

Журнал включен в «Перечень периодических научных и научно-технических изданий РФ,
рекомендованных для публикации основных результатов диссертаций
на соискание ученой степени доктора наук»

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

научно-технический журнал

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 19, № 4, 2011, Саратов

СО Д Е Р Ж А Н И Е

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

- Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* Влияние шума на обобщенную синхронизацию пространственно-распределенных сред, описываемых уравнениями Гинзбурга–Ландау..... 3
- Журавлев М.О., Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* Перемежаемость кольца вблизи границы синхронизации временных масштабов 12
- Панкратова Е.В., Белых В.Н.* Качественно-численный анализ возможных режимов синхронного поведения двух инерционно связанных осцилляторов ван дер Поля..... 25
- Егоров Е.Н., Храмов А.Е.* Нелинейная динамика винтового электронного потока в режиме формирования виртуального катода 40

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ

- Слепнев А.В., Вадивасова Т.Е.* Бифуркации удвоения периода и эффекты шумового воздействия в мультистабильной автоколебательной среде..... 53
- Поздняков М.В.* Динамические режимы и мультистабильность в системе несимметрично связанных двумерных отображений, демонстрирующих бифуркации удвоения периода и Неймарка–Сакера 68

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС

- Талагаев Ю.В., Тараканов А.Ф.* Многопараметрический анализ на основе критерия Мельникова и оптимальное подавление хаоса в периодически возмущаемых динамических системах 77

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НЕЙРОНАУКА

- Грубов В.В., Овчинников А.А., Ситникова Е.Ю., Короновский А.А., Храмов А.Е.* Вейвлетный анализ сонных веретен на ЭЭГ и разработка метода их автоматической диагностики..... 91
- Филина Е.В.* Динамика локальных потенциалов мозга при абсанс-эпилепсии: Эмпирическое моделирование 109

ИЗ КНИГ И ЖУРНАЛОВ

- Смирнов С.* Жил Перельман в Курчатнике... 124
- «Пишет вам ученик физико-математической школы...» 127

PERSONALIA

- Ланда П.С.* Памяти моего большого друга, выдающегося ученого и замечательного человека Юрия Исааковича Неймарка 129
- Правила для авторов 134

C O N T E N T S

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

<i>Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Hramov A.E.</i> Effect of noise on generalized synchronization of spatially extended systems described by Ginzburg–Landau equations	3
<i>Zhuravlev M.O., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Hramov A.E.</i> Ring intermittency near the boundary of time scale synchronization	12
<i>Pankratova E.V., Belykh V.N.</i> Qualitative and numerical analysis of possible synchronous regimes for two inertially coupled van der Pol oscillators	25
<i>Egorov E.N., Hramov A.E.</i> Nonlinear dynamics of helical electron flow in the regime of the virtual cathode forming	40

BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS

<i>Slepnev A.V., Vadivasova T.E.</i> Period doubling bifurcations and noise excitation effects in a multistable self-sustained oscillatory medium	53
<i>Pozdnyakov M.V.</i> Dynamic regimes and multistability in the system of non-symmetrically coupled two-dimensional maps with period-doubling and Neimark–Sacker bifurcations	68

DETERMINISTIC CHAOS

<i>Talagaev Y.V., Tarakanov A.F.</i> Multiparametrical analysis based on Melnikov criterion and optimal chaos suppression in periodically driven dynamic systems ..	77
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----

NONLINEAR DYNAMICS AND NEUROSCIENCE

<i>Grubov V.V., Ovchinnikov A.A., Sitnikova E.Yu., Koronovskii A.A., Hramov A.E.</i> Wavelet analysis of sleep spindles on EEG and development of method for their automatic diagnostic	91
<i>Filina E.V.</i> Dynamics of local potentials of brain at the absence-epilepsy: Empirical modelling	109

FROM BOOKS AND JOURNALS

<i>Sergey Smirnov.</i> There was Perel'man in Kurchatnik... ..	124
«The scholar of physics-mathematical school is writing to you...»	127

PERSONALIA

<i>Landa P.S.</i> In memory of my best friend, outstanding scientist and the great person Yu.I. Neimark (24.11.1920-11.09.2011)	129
Author's rules	134



**ВЛИЯНИЕ ШУМА НА ОБОБЩЕННУЮ СИНХРОНИЗАЦИЮ
ПРОСТРАНСТВЕННО-РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СРЕД,
ОПИСЫВАЕМЫХ УРАВНЕНИЯМИ
ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ**

А.А. Короновский, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов

Исследовано влияние шума на обобщенную синхронизацию в пространственно-распределенных средах, описываемых уравнениями Гинзбурга–Ландау, находящихся в режиме пространственно-временного хаоса. Показано, что шум практически не оказывает влияния на порог возникновения синхронного режима в таких системах. Причины возникновения выявленной особенности объяснены при помощи метода модифицированной системы и подтверждены результатами численного моделирования.

Ключевые слова: Пространственно-распределенные среды, уравнения Гинзбурга–Ландау, пространственно-временной хаос, обобщенная синхронизация, шум.

Синхронизация хаотических колебаний представляется в настоящее время одним из фундаментальных нелинейных явлений, активно изучаемых в последнее время [1]. Интерес к этому феномену обусловлен также широким кругом практических приложений, в которых могут быть использованы различные его типы. Например, фазовая синхронизация и синхронизация с запаздыванием могут найти применение в биофизических, физиологических и медицинских задачах [2–4], а обобщенная и полная синхронизация — при осуществлении скрытой передачи информации по каналам связи [7].

Одним из наиболее важных вопросов, связанных с изучением хаотической синхронизации, является влияние шума на установление синхронных режимов [6–14]. Известно, что шум может оказывать как конструктивное, так и деструктивное воздействие на поведение систем. В частности, в случае полной синхронизации шум может привести к потере синхронного режима из-за локальной неустойчивости синхронного многообразия, сопровождающейся возникновением «on-off»-перемежаемости [6, 7]. В то же самое время, общий шум способен синхронизовать две не взаимодействующие, но идентичные системы (стартующие с различных начальных условий). В этом случае диагностируется режим индуцированной шумом

синхронизации [15, 16]. В случае фазовой синхронизации внешний шум может привести к сдвигу пороговых значений параметра связи, соответствующих установлению синхронного режима [8]. С другой стороны, шум может играть и конструктивную роль при фазовой синхронизации, усиливая эффект частичного фазового захвата ниже порога возникновения синхронизации в «нешумящей» системе [9].

Влияние шума на обобщенную синхронизацию в настоящее время исследовано слабо. В качестве исключения можно отметить работы [13, 14], посвященные анализу обобщенной синхронизации в присутствии шума в системах с малым числом степеней свободы. Показано, что в двух однонаправленно связанных динамических системах с качественно различной топологией аттрактора шум способен как усилить/вызвать, так и, наоборот, разрушить режим обобщенной синхронизации, в то время как в диссипативно связанных идентичных системах со слегка расстроенными параметрами наблюдается высокая степень устойчивости синхронного режима по отношению к внешним шумам.

Настоящая работа посвящена исследованию влияния шума на обобщенную синхронизацию в системах с бесконечномерным фазовым пространством – пространственно-распределенных средах, описываемых уравнениями Гинзбурга–Ландау, находящихся в режиме пространственно-временного хаоса. Как будет показано ниже, ввиду диссипативного типа связи в такой системе режим обобщенной синхронизации оказывается устойчивым по отношению к внешним шумам.

Под режимом обобщенной синхронизации двух однонаправленно связанных пространственно-распределенных сред, ведущей $\mathbf{u}(x, t)$ и ведомой $\mathbf{v}(x, t)$, понимается такой режим, при котором после завершения переходного процесса устанавливается однозначная функциональная зависимость $\mathbf{F}[\cdot]$ между их состояниями, то есть $\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{F}[\mathbf{u}(x, t)]$ [17, 18].

Так же, как и в системах с малым числом степеней свободы, диагностика режима обобщенной синхронизации в пространственно-распределенных средах может быть осуществлена при помощи метода ближайших соседей [15], расчета условных ляпуновских экспонент [20, 21] или метода вспомогательной системы [22].

Суть метода вспомогательной системы для пространственно-распределенных систем сводится к следующему: наряду с ведомой системой $\mathbf{v}(x, t)$ рассматривается идентичная ей вспомогательная система $\mathbf{v}_a(x, t)$. Начальные условия для вспомогательной системы $\mathbf{v}_a(x, t_0)$ выбираются отличными от начального состояния ведомой системы $\mathbf{v}(x, t_0)$, однако близкими к нему (для мультистабильных систем). В случае отсутствия режима обобщенной синхронизации между взаимодействующими системами состояния ведомой $\mathbf{v}(x, t)$ и вспомогательной $\mathbf{v}_a(x, t)$ систем в каждой точке пространства являются различными. В режиме обобщенной синхронизации, в силу выполнения соотношений $\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{F}[\mathbf{u}(x, t)]$ и, соответственно, $\mathbf{v}_a(x, t) = \mathbf{F}[\mathbf{u}(x, t)]$, после завершения переходного процесса состояния ведомой и вспомогательной систем должны стать идентичными $\mathbf{v}(t) \equiv \mathbf{v}_a(t)$, что является критерием наличия обобщенной синхронизации между ведущей и ведомой системами. Если состояния ведомой и вспомогательной систем оказываются идентичными в отдельных точках пространства, можно говорить о частичной обобщенной синхронизации [18].

Рассмотрим вопрос об устойчивости режима обобщенной синхронизации к шумам в пространственно-распределенных средах, описываемых комплексными уравнениями Гинзбурга–Ландау, находящихся под воздействием пространственно-распределенного источника шума

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u - (1 - i\alpha_d)|u|^2u + (1 + i\beta_d)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tilde{D}\zeta(x, t), \quad x \in [0, L], \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v - (1 - i\alpha_r)|v|^2v + (1 + i\beta_r)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \tilde{D}\zeta(x, t) + \varepsilon(u - v), \quad x \in [0, L]. \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) описывают поведение ведущей и ведомой систем, соответственно. Известно [23], что однонаправленно связанные уравнения Гинзбурга–Ландау могут демонстрировать режим обобщенной хаотической синхронизации. Значения управляющих параметров ведущей системы по аналогии с [23] выберем равными $\alpha_d = 1.5$, $\beta_d = 1.5$, а аналогичные параметры ведомой системы будем варьировать в диапазоне $\alpha_r \in [3; 5]$ и $\beta_r \in [3; 5]$. Выбор подобных значений управляющих параметров обеспечивает возникновение в автономных системах режима пространственно-временного хаоса, в то время как параметр ε определяет интенсивность однонаправленной связи между ведущей и ведомой системами. Слагаемое $\tilde{D}\zeta(x, t)$ описывает комплексный источник шума $\zeta(x, t)$ с нулевым средним, подчиняющийся распределению Гаусса

$$\begin{aligned} \langle \zeta(x, t) \rangle &= 0, \\ \langle \zeta(x, t)\zeta(x', t') \rangle &= \delta(x - x')\delta(t - t'), \end{aligned} \quad (3)$$

где \tilde{D} характеризует интенсивность шумового воздействия.

Уравнения (1)–(2) решались для периодических граничных условий $u(x, t) = u(x + L, t)$ и $v(x, t) = v(x + L, t)$; длина L , на которой проводилось рассмотрение, была фиксирована и выбрана равной $L = 40\pi$; начальные условия задавались случайным образом. При решении уравнений использовалась явная численная схема второго порядка точности [24] (метод конечных разностей) с шагами по времени и по пространству $\Delta t = 0.0002$ и $\Delta x = L/1024$, соответственно.

Для диагностики режима обобщенной хаотической синхронизации в уравнениях Гинзбурга–Ландау использовался метод вспомогательной системы, когда помимо ведущей и ведомой систем рассматривалась еще и вспомогательная система $v_a(t)$, также описываемая уравнением (2), при этом случайные сигналы $\tilde{D}\zeta(x, t)$, воздействующие на ведомую и вспомогательную системы, были идентичными. В качестве критерия наличия режима обобщенной синхронизации использовалось условие

$$\frac{1}{T} \int_T \int_0^L |v(x, t) - v_a(x, t)|^2 < \delta, \quad (4)$$

где $\delta = 10^{-5}$.

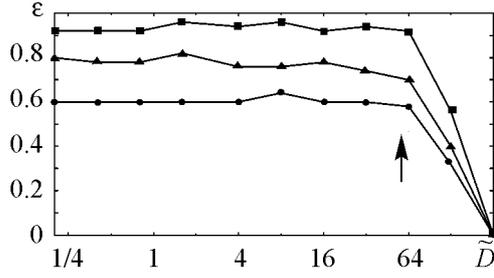


Рис. 1. Граница режима обобщенной хаотической синхронизации в двух однонаправленно связанных активных средах, описываемых комплексными уравнениями Гинзбурга-Ландау, на плоскости параметров (\tilde{D}, ε) для различных значений управляющих параметров ведомой системы: $\alpha_r = 3$, $\beta_r = 3$ (\bullet), $\alpha_r = 4$, $\beta_r = 4$ (\blacktriangle), $\alpha_r = 5$, $\beta_r = 5$ (\blacksquare). Критическое значение интенсивности шума \tilde{D}_c , до которого наблюдается устойчивость режима обобщенной синхронизации к шумам, показано стрелкой

приведены соответствующие пространственно-временные диаграммы. Рисунки (а, е) характеризуют поведение ведущей системы, а остальные соответствуют ведомой системе до (б, ж) и после (з, и) порога возникновения обобщенной синхронизации. На рис. 2, в, д, з, к показаны распределения во времени и пространстве модуля разности состояний ведомой и вспомогательной систем $|v - v_a|$ для случаев отсутствия (в, з) и наличия (д, к) режима обобщенной синхронизации. Нетрудно заметить, что в последних случаях (д, к) разность состояний ведомой и вспомогательной систем после включения связи стремится к нулю в каждой точке пространства, что означает наличие обобщенной синхронизации между ведущим и ведомым уравнениями Гинзбурга-Ландау. Необходимо отметить, что длительность переходного процесса, предшествующего возникновению режима обобщенной синхронизации, оказывается немного больше в случае наличия шума, в то время как пороговое значение параметра связи оказывается одинаковым в обоих случаях. Кроме того, нетрудно видеть, что пространственно-временные диаграммы, характеризующие поведение ведомой системы, оказываются похожими в случаях наличия и отсутствия шума (ср. рис. (б, з) и (ж, и), соответственно). Такое поведение пространственно-распределенных систем в режиме обобщенной синхронизации в присутствии шума может быть объяснено при помощи метода модифицированной системы [25]. Известно, что порог возникновения режима обобщенной синхронизации в такой системе определяется, прежде всего, свойствами модифицированного уравнения Гинзбурга-Ландау

$$\frac{\partial v_m}{\partial t} = v_m - (1 - i\alpha_r)|v_m|^2 v_m + (1 + i\beta_r) \frac{\partial^2 v_m}{\partial x^2} - \varepsilon v_m, \quad x \in [0, L], \quad (5)$$

получающегося из уравнения (2) в случае отсутствия шума ($\tilde{D} = 0$) путем приравнивания нулю сигнала ведущей системы $u = 0$ (см., например, [23, 26]). Следует обратить внимание, что слагаемое $(-\varepsilon v_m)$ фактически вносит дополнительную диссипацию в модифицированное уравнение Гинзбурга-Ландау (5). Шумовой сигнал

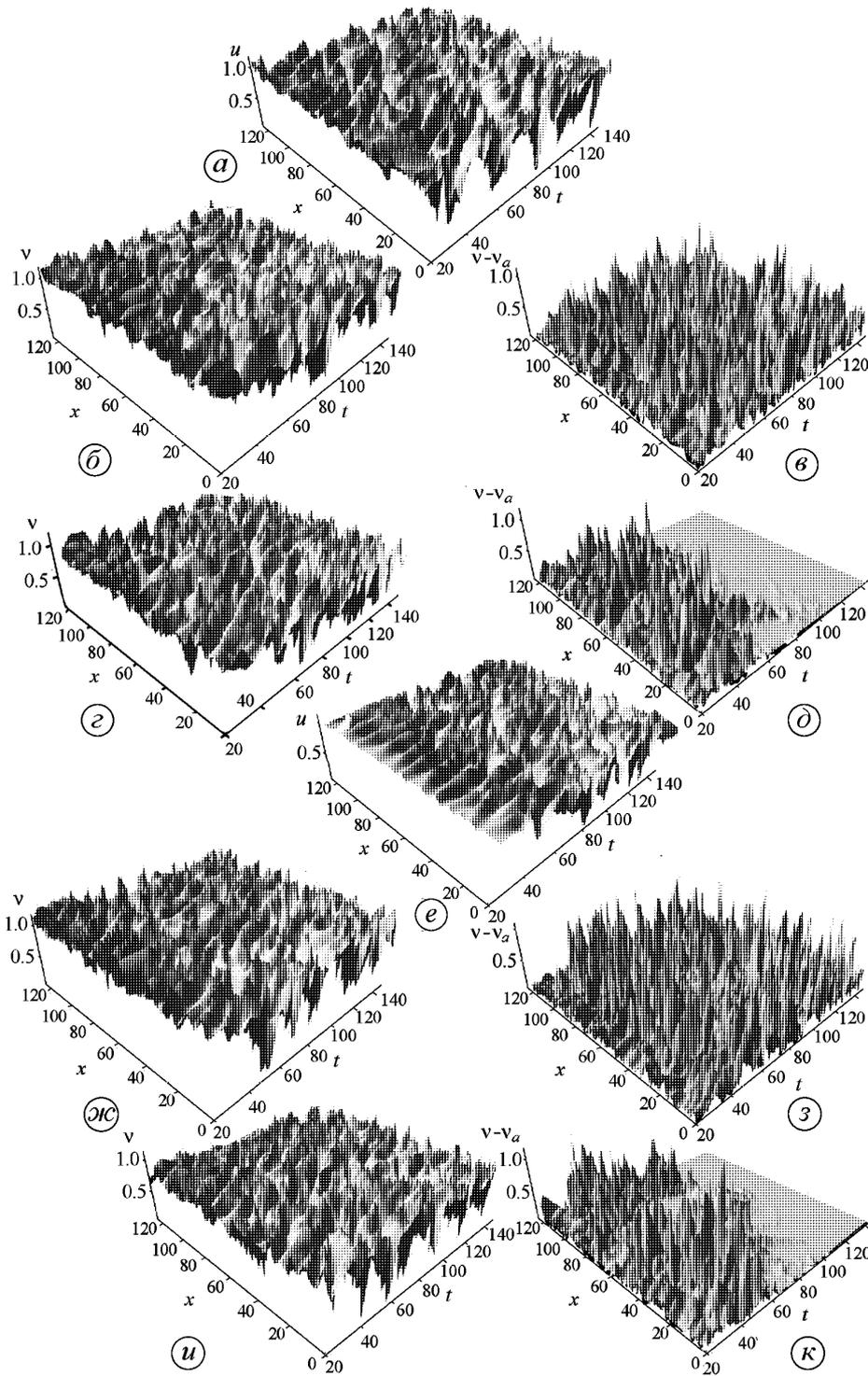


Рис. 2. Пространственно-временные диаграммы, характеризующие поведение ведущей (а,е) и ведомой (б,г,ж,и) систем (1)–(2), а также зависимости модуля разности состояний ведомой и вспомогательной систем $|v - v_a|$ (в,д,з,к) для случаев отсутствия (в,з) ($\varepsilon = 0.2$) и наличия (д,к) ($\varepsilon = 0.8$) обобщенной синхронизации во времени t и пространстве x . Значения управляющих параметров для ведомой системы были выбраны равными $\alpha_r = \beta_r = 3$. В моменты времени $t = 40$ включалась связь между ведущей и ведомой системами. Рисунки (а–д) соответствуют случаю отсутствия шума ($\bar{D} = 0$), (е–к) – наличию шума интенсивности $\bar{D} = 0.4$

достаточно большой амплитуды практически не влияет на характеристики модифицированного уравнения Гинзбурга–Ландау (и, как следствие, на характеристики ведомого) и, соответственно, величина параметра связи, при которой возникает режим обобщенной синхронизации, также не претерпевает существенных изменений. В то же самое время, граница обобщенной синхронизации может сдвигаться в сторону больших/меньших значений по параметру связи ε при воздействии шума очень большой интенсивности $\tilde{D} > 64$. Как видно из рис. 1, при таких значениях интенсивности шума пороговое значение режима обобщенной синхронизации начинает уменьшаться. При очень больших интенсивностях \tilde{D} значение параметра связи ε_{GS} , соответствующее границе обобщенной синхронизации, стремится к нулю для любых значений управляющих параметров α и β пространственно-распределенных сред. Такое поведение границы обобщенной синхронизации связано с наступлением режима индуцированной шумом синхронизации [27, 28], являющейся проявлением обобщенной синхронизации в случае, когда стохастический сигнал вместо детерминированного воздействует на ведомую систему [29].

Тем не менее, шум достаточно большой амплитуды практически не меняет пороговое значение параметра связи между однонаправленно связанными уравнениями Гинзбурга–Ландау. Можно ожидать, что аналогичное поведение будет характерно для широко класса пространственно-распределенных автоколебательных систем с однонаправленной диссипативной связью.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-02-00047) и Президентской программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-3407.2010.2). А.А.К. благодарит также ФНП «Династия» за финансовую поддержку.

Библиографический список

1. Boccaletti S., Kurths J., Osipov G.V., Valladares D.L., and Zhou C.S. The synchronization of chaotic systems // *Physics Reports*. 2002. Vol. 366. P. 1.
2. Glass L. Synchronization and rhythmic processes in physiology// *Nature (London)*. 2001. Vol. 410. P. 277.
3. Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I., Gridnev V.I., Bodrov M.B., and Bespyatov A.B. Synchronization between main rhythmic processes in the human cardiovascular system // *Phys. Rev. E*. 2003. Vol. 68. P. 041913.
4. Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E., Yip K.P., Holstein-Rathlou N.H., and Marsh D.J. Synchronization among mechanisms of renal autoregulation is reduced in hypertensive rats // *American Journal of Physiology (Renal Physiology)*. 2007. Vol. 293. P. F1545.
5. Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е. О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации // *Успехи физических наук*. 2009. Т. 179, № 12. С. 1281.

