitions in a Disordered Josephson Series Array // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76, № 3. P. 404.
21. *Valkering T.P., Hooijerl C.L.A., Kroon M.F.* Dynamics of two capacitively coupled Josephson junctions in the overdamped limit // *Physica D.* 2009. Vol. 135. P. 137.
22. *Vlasov V., Pikovsky A.* Synchronization of a Josephson junction array in terms of global variables // *Phys. Rev.* 2013. Vol. 88. P. 022908.
23. *Emelianova Yu.P., Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Turukina L.V.* Synchronization and multi-frequency oscillations in the low-dimensional chain of the self-oscillators // *Physica D.* 2013. Vol. 244, № 1. P. 36.

References

1. *Kent J., Fakeuchi M., Laux G.* Robert Adler's touchscreen inventions // *IEEE Ultrasonics Symposium.* 2007. P.9.
2. *Adler R.* Parametric amplification of the fast electron wave // *Proc. IRE.* 1958. Vol. 46, № 6. P. 1300.
3. *Adler R., Hrbek G., Wade G.* A low noise electron-beam parametric amplifier // *Proc. IRE.* 1958. Vol. 46, № 10. P.1756.
4. *Adler R., Hrbek G., Wade G.* The quadrupole amplifier a low noise parametric device // *Proc. IRE.* 1959. Vol. 47. P.1713.
5. *Adler R.A.* Study of locking phenomena in oscillators // *Proc. IRE.* 1946. Vol. 34, June. P. 351.
6. *Louisell William.* Coupled Mode and Parametric Electronics. New York, Willey, 1960.
7. *Lopukhin V.M., Roshal' A.S.* Electron-beam transverse-wave parametric amplifiers of the transverse waves // *Phys. Usp.* 1965. Vol. 85. P. 297.
8. *Lopukhin V.M., Magalinskii V.B., Martynov V.P., Roshal' A.S.* Noise and parametric phenomena in high-frequency electronic devices. M.: Nauka, 1966 (in Russian)
9. *Lopukhin V.M., Roshal A.S.* Electron-beam parametric amplifiers. M.: Sov. Radio, 1968 (in Russian).
10. *Shevchik V.N., Trubetskov D.I.* Analytical calculation methods in microwave electronics M.: Sov. Radio, 1970 (in Russian).
11. *Vanke V.A.* Transverse electron-beam waves for microwave electronics // *Phys. Usp.* 2005. Vol. 48. P. 917.
12. *Johnson C.C.* Theory of fast-wave parametric amplification // *J. Appl. Phys.* Vol. 31, № 2. P. 338.
13. *Trubetskov D.I.* Synchronization: scientist and hronology. Lectures on scholes «Non-linear Days in Saratov for Younges.» Book 2. Saratov: Izd. Gos. UNTs «Kollidg», 2006. 112 s. (In Russian)
14. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge university press, 2001. 432 p.
15. *Ivanchenko M., Osipov G., Shalfeev V., Kurths J.* Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators // *Physica D.* 2004. Vol. 189, № 1–2. P. 8.

16. *Rand R., Holmes P.J.* Bifurcation of periodic motions in two weakly coupled van der Pol oscillators // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 1980. Vol. 15. P. 387.
17. *Kuznetsov A.P., Stankevich N.V., Turukina L.V.* Coupled van der Pol and van der Pol–Duffing oscillators: Dynamics of phase and computer simulation // *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics* // 2008. Vol. 16, № 4. P. 101 (in Russian).
18. *Kuznetsov A.P., Stankevich N.V., Turukina L.V.* Coupled van der Pol–Duffing oscillators: Phase dynamics and structure of synchronization tongues // *Physica D*. 2009. Vol. 238, № 14. P. 1203.
19. *Landa P.S.* Self-Oscillations in Systems with Finite Number of Degrees of Freedom. Moscow: Nauka, 1980. 360 p. (In Russian).
20. *Wiesenfeld K., Colet P., Strogatz S.H.* Synchronization Transitions in a Disordered Josephson Series Array // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76, № 3. P. 404.
21. *Valkering T.P., Hooijerl C.L.A., Kroon M.F.* Dynamics of two capacitively coupled Josephson junctions in the overdamped limit // *Physica D*. 2009. Vol. 135. P. 137.
22. *Vlasov V., Pikovsky A.* Synchronization of a Josephson junction array in terms of global variables // *Phys. Rev.* 2013. Vol. 88. P.022908
23. *Emelianova Yu.P., Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Turukina L.V.* Synchronization and multi-frequency oscillations in the low-dimensional chain of the self-oscillators // *Physica D*. 2013. Vol. 244, № 1. P. 36.

Поступила в редакцию 4.06.2015

AMAZING ROBERT ADLER

Adler’s tube, Adler’s equation, and more

*A. P. Kuznetsov^{1,2}, I. R. Sataev¹,
D. I. Trubetskov^{2,3}, E. S. Seliverstova²*

¹Kotel’nikov Institute of Radio-engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch

²Saratov State University

³National Research Nuclear University MEPhI

The article is devoted to Robert Adler, the man who combined activities as theoretical physicist, an experimental physicist and engineer-inventor, the owner of more than 200 patents. Brief biographical information about this remarkable man is presented, and a more detailed presentation of the results of his two famous studies is given, known as Adler’s gated-beam tube and Adler’s equation. For those who are interested in the Adler’s contribution to acoustoelectronics, it is important to read the article Kent J., Fakeuchi M., Laux G. Robert Adler’s Touchscreen Inventions (IEEE Ultrasonics Symposium. 2007), the material which gave impetus to write this article. In addition, the original results are presented of generalization of the Adler’s equation and analysis of generalized models using modern methods of nonlinear dynamics.

Keywords: Adler’s tube, parametric amplifier, microwave acoustic, synchronization, generalized Adler’s equation, Josephson junctions.

Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала ИРЭ РАН, заведующий базовой кафедрой динамических систем Саратовского госуниверситета. Область научных интересов: динамические системы, теория бифуркаций, синхронизация, квазипериодические колебания и их приложения. Лауреат гранта Президента Российской Федерации, Соросовский профессор (2000, 2001). Опубликовал более 100 статей в российских и международных научных журналах и 12 монографий, учебников и задачников по нелинейной динамике, теории колебаний и физике. Научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика». Автор оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов СГУ и Лицея прикладных наук.



410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
www.sgtnd.narod.ru
E-mail: apkuz@rambler.ru

Сатаев Игорь Рустамович – родился в 1959 году. Окончил Московский физико-технический институт (1982). Кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН. Область научных интересов: моделирование динамики на пороге хаоса, гиперболический хаос, критические явления и метод ренормгруппы, приложения в механике. Опубликовал более 50 статей в российских и международных журналах и монографию «Физика квазипериодических колебаний» (в соавторстве).



410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
www.sgtnd.narod.ru
E-mail: sataevir@rambler.ru

Трубецков Дмитрий Иванович – родился в Саратове (1938). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ, профессор кафедры прикладной математики НИЯУ МИФИ, член-корреспондент Российской академии наук, заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования. Научный руководитель Лицея прикладных наук и факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: вакуумная электроника и микроэлектроника сверхвысоких частот, теория колебаний и волн, нелинейная динамика, история науки. Автор более двадцати учебных пособий и монографий, а также более двухсот статей в периодической печати.



410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
115409 Москва, Каширское шоссе, 31
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
E-mail: dtrubetskov@yahoo.com

Селиверстова Екатерина Сергеевна – родилась в Энгельсе Саратовской области (1993), где окончила среднюю школу №16 с золотой медалью (2010). Студентка 5 курса факультета нелинейных процессов СГУ им. Н.Г. Чернышевского. Область научных интересов – теория колебаний и волн. По данной тематике опубликовала две статьи (одну в соавторстве) в российских реферируемых журналах.



410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: esseliverstova@yandex.ru



ПОИСК ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ ОПИСАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ВАКУУМНОГО РОЖДЕНИЯ e^-e^+ ПАР В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

В. В. Дмитриев, С. А. Смолянский, Р. М. Яхиббаев

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Простейшее кинетическое уравнение, описывающее вакуумное рождение электрон-позитронной плазмы в сильном линейно поляризованном электрическом («лазерном») поле, редуцировано к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка. Получено также соответствующее укороченное уравнение, не содержащее диссипативных вкладов. В области действия туннельного механизма вакуумного рождения впервые получены нелокальные по внешнему полю асимптотические решения этого уравнения, описывающие остаточную электрон-позитронную плазму, формирующуюся в результате действия «лазерного» импульса. Методом стереографической проекции кинетическое уравнение приведено к уравнению Риккати и на его основе найдены оценки сверху решений кинетического уравнения.

Ключевые слова: Вакуумное рождение, электрон-позитронная плазма, уравнение Риккати.

Введение

Вакуумное рождение частиц в сильных полях различной природы (эффект Заутера–Эйлера–Гейзенберга–Швингера) является одним из фундаментальных предсказаний квантовой электродинамики (КЭД), не получившим до настоящего времени экспериментального подтверждения из-за экстремально высокого значения критической напряженности электрического поля $E_c = m^2/e \sim 10^{16}$ В/см. Первоначальные предсказания были ограничены случаем постоянного поля и основывались на туннельной интерпретации эффекта. Этот результат получил корректное обоснование в работе Ю. Швингера [1]. Реальные надежды на экспериментальное обнаружение эффекта связаны со стремительным развитием лазерных технологий [2]. Ожидается, что околочритическая напряженность поля будет достигнута в фокусном пятне в ближайшие годы. В этой связи возникла необходимость в развитии теории вакуумного рождения электрон-позитронной плазмы (ЭПП) под воздействием сильных

быстропеременных электрических полей (необходимые для этого условия выполняются в фокусном пятне встречных лазерных пучков). Такая теория стала развиваться, в основном, в двух направлениях.

Барьерный механизм, который был основой первых предсказаний Заутера–Эйлера–Гейзенберга, явился стимулом для обобщения квазиклассических методов квантовой механики в КЭД сильных быстропеременных полей. Независимо были предложены несколько различающиеся подходы ([3] и, например, [4]), которые позволили оценивать скорость производства остаточной ЭПП в периодическом поле с точностью до предэкспоненциального множителя, не обращая по-существу к динамическому уровню описания (сравнительный анализ был выполнен в [5]).

В работе [6] на строгой непertурбативной основе было получено кинетическое уравнение (КУ) относительно функции распределения ЭПП, генерируемой из вакуума под действием линейно поляризованного пространственно однородного электрического поля с произвольной зависимостью от времени. Это КУ и его модификации стали основой многочисленных исследований по вакуумному рождению частиц в квантовой электродинамике, квантовой хромодинамике и космологии.

Для дальнейшего важно напомнить, что генерируемая электромагнитным импульсом ЭПП проходит в своей эволюции три своеобразных стадии: квазичастичную – в период действия внешнего поля; стадию переходного процесса, сопровождающуюся сильными флуктуациями; и конечную стадию самостоятельного существования (ей соответствует остаточная ЭПП) [5].

Область действия квазиклассических методов [3,4] ограничена оценками остаточной ЭПП, тогда как кинетическая теория эффективна на всех этапах эволюции ЭПП (это подтверждается результатами численных анализов, основанных на КУ). В частности, в работе [7] было показано, что кинетическая теория в предельном случае постоянного поля воспроизводит результат Ю. Швингера.

Однако, поскольку кинетический подход учитывает все детали динамики ЭПП, включая возбуждаемые внешним полем вакуумные флуктуации (*Zitterbewegung*), это может создавать серьезные трудности при численном анализе КУ. Таким образом, поиск приближенных сглаженных решений КУ является актуальной задачей. Этой проблеме посвящены работы [8, 9], в которых двумя различными подходами были получены сглаженные решения КУ в области квазичастичной эволюции. Такие решения обращаются в нуль в out-состоянии при $t \rightarrow \infty$ и, следовательно, не описывают остаточную ЭПП.

В настоящей работе для поиска нетривиальных решений в асимптотически удаленной области out-состояний мы используем новый подход, основанный на сведении исходного интегродифференциального КУ либо эквивалентной ему системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) к нелинейному ОДУ второго порядка (это возможно с учетом существующего в теории интеграла движения). На первый взгляд, это позволяет воспользоваться здесь хорошо известным в теории дифференциальных уравнений ВКБ-методом получения приближенных решений (метод Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна) [10–12], заимствованным из квантовой механики. Ниже на этом пути впервые получены некоторые асимптотические результаты, однако, так же как и в работах [8, 9], не были найдены характерные для работ [3, 4] решения, не аналитические по параметру $\eta = E_0/E_e$ (E_0 – амплитуда напряженности электрического поля). Анализируются причины такого результата. Далее методом стереографической проекции получены уравнения типа Риккати в различных представлениях и на их основе найдены оценки сверху решений КУ.

Основные уравнения

Для линейно поляризованного поля с 4-потенцилом $A^\mu = (0, 0, 0, A^3(t) = A(t))$ в гамильтоновской калибровке КУ имеет вид [6] (точка сверху означает производную по времени)

$$\dot{f}(\vec{p}, t) = \frac{1}{2} \lambda(\vec{p}, t) \int_{t_0}^t dt' \lambda(\vec{p}, t') [1 - 2f(\vec{p}, t')] \cos \theta(t, t'). \quad (1)$$

Здесь амплитуда вакуумных переходов $\lambda(\vec{p}, t)$ и высокочастотная фаза $\theta(t, t')$ равны, соответственно,

$$\lambda(\vec{p}, t) = eE(t) \varepsilon_\perp / \varepsilon^2(\vec{p}, t), \quad (2)$$

$$\theta(t, t') = 2 \int_{t_0}^t d\tau \varepsilon(\vec{p}, \tau), \quad (3)$$

где $E(t) = -\dot{A}(t)$; $\varepsilon(\vec{p}, t) = \sqrt{\varepsilon_\perp^2 + P^2}$ – квазиэнергия в поле $A(t)$, $\varepsilon_\perp = \sqrt{m^2 + p_\perp^2}$ – поперечная энергия и $P = p^3 - eA(t)$ – квазиимпульс. Начальное условие соответствует отсутствию поля и ЭПП: $A(t_0) = 0$, $f(\vec{p}, t_0) = 0$.

Интегродифференциальному уравнению (1) можно сопоставить систему трех ОДУ

$$\dot{f} = \frac{1}{2} \lambda u, \quad \dot{u} = \lambda(1 - 2f) - 2\varepsilon v, \quad \dot{v} = 2\varepsilon u \quad (4)$$

с дополнительными начальными условиями $u(t_0) = v(t_0) = 0$. Функции $u(\vec{p}, t)$ и $v(\vec{p}, t)$ описывают вакуумные поляризационные эффекты. Справедлив интеграл движения

$$(1 - 2f)^2 + u^2 + v^2 = 1, \quad (5)$$

записанный с учетом начальных условий. Таким образом, в любой момент эволюции вектор $\vec{V}(f, u, v)$ лежит на поверхности эллипсоида (5).

Возможны два канонических представления системы ОДУ (4), соответствующие двум физическим параметризациям времени: $t \rightarrow mt = \tau$ (m -параметризация) и $t \rightarrow \omega t = \tau$ (ω -параметризация, ω – характерная частота внешнего поля). Пусть $E(t) = E_0 \xi(t)$, так что

$$A(t) = -\frac{E_0}{\omega} \int^{t\omega} d(t'\omega) \xi(t') = -\frac{E_0}{\omega} \Xi(\omega t). \quad (6)$$

Теория является двухпараметрической по внешнему полю, характеризуемому безразмерными параметрами η и $\gamma = E_c \omega / E_0 m$ (параметр адиабатичности). Область $\gamma \ll 1$ соответствует доминированию туннельного механизма, при $\gamma \gg 1$ действует многофотонный механизм возбуждения ЭПП. Наиболее интересной является существенно непертурбативная область $\gamma \ll 1$. В пределе $\gamma \rightarrow 0$ приведенная квазиэнергия ε/m имеет особенность. Выделим ее в явном виде

$$\varepsilon/m = \varepsilon_\gamma / \gamma, \quad \varepsilon_\gamma = [\gamma^2 \varepsilon_\perp^2 / m^2 + (\gamma p^3 / m - \Xi)^2]^{1/2}, \quad (7)$$

так что $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \varepsilon_\gamma = |\Xi|$, что соответствует энергии электрона во внешнем поле при $\vec{p} = 0$. Тогда амплитуда (2) может быть представлена в виде

$$\lambda = \eta\gamma^2\lambda_\gamma \quad \lambda_\gamma = \varepsilon_\perp \xi / \varepsilon_\gamma^2 \quad (8)$$

независимо от выбора параметризации.

Система ОДУ (4) в m -параметризации в асимптотической области $\gamma \ll 1$ будет иметь вид

$$\dot{f} = (\eta\gamma^2/2)\lambda_\gamma u, \quad \dot{u} = \eta\gamma^2\lambda_\gamma(1 - 2f) - (2/\gamma)\varepsilon_\gamma v, \quad \dot{v} = (2/\gamma)\varepsilon_\gamma u. \quad (9)$$

В ω -параметризации эта система принимает вид

$$\dot{f} = (\gamma/2)\lambda_\gamma u, \quad \dot{u} = \gamma\lambda_\gamma(1 - 2f) - (2/\eta\gamma^2)\varepsilon_\gamma v, \quad \dot{v} = (2/\eta\gamma^2)u. \quad (10)$$

Последняя система была предварительно изучена в работе [9], а ОДУ третьего порядка, построенное на основе системы (9), рассмотрено в работе [8]. В обеих работах не было удовлетворительных решений в области действия поля. Однако было найдено нетривиальное решение для ЭПП в остаточном стационарном состоянии.

Ниже мы продолжим поиск решения типа ВКБ проблемы на основе полученного в следующем разделе нелинейного ОДУ второго порядка (что возможно с учетом закона сохранения (5)), уповая на то, что метод ВКБ хорошо адаптирован к теории ОДУ второго порядка [10–12].

Нелинейное ОДУ второго порядка

Получим сначала искомое уравнение в общем виде. Из закона сохранения (5) можно выразить функцию v через f и u . Подставим результат во второе уравнение системы (4)

$$\dot{u} = \lambda(1 - 2f) - 2\varepsilon [1 - (1 - 2f)^2 - u^2]^{1/2}. \quad (11)$$

Продифференцируем первое уравнение системы (4) и используем его и (11), чтобы получить замкнутое уравнение для функции распределения. В результате получим уравнение осцилляторного типа с нелинейной частью

$$\ddot{f} - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}\dot{f} + \lambda^2 f = \frac{1}{2}\lambda^2 - 2\lambda\varepsilon [f - f^2 - \frac{\dot{f}^2}{\lambda^2}]^{1/2}, \quad (12)$$

или

$$\ddot{F} - (\dot{\lambda}/\lambda)\dot{F} + \lambda^2 F = 2\lambda\varepsilon [1 - F^2 - \lambda^{-2}\dot{F}^2]^{1/2}, \quad (13)$$

где введена функция заполнения $F = 1 - 2f \in [0, 1]$. Начальные условия $F(t_0) = 1$, $\dot{F}(t_0) = 0$ соответствуют начальным условиям для уравнений (1), (4).

Из (13) следует полезная и неожиданная интерпретация отдельных слагаемых: амплитуда вакуумных переходов (2) определяет частоту медленных осцилляций функции заполнения (быстрые осцилляции, согласно (1) и (3), происходят на частотах 2ε), а функция $\dot{\lambda}/\lambda$ описывает обобщенную диссипацию. Нелинейная правая часть соответствует вынуждающей внешней силе с амплитудой $2\lambda\varepsilon$, на которую оказывает влияние как уровень заполнения F^2 , так и скорость заполнения $\lambda^{-2}\dot{F}^2$.

Ниже мы рассмотрим простейшую ситуацию, когда можно пренебречь вынуждающей силой, то есть правыми частями уравнений (12), (13). Уравнение (12) в этом приближении слабого поля ($\eta \gg 1$) имеет вид

$$\ddot{f} - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \dot{f} + \eta^2 \lambda^2 f = 0 \quad (14)$$

и может быть решено методом ВКБ [10–12]. Во втором приближении в разложении по $1/\eta$ получим

$$f(\vec{p}, t) = \sin^2 \left\{ \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt' \lambda(t') \right\} = \sin^2 J(\vec{p}; t, t_0)/2. \quad (15)$$

Таким образом, функция распределения в этом приближении осциллирует с вынужденной частотой, набор фазы определяется интегралом $J(\vec{p}; t, t_0)$. Эта функция распределения обладает физическим смыслом, $0 \leq f \leq 1$, является интегрируемой (интеграл по импульсному пространству определяет плотность числа ЭПП пар) и удовлетворяет начальному условию. Важно также, что полученное решение является нелокальным по внешнему полю и, следовательно, пригодным для описания остаточной ЭПП при $t \rightarrow \infty$. При исследовании КУ (1) нелокальное решение получено впервые. Это позволяет исследовать некоторые особенности импульсного спектра остаточной сильно неравновесной ЭПП и его зависимость от используемого приближения.

Простейший результат может быть получен в лидирующем приближении, когда в интеграле (15) влияние внешнего поля учитывается только в числителе амплитуды (2) (силовой эффект), так что

$$J(\vec{p}; t, t_0) = \frac{eE_0 \varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_0^2(\vec{p})} \int_{t_0}^t dt' \xi(t'), \quad (16)$$

где $\varepsilon_0(p) = \sqrt{m^2 + p^2}$. Интеграл в (16) зависит исключительно от параметров поля. Из (16) видно, что p^3 -вырождение функции распределения, важное для формирования псевдотеплового спектра [15], отсутствует. Для финитных полей из (15) и (16) следует, что скорость рождения ЭПП является нелинейной функцией длительности полевого импульса.

Нетрудно теперь показать, что решение (15) приводит к p^3 -вырождению, если не использовать лидирующее приближение. Входящий в (15) интеграл вычисляется с помощью замены (см. определение (6)) $\omega \xi(t) dt = d\Xi(\omega t)$,

$$J(t, t_0) = \int_{t_0}^t dt' \lambda(t') = \frac{\varepsilon_{\perp}}{\omega} \left\{ \arctg \frac{x(t)}{a} - \arctg \frac{x(t_0)}{a} \right\}, \quad (17)$$

где $a = \gamma \varepsilon_{\perp} / m$ и $x(t) = \Xi(\omega t) - \gamma p^3 / m$.

Отсюда видно, что только инфинитные поля приводят к p^3 -вырождению в двойной асимптотике $t \rightarrow \infty$, $t_0 \rightarrow -\infty$: в этом пределе при любом конечном p^3 можно пренебречь импульсным слагаемым в $x(t) \simeq \Xi(\omega t)$

В качестве модельной ситуации интересно рассмотреть частный случай, когда вторая поляризация функция в (4) и (5) полагается равной нулю, $v = 0$ (сечение

$u = 0$ приводит, согласно (4), к тривиальному решению $f = 0$). Этот случай соответствует (f, u) -сечению эллипсоида (5) и укороченным уравнениям. Соответствующее ОДУ второго порядка имеет вид

$$\ddot{F} + \lambda^2 F = \dot{\lambda} \sqrt{1 - F^2}. \quad (18)$$

По сравнению с уравнением (13) здесь отсутствуют диссипативные вклады $\sim \dot{F}$. Однако уравнение (18) является вполне самостоятельным в том смысле, что оно не может быть получено из (13) вычеркиванием \dot{F} . Для малых осцилляций $F^2 \ll 1$ из (18) получим неоднородное ОДУ второго порядка с квадратичной нелинейностью (приближение слабой нелинейности)

$$\ddot{F} + \lambda^2 F + (\dot{\lambda}/2)F^2 = \dot{\lambda}. \quad (19)$$

Поскольку диссипативное слагаемое в уравнении (12) проявляется лишь в третьем порядке разложения по $1/\eta$, уравнение (19) приводит в рассматриваемом приближении к тому же решению (15), что и уравнение (12).

Редкий тип иррациональной нелинейности в ОДУ (12) и (13) имеет, в частности, аналогию в космологии. Запишем уравнения Фрийдмана в метрике FRW относительно масштабного фактора $a(t)$ (напр., [13])

$$\dot{a}^2 = \frac{G}{3}\varepsilon a^2 - \kappa, \quad \ddot{a} = -\frac{G}{6}(\varepsilon + 3p)a, \quad (20)$$

где $\kappa = 0, \pm 1$, а ε и p есть плотность материи и давление. Исключая в этих уравнениях $a(t)$, получим ОДУ второго порядка с обсуждавшимся типом иррациональной нелинейности

$$\ddot{a} = -\frac{1}{2}(\varepsilon + 3p)\sqrt{\frac{G}{3\varepsilon}(\kappa + \dot{a}^2)}. \quad (21)$$

Согласно стандартному условию энергодоминантности, здесь $\varepsilon + 3p > 0$. В отличие от уравнений (12) и (13), это уравнение не содержит массового слагаемого в левой части, что и приводит к отсутствию в эволюции осцилляторного режима. Эта бесщелевая модель эволюции имеет аналоги в других физических моделях (например, в КЭД $D = 2 + 1$ модели в графене [14]). Таким образом, ОДУ типа (13) охватывает целый ряд задач современной теоретической физики.

Стереографическая проекция

Переобозначим для удобства функцию заполнения $b \equiv F = 1 - 2f$. Тогда интеграл движения (5) позволяет интерпретировать функции v, u, b как точку на единичной сфере $P(v, u, b)$

$$v^2 + u^2 + b^2 = 1. \quad (22)$$

Расположим единичную сферу таким образом, что ее северный полюс будет иметь координаты $N(0, 0, 1)$. Тогда прямая NP пересекает плоскость (u, v) в координатах

$$\tilde{u} = \frac{u}{1 - b} = \frac{u}{2f}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{1 - b} = \frac{v}{2f}. \quad (23)$$

Отсюда

$$\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 = \frac{1+b}{1-b} = 1 + \frac{1}{f}, \quad b = \frac{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 - 1}{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + 1}. \quad (24)$$

Обратные преобразования для (23) имеют вид

$$u = \frac{2\tilde{u}}{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + 1}, \quad v = \frac{2\tilde{v}}{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + 1}. \quad (25)$$

Уравнения (4) можно переписать в матричном виде

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v \\ u \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\varepsilon & 0 \\ -2\varepsilon & 0 & \lambda \\ 0 & -\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ u \\ b \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Из (23)–(26) можно получить систему двух ОДУ относительно новых переменных

$$\frac{d\tilde{v}}{dt} = -2\varepsilon\tilde{u} + 2\lambda\tilde{u}\tilde{v}, \quad (27)$$

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} = 2\varepsilon\tilde{v} - \lambda(\tilde{u}^2 - \tilde{v}^2 - 1). \quad (28)$$

Введем комплексную величину $z = \tilde{v} + i\tilde{u}$, тогда систему уравнений (27)–(28) можно переписать в виде одного уравнения

$$\dot{z} \equiv \frac{dz}{dt} = i\lambda + 2i\varepsilon z - i\lambda z^2. \quad (29)$$

Это нелинейное ОДУ первого порядка, известное как уравнение Риккати. Его можно линеаризовать с помощью преобразований Хопфа–Кола [16]

$$z = \alpha \frac{\dot{\Omega}}{\Omega}, \quad \alpha = \frac{1}{i\lambda}, \quad \dot{\Omega} \equiv \frac{d\Omega}{dt}. \quad (30)$$

Отсюда получаем линейное ОДУ второго порядка

$$\ddot{\Omega} + 2\left(-i\varepsilon + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}\right)\dot{\Omega} + \lambda^2\Omega = 0. \quad (31)$$

В отличие от уравнения (13), данное уравнение является однородным. Можно избавиться от младших производных и привести это уравнение к виду, удобному для нахождения ВКБ-асимптотики.

Для нахождения непосредственно функции распределения f удобно использовать обратное преобразование

$$f = \frac{1}{2} \frac{zz^* - 1}{zz^* + 1}. \quad (32)$$

ВКБ-оценка

Введем мнимое время $\tau \equiv it$ и перепишем уравнение Риккати (29) в виде

$$z' \equiv \frac{dz}{d\tau} = \lambda + 2\varepsilon z - \lambda z^2. \quad (33)$$

Используем следующие преобразования:

$$y \equiv \lambda z, \quad \beta \equiv y - \left(\varepsilon + \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \ln \lambda \right), \quad \frac{x'}{x} \equiv \beta. \quad (34)$$

Следуя [12], введем комплекснозначную функции $Q(\tau) \in C^2(I)$ на интервале I : $0 < \tau < \infty$

$$Q(\tau) \equiv \lambda^2 + \left(\varepsilon + \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \ln \lambda \right)^2 + \frac{d}{d\tau} \left(\varepsilon + \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \ln \lambda \right), \quad (35)$$

удовлетворяющую следующим условиям:

1) $Q(\tau) \neq 0, \tau \in I$;

2) существует ветвь $\sqrt{Q(\tau)}$ класса $C^2(I)$, такая что $\operatorname{Re} \sqrt{Q(\tau)} \geq 0, \tau \in I$.

Тогда уравнение (33) имеет простой вид

$$x'' - Q(\tau)x = 0. \quad (36)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} S(\tau, \tau_0) &= \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{Q(\gamma)} d\gamma, \\ \delta(\tau) &= \frac{1}{8Q^{5/2}} \left[\sqrt{Q''} \sqrt{Q} - \frac{5}{4} (\sqrt{Q}')^2 \right], \\ \rho(\tau, \tau_0) &= \int_{\tau_0}^{\tau} |\delta(\gamma)| d\gamma. \end{aligned} \quad (37)$$

Положим

$$\tilde{x}_1(\tau) = Q^{-1/4}(\tau) \exp [S(\tau, \tau_0)]. \quad (38)$$

Если выполнено условие $\rho(0, \tau) < \infty, \tau \in I$, то справедлива следующая ВКБ-оценка решения $x_1(\tau)$ уравнения (36)

$$\left| \frac{x_1(\tau)}{\tilde{x}_1(\tau)} - 1 \right| \leq 2 \left(e^{2\rho(0, \tau)} - 1 \right). \quad (39)$$

Теперь положим

$$\tilde{x}_2(\tau) = Q^{-1/4}(\tau) \exp [-S(\tau, \tau_0)]. \quad (40)$$

При условии $\rho(\tau, \infty) < \infty, \tau \in I$ имеем следующую ВКБ-оценку решения $x_2(\tau)$ уравнения (36):

$$\left| \frac{x_2(\tau)}{\tilde{x}_2(\tau)} - 1 \right| \leq 2 \left(e^{2\rho(\tau, \infty)} - 1 \right). \quad (41)$$

Из ВКБ-оценок следуют асимптотические формулы для решений

$$x_1(\tau) \sim \tilde{x}_1(\tau), \quad \tau \rightarrow 0; \quad x_2(\tau) \sim \tilde{x}_2(\tau), \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (42)$$

Данные оценки (38) и (40) полезны при численном решении исходных уравнений.

Результаты работы

В настоящей работе был продолжен поиск в русле работ [8, 9] приближенных решений КУ, описывающих на непертурбативной основе вакуумное рождение ЭПП в сильном переменном линейно поляризованном «лазерном» поле. Исходное интегродифференциальное КУ немарковского типа мы редуцировали к ОДУ второго порядка с иррациональной нелинейностью (13) и нашли его частное решение в асимптотической области $\gamma \gg 1$, в которой действует многофотонный механизм вакуумного рождения. Впервые это решение оказалось пригодным для описания out-состояния ЭПП. Важной особенностью решения является его аналитический характер по полевому параметру $\eta = E_0/E_c$, а также возникновение p^3 -вырождения в случае инфинитных полей. Этот результат стимулирует поиск более реалистических решений ВКБ типа, которые, как можно ожидать, также содержатся в уравнении (13).

Библиографический список

1. *Schwinger J.* On gauge invariance and vacuum polarization // *Phys. Rev.* 1951. Vol. 82. P. 664.
2. *Gregori G., Blaschke D.B. et al.* A proposal for testing subcritical vacuum pair production with high power lasers // *High Energy Density Physics.* 2010. Vol. 6, № 2. P. 166.
3. *Brezin E., Itzykson C.* Pair production in vacuum by an alternating field // *Phys. Rev. D.* 1970. Vol. 2. P. 1191.
4. *Bulanov S.S., Narozhny N.B., Mur V.D., Popov V.S.* Electron-positron pair production by electromagnetic pulses // *JETP.* 2006. Vol. 102, № 1. P. 9.
5. *Smolyansky S.A., Dmitriev V.V., Panferov A.D., Prozorkevich A.V., Blaschke D., Juchnowski L.* WKB-type approximations in the theory of vacuum particle creation in strong fields // *Proceedings of the XXII Baldin ISHEPP.* 2014. P. 043.
6. *Schmidt S., Blaschke D., Ropke G., Smolyansky S.A., Prozorkevich A.V., Toneev V.D.* A quantum kinetic equation for particle production in the Schwinger mechanism // *IJMP. E.* 1998. Vol. 07, № 06. P. 709.
7. *Fedotov A.M., Gelfer E.G., Korolev K.Yu., Smolyansky S.A.* Kinetic equation approach to pair production by a time-dependent electric field // *Phys. Rev. D.* 2011. Vol. 83. P. 025011.
8. *Smolyansky S.A., Bonitz M., Prozorkevich A.V.* Laser driven electron-positron pair creation-kinetic theory versus analytical approximations // *Contrib. Plasma Phys.* 2013. Vol. 53, № 10. P. 788.
9. *Smolyansky S.A., Prozorkevich A.V., Dmitriev V.V., Tarakanov A.V.* Smoothed solutions in the kinetic theory of $e+e$ -vacuum pair creation in strong laser fields. Linear polarization // *IJMP. E.* 2014. Vol. 23, № 11. P. 1450068.
10. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Пер. с нем. Изд. 4-е, испр. М.: Наука: Гл. ред. физ-мат. лит., 1971. 576 с.
11. *Найфэ А.Х.* Введение в методы возмущений / Пер. с англ. М.: Мир, 1984, 535 с.

12. Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.
13. Глинер Э.Б. Раздувающаяся Вселенная и вакуумоподобное состояние физической среды // УФН. 2002. Т. 172, № 2. С. 221.
14. Yokomizo N. Radiation from electrons in graphene in strong electric field // Annals of Phys. 2014. Vol. 351. P. 166.
15. Нарожный Н.Б., Никушов А.И. Решения уравнений Клейна–Гордона и Дирака для частицы в постоянном электрическом поле и распространяющейся вдоль него плоской электромагнитной волне // ТМФ. 1976. Т. 26, № 1. С. 16.
16. Webb G.M., Hu Q., le Roux J.A., Dasgupta B., Zank G.P. Hamiltonians and variational principles for Alfvén simple waves // J. Phys. A: Math. Theor. 2012. Vol. 45, № 2. P. 025203.

References

1. Schwinger J. // Phys. Rev. 1951. Vol. 82, P. 664.
2. Gregori G., Blaschke D.B. et al. // High Energy Density Physics. 2010. Vol. 6, № 2. P. 166.
3. Brezin E., Itzykson C. // Phys. Rev. D. 1970. Vol. 2. P. 1191.
4. Bulanov S.S., Narozhnyi N.B., Mur V.D., Popov V.S. // JETP. 2006. Vol. 102, № 1. P. 9.
5. Smolyansky S.A., Dmitriev V.V., Panferov A.D., Prozorkevich A.V., Blaschke D., Juchnowski L. // Proceedings of the XXII Baldin ISHEPP. 2014. P. 043.
6. Schmidt S., Blaschke D., Ropke G., Smolyansky S.A., Prozorkevich A.V., Toneev V.D. // IJMP. E. 1998. Vol. 07, № 06. P. 709.
7. Fedotov A.M., Gelfer E.G., Korolev K.Yu., Smolyansky S.A. // Phys. Rev. D. 2011. Vol. 83. P. 025011.
8. Smolyansky S.A., Bonitz M., Prozorkevich A.V. // Contrib. Plasma Phys. 2013. Vol. 53, № 10. P. 788.
9. Smolyansky S.A., Prozorkevich A.V., Dmitriev V.V., Tarakanov A.V. // IJMP. E. 2014. Vol. 23, № 11. P. 1450068.
10. Kamke E. Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen. Vieweg+Teubner Verlag, 1977. 670 p.
11. Nayfeh Ali H. Perturbation Methods. John Wiley & Sons, New York, 2000. 441 p.
12. Fedoryuk M.V. Asymptotic Analysis: Linear Ordinary Differential Equations. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993. 363 p.
13. Gliner E.B. // Physics-Uspkhi. 2002. Vol. 45, № 6. P. 213.
14. Yokomizo N. // Annals of Phys. 2014. Vol. 351. P. 166.
15. Narozhnyi N.B., Nikishov A.I. // Theor. and Math. Phys. 1976. Vol. 26, № 1. P. 9.
16. Webb G.M., Hu Q., le Roux J.A., Dasgupta B., Zank G.P. // J. Phys. A: Math. Theor. 2012. Vol. 45, № 2. P. 025203.

Поступила в редакцию 26.05.2015

© В.В. Дмитриев, С.А. Смолянский, Р.М. Яхиббаев
Изв. вузов «ПНД», т. 23, № 3, 2015

SEARCH FOR APPROXIMATE METHODS FOR DESCRIPTION OF NONLINEAR VACUUM e^-e^+ PAIRS CREATION PROCESSES IN ELECTROMAGNETIC FIELDS

V. V. Dmitriev, S. A. Smolyansky, R. M. Yahibbaev

Saratov State University

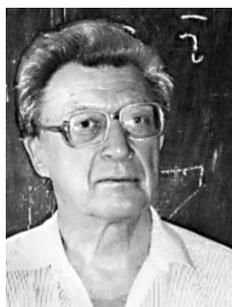
The simplest kinetic equation for description of the electron-positron plasma vacuum creation in a strong linearly polarized electric («laser») field was reduced to the nonlinear ordinary differential equation of the second order. The corresponding truncated equation without the dissipative contributions was obtained also. In area of the tunnel mechanism action the non-local under an external field solutions for the residual electron-positron plasma was first obtained. In general case, the upper estimations for the kinetic equation solutions was found on the Riccati equation basis that is a result of application of the stereographic projection method to the basic kinetic equation.

Keywords: Vacuum creation, electron-positron plasma, Riccati equation.



Дмитриев Вадим Владимирович – родился в Саратове (1980). Окончил Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (2003). Там же защитил кандидатскую диссертацию (2007) в области теоретической физики. Доцент кафедры теоретической физики СГУ. Автор более 20 работ по квантовой теории поля и гравитации.

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: dmitrievv@gmail.com



Смолянский Станислав Александрович – родился в Саратове (1936). Окончил Саратовский госуниверситет (1960). Защитил кандидатскую диссертацию (1969) и докторскую (1988) в области теоретической физики. Профессор кафедры теоретической физики СГУ. Автор более 150 работ по данному направлению.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: smol@sgu.ru



Яхиббаев Равиль Маратович – родился в с. Осинов-Гай, Саратовской области (1993), окончил СГУ (2015). Магистрант кафедры теоретической физики СГУ. Лауреат стипендии Правительства Российской Федерации (2014).

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: ravmarat@gmail.com



НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКОВ И ЕЕ ТЕСТИРОВАНИЕ

С. С. Волощук

Саратовский государственный университет

Приведен вариант построения нелинейной нестационарной теории взаимодействия электронных потоков в двухлучевых системах для случая попутных и встречных пучков. Сделано тестовое сравнение результатов построенной теории с расчетами линейной теории для обоих случаев.

Ключевые слова: Электронно-волновая лампа, двухпучковая неустойчивость, метод частиц в ячейках.

Введение

Благодаря простоте конструкции и возможности конструирования терагерцевых приборов многолучевые системы являются привлекательным объектом исследования. К настоящему времени предложены теории для многих частных случаев таких систем: например, линейная теория попутных и встречных пучков [1], нелинейная теория попутных пучков [2]. В настоящей работе предлагается вариант нелинейной нестационарной теории взаимодействия электронных потоков в двухлучевых системах (примером такой системы может быть электронно-волновая лампа). Рассмотрены случаи попутных и встречных пучков. Проведено тестовое сравнение результатов расчета в рамках нелинейной теории с расчетами линейной теории электронно-волновой лампы [1] для обоих случаев.

На рис. 1 представлена схема электронно-волновой лампы с попутными пучками. Разность скоростей потоков обеспечивается разностью потенциалов катодов

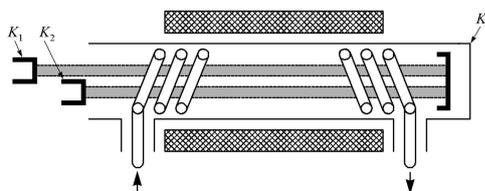


Рис. 1. Схема электронно-волновой лампы с попутными пучками

K_1 и K_2 . Один из потоков модулируется на входе с помощью отрезка замедляющей системы (например, спирали). Скорость потока подбирается близкой к фазовой скорости замедляющей системы, что обеспечивает эффективное взаимодействие. Далее пучки поступают в пространство дрейфа, где взаимодействуют.

Усиленный сигнал снимается вторым отрезком замедляющей системы. Отработанные пучки оседают на коллекторе K .

В построенной модели модуляция с помощью отрезков спирали для простоты заменена на скоростную модуляцию в момент влета, что соответствует модуляции с помощью резонатора.

Анализ рассматриваемой модели основан на методе «частицы в ячейках» (particle-in-cell или PIC-модель). Модель фактически является модификацией одномерной модели клистрона с бесконечно широким пучком [3]: один пучок заменяется на два пучка, каждый для своего сорта частиц, отличающихся начальными средними скоростями. При такой замене приходится складывать электрические поля первого и второго пучка на каждом шаге, но появляется возможность вычислять распределение тока для каждого пучка в отдельности.

Основные уравнения модели: это уравнение Пуассона и уравнения движения. Для удобства была произведена нормировка физических величин:

$$\begin{aligned} \rho &\rightarrow \rho_0 \tilde{\rho} && \text{— объемная плотность заряда,} \\ v_i &\rightarrow v_0 \tilde{v}_i && \text{— скорость крупной частицы в } i\text{-м пучке,} \\ \varphi &\rightarrow v_0^2 \tilde{\varphi} / \eta && \text{— потенциал,} \\ E &\rightarrow v_0^2 \tilde{E} / (L\eta) && \text{— напряженность электрического поля,} \\ x &\rightarrow L \tilde{x} && \text{— координата крупной частицы,} \\ t &\rightarrow L \tilde{t} / v_0 && \text{— время.} \end{aligned}$$

Здесь L – длина пространства взаимодействия; v_0 , ρ_0 – невозмущенная начальная скорость и плотность первого потока; η – отношение заряда к массе электрона. Безразмерные переменные обозначены знаком тильда « \sim », так как далее будет идти речь только о безразмерных переменных, знак тильда будем опускать.

Рассмотрим кратко схему реализации расчетов. Пространство взаимодействия разбивается на ячейки. Вычисление значений плотности заряда, потенциала, поля пространственного заряда происходит в узлах этой сетки (эти величины дискретны по координате). На каждом шаге в пространство влетают электроны, координата которых непрерывно меняется на всей длине взаимодействия.

Каждая итерация начинается с процедуры «взвешивания» частиц [3] для каждого пучка в отдельности. Это необходимо для перехода от пучка электронов с «непрерывными» координатами к дискретному распределению плотности заряда в пространстве. После того, как получены распределения зарядов в первом и втором пучке, происходит вычисление распределений потенциалов. Для этого решается уравнение Пуассона «методом распространения ошибки»

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \alpha^2 \rho, \\ \varphi(0) = \varphi(L) = 0, \end{cases}$$

где $\alpha = \omega_p L / v_0$, ω_p – плазменная частота.

Теперь возможно вычислить распределение напряженности поля пространственного заряда на основе центральных разностей

$$E_{\text{пз}} = - \partial \varphi / \partial x,$$

где $\varphi(x)$ есть решение уравнения Пуассона.

До этого момента все величины вычислялись для каждого пучка в отдельности, и в результате имеем два распределения напряженности поля пространственного заряда, создаваемых каждым пучком. Суммируя эти распределения, получим распределение напряженности поля, действующее на электроны. Используя узловые значения, можно с помощью линейной интерполяции вычислить напряженность поля, действующую на каждую частицу,

$$E(x_m) = E_j((j+1)\Delta x - x_m) + E_{j+1}(x_m - j\Delta x),$$

здесь m – индекс по массиву частиц, j – индекс по массиву ячеек.

Найденная напряженность поля для каждой частицы используется для вычисления изменения скорости и координаты крупных частиц

$$V_{t+1} = v_t + E(x_m)\Delta t,$$

$$X_{t+1} = x_t + v_t\Delta t.$$

Последний этап – это ввод в пространство новых электронов и удаление электронов вышедших за пределы пространства взаимодействия.

Для анализа процессов, протекающих в пространстве взаимодействия, удобнее рассматривать плотность тока пучка. Вычисление распределения плотности тока происходит аналогично вычислению распределения плотности заряда.

Результаты расчетов для модели попутных потоков и их сравнение с линейной теорией

Для тестирования описанной модели будем сравнивать результаты расчетов с линейной теорией (см., например, [4]). Уравнения гидродинамической модели в используемых переменных имеют вид

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 i_1}{\partial x^2} + 2jw\alpha \frac{\partial i_1}{\partial x} - w^2\alpha^2 i_1 = -\alpha^2 (i_1 + i_2), \\ \frac{\partial^2 i_2}{\partial x^2} + 2jw\frac{\alpha}{v} \frac{\partial i_2}{\partial x} - w^2\frac{\alpha^2}{v^2} i_2 = -\frac{\alpha^2}{v^2} (i_1 + i_2), \end{cases} \quad (1)$$

здесь i_1, i_2 – плотность тока первого и второго пучка; $v = v_{01}/v_{02}$ – отношение начальных немодулированных скоростей первого и второго потоков; $w = \omega/\omega_p$ – частота входного сигнала, нормированная на плазменную частоту; j – мнимая единица. Система (1) записана в предположении, что все переменные величины изменяются во времени как $e^{j\omega t}$.

Решение дисперсионного уравнения для системы (1) имеет следующий вид:

$$b_k = \frac{\beta}{\beta_p} = \frac{2}{1+v} \left(w \pm \sqrt{\left(w\frac{v-1}{v+1}\right)^2 + 1} \pm \sqrt{4\left(w\frac{v-1}{v+1}\right)^2 + 1} \right), \quad k = 1, \dots, 4, \quad (2)$$

здесь $\beta_p = \omega_p/v_{01}$. Таким образом, решение системы (1) представляет собой суперпозицию четырех парциальных волн пространственного заряда. Зависимости мнимой и действительной части волнового числа от частоты приведены на рис. 2. Видно,

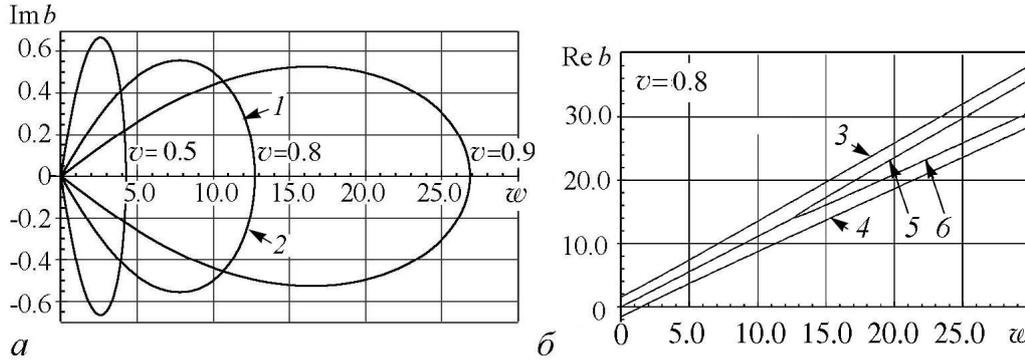


Рис. 2. Дисперсионная характеристика модели для нескольких параметров v : a – мнимая часть волнового числа, b – действительная часть волнового числа

что существуют две области изменения корней. В первой области ($0 < w < 13$ для $v = 0.8$) существует: одна волна с экспоненциально возрастающей амплитудой (1), одна с экспоненциально затухающей (2) (рис. 2, a) и две волны с постоянной амплитудой (3, 4) (рис. 2, b) – эту область изменения параметра w принято называть областью неустойчивости. Во второй области ($13 < w$ для $v = 0.8$) возможно распространение четырех волн постоянной амплитуды (3, 4, 5, 6) (рис. 2, b) – это область интерференции.

Для того, чтобы сравнивать линейную модель с нелинейной нужно использовать одинаковую модуляцию входного электронного потока. Уравнения линейной модели записаны относительно плотности тока, поэтому модуляцию по скорости можно ввести следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{i}}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} \\ \tilde{\rho} = \frac{\tilde{i} - \rho_0 \tilde{v}}{v_0} \end{array} \right. \xrightarrow{\rho \sim e^{j\omega t}} \frac{\partial \tilde{i}}{\partial x} \Big|_{x=0} = j\omega \rho_0 \frac{\tilde{v}}{v_0},$$

или в используемых безразмерных переменных: $\frac{\partial \tilde{i}}{\partial x} \Big|_{x=0} = jw\alpha\tilde{v}$, где w – безразмерная частота модуляции. Таким образом, граничные условия для линейной модели имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{i}_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = jw\alpha\tilde{v}_1, \\ \frac{\partial \tilde{i}_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \\ \tilde{i}_1 \Big|_{x=0} = 0, \\ \tilde{i}_2 \Big|_{x=0} = 0. \end{array} \right.$$

Рассмотрим работу лампы в области неустойчивости при следующих параметрах: $\alpha = 1$, $w = 10$, $v = 0.9$. На рис. 3 приведены распределения первой гармоники плотности тока в лампе для первого и второго пучка вдоль пространства взаимодействия: здесь 1 – модулированный пучок, 2 – немодулированный; сплошная линия – линейная теория; кружками обозначено распределение плотности первой гармоники тока по расчетам нелинейной теории, квадратами – второй гармоники. На начальном

этапе модели демонстрируют хорошее взаимное соответствие. Как и ожидалось из анализа дисперсионных диаграмм, модели демонстрируют рост амплитуды тока по пространству взаимодействия. Из рис. 3, б видно, что на определенной длине начинают сказываться нелинейные эффекты: с ростом координаты заметно увеличивается амплитуда второй гармоники (рис. 4, б), что и приводит к расхождению результатов.

Рассмотрим поведение модели в области интерференции при следующих параметрах: $\alpha = 1$, $v = 0.8$. На рис. 5 приведены зависимости распределения амплитуды первой гармоники тока в немодулированном пучке по пространству взаимодействия.

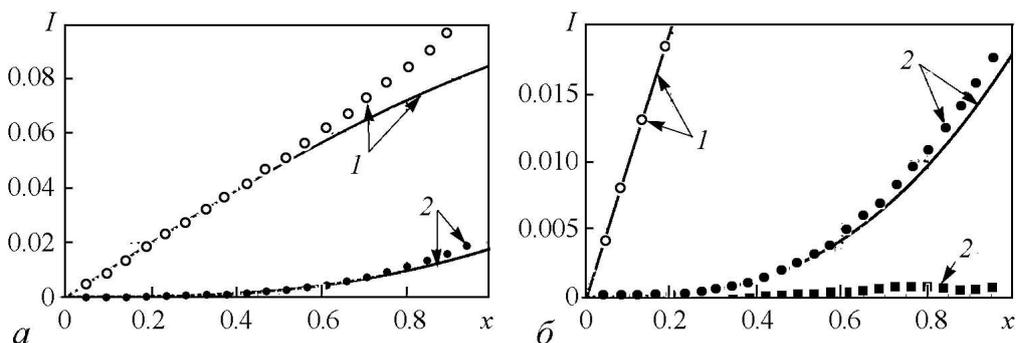


Рис. 3. а – распределение по длине пространства взаимодействия первой гармоники тока: 1 – модулированный пучок при амплитуде модуляции начальной скорости 10^{-2} , 2 – немодулированный пучок; б – увеличенный фрагмент участка для первой гармоники модулированного и немодулированного пучка и второй гармоники тока немодулированного пучка

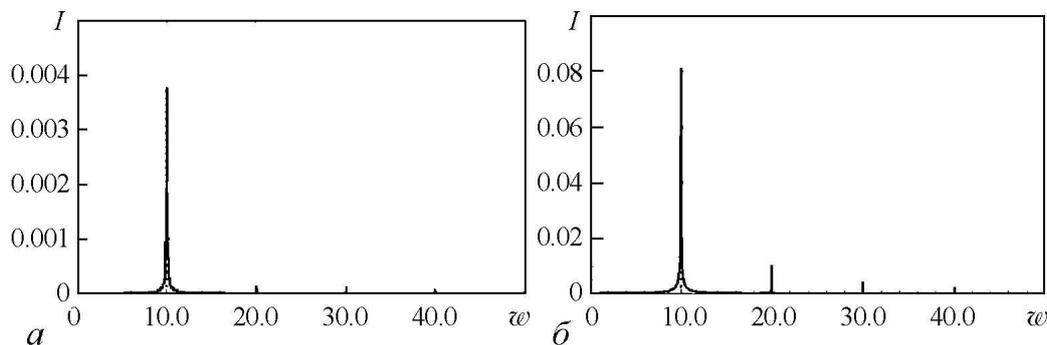


Рис. 4. Спектры переменной составляющей тока немодулированного пучка для различных координат x пространства взаимодействия: а – 0.05, б – 0.95

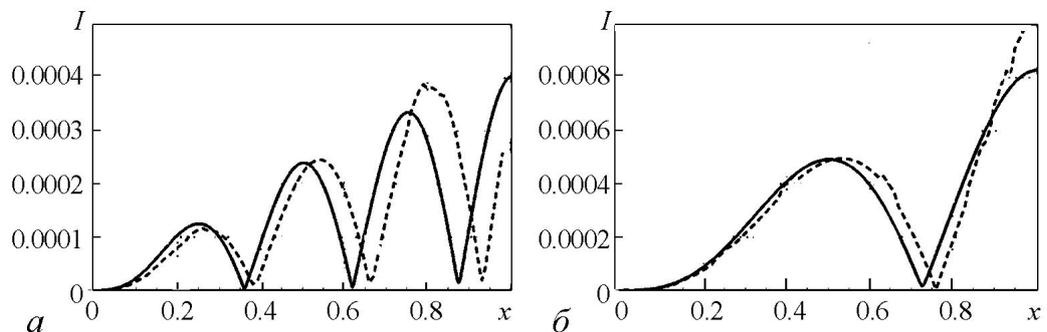


Рис. 5. Распределение первой гармоники тока для различной входной частоты w в немодулированном пучке: а – 100, б – 50. Сплошная линия – линейная модель, пунктирная линия – нелинейная модель

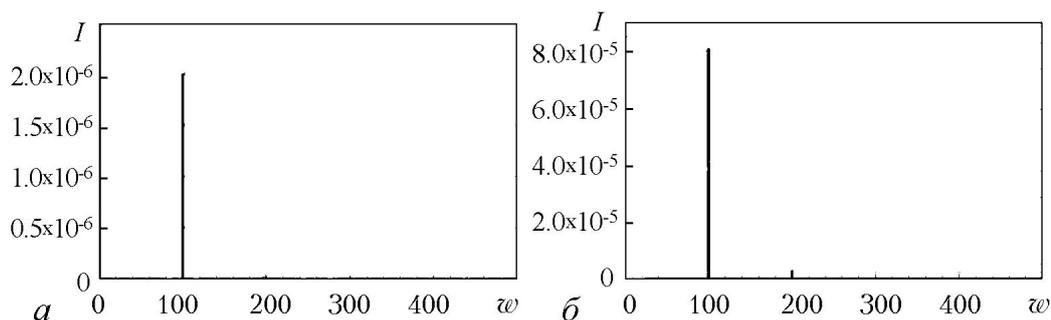


Рис. 6. Спектр переменной составляющей тока для различных координат x пространства взаимодействия: $a - 0.05$, $b - 0.95$

Поведение линейной и нелинейной модели в области интерференции качественно совпадают, но с ростом координаты результаты расходятся. Это происходит из-за роста амплитуды второй гармоники, что видно из спектра, приведенного на рис. 6, б.

Результаты расчетов для встречных потоков и их сравнение с линейной теорией

Перейдем к анализу встречных потоков. Для проверки результатов нелинейной модели воспользуемся результатами работы [1], которая также основана на линейной гидродинамической теории, но построенной для встречных потоков.

Для простоты будем рассматривать случай встречных потоков, движущихся с одинаковыми скоростями навстречу друг другу. Уравнения модели аналогичны (1), но в данном случае имеем $v = -1$. Для этого случая можно получить (см., например, [1]) точное решение дисперсионного уравнения, которое имеет вид,

$$b_k = \pm \sqrt{1 + w^2 \pm \sqrt{1 + 4w^2}}, \quad k = 1, \dots, 4.$$

На рис. 7 приведены дисперсионные зависимости мнимой и действительной частей волновых чисел b_k . Аналогично случаю попутных пучков можно выделить область неустойчивости ($0 < w < 1.4$) и область интерференции ($1.4 < w$), где существуют такие же волны, как и в случае попутных пучков.

Рассмотрим поведение моделей встречных пучков в области интерференции. На рис. 8 показано распределение тока по координате для двух моделей и спектр плотности тока модулированного пучка в точке $x = 0.95$. Здесь: сплошной линией показано распределение переменной составляющей тока для гидродинамической модели, точками – распределение первой гармоники тока нелинейной модели. Кривые 1 соответствуют модулированному пучку, движущемуся в положительном направлении, кривые 2 – немодулированному встречному пучку. Модуляция потока производилась по скорости, величина модуляции 0.01. Графики построены при частоте модуляции $w = 5$ для разных значений параметра α .

Можно сделать вывод, что даже при малой модуляции с увеличением параметра α в спектре тока появляются нелинейные составляющие (рис. 8, б), с ростом которых соответствие между моделями пропадает (рис. 8, в). Увеличение параметра α можно интерпретировать как увеличение длины пространства взаимодействия.

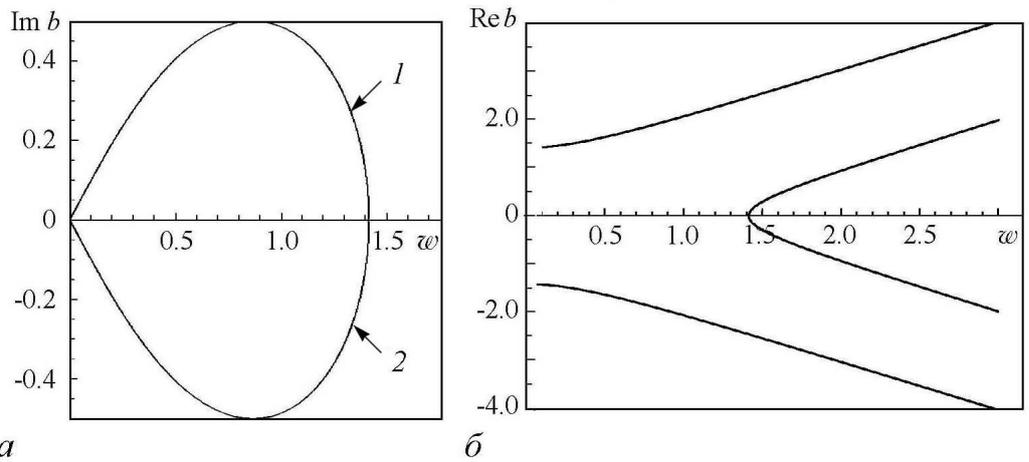


Рис. 7. Дисперсионная характеристика модели для встречных пучков с одинаковыми скоростями: a – мнимая часть волновых чисел, b – действительная часть волновых чисел

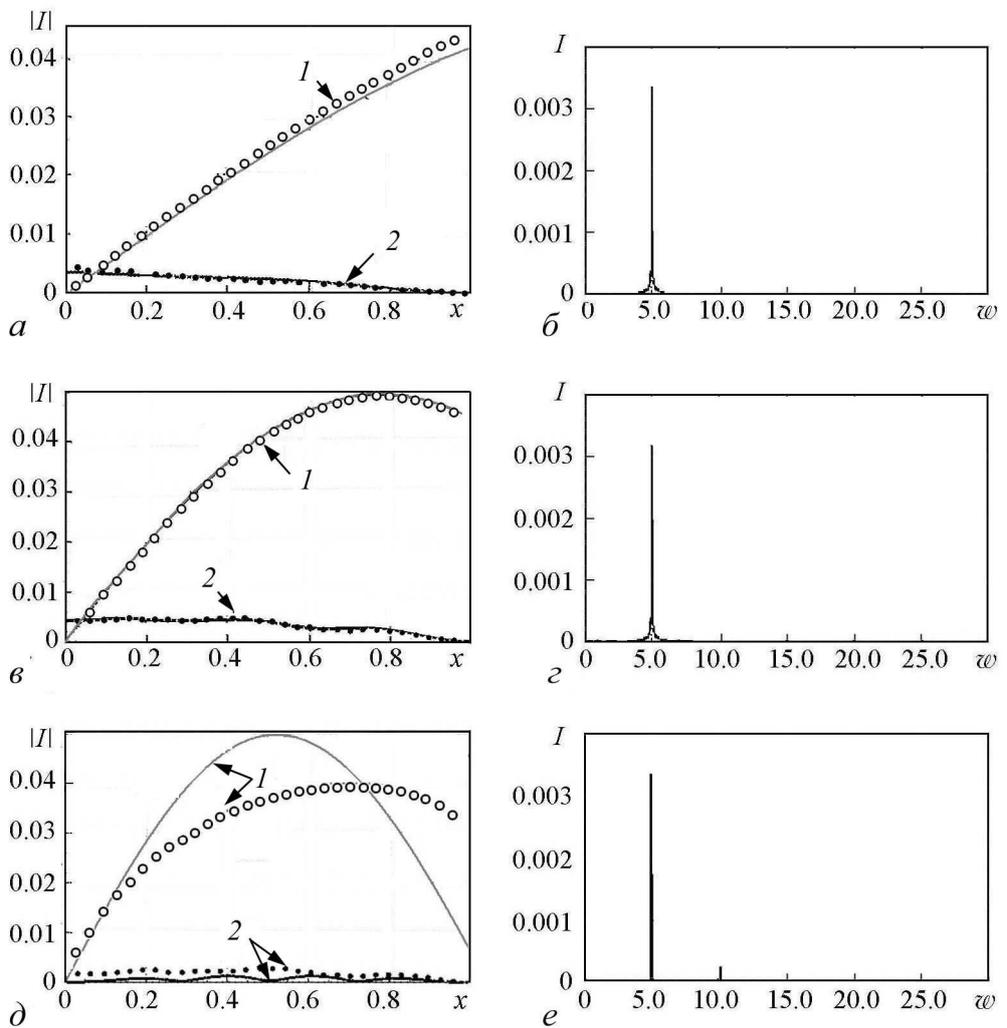


Рис. 8. Распределение тока модулированного 1 и немодулированного 2 пучка по координате для двух моделей и спектр плотности тока модулированного пучка при $x = 0.95$ для различных значений α : $a - 1$, $б - 2$, $в - 3$

Также из этих рисунков видно, что возбуждаемая во встречном пучке амплитуда колебаний плотности тока гораздо меньше амплитуды колебаний в модулированном пучке. С увеличением частоты модуляции w ($w > 5$) возбуждаемая амплитуда колебаний плотности тока уменьшается, и взаимодействие между пучками практически пропадает, что соответствует результатам работы [1].

В [1] показано, что для области неустойчивости возможно добиться значительного усиления входного сигнала. Но в нелинейной модели не удалось добиться значительного усиления, так как для РС-модели начинают проявляться свойства частиц, а именно возможность их поворота.

В некоторой области параметров w и α , в которой не происходит поворота частиц, поведение моделей качественно совпадает (рис. 9). Вне этой области возможен поворот электронов, что принципиально невозможно в гидродинамической (линейной) модели.

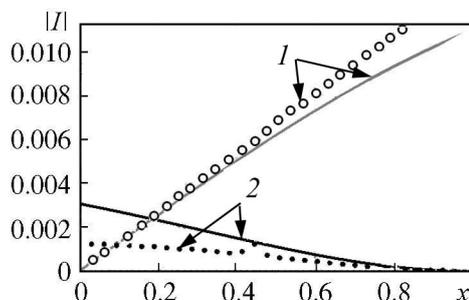


Рис. 9. Распределение тока модулированного 1 и немодулированного 2 пучка по координате для двух моделей при $w = 1.3$, $\alpha = 1$

Заключение

Предложенная нелинейная модель двухлучевой системы демонстрирует хорошее соответствие линейной модели на коротких промежутках взаимодействия. С ростом длины пространства дрейфа увеличивается вклад высших гармоник и соответствие между моделями пропадает. При некоторых значениях входного сигнала и длины пространства дрейфа в построенной модели происходит разворот электронов, что невозможно в линейных моделях, используемых для сравнения.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 13-02-01209 А.

Библиографический список

1. Лопухин В.М., Рошаль А.С. Усилитель на встречных электронных потоках // Радиотехника и электроника. 1962. № 4, с 643.
2. Филимонов Г.Ф. Нелинейная теория двухлучевой электронной лампы. Ч. I. Вывод и исследование уравнений // Радиотехника и электроника. 1959. № 3, с 489.
3. Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. В 2-х т. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003
4. Шевчик В.Н., Трубецков Д.И. Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М.: Советское радио, 1970.

References

1. Lopuhin V.M., Roshal A.S. Opposite directed beam amplifier // Radiotekhnika i elektronika. 1962. № 4. P. 643. (In Russian)

2. *Filimonov G.F.* Nonlinear theory two-stream tube. P. I. Deriving and studying of equations // Radiotekhnika i elektronika. 1959. № 3. P. 489. (In Russian)
3. *Trubetskov D.I., Khramov A.E.* Lectures on Microwave Electronics for Physicists. In 2 volumes. Moscow: FIZMATLIT, 2003. (In Russian)
4. *Shevchik V.N., Trubetskov D.I.* Analytic methods of calculation in microwave electronics. Moscow: Sovetskoe radio, 1970. (In Russian)

Поступила в редакцию 26.05.2015

NONLINEAR MODEL OF TWO ELECTRON BEAM AND TESTING

S. S. Voloshchuk

Saratov State University

Non-linear nonstationary theory of two-stream amplifier has been suggested for case of co- and opposite directed beams. Non-linear theory has been compared with calculation of linear theory for both cases.

Keywords: Two-stream amplifier, two-stream instability, particle-in-cell method.



Волощук Сергей Сергеевич – родился в Саратове (1990), окончил Саратовский государственный университет (2013). В настоящее время – аспирант факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Научные интересы – численные методы, многолучевые системы. Имеет одну научную публикацию в журнале «Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика».

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: ss.voloshchuk@gmail.com



НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ РЕЗИСТИВНОГО УСИЛИТЕЛЯ М-ТИПА

О. А. Кильдякова, А. А. Фунтов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Представлены результаты исследования линейной теории двух моделей резистивного устройства М-типа.

Ключевые слова: Резистивный усилитель, М-тип, линейная теория.

Введение

В настоящее время одно из активно развиваемых направлений современной науки о колебаниях и волнах связано с исследованием особенностей взаимодействия электронных потоков с электромагнитными полями с акцентом на терагерцовый диапазон частот. В связи с этим начинается возвращение к некоторым забытым идеям, которые на фоне развития новых технологий могут быть воплощены в реальные приборы. К таким идеям относится возможность использования резистивного усилителя, на который сейчас вновь обратили внимание (на конгрессе IVEC-2015 был представлен доклад *Rowe T., Behdad N., Booske J. Metamaterial-Enhanced Resistive Wall Amplifiers*).

В СВЧ электронике резистивный усилитель О-типа был исследован в режиме слабого сигнала [1–3]. Преимущества этого прибора согласно [3]: отсутствие необходимости синхронизма между скоростью электронов и фазовой скоростью волны, высокие значения усиления, а также практически полное отсутствие обратной связи между выходом и входом, так как нет передачи энергии в направлении, противоположном движению пучка. Исследования резистивного усилителя М-типа, кроме краткого описания в обзоре [3], где указано, что в нём возможен малый уровень шума, не известны.

Постановка задачи

Рассмотрим следующую модель. Промодулированный бесконечно тонкий электронный поток магнетронного типа влетает в область, в которой ВЧ-поле отсутствует. Под этой областью будем понимать пространство между двумя плоскостями,

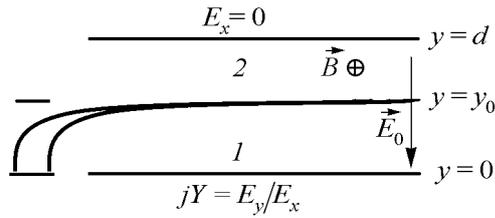


Рис. 1. Рассматриваемая модель

индуктивной $Y = 1/(j\omega L)$, емкостной $Y = j\omega C$ и резистивной ($\text{Im } Y = 0$) проводимостей.

На входе в область, где ВЧ-поля нет, пучок в общем случае имеет продольное \tilde{x} и поперечное \tilde{y} смещения. Волны, которые могут распространяться ниже и выше пучка (области 1 и 2 на рис. 1, соответственно), имеют вид $\bar{E} = \bar{E}(y) e^{j(\omega t - \beta x)}$, с составляющими

$$\begin{cases} E_{x1,2}(y) = a_{1,2} \text{sh } \beta y + b_{1,2} \text{ch } \beta y, \\ E_{y1,2}(y) = ja_{1,2} \text{ch } \beta y + jb_{1,2} \text{sh } \beta y. \end{cases}$$

Причем в 1-й области $y < y_0$ и $E_x/E_y|_{y=0} = 1/(jY)$, а во 2-й области $y > y_0$ и $E_x|_{y=d} = 0$.

Условия разрыва нормальной составляющей напряженности поля пространственного заряда имеют вид

$$\begin{cases} E_{y2} - E_{y1} = -\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}, \\ E_{x2} - E_{x1} = -\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x}, \end{cases}$$

где σ_0 – поверхностная плотность заряда пучка, ε_0 – диэлектрическая постоянная.

Как и в [4], предположим, что

$$\begin{cases} E_{xПЗ} = \frac{E_{x1} + E_{x2}}{2}, \\ E_{yПЗ} = \frac{E_{y1} + E_{y2}}{2}. \end{cases}$$

Путем несложных преобразований получим

$$\begin{cases} E_{xПЗ} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \left(-j \frac{(Y \text{th} [\beta y_0] + 1) \text{th} [\beta (d - y_0)]}{Y (\text{th} [\beta y_0] + \text{th} [\beta (d - y_0)]) + 1 + \text{th} [\beta y_0] \text{th} [\beta (d - y_0)]} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} - \frac{g_y}{2} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \right), \\ E_{yПЗ} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{g_y}{2} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} + j \frac{Y + \text{th} [\beta y_0]}{Y (\text{th} [\beta y_0] + \text{th} [\beta (d - y_0)]) + 1 + \text{th} [\beta y_0] \text{th} [\beta (d - y_0)]} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \right), \end{cases} \quad (1)$$

где

$$g_y = \frac{Y (\text{th} [\beta (d - y_0)] - \text{th} [\beta y_0]) - 1 + \text{th} [\beta y_0] \text{th} [\beta (d - y_0)]}{Y (\text{th} [\beta y_0] + \text{th} [\beta (d - y_0)]) + 1 + \text{th} [\beta y_0] \text{th} [\beta (d - y_0)]}.$$

Нетрудно видеть, что, если нижняя плоскость будет металлической (то есть $Y \rightarrow \infty$), то параметр g_y , характеризующий положение пучка между электродами, примет вид

$$g_y = \frac{\text{th} [\beta (d - y_0)] - \text{th} [\beta y_0]}{\text{th} [\beta y_0] + \text{th} [\beta (d - y_0)]} = g, \quad (2)$$

как в [4].

причем нижняя (рис. 1) имеет проводимость

$$jY = \frac{E_y}{E_x}.$$

В общем случае проводимость может быть комплексной величиной. В данной работе рассматриваются случаи

Дисперсионное уравнение и исследование его корней

Из уравнений движения в адиабатическом приближении следует, что

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} = \frac{E_{y\Pi3}}{B}, \\ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} = -\frac{E_{x\Pi3}}{B}, \end{cases} \quad (3)$$

где v_0 – средняя скорость пучка, а B – индукция магнитного поля.

Полагая все величины пропорциональными $e^{j(\omega t - \beta x)}$, подставим выражение (1) в систему уравнений (3). Дисперсионное уравнение при этом имеет вид

$$\left(\omega - \beta v_0 + g_y \frac{\Omega_{\text{пл}}^2}{\omega_c} \right)^2 = - \left(\frac{\Omega_{\text{пл}}^2}{\omega_c} \right)^2 MN, \quad (4)$$

где $MN = 4 \frac{(Y \operatorname{th} [\beta y_0] + 1) (Y + \operatorname{th} [\beta y_0]) \operatorname{th} [\beta (d - y_0)]}{(Y (\operatorname{th} [\beta y_0] + \operatorname{th} [\beta (d - y_0)]) + 1 + \operatorname{th} [\beta y_0] \operatorname{th} [\beta (d - y_0)])^2}$, $\frac{\Omega_{\text{пл}}^2}{\omega_c} = \frac{\sigma_0 \beta}{2 \varepsilon_0 B}$.