6. *Heagy J.F., Carroll T.L., and Pecora L.M.* Desynchronization by periodic orbits // *Physical Review E*. 1995. Vol. 52, № 2. P. R1253.
7. *Gauthier D.J. and Bienfang J.C.* Intermittent loss of synchronization in coupled chaotic oscillators: Toward a new criterion for high-quality synchronization // *Physical Review Letters*. 1996. Vol. 77, № 9. P. 1751.
8. *Zhu L., Raghu A., and Lai Y.C.* Experimental observation of superpersistent chaotic transients // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 86, № 18. P. 4017.
9. *Zhou C.S., Kurths J., Kiss I.Z., and Hudson J.L.* Noise-enhanced phase synchronization of chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 89, № 1. P. 014101.
10. *Kim S.Y., Lim W., Jalnine A., and Kuznetsov S.P.* Characterization of the noise effect on weak synchronization // *Phys. Rev. E*. 2003. Vol. 67, № 1. P. 016217.
11. *Zhou C.S., Kurths J., Allaria E., Boccaletti S., Meucci R., and Arcelli F.T.* Noise-enhanced synchronization of homoclinic chaos in a CO_2 laser // *Phys. Rev. E*. 2003. Vol. 67. P. 015205(R).
12. *Goldobin D.S. and Pikovsky A.S.* Synchronization and desynchronization of self-sustained oscillators by common noise // *Phys. Rev. E*. 2005. Vol. 71, № 4. P. 045201(R).
13. *Guan S., Lai Y.C., and Lai C.H.* Effect of noise on generalized chaotic synchronization // *Phys. Rev. E*. 2006. Vol. 73. P. 046210.
14. *Москаленко О.И., Овчинников А.А.* Исследование влияния шума на обобщенную хаотическую синхронизацию в диссипативно связанных динамических системах: устойчивость синхронного режима по отношению к внешним шумам и возможные практические приложения // *Радиотехника и электроника*. 2010. Т. 55, № 4. С. 436.
15. *Maritan A. and Banavar J.R.* Chaos, noise and synchronization // *Phys. Rev. Lett.* 1994. Vol. 72, № 10. P. 1451.
16. *Toral R., Mirasso C.R., Hernández-Garsia E., and Piro O.* Analytical and numerical studies of noise-induced synchronization of chaotic systems // *Chaos*. 2001. Vol. 11, № 3. P. 665.
17. *Попов П.В., Филатов Р.А., Короновский А.А., Храмов А.Е.* Синхронизация пространственно-временного хаоса в пучково-плазменных системах со сверхкритическим током // *Письма в ЖТФ*. 2005. Т. 31, № 6. С. 9.
18. *Короновский А.А., Попов П.В., Храмов А.Е.* Обобщенная хаотическая синхронизация в связанных уравнениях Гинзбурга–Ландау // *ЖЭТФ*. 2006. Т. 130, № 4(10). С. 748.
19. *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., and Abarbanel H.D.I.* Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems // *Phys. Rev. E*. 1995. Т. 51, № 2. С. 980.
20. *Pyragas K.* Conditional Lyapunov exponents from time series // *Phys. Rev. E*. 1997. Vol. 56, № 5. P. 5183.

21. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Фролов Н.С., Храмов А.Е.* К вопросу о спектре пространственных ляпуновских показателей нелинейной активной среды, описываемой комплексным уравнением Гинзбурга–Ландау // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36, № 14. С. 19.
22. *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., and Sushchik M.M.* Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53, № 5. P. 4528.
23. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., and Popov P.V.* Generalized synchronization in coupled Ginzburg–Landau equations and mechanisms of its arising // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72, № 3. P. 037201.
24. *García-Ojalvo J. and Sancho J.M.* Noise in Spatially Extended Systems. New York: Springer, 1999.
25. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* Generalized synchronization: A modified system approach // Phys. Rev. 2005. E. Vol. 71, № 6. 067201.
26. *Короновский А.А., Попов П.В., Храмов А.Е.* Обобщенная синхронизация и механизм ее возникновения в связанных автоколебательных средах // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31, № 22. С. 9.
27. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., and Popov P.V.* Incomplete noise-induced synchronization of spatially extended systems // Phys. Rev. E. 2008. Vol. 77, № 2. P. 036215.
28. *Короновский А.А., Попов П.В., Храмов А.Е.* Индуцированная шумом синхронизация пространственно-временного хаоса в уравнении Гинзбурга–Ландау // ЖЭТФ. 2008. Т. 134, № 5(11). С. 1048.
29. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., and Moskalenko O.I.* Are generalized synchronization and noise-induced synchronization identical types of synchronous behavior of chaotic oscillators? // Phys. Lett. A. 2006. Vol. 354, № 5–6. P. 423.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию
После доработки*

*15.03.2011
23.04.2011*

EFFECT OF NOISE ON GENERALIZED SYNCHRONIZATION OF SPATIALLY EXTENDED SYSTEMS DESCRIBED BY GINZBURG–LANDAU EQUATIONS

A.A. Koronovskii, O.I. Moskalenko, A.E. Hramov

Effect of noise on generalized synchronization in spatially extended systems described by Ginzburg–Landau equations being in the spatio-temporal chaotic regime is studied. It is shown, that noise does not affect the synchronous regime threshold in such systems. The reasons of the revealed particularity have been explained by means of the modified system approach and confirmed by the results of numerical simulation.

Keywords: Spatially extended systems, Ginzburg–Landau equations, spatio-temporal chaos, generalized synchronization, noise.

Короновский Алексей Александрович – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995), доктор физико-математических наук (2007), профессор кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой деятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. Автор ряда статей в центральной печати, а также монографий (в соавторстве) «Нелинейная динамика в действии» и «Непрерывный вейвлетный анализ», вышедших в Издательстве ГосУНЦ «Колледж», двухтомной монографии «Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот» (М.: Физматлит, 2009, под редакцией А.А. Короновского, А.А. Кураева, Д.И. Трубецкова и А.Е. Храмова), монографии «Моделирование нелинейной динамики глобальных процессов» (М.: Изд-во МГУ, 2010, под редакцией С.И. Ильина и Д.И. Трубецкова) и др.



410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: alkor@nonlin.sgu.ru

Москаленко Ольга Игоревна – родилась в Саратове (1984). Окончила факультет нелинейных процессов Саратовского госуниверситета (2006), кандидат физико-математических наук (2008). Доцент кафедры физики открытых систем СГУ, старший научный сотрудник лаборатории физики нелинейных явлений отделения физики нелинейных систем НИИ Естественных наук СГУ. Область научных интересов – исследование классической и хаотической синхронизации в нелинейных системах; применение непрерывного вейвлет- и фурье-анализа к проблеме хаотической синхронизации в системах с малым числом степеней свободы и пространственно-распределенных средах; изучение обобщенной синхронизации в системах с однонаправленной и взаимной связью и ее возможных приложений; влияние шума на установление синхронных режимов; применение хаотической синхронизации для скрытой передачи информации; исследование кооперативных явлений в сетях со сложной топологией; анализ хаотической синхронизации в сложных сетях. Автор более 40 статей в центральных реферируемых отечественных и зарубежных научных журналах.



410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: moskalenko@nonlin.sgu.ru

Храмов Александр Евгеньевич – окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1996). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1999) и доктора (2006) физ.-мат. наук. Профессор, заместитель заведующего кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов – радиопизика в той ее части, которая связана со взаимодействием свободных электронов с электромагнитными полями, нелинейная динамика распределенных активных сред, методы анализа и моделирования динамических систем. Опубликовал (в соавторстве) книгу «Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков» (Т. 1, М.: Физматлит, 2003; Т. 2, М.: Физматлит, 2004), монографию «Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения» (Москва: Наука, Физматлит, 2003), двухтомную коллективную монографию «Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот» (М.: Физматлит, 2009), коллективную монографию «Моделирование нелинейной динамики глобальных процессов» (М.: Изд-во МГУ, 2010) и др.



410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: aeh@nonlin.sgu.ru



ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ КОЛЬЦА ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ СИНХРОНИЗАЦИИ ВРЕМЕННЫХ МАСШТАБОВ*

М.О. Журавлев, А.А. Короновский, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов

В работе исследуется перемежающееся поведение, наблюдающееся на границе синхронных временных масштабов взаимодействующих хаотических осцилляторов, находящихся в синхронном режиме. Режим синхронизации временных масштабов характеризуется тем, что система демонстрирует синхронную динамику в определенном диапазоне временных масштабов, в то время как процессы на других масштабах остаются асинхронными. На основе анализа статистических характеристик перемежающегося поведения (распределений длительностей ламинарных участков поведения, зависимости средней длительности ламинарного участка от параметра надкритичности) установлено, что выявленный тип перемежающегося поведения является перемежаемостью кольца.

Ключевые слова: Синхронизация временных масштабов, непрерывное вейвлетное преобразование, перемежаемость кольца.

Введение

Перемежаемость является фундаментальным явлением, наблюдаемым в нелинейных системах. В частности, одним из универсальных сценариев перехода от периодических движений к хаотическим является переход через перемежаемость [1, 2]. В настоящее время существует определенная классификация перемежающегося поведения, в частности, выделяют перемежаемости типов I–III [3, 4], «on-off»-перемежаемость [5–7], перемежаемость «игольного ушка» [8], перемежаемость кольца [9] и др. Все эти типы перемежаемости наблюдаются в различных физических и биологических системах [10, 11].

Особый интерес в исследовании перемежающегося поведения нелинейных систем связан с изучением состояний, которые реализуются на границе установления синхронных режимов. В настоящее время существует большое количество работ (см., например [9, 12]), в которых установлено, что переход от синхронного режима

*Статья написана по материалам доклада на IX Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, Россия, 4–9 октября, 2010.

к асинхронному осуществляется, как правило, через перемежающееся поведение, наблюдаемое вблизи границы синхронизации [10, 13].

В настоящее время выявлено несколько типов синхронного поведения однонаправленно и взаимно связанных динамических систем, таких как фазовая синхронизация [14], обобщенная синхронизация [15, 16], синхронизация с запаздыванием [10], полная синхронизация [17], синхронизация временных масштабов [18, 19] и др., каждый из которых обладает своими специфическими особенностями и методами диагностики, причем каждому из типов синхронизации предшествует свой определенный тип перемежаемости.

Из всех известных типов синхронного поведения особый интерес для изучения представляет синхронизация временных масштабов [18, 19]. Этот тип синхронной хаотической динамики позволяет рассматривать с единых позиций все типы хаотической синхронизации, перечисленные выше. Более того, он может быть диагностирован даже в тех случаях, когда детектирование других типов синхронного поведения оказывается проблематичным (например, диагностирование режима фазовой хаотической синхронизации в случае фазово-некогерентного аттрактора [20]), что делает его широко распространенным и важным в различных практических приложениях. В то же самое время, изучение перемежающегося поведения на границе синхронизации временных масштабов до настоящего момента не проводилось, хотя результаты такого исследования позволили бы более глубоко понять механизмы установления этого типа хаотической синхронизации в связанных системах.

В настоящей работе рассматривается поведение двух однонаправленно связанных систем Ресслера на границе синхронных и асинхронных временных масштабов. При изменении масштаба наблюдения в этом случае происходит смена наблюдаемого типа поведения с синхронного на асинхронный (или наоборот). В работе рассмотрен вопрос о том, каким закономерностям подчиняется такая смена поведения, что обеспечивает понимание механизмов перехода от синхронного поведения к асинхронному в случае синхронизации временных масштабов.

Структура настоящей работы следующая: в разделе 1 кратко изложена концепция, лежащая в основе рассмотрения синхронного поведения связанных систем на различных временных масштабах и вводятся необходимые понятия; раздел 2 посвящен описанию модельной системы, для которой проводились исследования; результаты исследований подробно описаны в разделе 3; основные выводы сформулированы в Заключение.

1. Синхронизация временных масштабов

Как известно, нелинейные динамические системы часто демонстрируют хаотическую динамику, которая характеризуется сплошным спектром. Сплошной спектр является отражением того, что в поведении системы присутствуют разномасштабные колебания, поэтому, чтобы достаточно полно описать динамику подобных систем, необходимо осуществлять анализ того, что происходит на разных временных масштабах (на разных частотах). При взаимодействии осцилляторов, характеризующихся сложной динамикой, возможна синхронизация различных колебательных паттернов, при этом синхронное поведение в одном диапазоне частот может сопро-

воздаваться асинхронной динамикой в других частотных диапазонах. Подобный эффект проявляется, например, в последовательной синхронизации спектральных компонент фурье-спектров взаимодействующих систем при переходе от режима фазовой к режиму полной хаотической синхронизации с увеличением параметра связи [21].

Для описания подобных типов поведения взаимодействующих систем с хаотической динамикой используется подход, названный синхронизацией временных масштабов. Концепция синхронизации временных масштабов [18] основана на рассмотрении динамики систем на различных временных масштабах s и введении непрерывного множества фаз исследуемых сигналов связанных хаотических систем. Выбирая определенный фиксированный временной масштаб s , можно рассматривать колебательные процессы, происходящие в системе на данном временном масштабе. Синхронизация временных масштабов означает, что на определенном интервале временных масштабов $[s_l; s_h]$, вводимых в рассмотрение с помощью непрерывного вейвлетного преобразования

$$W(s, t_0) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t - t_0}{s} \right) dt \quad (1)$$

с материнским вейвлетом Морле

$$\psi(\eta) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \exp(j\Omega_0\eta) \exp\left(\frac{-\eta^2}{2}\right), \quad (2)$$

где $\Omega_0 = 2\pi$, наблюдается синхронная динамика. При этом колебательные процессы в этих системах, характеризующиеся другими временными масштабами, остаются несинхронизованными. Вейвлетная поверхность

$$W(s, t_0) = |W(s, t_0)| e^{j\varphi_s(t_0)} \quad (3)$$

характеризует поведение системы на каждом временном масштабе s в любой момент времени t_0 . Величина $|W(s, t_0)|$ характеризует интенсивность процессов, происходящих на соответствующем временном масштабе s в момент времени t_0 . Как правило, в рассмотрение также вводят мгновенное

$$E(s, t_0) = |W(s, t_0)|^2 \quad (4)$$

и интегральное

$$\langle E(s) \rangle = \int |W(s, t_0)|^2 dt_0 \quad (5)$$

распределения энергии по временным масштабам.

Следует отметить, что при использовании вейвлетного преобразования (1) для каждого временного масштаба s естественным образом определена непрерывная фаза $\varphi(s, t) = \arg W(s, t)$. Иными словами, оказывается возможным характеризовать поведение процесса, соответствующего временному масштабу s с помощью ассоциированной с ним фазы $\varphi(s, t)$, являющейся непрерывной функцией временного масштаба s и времени t .

Для двух связанных хаотических осцилляторов $x_{1,2}(t)$ имеет место режим синхронизации временных масштабов, если существует такой интервал временных масштабов $s_l \leq s \leq s_h$, для которого выполняется условие захвата фаз

$$|\Delta\varphi(s, t)| = |\varphi_1(s, t) - \varphi_2(s, t)| < \text{const} \quad (6)$$

и условие ненулевой энергии (доля энергии вейвлетного спектра, приходящаяся на данный интервал временных масштабов, оказывается отличной от нуля)

$$E_{\text{snhr}} = \int_{s_l}^{s_h} \langle |W(s, t)|^2 \rangle ds > 0, \quad (7)$$

где $\langle \cdot \rangle$ означает усреднение по времени.

Все другие типы синхронного поведения хаотических осцилляторов (такие как фазовая синхронизация, обобщенная синхронизация, синхронизация с запаздыванием) могут рассматриваться как частные случаи синхронизации временных масштабов [18, 19]. Действительно, в случае классической синхронизации периодических осцилляторов синхронное поведение будет наблюдаться на всех временных масштабах (в силу определения вейвлетного преобразования (1), временного масштаба s , ассоциированной с ним непрерывной фазы $\varphi(s, t)$ и самого определения режима синхронизации временных масштабов). В случае хаотических колебаний ситуация оказывается сложнее. Тем не менее, если два хаотических осциллятора находятся в одном из вышеперечисленных режимов хаотической синхронизации, то для временных реализаций $x_{1,2}(t)$, порождаемых этими осцилляторами, обязательно существует диапазон синхронных временных масштабов (см. подробнее [18, 19]). Для данного диапазона будет выполняться условие захвата фаз (6) и ненулевой энергии (7) и, соответственно, будет реализоваться режим синхронизации временных масштабов. Иными словами, режимы фазовой синхронизации, обобщенной синхронизации, синхронизации с запаздыванием и полной синхронизации являются частными случаями синхронизации временных масштабов. Для того чтобы диагностировать режим синхронизации временных масштабов, необходимо проверить выполнение условий (6) и (7) для некоторого диапазона временных масштабов.

В то же самое время, на временных масштабах s , лежащих вне указанного диапазона $[s_l; s_h]$, условие захвата фаз (6) выполняться не будет, поскольку процессы на этих временных масштабах остаются асинхронными. Как следствие, на этих масштабах наблюдения интервалы времени, характеризующиеся синхронной динамикой, будут прерываться участками, где разность фаз достаточно резко изменяется на величину порядка 2π . Иными словами, на таких временных масштабах будет наблюдаться перемежающееся поведение, причем временной масштаб s , на котором осуществляется наблюдение, выступает в качестве критического параметра, от которого зависят характеристики перемежаемости. По мере приближения масштаба наблюдения s к диапазону синхронных временных масштабов $[s_l; s_h]$ длительность участков ламинарного поведения будет увеличиваться (и стремиться к бесконечности при $s \rightarrow s_l - 0$ и $s \rightarrow s_h + 0$), в то время как количество турбулентных участков будет уменьшаться (и, соответственно, стремиться к нулю при $s \rightarrow s_l - 0$ и $s \rightarrow s_h + 0$).

Наличие перемежающегося поведения на границе синхронных временных масштабов связанных хаотических осцилляторов в научной литературе ранее не описывалось. В ходе проведенных исследований впервые был рассмотрен вопрос о том, к какому типу перемежаемости следует отнести данный тип динамики, и на основании численного моделирования поведения двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов Ресслера было установлено, что в этом случае в системе реализуется перемежаемость кольца [9].

2. Система двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов Ресслера

В качестве модельного объекта исследований была выбрана система связанных осцилляторов Ресслера

$$\begin{aligned}\dot{x}_d &= -\omega_d y_d - z_d, \\ \dot{y}_d &= \omega_d x_d + a y_d, \\ \dot{z}_d &= p + z_d(x_d - c),\end{aligned}\tag{8}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_r &= -\omega_r y_r - z_r + \varepsilon(x_d - x_r), \\ \dot{y}_r &= \omega_r x_r + a y_r, \\ \dot{z}_r &= p + z_r(x_r - c),\end{aligned}\tag{9}$$

где система (8) является ведущей, а система (9) – ведомой. Значения управляющих параметров были выбраны $a = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10.0$. Параметры $\omega_d = 0.93$ и $\omega_r = 0.95$ отвечают собственным частотам ведущей и ведомой подсистем, при указанных значениях управляющих параметров оба осциллятора в автономном режиме демонстрируют хаотические колебания.

При определенных значениях управляющих параметров в данной системе возникает режим фазовой хаотической синхронизации. Как уже было отмечено выше, фазовая хаотическая синхронизация является одним из частных случаев синхронизации временных масштабов, поэтому в случае режима фазовой синхронизации в рассматриваемой системе также будет диагностироваться режим синхронизации временных масштабов. При этом наряду с синхронными будут существовать и асинхронные временные масштабы, соответствующие несинхронизованным колебательным процессам, для которых не выполняются условия (6) и (7). При уменьшении параметра связи между осцилляторами ширина диапазона синхронных временных масштабов уменьшается и при значениях параметра связи меньше критического ε_{PS} , соответствующего границе режима фазовой хаотической синхронизации, на всех временных масштабах наблюдается асинхронная динамика, что означает, что все процессы во взаимодействующих системах вышли из синхронизма.

Для асинхронных временных масштабов зависимость $\Delta\varphi(s, t)$ можно разделить на участки, где разность фаз оказывается ограниченной в пределах 2π (ламинарная динамика), и участки, на которых наблюдается скачок фазы (турбулентная динамика) и, соответственно, в системе реализуется режим перемежающегося поведения. Поскольку каждый тип перемежающегося поведения характеризуется свои-

ми законами распределения длительностей ламинарных фаз и зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности [9,22,23], на основании анализа данных характеристик, как правило, можно делать вывод о типе перемежающегося поведения, наблюдающегося в том или ином случае.

3. Перемежаемость кольца для различных временных масштабов

Изучим теперь количественные характеристики перехода от синхронной динамики к асинхронной при изменении временного масштаба наблюдения s , выступающего в качестве критического параметра.

Для определения типа перемежающегося поведения, реализующегося в исследуемой системе при переходе от синхронной динамики к асинхронной (или наоборот), рассматривалась зависимость средней длительности ламинарных участков поведения $\langle l \rangle$ от параметра надкритичности. Как уже отмечалось выше, в качестве параметра надкритичности использовалась величина $(s_c - s)$, где s_c – значение временного масштаба, разграничивающего синхронные и асинхронные временные масштабы. Для выделения участков ламинарного и турбулентного поведения в анализируемых временных реализациях использовался подход, описанный в [24].

Изучив характеристики перемежающегося поведения, такие как распределение длительностей ламинарных фаз при фиксированном временном масштабе наблюдения, зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности, вероятность детектирования турбулентной фазы на конечном временном интервале наблюдения, можно сделать вывод, что наблюдаемый тип перемежающегося поведения, реализующийся вблизи границы синхронных временных масштабов хаотических осцилляторов, находящихся в режиме синхронизации временных масштабов, классифицируется как перемежаемость кольца [9].

Перемежаемость кольца, которая является одним из возможных типов перемежающегося поведения, была впервые обнаружена при разрушении режима хаотической фазовой синхронизации для случая больших расстройек парциальных частот взаимодействующих осцилляторов. Для данного типа перемежаемости была получена аналитическая зависимость средней длительности ламинарных (синхронных) фаз от параметра надкритичности, а также закон распределения длительностей ламинарных фаз при фиксированном значении параметра надкритичности [9]. С помощью сопоставления численно полученных данных с этими аналитическими зависимостями можно идентифицировать перемежаемость кольца точно так же, как это делается для других типов перемежающегося поведения. Еще одним удобным способом идентификации перемежаемости кольца является рассмотрение поведения связанных взаимодействующих систем на вращающейся плоскости [9], что позволяет визуализировать механизм возникновения асинхронных участков динамики при данном типе перемежающегося поведения. Именно визуальное представление поведения системы на вращающейся плоскости дало название данному типу перемежаемости.

Перемежаемость кольца характеризуется экспоненциальным распределением длительностей ламинарных фаз l

$$N(l) \sim \exp(-kl), \quad k = \text{const}, \quad (10)$$

причем зависимость средней длительности $\langle l \rangle$ ламинарных фаз от критического параметра s подчиняется закону

$$\langle l(s) \rangle = T - \frac{T}{\ln(1 - p(s))}, \quad (11)$$

где $T = \langle l(s_t) \rangle$ является средней длительностью ламинарной фазы для временного масштаба наблюдения s_t , ограничивающего область перемежаемости кольца, $p(s)$ – вероятность детектировать фазовый проскок на временном интервале наблюдения длиной T на временном масштабе s . Как правило, зависимость вероятности p от критического параметра близка к линейной и, соответственно, для $s < s_t$ соотношение (11) может быть переписано в виде

$$\langle l(s) \rangle \simeq T \left(1 - \ln^{-1} \left(\frac{s - s_t}{s_t - s_t} \right) \right). \quad (12)$$

Временной масштаб s_t соответствует нижней границе линейной зависимости $p(s)$ и может быть определен из условия $p(s_t) = 1$, при этом теоретическое соотношение (12) является справедливым только в диапазоне временных масштабов $s_t < s < s_l$. Аналогичное соотношение может быть легко получено для $s > s_h$, в этом случае

$$\langle l(s) \rangle \simeq T \left(1 - \ln^{-1} \left(\frac{s_t - s}{s_t - s_h} \right) \right). \quad (13)$$

На рис. 1, *a* показана найденная зависимость средней длительности ламинарных участков поведения $\langle l \rangle$ от временного масштаба при фиксированном значении параметра связи $\varepsilon = 0.085$. На этом же рисунке приведена теоретическая зависимость средней длительности ламинарных участков $\langle l \rangle$ от временного мас-

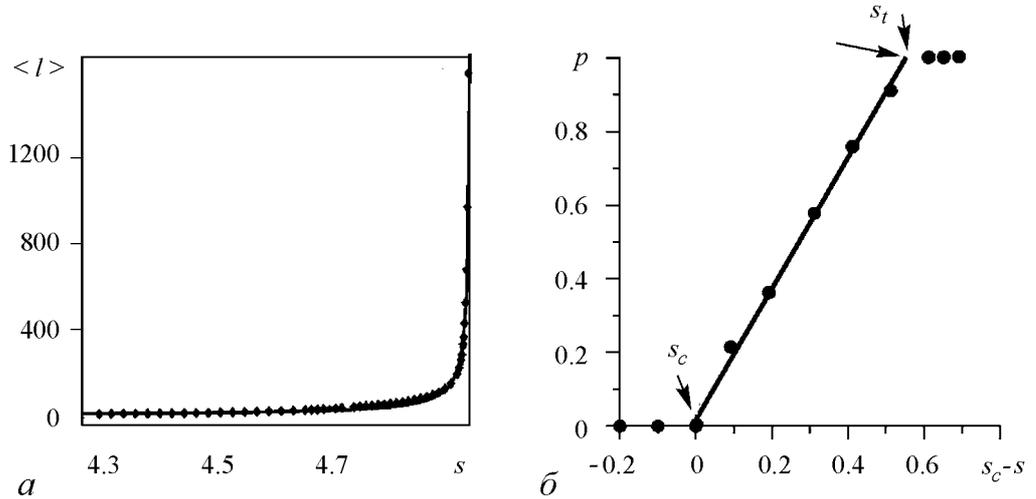


Рис. 1. *a* – зависимость средней длительности ламинарных участков поведения от временного масштаба s (показана точками) и аппроксимирующая ее кривая (12) (показана сплошной линией), $s_c = 4.9919$, $s_t = 4.34$, $T = 8.0$; *b* – вероятность детектирования турбулентного участка поведения на временном интервале длительностью T в зависимости от параметра надкритичности

штаба (12), характерная для перемежаемости кольца. Из рисунка видно, что численные данные, показанные точками, находятся в очень хорошем соответствии с теоретической зависимостью (12).

Еще одной важной характеристикой перемежающегося поведения, позволяющей в ряде случаев установить тип перемежаемости, является распределение длительностей участков ламинарного поведения при фиксированных значениях управляющих параметров. В ходе исследований было установлено, что распределение длительностей ламинарных участков поведения при фиксированном значении параметра связи на разных временных масштабах является экспоненциальным (рис. 2), что также позволяет говорить о наличии перемежающегося поведения типа кольца. Наконец, кроме вышеописанных характеристик, для описания перемежаемости кольца можно использовать также такую характеристику, как вероятность детектирования турбулентного участка поведения на временном интервале длительностью T в зависимости от параметра надкритичности. Данная вероятность может быть оценена по временной реализации длины L для любого временного масштаба по формуле

$$p = \frac{NT}{L}, \quad (14)$$

где L – длина временного ряда, на котором производится исследование, N – общее число участков ламинарного поведения на всей длине L . На рис. 1, б представлена зависимость вероятности p от параметра надкритичности $(s_c - s)$. Видно, что данная зависимость близка к линейной, что, опять-таки, свойственно для перемежаемости кольца и хорошо согласуется с известными результатами [9].

Таким образом, на основании проведенных исследований можно сделать вывод о том, что наблюдаемый тип перемежающегося поведения, реализующегося вблизи границы синхронных временных масштабов однонаправленно связанных хаотических осцилляторов Ресслера (8)–(9), находящихся в режиме синхронизации временных масштабов, классифицируется как перемежаемость кольца.

Еще одним доказательством того, что в данном случае наблюдается именно перемежаемость кольца, является также тот факт, что в рассматриваемом случае возникновение фазовых проскоков на асинхронных временных масштабах s для рассматриваемых систем Ресслера (8)–(9) обусловлено механизмом, реализующимся при перемежаемости кольца [9].

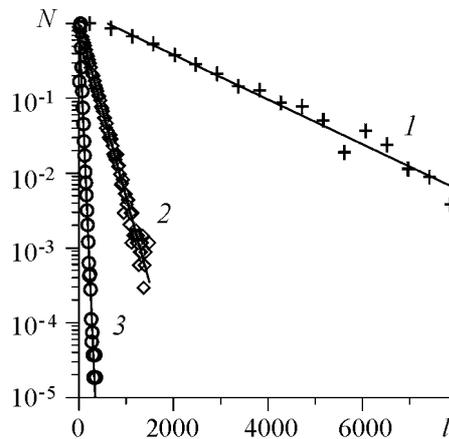


Рис. 2. Распределения длительностей ламинарных участков поведения $N(l)$ при различных значениях временного масштаба s , нормированные на максимальное значение, и соответствующие им экспоненциальные аппроксимации (10), показанные сплошными линиями: 1 – временной масштаб $s = 4.9885$, численно полученные точки показаны символами «+»; 2 – $s = 4.9700$ (\diamond); 3 – $s = 4.7200$ (\circ). Ось ординат приведена в логарифмическом масштабе. $\varepsilon = 0.085$

Граница возникновения перемежающегося поведения в случае перемежаемости кольца связана с тем, что в определенные моменты времени проекция фазовой траектории, соответствующая ведомой системе, рассматриваемая на фазовой плоскости, вращающейся вокруг начала координат в соответствии с состоянием ведущей системы, охватывает начало координат (см. более подробно [9]). В этом случае фазовые проскоки для зависимости разности фаз хаотических сигналов от времени $\Delta\varphi(t)$ наблюдаются всякий раз, когда происходит охват фазовой траекторией начала координат.

Тот же самый механизм имеет место и в случае перемежаемости вблизи границы синхронных временных масштабов для хаотических осцилляторов, находящихся в режиме синхронизации временных масштабов. Если в качестве переменных, характеризующих состояние систем, рассматривать

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \operatorname{Re} W_{1,2}(s, t), \\ y_{1,2} &= \operatorname{Im} W_{1,2}(s, t), \end{aligned} \quad (15)$$

то на вращающейся плоскости, введенной в рассмотрение в соответствии с [9],

$$\begin{aligned} x' &= x_2 \cos \varphi_1(s, t) + y_2 \sin \varphi_1(s, t), \\ y' &= -x_2 \sin \varphi_1(s, t) + y_2 \cos \varphi_1(s, t), \end{aligned} \quad (16)$$

отчетливо виден механизм, приводящий к возникновению перемежающегося поведения. В диапазоне временных масштабов, соответствующих перемежающемуся поведению, траектория на вращающейся плоскости охватывает начало координат (рис. 3), причем граница синхронных временных масштабов s_l соответствует ситуации, когда траектория второй системы на плоскости $(x'; y')$ начинает охватывать точку $(0; 0)$.

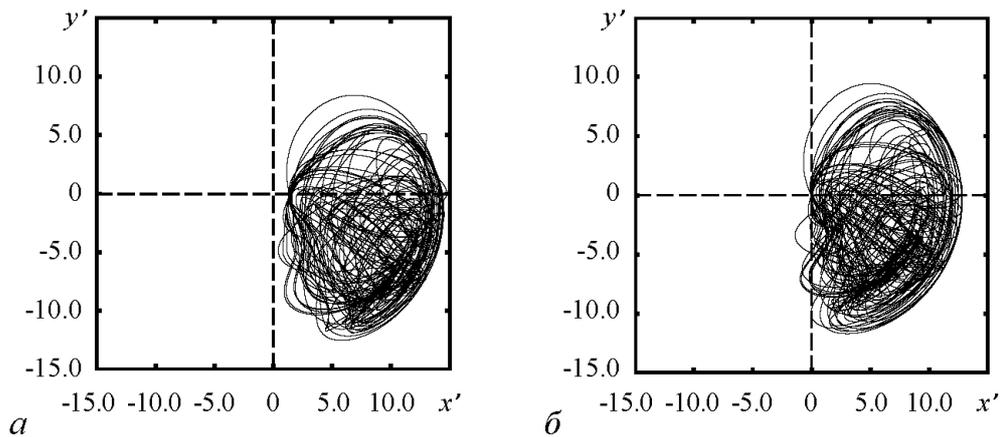


Рис. 3. Траектория ведомой системы на вращающейся плоскости (x', y') для однонаправленно связанных систем Ресслера. Временной масштаб, на котором осуществляется наблюдение: $s = 5.2$ – синхронная динамика (а); $s = 4.985$ – перемежающееся поведение (б). Значение параметра связи $\varepsilon = 0.085$

Для того чтобы проверить корректность сделанных выводов, аналогичное исследование было проведено для другого значения параметра связи, $\varepsilon = 0.045$, диапазон синхронных временных масштабов при этом был ограничен временными масштабами $s_l = 4.99$ и $s_h = 8.25$. Распределение длительностей ламинарных фаз для этого значения параметра связи показано на рис. 4. Точно так же, как и в предыдущем случае (при значении параметра связи $\varepsilon = 0.085$), видно, что распределение длительностей участков ламинарного поведения подчиняется экспоненциальному закону (10), характерному для перемежаемости кольца, при этом имеет место очень хорошее соответствие численно полученных данных и теоретических кривых. Зависимость средней длительности участков ламинарного поведения в зависимости от критического параметра также находится в очень хорошем соответствии с теоретической кривой (12), характеризующей перемежаемость кольца (рис. 5, *a*). Более того, вероятность обнаружить турбулентный участок поведения (проскок фазы) на интервале наблюдения длительностью T для временного масштаба s тоже оказывается близка к линейной (рис. 5, *б*).

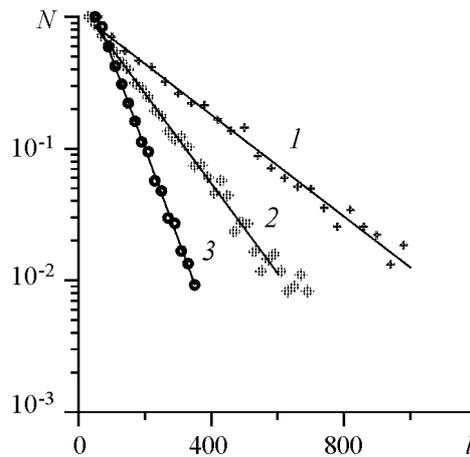


Рис. 4. Распределение длительностей ламинарных фаз для трех различных значений временных масштабов наблюдения s (линия 1 и точки + соответствуют временному масштабу $s_1 = 4.98$, линия 2 и точки \diamond – $s_2 = 4.94$, линия 3 и точки \circ – $s_3 = 4.92$) и соответствующие им экспоненциальные зависимости (10), показанные сплошными линиями. Ось ординат выбрана в логарифмическом масштабе, все распределения нормированы на максимальное значение

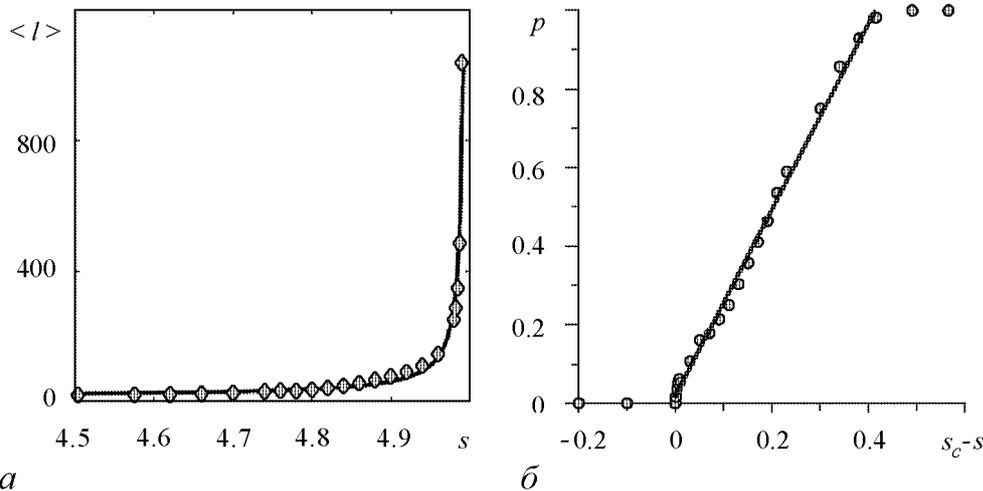


Рис. 5. *a* – зависимость средней длительности ламинарных фаз $\langle l \rangle$ от временного масштаба наблюдения s , полученная численно для двух однонаправленно связанных систем Ресслера, и соответствующая ей теоретическая кривая (12), показанная сплошной линией ($s_t = 4.45$, $T = 8.00$); *б* – зависимость вероятности детектировать фазовый проскок на интервале наблюдения длительностью T для временного масштаба s

Заклучение

В данной работе показано, что на асинхронных временных масштабах поведение систем, демонстрирующих явление синхронизации временных масштабов, является перемежающимся. Режим синхронизации временных масштабов характеризуется тем, что система демонстрирует синхронную динамику в определенном диапазоне временных масштабов, в то время как процессы на других масштабах остаются асинхронными. Для определения типа перемежаемости проанализирована зависимость средней длительности участков ламинарного поведения от параметра надкритичности для различных значений параметра связи между осцилляторами. Установлено, что распределение длительностей ламинарных фаз при фиксированном значении параметра связи на разных временных масштабах подчиняется экспоненциальному закону (10), а вероятность детектирования турбулентного участка на временном интервале длительностью T , в зависимости от параметра надкритичности, близка к линейной.

Суммируя все вышеизложенное, можно сделать вывод, что для однонаправленно связанных систем Рёсслера, тип поведения, предшествующий синхронизации временных масштабов, является перемежаемостью кольца. Основываясь на полученных результатах, можно ожидать, что данный тип поведения будет характерен для широкого круга хаотических систем, демонстрирующих режим синхронизации временных масштабов.

Работа выполнена при поддержке федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы», Президентской программы поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-3407.2010.2) и фонда некоммерческих программ «Династия».

Библиографический список

1. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991.
2. Manneville P., Pomeau Y. Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems // Physica D. 1980. Vol. 1, № 2. P. 167.
3. Bergé P., Pomeau Y., Vidal C. L'Ordre Dans Le Chaos. Hermann, Paris, 1988.
4. Dubois M., Rubio M., Bergé P. Experimental evidence of intermitencies associated with a subharmonic bifurcation // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 51. P. 1446.
5. Platt N., Spiegel E.A., Tresser C. On-off intermittency: A mechanism for bursting // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 70, № 3. P. 279.
6. Heagy J.F., Platt N., Hammel S.M. Characterization of on-off intermittency // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 49, № 2. P. 1140.
7. Lai Y.-C. Symmetry-breaking bifurcation with on-off intermittency in chaotic dynamical systems // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53, № 5. R4267.
8. Pikovsky A.S., Osipov G.V., Rosenblum M.G. et al. Attractor-repeller collision and eyelet intermittency at the transition to phase synchronization // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 79, № 1. P. 47.

9. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Boccaletti S.* Ring intermittency in coupled chaotic oscillators at the boundary of phase synchronization // *Phys. Rev. Lett.* 2006. Vol. 97. P. 114101.
10. *Rosenblum M. G., Pikovsky A. S., Kurths J.* From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78, № 22. Pp. 4193.
11. *Porcher R., Thomas G.* Estimating Lyapunov exponents in biomedical time series // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 64, № 1. P. 010902(R).
12. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* Intermittent generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic oscillators // *Europhysics Lett.* 2005. Vol. 70, № 2. P. 169.
13. *Boccaletti S., Valladares D.L.* Characterization of intermittent lag synchronization // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 62, № 5. P. 7497.
14. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76, № 11. P. 1804.
15. *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.* Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 51, № 2. P. 980.
16. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* Generalized synchronization: a modified system approach // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 71, № 6. P. 067201.
17. *Pecora L.M., Carroll T.L.* Synchronization in chaotic systems // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 64, № 8. P. 821.
18. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* An approach to chaotic synchronization // *Chaos.* 2004. Vol. 14, № 3. P. 603.
19. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* Time scale synchronization of chaotic oscillators // *Physica D.* 2005. Vol. 206, № 3–4. P. 252–264.
20. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* Locking-based frequency measurement and synchronization of chaotic oscillators with complex dynamics // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 89, № 26. P. 264102.
21. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* Новый тип универсальности при хаотической синхронизации динамических систем // *Письма в ЖЭТФ.* 2004. Т. 80, № 1. С. 25.
22. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K. et al.* Length distribution of laminar phases for type-I intermittency in the presence of noise // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 76, № 2. P. 026206.
23. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K.* Two types of phase synchronization destruction // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 75, № 3. P. 036205.
24. *Журавлев М. О., Куровская М.К., Москаленко О.И.* Метод выделения ламинарных и турбулентных фаз в перемежающихся временных реализациях систем, находящихся вблизи границы фазовой синхронизации // *Письма в ЖТФ.* 2010. Т. 36, № 10. С 31.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию
После доработки*

*12.11.2010
23.06.2011*

RING INTERMITTENCY NEAR THE BOUNDARY OF TIME SCALE SYNCHRONIZATION

M.O. Zhuravlev, A.A. Koronovskii, O.I. Moskalenko, A.E. Hramov

In this paper the intermittent behavior taking place near the boundary of the synchronous time scales of interacted chaotic oscillators being in the synchronous regime is studied. At the regime of time-scale synchronization the system demonstrates synchronous dynamics in a certain range of the time scales whereas the processes on the other time scales remain asynchronous. On the basis of analysis of statistical characteristics of the intermittent behavior, i.e. the laminar phase length distributions and dependence of the mean length of the laminar phases on the criticality parameter, the revealed type of the intermittent behavior is shown to be the ring intermittency.

Keywords: Time scale synchronization, continuous wavelet transform, ring intermittency.



Журавлев Максим Олегович – родился в Бресте (1988), окончил Саратовский государственный университет (2011). Аспирант кафедры физики открытых систем СГУ., лаборант-исследователь в лаборатории физики нелинейных явлений ОФНС НИИ ЕН СГУ. Автор нескольких статей в центральных реферируемых журналах.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: pifos@bk.ru



КАЧЕСТВЕННО-ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ВОЗМОЖНЫХ РЕЖИМОВ СИНХРОННОГО ПОВЕДЕНИЯ ДВУХ ИНЕРЦИОННО СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ

Е.В. Панкратова, В.Н. Белых

В работе рассматривается механическая система, состоящая из двух управляемых грузов, прикрепленных к подвижной платформе при помощи пружин. Управление движением каждого из грузов выбрано так, что их колебания в отсутствие взаимодействия описываются уравнениями ван дер Поля. Показано, что в рассматриваемой системе могут устанавливаться различные режимы синхронного поведения взаимосвязанных подсистем: синфазная (полная), противофазная и фазовая синхронизация. Методами качественно-численного исследования получены границы областей устойчивости аттракторов, соответствующих этим режимам.

Ключевые слова: Синхронизация, аттракторы, уравнения ван дер Поля, управление.