Следуя [4], рассматриваем классический режим работы приборов М-типа, в котором $\beta \approx \beta_e = \omega/v_0$. Корни дисперсионного уравнения запишутся в виде

$$\beta_{1,2} = \beta_e \left(1 + \frac{\Omega_{\text{пл}}^2}{\omega_c \omega} \left(g_y \pm j \sqrt{MN} \right) \right). \quad (5)$$

При $Y \rightarrow \infty$ $g_y = g$ (согласно (2)) и

$$MN = 4 \frac{\operatorname{th} [\beta y_0] \operatorname{th} [\beta (d - y_0)]}{(\operatorname{th} [\beta y_0] + \operatorname{th} [\beta (d - y_0)])^2},$$

а уравнение (4) переходит в уравнение (V.83) работы [4]

$$(\omega - \beta v_0)^2 + 2g \frac{\Omega_{\text{пл}}^2}{\omega_c} (\omega - \beta v_0) + \left(\frac{\Omega_{\text{пл}}^2}{\omega_c} \right)^2 = 0.$$

Исследуем корни дисперсионного уравнения (4). Рассмотрим сначала случай резистивной проводимости ($\operatorname{Im}[Y] = 0$). Из рис. 2, а видно, что MN асимпто-

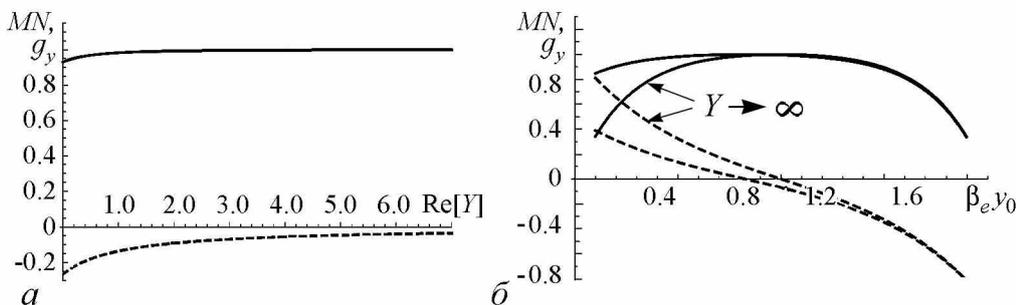


Рис. 2. Зависимость MN (сплошные) и g_y (пунктир) от $\operatorname{Re}[Y]$ (а) при $\beta_e d = 2\beta_e y_0 = 2.0$ и от $\beta_e y_0$ (б) при $\beta_e d = 2.0$, $\operatorname{Re}[Y] = 3.0$ и $Y \rightarrow \infty$

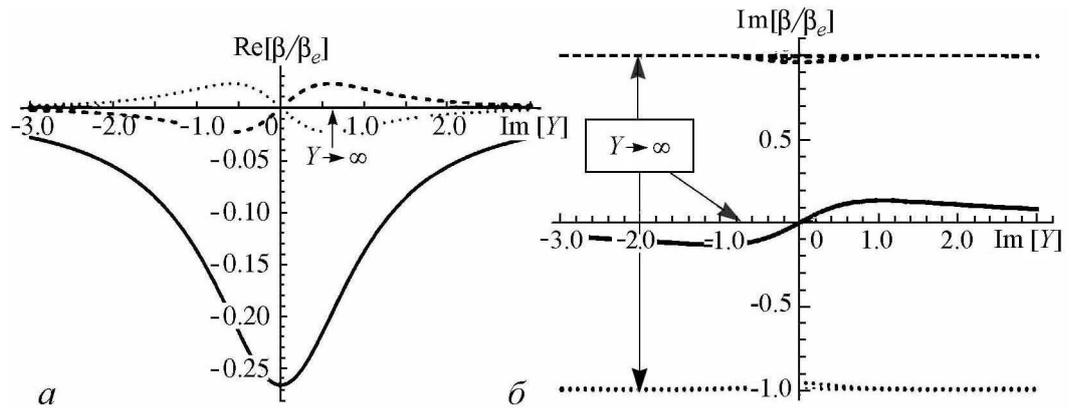


Рис. 3. Зависимость $\text{Re}(\beta/\beta_e)$ (а) и $\text{Im}(\beta/\beta_e)$ (б) от $\text{Im}[Y]$ при $\beta_e d = 2\beta_e y_0 = 2.0$. Сплошными линиями отмечены $\text{Re}[g_y]$ (а), $\text{Im}[g_y]$ (б); пунктирными – $-\text{Im}[\sqrt{MN}]$ (а), $\text{Re}[\sqrt{MN}]$ (б); точками – минус $\text{Im}[\sqrt{MN}]$ (а); минус $\text{Re}[\sqrt{MN}]$ (б)

тически стремится к единице, а g_y – к нулю, причем они слабо зависят от $\text{Re}[Y]$. Рис. 2, б показывает, что изменение значения проводимости будет играть существенную роль, пока поток близок к резистивной плоскости.

Рассмотрим далее случай индуктивной ($\text{Re}[Y] = 0$; $\text{Im}[Y] < 0$) и емкостной ($\text{Re}[Y] = 0$; $\text{Im}[Y] > 0$) проводимостей. В случае комплексной проводимости действительная и мнимая части (5) имеют вид

$$\begin{cases} \text{Re} \frac{\beta}{\beta_e} = 1 + \frac{\Omega_{\text{пл}}^2}{\omega_c \omega} \left(\text{Re}[g_y] \mp \text{Im}[\sqrt{MN}] \right), \\ \text{Im} \frac{\beta}{\beta_e} = 1 + \frac{\Omega_{\text{пл}}^2}{\omega_c \omega} \left(\text{Im}[g_y] \pm \text{Re}[\sqrt{MN}] \right). \end{cases}$$

Нетрудно видеть (рис. 3), что наиболее значимый вклад в $\text{Re}(\beta/\beta_e)$ вносит величина g_y , а в $\text{Im}(\beta/\beta_e)$ – величина \sqrt{MN} . При этом в случае металлических стенок $\text{Re}(\beta/\beta_e)$ достигает нуля, а $\text{Im}(\beta/\beta_e)$ – единицы или минус единицы.

Расчет коэффициентов усиления

Представим возмущения, распространяющиеся в рассматриваемой системе, в виде

$$\begin{cases} \tilde{x} = C_1 e^{-j\beta_1 x} + C_2 e^{-j\beta_2 x}, \\ \tilde{y} = C_3 e^{-j\beta_1 x} + C_4 e^{-j\beta_2 x}. \end{cases}$$

Используем начальные условия

$$\begin{cases} \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0, \\ \frac{\partial \tilde{x}(0)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0, \\ \frac{\partial \tilde{y}(0)}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\tilde{x}(x) = \frac{\tilde{x}_0}{\beta_1 - \beta_2} \left(-\beta_2 e^{-j\beta_1 x} + \beta_1 e^{-j\beta_2 x} \right).$$

Формула для $\tilde{y}(x)$ будет выглядеть аналогично.

Полную поверхностную плотность тока будем искать в виде

$$i(x) = I_0 \left(j\theta \tilde{x} e^{j\beta_1 x} + \tilde{y} e^{j\beta_2 x} \right) = I_0 \frac{j\theta \tilde{x}_0 e^{j\beta_1 x} + \tilde{y}_0 e^{j\beta_2 x}}{\beta_1 - \beta_2} \left(-\beta_2 e^{-j\beta_1 x} + \beta_1 e^{-j\beta_2 x} \right),$$

где $\theta = \omega \sigma_0 / I_0$, а I_0 – постоянная компонента поверхностной плотности тока пучка.

Зададим модуляцию тока, считая \tilde{x}_0 и \tilde{y}_0 вещественными. Тогда

$$\theta \tilde{x}_0 = \operatorname{Im} \frac{i(0)}{I_0} = \xi$$

и

$$\tilde{y}_0 = \operatorname{Re} \frac{i(0)}{I_0} = \psi,$$

где ξ и ψ – компоненты безразмерной начальной поверхностной плотности тока.

Коэффициент усиления определяем в виде

$$G = 10 \lg \left| \frac{i(x)}{I_0} \right| = 10 \lg \left| \frac{j\xi e^{j\beta_1 x} + \psi e^{j\beta_2 x}}{\beta_1 - \beta_2} \left(-\beta_2 e^{-j\beta_1 x} + \beta_1 e^{-j\beta_2 x} \right) \right|. \quad (6)$$

Рассмотрим случай резистивной проводимости. На рис. 4 представлены зависимости G от положения пучка и безразмерной длины резистивной секции. Нетрудно видеть, что усиление слабо зависит от значения проводимости и имеет максимум при $y_0 = d/2$. В более общем случае зависимости аналогичны представленным на рис. 4, поэтому приводиться не будут.

Результаты исследования позволяют предположить, что в резистивном усилителе М-типа возможно усиление. Например, при ускоряющем потенциале 1 кВ, частоте сигнала 3 ГГц и проводимости $5 \cdot 10^{-4}$ См при рассматриваемой высоте резистивной секции 2 мм и длине 20 мм усиление в данной модели составляет 22 дБ.

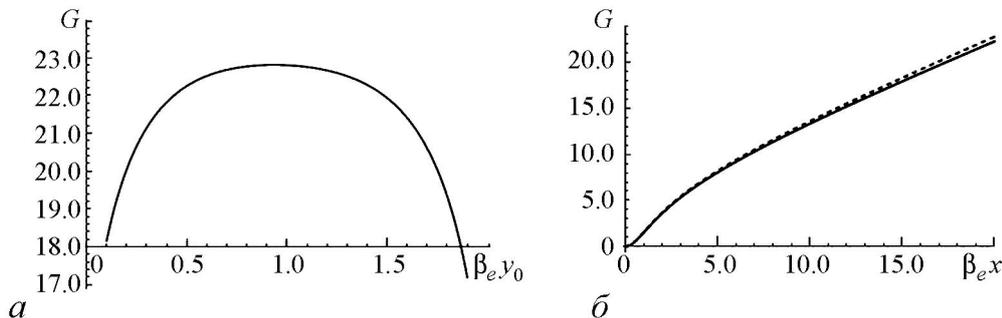


Рис. 4. Зависимость коэффициента усиления от положения пучка при $\beta_e x = 20.0$, $\operatorname{Re}[Y] = 101$ (а) и от безразмерной длины пространства взаимодействия при $\beta_e y_0 = 1.0$ (б). $\beta_e d = 2.0$, $\Omega_{\text{пл}}^2 / \omega_0 = 0.1$, $\xi = \psi = 10^{-3}$, $\operatorname{Re}[Y] = 0.1$ – сплошная линия и $Y \rightarrow \infty$ – пунктир

Случай верхней проводящей плоскости

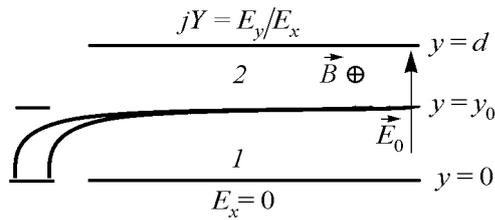


Рис. 5. Вторая рассматриваемая модель

Проводя вывод формул вышеописанным образом, получим дисперсионное уравнение, аналогичное (4)

$$\left(\omega - \beta v_0 + g_y \frac{\Omega_{\text{пл}}^2}{\omega_c}\right)^2 = -\left(\frac{\Omega_{\text{пл}}^2}{\omega_c}\right)^2 MN, \quad (7)$$

в котором

$$g_y = \frac{Y (\text{th} [\beta (d - y_0)] - \text{th} [\beta y_0]) - 1 + \text{th} [\beta y_0] \text{th} [\beta (d - y_0)]}{Y (\text{th} [\beta y_0] + \text{th} [\beta (d - y_0)]) - 1 - \text{th} [\beta y_0] \text{th} [\beta (d - y_0)]},$$

$$MN = 4 \frac{(Y \text{th} [\beta (d - y_0)] - 1) (Y - \text{th} [\beta (d - y_0)]) \text{th} [\beta y_0]}{(Y (\text{th} [\beta y_0] + \text{th} [\beta (d - y_0)]) - 1 - \text{th} [\beta y_0] \text{th} [\beta (d - y_0)])^2}.$$

Рассмотрим корни (7) для случая резистивной проводимости.

Аналогично рис. 2, а, MN на рис. 6, а асимптотически стремится к единице, а g_y – к нулю, причем вблизи $Y = 1 + 0j$ знаменатели в выражениях для MN и g_y обращаются в нуль.

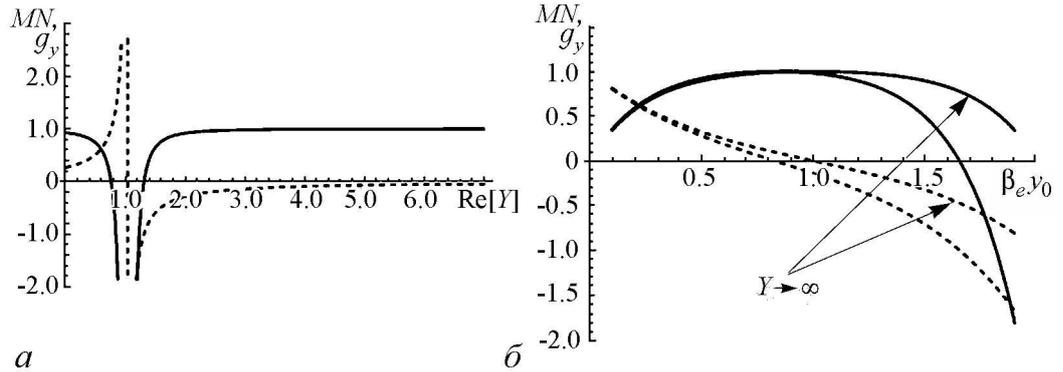


Рис. 6. Зависимость MN (сплошные линии) и g_y (пунктир) от $\text{Re}[Y]$ при $\beta_e d = 2\beta_e y_0 = 2.0$ (а) и от $\beta_e y_0$ при $\beta_e d = 2.0, \text{Re}[Y] = 3.0$ (б)

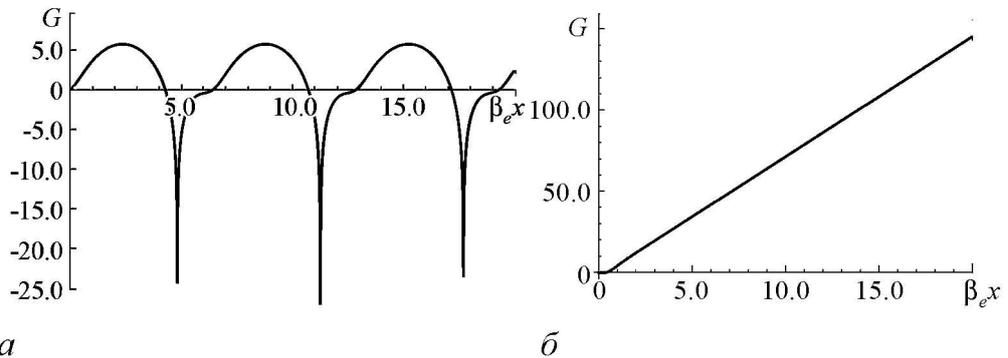


Рис. 7. Зависимость коэффициента усиления от безразмерной длины пространства взаимодействия при $Y = 0.982$ (а); $Y = 1.0535 - 0.015j$ (б). $\beta_e d = 2\beta_e y_0 = 2.0, \Omega_{\text{пл}}^2/\omega_c = 0.1, \xi = \psi = 10^{-3}$

Исследуем коэффициент усиления для этой модели, который будем находить по формуле, аналогичной (6). Вследствие определенной симметричности корней (5) и (7), рассмотрим лишь случаи с различным поведением систем.

Предположим, что в начале пространства взаимодействия вследствие шумовой модуляции $i(x=0) = i_0$, а в конце пространства взаимодействия потребуем, чтобы $i(x=l) = 0$. Тогда условия подавления (рис. 8) примут вид

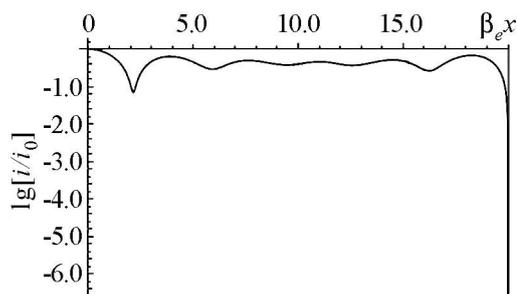


Рис. 8. Зависимость $\lg[i/i_0]$ от безразмерной длины пространства взаимодействия в случае подавления при $\beta_e d = 2\beta_e y_0 = 2.0$, $\Omega_{пл}^2/(\omega_c \omega) = 0.1$, $Y = 1.07 - 0.005j$, $\beta_e l = 20$

$$\begin{cases} j\xi + \psi = i_0, \\ j\xi e^{j\beta_1 l} + \psi e^{j\beta_2 l} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi = \frac{-ji_0}{1 - e^{j(\beta_1 - \beta_2)l}}, \\ \psi = \frac{-i_0 e^{j(\beta_1 - \beta_2)l}}{1 - e^{j(\beta_1 - \beta_2)l}}. \end{cases}$$

В заключение данной работы можно сказать, что в резистивном устройстве М-типа можно наблюдать высокие коэффициенты усиления, периодичность усиления по длине и подавление.

Библиографический список

1. Birdsall C.K., Brewer G.R., Haeff A.V. The resistive-wall amplifier // Proceedings of the I.R.E. 1953. 41. P. 865.
2. Birdsall C.K., Whinnery J.R. Waves in an electron stream with general admittance walls // Journal of Applied Physics. 1953. Vol. 24, № 3.
3. Варнеке Р. Эволюция принципов действия современных электровакуумных приборов для СВЧ // Сборник статей «Миллиметровые и субмиллиметровые волны» / Под ред. Р.Г. Мириманова. М.: Издательство иностранной литературы, 1959.
4. Шевчик В.Н., Трубецков Д.И. Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М.: «Советское радио», 1970.

References

1. Birdsall C.K., Brewer G.R., Haeff A.V. The resistive-wall amplifier // Proceedings of the I.R.E. 1953. Vol. 41. P. 865.
2. Birdsall C.K., Whinnery J.R. Waves in an electron stream with general admittance walls // Journal of Applied Physics. 1953. Vol. 24, № 3.
3. Warnecke R. Convegno di elettronica etelevisione, Milano, 2, 706, 1954.
4. Shevchik V.N., Trubetskov D.I. Analytic methods of calculation in microwave electronic. M.: «Soviet radio», 1970. (In Russian).

Поступила в редакцию 3.07. 2015

SOME QUESTIONS OF THE THEORY OF RESISTIVE WALL AMPLIFIER M-TYPE

O. A. Kildyakova, A. A. Funtov

Saratov State University

Results of researching linear theory of two models of resistive wall amplifier M-type are presented.

Keywords: Resistive wall amplifier, M-type, linear theory.



Кильдякова Оксана Александровна – родилась в г. Хвалынске Саратовской области (1993). Окончила общеобразовательную школу с серебряной медалью (2010), СГУ им. Н.Г. Чернышевского с красным дипломом (2015). Область научных интересов – теория турбулентности, теория СВЧ-приборов.

10012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: oksanakildyakova@yandex.ru.



Фунтов Александр Андреевич – родился в г. Балаково Саратовской области (1992). Окончил Саратовский государственный университет (2014). В настоящее время – аспирант кафедры электроники, колебаний и волн. Автор 5 научных публикаций. Область научных интересов – вакуумная СВЧ-электроника.

10012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: aafuntov@mail.ru



СИНЕРГЕТИКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ АНАЛИЗА КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

С. А. Корчагин¹, Д. В. Терин^{1,2}, С. П. Романчук¹

¹Энгельсский технологический институт (филиал) ФГБОУ ВПО
«Саратовский государственный технический университет им. Ю.А. Гагарина»

²Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Авторами предложен комплексный подход для анализа композиционных материалов, включающий в себя фундаментальные модели нелинейной динамики, модель эффективной среды и теорию электрических цепей. Рассмотрен композит, состоящий из сферических включений в матрице. Проведено моделирование композиционного материала различными методами.

Ключевые слова: композиционные материалы, математическое моделирование, синергетика, модель эффективной среды, нелинейная динамика, электронные эквивалентные схемы.

Введение

В настоящее время разработка и проектирование современных конструкционных и функциональных материалов является одной из важнейших приоритетных задач. Композиционные материалы применяются во многих областях человеческой деятельности, в том числе в электронике и электротехнике для создания конденсаторов, силовых резисторов, сенсоров, ячеек памяти и других устройств. Уникальность композитов состоит в том, что можно заранее спроектировать материал таким образом, чтобы придать изделию из него свойства, необходимые для конкретной области применения. Определение характеристик объекта исследования во многих случаях является затруднительным, трудоемким и дорогостоящим. Поэтому математическое и компьютерное моделирование в данной области является актуальной задачей [1]. Особое внимание при создании материалов с заданными свойствами следует уделять эволюции динамической системы. Нередко временная эволюция системы при формировании материала оказывается настолько значимой, что возникает необходимость использовать различные временные и параметрические диаграммы [2].

Кроме того, в процессе проектирования материала нельзя упускать из виду, что различные эффекты (термодинамические, кинетические, электромагнитные и т.д.) взаимосвязаны, хотя наличие такой взаимосвязи не всегда означает возможность управления ею. При моделировании таких систем удобным оказывается междисциплинарный подход, позволяющий объединить фундаментальные модели нелинейной динамики, эффективной среды и теорию электрических цепей в применении к химии материалов.

1. Модель эффективной среды

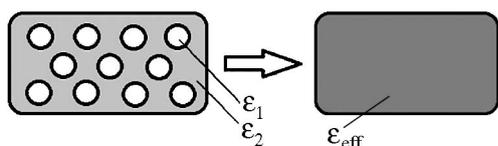


Рис. 1. Схематическое изображение эффективной среды

Важную роль в физике композитных сред играет так называемая модель эффективной среды [3]. Суть модели заключается в том, что совокупность кластеров, из которых состоит композит, рассматривается как некая новая среда, обладающая тем же уровнем поляризации (рис. 1).

Таким образом, зная параметры каждого из компонентов композита, их геометрическую форму и концентрацию, можно определить характеристики полученной композиционной среды как целого. Преимуществом данного подхода является то, что для анализа распространения излучения в композитной среде нет необходимости решать уравнения Максвелла в каждой точке пространства. В качестве моделей эффективной среды наиболее широко применяются модели Рэлея, Максвелла, Максвелл-Гарнетта, Бруггемана (см. таблицу). Авторами разработан программный

Таблица

Название	Модель
Рэлея (1 вариант)	$\varepsilon = \varepsilon_m \left[1 + \frac{v}{\frac{\varepsilon_p + 2\varepsilon_m}{\varepsilon_p - \varepsilon_m} - v - 1,65 \frac{\varepsilon_p - \varepsilon_m}{\varepsilon_p + 4/3\varepsilon_m} v^{10/3}} \right]$
Рэлея (2 вариант)	$\varepsilon = \varepsilon_m \left[1 + \frac{v}{\frac{\varepsilon_p + 2\varepsilon_m}{\varepsilon_p - \varepsilon_m} - v - 1,31 \frac{\varepsilon_p - \varepsilon_m}{\varepsilon_p + 4/3\varepsilon_m} v^{10/3}} \right]$
Максвелла	$\frac{\varepsilon - \varepsilon_m}{3\varepsilon_m} = \frac{\varepsilon_p - \varepsilon_m}{\varepsilon_p + 2\varepsilon_m} v, \quad \varepsilon = \varepsilon_m \left[1 + \frac{\varepsilon_p - \varepsilon_m}{2\varepsilon_m + \varepsilon_p} 3v \right]$
Максвелл-Гарнетта	$\frac{\varepsilon - \varepsilon_m}{\varepsilon + 2\varepsilon_m} = \frac{\varepsilon_p - \varepsilon_m}{\varepsilon_p + 2\varepsilon_m} v, \quad \varepsilon = \frac{2\varepsilon_m^2 (1 - v) + \varepsilon_m \varepsilon_p (1 + 2v)}{\varepsilon_m (2 + v) + \varepsilon_p (1 - v)}$ Условие применимости: $v < \frac{\varepsilon_p + 2\varepsilon_m}{ \varepsilon_p - \varepsilon_m }$
Бруггемана	$\frac{\varepsilon_m - \varepsilon}{\varepsilon_m + 2\varepsilon} v_m + \frac{\varepsilon_p - \varepsilon}{\varepsilon_p + 2\varepsilon} v_p = 0$ $2\varepsilon^2 + \varepsilon (\varepsilon_p - 2\varepsilon_m + 3v(\varepsilon_m - \varepsilon_p)) - \varepsilon_m \varepsilon_p = 0$

Здесь ε – диэлектрическая проницаемость смеси; ε_m – диэлектрическая проницаемость матрицы; ε_p – диэлектрическая проницаемость включений; v – объемная доля включений

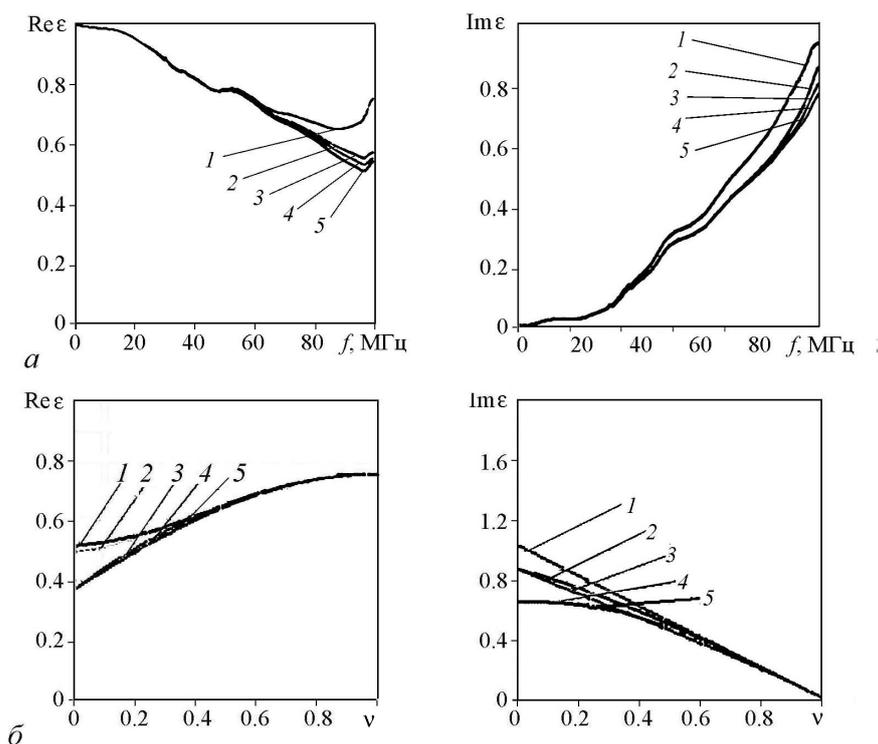


Рис. 2. Частотные зависимости комплексной диэлектрической проницаемости композита (а) и зависимости от объёмной доли включений углерода в матрице кремния (б), построенные по приведенным в таблице формулам: 1 – формула Рэлея (1 вариант), 2 – формула Рэлея (2 вариант), 3 – формула Максвелла, 4 – формула Максвелл-Гарнетта/Винера, 5 – формула Бруггемана/Бетчера (1 вариант)

комплекс [4], позволяющий проектировать композитные среды и прогнозировать их характеристики с наперед заданными свойствами компонентов, опираясь на приведенные ниже модели.

Проведено моделирование композиционного материала, состоящего из кремния (в качестве матрицы) с включениями углерода. Интерес к таким композиционным материалам вызван возможностью различных практических применений, например, при изготовлении деталей химической и металлургической аппаратуры, работающей в области высоких температур, а также в электронике при создании варисторов, вентильных разрядников, высокотемпературных тиристоров [5].

В программном пакете [4], разработанном авторами, построены графики зависимостей действительной и мнимой части диэлектрической проницаемости композиционного материала от частоты внешнего электромагнитного воздействия в диапазоне от 1 до 100 МГц при объемной доле углерода 29% и от объемной доли включений (рис. 2).

2. Метод электрических эквивалентных схем

Во многих случаях для анализа композитной среды удобным оказывается использование метода эквивалентных схем, при котором электрическая, механическая и магнитная составляющие композита представляются в виде электрических эквивалентов [6]. Представим композит матрицей (рис. 3), каждая ячейка которой

Z – последовательно соединенные слои проводящего материала и диэлектрика. В зависимости от физических свойств ячейка может быть представлена той или иной эквивалентной схемой, относящейся к электрической цепи [7]. Построим эквивалентные схемы композита, состоящего из случайно расположенных шаровых включений в матрице.

Рассмотрим случай, когда в веществе возможны только два механизма поляризации с временами релаксации $\tau_1 \ll \tau_2$. В таком случае, с увеличением частоты диэлектрическая проницаемость уменьшается от статистической ϵ_s до высокочастотной ϵ_v . Эквивалентная схема замещения композита будет выглядеть следующим образом (рис. 4, а).

Поляризация с временем релаксации τ_1 учитывается конденсатором C_1 . Потери энергии электромагнитного поля при электронной поляризации пренебрежем. Емкость конденсатора C_1 пропорциональна высокочастотной диэлектрической проницаемости ϵ_v . Последовательно соединенные конденсатор C_2 и резистор R_1 описывают поляризации с характерным временем релаксации τ_2 . Резистор R_1 учитывает

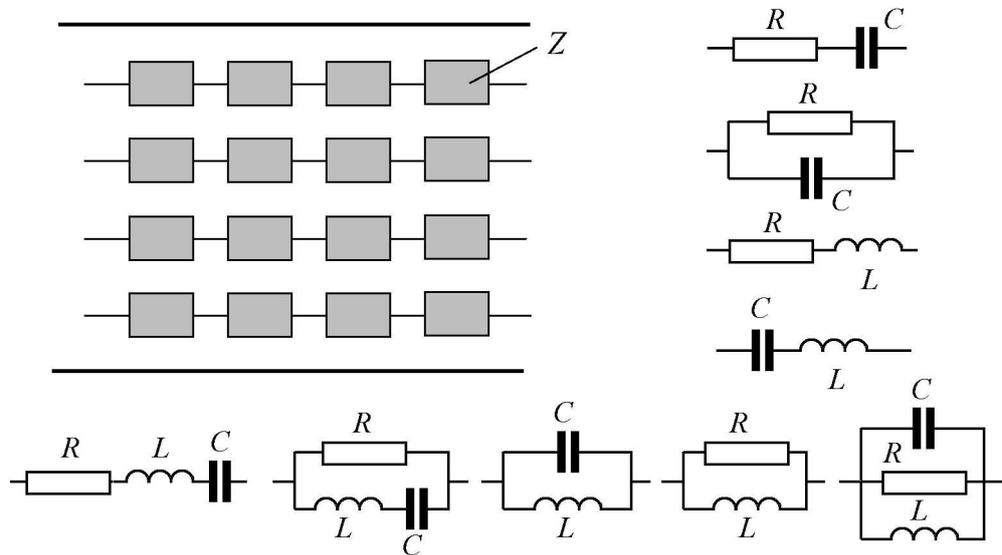


Рис. 3. Эквивалентные схемы включений в матрице

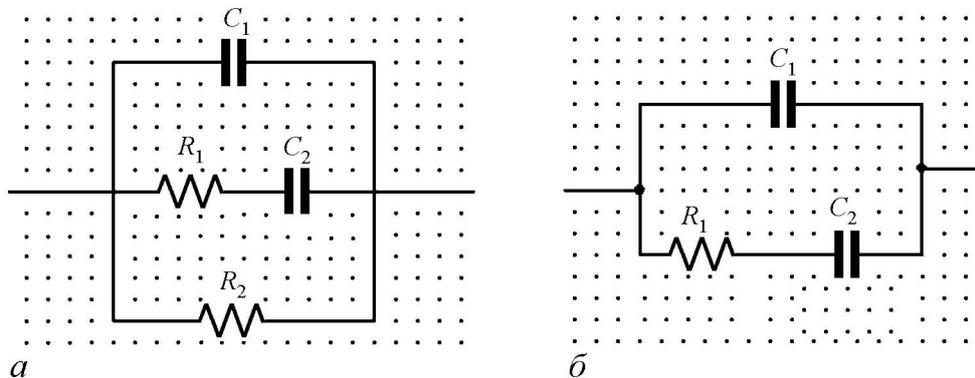


Рис. 4. Эквивалентные схемы замещения композита для механизма поляризации с временем релаксации $\tau_1 \ll \tau_2$

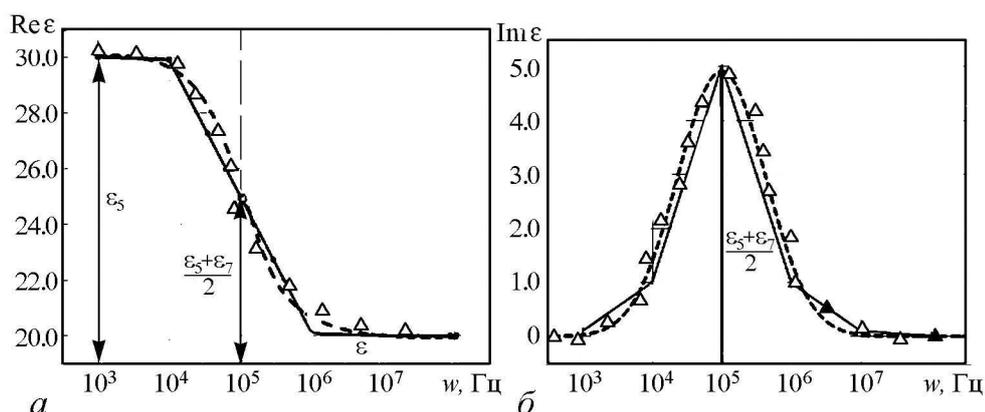


Рис. 5. Зависимость действительной (а) и мнимой (б) частей диэлектрической проницаемости от частоты: рассчитанная по эквивалентной схеме (сплошная линия); на основе решения волнового уравнения (штриховая линия); Δ – экспериментальные значения

диэлектрические потери, связанные с поляризацией. Емкость конденсатора C_2 пропорциональна разности между статической диэлектрической проницаемостью ε_s и высокочастотной ε_v ($\omega \gg 1/\tau_2$). Сквозная проводимость композита учитывается резистором R_2 . Допустим, что $R_2 \rightarrow \infty$, в таком случае можно пренебречь потерями энергии переменного тока и воспользоваться эквивалентной схемой рис. 4, б. Для расчета $\text{Re } \varepsilon = \varepsilon'$ и $\text{Im } \varepsilon = \varepsilon''$ в случае диэлектрика без сквозной проводимости можем воспользоваться формулами Дебая [8]

$$\varepsilon' = \varepsilon_s + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_v}{1 + (\omega\tau_2)^2}, \quad \varepsilon'' = \omega\tau_2 \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_v}{1 + (\omega\tau_2)^2} \quad (1)$$

где τ_2 – время релаксации поляризации, проходящей по второму механизму.

Построены графики зависимости мнимой и действительной частей диэлектрической проницаемости от частоты для образца керамики со следующими значениями параметров: $\varepsilon_s = 15$, $\varepsilon_v = 10$, $\tau = 0.01$ (рис.5).

Метод эквивалентных схем имеет определенные преимущества по сравнению с непосредственным решением волнового уравнения, которые заключаются в возможности привлечения эффективных методов теории электрических цепей, а также в том, что частично задача решается уже на этапе ее постановки. Применение метода эквивалентных схем может дать такие же точные результаты, как и непосредственное решение волнового уравнения. Если при этом исходные условия задачи для обоих методов совпадают, то эквивалентная схема может рассматриваться как точное представление композиционного материала в одномодовом приближении.

3. Фундаментальные модели нелинейной динамики применительно к композиционным материалам

Революционные изменения, проходящие в настоящее время в химии и технологии материалов, тесно связаны с изменением фундаментальных представлений о пространственно-временной эволюции последних [9].

При разработке и проектировании новых материалов особую роль играют процессы самоорганизации в физико-химических системах, как правило, эволюцио-

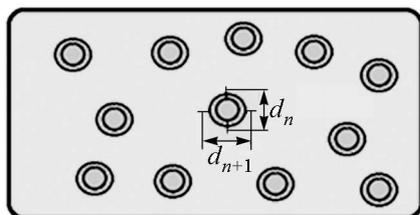


Рис. 6. Схема композиционного материала с шаровыми включениями в матрице

ному материалу, который состоит из шаровых включений в матрице (рис. 6).

Эволюция включений описывается одномерным отображением

$$d_{n+1} = \mu \cos d_n + \varphi, \quad (2)$$

где d – диаметр включений; μ, φ – параметры, характеризующие нелинейность системы (зависят от характера электромагнитного воздействия, термодинамических, кинетических факторов). Примеры систем, описываемых уравнением (2), рассмотрены в работах [2, 10–13].

Построена карта динамических режимов, по осям которой находятся параметры μ, φ . Для каждого цикла периода построены соответствующие итерационные диаграммы (рис. 7).