Введение

Изучение режимов синхронного поведения различных искусственно созданных или природных объектов является одним из наиболее актуальных направлений современной нелинейной динамики. Первые исследования в этой области связывают с экспериментами голландского ученого Христиана Гюйгенса, который, наблюдая за поведением двух висящих на общей опоре маятниковых часов, заметил, что «оба маятника двигались всегда в противоположные стороны, и их колебания так точно совпадали, что никогда ни на сколько не расходились» [1, 2]. Очевидно, что в XVII веке ученый не мог выполнить количественный анализ наблюдаемого в эксперименте поведения маятников. Христиан Гюйгенс дал лишь качественное объяснение явления согласованности ритмов двух часов, названного позднее эффектом *взаимной синхронизации*.

В связи с развитием науки и техники и, соответственно, с появлением возможности проведения более полного анализа, проблема Гюйгенса о синхронизации взаимодействующих систем в XX столетии вновь привлекает к себе интерес исследователей. Одной из первых попыток дать математическое объяснение того, почему

именно противофазные колебания маятников наблюдались в системе Гюйгенса, была работа Д. Кортвега, где автором был проведен линейный анализ системы с тремя степенями свободы для случая малых колебаний без учета затухания и подкачки [3]. Позднее, рассматривая квазисинусоидальные колебания маятников, моделируемые осцилляторами ван дер Поля, И.И. Блехман обнаружил и объяснил существование не только противофазной, но и полной (синфазной) синхронизации маятников [4]. Оба режима синхронных колебаний маятников наблюдались им и в лабораторной установке.

Как показывают многочисленные публикации в научных журналах, интерес к проблеме синхронизации метрономов не ослабевает до сих пор [5–9]. Так, недавние попытки воспроизвести эксперимент по задаче голландского ученого показали, что в системе Гюйгенса возможны и другие типы поведения. С одной стороны, в работе М. Беннетта и соавторов [6] экспериментально и теоретически (на основе анализа отображения Пуанкаре) было показано, что увеличение массы маятников по отношению к массе рамы, на которой они закреплены, может приводить к остановке одного или обоих маятников (эффект, названный авторами как «*beating death*»). С другой стороны, из экспериментов по изучению поведения управляемых маятников, проведенных в лаборатории Х. Неймейера [7], было установлено, что при некоторых параметрах в системе могут наблюдаться сложные (хаотические) колебания.

В данной работе проводится исследование системы дифференциальных уравнений, моделирующей колебания двух управляемых грузов, закрепленных на подвижной платформе. Эта математическая модель, как было показано в [10], позволяет эффективно исследовать особенности поведения экспериментальной установки, используемой в лаборатории Х. Неймейера [7]. В частности, в работах [10, 11] было проведено изучение влияния параметров системы и параметров управления на характер предельных множеств, к которым стягиваются фазовые траектории. Было обнаружено, что в фазовом пространстве системы возможно сосуществование нескольких различных аттракторов, среди которых могут быть и хаотические. Для случая мультистабильного характера поведения системы было проведено исследование особенностей усложнения бассейнов притяжения аттракторов при изменении параметров управления [10]. Результаты, приведенные в работах [10, 11], позволяют продемонстрировать разнообразие притягивающих множеств, наблюдающихся в рассматриваемой здесь системе. В то же время, с точки зрения различных приложений, особый интерес вызывает задача поиска режимов синхронного поведения связанных подсистем, в частности, областей параметров, при которых начальные условия не оказывают влияния на характер колебаний в системе. В настоящей работе решение этой проблемы проводится на основе использования методов качественно-численного анализа.

Математическое описание рассматриваемой модели

Рассмотрим систему, состоящую из двух одинаковых грузов массы m , прикрепленных к платформе пружинами с жесткостью k_m (рис. 1).

Пусть оба груза подвержены влиянию внешнего воздействия, обеспечивающего их незатухающие колебания. Это внешнее воздействие может быть рассмотрено как управление f . Колебания платформы массы M , прикрепленной к вертикальной

неподвижной опоре пружиной с жесткостью k , частично могут гаситься за счет демпфера с коэффициентом вязкого трения d . Уравнения для такой системы могут быть записаны в следующем виде:

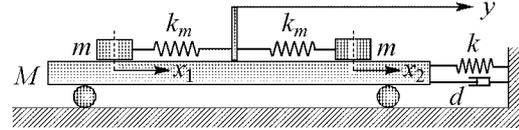


Рис. 1. Схематическое изображение рассматриваемой системы

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 + f(x_1, u_1) &= -\delta \ddot{y}, \\ \ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 + f(x_2, u_2) &= -\delta \ddot{y}, \\ \ddot{y} + \Omega^2 y + h \dot{y} &= \sum_{i=1}^2 [\omega^2 x_i + f(x_i, u_i)] \end{aligned} \quad (1)$$

или

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1, & \dot{u}_1 &= -\omega^2 x_1 - f(x_1, u_1) - \delta \dot{z}, \\ \dot{x}_2 &= u_2, & \dot{u}_2 &= -\omega^2 x_2 - f(x_2, u_2) - \delta \dot{z}, \\ \dot{y} &= z, & \dot{z} &= -\Omega^2 y - h z + \sum_{i=1}^2 [\omega^2 x_i + f(x_i, u_i)], \end{aligned} \quad (2)$$

где переменные x_1, x_2 и y задают отклонения, а переменные u_1, u_2 и z – скорости движения осцилляторов и платформы, соответственно. В системе (2) введены следующие обозначения: $\delta = m/M$ – параметр связи, $h = d/M$, параметры $\omega = \sqrt{k_m/m}$ и $\Omega = \sqrt{k/M}$ задают частоты колебаний консервативных [$f(x_i, u_i) = 0, h = 0$] осцилляторов и платформы, соответственно.

Учитывая первые два уравнения системы (1) в уравнении для переменной y , нетрудно получить систему

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 + f(x_1, u_1) &= -\delta \ddot{y}, \\ \ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 + f(x_2, u_2) &= -\delta \ddot{y}, \\ (1 + 2\delta) \ddot{y} + \Omega^2 y + h \dot{y} &= -(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2), \end{aligned} \quad (3)$$

из вида которой сразу можно записать интеграл для консервативного случая, когда $f(x_i, u_i) = 0$ и $h = 0$:

$$V = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\omega^2 x_i^2}{2} + \frac{\dot{x}_i^2}{2} + \delta \dot{x}_i \dot{y} \right) + (1 + 2\delta) \delta \frac{\dot{y}^2}{2} + \delta \Omega^2 \frac{y^2}{2} = \text{const}. \quad (4)$$

Этот интеграл может рассматриваться как функция Ляпунова для системы с затухающими колебаниями платформы при $f(x_i, u_i) = 0, h > 0$

$$\dot{V} = -\delta h \dot{y}^2 \leq 0. \quad (5)$$

Последнее означает, что консервативные осцилляторы вместе с платформой при $\delta h > 0$ возвращаются в устойчивое состояние равновесия в нуле при условии, что начальные отклонения ограничены.

В данной работе проведено изучение эффектов синхронизации в условиях включенного механизма управления колебаниями осцилляторов. Так же как и в работах И.И. Блехмана [4], выберем это управление таким образом, что движение обоих грузов (при $\delta = 0$) описывается уравнениями ван дер Поля, то есть положим, что $f(x_i, u_i) = \lambda(x_i^2 - 1)u_i, i = 1, 2$. В этом случае система (2) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1, \quad \dot{u}_1 = -(1 + \delta) [\omega^2 x_1 + \lambda(x_1^2 - 1)u_1] - \delta [\omega^2 x_2 + \lambda(x_2^2 - 1)u_2] + \\ &\quad + \delta \Omega^2 y + \delta h z, \\ \dot{x}_2 &= u_2, \quad \dot{u}_2 = -\delta [\omega^2 x_1 + \lambda(x_1^2 - 1)u_1] - (1 + \delta) [\omega^2 x_2 + \lambda(x_2^2 - 1)u_2] + \\ &\quad + \delta \Omega^2 y + \delta h z, \\ \dot{y} &= z, \quad \dot{z} = -\Omega^2 y - h z + \sum_{i=1}^2 [\omega^2 x_i + \lambda(x_i^2 - 1)u_i]. \end{aligned} \quad (6)$$

Из вида уравнений системы (6) следует, что она имеет два инвариантных многообразия: 4-мерное синфазное многообразие

$$M_s := \{(x_1, u_1) = (x_2, u_2)\} \quad (7)$$

и 2-мерное противофазное многообразие

$$M_a := \{(x_1, u_1) = (-x_2, -u_2), y = z = 0\}. \quad (8)$$

Отметим также, что преобразования

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) &\rightarrow (x_2, x_1) \\ (u_1, u_2) &\rightarrow (u_2, u_1) \end{aligned} \quad (9)$$

и

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, y) &\rightarrow (-x_1, -x_2, -y) \\ (u_1, u_2, z) &\rightarrow (-u_1, -u_2, -z) \end{aligned} \quad (10)$$

приводят систему (6) к своему же виду. Это означает, что система (6) инвариантна по отношению к отображениям (9), (10) и, следовательно, обладает двумя симметриями. В частности, отображение (9) определяет зеркальную симметрию по отношению к M_s , в то время как преобразование (10) дает центральную симметрию.

Из существования многообразий (7), (8) и симметрий (9), (10) следует, что система (6) может иметь синхронный аттрактор A_s , лежащий на M_s , и асинхронный аттрактор A_a на M_a . Кроме притягивающих множеств A_s и A_a , также могут существовать либо симметричный аттрактор A_{sym} , лежащий вне $(M_s \cup M_a)$, либо два асимметричных аттрактора $A_{\text{asym}}^+, A_{\text{asym}}^-$, которые симметричны друг другу относительно (9), (10). Очевидно, что аттракторы могут сосуществовать в фазовом пространстве системы (6). Численный анализ, демонстрирующий многообразие возможных притягивающих множеств в рассматриваемой системе, был проведен, в частности, в работах [10, 11], где исследовалась структура как самих аттракторов, так и их бассейнов притяжения. В данной работе более подробно рассмотрим особенности возникновения полной и противофазной синхронизации.

**Качественно-численное исследование режимов
синхронного поведения осцилляторов ван дер Поля**

Для проведения качественного анализа возможных синхронных режимов в системе (6) выполним следующую замену переменных:

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{x_1 + x_2}{2}, & \eta &= \frac{x_1 - x_2}{2} \\ u &= \frac{u_1 + u_2}{2}, & v &= \frac{u_1 - u_2}{2}.\end{aligned}\tag{11}$$

В новых переменных получим систему вида

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= u, & \dot{u} &= (1 + 2\delta)[- \lambda(\xi^2 + \eta^2 - 1)u - 2\lambda\xi\eta v - \omega^2\xi] + \delta\Omega^2 y + \delta h z, \\ \dot{\eta} &= v, & \dot{v} &= -2\lambda\xi\eta u - \lambda(\xi^2 + \eta^2 - 1)v - \omega^2\eta, \\ \dot{y} &= z, & \dot{z} &= 2\lambda(\xi^2 + \eta^2 - 1)u + 4\lambda\xi\eta v + 2\xi\omega^2 - \Omega^2 y - h z.\end{aligned}\tag{12}$$

Проведем анализ полученной системы для двух случаев, один из которых соответствует установлению противофазных движений грузов в системе (6), а другой – полной синхронизации осцилляторов.

Противофазная синхронизация. Очевидно, что при установлении противофазных колебаний осцилляторов в системе (6) для новых переменных системы (12) будут справедливы равенства

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) &= \frac{1}{2} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) + \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) \right] = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) &= \frac{1}{2} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} u_1(t) + \lim_{t \rightarrow \infty} u_2(t) \right] = 0.\end{aligned}\tag{13}$$

При этом колебания платформы с течением времени затухнут в силу противофазных движений совершенно одинаковых осцилляторов, то есть

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) &= 0.\end{aligned}\tag{14}$$

В результате получим, что в режиме противофазной синхронизации осцилляторов системы (6) для описания поведения системы (12) достаточно рассмотрения следующих двух уравнений:

$$\begin{aligned}M_a : \quad \dot{\eta} &= v, \\ \dot{v} &= -\lambda(\eta^2 - 1)v - \omega^2\eta.\end{aligned}\tag{15}$$

Система (15) описывает поведение осциллятора ван дер Поля с одним неустойчивым состоянием равновесия в начале системы координат $O_0(0, 0)$. Так как характеристические показатели

$$v_{1,2}^{(0,0)} = \frac{1}{2} \left[\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2} \right], \quad (16)$$

то при $0 < \lambda < 2\omega$ состояние равновесия в начале системы координат $O_0(0, 0)$ – неустойчивый фокус, при $\lambda > 2\omega$ – неустойчивый узел. Также известно, что в фазовом пространстве системы (15) существует устойчивый предельный цикл $\mathcal{L}^a(\eta_a, v_a)$, форма колебаний которого при увеличении параметра λ меняется от квазисинусоидальной до релаксационной [12].

Для исследования устойчивости периодического движения $\mathcal{L}^a(\eta_a, v_a)$ вне многообразия M_a , то есть устойчивости аттрактора \mathcal{A}_a по другим четырем направлениям в 6-мерном фазовом пространстве, рассмотрим систему (12) в окрестности $\mathcal{L}^a(\eta_a, v_a)$, положив $\eta = \eta_a$, $v = v_a$:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= u, \\ \dot{u} &= (1 + 2\delta)[- \lambda(\xi^2 + \eta_a^2 - 1)u - 2\lambda\xi\eta_a v_a - \omega^2\xi] + \delta\Omega^2 y + \delta h z, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= 2\lambda(\xi^2 + \eta_a^2 - 1)u + 4\lambda\xi\eta_a v_a + 2\xi\omega^2 - \Omega^2 y - h z. \end{aligned} \quad (17)$$

Записав уравнения в вариациях, получим

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{u} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ (1 + 2\delta)[-2\lambda\eta_a v_a - \omega^2] & -(1 + 2\delta)\lambda(\eta_a^2 - 1) & \delta\Omega^2 & \delta h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ (4\lambda\eta_a v_a + 2\omega^2) & 2\lambda(\eta_a^2 - 1) & -\Omega^2 & -h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ u \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (18)$$

или в матрично-векторных обозначениях

$$\dot{\theta} = \mathcal{B}(t)\theta, \quad \theta = \text{colon}(\xi, u, y, z). \quad (19)$$

Пусть $M_a(t)$ – фундаментальная матрица решений системы (18), $M_a(0) = E$. Вычислим собственные значения $\rho_j, j = \overline{1, 4}$ матрицы монодромии $M_a(T_a)$, то есть корни векового уравнения

$$\det[M_a(T_a) - \rho E] = 0, \quad (20)$$

где T_a – период цикла $\mathcal{L}^a(\eta_a, v_a)$. Вычисления показывают, что в рассматриваемом диапазоне параметра δ среди собственных значений матрицы монодромии всегда имеются два действительных значения $\rho_{1,2} \in \mathbb{R}$ и два комплексных $\rho_{3,4} = \alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}$, для которых величина $\psi = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} < 1$.

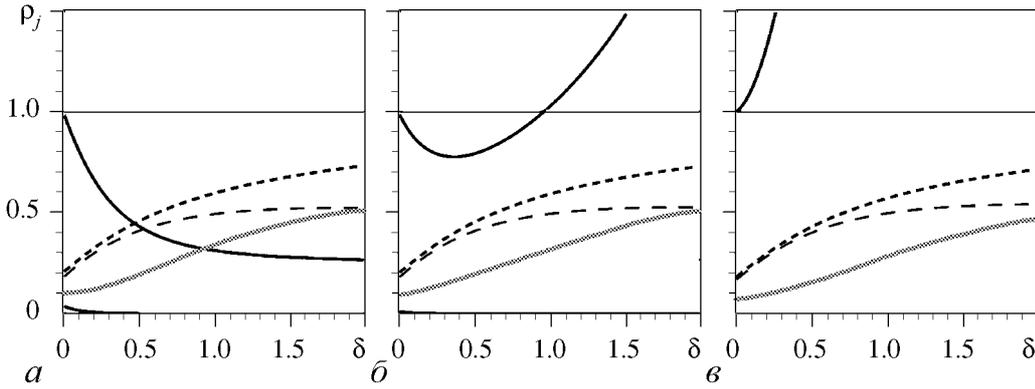


Рис. 2. Поведение мультипликаторов ρ_j при изменении параметра δ для трех значений параметра λ : 0.5 (а); 0.7 (б); 1.3 (в). Остальные параметры системы: $\Omega = 0.3, \omega = 1, h = 0.5$. Действительные мультипликаторы отображены сплошными кривыми черного цвета, действительная часть комплексных мультипликаторов – сплошной кривой серого цвета, мнимая часть – штриховой линией. Изменение величины $\psi(\delta)$ показано пунктирной линией

Зависимости $\rho_j(\delta)$, полученные для трех значений параметра λ , приведены на рис. 2. Из представленных на рисунке графиков видно, что при $\lambda = 0.5$ все мультипликаторы расположены внутри единичной окружности, то есть для любых значений параметра δ из рассматриваемого диапазона цикл \mathcal{A}_a устойчив (рис. 2, а).

При $\lambda = 0.7$ существует $\delta^* \approx 0.96$ такое, что при $\delta > \delta^*$ один из действительных мультипликаторов становится больше единицы (рис. 2, б). Цикл \mathcal{A}_a устойчив при $\delta < \delta^*$.

При $\lambda = 1.3$ во всем диапазоне изменения параметра δ один из действительных мультипликаторов всегда больше единицы (рис. 2, в).

Рассматривая различные значения параметров λ и δ , можно получить бифуркационную кривую J_a на плоскости (λ, δ) , соответствующую границе области устойчивости аттрактора \mathcal{A}_a (рис. 3). В свою очередь, устойчивость аттрактора \mathcal{A}_a в 6-мерном фазовом пространстве системы (12) указывает на то, что в системе (6) может устанавливаться противофазная синхронизация осцилляторов. На рисунке область устойчивости притягивающего множества \mathcal{A}_a системы (12) и, соответственно, область противофазных колебаний осцилляторов в системе (6) выделена штриховкой.

Отметим, что вопрос о единственности аттрактора \mathcal{A}_a в фазовом пространстве системы (12) не обсуждался, в той же области параметров (λ, δ) могут сосуществовать и другие притягивающие множества, в частности, аттрактор $A_s \subset M_s$.

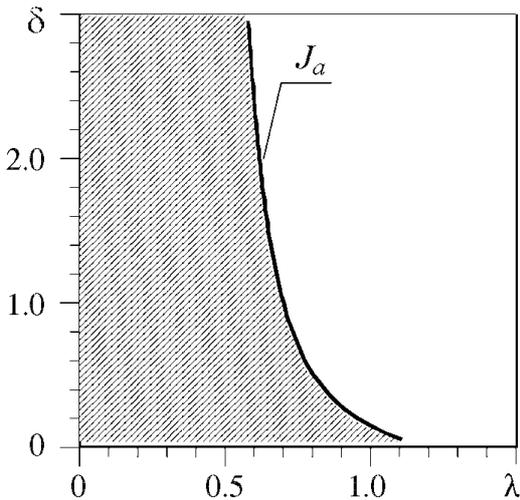


Рис. 3. Область устойчивости аттрактора \mathcal{A}_a системы (12) на плоскости параметров (λ, δ)

Полная синхронизация. Предположим, что в системе (6) устанавливается режим полной синхронизации осцилляторов, тогда для переменных системы (12) будут выполняться следующие равенства:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) &= \frac{1}{2} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) - \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) \right] = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) &= \frac{1}{2} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} u_1(t) - \lim_{t \rightarrow \infty} u_2(t) \right] = 0.\end{aligned}\tag{21}$$

С учетом (21), система (12) в этом случае сводится к системе вида:

$$\begin{aligned}M_s : \quad \dot{\xi} &= u, \\ \dot{u} &= -(1 + 2\delta)\lambda(\xi^2 - 1)u - (1 + 2\delta)\omega^2\xi + \delta\Omega^2y + \delta hz, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= 2\lambda(\xi^2 - 1)u + 2\omega^2\xi - \Omega^2y - hz.\end{aligned}\tag{22}$$

Система (22) имеет одно состояние равновесия $O_0(0, 0, 0, 0)$. Линеаризуя векторное поле в окрестности O_0 , запишем характеристическое уравнение в виде детерминанта

$$\begin{vmatrix} -\nu & 1 & 0 & 0 \\ -(1 + 2\delta)\omega^2 & (1 + 2\delta)\lambda - \nu & \delta\Omega^2 & \delta h \\ 0 & 0 & -\nu & 1 \\ 2\omega^2 & -2\lambda & -\Omega^2 & -h - \nu \end{vmatrix} = 0\tag{23}$$

или

$$\nu^4 + (h - \lambda - 2\delta\lambda)\nu^3 + (2\delta\omega^2 + \omega^2 + \Omega^2 - h\lambda)\nu^2 + (h\omega^2 - \lambda\Omega^2)\nu + \Omega^2\omega^2 = 0.\tag{24}$$

Анализ устойчивости состояния равновесия O_0 показывает, что оно может быть как устойчивым так и неустойчивым в зависимости от параметров. В частности, при выполнении условий, записанных на основании критерия Рауса–Гурвица,

$$\begin{aligned}p &= h - \lambda - 2\delta\lambda > 0, \\ q &= 2\delta\omega^2 + \omega^2 + \Omega^2 - h\lambda > 0, \\ r &= h\omega^2 - \lambda\Omega^2 > 0, \\ s &= \omega^2\Omega^2 > 0, \\ R &\equiv pqr - sp^2 - r^2 > 0,\end{aligned}\tag{25}$$

получим, что состояние равновесия O_0 будет всегда устойчивым. При этом нетрудно показать, что граница области устойчивости определяется кривой

$$R(\lambda, \delta) = \phi_1(\lambda)\delta^2 + 2\phi_2(\lambda)\delta + \phi_3(\lambda) = 0,\tag{26}$$

где функции $\phi_1(\lambda)$, $\phi_2(\lambda)$ и $\phi_3(\lambda)$ зависят от параметра λ следующим образом:

$$\begin{aligned}\phi_1(\lambda) &= -4h\lambda\omega^4, \\ \phi_2(\lambda) &= -h\Omega^2\lambda^3 + (h^2\omega^2 + \Omega^4)\lambda^2 - 2h\omega^4\lambda + h^2\omega^4, \\ \phi_3(\lambda) &= -h\Omega^2\lambda^3 + (\omega^2 + \Omega^2)h^2\lambda^2 + [-h^2\omega^2 - (\omega^2 - \Omega^2)^2]h\lambda.\end{aligned}\quad (27)$$

На кривой $R(\lambda, \delta) = 0$ характеристическое уравнение всегда имеет пару чисто мнимых корней

$$v_1 = bi, \quad v_2 = -bi \quad (28)$$

и, так как $4sp - rp^2 > 0$, два комплексных корня с отрицательной действительной частью

$$v_3 = c + di, \quad v_4 = c - di, \quad (29)$$

где

$$b^2 = \frac{r}{p}, \quad c = -\frac{p}{2}, \quad d^2 = \frac{sp}{r} - \frac{p^2}{4}. \quad (30)$$

На рис. 4 кривая черного цвета соответствует функции $R(\lambda, \delta) = 0$. Область, где состояние равновесия O_0 является устойчивым, выделена темной штриховкой.

Наглядную картину поведения динамической системы вблизи границы области устойчивости позволяет получить анализ ляпуновских величин. Вычислим знак первой ляпуновской величины $L_1(\lambda, \delta)$ на границе $R(\lambda, \delta) = 0$.

Так как система (22) не имеет членов второго порядка, выражение для $L_1(\lambda, \delta)$ принимает вид [13]:

$$L_1(\lambda, \delta) = \frac{3\pi}{4b} \left(H_{111}^{(1)} + H_{222}^{(2)} + H_{122}^{(1)} + H_{112}^{(2)} \right), \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned}H_{klm}^{(j)} &= \frac{\lambda}{3\Delta_0} [2\tilde{\gamma}_{j4} - (1 + 2\delta)\tilde{\gamma}_{j2}] \times \\ &\times (\gamma_{1k}\gamma_{1l}\gamma_{2m} + \gamma_{1k}\gamma_{2l}\gamma_{1m} + \gamma_{2k}\gamma_{1l}\gamma_{1m}).\end{aligned}\quad (32)$$

Здесь Δ_0 – определитель четвертого порядка

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \gamma_{34} \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & \gamma_{44} \end{vmatrix}, \quad (33)$$

элементами которого являются величины γ_{ij} , выражающиеся через коэффициенты системы (22) следующим образом: $\gamma_{11} = \delta\Omega^2$, $\gamma_{12} = -\delta hb$, $\gamma_{13} = (c^2 - d^2)p +$

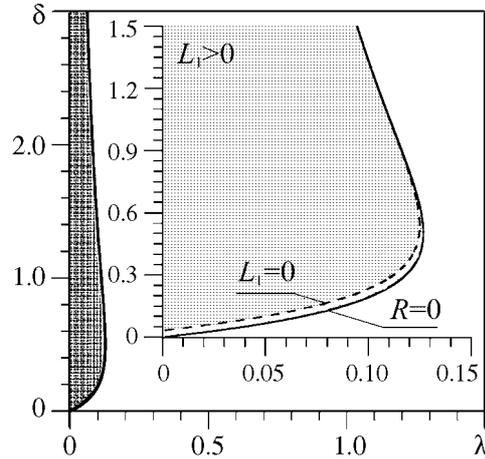


Рис. 4. Плоскость параметров (λ, δ) для системы (22). Область, где система (22) имеет устойчивое состояние равновесия, выделена темной штриховкой. Светлой штриховкой отмечена область, где $L_1(\lambda, \delta) > 0$. Граница области устойчивости состояния равновесия $R(\lambda, \delta) = 0$ изображена черным цветом

$$\begin{aligned}
&+c^3 - 3cd^2 - \lambda hc + \lambda \Omega^2 - c\Omega^2, \quad \gamma_{14} = d^3 - 3c^2d + \lambda hd - \Omega^2d - 2cdp, \quad \gamma_{21} = -\delta hb^2, \\
&\gamma_{22} = -\delta \Omega^2 b, \quad \gamma_{23} = [(1+2\delta)(d^2 - c^2) - hc - \Omega^2]\omega^2, \quad \gamma_{24} = [2c(1+2\delta) + h]\omega^2 d, \\
&\gamma_{31} = (1+2\delta)\omega^2 - b^2, \quad \gamma_{32} = (1+2\delta)\lambda b, \quad \gamma_{33} = 2\omega^2 c, \quad \gamma_{34} = -2\omega^2 d, \quad \gamma_{41} = (1+2\delta)\lambda b^2, \\
&\gamma_{42} = b^3 - (1+2\delta)\omega^2 b, \quad \gamma_{43} = 2\omega^2(c^2 - d^2), \quad \gamma_{44} = -4\omega^2 cd.
\end{aligned}$$

Величины $\tilde{\gamma}_{ji}$, входящие в уравнение (32), – адьюнкты элементов γ_{ij} , то есть

$$\tilde{\gamma}_{ji} = (-1)^{j+i} \cdot \Delta_1, \quad (34)$$

где определитель Δ_1 – определитель третьего порядка, который получается из Δ_0 вычеркиванием i -й строки и j -го столбца.

Кривая $L_1(\lambda, \delta) = 0$, полученная по формуле (31), изображена пунктиром на рис. 4. При $\delta \lesssim 1.1$ эта кривая лежит внутри области устойчивости состояния равновесия O_0 . Это означает, что при малых значениях параметра δ на границе $R(\lambda, \delta) = 0$ первая ляпуновская величина отрицательная и при нарушении границы области устойчивости с изменением параметров λ и δ происходит мягкое возникновение колебаний [безопасная часть границы $R(\lambda, \delta) = 0$]. При $\delta \gtrsim 1.1$ кривые $R(\lambda, \delta) = 0$ и $L_1(\lambda, \delta) = 0$ полностью совпадают, что свидетельствует о более сложном поведении системы при потере устойчивости состояния равновесия O_0 . Можно показать, что и здесь в фазовом пространстве системы (22) существует устойчивый предельный цикл $\mathcal{L}^s(\xi_s, u_s, y_s, z_s)$.

Для исследования устойчивости периодического движения $\mathcal{L}^s(\xi_s, u_s, y_s, z_s)$ вне многообразия M_s , то есть устойчивости аттрактора \mathcal{A}_s по оставшимся двум направлениям в шестимерном фазовом пространстве, рассмотрим систему (12) в окрестности $\mathcal{L}^s(\xi_s, u_s, y_s, z_s)$. Для этого положим в (12) $\xi = \xi_s, u = u_s, y = y_s, z = z_s$:

$$\begin{aligned}
\dot{\eta} &= v, \\
\dot{v} &= -2\lambda \xi_s u_s \eta - \lambda(\xi_s^2 + \eta^2 - 1)v - \omega^2 \eta.
\end{aligned} \quad (35)$$

Линеаризовав систему (35), получим

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\lambda \xi_s u_s - \omega^2 & -\lambda(\xi_s^2 - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ v \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Пусть $\mathcal{M}_s(t)$ – фундаментальная матрица решений системы (36), $\mathcal{M}_s(0) = E$. Собственные значения $\rho_{1,2}$ матрицы монодромии $\mathcal{M}_s(T_s)$ вычислим из векового уравнения

$$\det[\mathcal{M}_s(T_s) - \rho E] = 0, \quad (37)$$

где T_s – период цикла $\mathcal{L}^s(\xi_s, u_s, y_s, z_s)$.

Зависимости $\rho_{1,2}(\delta)$, полученные для трех значений параметра λ , изображены на рис. 5. Из представленных на рисунке графиков видно, что при $\lambda = 0.2$ существуют две области неустойчивости аттрактора \mathcal{A}_s :

- при $\delta < \delta_R^* \approx 0.06$, где один из действительных мультипликаторов больше единицы;
- при $\delta_{I_1}^* < \delta < \delta_{I_2}^*$, $\delta_{I_1}^* \approx 0.2$, $\delta_{I_2}^* \approx 1.3$, где для комплексных мультипликаторов $\rho_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ величина $\psi = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} > 1$.

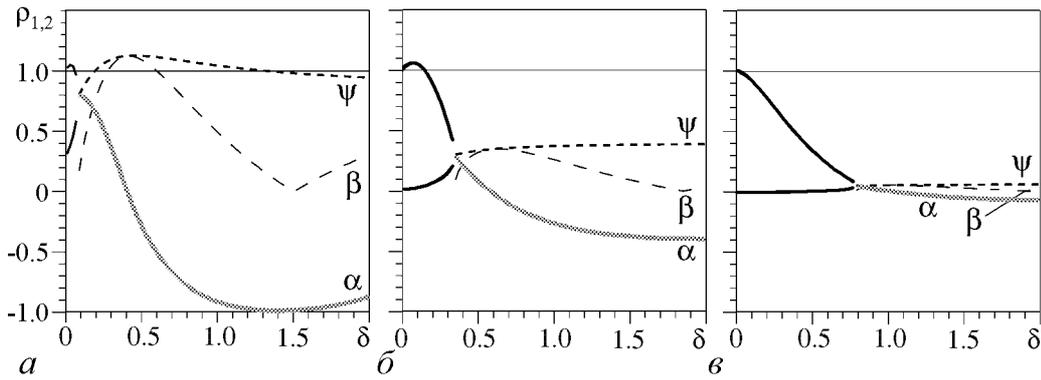


Рис. 5. Поведение мультипликаторов $\rho_{1,2}$ при изменении параметра δ для трех значений параметра λ : 0.2 (а); 0.7 (б); 1.3 (в)

При $\lambda = 0.7$ существует только одна область $\delta < \delta_R^* \approx 0.14$, где один из действительных мультипликаторов больше единицы (рис. 5, б). Здесь в диапазоне изменения параметра δ , где $\rho_{1,2} \in \mathbb{C}$, величина $\psi = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} < 1$. Зависимость $\psi(\delta)$ показана на рисунке пунктирной кривой черного цвета.

При $\lambda = 1.3$ все мультипликаторы лежат внутри единичной окружности (рис. 5, в).

Рассматривая различные значения параметров λ и δ , нетрудно получить две бифуркационные кривые, ограничивающие область устойчивости периодического движения \mathcal{A}_s в плоскости (λ, δ) . На рис. 6 кривая J_s^R соответствует условию $\rho_j = 1$, пунктирная кривая $J_s^I - \psi = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1$. Область устойчивости притягивающего множества \mathcal{A}_s в плоскости (λ, δ) выделена на рисунке штриховкой.

В свою очередь, устойчивость аттрактора \mathcal{A}_s в 6-мерном фазовом пространстве системы (12) указывает на то, что в системе (6) при данных параметрах может устанавливаться режим полной синхронизации грузов. Хотя это может быть и не единственно возможный режим поведения системы.

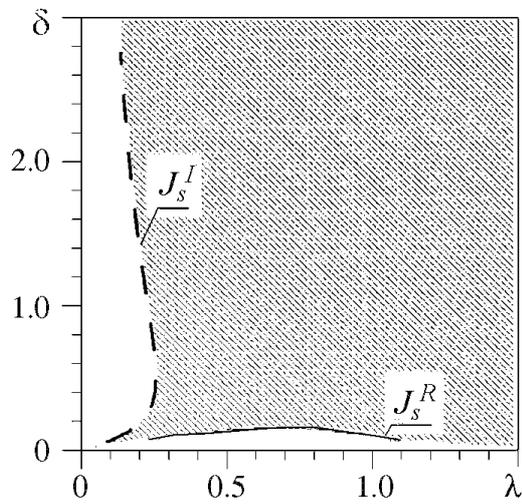


Рис. 6. Область устойчивости притягивающего множества \mathcal{A}_s системы (12) на плоскости параметров (λ, δ)

Численный эксперимент

В данном разделе проведем прямое численное исследование режимов синхронного поведения осцилляторов системы (6). Рассматривая начальные условия в области $X := \{(x_1^0, x_2^0) | x_1^0 \in [-3; 3], x_2^0 \in [-3; 3]\}$ (остальные переменные в начальный момент времени положим равными нулю), получим разбиение плоскости

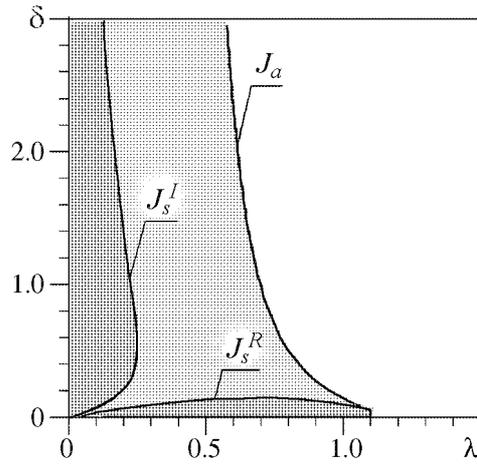


Рис. 7. Разбиение плоскости параметров (λ, δ) на области различного поведения системы (6). Темной штриховкой выделены области, в которых при любых начальных условиях в системе устанавливаются противофазные колебания осцилляторов. В области, выделенной светлой штриховкой, в зависимости от начальных условий в системе устанавливаются либо противофазные, либо синфазные колебания грузов

В незаштрихованной области диаграммы рис. 7 противофазные колебания грузов не устанавливаются. Здесь в фазовом пространстве системы наблюдается сосуществование трех притягивающих множеств:

- синхронного $A_s \subset M_s : \{(x_1, u_1) = (x_2, u_2)\}$;
- аттрактора A_{asym}^+ , лежащего вне $(M_s \cup M_a)$;
- аттрактора A_{asym}^- , лежащего вне $(M_s \cup M_a)$.

Проекция трех аттракторов, наблюдаемых в фазовом пространстве системы при $\lambda = 1.0$, представлены на рис. 8, в. Отметим, что возникающие здесь два аттрактора A_{asym}^+ и A_{asym}^- симметричны друг другу относительно (9). При этом оба цикла охватывают начало системы координат.

Введем мгновенную фазу колебаний как угол поворота радиуса-вектора на плоскости (x_i, u_i) :

$$\theta_i(t) = \arctg \left[\frac{u_i(t)}{x_i(t)} \right] \pm \pi k, \quad i = 1, 2, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (38)$$

Анализ поведения разности фаз $\Delta\theta(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t)$ показывает, что условие захвата

$$|\theta_1(t) - \theta_2(t)| < \text{const} < \pi \quad (39)$$

выполняется и, следовательно, колебания обоих грузов синхронизованы по фазе. На рис. 9 представлен график изменения во времени разности фаз при $\lambda = 1.0$.

параметров (λ, δ) на области различного поведения системы. Так, на диаграмме рис. 7 в областях, отмеченных темной штриховкой, для всех рассматриваемых начальных условий в системе устанавливаются только противофазные колебания грузов. Пример фазового портрета системы (6) для этого случая ($\lambda = 0.2$) представлен на рис. 8, а.

В области, отмеченной на диаграмме рис. 7 светлой штриховкой, наблюдается режим сосуществования двух притягивающих множеств:

- синхронного $A_s \subset M_s :$
- $\{(x_1, u_1) = (x_2, u_2)\}$;
- асинхронного $A_a \subset M_a :$
- $\{(x_1, u_1) = (-x_2, -u_2), y = z = 0\}$.

Проекция аттракторов A_s и A_a , наблюдаемых при $\lambda = 0.7$, представлены на рис. 8, б.

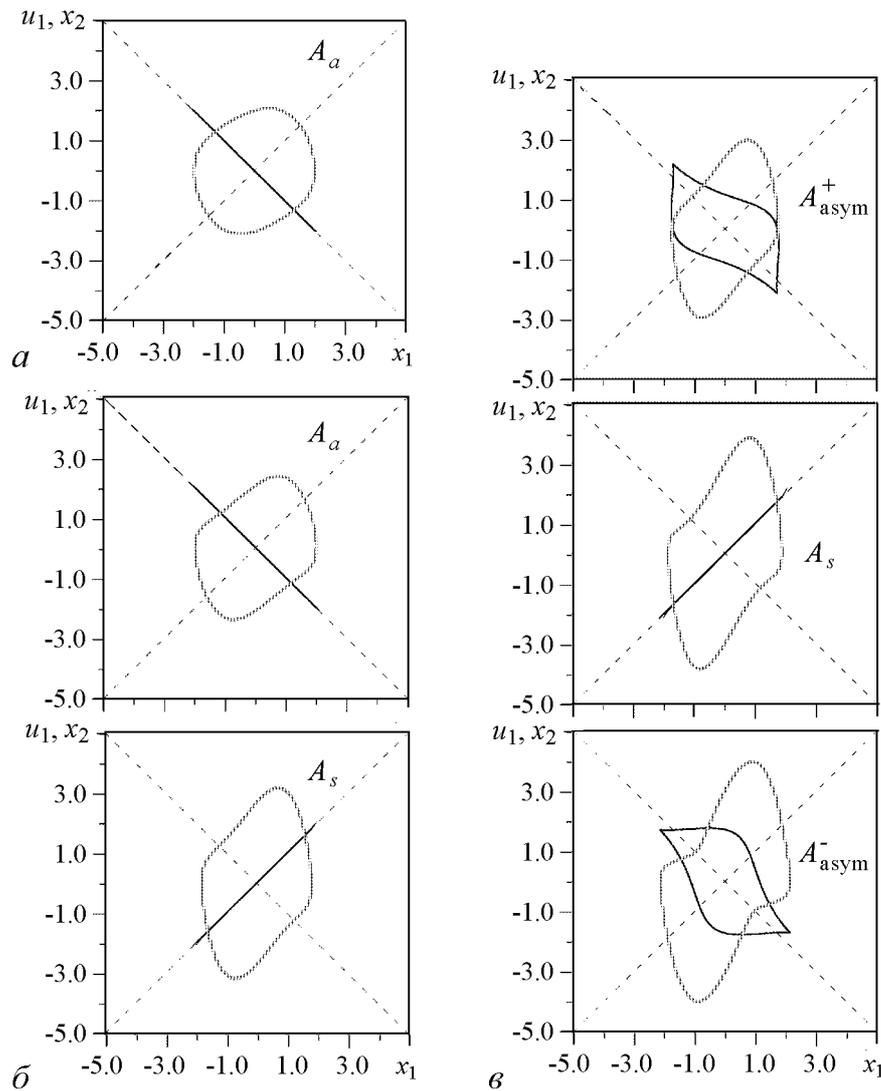


Рис. 8. Вид аттракторов системы в проекции на плоскости (x_1, x_2) и (x_1, u_1) , полученные при различных значениях параметра λ : 0.2 (а); 0.7 (б), 1.0 (в). Проекция аттракторов на плоскость (x_1, x_2) изображены черным цветом, на плоскость (x_1, u_1) – серым. Остальные параметры системы: $\omega = 1, \Omega = 0.3, h = 0.5, \delta = 0.5$

Таким образом, можно сделать вывод, что в незаштрихованной области диаграммы рис. 7 в зависимости от начальных условий устанавливаются либо полная, либо фазовая синхронизация колебаний грузов.

Отметим, что наложение на диаграмму рис. 7 бифуркационных кривых J_a , J_s^R и J_s^I , полученных в предыдущих разделах, показывает полное их совпадение с границами областей различного типа поведения системы (б), полученных прямым численным моделированием.

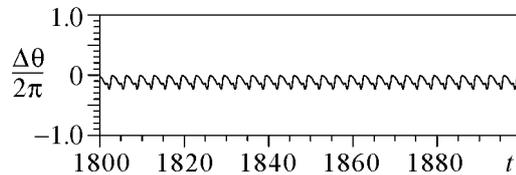


Рис. 9. Изменение во времени разности фаз $\Delta\theta(t)$ при $\lambda = 1.0$

Заклучение

В данной работе проведен качественно-численный анализ возможных режимов синхронного поведения двух инерционно связанных осцилляторов ван дер Поля. Из ранее опубликованных работ известно, что в фазовом пространстве рассматриваемой системы могут сосуществовать сразу несколько притягивающих множеств, а также возникать сложные хаотические аттракторы [11]. Однако с практической точки зрения наличие мультистабильного характера поведения системы вызывает некоторые трудности при необходимости получения определенного режима колебаний (синфазных или противофазных колебаний). В этом случае необходимо знать не только область параметров, но и область начальных условий, приводящих к установлению нужного режима. Получение областей моностабильного поведения системы, когда начальные условия не меняют тип колебаний, имеет особое значение с точки зрения различных приложений. В настоящей работе качественно-численно получены границы областей устойчивости полной, противофазной и фазовой синхронизации. Обнаружена область параметров, где при любых начальных условиях в системе устанавливается один и тот же режим: противофазные колебания грузов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 09-01-00498), Министерства образования и науки РФ (грант 11.G34.31.0039).