Полученные результаты позволяют наблюдать интересные особенности динамики исследуемой системы, такие как бифуркации удвоения периода, области хаоса, квазипериодических движений, линии циклов максимальной устойчивости. Эволюция рассматриваемой системы является чувствительной к начальным условиям. Параметры, характеризующие нелинейность системы, являются основообразующими,

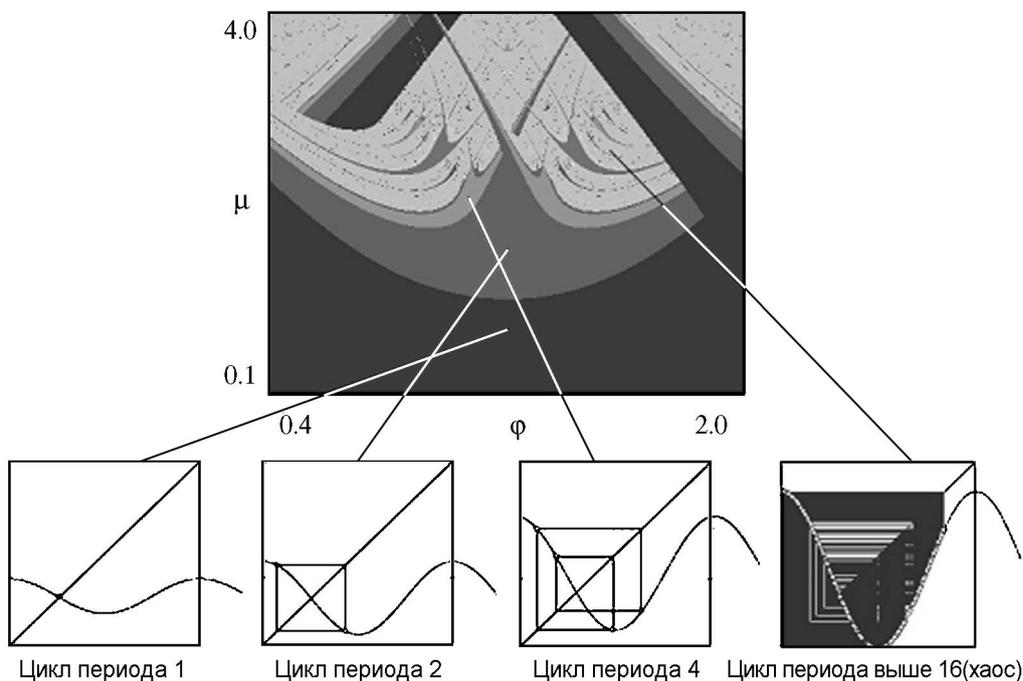


Рис. 7. Карта динамических режимов системы, описываемой отображением (2)

незначительное изменение которых может качественно влиять на динамику формирования композиционного материала и, как следствие, на изменение его функциональных и конструкционных свойств. Другие примеры применимости моделей нелинейных динамических систем в области композиционных материалов можно найти в работах [2, 14, 15]. Таким образом, опираясь на модели нелинейной динамики, материаловеды, связанные с созданием совершенно разных материалов, в действительности имеют возможность выделить единый алгоритм описания сложных физико-химических систем, позволяющий контролировать происходящие в них процессы эволюции на пути от прекурсоров к целевым твердофазным продуктам.

Выводы

На сегодняшний день разработка и синтез новых поколений материалов развивается довольно высокими темпами. Мировое научное сообщество проявляет особый интерес к данной области. Об этом свидетельствует рост количества публикаций по текущей тематике и проведение крупнейших научных конференций в сфере композиционных материалов, таких как «SAMPE China» (Китай), «Композит» (Россия), «ACS Nano» (США), «TICEAS» (Япония) и прочие. Это связано с острой потребностью общества в современных высокотехнологичных материалах. Как уже было отмечено, математическое и компьютерное моделирование на данном этапе играет существенную роль. На примере композита со сферическими включениями в матрице авторами был показан комплексный подход, включающий в себя фундаментальные модели нелинейной динамики, модель эффективной среды и теорию электрических эквивалентов. Показаны достоинства методов для выполнения той или иной задачи на примере композита кремния с включениями углерода. С использованием моделей эффективной среды смоделирована зависимость действительной и мнимой частей диэлектрической проницаемости от длины волны воздействия внешнего поля. Построены графики зависимостей комплексной диэлектрической проницаемости от доли включений углерода в матрице кремния. Методом электронных эквивалентных схем смоделирована зависимость комплексной диэлектрической проницаемости от частоты внешнего воздействия. Проведено сравнение результатов моделирования указанным методом с результатами, полученными на основе прямого решения волнового уравнения и эксперимента. Рассмотрена динамическая система эволюции шаровых включений в матрице композита, описываемая отображением (2). Для анализа динамической системы построена карта динамических режимов, позволяющая наблюдать интересные особенности динамики приведенной системы применительно к композиционному материалу. Междисциплинарный подход моделирования исследуемого объекта позволяет получить более подробную информацию о композите и учесть возможные взаимосвязи.

Библиографический список

1. *Никитин А.С.* Перспективы применения композиционных материалов // Экономика и жизнь. 2012. Янв.(№ 4). С. 6.
2. *Третьяков Ю.Д.* Процессы самоорганизации в химии материалов //Успехи химии. 2003, № 72 (8). С. 731.

3. *Виноградов А.П.* Электродинамика композитных материалов. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 208 с.
4. Свидетельство № 2014615533 РФ. Программный комплекс «Математическое моделирование и многокритериальный анализ нелинейных свойств композиционных материалов на основе эффективной среды»: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ: заявитель и патентообладатель Романчук С.П., Терин Д.В. -№ 2014612918/69; заявл. 02.04.2014; зарегистр. 28.05.2014. [1] с.
5. *Примаченко В.Е., Кононец Я.Ф., Булах Б.М., Венгер Е.Ф., Каганович Э.Б., Кизяк И.М., Кириллова С.И., Манойлов Э.Г., Цыркунов Ю.А.* Электронные и излучательные свойства пористого кремния, легированного золотом// Физика и техника полупроводников. 2005. Т. 39. Вып. 5. С. 595.
6. *Пукинский Ю.Ж., Филиппов А.В.* Эквивалентная схема двухфазного магнито-стрикционно-пьезоэлектрического композита в области электромеханического резонанса // Вестник Новгородского государственного университета. 2010. № 55. С. 44.
7. *Поклонский Н.А., Горбачук Н.И.* Основы импедансной спектроскопии композитов: Курс лекций. Минск: БГУ. 2005. С. 102.
8. *Butko L.N., Buchel'nikov V.D., Bychkov I.V.* Absorption of electromagnetic waves in a nonmagnetic conductor-ferromagnet structure // Physics of the Solid State. 2010. Vol. 52. № 10. P. 2154.
9. *Walgraef D.* Spatio-Temporal Pattern Formation. Springer. New York, 1997.
10. *Buchelnikov V.D., Louzguine-Luzgin D.V., Xie G., Li S., Yoshikawa N., Sato M., Anzulevich A.P., Bychkov I.V., Inoue A.* Heating of metallic powders by microwaves: Experiment and theory // J. of Applied Physics. 2008. Vol. 104. P. 113505-1-113505-10.
11. *Головань Л.А., Тимошенко В.И., Кашкаров П.К.* Оптические свойства нанокompозитов на основе пористых систем // Успехи физических наук. 2007. Т. 177, № 6. С. 620.
12. *Кольцова Э.М., Третьяков Ю.Д., Гордеев Л.С., Вертегел А.А.* Нелинейная динамика и термодинамика необратимых процессов в химии и химической технологии. М.: Химия, 2001. С. 193.
13. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. С. 80.
14. *Timashev S.F. et al.* Evolution of dynamical dissipative systems as a temporal «colour» fractal // In: Mathematical Models of Non-Linear Excitations. New York, 1999. P. 17.
15. *Терин Д.В., Корчагин С.А., Романчук С.П., Оносов И.А.* Влияние глубины фрактальности на частотную зависимость импеданса при построении моделей композиционных материалов // Актуальные проблемы электронного приборостроения (АПЭП-2014): Материалы Международной научно-технической конференции. В 2 т. Т. 1. Саратов. 25–26 сентября 2014 г. Саратов: ООО «Буква», 2014. С. 258.

References

1. *Nikitin A.S.* Prospects for the use of composite materials // *Business and Life*. 2012. Jan. (№ 4). P. 6. (In Russian)
2. *Tret'yakov Yu.D.* Self-organization processes in the chemistry of materials // *Russian Chemical Reviews*. 2003, № 72 (8). S. 651.
3. *Vinogradov A.P.* *Electrodynamics of composite materials*. M.: Editorial URSS, 2001. P. 208. (In Russian)
4. The certificate of registration of the computer program № 2014615533 Russian Federation, The software package «Mathematical modeling and multi-criteria analysis of the nonlinear properties of composite materials based on the effective protection»: Applicant and patentee Romanchuk S.P., Terin D.V. № 2014612918/69; apr. 02.04.2014; reg. 28.05.2014. [1] s. (In Russian)
5. *Primachenko V.E., Kononets Ya. F., Bulah B.M., Venger E.V., Kaganovich E.B., Kizyak I.M., Kirillova S.I., Manoilov E.G., Tsyrkunov U.A.* Electronic and radiative properties of porous silicon doped with gold // *Semiconductor Physics and Technology*. 2005. Vol. 39 (5). (In Russian)
6. *Pukinskii U.Zh., Filippov A.V.* The equivalent circuit of a two-phase magnetostrictive – piezoelectric composites in the field of electromechanical resonance // *Vestnik Novgorodskogo Gos. Universiteta*, 2010, 55, s. 44. (In Russian)
7. *Poklonskiy N.A., Gorbachuk N.I.* *Osnovy impedanchnoi spektroskopii kompozitov: Lektsii*. Minsk: BSU, 2005. S. 102. (In Russian)
8. *Butko L.N., Buchelnikov V.D., Bychkov I.V.* Absorption of electromagnetic waves in a nonmagnetic conductor–ferromagnet structure // *Physics of the Solid State*. 2010. Vol. 52. № 10. S. 2154.
9. *Walgraef D.* *Spatio-Temporal Pattern Formation*. New York, 1997.
10. *Buchelnikov V.D., Louzguine-Luzgin D.V., Xie G., Li S., Yoshikawa N., Sato M., Anzulevich A.P., Bychkov I.V., Inoue A.* Heating of metallic powders by microwaves: experiment and theory // *J. of Applied Physics*. 2008. 104. P. 113505-1-113505-10.
11. *Golovan' L.A., Timoshenko V.I., Kashkarov P.K.* Optical properties of porous-system-based nanocomposites // *Physics-Usp*. 2007. Vol. 50. P. 595.
12. *Kol'tsova E.M., Tret'yakov U.D., Gordeev L.S., Vertegel A.A.* *Nonlinear Dynamics and Thermodynamics of Irreversible Processes in Chemistry and Chemical Technology*. M.: Khimiya, 2001. S. 193. (In Russian)
13. *Kuznetsov S.P.* *Dynamical chaos*. M.: Fizmatlit, 2001. S. 80. (In Russian)
14. *Timashev S.F. et al.* Evolution of Dynamical Dissipative Systems as a Temporal «Colour» Fractal // In: *Mathematical Models of Non-Linear Excitations*. New York, 1999. P. 17.
15. *Terin D.V., Korchagin S.A., Romanchuk S.P., Onosov I.A.* Effect of depth fractal on the frequency dependence of impedance is in the construction of models of composite materials // *Urgent problems of electronic instrument (APEP 2014): Proceedings of the International Scientific Conference: v.1, Saratov. 25–26 Sept 2014 – Saratov: Bukva, 2014. S. 258. (In Russian)*

Поступила в редакцию 22.05.2015

SYNERGETICS OF MATHEMATICAL MODELS FOR ANALYSIS OF COMPOSITE MATERIALS

S. A. Korchagin¹, D. V. Terin^{1,2}, S. P. Romanchuk¹

¹Engels Technological Institute of Yuri Gagarin State Technical University of Saratov

²Saratov State University

The authors propose a complex approach for the analysis of composite materials, including the fundamental models of the nonlinear dynamics, model of effective medium and the theory of electrical circuits. The composite consisting of spherical inclusions in the matrix is considered. The simulation of composite material is carried out by various methods.

Keywords: Composite materials, mathematical modeling, synergy, the effective medium model, nonlinear dynamics, electronic equivalent circuits.



Корчагин Сергей Алексеевич – родился в г. Энгельсе (1991). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского по специальности «Физика открытых нелинейных систем» (2013). С 2013 г. аспирант Саратовского государственного технического университета им. Ю.А. Гагарина. С 2013 г. также работает ассистентом кафедры «Техническая физика и информационные технологии» Энгельского технологического института. Область научных интересов: математическое и компьютерное моделирование, композиционные материалы.

413100 Саратовская область, г. Энгельс, пл. Свободы, 17
Энгельский технологический институт
E-mail: korchaginser@gmail.com



Терин Денис Владимирович – окончил Саратовский колледж радиоэлектроники им. П.Н. Яблочкова (1995). В 2000 г. защитил диплом по специальности «инженер-физик» на физическом факультете Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского. В 2001 получил степень магистра техники и технологий, защитил диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук (2004). Доцент кафедры материаловедения, технологии и управления качеством факультета нано- и биомедицинских технологий СГУ. С 2011 г. возглавляет кафедру «Техническая физика и информационные технологии» Энгельского технологического института. Область научных интересов: исследование свойств наноструктур, математическое моделирование микро- и нанoeлектромеханических систем. Автор более 100 научных статей, научно-методических пособий и руководств.

413100 Саратовская область, г. Энгельс, пл. Свободы, 17
Энгельский технологический институт
E-mail: tfi@techn.sstu.ru



Романчук Сергей Петрович – родился в 1987 году. Окончил Энгельский технологический институт (филиал) Саратовского государственного технического университета им. Ю.А. Гагарина по специальности «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем». С 2012 года – ассистент кафедры «Техническая физика и информационные технологии» ЭТИ (филиал) СГТУ им. Ю.А. Гагарина. Область научных интересов: математическое моделирование распространения электромагнитного поля в гетерогенных средах, информационные технологии.

413100 Саратовская область, г. Энгельс, пл. Свободы, 17
Энгельский технологический институт
E-mail: romanchuk_sergey@bk.ru



ЭКОЛОГИЯ ПРОФЕССОРА БОГДАНКЕВИЧА

Д. И. Трубецков

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Эти заметки – запоздалая реакция на книгу профессора Олега Владимировича Богданкевича «Лекции по экологии» (М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008, 208 с.). Книга – цикл лекций, прочитанный профессором Богданкевичем студентам факультета молекулярной и биологической физики МФТИ.

Ключевые слова: Экология, Вселенная, Галактика, планета Земля, Человек, Россия, идеи Циолковского и Вернадского.

Напомним, что, по Геккелю, экология (от греческого οἶκος – дом, жилище и λογία – наука) – наука об отношениях растительных и животных организмов и образуемых ими сообществ. В последнее время в экологию стали включать изучение влияния человеческой деятельности на состояние окружающей среды.

Начнём с длинной цитаты из Введения к книге О.В. Богданкевича «Лекции по экологии» (М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008, 208 с.), в которой излагается её основная идея.

«То, о чём пойдёт разговор у нас дальше, к конкретным экосистемам будет иметь весьма отдалённое отношение.

Я бы хотел совместно с вами попытаться понять, что же такое наш с вами общий дом – планета Земля, откуда она взялась и что с ней может произойти в ближайшем и отдалённом будущем. Как будут жить на ней наши ближайшие потомки и смогут ли они жить вообще на этой красивой голубой планете.

Когда-то, в самом начале прошлого века, великий мечтатель Константин Циолковский размышлял о том, как человечество будет расселяться по просторам Солнечной системы, а затем начнётся и его экспансия за её пределы.

В своих «Грёзах о Земле и небе» он писал:

“Перестроенная Человеком Солнечная система сможет обеспечить теплом и светом жизнь примерно 10^{23} существ, подобных человеку... Это число в 10^{14} раз больше численности жителей на земном шаре, если положить её равной $2 \cdot 10^9$. Преобразованные деятельностью человечества астероиды образуют “цепь эфирных городов”, масса которых разбирается до дна”. Из этого материала люди будут “лепить” искусственные космические тела с наиболее выгодной формой поверхности. Затем в дело пойдёт Луна.

“На полную перестройку Луны уйдёт несколько сот лет, а на перестройку всего около-солнечного пространства сто тысяч лет, а может быть и больше”.

Эти идеи Циолковского в 60-х гг. XX века развивал известный английский астрофизик Фрэнк Уотсон Дайсон. Согласно его гипотезе через 2–3 тыс. лет человечество сможет построить (используя вещество планет-гигантов Юпитера и Сатурна) новую искусственную оболочку – биосферу диаметром, равным орбите Земли, и которая будет использовать всю энергию Солнца и сможет дать пристанище тем 10^{23} людям, о которых говорил Циолковский».

Далее автор книги выходит на идеи Владимира Ивановича Вернадского, главной из которых является идея Ноосферы (от греческого *νοος* – разум) – области длительного сосуществования Биосферы Земли и области обитания человечества. Реализация идеи коэволюции Человека с природой возможна только при посредстве Коллективного Разума. Именно он будет управлять и направлять в нужное русло всю деятельность человечества как целого сообщества разумных индивидуумов.

Вспоминая «Туманность Андромеды» Ефремова, «Солярис» Станислава Лема, Богданкевич подчёркивает, что эти авторы относили действия своих героев на одно-два тысячелетия от наших дней, надеясь на поумнение человечества и изменение его в лучшую сторону. Заметим, однако, что ещё в молодые годы в дневнике 29 июня 1893 года Вернадский писал: «Есть один факт развития Земли – это усиление сознания, хотя я допускаю, что может быть через миллион лет пойдёт обратный процесс» (Страницы автобиографии В.И. Вернадского. М.: 1981, с. 135).

К сожалению, создаётся впечатление, что обратный процесс начался раньше.

Все утопические предсказания о перестройке Солнечной системы предполагают, что человечество будет существовать миллионы лет, пока светит наше Солнце. Поэтому автор книги ставит следующие вопросы:

Может ли современная наука сказать, как долго будет существовать на Земле наша цивилизация?

Существуют ли другие – внеземные – цивилизации, или мы – уникальное творение природы?

Далее Богданкевич пишет следующее.

«В дальнейшем я попытаюсь показать, что изменение менталитета нынешнего поколения людей, населяющего планету Земля, является едва ли не самым жизненно важным условием при решении глобальных проблем существования нашей цивилизации. Тем не менее, уже сейчас, в процессе подготовки этого курса, я встречаюсь с иронической критикой и с обвинениями в наивности».

Правда, написано это было более десяти лет назад, но актуальность поднятых проблем остаётся прежней. Олег Владимирович продолжает:

«Я не считаю свои выводы истиной в последней инстанции. В научном познании Природы есть один наиважнейший критерий – его величество опыт и воспроизводимость полученных результатов в равных условиях.

Можно исходить из любых посылок, а затем, используя силлогизмы законов формальной логики, решать средневековую задачу о том, сколько чертей может разместиться на острие одной иглы. Но если выводы нельзя проверить с помощью опыта, полученного любым числом независимых экспериментаторов, то таким идеям грош цена. Они остаются лишь гипотезой».

В какой-то степени сказанное выше позволяет понять суть книги Богданкевича, а чтобы она стала ещё понятней, приведём оглавление книги.



Предисловие

1. Введение
2. Вселенная
3. Галактика
4. Происхождение химических элементов
5. Как возникли планеты и много ли их?
6. Наш дом – планета Земля
7. Первичная атмосфера Земли и возникновение жизни
8. Человек. Сколько лет он живёт на Земле? Сколько ещё будет жить?
9. Россия. Её ближайшая судьба
10. Может ли Земля столкнуться с астероидом?
11. Природные ресурсы. Насколько их хватит?
12. Атомные станции или угольные – что лучше?
13. Парниковый эффект. Что это такое?
14. Атомная энергия, атомная бомба и атомная зима
15. Извечные наши вопросы. Кто виноват?
16. Что делать?
17. Чернобыль

Разумеется, в короткой заметке невозможно рассказать всю книгу. Её нужно читать. Кто же такой Олег Владимирович Богданкевич?

О нём написана книга «Профессор О.В. Богданкевич (1928–2001): Воспоминания родных, друзей и коллег» (М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009, 144 с.) под редакцией профессора МГУ Ю.М. Романовского. Главная составная часть книги – воспоминания самого

Олега Владимировича «Как это было», в которой на примере лазерной физики изложена непростая история науки в последние десятилетия существования СССР.

В книге приведены и два некролога, вполне соответствующие данному жанру, но один написан друзьями, учениками и коллегами, а другой – теми, кто вынудил Олега Владимировича покинуть ФИАН.

Олег Владимирович Богданкевич

1928–2001

12 апреля 2001 года погиб, не дожив двух недель до своего 73-летия, Олег Владимирович Богданкевич. Несчастный случай на шоссе оборвал жизнь блестящего физика, академического – в лучшем смысле этого слова! – исследователя, русского интеллигента-патриота.

Доктор физико-математических наук, профессор, заслуженный деятель науки и техники РСФСР, Олег Владимирович Богданкевич был учёным мирового класса, одним из тех пионеров, трудами которых была создана лазерная техника. Вместе со своими учениками он сформировал такую её область как полупроводниковые лазеры с накачкой электронным пучком и определил направления её развития, инициировал создание эксимерных и электроионизационных лазеров. Для его работ всегда было характерно сочетание фундаментального физического подхода ФИАНовского экспериментатора с направленностью на конкретные приборы и технологии, присущее грамотным прикладникам. Именно поэтому с именем О.В. Богданкевича ассоциируются сегодня не только научные статьи и книги, но и многочисленные разработки лазерно-оптической аппаратуры для самых разных применений: передача изображений, локация, прецизионные измерения, стандарты, маяки и др.

О.В. Богданкевич внёс большой вклад в подготовку отечественных научных кадров. Около сорока лет он преподавал в Московском физтехе. Под его непосредственным руководством защищено 35 кандидатских диссертаций. Настоящий творец, генератор идей, он всегда исповедовал известный принцип: ученик – это не сосуд, который нужно наполнить, а светильник, который нужно зажечь. Многие его ученики сами стали докторами наук и профессорами, но с ростом их собственного научного и жизненного опыта только росло уважение к Учителю, к его мудрости, искренности и порядочности. Всей своей жизнью он учил отношению к науке, к коллегам и бонзам в науке: Он не умел – и не хотел – ни толкаться локтями, ни хлестать, ни молчать, видя несправедливость. Такая внутренняя свобода дорого обходится...

Жизнь О.В. Богданкевича была полна драматических моментов. Предательство, ликвидация созданных лабораторий, необъективная оценка работ, потери близких, трудные материальные условия – всё это отравляло его существование. Наука была его единственной отрадой, и он ей служил до последнего вздоха.

Щедро одарённый человек, Олег Владимирович был разнообразно талантлив. Высококвалифицированный учёный, он был и пианистом со строгим музыкальным вкусом, и мастером-умельцем, способным своими руками выполнить любую техническую работу, и автором публицистических статей. Он был предан друзьям: и сохранил даже тех, с кем подружился ещё в школьные времена. Как всякий настоящий

русский интеллигент, Богданкевич был бессребреником, ставившим превыше всего духовное богатство.

Низкий Вам поклон и светлая память, дорогой Олег Владимирович.

Друзья, ученики, коллеги
«Лазер-Информ» № 8 (215), апрель 2001 г.

И вместо заключения длинная цитата из книги.

«Считает ли нас “золотой миллиард” своими? Думаю, что нет, и побаивается нашей непредсказуемости. Наши ресурсы – почти четверть всех мировых – очень лакомый кусок для транснациональных корпораций.

Но для того, чтобы он остался нашим, мы должны осознать следующее:

с одной стороны, мы азиаты, у нас есть ещё огромные природные ресурсы, и государство должно иметь возможность ограничивать аппетиты естественных монополий, иначе приморская ситуация (топливная и энергетическая проблемы) очень скоро распространится на всю страну;

с другой стороны, мы и европейцы и должны сами перерабатывать свои природные ресурсы в своих собственных интересах, а не становиться сырьевым придатком “золотого миллиарда”, как бы этого ни хотелось Маргарет Тэтчер и всем её единомышленникам в Европе и Америке. Для этого у нас пока ещё есть один очень важный ресурс – это наша наука.

Но и этот ресурс начинает истощаться, и не только естественным путём. Из России уже уехало более 100 тыс. квалифицированных инженеров и научных работников. В провинциальном американском университете диплом обходится в 15–20 тыс. долл. Смею утверждать, что наша государственная высшая школа – лучшая в мире. Если бы это было не так, то выпускников наших вузов западные фирмы не пускали бы и на порог своих научно-исследовательских и промышленных лабораторий, хотя платят им обычно в 2–3 раза меньше, чем местным специалистам. У нас за диплом наших элитных вузов пока ещё платит государство. Оно в состоянии это делать только потому, что платит профессорам зарплату, в 100–200 раз меньшую, чем получают их коллеги в заштатных западных колледжах.

Но постепенно, говоря словами У. Шекспира, “разрывается связь времён”, мы начинаем терять научные школы. В вузах и лабораториях начинается ощущаться острая нехватка “среднего звена” – будущих профессоров и создателей новых научных школ и направлений.

Если мы допустим разрушение нашей высшей школы, то очень быстро превратимся в часть того, что я назвал “незолотыми миллиардами”. Мы потеряем наши высокие технологии (а в нашем ВПК они ещё теплятся) и перестанем понимать, что вообще происходит в мире науки. Мы уже испытываем серьёзные трудности с обменом научно-технической информацией. Западные специальные научные журналы в наших вузовских библиотеках – уже редкость. Возникает своеобразный полупроводниковый эффект – информация на Запад уходит, а оттуда не приходит. Газетные околonaучные сенсации – не в счёт.

Как-то в Физтехе на ежегодном общем собрании преподавателей выступал академик Фортов. Он в то время был главным распределителем денег на фундаментальную науку в России – председателем правления Российского фонда фундаментальных исследований. Я запомнил цифры, которые он приводил с грустью от сознания полного своего бессилия. Вот эти цифры. Я их привожу по памяти, но не ручаюсь только за второй знак после запятой. Так называемые развитые страны: США, Англия, Германия, Япония тратят на свою фундаментальную науку 4–5% своего ВВП. Развивающиеся страны Африки и Южной Америки – примерно 1.5–2%, мы – менее 0.5%.

На Западе нас презрительно назвали “Верхней Вольтой с атомными ракетами”. Пройдёт ещё 5–10 лет и наши ракеты просто перестанут взлетать, так как их некому будет строить, и мы превратимся просто в “Верхнюю Вольту”. Вот тогда “золотой миллиард” и ринется на наши ресурсы. И что после этого достанется моим внукам, кроме дырки от бублика?»

Естественный вопрос: «Почему появились эти, как уже упоминалось, запоздалые заметки?»

Во-первых, хотелось рассказать о книге, содержание которой далеко выходит за рамки её названия. Книга великолепная и по содержанию и по стилю изложения. Она сегодня столь же, а может быть, и ещё более актуальна, чем в момент выхода. Изменились цифры (в худшую сторону), но смысл изложенного сохранился.

Во-вторых, есть и личная причина: автор заметок в течение нескольких лет читает магистрам второго курса факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета лекции «Современные проблемы междисциплинарной науки XXI века», который близок к курсу Олега Владимировича Богданкевича.

Поступила в редакцию 26.05.2015

ECOLOGY BY PROFESSOR BOGDANKEVICH

D. I. Trubetskov

Saratov State University

National Research Nuclear University MEPHI

This notes are the belated response onto the «Lectures on Ecology» by professor O.V. Bogdankevich. The book is a cycle lectures of O.V. Bogdankevich for students of MPhTI, molecular and biological physics department.

Keywords: Ecology, Universe, Galaxy, the planet Earth, Man, Russia, ideas of Tsiolkovsky and Vernadsky.



Трубецков Дмитрий Иванович – родился в Саратове (1938). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ, профессор кафедры прикладной математики НИЯУ МИФИ, член-корреспондент Российской академии наук, заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования. Научный руководитель Лицея прикладных наук и факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: вакуумная электроника и микроэлектроника сверхвысоких частот, теория колебаний и волн, нелинейная динамика, история науки. Автор более двадцати учебных пособий и монографий, а также более двухсот статей в периодической печати.

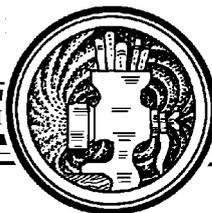
410012 Саратов, ул. Астраханская, 83

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

115409 Москва, Каширское шоссе, 31

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

E-mail: dtrubetskov@yahoo.com



АВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ С КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОЙ ДИНАМИКОЙ

Примеры и свойства: Обзор*

А. П. Кузнецов¹, Н. В. Станкевич²

¹Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН

²Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.

В данной статье представлен обзор известных в нелинейной динамике малоразмерных моделей, демонстрирующих квазипериодическое поведение. Также представлены новые результаты, относящиеся к анализу многочастотных квазипериодических колебаний для моделей с внешним воздействием и связанных осцилляторов.

Ключевые слова: Квазипериодические колебания, динамические системы, показатели Ляпунова, скрытые аттракторы.

Введение

Квазипериодические колебания представляют собой широко распространенный в науке и технике класс колебаний [1–7]. В последнее время данному виду колебаний уделяется большое внимание, поскольку, с одной стороны, они являются не таким сложными, как хаотические, а с другой стороны, они непериодические, что делает их интересными для анализа. Можно отметить некоторые перспективы в использовании данного класса колебаний, например, при скрытой передаче информации [6].

В наиболее общем виде квазипериодические колебания представляют собой колебания с двумя и более компонентами, характеризующимися несоизмеримыми частотами. В данном случае (для двух компонент) в фазовом пространстве прообразом является тор с двумя направлениями обхода. На рис. 1, а представлен двухчастотный тор-аттрактор. При увеличении числа несоизмеримых частотных компонент размерность тора увеличивается. Так, например, если система характеризуется четырьмя несоизмеримыми частотными компонентами, то это будет соответствовать

*Статья написана по материалам доклада, прочитанного на XVI Международной зимней школе-семинаре по радиофизике и электронике СВЧ. Саратов, Россия, 2–7 февраля 2015.

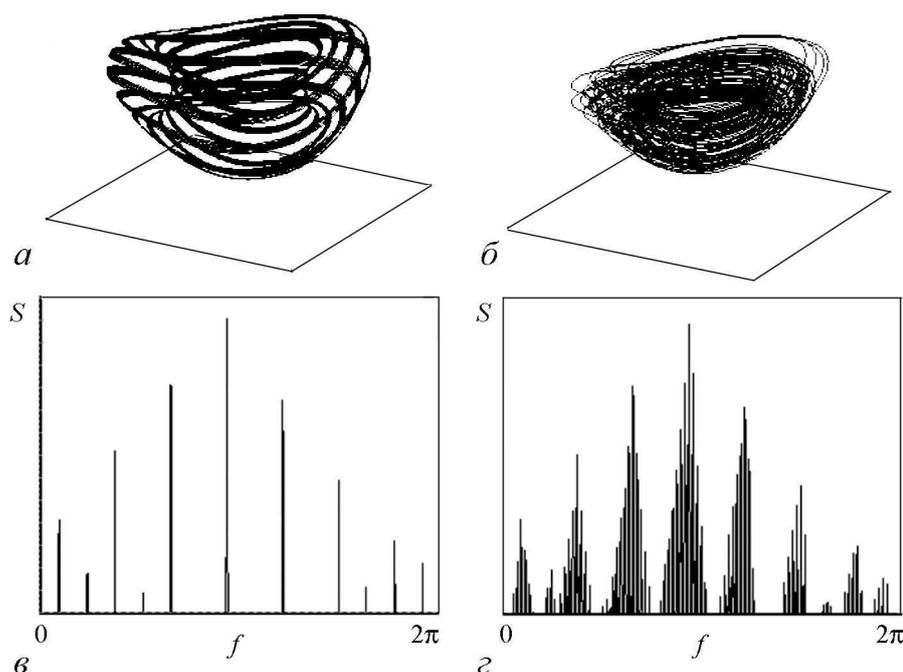


Рис. 1. Примеры аттракторов и спектров Фурье двухчастотных (а), (б) и четырехчастотных (в), (г) торов

тору в пятимерном пространстве. Визуализировать подобного рода фигуру достаточно сложно. На рис. 1, б представлен пример трехмерной проекции четырехчастотного тора. Колебания данного рода имеют характерную форму спектра Фурье: имеется основная частотная компонента, окруженная компонентами-спутниками (пример спектра для двухчастотного квазипериодического режима на рис. 1, в). При увеличении размерности тора, в окрестности каждой компоненты-спутника рождаются новые спутники. Характерный вид спектра Фурье для четырехчастотного квазипериодического режима представлен на рис. 1, г.

Традиционными примерами систем с квазипериодической динамикой являются неавтономные системы, поскольку в таких системах легко обеспечить условие несоизмеримости частот [1, 2]. Однако возможна и автономная квазипериодичность, которая наблюдается в генераторах квазипериодических колебаний. В литературе представлено достаточно мало автономных динамических систем, демонстрирующих квазипериодические колебания. В данной работе представлен обзор подобных моделей, и особое внимание уделяется именно квазипериодическим колебаниям в этих системах. Также представлены новые модели, демонстрирующие автономную квазипериодичность, причем предложены модели с различными сценариями рождения тора, а также обсуждаются новые малоисследованные эффекты, которые могут возникать в таких системах, например, «скрытые аттракторы». Также в работе рассмотрены вопросы вынужденной и взаимной синхронизации квазипериодических колебаний.

Особое внимание обратим на методы изучения квазипериодических колебаний. Отличение квазипериодических колебаний от хаотических является не такой уж простой задачей. По форме фазового портрета и спектра Фурье достаточно сложно выделить даже двухчастотные квазипериодические режимы, не говоря уже о торах

Сигнатура спектра показателей Ляпунова

Реализующийся режим	Обозначение	Сигнатура спектра показателей Ляпунова ($\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4, \Lambda_5, \Lambda_6$)
разбегание на бесконечность	D	-
устойчивая неподвижная точка	E	(-, -, -, -, -, -)
периодический режим	P	(0, -, -, -, -, -)
двухчастотный квазипериодический	T2	(0, 0, -, -, -, -)
трехчастотный квазипериодический	T3	(0, 0, 0, -, -, -)
четырёхчастотный квазипериодический	T4	(0, 0, 0, 0, -, -)
хаотический	C	(+, 0, -, -, -, -)
гиперхаотический	H	(+, +, 0, -, -, -)

более высокой размерности. Одним из наиболее удобных методов выявления квазипериодических колебаний высокой размерности является расчет полного спектра показателей Ляпунова. Наличие в сигнатуре спектра показателей Ляпунова дополнительных нулевых показателей говорит о наличии в системе дополнительных несоизмеримых частот. В таблице представлены сигнатуры показателей Ляпунова и их обозначения, которые будут в дальнейшем использоваться в тексте статьи.

1. Известные системы с автономной квазипериодической динамикой

1.1. Схема Чуа. Одной из хорошо известных и всесторонне исследованной теоретически и экспериментально моделей нелинейной динамики является схема Чуа [8–10], представляющая собой электронную схему с кусочно-линейной характеристикой. Она приводится (с помощью уравнений Кирхгофа) к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha f(y - x), \\ \dot{y} &= -f(y - x) - z, \\ \dot{z} &= \beta y, \end{aligned} \quad (1)$$

где $f(x) = -ax + 0.5(a + b)[|x + 1| - |x - 1|]$. Уравнения (1) задают трехмерную динамическую систему с четырьмя управляющими параметрами. Традиционно фиксируют значения a , b и наблюдают за плоскостью параметров (α, β) . Типичным для (1) эффектом является переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. Однако при некотором выборе параметров a и b возможно и квазипериодическое поведение. Зафиксируем параметры следующим образом: $a = 0.07$ и $b = 0.1$. На рис. 2 представлены два фазовых портрета и сечения Пуанкаре плоскостью $x = 0$, соответствующие двухчастотным торам. На рисунках хорошо видна инвариантная кривая, соответствующая сечению двухчастотного тора.

Также к возможным системам с квазипериодическими колебаниями можно отнести модифицированные модели схемы Чуа, в которых кусочно-линейная характе-

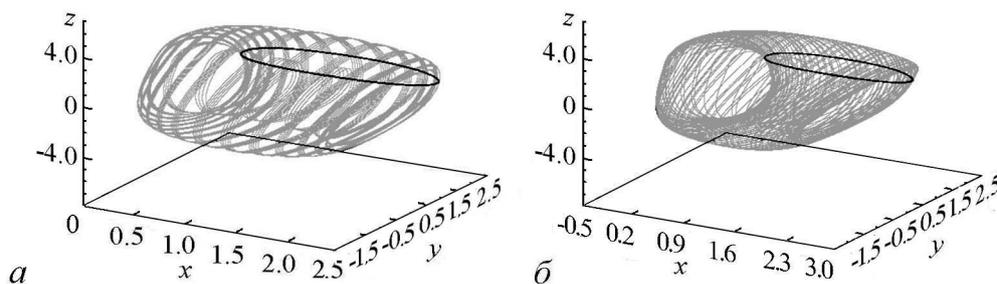


Рис. 2. Примеры фазовых портретов для системы Чуа при: $a - \alpha = 3, \beta = 2.5$; $b - \alpha = 6, \beta = 2.5$. Черной линией обозначено сечение Пуанкаре поверхностью $x = 0$

ристика заменяется некоторой непрерывной функцией. В системах подобного рода также могут возникать квазипериодические колебания, достаточно подробно об этом написано в [11, 12].