Библиографический список

1. *Huygens C.* Horoloquim Oscilatorium. Apud F. Muguet, Parisiis, France, 1673; English translation: The pendulum clock. Iowa State University Press, Ames, 1986.
2. *Pikovsky A., Rosenblum M. and Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Science. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
3. *Korteweg D.J.* Les horloges sympathiques de Huygens. Archives Neerlandaises, ser. II, tome XI, pp. 273-295. The Hague: Martinus Nijhoff, 1906.
4. *Blekhman I.I.* Synchronization in science and technology. New York: ASME, 1998.
5. *Pantaleone J.* Synchronization of metronomes // American Journal of Physics. 2002. Vol. 70, № 10. P. 992.
6. *Bennett M., Schatz M., Rockwood H. and Wiesenfeld K.* Huygens's clocks // Proc. R. Soc. Lond. A. 2002. Vol. 458. 2019. P. 563.
7. *Oud W.T., Nijmeijer H. and Pogromsky A.Yu.* A study of Huijgens' synchronization. Experimental results // Group Coordinations and Control / K.Y. Pettersen, J.T. Gravadahl, H. Nijmeijer (eds). Springer, 2006.
8. *Fradkov A.L., Andrievsky B.* Synchronization and phase relations in the motion of two-pendulum system // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2007. Vol. 42, № 6. P. 895.
9. *Czolczynski K., Perlikovski P., Stefanski A., Kapitaniak T.* Clustering and synchronization of n Huygens' clocks // Physica A. 2009. Vol. 388. P. 5013.
10. *Belykh V.N., Pankratova E.V. and Pogromsky A.Y.* Two van der Pol–Duffing oscillators with Huygens coupling // Dynamics and Control of Hybrid Mechanical Systems / Ed. by G. Leonov, H. Nijmeijer, A. Pogromsky and A. Fradkov. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. P. 181. 2010.

11. *Belykh V.N., Pankratova E.V.* Chaotic Dynamics of Two van der Pol–Duffing oscillators with Huygens coupling // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2010. Vol. 15, № 2. P. 274.
12. *Van der Pol B.* Theory of the amplitude of free and forced triod vibration // *Radio Rev.* 1922. Vol. 1. P. 701.
13. *Баутин Н.Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.

*Волжская государственная
академия водного транспорта,
Нижний Новгород*

Поступила в редакцию 22.02.2011

QUALITATIVE AND NUMERICAL ANALYSIS OF POSSIBLE SYNCHRONOUS REGIMES FOR TWO INERTIALLY COUPLED VAN DER POL OSCILLATORS

E.V. Pankratova, V.N. Belykh

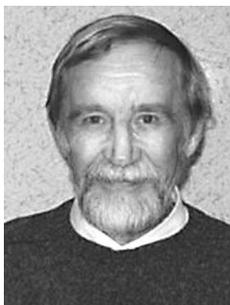
We consider a mechanical system consisting of two controlled masses that are attached to a movable platform via springs. We assume that at the absence of interaction the oscillations of both masses are described by the van der Pol equations. In this case, different modes of synchronous behavior of the masses are observed: in-phase (complete), anti-phase and phase locking. By the methods of qualitative and numerical analysis, the boundaries of the stability domains of these regimes are obtained.

Keywords: Synchronization, attractors, van der Pol equations, control input.



Панкратова Евгения Валерьевна – родилась в Нижнем Новгороде (1981), окончила радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (2004). После окончания ННГУ работает старшим преподавателем на кафедре математики Волжской государственной академии водного транспорта. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ННГУ (2008). Область научных интересов: динамический хаос, бифуркации, случайные процессы, синхронизация. Опубликовала более 20 научных работ по направлениям, указанным выше.

603950 Нижний Новгород, ул. Нестерова, 5а
Волжская государственная академия водного транспорта
E-mail: pankratova@aqu.sci-nnov.ru



Бельх Владимир Николаевич – родился в Горьковской области (1943), окончил радиофизический факультет Горьковского университета (1966). Заведующий кафедрой математики Волжской государственной академии водного транспорта. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ННГУ (1972) и доктора физико-математических наук (1985) по специальности дифференциальные уравнения и математическая физика. Область научных интересов: динамический хаос, теория бифуркаций динамических систем, теория колебаний, синхронизация, радиофизика. Опубликовал более 200 научных работ по указанным выше направлениям. Лауреат премии ленинского комсомола (1974). Заслуженный деятель науки Российской Федерации (1993), соросовский профессор (1995).

603950 Нижний Новгород, ул. Нестерова, 5а
Волжская государственная академия водного транспорта
E-mail: belykh@aqu.sci-nnov.ru



НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ВИНТОВОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА В РЕЖИМЕ ФОРМИРОВАНИЯ ВИРТУАЛЬНОГО КАТОДА

Е.Н. Егоров, А.Е. Храмов

Приведены результаты численного исследования сложной динамики нерелятивистского винтового электронного потока в скрещенных электрическом и магнитном полях, находящегося в режиме образования виртуального катода, в дополнительном тормозящем поле. Моделирование проводилось в рамках двумерной численной модели в геометрии магнетронно-инжекторной пушки.

Ключевые слова: виртуальный катод, винтовой электронный поток, СВЧ-электроника, численное моделирование.

Введение

Электронно-волновые системы, содержащие электронные потоки с виртуальным катодом (ВК) [1–5], являются перспективными компонентами элементной базы устройств, предназначенных для широкополосной передачи данных, систем радиолокации и радиопротиводействия на основе широкополосных хаотических сигналов СВЧ-диапазона [6–8], систем медицинского и технологического назначения [9]. Подобные устройства должны отвечать ряду требований, а именно значительная ширина полосы генерации хаотического сигнала (более октавы) и малая изрезанность спектра (малое отношение максимальной и минимальной спектральной мощности в полосе генерации). Одним из перспективных управляемых источников хаотического СВЧ-сигнала, отвечающих этим требованиям, является источник СВЧ-излучения на основе нерелятивистского электронного потока с виртуальным катодом – низковольтный виркатор [1–4, 10].

С целью поиска путей оптимизации работы низковольтного виркатора как эффективного источника широкополосного СВЧ-сигнала проводились исследования влияния параметров электронного потока на выходное излучение низковольтных виркаторов. Так, например, было показано, что на качество спектра (ширина полосы, изрезанность) выходного излучения системы с ВК значительное влияние оказывает разброс по начальным скоростям электронного потока [11]. В частности, при

увеличении скоростного разброса электронного потока по продольным скоростям происходит увеличение ширины спектра колебаний и уменьшение его изрезанности. Проводились также предварительные исследования влияния на параметры СВЧ-излучения системы с ВК внешнего ведущего магнитного поля (показано увеличение мощности генерации системы с ВК при увеличении магнитного поля в определенных режимах работы низковольтного виркатора [10, 12, 13]); влияния геометрических параметров пучка (исследовались трубчатый [14] и сплошной цилиндрический потоки [4]). Однако данные исследования проводились в рамках существенно идеализированных моделей, не учитывающих динамику потока до его попадания в область дрейфа, в которой непосредственно происходит образование ВК.

Одной из широко используемых в современной СВЧ-электронике является магнетронно-инжекторная пушка (МИП), формирующая винтовой электронный поток (ВЭП). В связи со сказанным выше, актуальность исследования динамики ВЭП как активной среды системы с виртуальным катодом связана с тем, что: 1) ВЭП обладает высоким первеансом, что важно для создания низковольтных виркаторов [3, 5]; 2) возможно формирование ВЭП при относительно небольших (от сотен вольт до 2...4 кВ) ускоряющих напряжениях (при этом, при использовании нерелятивистских пучков, сохраняется высокий первеанс электронного потока); 3) применяемое для формирования ВЭП магнитное поле, как было отмечено выше, позволяет в ряде режимов работы низковольтного виркатора увеличить мощность выходного излучения; 4) ВЭП обладает собственным высоким уровнем шума, а также значительным разбросом электронного потока по скоростям и энергиям [15, 16], что представляет отдельный интерес в контексте развития низковольтных систем с виртуальным катодом [11, 17]. Таким образом, электронно-оптические системы формирования ВЭП (и, в частности, МИП) могут послужить эффективным источником электронного потока для низковольтного генератора широкополосного СВЧ-сигнала на основе электронных потоков с ВК, а некоторые собственные особенности динамики ВЭП (необходимость использования магнитного поля, ряд неустойчивостей, которым подвержен ВЭП [15, 18, 19]) могут стать отдельными факторами оптимизации, влияющими на выходное излучение исследуемой широкополосной СВЧ-системы.

Целью данной работы является численное исследование сложной нелинейной динамики нерелятивистского винтового электронного потока в скрещенных электрическом и магнитном полях, находящегося в режиме образования виртуального катода, при наличии дополнительного тормозящего поля.

Математическая модель

Для того чтобы учесть максимальное число факторов, влияющих на динамику ВЭП, проводилось моделирование динамики ВЭП с учетом условий инжекции пучка с катода в геометрии магнетронно-инжекторной пушки. Напомним, что основными элементами МИП являются (рис. 1): катод (обозначен цифрой 1) и ускоряющий электрод – анод (обозначен цифрой 2), выполненные в изучаемой модели в виде соосных, конусообразных электродов, вставленных один в другой. На катоде имеется эмиттирующая электроны область, выполненная в виде пояска 3, опоясывающего катод вокруг оси на некотором расстоянии от основания катода. Эмиттирующий поясок является источником электронов, которые, двигаясь в скрещенных поперечном

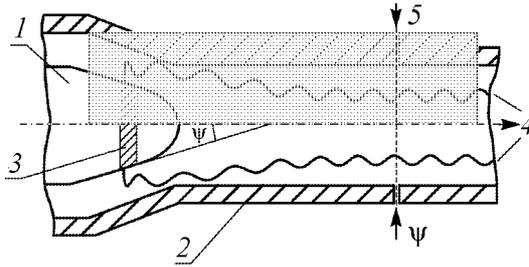


Рис. 1. Схема магнетронно-инжекторной пушки. 1 – катод пушки, 2 – ускоряющий электрод, 3 – эмиттирующий пояс, 4 – электронный поток, 5 – положение тормозящего электрода. Серым выделена область численного моделирования процессов в МИП

электрическом поле ускоряющего электрода и продольном магнитном поле \mathbf{B} , формируют винтовой электронный поток 4. Пространство пушки от катода вправо можно в рамках наших приближений рассматривать как рабочее пространство дрейфа низковольтного виркатора. Тогда для реализации схемы низковольтного виркатора в пространство дрейфа необходимо добавить электрод, который будет осуществлять дополнительное торможение пучка для увеличения первеанса потока (соответственно, снижения величины критического тока для данной системы). Электрод можно выполнить в виде сетки, диафрагмы или, как показано на рис. 1 пунктирной линией и цифрой 5, разделить трубу дрейфа на две секции, на вторую (справа) из которых подать тормозящий потенциал, меньший или равный потенциалу анода пушки $V_r \leq V_a$. В связи с этим, одним из управляющих параметров системы будет величина тормозящей разности потенциалов, которую будем определять как $\Delta\varphi = (V_a - V_r)/V_0$, где V_0 – величина разности потенциалов, на которую производится нормировка уравнений модели (подробнее далее в статье).

Математическая модель, которая была предложена для описания подобной системы, представляет собой 2.5D-мерную самосогласованную систему уравнений движения и уравнения Пуассона. Уравнение движения заряженных частиц в присутствии электрического и магнитного полей в цилиндрической системе координат записывается в виде

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{E} + \left[\mathbf{P}, \left(\frac{\mathbf{B}}{\gamma} + \Omega \right) \right], \quad (1)$$

где $\mathbf{P} = \gamma\mathbf{u}$ – безразмерный вектор импульса частицы, γ – релятивистский фактор, \mathbf{u} – безразмерная скорость; $\Omega = (d\theta/dt)\mathbf{e}_z = (P_\theta/\gamma r)\mathbf{e}_z$ – вектор угловой скорости, записанный для случая вращения радиуса-вектора точки вокруг оси системы, параллельной орт-вектору \mathbf{e}_z . Вектор Ω в уравнении (1) появляется вследствие перехода из декартовой в цилиндрическую систему координат.

В уравнении (1) и далее используются следующие безразмерные величины: потенциал φ и напряженность E электрического поля, индукция B магнитного поля, плотность заряда ρ , скорость v и импульс электронов P , а также пространственные координаты z и r и время t , причем

$$v' = (2\eta V_0)^{1/2}u, \quad P' = m_e(2\eta V_0)^{1/2}P, \quad z' = hz, \quad r' = hr, \quad t' = \frac{t}{\eta B_0}, \quad \rho' = \rho_0\rho,$$

$$V' = V_0\varphi, \quad E' = (2\eta V_0)^{1/2}B_0E, \quad B' = B_0B.$$

Штрихом обозначены соответствующие размерные величины, $\eta = e/m_e$ – удельный заряд покоящегося электрона, ρ_0 – не зависящая от радиуса статическая (невозмущенная) плотность заряда на входе в пространство взаимодействия генератора. Величина h представляет собой характерный пространственный масштаб МИП, который в нашем случае удобно выбрать как расстояние от катода пушки до ускоряющего

электрода. Величина разности потенциалов, на которую проводилась нормировка в ходе численных расчетов, составляет величину $V_0 = 1000$ В, а величина магнитного поля $B_0 = 100$ Гс. Выбор этих величин обусловлен характерными значениями ускоряющего потенциала и величины магнитного поля, которые используются для работы низковольтного виркатора.

Нахождение поля пространственного заряда в пространстве взаимодействия рассчитывалось с помощью уравнения Пуассона с учетом граничных условий и распределения плотности $\rho(z, r)$ пространственного заряда электронов пучка. С учетом аксиальной симметрии ($\partial/\partial\theta = 0$) уравнение Пуассона запишется в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \alpha^2 \rho(z, r), \quad (2)$$

где

$$\alpha = h \left(\frac{|\rho_0|}{V_0 \varepsilon_0} \right)^{1/2} \quad (3)$$

– безразмерный управляющий параметр, пропорциональный току пучка (далее – безразмерный ток пучка). Здесь ε_0 – диэлектрическая постоянная вакуума. Граничные условия для уравнения (2) имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{cath}} = 0, \quad \varphi_{\text{a}} = \varphi_0, \\ \left. \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \varphi(z=L)|_t = \varphi(z=L-\Delta z)|_{t-\Delta t}, \end{aligned} \quad (4)$$

где φ_{cath} – потенциал катода, φ_{a} – потенциал анода (первой секции трубы дрейфа, служащей анодом пушки), L – длина системы, Δz и Δt – характерные временные шаги численного счета (выбор этих параметров будет описан ниже). При движении в пространстве дрейфа электроны выводятся из системы при пересечении выходного конца $z = L$, а также в случае оседания частиц на поверхности катода или анода. Последнее условие системы (4) соответствует открытому пространству на правой границе системы.

Магнитное поле в системе задается в аналитическом виде исходя из условия парааксиальности, то есть $B_z(r, z) \approx B_z(0, z) = B_z$. При этом продольная B_z и поперечная B_r составляющие магнитного поля задаются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} B_z(z) &= \left[\frac{1}{2} \tanh \left(\frac{8(z - 0.5(z_0 + z_k))}{z_0 - z_k} \right) + \frac{1}{2} \right] (B_0 - B_k) + B_k, \\ B_r(r, z) &= -2r \frac{B_0 - B_k}{z_0 - z_k} \left[1 - \tanh \left(\frac{8(z - 0.5(z_0 + z_k))}{z_0 - z_k} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Компоненты магнитного поля (5) выбраны исходя из условия $\text{div} B = 0$. Основным параметром в данном случае выступает $\sigma = B_0/B_k$, который определяет перепад величины магнитного поля от области инжекции пучка (катода) до пространства дрейфа системы. Значение $\sigma = 1$ соответствует постоянной величине магнитного поля по всей длине системы, включая пространство дрейфа, увеличение этого параметра соответствует формированию в системе магнитной ловушки для электронов винтового пучка.

Предложенная модель учитывает также разброс инжектируемых электронов по начальным тепловым скоростям, который в модели описывается распределением Максвелла. В работе [20] подробно описывается моделирование теплового разброса начальных скоростей инжектируемых электронов.

Выбор параметров численной схемы (шаг пространственной сетки Δr и Δz , шаг по времени Δt) обусловлен необходимостью выполнения ряда физических требований. Для адекватного учета распределения плотности пространственного заряда в пространстве дрейфа величина пространственных ячеек должна быть меньше или сравнима с ларморовским радиусом вращения частицы в магнитном поле соленоида или шагом спиральной траектории электрона для трансверсальной и продольной координат, соответственно: $\Delta r < r_l = v_{\perp}/\omega_c$ и $\Delta z < \Lambda = v_{\parallel}/\omega_c$. Здесь v_{\perp} и v_{\parallel} , соответственно, трансверсальная и параллельная компоненты скорости электрона, ω_c – циклотронная частота вращения заряженных частиц. В численном счете соответствующие пространственные шаги были выбраны, соответственно, $\Delta r = r_l/10$ и $\Delta z = \Lambda/10$. Выбор величины шага по времени Δt обусловлен величиной периода циклотронного вращения частицы в магнитном поле, при этом $\Delta t \ll T_c = 2\pi/\omega_c$.

Уравнение Пуассона интегрируется с помощью стандартного метода ближайших соседей (пятиточечная разностная схема [21]). Необходимо отметить, что при наличии отражения частиц в области дрейфа системы частица может «прожить» в пространстве дрейфа достаточно долго, отражаясь от границ потенциальной ямы между реальным и виртуальным катодами, в результате чего фазовая ошибка может достичь значительных величин. В связи с этим в качестве численной схемы интегрирования уравнений движения была выбрана схема Рунге–Кутты 4-го порядка, обеспечивающая более точное интегрирование уравнений движения и характеризующаяся малой фазовой и амплитудной ошибкой.

Обсуждение результатов

В работе исследовалось влияние основных управляющих параметров системы (ток пучка α , параметр магнитного поля σ , тормозящая разность потенциалов $\Delta\phi$) на выходное излучение системы. Для этого анализировались колебания потенциала в различных точках пространства дрейфа системы. Также исследовалось распределение плотности пространственного заряда пучка с течением времени. Для начала рассмотрим характер движения заряженных частиц в пространстве дрейфа низковольтного виркатора с источником электронов в виде МИП.

Известно, что в режиме больших питч-факторов и больших плотностей тока частицы пучка могут отразиться от магнитной ловушки, образованной статическим магнитным полем МИП. В нашем случае величина магнитного поля выбирается таким образом, чтобы величина питч-фактора $g = v_{\perp}/v_{\parallel}$ была недостаточной для отражения электронов потока при малых пространственных зарядах пучка ($g \approx 1.12$). Возникновение ВК (область пространства, где происходит отражение частиц пучка) достигается путем введения тормозящей разности потенциалов в пространство дрейфа. Тогда, по мере увеличения тормозящей разности потенциалов $\Delta\phi$, при достижении некоторого порогового значения, часть электронного потока начинает отражаться от ВК. При достаточно больших величинах $\Delta\phi$, близких к безразмерному потенциалу анода, можно добиться полного отражения потока в сторону катода.

В области катода МИП отраженные заряженные частицы могут либо осесть на катод, либо снова отразиться от потенциального барьера поля катода. Вследствие многократного отражения частиц потока от ВК и от катода пушки в образовавшейся ловушке происходит накопление заряда. Таким образом складываются условия для возникновения в пучке колебаний плотности пространственного заряда. Рассмотрим этот процесс подробнее.

На рис. 2, *a* приведено распределение усредненной по радиусу плотности пространственного заряда $\langle \rho(z) \rangle_r$ с течением времени. Интенсивностью серого цвета отображена величина усредненной плотности. Наиболее интенсивно закрашенные области вблизи координат $z \approx 10...14$ соответствуют локализации ВК в пространстве дрейфа. Из рисунка видно, что в пространстве дрейфа происходят близкие к периодическим колебания ВК как по координате, так и по величине пространственного заряда в области отражения частиц. Эти колебания вызваны накоплением заряда в области ВК, что увеличивает глубину потенциальной ямы и дополнительно притормаживает электроны, приходящие в данную точку пространства позже. При этом, по мере накопления заряда в данной области пространства, происходит периодический сброс заряда (серые полосы, отходящие от ВК, обозначенные овалами на рис. 2) попеременно в прикатодную и выходную области пространства дрейфа. Данный механизм аналогичен тому, который наблюдался для системы с ВК в случае цилиндрического пучка без ведущего магнитного поля (см., например, [4]). Однако в данном случае действует магнитное поле, которое ограничивает поперечную динамику пучка, и движение ведущих центров прямых и отраженных электронов происходит, в основном, по одним и тем же траекториям. Это приводит к значительному увеличению амплитуды пространственных колебаний ВК при малых тормозящих потенциалах $\Delta\varphi$.

Повышенная плотность пространственного заряда в области точки с координатой $z = 3$ соответствует скоплению частиц вблизи эмиттирующего пояса. Видно, что с течением времени из этой области также происходит выброс скоплений частиц в сторону ВК. Эти скопления формируются частицами, отразившимися от катода в сторону выходного конца системы. Таким образом, в области эмиттер–ВК устанавливается двухпотокное состояние, что может приводить к достаточно сложному поведению потока.

Описанный процесс накопления и сброса заряда в области ВК сопровождается периодическим изменением потенциала пространства дрейфа. На приведенной на

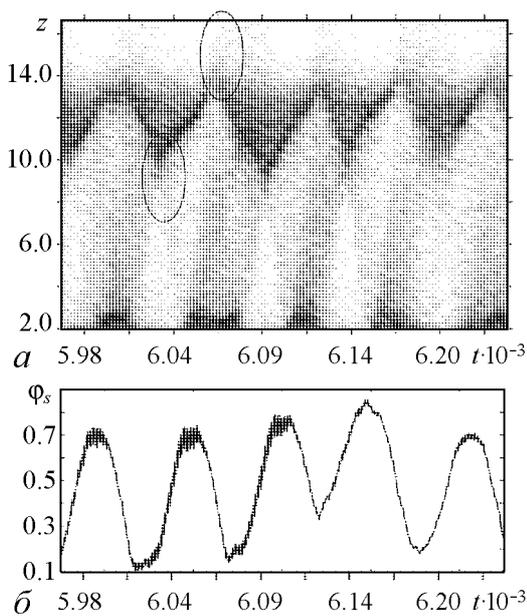


Рис. 2. Распределение усредненной по радиусу плотности пространственного заряда $\langle \rho(z) \rangle_r$ с течением времени (*a*) (интенсивность серого цвета соответствует величине усредненной плотности) и зависимость величины потенциала в пространстве дрейфа φ_s в точке пространства вблизи области образования ВК от времени (*b*). Значения параметров: $\alpha = 1.5$, $\Delta\varphi = 1$, $B_0 = 4$, $\sigma = 4/3$

рис. 2, б зависимости величины потенциала пространства дрейфа φ_s в точке пространства вблизи области образования ВК видно, что период колебаний потенциала совпадает с периодом пространственных колебаний ВК.

Рассмотрим теперь спектральные характеристики колебательных процессов в ВЭП. На рис. 4 приведены спектры колебаний потенциала пространства дрейфа φ_s для двух значений безразмерного тока пучка α . Точка пространства, в которой снимался сигнал ($z = 5.2$), находится в области между катодом и ВК (вблизи эмиттера), где наблюдается наиболее сложное поведение пучка. Видно, что спектры колебаний потенциала представляют собой шумовые спектры на фоне нескольких выделяющихся гармоник в низкочастотной области. В нижней части рисунка приведены увеличенные низкочастотные части спектров в линейном масштабе. Видно, что низкочастотные гармоники более ярко выделены по сравнению с остальной частью спектра. При этом, при увеличении тока пучка наблюдается расширение интенсивной низкочастотной части спектра в сторону более высоких частот (ср. нижние спектры на

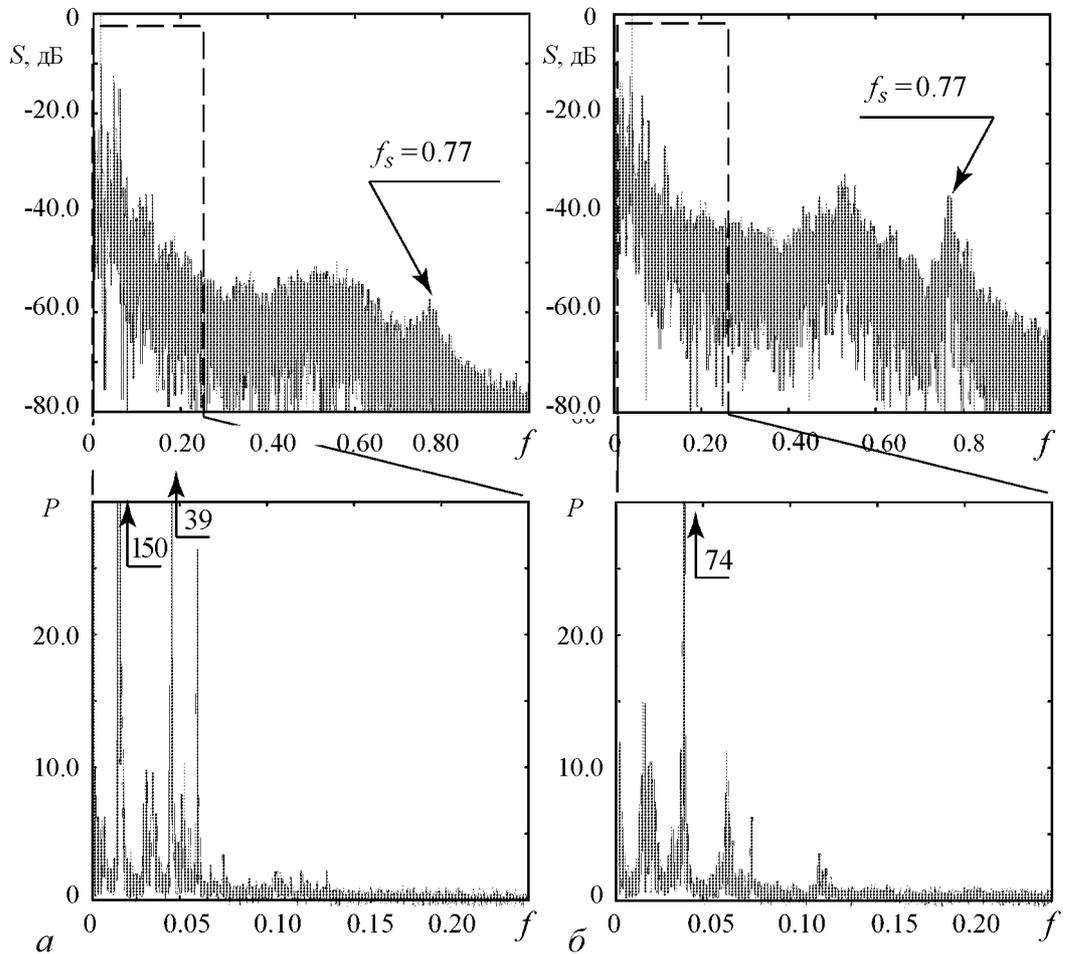


Рис. 3. Спектры колебаний потенциала φ_s в пространстве дрейфа системы. Значения параметров: $\Delta\varphi = 1$, $B_0 = 5$, $\sigma = 5/3$; $\alpha = 1.1$ (а); $\alpha = 1.9$ (б). На верхних рисунках спектры приведены в логарифмическом масштабе. В нижней части рисунков приведены увеличенные низкочастотные области спектров в линейном масштабе; стрелками с цифрами указаны пиковые значения безразмерной мощности P соответствующих спектральных выбросов

рис. 4, *a* и *б*). При этом наблюдается общее уменьшение интенсивности основных гармоник и «размазывание» энергии колебаний по более широкому диапазону, а также увеличение шумового пьедестала в спектре (верхние спектры на рис. 4, *a* и *б*). Данная картина соответствует развитию в системе длинноволновой неустойчивости встречных потоков и удовлетворяет условию $k < \sqrt{2}\omega_p/v_m$, где k – волновое число, соответствующее возникающему возмущению, ω_p – плазменная частота пучка, v_m – средняя продольная скорость движения потока [22].

Отличительной особенностью приведенных спектров является наличие в них небольшого спектрального пакета со средней частотой примерно равной $f_s = 0.77$ (отмечена стрелками на рис. 4). Из приведенных рисунков видно, что средняя частота f_s не меняется при изменении тока пучка, и, как показали исследования, не зависит от величины тормозящей разности потенциалов $\Delta\phi$. При этом величина частоты f_s возрастает по мере роста величины магнитного поля B_0 . Можно предположить, что появление данного пика в спектре связано с возбуждением в потоке поперечной циклотронной волны [23]. Обсудим этот вопрос подробнее.

На рис. 4 приведена конфигурация винтового электронного потока в системе в различные моменты времени. На рис. 4, *a* приведена конфигурация электронного потока в некоторый момент времени, когда в системе визуально не наблюдается существенных искажений конфигурации электронного потока. Стрелкой на рис. 4, *a* обозначена область формирования ВК. Слева от ВК в системе наблюдается двухпотокное движение, справа – однопотокное движение частиц к выходному концу системы. Из рис. 4, *a* видно, что в области ВК наблюдается плотное скопление заряженных частиц. При этом их продольная скорость v_z в области ВК близка к нулю или равняется ему. Скопление частиц выступает в роли возмущения, вызывающего поперечное движение частиц, которое, в свою очередь, подавляется постоянным (в области дрейфа) магнитным полем. Таким образом в системе могут возбудиться циклотронные волны, распространяющиеся в пучке от ВК.

Момент времени, для которого построен рис. 4, *a*, отмечен на зависимости потенциала ϕ_s от времени в верхней части рис. 4 буквой «*a*». Видно, что моменту

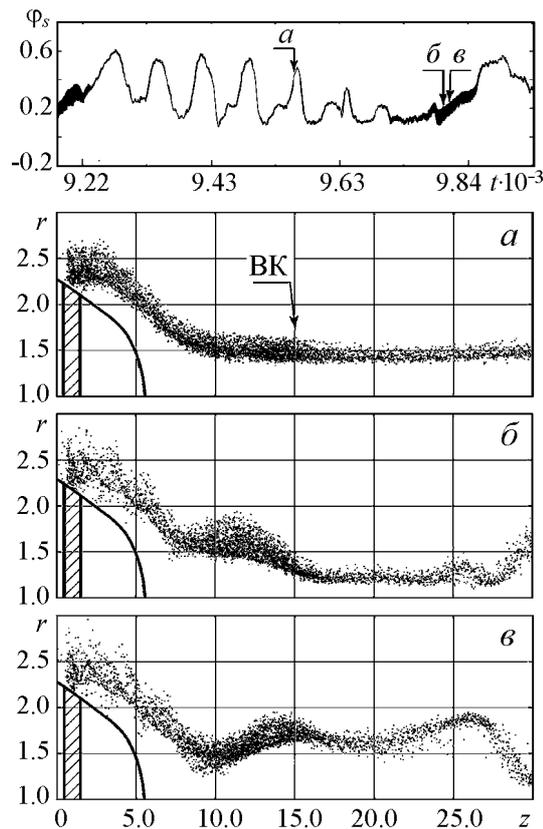


Рис. 4. Конфигурация электронного потока в пространстве системы для трех различных моментов времени (*a*, *б* и *в*). Каждая точка соответствует заряженной частице. Каждый из трех моментов времени обозначен на зависимости потенциала ϕ_s от времени (верхняя часть рисунка). Значения параметров: $\alpha = 1.5$, $\Delta\phi = 1$, $B_0 = 7$, $\sigma = 7/3$. Стрелкой отмечена область локализации ВК

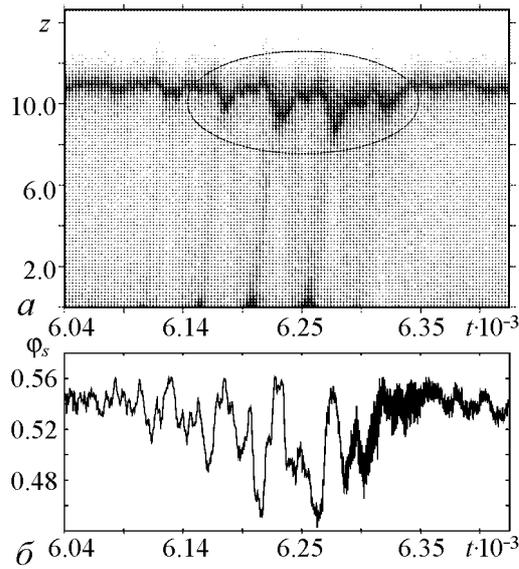


Рис. 5. Распределение усредненной по радиусу плотности пространственного заряда $\langle \rho(z) \rangle_r$ с течением времени (а) (интенсивностью серого цвета отображена величина усредненной плотности) и отрезок временной реализации потенциала пространства дрейфа (б) вблизи эмиттера пушки. Значения параметров: $\alpha = 1.5$, $\Delta\varphi = 1.4$

при предполагаемом возбуждении циклотронных волн большой амплитуды низкочастотные колебания в системе подавляются, а высокочастотные (циклотронные), наоборот, значительно увеличивают свою интенсивность на временной реализации.

Рассмотрим теперь поведение винтового электронного потока при изменении тормозящей разности потенциалов. На рис. 5, а приведена усредненная плотность пространственного заряда $\langle \rho(z) \rangle_r$ для тормозящей разности потенциалов $\Delta\varphi = 1.4$ в зависимости от времени. На приведенных рисунках ВК локализован также в области $z = 10 \dots 14$ (ср. с рис. 2), однако, амплитуда пространственных колебаний ВК, в отличие от случая $\Delta\varphi = 1$ (см. рис. 2), достаточно мала. При этом отрезки реализации со слабой пространственной динамикой сменяются отрезками, при которых наблюдаются пространственные колебания положения ВК большой амплитуды (участок, соответствующий резкому возрастанию амплитуды пространственных колебаний, отмечен овалом на рис. 5, а). Ниже, на рис. 5, б приведен отрезок временной реализации потенциала пространства дрейфа, снятый в точке вблизи эмиттера, соответствующий моменту появления всплеска амплитуды колебаний на рис. 5, а. Видно, что в момент всплеска наблюдается увеличение амплитуды колебаний потенциала до величины порядка $\varphi_s = 0.1 \dots 0.12$. После нескольких циклов накопления и сброса заряда система вновь возвращается в состояние со слабыми флуктуациями координаты локализации ВК.

Рассмотрим спектральные характеристики данного процесса. На рис. 6 представлены спектры колебаний потенциала пространства дрейфа в точках вблизи катода (рис. 6, а и в) и на выходном конце системы (рис. 6, б и г) для двух значений тормозящей разности потенциалов $\Delta\varphi$. Сравнение спектров для двух разных точек пространства дрейфа указывает, прежде всего, на то, что колебания потенциала в

времени с минимальными искажениями формы пучка соответствует участок зависимости, на котором отчетливо видны низкочастотные колебания потенциала. Высокочастотные колебания в этом случае имеют очень малую амплитуду и слабо различимы на этом участке зависимости, что соответствует слабым циклотронным колебаниям (слабому искажению формы пучка).

На рис. 4, б и в приведена конфигурация потока в другие моменты времени. На них видно, что форма пучка существенно искажена. Поперечные возмущения в этом случае распространяются вдоль потока, приводя к высокочастотной модуляции зависимости потенциала пространства φ_s от времени. Моменты времени, соответствующие рис. 4, б и в, отмечены на зависимости потенциала φ_s от времени буквами «б» и «в», соответственно. Видно, что

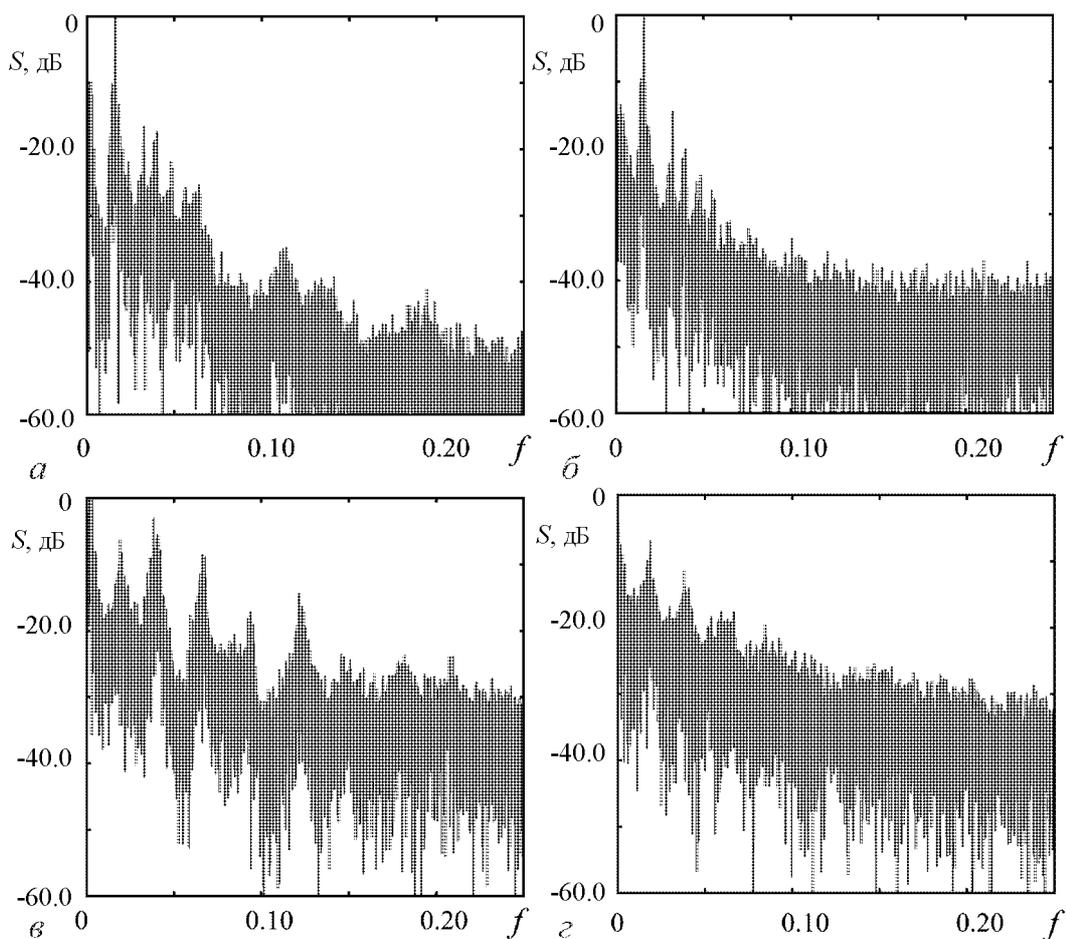


Рис. 6. Спектры колебаний потенциала в пространстве дрейфа системы вблизи катода (*a, в*) и на выходе системы (*б, г*). Значения параметров: $\alpha = 1.5$; $\Delta\varphi = 0.9$ (*a, б*), 1.4 (*в, г*)

области катода, то есть там, где устанавливается двухпотоковое состояние пучка, оказываются более сложными, чем динамика потока на правом выходном конце системы. Спектры на рис. 6, *a, в* более изрезанные, в то время как шумовые спектры на рис. 6, *б, г* более равномерные (менее изрезанные), что может определяться собственными шумами винтового потока. Некоторая их изрезанность в низкочастотном диапазоне объясняется модуляцией плотности потока и потенциала пространства дрейфа колебаниями пучка вблизи катода.

Увеличение тормозящей разности потенциалов приводит к эффекту, аналогичному увеличению тока пучка, а именно в спектре колебаний наблюдается перераспределение энергии колебаний в сторону более высокочастотных компонент и, как следствие, некоторое расширение полосы генерации системы.

Выводы

В работе приведены результаты исследования динамики винтового электронного потока с дополнительным торможением, находящегося в режиме формирования виртуального катода. Было показано, что колебания виртуального катода в винто-

вом электронном потоке носят сложный пространственный и временной характер. Образование и динамика виртуального катода сопровождается возникновением в спектре колебаний потенциала пространства дрейфа интенсивных низкочастотных компонент, что объясняется развитием двухпоточковой неустойчивости в пучке. При этом увеличение тока пучка или величины дополнительной тормозящей разности потенциалов приводит к усложнению спектрального состава колебаний, а также к расширению диапазона низкочастотного спектрального пакета.

Также показано, что в спектре колебаний потенциала возникают более высокочастотные компоненты, частота которых зависит только от величины магнитного поля. Их наличие можно связать с возбуждением в потоке циклотронных волн и влиянием магнитного поля на коллективные процессы в пучке. Эти частоты не зависят от тока пучка или величины дополнительного торможения.

Таким образом, полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что электронно-оптические системы формирования винтового электронного потока (и, в частности, магнетронно-инжекторная пушка) могут стать эффективными системами формирования электронного потока для низковольтных виркаторов. В частности, наличие как минимум двух механизмов возбуждения колебаний в потоке (двухпучковая неустойчивость и возбуждение циклотронных волн, основные спектры колебаний которых лежат в разных диапазонах частот), возможно, позволят добиться значительного расширения ширины спектра колебаний низковольтного виркатора.

Авторы выражают благодарность члену-корреспонденту РАН Трубецкову Д.И. и д.т.н. Калинину Ю.А. за плодотворное обсуждение постановки задачи и результатов исследований.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг.

Библиографический список

1. *Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Методы нелинейной динамики и хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот. Т. 2. Нестационарные и хаотические процессы. М.: Физматлит, 2009.
2. *Калинин Ю.А., Кузнецов Н.Н., Украинская Т.Н.* Исследование широкополосных шумоподобных колебаний в интенсивных пучках заряженных частиц в режиме образования виртуального катода // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т. 10, № 5. С. 32.
3. *Калинин Ю.А., Короновский А.А., Храмов А.Е., Егоров Е.Н., Филатов Р.А.* Экспериментальное и теоретическое исследование хаотических колебательных явлений в нерелятивистском электронном потоке с виртуальным катодом // Физика плазмы. 2005. Т. 31, № 11. С. 1009.
4. *Егоров Е.Н., Калинин Ю.А., Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Процессы образования и нестационарная динамика виртуального катода в нерелятивистском электронном пучке в тормозящем поле (двумерное приближение) // Известия вузов. Радиофизика. 2006, № 10. С. 843.
5. *Егоров Е.Н., Калинин Ю.А., Левин Ю.И., Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Вакуум-

- ные генераторы широкополосных хаотических колебаний на основе нерелятивистских электронных пучков с виртуальным катодом // Изв. РАН, сер. физич.. 2005. Т. 69, № 12. С. 1724.
6. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002.
 7. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации // Успехи физических наук. 2009. Т. 179, № 12. С. 1281.
 8. *Залогин Н.Н., Кислов В.В.* Широкополосные хаотические сигналы в радиотехнических и информационных системах. М.: Радиотехника, 2006.
 9. Special Issue on Applications of Nonlinear Dynamics to Electronic, Information Engineering // Proc. IEEE. 2002. Vol. 90, № 5.
 10. *Куркин С.А., Короновский А.А., Храмов А.Е.* Влияние внешнего магнитного поля на формирование и динамику виртуального катода // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 4. С. 182.
 11. *Калинин Ю.А., Храмов А.Е.* Экспериментальное и теоретическое исследование влияния распределения электронов по скоростям на хаотические колебания в электронном потоке в режиме образования виртуального катода // ЖТФ. 2006. Т. 76, № 5. С. 25.
 12. *Егоров Е.Н., Калинин Ю.А., Короновский А.А., Храмов А.Е.* Исследование зависимости мощности СВЧ-генерации низковольтного виркатора от управляющих параметров // ЖТФ. 2007. Т. 77, № 10. С. 139.
 13. *Куркин С. А., Короновский А.А., Храмов А.Е.* Формирование и нелинейная динамика виртуального катода в слаборелятивистском электронном потоке во внешнем магнитном поле. Тезисы докладов XIV научной школы «Нелинейные волны – 2008», Нижний Новгород, 2008. С. 99.
 14. *Куркин С.А., Храмов А.Е.* Формирование виртуального катода в трубчатом электронном потоке во внешнем магнитном поле // Письма в ЖТФ. 2009. Т. 35, № 1. С. 48.
 15. *Tsimring Sh.E.* Electron beams and microwave vacuum electronics. John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2007.
 16. *Tsimring Sh.E.* Gyrotron electron beams: velocity spread and energy spread and beam instabilities // Int. J. Infrared and Millimeter Waves. 2001. Vol. 22, № 10. P. 1433.
 17. *Куркин С.А.* Влияние шумового разброса электронов по скоростям на динамику электронного потока с виртуальным катодом // Радиотехника и электроника. 2010. Т. 55, № 4. С. 1.
 18. *Schuldt R., Borie E.* Diocotron instability of the electron beam in the drift tube of a gyrotron // Int. J. Infrared and Millimeter Waves. 1995. Vol. 16, № 10. P. 1675.
 19. *Мануилов В.Н.* Численное моделирование низкочастотных колебаний пространственного заряда и потенциала в электронно-оптической системе гиротрона // Изв. вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49, № 10. С. 872.
 20. *Храмов А.Е., Куркин С.А., Егоров Е.Н., Короновский А.А., Филатов Р.А.* Программный пакет для исследования и оптимизации нелинейных нестационар-

ных процессов в микроволновых генераторах с электронной обратной связью // Математическое моделирование. 2011. Т. 23, № 1. С. 3.