1.2. Модель Лоренца-84. Несколько менее известным примером автономной динамической трехмерной системы, которая может демонстрировать квазипериодические колебания, является модель, предложенная Лоренцем в рамках климатической мотивации в 1984 году [13–16]. Ее называют иногда система Лоренц-84 (в отличие от классической системы Лоренца)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax - y^2 - z^2 + aF, \\ \dot{y} &= -y + xy - bxz + G, \\ \dot{z} &= -z + bxy + xz. \end{aligned} \quad (2)$$

Эта система имеет четыре управляющих параметра, из которых два обычно фиксируют, выбирая значения $a = 0.25, b = 4$. Фрагмент карты ляпуновских показателей на плоскости двух оставшихся параметров (G, F) представлена на рис. 3. Основные периоды регулярных режимов указаны соответствующими цифрами на карте.

При построении карты диапазон параметров был выбран таким образом, чтобы визуализировать область квазипериодических колебаний (рис. 3, *a*). На карте хорошо видна узкая область автономной квазипериодичности T_2 . На плоскости параметров она наблюдается выше линии бифуркации Неймарка–Сакера, в результате которой и рождается тор в фазовом пространстве. На эту линию опирается система расширяющихся языков Арнольда, отвечающих резонансным циклам разного периода.

На рис. 3, *б* приведен пример трехмерного фазового портрета. Черным цветом изображен цикл периода 2, для которого параметры отвечают ситуации до порога бифуркации Неймарка–Сакера. Серым цветом показан тор, родившийся на базе этого цикла. Таким образом, особенность данной системы в том, что бифуркация Неймарка–Сакера происходит на основе двухобrotnого предельного цикла. Соответственно, на картах режимов самый широкий язык Арнольда имеет период 6, что отвечает резонансу 1:3 на базе цикла периода 2.

Отметим, что для рассматриваемой системы характерна мультистабильность, отвечающая одновременной реализации квазипериодического и периодического режимов. Так, на рис. 3, *б* представлен еще один цикл периода 2, сосуществующий с инвариантным тором.

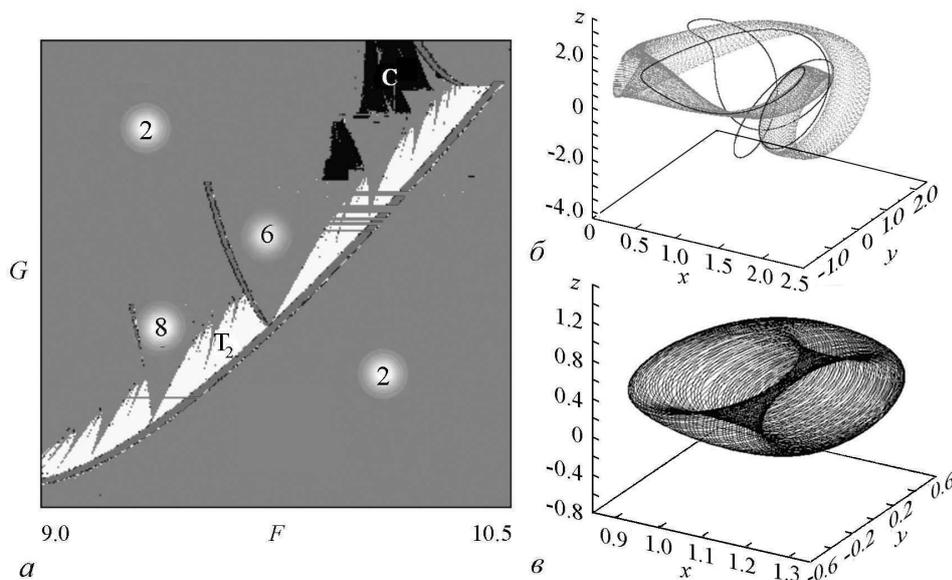


Рис. 3. *a* – карта показателей Ляпунова для модели Лоренца-84 (2) при $a = 0.25$, $b = 4$; *b* – примеры фазовых портретов системы (2) серый цвет $F = 9.997$, $G = 0.58878$, черный $F = 9.0$, $G = 0.58878$; *в* – пример неустойчивого тора при $F = 2.47$, $G = 1.65$, полученный итерированием системы (2) в обратном времени

Интересно, что система Лоренц-84 может демонстрировать и неустойчивый тор, который можно визуализировать, если интегрировать уравнения (2) в обратном времени. На рис. 3, *в* дан пример фазового портрета, отвечающего неустойчивому инвариантному тору.

1.3. Модифицированный генератор Анищенко–Астахова. Двумерный тор можно реализовать в трехмерной автономной динамической системе, однако, возможность *бифуркации удвоения двумерного тора* в автономной системе требует повышения размерности фазового пространства, как минимум, до четырех. В.С. Анищенко с соавторами был разработан генератор квазипериодических колебаний с четырехмерным фазовым пространством, в котором наблюдается такая бифуркация [17–19]. Далее мы представим описание этого генератора, а также более детально охарактеризуем его динамику.

Эта система представляет собой развитие известной эталонной модели нелинейной динамики – генератора Анищенко–Астахова [8], в которую с целью обеспечения незатухающих двухчастотных колебаний вводится дополнительная цепь обратной связи, характеризующаяся собственной частотой, отличающейся от резонансной частоты контура генератора,

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= mx + y - x\varphi - dx^3, \\
 \dot{y} &= -x, \\
 \dot{z} &= \varphi, \\
 \dot{\varphi} &= -\gamma\varphi + \gamma\Phi(x) - gz,
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

где $\Phi(x) = I(x)x^2$, $I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$

Система (3) является нелинейной диссипативной динамической системой размерности $N = 4$ и характеризуется четырьмя управляющими параметрами: m – параметр возбуждения, d – параметр нелинейной диссипации, γ – параметр затухания и g – параметр инерционности фильтра.

На рис. 4 представлена карта показателей Ляпунова модифицированного генератора Анищенко–Астахова (3) на плоскости основных управляющих параметров g и m для фиксированных значений $\gamma = 0.2$ и $d = 0.001$. Как видно из рисунка, при малых значениях параметра m в системе реализуются автоколебания, которым отвечает неподвижная точка в сечении Пуанкаре (период 1 на карте). С увеличением параметра m можно прийти к линии рождения двумерного тора, которой отвечает бифуркация Неймарка–Сакера основного предельного цикла. На карте показателей Ляпунова хорошо видна лежащая выше этой линии область квазипериодических колебаний T_{2Q_1} , в которую встроена система языков синхронизации, отвечающих рациональному соотношению частот в генераторе. Наиболее выражен язык синхронизации периода 4. Его особенность – наличие *вторичной бифуркации Неймарка–Сакера*. Этот факт иллюстрирует рис. 4, б, на котором показан фазовый портрет и его сечение Пуанкаре гиперповерхностью $\varphi = 0$ из области двухчастотных квазипериодических колебаний над языком периода 4. Можно видеть, что с увеличением параметра m сначала наблюдается простой предельный цикл, затем происходит бифуркация Неймарка–Сакера и рождается инвариантный тор. При увеличении параметра m на этом торе возникает резонансный цикл периода 4, а затем – вторичная бифуркация Неймарка–Сакера. На ляпуновской карте соответствующая область квазипериодичности примыкает к вершине языка и обозначена буквой T_{2q} .

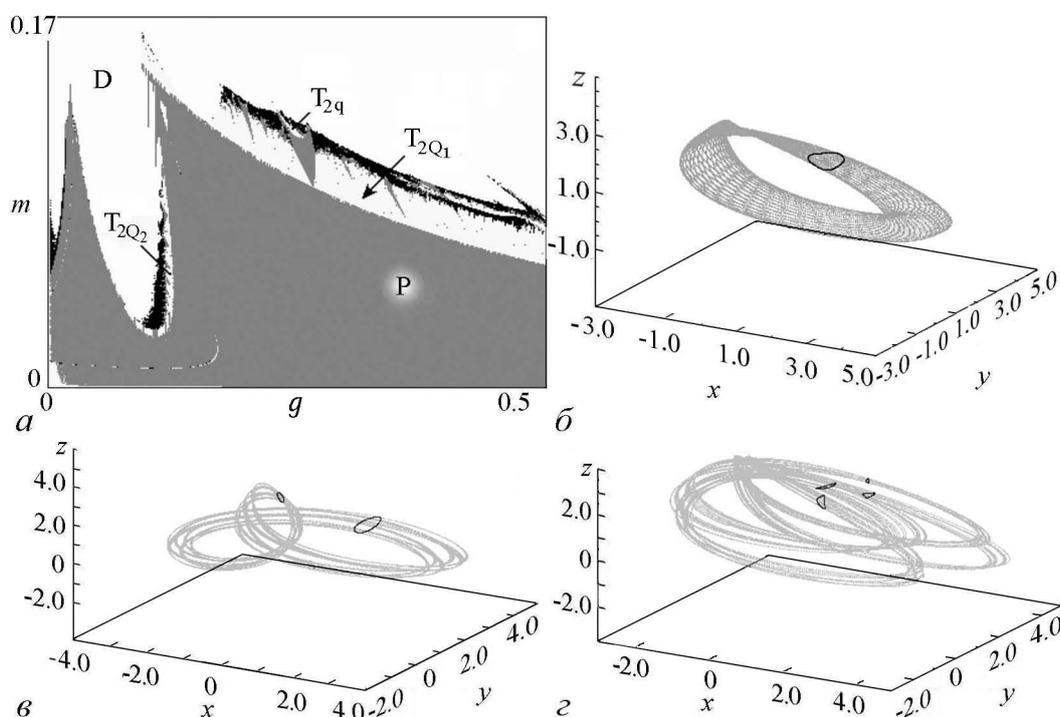


Рис. 4. а – карта показателей Ляпунова для модифицированного генератора Анищенко–Астахова; б–г примеры фазовых портретов или сечений Пуанкаре для квазипериодических аттракторов из различных областей квазипериодики: T_{2Q_1} , T_{2Q_2} , T_{2q} , соответственно

Фиксируем теперь параметр m и будем уменьшать g . Как видно из приведенной на рис. 4 карты режимов, сначала происходит бифуркация удвоения основного предельного цикла, так что период в сечении Пуанкаре становится равным 2. Однако далее снова наблюдается рождение квазипериодических колебаний на базе уже этого двухоборотного цикла. На плоскости параметров рис. 4 имеет место соответствующая область квазипериодичности T_{2Q_2} со встроенной системой языков Арнольда. На рис. 4, в представлен фазовый портрет и сечение Пуанкаре двухчастотного тора из данной области.

Помимо описанных бифуркаций и колебательных режимов в системе (3) могут реализоваться бифуркации удвоения двумерного тора. При постепенном увеличении параметра m инвариантная кривая становится двухоборотной – данная перестройка соответствует бифуркации удвоения тора. При дальнейшем увеличении параметра m можно наблюдать еще две бифуркации удвоения тора. Далее инвариантная кривая теряет гладкость, и реализуется переход к хаосу через ее разрушение [17].

2. Автономный генератор квазипериодических колебаний

Представленные выше системы обладают той или иной спецификой. Так система Чуа включает элемент с негладкой (кусочно-линейной) характеристикой. Система Лоренц-84 демонстрирует квазипериодические колебания только для двухоборотного предельного цикла и в узкой области параметров. И для той и другой модели трудно указать четкие физические механизмы, отвечающие за колебания с несоизмеримыми частотами. Генератор Анищенко–Астахова в значительной мере лишен этих недостатков, однако, характеризуется более высокой размерностью фазового пространства. В недавних работах [20,21] была предложена простейшая трехмерная модель, демонстрирующая квазипериодические колебания. Далее мы детально обсудим соответствующую модель генератора и ее модификации [22].

2.1. Теоретическая модель генератора квазипериодических колебаний.

Исходным пунктом при создании данного генератора является функциональная схема *релаксационного автогенератора*, которая содержит накопительный элемент (типа конденсатора), который постепенно заряжается через сопротивление от источника напряжения, а затем быстро разряжается через «пороговый» элемент (типа неоновой лампы). «Пороговый элемент» должен иметь два порога: один для зажигания и другой для гашения колебаний. Когда уменьшение напряжения через конденсатор достигнет уровня гашения, пороговый элемент выключается, и конденсатор начинает снова заряжаться, что ведет к повторению цикла.

Далее в качестве порогового элемента был выбран автогенератор с *жестким возбуждением*, для которого управляющим параметром выступает выходная переменная накопительного элемента. Автогенератор наряду с порогом возбуждения колебаний по управляющему параметру имеет также порог, более низкий, для срыва колебаний. Тогда в системе должны возникать релаксационные колебания, сопровождаемые циклами зарядки и разрядки накопительного элемента. Теперь система будет иметь *два характерных временных масштаба*. Один ассоциируется с релаксационными колебаниями, а другой – с основной рабочей частотой автоколебательного элемента. Соотношение частот можно задавать произвольно, так что следует ожидать, что система способна генерировать самоподдерживающиеся квазипериодические колебания.

Описанный физический механизм реализует следующая модель:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda + z + x^2 - \beta x^4)\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0, \\ \dot{z} &= \mu - x^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь x – обобщенная координата, относящаяся к автоколебательному элементу; ω_0 – частота его собственных колебаний. Множитель перед производной \dot{x} содержит параметр λ , характеризующий глубину положительной обратной связи в автогенераторе, а также нелинейный член x^2 , стимулирующий возбуждение колебаний, и член x^4 , отвечающий за насыщение при больших амплитудах. Нелинейность, соответствующая комбинации двух последних членов, обеспечивает жесткое возбуждение автогенератора, обусловленное присутствием субкритической бифуркации Андронова–Хопфа. Как следствие, в системе имеет место *гистерезис*, причем в зависимости от параметра β изменяется ширина петли гистерезиса. Параметр λ входит в уравнение вместе с аддитивной добавкой z , которая характеризует состояние накопительного элемента, а эволюция этой переменной во времени задается вторым уравнением. Система (4) имеет два независимых временных масштаба. В качестве одного фигурирует характерное время восстановления состояния накопительного элемента $\tau \approx \mu^{-1}$, а в качестве второго – основной период колебаний автогенератора $T = 2\pi/\omega_0$.

Обратимся к численному исследованию системы (4) в зависимости от параметров, определяющих характерные временные масштабы системы. На рис. 5, а показана карта показателей Ляпунова на плоскости таких параметров (ω_0, μ) . Белым цветом обозначена область, для которой изображающая точка уходит на бесконечность. Из рисунка хорошо видно, что при $\mu > 1$ типичным является устойчивый предельный цикл, отвечающий неподвижной точке в сечении Пуанкаре. При $\mu < 1$ этот цикл претерпевает бифуркацию Неймарка–Сакера, в результате которой в системе становятся возможными устойчивые двухчастотные торы (им отвечают квазипериодические режимы). На карте можно видеть характерную систему языков Арнольда. Внутри языков Арнольда реализуются предельные циклы, которые являются резонансными и лежат на поверхности соответствующего тора. Подчеркнем, что эти циклы отвечают *внутренним резонансам* системы (4), поскольку рассматриваемая система автономна.

При уменьшении собственной частоты ω_0 проявляется внутреннее устройство языков – наблюдаются бифуркации удвоения периода резонансных циклов и переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума. Кроме того, на рисунке просматривается линия *перекрывтия языков*. Правее этой линии имеют место квазипериодические режимы, а левее располагаются области хаоса.

Отметим, что при существенном увеличении собственной частоты ω_0 хаотические режимы исчезают и остаются только квазипериодические, по крайней мере, на уровне достигаемого в наших расчетах разрешения. С физической точки зрения это область, в которой реализуются режимы *пульсирующей генерации* [20,21].

Обозначим теперь $y = \dot{x}$. Тогда в трехмерном фазовом пространстве (x, y, z) при соответствующем выборе параметров наблюдаются аттракторы в виде инвариантных торов. Пример такого аттрактора приведен на рис. 5, б. Рядом с портретом аттрактора на рис. 5, в представлен спектр Фурье генерируемого сигнала. Спектр Фурье для таких режимов выглядят точно так, как это и должно быть для квазипериодических колебаний: он содержит дискретное множество равно удаленных друг

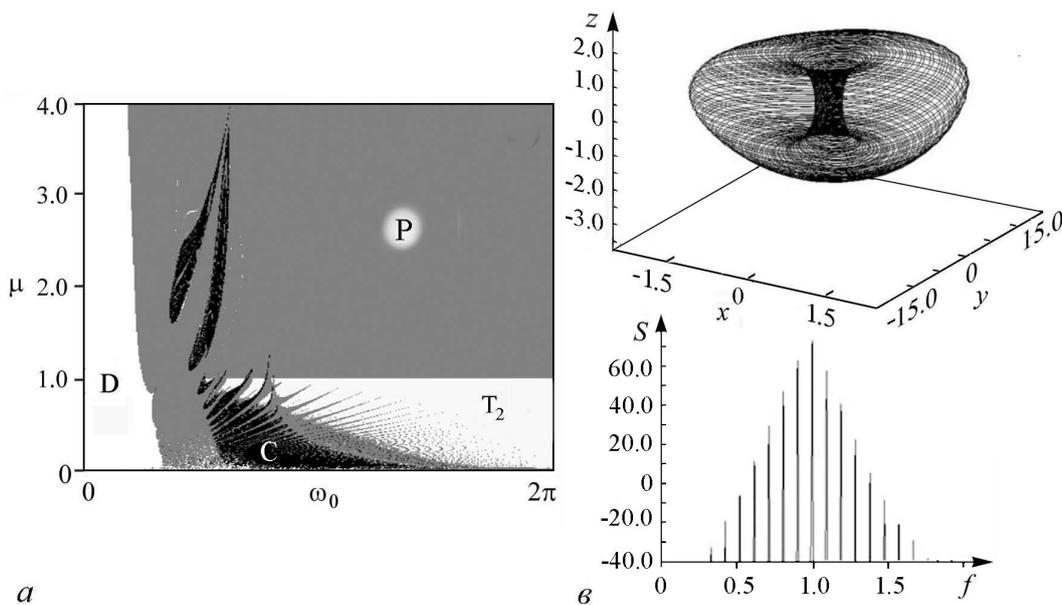


Рис. 5. *a* – карта показателей Ляпунова при $\lambda = 0$, $\beta = 0.5$; *b* – фазовый портрет и *c* – спектр Фурье для генератора (4) при $\lambda = 0$, $\beta = 0.5$, $\omega_0 = 2\pi$, $\mu = 0.9$

от друга частотных компонент. Амплитуда компонент уменьшается вправо и влево от главной спектральной составляющей, которая соответствует основной частоте автоколебательного элемента. Расстояние между соседними компонентами определяется частотой релаксационных колебаний, то есть циклами заряда и разряда накопительного элемента, и увеличивается с ростом параметра μ .

2.2. Экспериментальная реализация. Теперь перейдем к экспериментальной реализации данной системы. Описанный ниже эксперимент выполнен совместно с Е.П. Селезевым [25]. Основная идея состоит в следующем: конструируется автогенератор, автоколебания в котором изменяются в соответствии со схемой управления, как показано на рис. 6, *a*. Базовым элементом является автогенератор с индуктивной обратной связью, в котором используется полевой транзистор с двумя затворами (КП327). Такой транзистор позволяет реализовать механизм регулировки гашения и возбуждения автоколебаний в контуре.

Автогенератор генерирует самоподдерживающиеся колебания с амплитудой U . С помощью умножителя напряжение возводится в квадрат. Затем квадратичное напряжение U^2 проходит через резистор R и переходит на интегратор, где оно интегрируется вместе с дополнительным напряжением U_2^0 . Проинтегрированное напряжение – это напряжение на втором затворе полевого транзистора, от которого зависит ширина канала полевого транзистора. В зависимости от ширины канала в автогенераторе будут возбуждаться автоколебания или нет. В автогенераторе используется также система встречно-параллельных диодов (KD52R), они необходимы для создания требуемого типа нелинейности по типу осциллятора ван дер Поля.

Для возможности реализации квазипериодических автоколебаний в генераторе необходимо, чтобы характеристика полевого транзистора была *гистерезисной*. Это связано с тем, что на каждом цикле заряда–разряда автоколебания в генераторе не

должны гаснуть совсем, и для возбуждения колебаний на новом цикле необходима некая затравка. Для экспериментальной системы параметры были выбраны так, что ширина петли гистерезиса была максимальна.

На рис. 6, б представлена упрощенная схема нашего генератора в виде автогенератора с переменным током индуктивности, который обуславливается в соответствии со схемой управления рис. 6, а. Если записать законы Кирхгофа для общей точки U , то можно получить уравнения, описывающие динамику напряжения в схеме на рис. 6, б¹,

$$\frac{d^2U}{dt^2} - \frac{1}{C_k} \left[\frac{I_0}{\varphi} + k_0MU_2 + \left(3S_1M - \frac{I_0}{8\varphi^3} \right) U^2 - 5S_2MU^4 \right] \frac{dU}{dt} + \frac{1}{LC_k}U = 0. \quad (5)$$

Здесь I_0 , φ – характеристики диодов; M – коэффициент взаимной индукции; S_1 , S_2 – коэффициенты, описывающие крутизну ВАХ полевого транзистора. Таким образом, получаем уравнение автогенератора с жестким возбуждением с управляемым параметром возбуждения. При этом динамика напряжения на втором затворе полевого транзистора определяется схемой интегрирования и будет описана уравнением

$$\frac{dU_2}{dt} = \frac{1}{RC_1}(U_2^0 - U^2). \quad (6)$$

В соотношениях (5) и (6) выполним перенормировку времени на собственную частоту $\sqrt{1/LC_k}$

$$\begin{aligned} \frac{d^2U}{dt^2} - \sqrt{\frac{L}{C_k}} \left[\frac{I_0}{\varphi} + k_0MU_2 + \left(3S_1M - \frac{I_0}{8\varphi^3} \right) U^2 - 5S_2MU^4 \right] \frac{dU}{dt} + U &= 0, \\ \frac{RC_1}{\sqrt{LC_k}} \frac{dU_2}{dt} = U_2^0 - U^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Перепишем теперь математическую модель (4), также выполнив перенормировку времени на частоту ω_0 ,

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \omega_0^{-1}(\lambda + z + x^2 - \beta x^4)\dot{x} + x &= 0, \\ \omega_0\dot{z} = \mu - x^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, эта модель и система (7) эквивалентны. При этом в эксперименте, варьируя сопротивление R , можно менять параметр ω_0 , то есть первый временной масштаб системы. В свою очередь, подаваемое на интегратор управляющее напряжение U_2^0 , с помощью которого регулируется напряжение на втором затворе полевого транзистора, является аналогом второго временного масштаба – параметра μ в математической модели (4).

На рис. 6, в представлен пример двумерной проекции инвариантного тора на плоскость (U, U_2) в виде фотографии с экрана осциллографа в области, где реализуется квазипериодическая динамика.

¹Подробный вывод можно найти в [5].

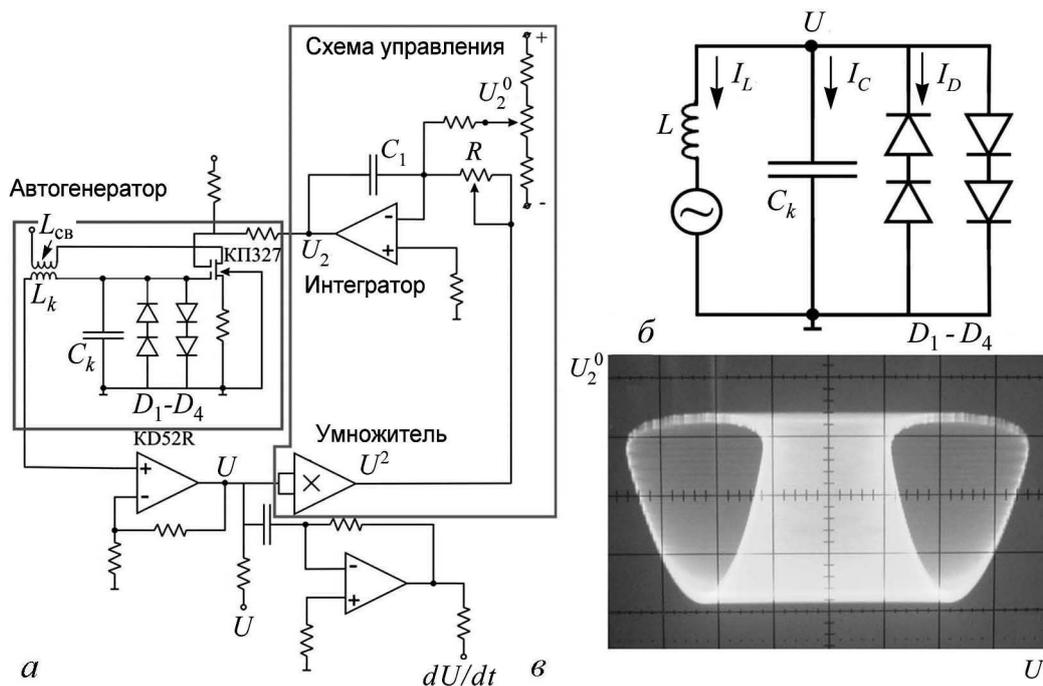


Рис. 6. *a* – схема генератора квазипериодических колебаний на базе двухзатворного полевого транзистора; *б* – упрощенная схема автогенератора; *в* – пример двумерной проекции фазового портрета, сфотографированного с экрана осциллографа на плоскости переменных (U, U_2^0)

2.3. Hidden-аттракторы. Одним из новейших направлений изучения типов динамики динамических систем является изучение так называемых «скрытых» аттракторов (hidden-attractors) [24–28]. Аттракторы автоколебательных систем имеют бассейны притяжения, которые обычно ассоциируются с неустойчивым состоянием равновесия, в то время как скрытые аттракторы имеют бассейны притяжения, не пересекающиеся с неустойчивым равновесием. В указанных работах представлены примеры поиска подобных скрытых аттракторов в хорошо известных системах (например, система Чуа), а также представлены примеры новых динамических систем с подобного рода аттракторами.

Предложенный нами генератор квазипериодических колебаний не имеет состояний равновесия, соответственно все аттракторы, существующие в системе, являются «скрытыми» [29–31]. На рис. 7, *a–в* представлены бифуркационные деревья в окрестности резонанса $5 : 2$, где можно наблюдать сосуществование резонансного цикла с тором, а также сосуществование тора с хаотическими аттракторами. Данные деревья были построены для различных начальных условий и различных направлений сканирования по параметру. В результате седло-узловой бифуркации рождается резонансный цикл $5 : 2$. Так как система (4) имеет симметрию относительно перестановки $x \rightarrow -x$, то по циклу можно пройти по часовой стрелке и против. При увеличении параметра ω_0 происходит потеря симметрии в результате бифуркации «вилка» и уже каждый из аттракторов претерпевает каскад бифуркаций удвоения периода с переходом к хаосу. Таким образом, в некотором диапазоне параметров сосуществуют два хаотических и квазипериодический аттрактор. На рис. 7, *г–е* представлены двумерные проекции подобных сосуществующих аттракторов. При даль-

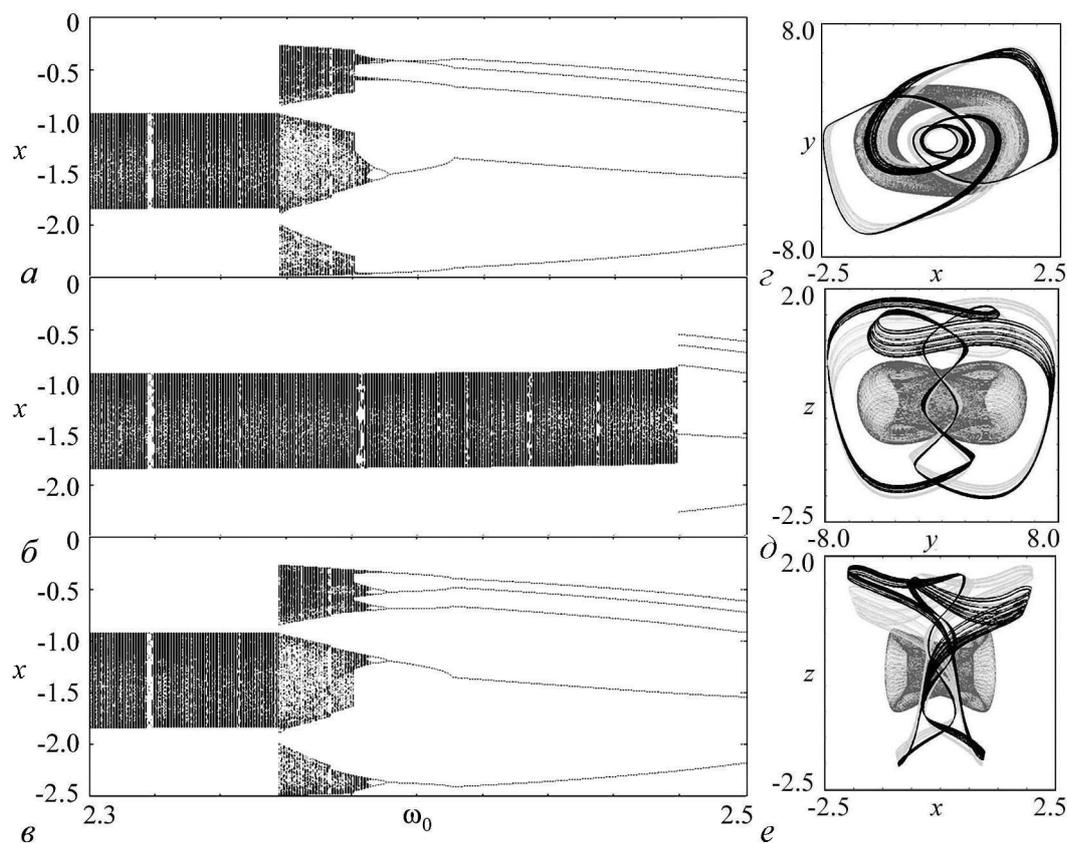


Рис. 7. *a-в* – бифуркационные деревья системы (4), построенные для различных начальных условий и различных типов наследования начальных условий при $\lambda = 0$, $\beta = 0.5$, $\mu = 0.9$; *z-e* – двумерные проекции сосуществующие квазипериодического и двух хаотических «скрытых» аттракторов при $\lambda = 0$, $\beta = 0.5$, $\mu = 0.9$, $\omega_0 = 2.383$

нейшем увеличении параметра ω_0 два хаотических аттрактора в результате кризиса объединяются в один, который затем исчезает совсем. Подобное сосуществование «скрытых» аттракторов наблюдается и для других резонансных циклов [31].

2.4. Модификация 1: Генератор с одной неподвижной точкой. В системе (4) отсутствует состояние равновесия. С одной стороны, это позволяет изучать в системе такое явление как «скрытые» аттракторы, с другой стороны, появление квазипериодических аттракторов из первоначального положения равновесия не наблюдается. Это ограничение может быть объяснено наличием постоянного источника энергии в схеме генератора. Действительно, при фиксированном увеличении параметра μ это уравнение представляет собой источник постоянного тока вместо источника постоянного напряжения. Чтобы решить эту проблему, прибегнем к иной формулировке

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda + z + x^2 - \beta x^4)\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0, \\ \dot{z} &= b(\varepsilon - z) - k\dot{x}^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Модель (9) можно интерпретировать как автогенератор с жестким возбуждением, у которого цепь подачи питания инерционная. Параметр ε характеризует поступление энергии от источника питания, параметр b отвечает за инерционные свойства

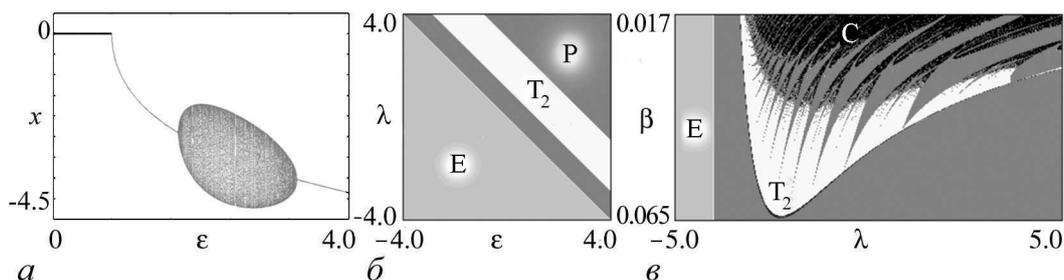


Рис. 8. *a* – бифуркационное дерево системы (9) при $\lambda = 0$, $b = 1$, $k = 0.02$, $\beta = 1/18$, $\omega_0 = 2\pi$; карты показателей Ляпунова на различных плоскостях параметров при $b = 1$, $k = 0.02$, $\omega_0 = 2\pi$ и различных значениях: $\beta = 1/18$ (*б*) и $\varepsilon = 4$ (*в*)

цепи питания. Член, содержащий коэффициент k , отвечает за отбор энергии в автогенератор. Этот параметр обычно имеет значение $k = 0.02$.

Данная модель имеет одну неподвижную точку с координатой: $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, \varepsilon)$. Проанализировав данную точку на устойчивость, можно получить условия бифуркации Андронова–Хопфа

$$\lambda = -\varepsilon \quad \text{и} \quad \lambda = b - \varepsilon - \omega_0^2. \quad (10)$$

Теперь обратимся к численному исследованию системы. На рис. 8 представлены бифуркационное дерево, построенное в зависимости от параметра ε , и карты показателей Ляпунова на различных плоскостях параметров. На бифуркационном дереве (рис. 8, *a*) черной жирной линией отмечена область, где существует устойчивая неподвижная точка, затем она в результате бифуркации Андронова–Хопфа при $\varepsilon = \lambda = 0$ становится неустойчивой и рождается предельный цикл. При дальнейшем увеличении параметра ε происходит бифуркация Неймарка–Сакера, и рождается двухчастотный тор. На рис. 8, *б* изображена плоскость параметров, ответственных за бифуркацию Андронова–Хопфа, также на ней отмечена аналитически полученная линия бифуркации Андронова–Хопфа. Как видно из рисунка аналитически найденная линия бифуркации Андронова–Хопфа хорошо согласуется с результатами численного анализа. На рис. 4, *б* видна полоса конечной ширины в которой реализуются квазипериодические режимы. Причем ее ширина ограничена вдоль диагонали $\lambda = \varepsilon$, а вдоль диагонали $\lambda = -\varepsilon$ она неограничена. Таким образом, при определенном выборе управляющих параметров имеем достаточно грубые квазипериодические колебания.

На рис. 8, *в* представлена еще одна карта динамических режимов на плоскости параметров (λ, β) . На данной плоскости видна характерная система языков Арнольда, причем с уменьшением параметра β языки расширяются, перекрываются и в системе происходит разрушение тора с возникновением хаотической динамики. При увеличении параметра β происходит бифуркация Неймарка–Сакера и в системе рождается устойчивый цикл.

2.5. Модификация 2: Генератор с двумя неподвижными точками. Предыдущая модификация позволила наблюдать трансформации аттрактора в фазовом пространстве от неподвижной точки к тору через последовательность бифуркаций Андронова–Хопфа и Неймарка–Сакера. Рассмотрим еще одну модификацию генера-

тора. Исходные уравнения запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda + z + x^2 - \beta x^4)\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0, \\ \dot{z} &= (\mu - x^2)(2 - z^2). \end{aligned} \quad (11)$$

Эта формулировка по-прежнему позволяет рассматривать процесс зарядки, который происходит в источнике тока. Тем не менее, скорость зарядки теперь регулируется путем ограничения механизма, который защищает систему от достижения напряжений за пределами интервала $[-c; c]$. Данная система теперь будет иметь две неподвижные точки $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, \pm c)$. Собственные значения для точек задаются следующими соотношениями:

$$L_1 = \mp 2\mu c, \quad L_{2,3} = \frac{1}{2}((\lambda \pm c) \pm \sqrt{(\lambda \pm c)^2 - 4\omega_0^2}). \quad (12)$$

Условие для бифуркации Андронова–Хопфа будет иметь вид $\lambda = \pm c$ для каждой неподвижной точки. Таким образом, для положительных значений c неподвижная точка при $(0, 0, c)$ притягивает в направлении z , и при этом в плоскости (x, y) имеет место неустойчивый фокус. Для точки $(0, 0, -c)$ все наоборот: z -направление отталкивающее, а в плоскости (x, y) – притягивающий фокус.

Подобная конфигурация особым образом задает структуру фазового пространства. Фазовое пространство ограничено плоскостями $z = \pm c$, между которыми существует двухчастотный тор. На рис. 9, а представлена графически структура фазового пространства модели (11). При уменьшении параметра c плоскости $z_0 = \pm c$ сближаются, при $c = 0.25$ тор сталкивается с плоскостями, ограничивающими фазовое пространство, и вместо него рождаются два предельных цикла – устойчивый и неустойчивый. На рис. 9, б представлено бифуркационное дерево системы (11) для различных начальных условий, на котором видны данные трансформации при вариации параметров. На рисунке используются следующие обозначения: E_1, E_2 – устойчивая и неустойчивая неподвижные точки, отвечающие плоскостям $z_0 = \pm c$; S_1 – устойчивый предельный цикл, лежащий в плоскости $z_0 = c$; S_2, N_2 – устойчивый и неустойчивый циклы, лежащие между плоскостями.

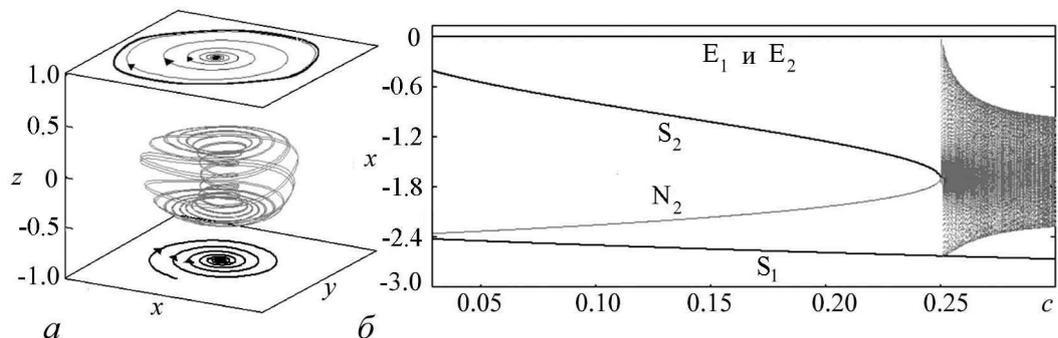


Рис. 9. Система (11): а – структура фазового пространства при $\lambda = 0, \beta = 0.5, \omega_0 = 2\pi, \mu = 0.9, c = 1$; б – бифуркационная диаграмма при $\lambda = 0, \beta = 0.5, \omega_0 = 2, \mu = 0.9$

3. Синхронизация генератора внешним сигналом

Обсудим задачу о синхронизации генератора квазипериодических колебаний внешним сигналом [33]. В качестве автономной системы будем использовать генератор квазипериодических колебаний (4). Воздействие выберем в виде периодической последовательности *коротких импульсов*. Такой выбор облегчает интерпретацию получаемых результатов, поскольку в промежутке между импульсами динамика системы автономна. С другой стороны, импульсное воздействие может представлять интерес для приложений, например, в биофизике [34].

Итак, пусть внешний сигнал в виде периодической последовательности дельта-импульсов воздействует на генератор (4)

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda + z + x^2 - \beta x^4)\dot{x} + \omega_0^2 x &= A\Sigma\delta(t - nT), \\ \dot{z} &= \mu - x^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь A – амплитуда внешнего сигнала, а T – его период.

Выберем значения параметров $\beta = 0.25$, $\omega_0 = 2\pi$, $\mu = 0.9$, чему отвечает автономный инвариантный тор. Карта показателей Ляпунова и ее увеличенные фрагменты для неавтономной системы (13) приведены на рис. 10, *a–г*. При этом выбран

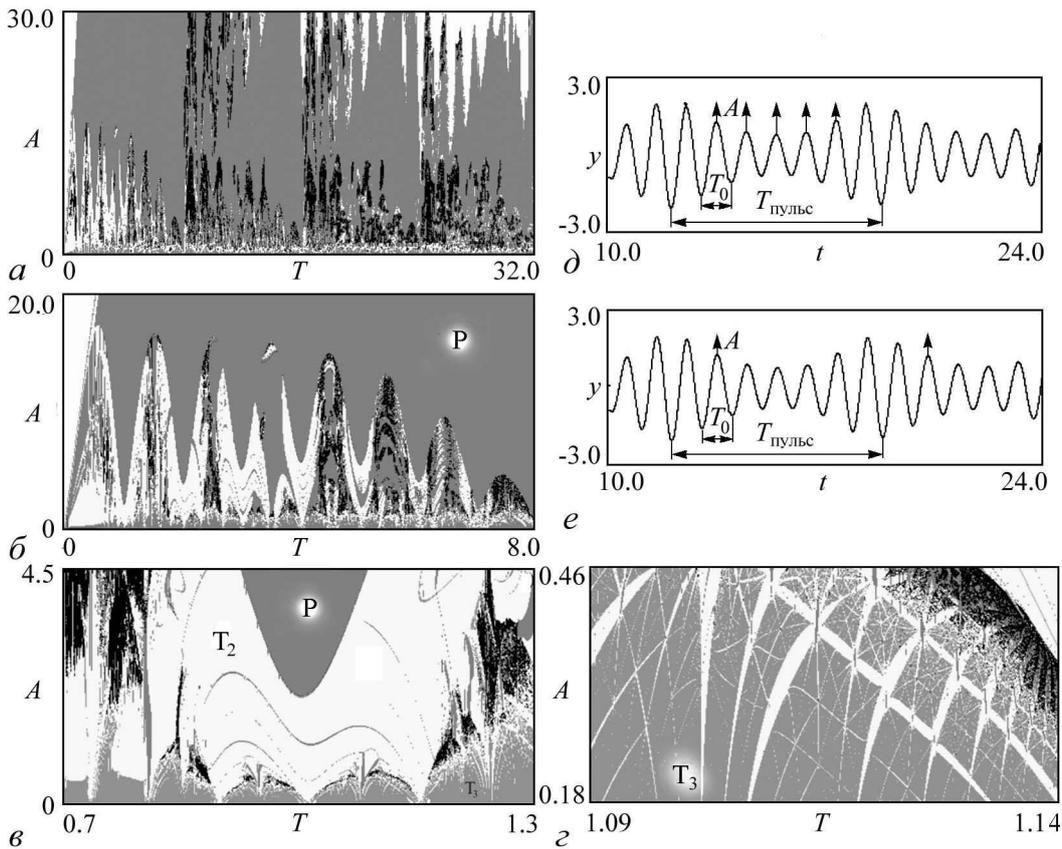


Рис. 10. *a–г* карта показателей Ляпунова и ее увеличенные фрагменты возбуждаемого импульсами генератора при $\lambda = 0$, $\beta = 0.25$, $\omega_0 = 2\pi$, $\mu = 0.9$; *д–е* временные реализации автономной системы (4)

увеличенный диапазон по периоду воздействия, чтобы можно было увидеть особенности наблюдаемой картины. В рассматриваемом случае имеется множество языков периода 1, которые следуют примерно через равные интервалы $T \approx 1$. Однако языки объединены в *группы*, примерно по семь-восемь языков, которые дают еще один период на карте $T \approx 8$. Для более четкого восприятия этого момента на рис. 10, б показан увеличенный фрагмент карты динамических режимов, захватывающий первую группу из восьми языков периода 1.

Возникновение регулярных режимов периода 1 означает возможность стабилизации квазипериодических колебаний внешним сигналом, так что реализуется *полная синхронизация* системы внешним сигналом. Полная синхронизация носит пороговый по амплитуде характер, что отличает ее от синхронизации регулярного режима. Особенность картины на рис. 10, б состоит в том, что порог полной синхронизации с ростом периода воздействия сначала повышается, а при $T \approx 4$ начинает вновь понижаться. При $T \approx 8$ он становится очень низким, почти нулевым. Затем картина повторяется и что важно, не копируясь в деталях, но сохраняя общие черты описанной организации.

Для объяснения наблюдаемых особенностей обратимся к реализации сигнала, показанной на рис. 10, д и рис. 10, е. Это типичная для квазипериодического режима картина колебаний, на которой выделяются два характерных временных масштаба:

- T_0 – собственный период колебаний осциллятора, который при выбранном значении $\omega_0 = 2\pi$ составляет $T_0=1$,
- $T_{\text{пульс}}$ – период биений квазипериодических колебаний, который по рис. 10, д можно оценить, как $T_{\text{пульс}} \approx 7-8$.

Добавим теперь внешнее воздействие. Поскольку внешний сигнал представляет собой последовательность дельта-импульсов, то в промежутках между импульсами система автономна. В свою очередь, через каждый момент времени T координата $y = \dot{x}$ получает добавку, равную амплитуде импульса².

Из рис. 10, д хорошо видно, во-первых, что синхронизация, отвечающая периоду 1 в стробоскопическом сечении, возможна при действии импульса в моменты времени $T = T_0, T = 2T_0, T = 3T_0, \dots, T = nT_0$. Конечно, динамика системы (13) не одномерна и есть еще оставшиеся две переменные, поэтому такая картина носит не точный, а приближенный характер. Во-вторых, с ростом числа периодов n амплитуда сигнала A , необходимая для синхронизации, сначала возрастает, а затем понижается. Причина – наличие биений в автономной системе с периодом $T_{\text{пульс}}$. При $T \approx T_{\text{пульс}}$ необходимая для стабилизации амплитуда сигнала снова становится почти равной нулю. Таким образом, мы имеем качественное объяснение организации плоскости «период воздействия–амплитуда воздействия» в пределах одной группы языков на рис. 10, б.

Рис. 10, е иллюстрирует, что при $T > T_{\text{пульс}}$ картина снова повторяется. При этом имеет место все же неточное воспроизведение, поскольку рассматривается режим с несоизмеримыми частотами, и автономные реализации не воспроизводят себя точно. В результате возникает вторая группа из 7–8 языков и т.д.

²При воздействии дельта-функций по типу уравнений (13), как известно, координата x не меняется, а скорость $y = \dot{x}$ получает добавку, равную амплитуде импульса A .

Такова картина режима полной синхронизации. Однако автономная система (13) характеризуется двумя несоизмеримыми частотами. При добавлении в систему внешнего воздействия появляется возможность реализации в системе квазипериодических режимов с тремя несоизмеримыми частотами, то есть трехчастотных торов.

На рис. 10, *в, г* приведены фрагменты карты ляпуновских показателей, отчетливая палитра стандартная. Выбран крупный масштаб, отвечающий окрестности основного языка полной синхронизации³. Область полной синхронизации P имеет порог по амплитуде и характерное «округлое» основание. При малых амплитудах внешнего сигнала в системе наблюдаются трехчастотные квазипериодические колебания, хорошо видные на рис. 10, *в*. На рисунке можно видеть также, что в область трехчастотных колебаний встроена система языков двухчастотных торов. При этом наиболее крупные языки имеют систему более узких «сателлитов». При еще большем увеличении на рис. 10, *г* визуализируется картина *резонансной паутины Арнольда* – наблюдается система тонких полос двухчастотных режимов, на пересечении которых возникают небольшие острова периодических режимов высокого порядка.

Стоит отметить, что для случая *гармонического воздействия* карта ляпуновских показателей в окрестности основного резонанса аналогична представленной на рис. 10, *в*, и визуально она практически идентична случаю импульсного сигнала.

4. Синхронизация двух связанных генераторов квазипериодических колебаний

Рассмотрим теперь систему двух связанных генераторов (4)⁴

$$\ddot{x}_{1,2} - (\lambda + z_{1,2} + x_{1,2}^2 - \frac{1}{2}x_{1,2}^4)\dot{x}_{1,2} + \omega_{01,02}^2 x_{1,2} + M_c(\dot{x}_{1,2} - \dot{x}_{2,1}) = 0, \quad (14)$$

$$\dot{z}_{1,2} = \mu_{1,2} - x_{1,2}^2.$$

Здесь x_1, z_1 – переменные, характеризующие первый генератор; x_2, z_2 – переменные второго генератора; M_c – коэффициент диссипативной связи [35].

Система (14) характеризуется четырьмя независимыми частотами, которые регулируются четырьмя параметрами: собственными частотами генераторов ω_{01}, ω_{02} и частотами релаксационных колебаний μ_1, μ_2 . Для нас важно рассмотреть ситуацию, когда подсистемы демонстрируют квазипериодические колебания. Для этого нужно отстроиться от возможных сильных резонансов. С этой целью в соответствии с ляпуновской картой рис. 5 выберем область изменения параметра ω_0 так, что $\omega_0 > 3$. Теперь фиксируем $\omega_{01} = \omega_0, \omega_{02} = \omega_0 + \Delta$, где Δ будет представлять собой регулируемую частотную расстройку генераторов. Остальные параметры выбираем $\omega_0 = \pi, \mu_1 = \mu_2 = 0.9$. В этом случае первый генератор в автономном режиме демонстрирует квазипериодические колебания, а изменение частотной расстройки Δ в положительную область оставляет преимущественно автономный квазипериодический режим и во второй подсистеме.

³На рис. 10, *б* первый язык периода 1.

⁴Задача о синхронизации квазипериодических генераторов является сложной и многоплановой. Некоторые вопросы для связанных квазипериодических генераторов Анищенко–Астахова обсуждались в [36].

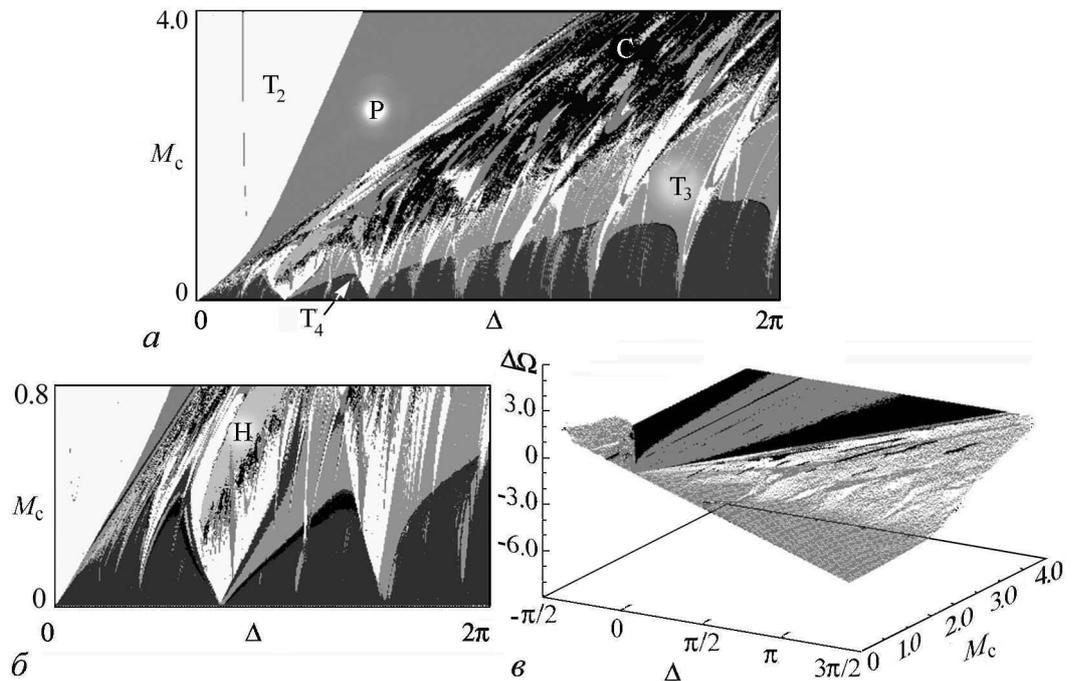


Рис. 11. *a* – карта показателей Ляпунова для системы (14) при $\lambda = 0$, $\omega_0 = \pi$, $\mu_1 = \mu_2 = 0.9$; *b* – увеличенный фрагмент карты; *в* – трехмерная поверхность

На рис. 11, *a* представлена карта показателей Ляпунова системы связанных генераторов (14) на плоскости «частотная расстройка–величина связи» в широком диапазоне изменения параметров. Цифры отвечают периодам циклов. Начнем обсуждение с самой большой области двухчастотных режимов, обозначенной на рисунке символом T_2 . Она имеет форму традиционного языка с основанием в точке $\Delta = 0$, M_c . Внутри этой области имеет место режим *фазовой синхронизации квазипериодических колебаний*.

На рис. 11, *в* представлена трехмерная поверхность, дающая зависимость разности фаз генераторов $\Delta\Omega$ от частотной расстройки и параметра связи⁵. Нерегулярные режимы на построенной поверхности отмечены серым цветом. Черным цветом показаны периодические режимы. Как видно из рисунка, захват квазипериодических колебаний происходит не только при малой связи и расстройке, но и при больших значениях параметров. Из точки нулевой частотной расстройки выходит язык, внутри которого наблюдается нерегулярный режим. В соответствии с картой показателей Ляпунова это двухчастотный квазипериодический режим, при котором разности фаз равны нулю. Таким образом, генераторы взаимно захвачены, но их колебаний являются двухчастотными квазипериодическими.

При увеличении частотной расстройки возникает чисто периодический режим. Таким образом, при выходе из основного языка двухчастотной квазипериодичности при большой связи возникает *полная синхронизация генераторов*, отвечающая простейшему периодическому режиму. Можно сказать, что при достаточно большой связи и достаточно большой частотной расстройке наблюдается *подавление квазипериодических колебаний* за счет взаимодействия генераторов. При этом полная синхронизация имеет порог по величине связи.

⁵В данном случае аттракторы являются фазо-когерентными, и их фазы хорошо определяются чисто геометрическим образом [1].

Язык полной синхронизации на рис. 11, *а* сужается при уменьшении связи и имеет порог по ее величине. Это означает, что при выходе из основной двухчастотной области при малой связи будет возникать квазипериодический режим более высокой размерности. Особенность данной системы состоит в том, что при малой связи практически сразу происходит переход от двухчастотного к четырехчастотному тору. Причина, скорее всего, в идентичности генераторов по второму частотному параметру: $\mu_1 = \mu_2$. На рис. 11, *б* представлен увеличенный фрагмент карты показателей Ляпунова, на которой видны данные особенности. На фрагменте также видно, что при малой связи доминируют четырехчастотные торы. С другой стороны, имеет место система языков трехчастотных торов, основания которых расположены на оси частотной расстройки Δ . Вершины этих языков выстроены вдоль границы, которая отделяет возникающую при большой связи сплошную полосу трехчастотных режимов. В эту полосу встроены области двухчастотной квазипериодичности, а при еще большей связи возникают хаос и гиперхаос. Внутри областей двухчастотной квазипериодичности, хаоса и гиперхаоса имеется система островов периодических режимов более высокого порядка. Они, однако, не образуют какой-либо регулярной структуры. Все области периодических режимов имеют порог по величине связи.

Заключение

Таким образом, в данной работе представлен обзор моделей, в которых исследованы двухчастотные квазипериодические колебания. Представлено семейство генераторов квазипериодических колебаний с минимальной размерностью фазового пространства. На примере одного из генераторов изучены свойства скрытых аттракторов. Исследована вынужденная и взаимная синхронизация двухчастотных квазипериодических колебаний. Обнаружено специфическое устройство плоскости параметров внешнего сигнала: наличие двух масштабов на карте. Выявлена возможность фазовой и полной взаимной синхронизации генераторов в режиме двухчастотных квазипериодических колебаний.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (№ 14-02-31064, 14-02-00085) и гранта государственной поддержки ведущих научных школ НШ-1726.2014.2.

Библиографический список

1. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 508 с.
2. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Основы теории сложных систем. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007. 620 с.
3. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М: Наука, 1980. 360 с.
4. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Стрелкова Г.И. Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008. 144 с.
5. Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В. Физика квазипериодических колебаний. Саратов: Издательский центр «Наука», 2013, 252 с.

6. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: Новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002.
7. *Дмитриев А.С., Ефремов Е.В., Максимов Н.А., Панас А.И.* Генерация хаоса. М.: Техносфера, 2013. 424 с.
8. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001, 296 с.
9. *Мацумото Т.* Хаос в электронных схемах // ТИИЭР. 1987.Т. 75, № 8. С. 66.
10. *Matsumoto T., Chua L., Tokunaga R.* Chaos via torus breakdown // IEEE Trans. Circ. Syst. 1987. Vol. 34, № 3. P. 240.
11. *Baptista M.S., Caldas I.L.* Phase-locking and bifurcations of the sinusoidally-driven double scroll circuit // Nonlinear Dynamics. 1998. Vol. 17. P. 19.
12. *Baptista M.S., Caldas I.L.* Dynamics of the two-frequency torus breakdown in the driven double scroll circuit // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58. №4. P. 4413.
13. *Lorenz E.N.* Irregularity: A fundamental property of the atmosphere // Tellus. 1984. Vol. 36A. P. 98.
14. *Shil'nikov A., Nicolis G., Nicolis C.* Bifurcation and predictability analysis of a low-order atmospheric circulation model // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1995. Vol. 5, № 6. P. 1701.
15. *Broer H., Simo C., Vitolo R.* Bifurcations and strange attractors in the Lorenz-84 climate model with seasonal forcing // Nonlinearity. 2002. Vol. 15. P. 1205.
16. *Rossa F., Witte V., Govaerts W., Kuznetsov Yu.* Numerical Periodic Normalization for Codim 2 Bifurcations of Limit Cycles. // arXiv:1111.4445
17. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Генератор квазипериодических колебаний. Бифуркация удвоения двумерного тора // Письма ЖТФ. 2005. Т. 31, вып. 19. С. 88.
18. *Anishchenko V.S., Nikolaev S.M., Kurths J.* Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 76. P. 046216.
19. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Устойчивость, синхронизация и разрушение квазипериодических колебаний // Нелинейная динамика. 2006. Т.2, № 3. С. 267.
20. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Stankevich N.V.* A simple autonomous quasiperiodic self-oscillator // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2010. Vol. 15. P. 1676.
21. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Станкевич Н.В.* Автономный генератор квазипериодических колебаний // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 2. С. 51.
22. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Mosekilde E., Stankevich N.V.* Generators of quasiperiodic oscillations with three-dimensional phase space //European Physical Journal. 2013. Vol. 222. P. 2391.
23. *Kuznetsov A., Kuznetsov S., Seleznev E., Stankevich N.* A generator of quasiperiodic oscillations: An autonomous dynamics and synchronization of coupled generators // Nonlinear Dynamics of Electronic Systems. 2012. Wolfenbuettel. P. 100.
24. *Леонов Г.А., Кузнецов Н.В.* Скрытые колебания в динамических системах: Шестнадцатая проблема Гильберта, гипотеза Айзермана и Кальмана, скрытые аттракторы в контурах Чуа // Современная математика. Фундаментальные направления. 2012. Т.5. С. 105.
25. *Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Kuznetsova O.A., Seledzhi S.M., Vagitsev V.I.* Hidden oscillations in dynamical systems // Trans. Syst. Control. 2011. Vol. 6. P. 54.

26. Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Vagitsev V.I. Localization of hidden Chua's attractors // Phys. Lett. A. 2011. Vol. 375. P. 2230.
27. Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Vagitsev V.I. Hidden attractor in smooth Chua systems // Physica D. 2012. Vol. 241. P. 1482.
28. Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Mokaev T.N. Hidden attractor and homoclinic orbit in Lorenz-like system describing convective fluid motion in rotating cavity // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2015. Vol. 28, Issue 1–3. P. 166.
29. Wei Z., Wang R., Lin A. A new finding of the existence of hidden hyperchaotic attractors with no equilibria // Math. Comp. Sim. 2014. Vol. 100. P. 13.
30. Jafari S., Sprott J.C., Golpayegani S.M.R.H. Elementary quadric chaotic flows with no equilibria // Phys. Lett. A. 2013. Vol. 377. P. 699.
31. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Mosekilde E. and Stankevich N.V. Co-existing hidden attractors in a radiophysical oscillator system // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2015. Vol. 48, № 12. P. 125101.
32. Stankevich N.V., Kurths J., Kuznetsov A.P. Forced synchronization of quasiperiodic oscillations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2015. Vol. 20, № 1. P. 316.
33. Клиньшов В.В., Некоркин В.И. Переустановка фазы сложных автоколебаний импульсным воздействием // Письма в ЖЭТФ. 2008. Т. 87, вып. 2. С. 85.
34. Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J. Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasiperiodic motions // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 73. P. 056202.
35. Кузнецов А.П., Станкевич Н.В. Синхронизация генераторов квазипериодических колебаний // Нелинейная динамика. 2013. Т. 9, № 3. С. 409.

References

1. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Science. England, Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
2. Loskutov A.Yu., Mikhailov A.S. Foundations of the Theory of Complex Systems. M.-Izhevsk: Institute of computer research, 2007. 620 p. (in Russian).
3. Landa P.S. Self-Oscillations in Systems with a Finite Number of Degrees of Freedom. M.: Science, 1980. 360 p. (in Russian).
4. Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Vadivasova T.E., Strelkova G.I. Synchronization of Regular, Chaotic and Stochastic Oscillations. M.-Izhevsk: Institute of computer research, 2008. 144 p. (in Russian).
5. Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Stankevich N.V., Turukina L.V. Physics of Quasiperiodic Oscillations. Saratov: Publishing center "Science 2013. 252 p. (in Russian).
6. Dmitriev A.S., Panas A.I. Dynamical Chaos: New Media for Communication Systems. M.: Fizmatlit, 2002 (in Russian).
7. Dmitriev A.S., Efremova E.V., Maksimov N.A., Panas A.I. Generation of Chaos. M.: Technospetra, 2013. 424 p. (in Russian)
8. Kuznetsov S.P. Dynamical Chaos. M.: Fizmatlit, 2001. 296 p. (in Russian)
9. Matsumoto T. // TIIEP. 1987. Vol. 75, № 8. P. 66 (in Russian).

10. *Matsumoto T., Chua L., Tokunaga R.* // IEEE Trans. Circ. Syst. 1987. Vol. 34, № 3. P. 240.
11. *Baptista M.S., Caldas I.L.* // Nonlinear Dynamics. 1998. Vol. 17. P.119.
12. *Baptista M.S., Caldas I.L.* // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58, № 4. P. 4413.
13. *Lorenz E.N.* // Tellus. 1984. Vol. 36A. P. 98.
14. *Shil'nikov A., Nicolis G., Nicolis C.* // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1995. Vol. 5, № 6. P. 1701.
15. *Broer H., Simo C., Vitolo R.* // Nonlinearity. 2002. Vol. 15. P. 1205.
16. *Rossa F., Witte V., Govaerts W., Kuznetsov Yu.* // arXiv:1111.4445
17. *Anishchenko V.S., Nikolaev S.M.* // Technical Physics Letters. 2005. Vol. 31, № 10. P. 853.
18. *Anishchenko V.S., Nikolaev S.M., Kurths J.* // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 76. P. 046216.
19. *Anishchenko V.S., Nikolaev S.M.* // Nonlinear Dynamics. 2006. Vol.2, № 3. P. 267 (in Russian).
20. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Stankevich N.V.* // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2010. Vol. 15. P. 1676.
21. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Stankevich N.V.* // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2010. Vol. 18, № 2. P. 51 (in Russian).
22. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Mosekilde E., Stankevich N.V.* //European Physical Journal . 2013. Vol. 222. P. 2391.
23. *Kuznetsov A., Kuznetsov S., Seleznev E., Stankevich N.* // Nonlinear Dynamics of Electronic Sitems. 2012. Wolfenbuettel, p. 100.
24. *Leonov G.A., Kuznetsov N.V.* // Modern Mathematics. Fundamental Problems. 2012. Vol.5. P. 105 (in Russian).
25. *Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Kuznetsova O.A., Seledzhi S.M., Vagaitsev V.I.* // Trans. Syst. Control. 2011. Vol. 6. P. 54.
26. *Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Vagaitsev V.I.* // Phys. Lett. A. 2011. Vol. 375. P. 2230.
27. *Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Vagaitsev V.I.* // Physica D. 2012. Vol. 241. P. 1482.
28. *Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Mokaev T.N.* // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2015. Vol. 28, Issue 1–3. P. 166.
29. *Wei Z., Wang R., Lin A.* // Math. Comp. Sim. 2014. Vol. 100. P. 13.
30. *Jafari S., Sprott J.C., Golpayegani S.M.R.H.* // Phys. Lett. A. 2013. Vol. 377. P. 699.
31. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Mosekilde E. and Stankevich N.V.* // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2015. Vol. 48, № 12. P. 125101.
32. *Stankevich N.V., Kurths J., Kuznetsov A.P.* // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2015. Vol. 20, № 1. P. 316.
33. *Klinshov V.V., Nekorkin V.I.* // Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters. 2008. Vol. 87, № 2. P. 78.
34. *Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J.* // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 73. P. 056202.
35. *Kuznetsov A.P., Stankevich N.V.* // Nonlinear Dynamics. 2013. Vol. 9, № 3. P. 409 (in Russian).

Поступила в редакцию 25.05.2015

AUTONOMOUS SYSTEMS WITH QUASIPERIODIC DYNAMICS

Examples and their properties: Review

*A. P. Kuznetsov*¹, *N. V. Stankevich*²

¹Kotel'nikov Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch

²Yuri Gagarin State Technical University of Saratov

The paper is a review of well-known in nonlinear dynamics models with low dimensional of phase space and quasiperiodic behavior. Also new results related to analysis of many-frequencies quasiperiodic oscillations for models with external action and coupled oscillators are discussed.

Keywords: Quasiperiodic oscillations, dynamical systems, Lyapunov exponents, hidden attractors.

Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, заведующий базовой кафедрой динамических систем Саратовского госуниверситета. Имеет звание профессора. Область научных интересов: динамические системы, теория бифуркаций, синхронизация, квазипериодические колебания и их приложения. Лауреат гранта Президента Российской Федерации, Соросовский профессор (2000, 2001). Опубликовал более 100 статей в российских и международных научных журналах. Научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика». Автор оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов СГУ и Лицея прикладных наук. Автор и соавтор 12 монографий, учебников и задачников по нелинейной динамике, теории колебаний и физике. Среди них: «Физика квазипериодических колебаний», «Нелинейность: от колебаний к хаосу», «Нелинейные колебания», «Линейные колебания и волны (сборник задач)» и др.

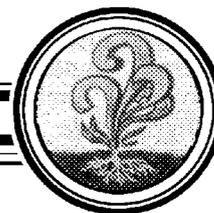


410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В.А. Котельникова РАН
410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
www.sgtnd.narod.ru
E-mail:apkuz@yandex.ru

Станкевич Наталия Владимировна родилась в Саратове (1985). Выпускница Лицея прикладных наук (2000). В 2007 году окончила факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского. В 2011 году защитила диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика». С 2011 года работает доцентом кафедры «Радиоэлектроника и телекоммуникации» Саратовского государственного технического университета имени Ю.А. Гагарина. Имеет более 50 научных публикаций, из которых 22 статьи в российских и зарубежных ведущих научных журналах и одна монография (в соавторстве). Область научных интересов: динамические системы, многочастотные квазипериодические колебания.



4100054 Саратов, ул. Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет
им. Ю.А. Гагарина
E-mail:stankevichnv@mail.ru



РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ АНАЛИЗА ЭЛЕКТРОННО-ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ГИРОТРОНОВ С НАРУШЕНИЯМИ АЗИМУТАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ*

Е. С. Семенов, О. П. Планкин, Р. М. Розенталь

Институт прикладной физики Российской академии наук

Представлен алгоритм моделирования систем формирования винтовых электронных пучков для запитки гиротронов, позволяющих учитывать типичные виды нарушений азимутальной симметрии системы. Выполнен анализ магнетронно-инжекторной пушки гиротрона диапазона 260 ГГц на второй гармонике гирочастоты в условиях смещения оси пучка в пределах 0.5 мм. Показано, что наличие несоосности оказывает значительное влияние на азимутальное распределение пичч-фактора.

Ключевые слова: Гиротрон, электронная оптика, магнетронно-инжекторные пушки.

Введение

Электронно-оптическая система (ЭОС), формирующая винтовые пучки с заданными значениями энергии, тока и отношением осцилляторной и продольной скоростей электронов, является ключевым компонентом гирорезонансных источников СВЧ-излучения. Несмотря на более чем полувековую историю таких источников, они остаются на передовых позициях с точки зрения мощности излучения вплоть до терагерцового диапазона [1]. В последние годы к «классическим» применениям гирорезонансных приборов в областях микроволновой обработки материалов и системах нагрева плазмы [2] добавились такие направления, как дистанционная диагностика радиоактивных материалов [3], медицинские и физические исследования на основе эффекта динамической поляризации ядер [4], контроль качества продуктов питания [5].

Расширение областей практического применения гирорезонансных источников обуславливает прогресс в моделировании электронно-оптических систем формирования винтовых пучков. Следует отметить, что в последние годы предложен ряд инновационных научно-технологических решений для инжекционных компонент таких систем: катод на основе углеродных нанотрубок [6], двухэлектродный сегнетоэлектрический катод с высокой частотой повторения импульсов [7], терморасширенный графитовый катод [8]. Для ослабления проблем конкуренции мод и

*Статья написана по материалам доклада, прочитанного на XVI Международной зимней школе-семинаре по радиофизике и электронике СВЧ. Саратов, Россия, 2–7 февраля 2015.

повышения эффективности генерации целый ряд исследовательских групп готовят проекты двухпучковых электронно-оптических систем [9,10].

Большая часть программ траекторного анализа использует приближение азимутальной симметрии пространства электронно-оптической системы. Однако в ряде случаев такое приближение уже не может считаться допустимым. К примеру, согласно современным данным, относительное изменение плотности тока инжекции по угловой координате катода может достигать величины порядка 90% [12]. В свою очередь, это вызывает азимутальные вариации запасенной в формируемом винтовом пучке поперечной энергии более 10%, что неизбежно сказывается на КПД всего прибора. Кроме того, повышение требований к эффективности и надежности работы гиротронов определяет необходимость учета в расчетах ЭОС таких явлений, как неоднородность эмиссии, несоосность и перекося силовых полей и др.

Математическая модель

Традиционные алгоритмы анализа ЭОС на базе методов трубок тока и дискретных источников легли в основу программного комплекса ANGEL (ANalyzer of a Gyating Electrons), разработка которого ведётся в ИПФ РАН с опорой на опыт имеющихся в ИПФ РАН и ННГУ наработок [13–16]. Данный программный комплекс позволяет рассчитывать траектории электронов в статическом электромагнитном поле в режиме температурного ограничения эмиссии с учётом начального скоростного разброса и пространственного заряда пучка [17].

При описании используемых в программе алгоритмов ограничимся сначала рассмотрением случая азимутальной симметрии электрического и магнитного полей, а также симметричной эмиссией электронов с катода. Моделирование электронных пучков с винтовыми траекториями проводится в программе путем численного решения системы уравнений движения

$$\frac{\partial(\gamma\mathbf{v})}{\partial t} = \eta(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{r}|_{t=0} = \mathbf{r}_0 \quad \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0, \quad (1)$$

уравнения Пуассона и уравнения непрерывности [18]

$$\mathbf{E} = -\nabla U, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\rho, \quad U|_{\Gamma} = U_B, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (2)$$

где \mathbf{v} – скорость электрона; $\eta = e_0/m_0 \approx -1.759 \cdot 10^{11}$ [Кл/кг] – удельный заряд электрона; $\gamma = m/m_0$ – релятивистский фактор; \mathbf{E} и \mathbf{B} – напряжённость электрического поля и индукция магнитного поля, соответственно; ρ и $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ – плотности пространственного заряда и тока электронного пучка; потенциал U_B на границе соответствует потенциалу электродов ЭОС.

Траекторный анализ потока электронов производится методом трубок тока, традиционно используемым для решения статических задач [19], а решение системы самосогласованных уравнений – методом последовательных итераций. На начальной (нулевой) итерации плотность объемного заряда полагается равной нулю и находится решение уравнения Лапласа при заданных граничных условиях. Поток частиц,

вылетающих с эмиттера, разбивается на N трубок тока (каждая из них несёт сохраняющийся при движении ток I_k , $k = 1..N$). Пространственный заряд, вносимый k -й трубкой в одну ячейку сетки равен $Q_{m,k} = I_k \Delta t$, где Δt – время нахождения частицы в пределах ячейки; полный заряд ячейки Q_m получается суммированием зарядов $Q_{m,k}$ по всем трубкам тока, прошедшим через данную ячейку. Интегрирование уравнений движения позволяет определить траектории каждой токовой трубки и распределение плотности пространственного заряда. На следующих итерациях электрическое поле находится из решения уравнения Пуассона с плотностью ρ , вычисленной на предыдущей итерации, и затем вновь рассчитываются электронные траектории.

Магнитное поле полагается внешним, его индукция \mathbf{B} создаётся системой соленоидов с прямоугольным продольным сечением. Магнитная индукция азимутально-симметричного соленоида с прямоугольным продольным сечением определяется азимутальной компонентой векторного потенциала A_φ [20]

$$\mathbf{B} = (B_r, 0, B_z), \quad B_r(r, z) = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \quad B_z(r, z) = \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \frac{A_\varphi}{r},$$

$$A_\varphi = \int_0^\pi d\varphi \int_{a_1}^{a_2} d\tilde{r} \int_{g_1}^{g_2} d\tilde{z} W(r, z, \tilde{r}, \tilde{z}, \varphi), \quad W = \frac{\tilde{r} \cos \varphi}{\sqrt{R}}, \quad (3)$$

где $R(r, z, \tilde{r}, \tilde{z}, \varphi) = (\tilde{z} - z)^2 + \tilde{r}^2 + r^2 - 2r\tilde{r} \cos \varphi$. Расчёт поля оптимизирован посредством аналитического вычисления интегралов по радиальной и продольной координатам, что значительно увеличивает точность и скорость расчёта [21].

Электрическое поле находится методом дискретных источников (МДИ), применение которого эффективно по причине малого объема, занимаемого электронным потоком относительно полного объема межэлектродного пространства гироприбора [22,23]. Сущность МДИ сводится к представлению скалярного потенциала U линейной комбинацией дискретных источников – «виртуальных зарядов» Q_i , расположенных вдоль границы в точках (ρ_i, ζ_i) , отстоящих от поверхности электродов «вглубь» металла на расстояние порядка шага,

$$E = -\nabla U, \quad U(r, z) = \sum_{i=1}^N Q_i G(r, z, \rho_i, \zeta_i) + U_S(r, z), \quad G(r, z, \rho_i, \zeta_i) = C_0 F(k) \chi^{-1/2},$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi^2 \epsilon_0}, \quad F(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}}, \quad k^2 = \frac{4r\rho_i}{\chi}, \quad \chi = (r + \rho_i)^2 + (z - \zeta_i)^2. \quad (4)$$

Здесь $U_S(r, z)$ – потенциал, порождённый пространственным зарядом пучка на предыдущей итерации. На нулевой итерации полагается $U_S = 0$, а на последующих он находится по МДИ

$$U_s(r, z) = \sum_{m=1}^M Q_m G(r, z, \rho_m, \zeta_m) \quad (5)$$

с той же функцией Грина G , что и при нахождении потенциала на границе;

M – общее количество ячеек сетки для учёта пространственного заряда электронного пучка.

Величины вспомогательных зарядов Q_i находятся из системы линейных алгебраических уравнений, полученной проверкой граничного условия (равенство потенциала заданному U_B) в дискретных точках границы, расположенных с некоторым шагом на поверхности электродов и называемых точками коллокации,

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N Q_i G(r_j, z_j, \rho_i, \zeta_i) = U_B(r_j, z_j) - U_S(r_j, z_j), \\ j = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (6)$$

Производные потенциала по направлениям берутся аналитически. Следуя [24], для оптимизации времени счёта реализована работа с сеткой «укрупнённых зарядов». Для интегрирования уравнения движения используются методы Рунге–Кутты 4-го порядка (обычный и с модификацией Мерсона, позволяющей вести контроль точности на каждом шаге).

Сравнение результатов моделирования магнетронно-инжекторных пушек в широком диапазоне энергетических параметров (от десятков до сотен кэВ) с данными, полученными на основе программного комплекса ЭПОС [16], подтвердило работоспособность программного комплекса ANGEL как при расчете слаборелятивистских пушек [25], так и в диапазоне умеренного релятивизма с энергией электронов 250–300 кэВ.

Продвижение в область более высоких частот (субтерагерцовых и терагерцовых) значительно обостряет проблематику влияния несоосностей электронно-оптической системы на работу гиротронов. Для решения подобных задач была начата работа по модификации программного комплекса ANGEL для обеспечения возможностей полноценного трехмерного моделирования электронно-оптических систем.

На первом этапе был реализован учёт азимутально-несимметричного пространственного заряда, обусловленного зависящими от азимутальной координаты точками старта траекторий, распределения начальных скоростей и токов в этих точках. В этом случае поток частиц, вылетающих с эмиттера, дополнительно разбивается на L азимутальных секторов. Геометрия электродной системы считается аксиально-симметричной; влияние пространственного заряда на граничные условия учитывается усредненно по азимуту, что оправданно в случае умеренных значений неоднородности эмиссии. Также реализован алгоритм моделирования ЭОС с несоосностью электродной и магнитной подсистем. При этом сами подсистемы остаются азимутально-симметричными, однако формируемые такой системой электронный пучок и пространственный заряд оказываются несимметричными.

1. Результаты численных экспериментов

Исследование влияния несоосности электронного пучка было проведено для ЭОС гиротрона диапазона 260 ГГц на второй гармонике гирочастоты [26]. Магнетронно-инжекторная пушка данного гиротрона формирует винтовой электронный пучок со средним радиусом 0.984 мм, энергией 15–20 кВ, током 0.5 А, питч-фактором

1.2–1.4. Полученный пучок используется для возбуждения моды $TE_{-2,3,1}$ в резонаторе радиусом 1.844 мм. В эксперименте максимальная мощность излучения на частоте 258.6 ГГц достигала 180 Вт при КПД 3.7% [27]. Интерпретация экспериментальных данных позволяла сделать вывод, что в системе имела место несоосность электронного пучка и резонатора [28]. Величина такой несоосности находится в пределах 0.5 мм, поскольку при больших значениях электронный пучок, с учётом его расплывания и паразитной эмиссии вне эмитирующего пояaska катода, задевал бы поверхность электродинамической системы гиротрона.

На рис.1 представлено схематическое изображение исследуемой магнетронно-инжекторной пушки и траектории электронов.

Для расчёта среднего радиуса и ширины пучка в каждом азимутальном сечении выполнялась аппроксимация гауссовой кривой с учётом тока электронных трубок, составляющих пучок. При таком подходе математическое ожидание взвешенных по току радиусов трубок имеет смысл среднего радиуса пучка, а среднее квадратичное отклонение – его ширины

$$R_m(\varphi) = \sum_k r_k I_k / I_{dir} \quad - \text{средний радиус}, \quad (7)$$

$$\sigma(\varphi) = \sqrt{\sum_k I_k (r_k - R_m)^2 / I_{dir}} \quad - \text{ширина пучка}, \quad (8)$$

где $I_{dir} = \sum_k I_k$ – полный ток электронных трубок I_k , каждая из которых имеет радиальную координату r_k .

Геометрически пучок сохраняет симметричную форму, но за счёт перераспределения тока в нём наблюдаются азимутальная асимметрия плотности тока (рис. 2) и азимутальная асимметрия распределений среднего радиуса и ширины (рис. 3), полученные с токовыми весами.

Наиболее значимым эффектом, на наш взгляд, является нарушение симметрии пич-фактора (рис. 4, 5), отклонения которого от среднего значения достигают 15% и

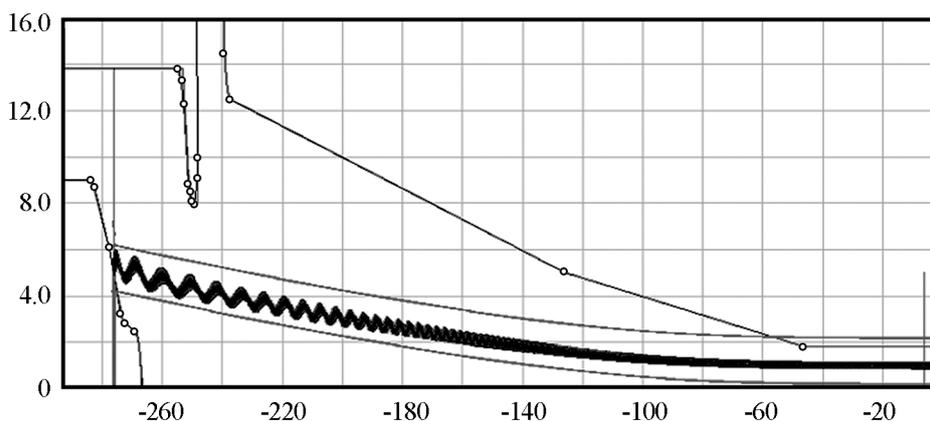


Рис. 1. Геометрия магнетронно-инжекторной пушки (использованы данные работы [26]) и траектория электронного пучка, рассчитанная кодом ANGEL. Величина несоосности 0.5 мм

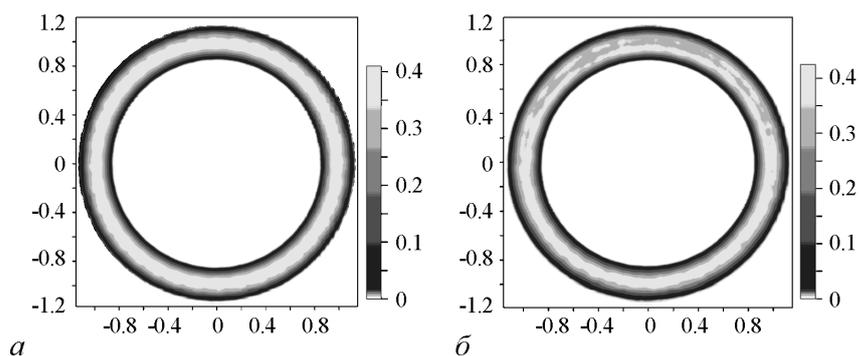


Рис. 2. Распределение плотности тока по поперечным координатам несмещенного пучка (а) и пучка со смещением 0.5 мм (б)

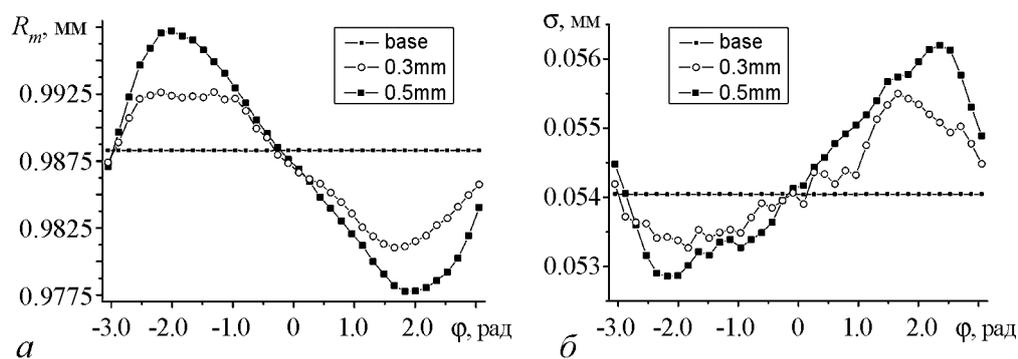


Рис. 3. Зависимость радиуса ведущего центра пучка (а) и ширины пучка (б) от азимутальной координаты при различных величинах исходного смещения

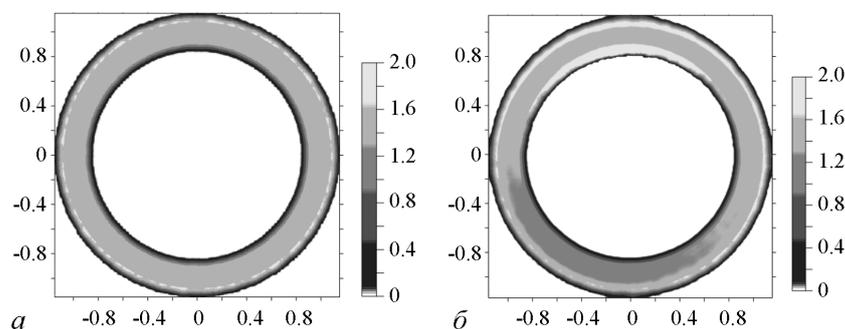


Рис. 4. Распределение пич-фактора по поперечным координатам несмещенного пучка (а) и пучка со смещением 0.5 мм (б)

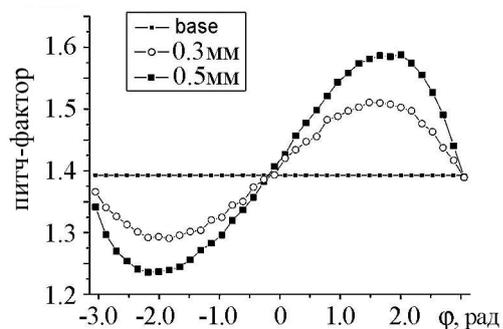


Рис. 5. Зависимость среднего по радиусу пич-фактора от азимутальной координаты при различных величинах исходного смещения

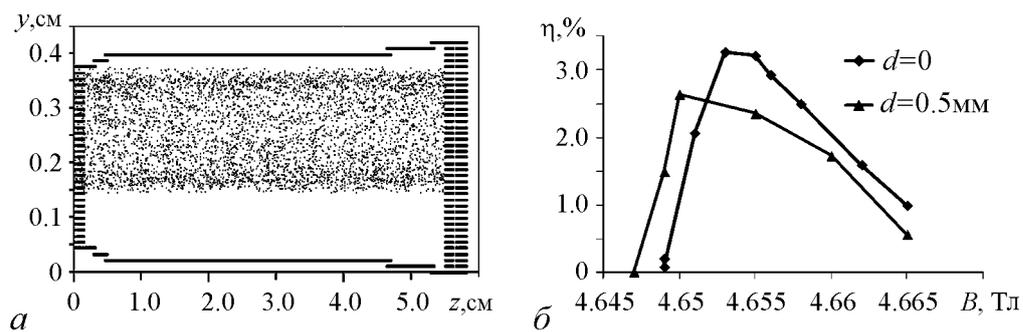


Рис. 6. Результаты трехмерного PIC-моделирования гиротрона на частоте 250 ГГц (код KARAT): a – сечение моделируемой системы и положение макрочастиц; b – зависимость эффективности генерации от магнитного поля для соосного пучка и пучка со смещением 0.5 мм

объясняются асимметрией магнитного поля на эмиттере, которая затем усиливается адиабатической накачкой.

Можно ожидать, что в сочетании с отклонением оси электронного пучка относительно оси резонатора, азимутальная несимметрия питч-фактора может оказывать значительное влияние как на эффективность генерации, так и на процессы конкуренции мод. В частности, трехмерное моделирование методом крупных частиц демонстрирует, что при максимальном смещении пучка с сохранением азимутальной симметрии падение КПД составляет величину порядка 20% (рис. 6).

Заключение

Первые результаты моделирования демонстрируют значительное влияние несоосности узла инжекции электронов на параметры формируемого винтового пучка и как следствие эффективность электронно-волнового взаимодействия. Кроме очевидного эффекта смещения оси пучка, наличие несоосности приводит к заметному нарушению азимутальной симметрии питч-фактора.

Предполагается дальнейшее развитие программного комплекса ANGEL, в рамках которого будет выполнена модификация метода дискретных источников для адекватного моделирования конфигураций со значительной несимметрией пространственного заряда. В случае трехмерной границы напрямую использовать описанный в статье подход не представляется возможным, поскольку возникающая при этом система линейных алгебраических уравнений не может быть размещена в памяти рабочей станции и решена за приемлемое время. Но учитывая, что влияние электрического поля спадает пропорционально расстоянию до заряженной частицы, появляется возможность вместо одного полного покрытия поверхности граничных электродов «трехмерными» дискретными источниками и точками коллокации секционировать границу и для каждого участка организовать своё независимое покрытие, которое будет «трехмерным» в пределах этого участка и «двумерным» во всех остальных участках. На том участке границы, где заданы «трехмерные» источники, влияние несимметричного пространственного заряда будет учтено точно, а на дальних «двумерных» участках граничное условие будет выполняться с учётом усреднённого по азимуту пространственного заряда. В каждой точке интегрирования траектории элек-

трона фактически будет использовано то покрытие, которое соответствует его текущей продольной координате для максимально точного учёта асимметрии пространственного заряда.

Реализация данного подхода позволит вывести программный комплекс ANGEL на уровень лучших программ численного моделирования электронно-оптических систем.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 15-41-02608.

Библиографический список

1. Guide to State-of-the-Art Electron Devices / Edited by Prof. Dr. J.N. Burghartz. John Wiley & Sons, Ltd., 2013.
2. *Thumm M.* Recent advances in the worldwide fusion gyrotron development // IEEE Transactions on Plasma Science. 2014. Vol. 42, № 3. P. 590.
3. *Singh U., Kumar N., Sinha A.K.* Magnetron injection gun for a short pulse, 0.67 THz gyrotron for remote detection of radioactive materials // IEEE Transactions on Terahertz Science and Technology. 2014. Vol. 4, № 4. P. 509.
4. *Glyavin M.Yu., Ginzburg N.S., Goldenberg A.L., Denisov G.G., Luchinin A.G., Manuilov V.N., Zapevalov V.E., Zotova I.V.* THz gyrotrons: Status and possible optimizations // Terahertz Science and Technology. 2012. Vol. 5, № 2. P. 67.
5. *Han S.-T., Park W.K., Chun H.S.* Development of sub-THz gyrotron for real-time food inspection // 36th International Conference on Infrared, Millimeter and Terahertz Waves (IRMMW-THz). 2011. P. 1.
6. *Yuan X., Li X., Huang Y., Pu W., Van Y.* Research on a magnetron injection electron gun based on carbon nanotube cold cathode // Technical Digest of 27th International Vacuum Nanoelectronics Conference, 6–10 July, 2014, Engelberg, Switzerland, P. 1-13.
7. *Orbach Y., Ben-Moshe R., Pilosof M., Einat M.* Gyrotron with dual electrode ferroelectric cathode operating at high repetition rate and long pulse // IEEE Transactions on Electron Devices. 2014. Vol. 61, № 3. P. 921.
8. *Akimov P.L., Kuzmich C.V., Melnychuk V.A., Nikitin A.P., Chudin V.G., Sechin H.E., Chadaev N.N., Bohoslovskaya A.B.* Project of electron gun for microwave devices with thermally expanded graphite cathodes // 10th International Vacuum Electron Sources Conference (IVESC). Saint Petersburg, 30 June–4 July, 2014. P. 1.
9. *Fu W., Yan Y., Yuan X., Liu S.* Two-beam magnetron injection guns for coaxial gyrotron with two electron beams // Phys. Plasmas. 2009. Vol. 16. P.023103.
10. *Kumar N., Singh U., Kumar A., Khatun H., Sinha A.K.* On the design of a high-efficiency double-beam gyrotron // IEEE Transactions on Plasma Science. 2011. Vol. 39, № 9. P. 1781.
11. *Glyavin M., Manuilov V., Idehara T.* A double-beam magnetron-injection gun for third-harmonic continuous wave 1-THz gyrotron // Physics of Plasmas. 2013. Vol. 20. P. 123303.

12. *Louksha O.I., Samsonov D.B., Sominski G.G., Syomin S.V.* Suppression of emission nonuniformity effect in gyrotrons // 39th International Conference on Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves (IRMMW-THz). 2014. P. 1.
13. *Лыгин В.К., Цимринг Ш.Е.* Расчет электронных траекторий в винтовых пучках, формируемых аксиально-симметричными магнетронно-инжекторными пушками // ЖТФ. 1973. Т. 43, № 8. С. 1695.
14. *Цимринг Ш.Е.* О разбросе скоростей в винтовых электронных пучках // Изв. вузов. Радиофизика. 1972. Т. 15, № 8. С. 1247.
15. *Мануилов В.Н., Райский Б.В., Солюянова Е.А., Цимринг Ш.Е.* Теоретическое и экспериментальное исследование магнетронно-инжекторных пушек в режиме ограничения тока пространственным зарядом // Радиотехника и электроника. 1995. Т. 40, № 4. С. 648.
16. *Krivosheev P.V., Lygin V.K., Manuilov V.N., Tsimring Sh.E.* Numerical simulation models of focussing systems of intense gyrotron helical electron beams // Int. J. of Infrared and MM waves. 2001. Vol. 22, № 8. P. 1119.
17. *Планкин О.П., Семенов Е.С.* Комплекс программ ANGEL-2DS для моделирования пушки гиротрона. Инструкция для пользователя: Методическая разработка. Н. Новгород: ИПФ РАН, 2011. 32 с.
18. *Цимринг Ш.Е.* Введение в высокочастотную вакуумную электронику и физику электронных пучков / Пер. с англ. Н. Новгород: ИПФ РАН, 2012. 576 с.
19. *Ильин В.П.* Численные методы решения задач электрофизики. М.: Наука, 1985.
20. *Алиевский Б.Л., Орлов В.Л.* Расчет параметров магнитных полей осесимметричных катушек: Справочник. М.: Энергоатомиздат, 1983. 112 с.
21. *Семёнов Е.С., Юнаковский А.Д.* Расчет статического магнитного поля системы соленоидов // Изв. вузов. Радиофизика. 2010. Т. 53, № 12. С. 799.
22. *Пензяков В.В.* Расчёт электронных пушек на электронных цифровых машинах // Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ. 1966. № 1. С. 41.
23. *Ваишковский А.В., Овчаров В.Т.* К нахождению распределения потенциала в области, ограниченной заданными формами с заданными потенциалами // Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ. 1971. № 9. С. 34.
24. *Лыгин В.К., Мануилов В.Н., Цимринг Ш.Е.* О методах интегральных уравнений и вспомогательных зарядов в траекторном анализе интенсивных электронных пучков // Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ. 1987. № 7 (401). С. 36.
25. *Планкин О.П., Семенов Е.С.* Траекторный анализ электронно-оптической системы технологического гиротрона // Вестник НГУ. Сер. «Физика». 2013. Т. 8, № 2. С. 44.
26. *Запевалов В.Е., Корнишин С.Ю., Котов А.В., Куфтин А.Н., Малыгин О.В., Мануилов В.Н., Седов А.С., Цалолыхин В.И.* Система формирования электронного пучка для гиротрона с частотой 258 ГГц, предназначенного для экспериментов по динамической поляризации ядер // Изв. вузов. Радиофизика. 2010. Т. 53, № 4. С. 251.

27. Венедиктов Н.П., Дубров В.В., Запезалов В.Е., Корнишин С.Ю., Котов А.В., Куфтин А.Н., Малыгин О.В., Седов А.С., Фикс А.Ш., Цалолыхин В.И. Экспериментальное исследование непрерывного высокостабильного гиротрона на второй гармонике для спектроскопии динамически поляризованных ядер // Изв. вузов. Радиофизика. 2010. Т. 53, № 4. С. 260.
28. Завольский Н.А., Запезалов В.Е., Мусеев М.А., Седов А.С. Влияние несоосности электронного пучка и резонатора на характеристики гиротрона // Изв. вузов. Радиофизика. 2011. Т. 54, № 6. С. 444.

References

1. Guide to State-of-the-Art Electron Devices / Edited by Prof. Dr. J.N. Burghartz. John Wiley & Sons, Ltd., 2013.
2. Thumm M. Recent advances in the worldwide fusion gyrotron development // IEEE Transactions on Plasma Science. 2014. Vol. 42, № 3. P. 590.
3. Singh U., Kumar N., Sinha A.K. Magnetron injection gun for a short pulse, 0.67 THz gyrotron for remote detection of radioactive materials // IEEE Transactions on Terahertz Science and Technology. 2014. Vol. 4, № 4. P.509.
4. Glyavin M.Yu., Ginzburg N.S., Goldenberg A.L., Denisov G.G., Luchinin A.G., Manuilov V.N., Zapevalov V.E., Zotova I.V. THz gyrotrons: Status and possible optimizations // Terahertz Science and Technology. 2012. Vol. 5, № 2. P. 67.
5. Han S.-T., Park W.K., Chun H.S. Development of sub-THz gyrotron for real-time food inspection // 36th International Conference on Infrared, Millimeter and Terahertz Waves (IRMMW-THz). 2011. P. 1.
6. Yuan X., Li X., Huang Y., Pu W., Van Y. Research on a magnetron injection electron gun based on carbon nanotube cold cathode // Technical Digest of 27th International Vacuum Nanoelectronics Conference, 6–10 July 2014. Engelberg, Switzerland. P. 1-13.
7. Orbach Y., Ben-Moshe R., Pilosof M., Einat M. Gyrotron with dual electrode ferroelectric cathode operating at high repetition rate and long pulse // IEEE Transactions on Electron Devices. 2014. Vol. 61, № 3. P. 921.
8. Akimov P.L., Kuzmich C.V., Melnychuk V.A., Nikitin A.P., Chudin V.G., Sechin H.E., Chadaev N.N., Bohoslovskaya A.B. Project of electron gun for microwave devices with thermally expanded graphite cathodes // 10th International Vacuum Electron Sources Conference (IVESC). Saint Petersburg, 30 June–4 July 2014. P.1.
9. Fu W., Yan Y., Yuan X., Liu S. Two-beam magnetron injection guns for coaxial gyrotron with two electron beams // Phys. Plasmas. 2009. Vol. 16. P.023103.
10. Kumar N., Singh U., Kumar A., Khatun H., Sinha A.K. On the design of a high-efficiency double-beam gyrotron // IEEE Transactions on Plasma Science. 2011. Vol. 39, № 9. P.1781.
11. Glyavin M., Manuilov V., Idehara T. A double-beam magnetron-injection gun for third-harmonic continuous wave 1-THz gyrotron // Physics of Plasmas. 2013. Vol. 20. P. 123303.

12. *Louksha O.I., Samsonov D.B., Sominski G.G., Syomin S.V.* Suppression of emission nonuniformity effect in gyrotrons // 39th International Conference on Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves (IRMMW-THz). 2014. P. 1.
13. *Lygin V.K., Tsimring Sh.E.* // ZhTF. 1973. Vol. 43, № 8. P. 1695 (in Russian).
14. *Tsimring Sh.E.* On the spread of velocities in helical electron beams // Radiophysics and Quantum Electronics. 1972. Vol. 15, № 8. P. 952.
15. *Manuilov V.N., Rayskiy B.V., Soluyanov E.A., Tsimring Sh.E.* // Radiotekhnika i Elektronika, 1995. Vol. 40, № 4. P. 648 (in Russian).
16. *Krivosheev P.V., Lygin V.K., Manuilov V.N., Tsimring Sh.E.* Numerical simulation models of focussing systems of intense gyrotron helical electron beams // Int. J. of Infrared and MM Waves. 2001. Vol. 22, № 8. P. 1119.
17. *Plankin O.P., Semenov V.E.* ANGEL 2DS Program Package for Gyrotron Gun Modeling: User's Guide. Nizhny Novgorod: IAP RAS, 2011 (in Russian).
18. *Tsimring Sh.E.* Electron beams and microwave vacuum electronics. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2007.
19. *Ilyin V.P.* Numerical methods of electrophysics problem solving. M.: Nauka, 1985 (in Russian).
20. *Alievsky B.L., Orlov V.L.* Calculation of magnetic fields of axisymmetric coils: Reference guide. M.: Enegroatomizdat, 1983 (in Russian).
21. *Semenov E.S., Yunakovskiy A.D.* Calculation of the static magnetic field of a system of solenoids // Radiophysics and Quantum Electronics. 2010. Vol. 53, № 12. P. 717.
22. *Penzyakov V.V.* // Elektronnaya Tekhnika. Ser.1. Elektronika SVCh. 1966. Vol. 1. P. 41 (in Russian).
23. *Vashkovskiy A.V., Ovcharov V.T.* // Elektronnaya Tekhnika. Ser.1. Elektronika SVCh. 1971. № 9. P. 34 (in Russian).
24. *Lygin V.K., Manuilov V.E., Tsimring Sh.E.* // Elektronnaya Tekhnika. Ser.1. Elektronika SVCh. 1987. Vol.7 (401). P. 36 (in Russian).
25. *Plankin O.P., Semenov V.E.* Trajectory analysis of the electronic-optical system of technological gyrotron // Vestnik NSU. Series: «Physics». 2013. Vol. 8, Iss. 2. P. 44 (in Russian).
26. *Zapevalov V.E., Kornishin S.Yu., Kotov A.V., Kuftin A.N., Malygin O.V., Manuilov V.N., Sedov A.S., Tsalolikhin V.I.* System for the formation of an electron beam in a 258 GHz gyrotron designed for experiments on dynamic polarization of nuclei // Radiophysics and Quantum Electronics. 2010. Vol. 53, № 4. P. 229.
27. *Venediktov N.P., Dubrov V.V., Zapevalov V.E., Kornishin S.Yu., Kotov A.V., Kuftin A.N., Malygin O.V., Sedov A.S., Fiks A.Sh., Tsalolikhin V.I.* Experimental study of a continuous-wave high-stability second-harmonic gyrotron for spectroscopy of dynamically polarized nuclei // Radiophysics and Quantum Electronics. 2010. Vol. 53, № 4. P. 237.
28. *Zavolskiy N.A., Zapevalov V.E., Moiseev M.A., Sedov A.S.* Influence of the axial misalignment of the electron beam and the cavity on the gyrotron parameters // Radiophysics and Quantum Electronics. 2011. Vol. 54, № 6. P. 402.

Поступила в редакцию 28.05.2015

© *Е.С. Семенов, О.П. Планкин, Р.М. Розенталь*
Изв. вузов «ПНД», т. 23, № 3, 2015

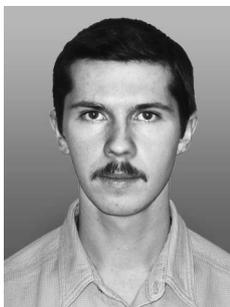
DEVELOPMENT OF METHODS OF GYROTRONS ELECTRON-OPTICS SYSTEMS WITH AXIAL SYMMETRY DISTORTION

E. S. Semenov, O. P. Plankin, R. M. Rozental

Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences

The simulation technique of helical beam formation system of gyrotrons with typical axial symmetry distortion is presented. The simulation of the second harmonic magnetron-injection gun for 260 GHz band gyrotron with 0.5 mm beam axis displacement was made. It was shown that displacement of axis beam has a significant effect upon the angular distribution of pitch-factor.

Keywords: Gyrotron, electron optics, magnetron-injection gun.



Семенов Евгений Сергеевич родился (1980) в Дзержинске Горьковской области. Окончил ННГУ (2003) по специальности «математика». Защитил кандидатскую диссертацию (2009). С 2001 года по настоящее время – научный сотрудник ИПФ РАН. Область научных интересов: математическое моделирование. Область смежных интересов: программирование, параллельные вычисления. Количество публикаций: 6 статей в рецензируемых журналах, 3 статьи в сборниках, 2 препринта.

603950 Нижний Новгород, ГСП–120, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН
E-mail: semes@appl.sci-nnov.ru



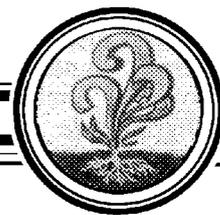
Планкин Олег Петрович родился (1978) в Балахне Горьковской области. Окончил ННГУ (2001) по специальности «микроэлектроника и полупроводниковые приборы». Область научных интересов: электроника СВЧ, электронная оптика. В настоящее время работает в Институте прикладной физики РАН программистом. Количество публикаций 2.

603950 Нижний Новгород, ГСП–120, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН
E-mail: plankin@appl.sci-nnov.ru



Розенталь Роман Маркович родился (1977) в Горьком. Окончил радиофизический факультет ННГУ (1999) по специальности «электроника». С 1998 года работает в ИПФ РАН научным сотрудником. Основная область научных интересов – нестационарные процессы в мощных приборах вакуумной СВЧ-электроники. Автор и соавтор более 25 научных работ.

603950 Нижний Новгород, ГСП–120, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН
E-mail: rrz@appl.sci-nnov.ru



ГЕНЕРАЦИЯ ХАОТИЧЕСКИХ ШИРОКОПОЛОСНЫХ ИМПУЛЬСОВ МИКРОВОЛНОВОГО ДИАПАЗОНА НА ОСНОВЕ ЛБВ АВТОГЕНЕРАТОРА*

Б. С. Дмитриев, Ю. Д. Жарков, С. А. Садовников, В. Н. Скороходов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Приводятся результаты экспериментального исследования сверхширокополосного генератора хаоса микроволнового диапазона на основе ЛБВ усилителя. Рассмотрены два метода получения последовательности хаотических радиоимпульсов.

Ключевые слова: ЛБВ автогенератор с запаздывающей обратной связью, широкополосный хаотический сигнал, подавление широкополосного хаоса в ЛБВ автогенераторе, хаотические радиоимпульсы.

Введение

В настоящее время существенное количество исследовательских работ в разных областях знаний посвящено изучению динамического хаоса, открытие которого в конце XX века породило многочисленные мировоззренческие концепции в построении научной картины мира. В прикладных науках весьма активно развиваются направления использования информационных технологий на основе динамического хаоса для передачи, обработки и защиты информации [1]. Сверхширокополосные средства связи в микроволновом диапазоне перспективны для целей радиолокации и радиоэлектронного противодействия, а также для передачи информации с помощью прямохаотических систем связи [2,3].

Среди известных в настоящее время генераторов хаоса микроволнового диапазона наибольшее распространение получили твердотельные генераторы, использующие в качестве активных элементов диоды и полевые транзисторы с применением микроволновой техники, а также нелинейные линии задержки на поверхностной магнитостатической волне [4–6].

Наряду с этими направлениями представляют практический интерес генераторы хаотических колебаний на основе классических электровакуумных приборов СВЧ – многорезонаторных клистронов и ламп с бегущей волной, включенных как

*Статья написана по материалам доклада, прочитанного на XVI Международной зимней школе-семинаре по радиофизике и электронике СВЧ. Саратов, Россия, 2–7 февраля 2015.

активные элементы в кольцевые радиофизические системы с собственной сложной динамикой с запаздывающей обратной связью (ЗОС) [7–11]. Важным аспектом подобных устройств на основе электровакуумных приборов является высокий уровень выходной высокочастотной мощности и возможность работы в условиях электромагнитного и радиационного излучений.

В настоящее время особый интерес представляют сверхширокополосные генераторы хаотических колебаний [12], где перспективным представляется применение ЛБВ автогенераторов. Возможность генерации потока хаотических радиоимпульсов, являющихся носителями информации в системах связи, обеспечивается путем воздействия на динамическую систему выбранных внешних управляющих сигналов, которая в автономном режиме ЛБВ автогенератора генерирует широкополосные хаотические колебания.

1. Хаотическая динамика кольцевого ЛБВ автогенератора

Исследуемый автогенератор широкополосных хаотических колебаний был создан на основе промышленной ЛБВ среднего уровня мощности десятисантиметрового диапазона длин волн. Основные характеристики ЛБВ усилителя следующие: ток электронного пучка до 80 мА, ускоряющее напряжение 2500 В, коэффициент усиления до 30 дБ на частоте 3 ГГц, полоса частот – октава и более. Фокусировка пучка осуществляется периодическим магнитным полем.

В отличие от классического шумотрона, состоящего из двух соединенных в кольцо ЛБВ с регулируемым аттенуатором [7], в исследуемом генераторе использовалась одна ЛБВ, в которой возбуждение хаотических колебаний связано с наличием падающего участка на амплитудной характеристике. Принципиальная схема для исследования различных автономных режимов работы автогенератора, включая и хаотические колебания, показана на рис. 1.

В кольце обратной связи расположены нелинейный ЛБВ усилитель, переменный поляризационный аттенуатор ДЗ-30 для изменения глубины обратной связи в кольце, анализатор спектра Agilent E4408B и осциллограф реального времени DSO81000A для наблюдения временной реализации и гистограмм распределения вероятностей хаотического сигнала. Управляющими параметрами в таком автогенераторе являются ток I электронного пучка, ускоряющее напряжение U , затухание L в цепи обратной связи.

Для кольцевых автогенераторов хаоса одним из характерных параметров динамической системы является время запаздывания сигнала в кольце обратной связи. Что касается ЛБВ автогенератора, это время определяется временем задержки сигнала в замедляющей системе ЛБВ и во внешнем кольце обратной связи. Для выбранных параметров ЛБВ и длины кольца обратной связи (кабель с внутренним заполнением с известной диэлектрической проницаемостью и поляризационный аттенуатор) на частоте 3 ГГц простой расчет дает величину 55 нс. Это время можно также опреде-

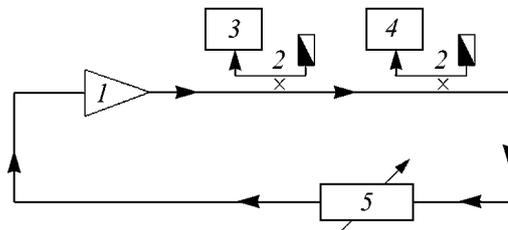


Рис. 1. Схема для исследования основных характеристик кольцевого ЛБВ автогенератора: 1 – ЛБВ, 2 – направленные ответвители, 3 – осциллограф реального времени, 4 – анализатор спектра, 5 – поляризационный аттенуатор

лить и экспериментально с помощью анализатора СВЧ цепей Agilent E5062T. На указанной частоте оно составило 60 нс, что свидетельствует о достоверности расчетных параметров применяемой ЛБВ.

Как известно, кольцевая система с запаздыванием обладает набором собственных мод – резонансов ω_n , на которых полный набег фазы гармонического сигнала по замкнутому кольцу обратной связи равен $2\pi n$ ($n = 1, 2, \dots$). Частотный интервал между соседними модами ω_n и ω_{n+1} равен $\Delta\omega = 2\pi/t$, где t – полное групповое время запаздывания сигнала вдоль замкнутого кольца обратной связи. Используя найденное время задержки сигнала, можно вычислить частотный интервал между двумя соседними модами, он составляет 17.2 МГц. Наблюдения кольцевых резонансных мод по анализатору спектра дали значение 17.4 МГц для заданного режима, что также свидетельствует о хорошем соответствии экспериментальных и расчетных значений этого параметра ЛБВ автогенератора.

Известно, что в ЛБВ, благодаря нелинейным процессам группировки электронов, возникают высшие гармоники сигнала. Такие гармоники можно наблюдать в кольцевом ЛБВ автогенераторе, применяя анализатор спектра с широким диапазоном частот (вплоть до 10 ГГц). На рис. 2. показаны спектральные амплитуды трех гармоник на частотах 3 ГГц, 6 ГГц и 9 ГГц, наблюдаемые в кольцевом автогенераторе для режима сравнительно малого тока $I = 12$ мА, $U = 2530$ В, $L = 1.5$ дБ. Следует отметить, что соотношение между уровнями гармоник довольно хорошо соответствуют результатам при непосредственном измерении гармоник в нелинейном ЛБВ усилителе [13].

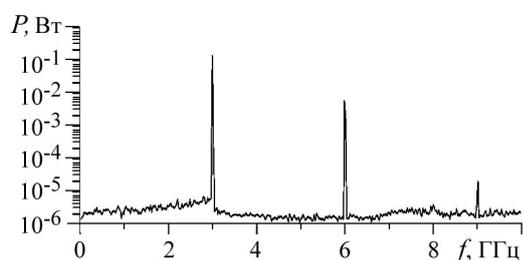


Рис. 2. Спектр трех гармоник ЛБВ автогенератора

Устойчивый широкополосный хаотический режим колебаний имел место при увеличении тока пучка ЛБВ. На рис. 3 представлен спектр мощности хаотического сигнала для одного из режимов: $I = 80$ мА, $U = 2740$ В, $L = 2.5$ дБ. Хаотический сигнал наблюдается в широком диапазоне частот 0.5–8.0 ГГц, интегральная мощность сигнала 3 Вт, спектральная плотность сигнала 0.6 мВт/МГц.

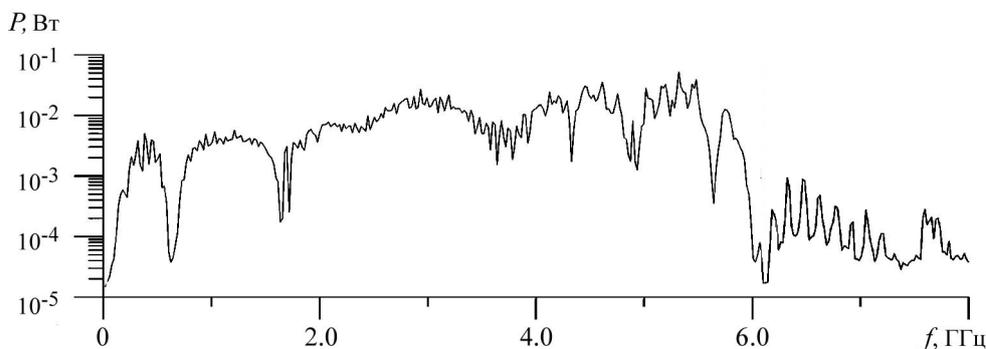


Рис. 3. Спектр мощности широкополосного хаотического сигнала ЛБВ автогенератора

2. Генерация широкополосных хаотических импульсов

В предыдущем разделе рассмотрено получение непрерывной генерации хаотического сигнала микроволнового диапазона с помощью кольцевой автоколебательной системы, содержащей активный элемент в виде нелинейного ЛБВ усилителя. Однако для целей практического применения широкополосных хаотических сигналов в информационных системах необходимо получить поток хаотических радиоимпульсов с управляемыми параметрами длительности импульсов и скважности [4].

В данном разделе рассматривается возможность генерации потока хаотических радиоимпульсов двумя способами, основанными на режиме внутренней модуляции параметров ЛБВ усилителя и внешней синхронизации, известной в литературе как *эффект полного подавления хаоса* [14].

В режиме внутренней модуляции последовательность хаотических радиоимпульсов в автогенераторе создавалась за счет подачи вместо постоянного напряжения импульсного напряжения на замедляющую систему и коллектор ЛБВ от высоковольтного импульсного модулятора. Подобная методика моделирования генерации хаотических импульсов применяется в автоколебательных системах с биполярными транзисторами при воздействии на систему последовательностью прямоугольных видеоимпульсов. В случае воздействия прямоугольными видеоимпульсами автоколебательная система скачкообразно переводится из режима отсутствия колебаний в режим хаотической генерации и обратно. Характерно, что амплитуда импульса в таких системах составляет всего несколько вольт. В отличие от полупроводниковых устройств в вакуумном ЛБВ автогенераторе необходимо применять, как уже отмечалось, высоковольтные импульсы от специальных модуляторов.

На рис. 4 приведены осциллограмма (а) СВЧ хаотического радиоимпульса длительностью 27 мкс и рассчитанная гистограмма (б) распределения вероятностей наблюдаемого хаотического сигнала. Здесь же показан нормальный (гауссов) закон распределения. Можно отметить, что отличие характера распределения вероятностей импульсного хаотического сигнала от гауссова распределения незначительно. Импульсный модулятор обеспечивал получение СВЧ хаотических радиоимпульсов с длительностью от 20 до 300 мкс со скважностью от 10 до 200. Применение импульсного режима позволило увеличивать рабочие токи электронного пучка

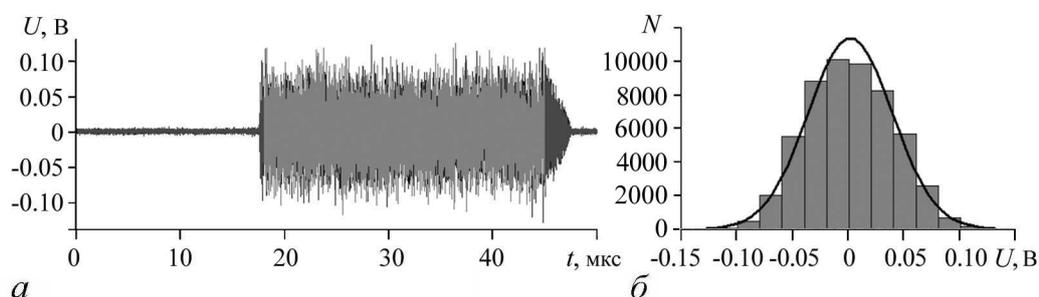


Рис. 4. Осциллограмма (а) и гистограмма (б) хаотического радиоимпульса для режима внутренней модуляции

до 120 мА, что обеспечивало величину выходной высокочастотной пиковой мощности в импульсе 15 Вт.

Как известно, одной из важных особенностей для применения хаотических радиоимпульсов в сверхширокополосных линиях связи является малая длительность импульсов [4]. Для реализации этого требования был предложен метод внешнего управления широкополосным хаотическим сигналом ЛБВ автогенератора, известный в литературе как синхронизация через полное подавление хаоса внешним гармоническим сигналом с определенными параметрами. Этот прием хорошо изучен экспериментально для клистронных автогенераторов с ЗОС, характеризующихся узкой полосой хаотического сигнала [15]. Отметим, что для подавления сверхширокополосных хаотических сигналов этот прием не применялся.

Схема предлагаемого автогенератора на ЛБВ с внешней модуляцией показана на рис. 5. В отличие от схемы на рис. 1 питание ЛБВ осуществляется от источников питания постоянного напряжения, а для управления хаотическим сигналом через направленный ответвитель и ферритовый вентиль в кольцо обратной связи подается внешний сигнал от генератора стандартных сигналов Agilent 5181А, который усиливается транзисторным усилителем. Применяемый генератор стандартных сигналов имеет внутреннюю модуляцию высокочастотного сигнала прямоугольными импульсами практически идеальной формы с изменением длительности импульса в широких пределах, начиная со значения в десятки наносекунд.

Выше отмечалось, что исследуемый нелинейный усилитель характеризуется тремя гармониками сигнала (см. рис. 2). Наиболее высокий уровень сигнала характерен для первой гармоники. Как показали проведенные экспериментальные исследования, для полного подавления широкополосного хаотического сигнала необходимо от генератора стандартных сигналов подать в цепь обратной связи гармонический сигнал именно на частоте первой гармоники с подобранной мощностью. Для подавления хаотического сигнала (см. рис. 3) необходима мощность первой гармоники порядка 100 мВт. В режиме подавления непрерывным гармоническим

сигналом наблюдается картина спектра, подобная приведенному на рис. 2. Если гармонический сигнал подобранной мощности промодулирован серией прямоугольных импульсов, то генерируется последовательность хаотических сверхширокополосных импульсов.

На рис. 6, а показана такая последовательность импульсов, наблюдаемая на высокочастотном осциллографе реального времени для коротких импульсов длительностью 1 мкс. Изучение параметров сигнала внутри такого короткого импульса подтвердило

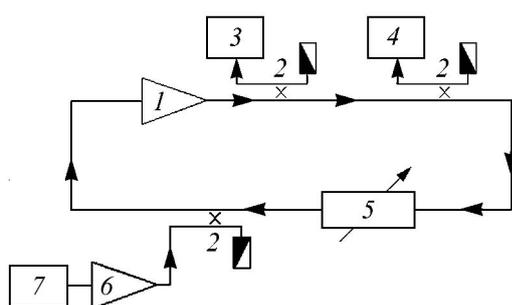


Рис. 5. Схема ЛБВ автогенератора широкополосных хаотических радиоимпульсов с внешним управлением: 1 – ЛБВ, 2 – направленные ответвители, 3 – осциллограф реального времени, 4 – анализатор спектра, 5 – поляризационный аттенюатор, 6 – транзисторный усилитель, 7 – генератор стандартных сигналов

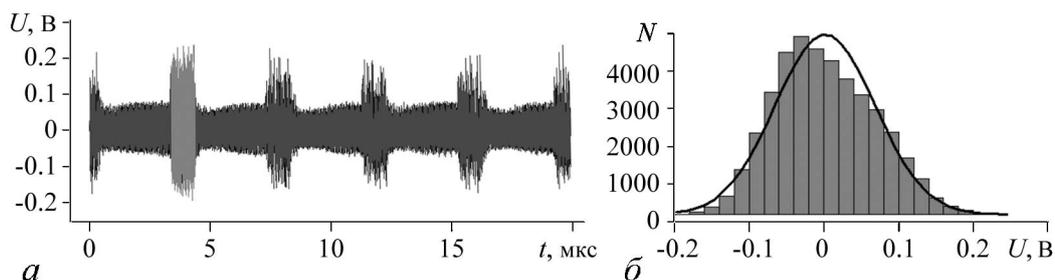


Рис. 6. Осциллограмма (а) и гистограмма (б) хаотического радиоимпульса для режима внешней модуляции

его хаотических характер. Гистограмма распределения приведена на рис. 6, б и свидетельствует о возможности применения исследуемого генератора в информационных технологиях.

Заключение

Проведено детальное экспериментальное исследование сверхширокополосного автогенератора хаоса с запаздывающей обратной связью, реализованного на промышленной ЛБВ микроволнового диапазона. Для генерации потока хаотических радиоимпульсов предложены методы внутренней модуляции ЛБВ усилителя и внешней синхронизации за счет эффекта полного подавления хаоса, который не был изучен для широкополосного хаоса. Получены хаотические радиоимпульсы длительностью 1 мксек с регулируемой скважностью и пиковой мощностью в импульсе 3 Вт, что перспективно для применения в информационных технологиях.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (проекты 14-02-00329 и 14-02-00577) и программы по государственной поддержке ведущих научных школ (НСИ – 828,2012,2).

Библиографический список

1. Гуляев Ю.В., Беляев Р.В., Воронцов Г.М., Залогин Н.Н., Калинин В.И., Кальянов Э.В., Кислов В.В., Кислов В.Я., Колесов В.В., Мясин Е.А., Чигин Е.П. Информационные технологии на основе динамического хаоса для передачи, обработки, хранения и защиты информации // Радиотехника и электроника. 2003. Т. 48, № 10. С. 1157.
2. Залогин Н.Н., Кислов В.В. Широкополосные хаотические сигналы в радиотехнических и информационных системах // Радиотехника. 2006. 208 с.
3. Дмитриев А.С., Кяргинский Б.Е., Панас А.И., Пузииков Д.Ю., Старков С.О. Сверхширокополосная прямохаотическая передача информации в СВЧ-диапазоне // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29, Вып 2. С. 70.
4. Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Максимов Н.А., Панас А.И. Генерация хаоса. М.: Техносфера, 2012. 424 с.

5. Гришин С.В., Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Скороходов В.Н., Шараевский Ю.П. Генерация хаотических СВЧ-импульсов в кольцевой системе на основе клистронного усилителя мощности и нелинейной линии задержки на магнитоэлектрических волнах // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36, Вып 2. С. 62.
6. Гришин С.В., Гришин В.С., Романенко Д.В., Шараевский Ю.П. Сверхширокополосный спин-волновой генератор хаоса средней мощности на полевых транзисторах // Письма в ЖТФ. 2014. Т. 40, Вып 19. С. 51.
7. Кислов В.Я., Мясин Е.А., Залогин Н.Н. О нелинейной стохастизации автоколебаний в электронно-волновом генераторе с задержанной обратной связью // Радиотехника и электроника. 1980. Т. 25, № 10. С. 2160.
8. Shigaev A.M., Dmitriev B.S., Zharkov Yu. D., Ryskin N.M. Chaotic dynamics of delayed feedback klystron oscillator and its control by external signal // IEEE Transactions on Electron Devices. 2005. Vol. 52, № 5. P. 790.
9. Ryskin N.M., Titov V.N., Marchewka C., Larsen P., Bhattacharjee S., Booske J. and Sengele S. Generation of chaotic radiation in a driven traveling wave tube amplifier with time-delayed feedback // Phys. Plasmas. 2006. Vol. 13, № 1. P. 013104.
10. Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Садовников С.А., Скороходов В.Н. Сверхвысокочастотные электронные генераторы хаотических радиоимпульсов // Журнал радиоэлектроники. 2012. № 12. С. 1.
11. Кац В.А. Возникновения хаоса и его эволюция в распределенном генераторе с запаздыванием // Известия вузов. Радиофизика 1985. Т. 28, № 2. С. 161.
12. Дмитриев А.С., Ефремова Е.Ф., Румянцев Н.В. Генератор микроволнового хаоса с плоской огибающей спектра мощности в диапазоне 3–8 GHz // Письма в ЖТФ. 2014. Т. 40, № 2. С. 1.
13. Гилмор-мл. А.С. Лампы с бегущей волной. М.: Техносфера, 2013. 616 с.
14. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2002. 489 с.
15. Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Скороходов В.Н., Садовников С.А. Широкополосный каскадный клистронный генератор хаотических колебаний в СВЧ диапазоне // Патент на полезную модель №148722 от 13.11.2014 г.

References

1. Gulyaev Yu.V., Belyaev R.V., Vorontsov G.M., Zalogin N.N., Kalinin V.I., Kal'yanov E.V., Kislov V.V., Kislov V.Ya., Kolesov V.V., Myasin E.A. and Chigin E.P. Dynamic-chaos information technologies for data transmission, storage, and protection // Journal of Communications Technology and Electronics. 2003. Vol. 48, № 10. P. 1172.
2. Zalogin N.N. and Kislov V.V. Wideband Chaotic Signals in Radioengineering and Information Systems. Moscow: Radiotekhnika, 2006.
3. Dmitriev A.S., Kyarginskii B.E., Panas A.I., Puzikov D.Yu., Starkov S.O. Ultrawideband direct chaotic data transmission in the microwave range // Technical Physics Letters. January 2003. Vol. 29, Issue 1. P. 72.

4. *Dmitriev A.S., Efremova E.V., Maksimov N.A. and Panas A.I.* Chaos Generation. Moscow: Tekhnosfera, 2012.
5. *Grishin S.V., Dmitriev B.S., Zharkov Yu.D., Skorokhodov V.N., Sharaevskii Yu.P.* Generation of chaotic microwave pulses in a ring system based on a klystron power amplifier and a nonlinear delay line on magnetostatic waves // Technical Physics Letters. January 2010. Vol. 36, Issue 1. P. 76.
6. *Grishin S.V., Grishin V.S., Romanenko D.V., Sharaevskii Yu.P.* An ultrawideband spin-wave medium-power chaos generator based on field-effect transistors // Technical Physics Letters. October 2014. Vol. 40, Issue 10. P. 853.
7. *Kislov V.Ja., Mjasin E.A., Zalogin N.N.* // Radiotekhnika i jelektronika. 1980. T. 25, № 10. S. 2160. [in Russian].
8. *Shigaev A.M., Dmitriev B.S., Zharkov Yu.D., Ryskin N.M.* Chaotic dynamics of delayed feedback klystron oscillator and its control by external signal // IEEE Transactions on Electron Devices. 2005. Vol. 52, № 5. P. 790.
9. *Ryskin N.M., Titov V.N., Marchewka C., Larsen P., Bhattacharjee S., Booske J. and Sengele S.* Generation of chaotic radiation in a driven traveling wave tube amplifier with time-delayed feedback // Phys. Plasmas. 2006. Vol. 13, № 1. P.013104.
10. *Dmitriev B.C., Zharkov Ju.D., Sadovnikov S.A., Skorokhodov V.N.* // Zhurnal Radiojelektroniki. 2012. № 12. S. 1. (In Russian).
11. *Kats V.A.* // Radiofizika. 1985. T. 28, № 2. S. 161 (in Russian).
12. *Dmitriev A.S., Efremova E.V., Rumyantsev N.V.* A microwave chaos generator with a flat envelope of the power spectrum in the range of 3–8 GHz. // Technical Physics Letters. January 2014. Vol. 40, Issue 1. P. 48.
13. *Gilmour A.S.* Principles of traveling wave tubes. Boston; London, 1994.
14. *Pikovskij A., Rozenbljum M., Kurts Ju.* Synchronizacija. Fundamental'noe nelinejnoe javlenie. M.: Tehnosfera, 2002. 489 s. (In Russian).
15. *Dmitriev B.S., Zharkov Ju.D., Skorokhodov V.N., Sadovnikov S.A.* Patent na poleznuju model' №148722 ot 13.11.2014. (In Russian).

Поступила в редакцию 23.06.2015

После доработки 28.07.2015

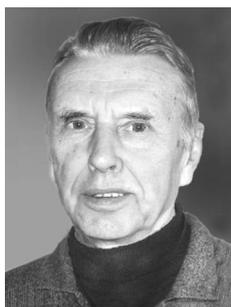
GENERATION OF CHAOTIC WIDE-BAND IMPULSES IN UHF RANGE BY TWT AUTOGENERATOR

B. S. Dmitriev, Yu. D. Zharkov, S. A. Sadovnikov, V. N. Skorokhodov

Saratov State University

This work presents results of experimental research of chaotic signal wide-band generator based on UHF band TWT amplifier. Two generation methods of chaotic pulses sequences were investigated.

Keywords: TWT autogenerator with delayed feedback, wide-band chaotic signal, chaotic suppression in TWT, chaotic pulses.



Дмитриев Борис Савельевич – родился в Саратове (1937), окончил физический факультет Саратовского университета (1959). В настоящее время – профессор кафедры нелинейной физики СГУ, доктор физ.-мат. наук. Читает лекции по общему курсу физики, радиофизике и электронике, концепциям современного естествознания. Область научных интересов – микроволновая электроника и радиофизика, нелинейная динамика распределённых систем. Опубликовал более 150 научных работ и учебных пособий, монографию «Относительность – время, пространство, поля» (с грифом учебного пособия для вузов), автор 16 изобретений и патентов.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail:dmitrievbs@info.sgu.ru



Жарков Юрий Дмитриевич – родился в селе Терса Еланского района Волгоградской области (1931). Окончил физический факультет СГУ (1953). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1961) и доктора (1987) в области радиофизики и электроники СВЧ. В настоящее время – профессор кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – физическое моделирование процессов взаимодействия потоков заряженных частиц с СВЧ-полями, исследование сложной динамики в СВЧ-генераторах с запаздывающей обратной связью. Опубликовал более 200 работ, среди них несколько учебных пособий, 20 изобретений.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail:dmitrievbs@info.sgu.ru



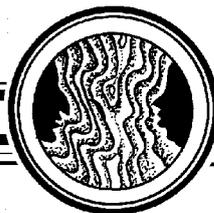
Садовников Сергей Александрович – родился в 1986 году. Окончил факультет нелинейных процессов СГУ (2008). В настоящее время – аспирант кафедры нелинейной физики СГУ. Область научных интересов – экспериментальные исследования нелинейной динамики в СВЧ автогенераторах. Имеет 6 публикаций.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail:zzfz@inbox.com



Скоруходов Валентин Николаевич – родился в 1959 году. Окончил физический факультет СГУ в 1982 году. В настоящее время является заведующим лабораторией кафедры электроники, колебаний и волн. Область научных интересов: нелинейная динамика в СВЧ-электронике. Автор более 15 статей в отечественных и зарубежных журналах.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail:skor@info.sgu.ru



ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ ПО-ДРЕВНЕГРЕЧЕСКИ*

М.И. Петелин

Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

Экскурс в историю теории относительности для любознательных студентов и не только.

Ключевые слова: Пространственно-временная симметрия, 12-я теорема Прокла, теория относительности.

Согласно [1-4], теория относительности может быть построена без априорного ограничения скорости материальных тел – наоборот, это ограничение само следует сразу же из симметрии пространства-времени¹.

Следуя античной методологии [1], начнем с определения. Пусть две одинаковые инерциальные системы движутся по одной прямой (рис. 1), и пусть в каждой из них свой наблюдатель измеряет расстояния, взяв за единицу N своих шагов, и измеряет временные интервалы, взяв за единицу M автоколебаний своего пульса («каждой системе – собственное время»). Из соображений прокловской [1] симметрии², эти наблюдатели могут подобрать отношение N/M так, чтобы измерять как координаты ξ, ξ' , так и времена τ, τ' общим одномерным эталоном³. Тогда пересчет

*Статья написана по материалам доклада, прочитанного на XVI Международной зимней школе-семинаре по радиофизике и электронике СВЧ. Саратов, Россия, 2–7 февраля 2015.

¹Удобной иллюстрацией пространственно-временной симметрии может служить уравнение Фогта [5] ([4] Appendix 2), которое описывает распространение электромагнитного волнового пакета в вакууме:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi'^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau'^2}$$

Однако, разумеется, пространственно-временная симметрия $\xi \leftrightarrow \tau$ гораздо фундаментальнее своих частных физических проявлений.

²Эта *συμμετρεῖν* (= «измеряй вместе») была постулирована полтора тысячелетия назад Проклом [1], который, заменив 5-й элемент Аристотеля – эфир – вакуумом, сделал как движение, так и покой относительными.

³По аналогии – из педагогического опыта автора этих строк – современный прогрессивный студент запускает в безграничный вакуум два идентичных кристалла и в каждом из них, руководствуясь народно-экономической мудростью «Время – деньги, пространство – тоже деньги», вводит – подбором отношения \bar{N}/\bar{M} – унитарный одномерный пространственно-временной эталон («Давайте все измерять баксами!»), соответствующий \bar{N} периодам кристалла и \bar{M} периодам «вращения» электрона вокруг локального ядра.

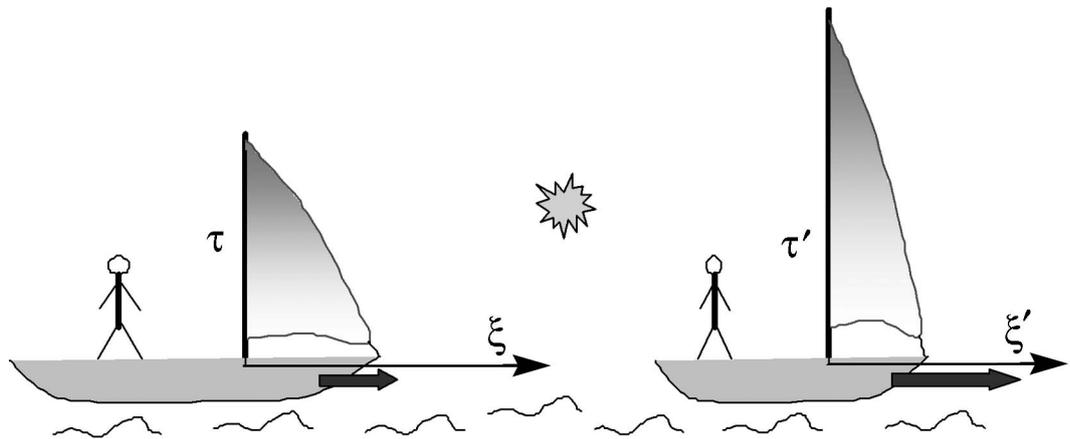


Рис. 1. Инерциальные системы отсчета

любого события из одной инерциальной системы в другую становится инвариантным относительно коммутации

$$\begin{array}{ll} \xi \rightarrow \tau & \xi' \rightarrow \tau' \\ \tau \rightarrow \xi & \tau' \rightarrow \xi' \end{array} \quad (1)$$

а из взаимности относительного движения систем отсчета следует инвариантность относительно коммутации

$$\begin{array}{ll} \xi \rightarrow -\xi' & \xi \rightarrow -\xi \\ \tau \rightarrow \tau' & \tau' \rightarrow \tau. \end{array} \quad (2)$$

Для некоторого «стартового» события положим $\xi_0 = \tau_0 = \xi'_0 = \tau'_0 = 0$ и, чтобы удовлетворить условиям (1)–(2), свяжем последующие события (ξ, τ, ξ', τ') уравнениями

$$\begin{array}{l} \xi = \gamma\xi' + \kappa\tau' \Rightarrow \xi' = \gamma\xi - \kappa\tau, \\ \tau = \kappa\xi' + \gamma\tau' \Leftarrow \tau' = -\kappa\xi + \gamma\tau, \end{array} \quad (3)$$

а чтобы подстановка любого из столбцов в противоположный давала тождество, свяжем коэффициенты условием

$$\gamma^2 - \kappa^2 = 1. \quad (4)$$

Из (3)–(4) следуют популярные эффекты релятивистской кинематики [5,6]:

- «парадокс» близнецов: $\xi' = 0 \Rightarrow \tau' = \tau/\gamma$ (мораль: «Хочешь жить – умей вертеться»),
- лоренцево «сокращение» длины: $\tau' = 0 \Rightarrow \xi' = \xi/\gamma$ (мораль: «В прыжке – сгруппируйся»).

Разобравшись с координатами и временами, займемся их производными – скоростями. Полагая в (3) $\xi' = 0$ или $\xi = 0$, найдем относительные взаимные скорости систем отсчета

$$\beta = \pm \frac{\kappa}{\gamma} \quad (5)$$

и, используя (5), запишем условие циклической рекуррентности (4) в виде

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}, \quad (6)$$

согласно которому относительная скорость систем отсчета (а значит, и любых материальных тел) ограничена:

$$|\beta| \leq 1 \quad (7)$$

– пространственно-временная симметрия (1)–(2) результировала в 12-ю теорему Прокла: «Ἐν πεπερασμένῳ χρόνῳ τὸ ἀλείρον κινεῖσθαι οὐκ ἐστίν» – «За конечное время нельзя пройти бесконечное расстояние» [1].

Измеренная в конце предыдущего тысячелетия «бытовая» предельная скорость материальных тел оказалась равной $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.⁴ Соответственно, если измерять координату $x = \xi$ метрами, а время $t = \tau/c$ секундами, то «древнегреческие» формулы (3)–(4) сводятся к «обычному» преобразованию Лоренца [5,6].

Я благодарен Д.И. Трубецкову за приглашение в гостеприимные «Волжские дали» на зимнюю школу-семинар.

Библиографический список

1. Προκλῶν Διαδοχῶν Λυκίου, «Σηοιτειωζις Φοζικη». Начала физики / Перевод С. Месяц. М.: Греко-латинский кабинет Ю.А. Шичалина, 2001.
2. Mermin N. Relativity Without Light // Am. J. Phys. 1984. Vol. 52. P. 119.
3. Feigenbaum M. The Theory of Relativity – Galileo’s Child (arXiv:0806.1234v1, 2008).
4. Petelin M. The universal speed limit as an attribute of the space-time symmetry // JBAP. 2015. Vol. 4, № 1. P. 8.
5. Voigt W. Ueber das Dopplersche Prinzip // Goett. Nachr. 1887. S. 41.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Физматлит, 1967.
7. Feynman R., Leighton R., and Sands M. The Feynman Lectures on Physics. 2006.

References

1. Προκλῶν Διαδοχῶν Λυκίου, «Σηοιτειωζις Φοζικη». Elements of Physics. / A. Ritzenfeld (ed./transl.). Leipzig: Teubner, 1912.
2. Mermin N. // Am. J. Phys. 1984. 52. Vol. 119.
3. Feigenbaum M. arXiv:0806.1234v1, 2008.
4. Petelin M. // JBAP. 2015. Vol. 4, № 1. P. 8.
5. Voigt W. // Goett. Nachr. 1887. S. 41.
6. Landau L.D., Lifshitz E.M. // The Classical Theory of Fields. 1975. Vol. 2. (4th ed.). Butterworth-Heinemann. ISBN 978-0-7506-2768-9.

⁴Несколько лет назад CERNовцы намерили было у нейтрино скорость, превышающую скорость света; и тут выяснилось, что стандартная теория относительности [5,6], основанная на экспериментах с фотонами и заряженными частицами, бессильна ограничить скорость незаряженных тел. В конце концов CERN был вынужден подчиниться Проклу и снизить скорость нейтрино до скорости света. Под прокловское ограничение (6) неизбежно подпадет и скорость пока еще не открытых торсионных волн.

7. *Feynman R., Leighton R., and Sands M.* The Feynman Lectures on Physics. 2006.

Поступила в редакцию 3.03.2015

RELATIVITY A LA ANCIENT GREEK

M. I. Petelin

Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod, Russia

From the history of relativity for students and not only for them.

Keywords: Space-time symmetry, the 12-th theorem of Prokl, theory of relativity.



Петелин Михаил Иванович – родился в 1937 году в Горьком (Нижний Новгород). Окончил радиофизический факультет (1959) и аспирантуру при Горьковском университете (1962). С 1962 по 1967 год работал в Горьковском университете ассистентом кафедры электродинамики СВЧ. В 1967 году перешел в Научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ) при Горьковском университете. В 1977 году переведен в Институт прикладной физики Российской академии наук (ИПФ РАН), где в настоящее время занимает должность главного научного сотрудника. Область научных интересов: микроволновая электроника и электродинамика больших мощностей в приложениях к проблемам управляемого термоядерного синтеза, радиолокации и ускорителей заряженных частиц. Награды: Государственная премия СССР (1967), премия имени К. Баттона (1996), Государственная премия России (2003), премия имени Д. Пирса (2011).

603950 Нижний Новгород, ГСП-120, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН
E-mail: petelin@appl.sci-nnov.ru



Из далёкого Сан-Диего пришла печальная весть. Не стало Шулима Ефимовича Цимринга – талантливого физика, теоретика и экспериментатора, человека яркой и непростой судьбы. Саратов, Нижний Новгород, Сан-Диего... И везде он оставил память в статьях, в созданных приборах, в книгах, в запомнившихся дискуссиях и дружеских беседах. Он был участником как лектор зимних школ-семинаров по электронике СВЧ в Саратове. Его гостеприимный дом в Нижнем Новгороде всегда был открыт для саратовских друзей. Публикуемые воспоминания – долг памяти этому замечательному человеку.

Редакция

ШУЛИМ ЕФИМОВИЧ ЦИМРИНГ **Годы совместной работы**

В. С. Андрушкевич

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Статья посвящена памяти Шулима Ефимовича Цимринга. Автору этих строк довелось встречаться и работать с ним в «саратовский период» его жизни и деятельности.

Ключевые слова: Саратовский государственный университет, научный семинар, электродинамика СВЧ.

Когда начинаешь «копаться» в своей памяти, неизбежно вспоминаешь людей, которые оставили неизгладимые следы в твоей жизни. Именно таким человеком был Шулим Ефимович Цимринг, и я благодарен судьбе за то, что она свела меня с ним в годы нашей совместной работы. Впервые мы встретились, когда он уже защитил кандидатскую диссертацию, а я еще был студентом пятого курса университета. В это время я «мастерил» счетчик фотонов для газоразрядной водородной плазмы. Однажды, появившись в лаборатории и увидев меня, Шулим Ефимович заинтересовался, какую проблему будет решать установка, где будет использован счетчик фотонов, интересовался самой конструкцией счетчика. Потом такие встречи повторялись неоднократно, и я был поражен тем, что состоявшийся ученый заинтересованно общается со студентом.

Приблизительно через три года судьба вновь свела меня с Шулимом Ефимовичем, так как я стал работать вместе с ним. В то время решением правительства было

определено, чтобы Саратов стал одним из ведущих центров электронной промышленности. Саратовский университет был одним из главных в решении проблемы по освоению миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов, что диктовалось потребностями обороны.

В научно-исследовательском институте механики и физики при СГУ были образованы научные группы для решения конкретных задач; группы возглавлялись профессорами различных кафедр. От кафедры электроники работу возглавлял профессор Петр Васильевич Голубков, а его неофициальным заместителем стал Цимринг. Петр Васильевич занимался, в основном, организационной работой. Цимрингу же он доверил решение научных проблем. Вот здесь я был удивлен способностью Шулима Ефимовича глубоко вникать в каждую решаемую проблему.

Цимринг был признанным авторитетом в области элетродинамики СВЧ. Разработанный им метод расчета замедляющих систем на основе вариационного подхода стал важным вкладом в теорию замедляющих систем. Ведущие специалисты страны приезжали в СГУ, чтобы установить контакты и ознакомиться с разработанным методом. Глубокое знание Шулимом Ефимовичем электродинамики, естественно, помогало и нашей работе. У нас в группе вырисовывалась общая конструкция генератора миллиметрового диапазона, но необходимо было решить проблему вывода энергии, которую быстро и изящно решил Цимринг. Мне же было поручено разработать для высоковольтного источника эффективный стабилизатор напряжения с током порядка одного ампера и напряжением двадцать киловольт. Шулим Ефимович никогда этим не занимался, но он и здесь проявлял такую заинтересованность и настолько «осыпал» меня конкретными вопросами, что я и не всегда мог дать вразумительные ответы. Работа над созданием генератора миллиметрового диапазона, хотя и с трудом, но успешно продвигалась. В итоге наша группа впервые разработала генератор коротковолновой части миллиметрового диапазона (клинотрон), который при динамических испытаниях обеспечил выходную мощность в несколько ватт. Разработанный макет клинотрона был высоко оценен приемной комиссией и сотрудниками Харьковского ИРЭ, предложившими такие приборы. И в настоящее время клинотроны, как представляется мне, остаются перспективными источниками излучения миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов.

Цимринг внес значительный вклад в исследование электронной оптики гиротронов, написал и издал в США хорошую книгу по электронным приборам сверхвысоких частот. Отличительной чертой Шулима Ефимовича являлась его поразительная мобильность и способность перехода к решению новых, казалось бы второстепенных, задач, далеких от электродинамики и электроники. Примером может служить составление им программ для вычисления специальных функций на программируемых микрокалькуляторах, устранивших тем самым необходимость обращения к справочникам, в которых затабулированы эти функции. У меня хранятся два экземпляра изданных программ, подаренные мне Шулимом Ефимовичем.

Я каким-то образом всегда чувствовал, что Шулиму Ефимовичу постоянно требуется оппонент. Это особенно проявлялось на научных семинарах сотрудников, где обсуждались разные задачи и где Цимринг был уже сам в качестве главного оппонента других мнений. Мне очень повезло, что я стал постоянным участником этих семинаров и особенно обсуждений с Цимрингом различных возникающих задач и проблем. Я, конечно, понимал, что по уровню знаний и способностей, безусловно,



Дружеский шарж на Ш.Е.Цимринга из стенной газеты Зимней школы-семинара по электронике СВЧ и радиофизике. Саратов. Волжские Дали. Январь-февраль 1975 г.

уступал Шулиму Ефимовичу, но споры и обсуждения учили меня логике и азарту в споре. Когда однажды Цимринг приехал из США в Саратов, то при встрече я сказал, что очень благодарен ему за наши обсуждения и споры, а он, неожиданно для меня, ответил, что не знает, кому больше повезло.

Горько сознавать, что из жизни ушел талантливый ученый и хороший человек.

Поступила в редакцию 20.03.2015

SHULIM EFIMOVICH TSIMRING

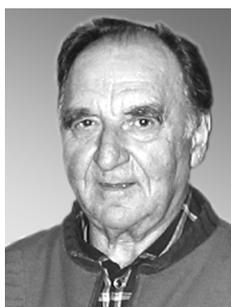
Years of team-work

V. S. Andrushkevich

Saratov State University

The paper is dedicated to the memory of Shulim Efimovich Tsimring.

Keywords: Saratov State University, scientific seminar, microwave electrodynamics.



Андрюшкевич Владимир Степанович – родился в Саратове (1929), окончил Саратовский государственный университет (1954). После окончания университета работал в СГУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1964) и доктора физико-математических наук (1987) в области вакуумной и плазменной электроники. Опубликовал более 100 работ по указанным направлениям.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83

Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

E-mail: and@nonlin.sgu.ru

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Н.Н. Левина, Л.А. Сидорова*
Оформление художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, О.Н. Строгановой
в пакете $L^A T_E X$

Подписка на 2015 год осуществляется
по каталогу Агентства Роспечать
«Газеты. Журналы», индекс 73498
и по договору между Подписчиком
(юридическим или физическим лицом)
и Издателем (Саратовским государственным университетом)

Стоимость подписки на 2015 год 1080 руб. (6 номеров)
Заявки на заключение договора принимаются
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012 Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64
E-mail: and@nonlin.sgu.ru
Сайт журнала <http://andjournal.sgu.ru>

Распространение журнала осуществляется
редакцией журнала по адресной системе

**Условия подписки на электронную версию журнала на сайте
Научной электронной библиотеки <http://elibrary.ru>**

Сдано в набор 1.09.2015. Подписано к печати 12.10.2015
Формат 70x108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная
Усл. печ. л. 10,6 (7,6). Уч.-изд. л. 10,0. Заказ № –Т.

Отпечатано в Типографии ФГБОУ ВПО СГУ
410012 Саратов, Б.Казачья, 112А, тел. (845-2) 27-33-85

© Редакция журнала
«Известия вузов. ПНД», 2015
© Оформление художника
Д.В. Соколова, 2015