21. *Birdsall C.K., Langdon A.B.* Plasma physics, via computer simulation. NY: McGraw-Hill, 1985.
22. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.; Ижевск: РХД, 2000.
23. *Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. В 2-х т. М.: Физматлит, 2003.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию 1.03.2011
После доработки 21.07.2011*

NONLINEAR DYNAMICS OF HELICAL ELECTRON FLOW IN THE REGIME OF THE VIRTUAL CATHODE FORMING

E.N. Egorov, A.E. Hramov

We produce the results of computer analysis of complex dynamics of non-relativistic electron beam being placed in crossed electric and magnetic fields, in the regime of a virtual cathode forming in additional braking field. The modeling has been made in the framework of 2D numerical model in the geometry of magnetron-injector gun.

Keywords: Virtual cathode, helical electron flow, microwave electronics, numerical modeling.



Егоров Евгений Николаевич – родился в Саратове (1980), окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2002), защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2007, СГУ). Доцент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ (с 2008). Область научных интересов – нелинейная динамика СВЧ-устройств. Опубликовал около 20 статей в отечественных и зарубежных журналах по данной тематике.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: evgeniy.n.egorov@gmail.ru



БИФУРКАЦИИ УДВОЕНИЯ ПЕРИОДА И ЭФФЕКТЫ ШУМОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ В МУЛЬТИСТАБИЛЬНОЙ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СРЕДЕ

А.В. Слепнев, Т.Е. Вадивасова

Исследуется модель автоколебательной среды, составленной из элементов со сложным автоколебательным поведением. При периодических граничных условиях в среде сосуществуют устойчивые автоколебательные режимы в виде бегущих волн с различным сдвигом фазы на длине системы. Проведено исследование механизмов удвоения периода колебаний во времени для различных сосуществующих режимов. Для всех наблюдавшихся пространственно-неоднородных режимов (бегущих волн) удвоение периода происходит через возникновение квазипериодических во времени колебаний и дальнейшую их эволюцию. Удвоения периода ведут к развитию мультистабильности. Для каждой моды с заданным сдвигом фазы на длине системы возникают разные устойчивые неоднородные структуры, отличающиеся распределением характеристик колебаний в пространстве. Воздействие шумового сигнала приводит к сдвигу бифуркаций удвоения в сторону роста управляющего параметра. При фиксированном значении параметра с ростом интенсивности шума наблюдаются стохастические бифуркации связанности, проявляющиеся в уменьшении числа экстремумов вероятностного распределения. При достаточно сильном шуме происходит исчезновение пространственно-неоднородных режимов, соответствующих ненулевым фазовым сдвигам.

Ключевые слова: Автоколебательная среда, мультистабильность, удвоение периода, пространственные структуры, стохастическая бифуркация, Р-бифуркация, шум.

Введение

Автоколебания являются характерным режимом для широкого класса распределенных систем и сред. Во многих случаях непрерывную в пространстве автоколебательную среду можно представить как множество элементов, каждый из которых сам является автогенератором. В отличие от пространственно организованного ансамбля из конечного (хотя, возможно, и большого) числа генераторов, предполагается, что на единицу длины системы приходится бесконечно много элементарных генераторов, а размеры каждого элемента бесконечно малы. Классический пример такой модели – уравнение Гинзбурга–Ландау [1, 2]. В ней с ростом нелинейности

среды наблюдаются режимы хаотической во времени динамики и пространственно-го беспорядка (турбулентное состояние). Сложное поведение такой среды является следствием взаимодействия большого числа автоколебательных элементов, колебания которых в отсутствие связи были бы гармоническими. Можно предположить существование сред, состоящих из элементов со сложной динамикой. Такие модели сред могут, по-видимому, возникнуть в задачах биофизики и нейрофизиологии, где отдельный автоколебательный элемент способен в некоторых случаях демонстрировать сложное, в том числе хаотическое, поведение. Однако на сегодняшний день автоколебательные среды, состоящие из элементарных генераторов с собственной сложной динамикой, в научной литературе практически не рассматривались. Имеется значительное число работ, в которых исследуются пространственно организованные ансамбли, составленные из конечного числа генераторов со сложным индивидуальным поведением, например цепочки из осцилляторов Ресслера [3, 4], систем Чуа [5, 6] или генераторов Анищенко–Астахова [7]. Однако при фиксированном и, как правило, не очень большом числе элементов такие модели могут качественно отражать лишь некоторые, наиболее грубые, черты поведения распределенных систем, но не дают полной картины возможных явлений и не могут, строго говоря, рассматриваться в качестве моделей непрерывных сред. Еще меньше соответствуют непрерывным средам цепочки и решетки отображений последования [8, 9], так как в этом случае не только пространственные координаты, но и время оказывается дискретной переменной. Таким образом, исследование модели непрерывной во времени и пространстве автоколебательной среды со сложным поведением элементарных ячеек является на сегодняшний день актуальной задачей нелинейной динамики. Другой недостаточно исследованной проблемой являются эффекты, вызванные действием шума в распределенных системах, в частности влияние шума на бифуркационные переходы. Можно назвать монографию [10] и ряд статей, посвященных исследованию этих эффектов [11–17].

В работе предложена модель автоколебательной среды, элементы которой представляют собой автогенераторы, демонстрирующие при изменении управляющего параметра бифуркации удвоения периода и хаотическую динамику. В среде наблюдается мультистабильность – одновременно существуют несколько устойчивых пространственно-временных режимов, реализующихся при различных начальных условиях. Цель данной работы состоит в изучении следующих вопросов.

- Какие особенности перехода к колебаниям удвоенного периода могут быть связаны с непрерывным распределением динамических переменных в пространстве и одинаков ли сценарий удвоения периода для различных пространственных мод?
- Как может повлиять внешнее случайное воздействие на среду в режиме колебаний удвоенного периода? Будут ли при этом наблюдаться стохастические бифуркации связанности (обратные удвоения), имеющие место в конечномерных системах и какие новые эффекты могут возникать?

1. Модель автоколебательной среды

В качестве элементарной ячейки среды был взят генератор с инерционной нелинейностью (ГИН) Анищенко–Астахова [18, 19]. Рассмотрим замкнутую в кольцо цепочку из N таких генераторов с резистивной связью и перейдем к пределу

$N \rightarrow \infty$, считая размер элемента бесконечно малым. В результате получаем модель автоколебательной среды в виде следующей системы уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t} &= mx + y - xz + \gamma \frac{\partial^2(x - y)}{\partial s^2}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= -x, \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= -gz + g\Phi(x).\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь x, y, z – безразмерные вещественные динамические переменные, являющиеся функциями безразмерного времени t и безразмерной пространственной координаты s ; m и g – управляющие параметры системы; γ – коэффициент диффузии, определяемый величиной связи между соседними элементами. Граничные условия предполагаются периодическими

$$\begin{aligned}\forall t \quad x(0, t) &= x(L, t), \quad y(0, t) = y(L, t), \quad z(0, t) = z(L, t); \\ \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} \Big|_{s=0} &= \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} \Big|_{s=L}, \quad \frac{\partial y(s, t)}{\partial s} \Big|_{s=0} = \frac{\partial y(s, t)}{\partial s} \Big|_{s=L}, \\ \frac{\partial z(s, t)}{\partial s} \Big|_{s=0} &= \frac{\partial z(s, t)}{\partial s} \Big|_{s=L},\end{aligned}\tag{2}$$

где L – длина системы. В проведенных исследованиях фиксировались следующие значения параметров: $L = 100$ безразмерных единиц, $\gamma = 0.1$ и $g = 0.2$. Управляющий параметр m изменялся в пределах от 0.9 до 1.5.

Система (1) интегрировалась с использованием спектрального метода. В проведенных экспериментах шаг по времени фиксировался всегда одинаковым $h_t = 0.01$. Шаг дискретизации по пространственной координате определяется как $h_s = L/2N$, где N – число учитываемых пространственных гармоник. Чтобы смоделировать поведение непрерывной по пространственной координате среды, для каждого исследуемого режима число рассматриваемых пространственных гармоник требуется выбирать таким образом, чтобы дальнейшее увеличение числа гармоник уже не приводило к существенным изменениям формы колебаний в пространстве и времени. Чем более сложным является исследуемый режим, тем большее число гармоник нужно учитывать. Приемлемая точность вычислений в режиме динамического хаоса достигается только при очень большом количестве учитываемых гармоник. В данной работе мы ограничили число рассматриваемых гармоник $N \leq 256$ и, соответственно, результаты интегрирования (1), полученные в режиме хаотической динамики являются неточными и дают только качественное представление о поведении среды. По этой причине хаотическая динамика среды в рамках данной работы детально не исследуется.

Для характеристики динамических режимов исследовались колебания во времени в отдельных точках среды, а также мгновенные пространственные профили переменных, получаемые при наложении определенного условия на состояние в начальной точке среды ($s = 0$). Также строились распределения выбранной переменной в сечении траекторий в каждой точке среды заданной плоскостью.

В силу периодических граничных условий в среде могут существовать различные волновые режимы (моды). В квазигармоническом режиме возможны моды, для которых в любой момент времени t выполняется условие:

$$\varphi(L, t) = \Phi(0, t) - \Phi(L, t) = 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad (3)$$

где $\Phi(s, t)$ – мгновенная фаза колебаний в точке s в момент t . Условие (3) означает, что на длине системы укладывается целое число длин волны, равное $|n|$. Будем называть число n номером моды. Мода, соответствующая значению $n = 0$, представляет собой пространственно однородный режим, когда все точки среды колеблются в одной фазе. Значениям $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ соответствуют пространственно неоднородные режимы, то есть режимы бегущих волн. Знак « \pm » определяет направление распространения бегущей волны. Какие из мод будут устойчивыми, зависит от коэффициента диффузии γ и других параметров системы. При значениях параметров, указанных выше, в системе сосуществует несколько устойчивых мод, соответствующих значениям $n = 0$ и $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3$. В дальнейшем будем рассматривать бегущие волны только с положительными значениями n , так как поведение соответствующих мод с отрицательными n полностью аналогично и они отличаются лишь направлением распространения: волны с положительными числами n распространяются по кольцу слева направо, а с отрицательными – в обратную сторону [17].

Выбор того или иного устойчивого режима в численных экспериментах первоначально достигался заданием начальных значений переменных в точках среды с различным пространственным периодом. «Настройка» на нужную моду проводилась в квазигармоническом режиме, затем выбранный режим отслеживался при движении с малым шагом по параметру.

С ростом параметра возбуждения m форма колебаний точек среды во времени перестает быть близкой к гармонической, наблюдаются удвоения периода колебаний и переход к хаосу. Форма пространственных профилей также усложняется. По виду мгновенных профилей становится невозможным определить количество волн на длине системы. Однако значение n для каждой моды остается неизменным. Для определения числа n вычисляется сдвиг фазы колебаний на длине системы и далее применяется условие (3). Чтобы определить сдвиг фазы $\varphi(L, t)$, предварительно находится мгновенная фаза как функция координаты s в фиксированный момент времени t . Мгновенную фазу $\Phi(s, t)$ можно определить как угол поворота траектории в проекции x, y [20]

$$\Phi(s, t) = -\operatorname{arctg} \frac{y(s, t)}{x(s, t)} \pm \pi i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где для фиксированного значения t целая величина i определяется исходя из непрерывного характера зависимости фазы от пространственной координаты. Знак минус связан с направлением вращения траектории, которое противоположно направлению отсчета угла. В отличие от квазигармонического режима, для более сложных колебаний условие (3) может выполняться нестрого, поэтому для них находилось среднее значение $\bar{\varphi}(L)$.

2. Механизм удвоения периода колебаний для различных волновых мод

В генераторе Анищенко–Астахова при $g = 0.2$ значение параметра $m = m_1 \approx 0.966$, соответствует первой бифуркации удвоения. При том же значении параметра происходит удвоение периода колебаний во времени для однородного решения ($n = 0$) системы (1). По всем наблюдаемым характеристикам удвоения периода данной моды аналогичны бифуркациям удвоения предельного цикла в ГИН. Бифуркационные значения параметра m в пределах точности расчетов совпадают с соответствующими бифуркационными значениями для конечномерного генератора. При переходе через критическое значение $m = m_{кр} \approx 1.355$ возникает хаотическая во времени динамика, а пространственная однородность колебаний при этом разрушается. Невозможность синфазных (в нашем случае – пространственно-однородных) хаотических колебаний в системах с бесконечной размерностью отмечалась, например, в [21].

Удвоение периода колебаний для пространственно неоднородных мод ($n \neq 0$) происходит по иному сценарию. Рассмотрим моду с номером $n = 1$. Ее можно назвать «одноволновой модой», так как в квазигармоническом режиме на длине системы укладывается одна длина волны $\lambda = L/n$. В точке $m = 0.966$ для данной моды еще имеет место квазигармонический режим. На рис. 1 приведены фрагменты сечения фазового пространства плоскостью $x = 0$ в отдельной точке среды, а также мгновенные профили, полученные для одноволновой ($n = 1$) и двухволновой моды ($n = 2$) при $m = 0.972$. Сечения имеют вид, характерный для квазипериодических колебаний. Мгновенные профили не повторяются.

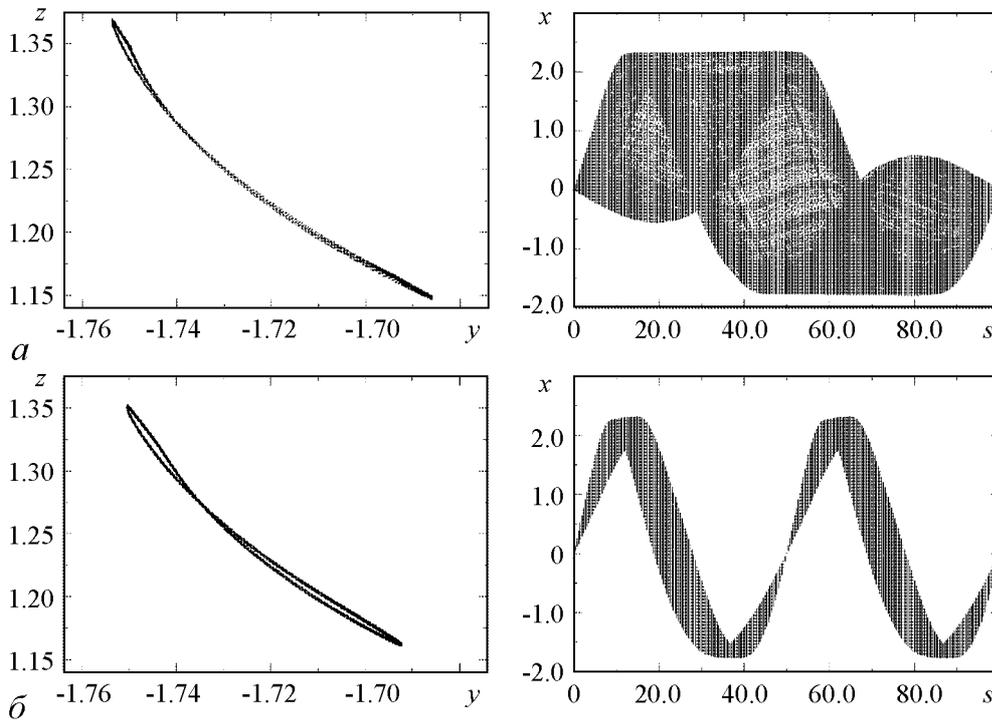


Рис. 1. Переход к колебаниям удвоенного временного периода. Слева – фрагменты сечений фазового пространства плоскостью $x = 0$, справа – пространственные профили режимов при переходе к колебаниям удвоенного во времени периода: $m = 0.972$; $n = 1$ (а); $n = 2$ (б)

Чтобы детальнее исследовать механизм удвоения периода одноволновой моды, были построены распределения точек в сечении. Полученные для нескольких значений параметра m распределения $x_i(s)$, $i = 1, 2, 3, \dots$ приведены на рис. 2. Из представленных графиков видно, что при $m = 0.966$ бифуркация еще не произошла и имеют место периодические колебания с исходным периодом T_0 . Для любой точки среды траектории пересекают секущую плоскость в двух точках, что соответствует двум направлениям пересечения. Причем эти точки одинаковы для любого значения s , так как сами колебания отличаются только фазовым сдвигом. Поэтому на графике, представленном на рис. 2, *а*, значения $x_i(s)$ ложатся на две прямые горизонтальные линии. Далее происходит бифуркация и возникают квазипериодические колебания. При $m = 0.968$ на графике можно видеть две строго горизонтальные полосы постоянной ширины (рис. 2, *б*). При $m = 0.984$ на графике можно видеть, что в некоторых точках пространства сечение состоит из двух четких линий, а в некоторых – размыто (рис. 2, *в*). Причина этого – недостаточное время построения сечения в режиме медленной модуляции колебаний. При дальнейшем росте параметра m устанавливаются колебания удвоенного периода $2T_0$ (рис. 2, *г*). Однако колебания в различных точках уже не будут одинаковы (с точностью до сдвига фаз). На рис. 2, *г* можно видеть, что точки в сечении зависят от координаты s . Можно также отметить точку среды, где сечение состоит не из четырех, а только из двух точек, то есть визуально колебаниям соответствует цикл периода T_0 .

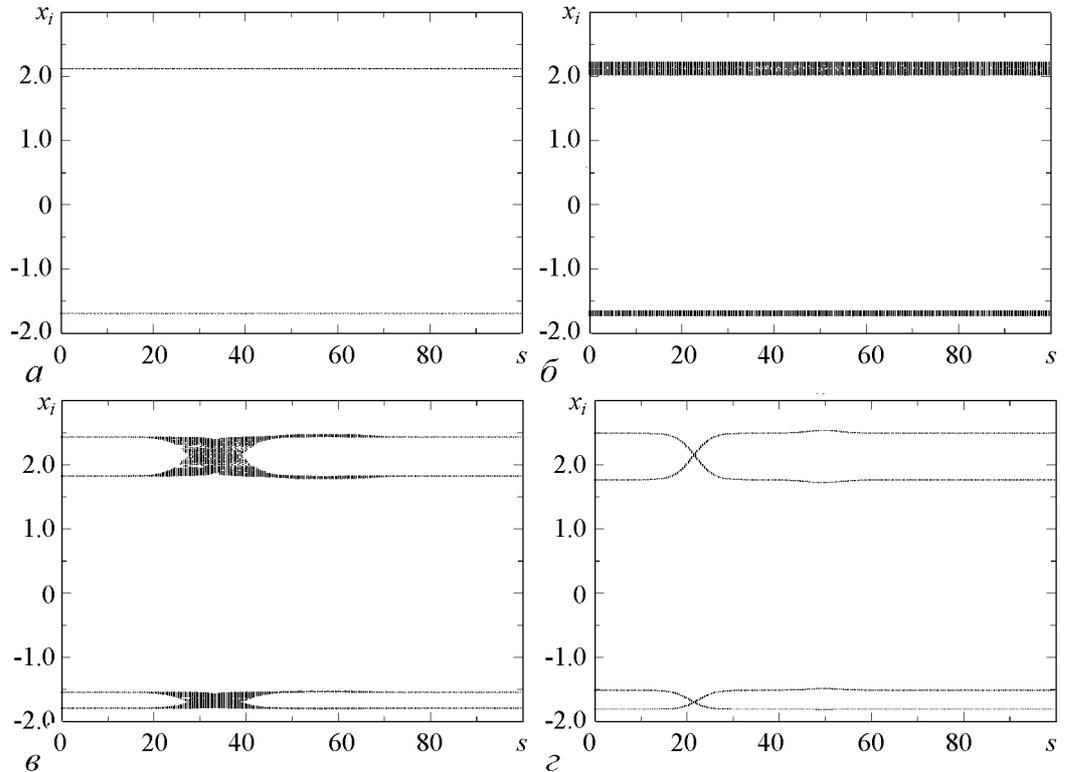


Рис. 2. Распределения $x_i(s)$ для одноволновой моды при различных значениях параметра m : 0.966 (*а*); 0.968 (*б*); 0.984 (*в*); 0.992 (*г*)

Режим медленной модуляции проиллюстрирован на рис. 3. На представленных на рис. 3, *a, б* графиках можно видеть, как меняется во времени распределение точек в сечении, построенное для ограниченного интервала наблюдения. Первые, начиная с некоторого момента t_0 , 500 точек в сечении (для каждого s) представлены на рис. 3, *a*, а последующие 500 точек – на рис. 3, *б*. Можно видеть смещение наблюдаемой на конечном времени структуры. С ростом параметра m такое смещение становится все более медленным. Указанное поведение точек сечения соответствует медленной модуляции колебаний во времени. О характере огибающей колебаний можно судить по графикам, приведенным на рис. 3, *в, г*. С ростом параметра m период модуляции увеличивается, стремясь к бесконечности при некотором значении параметра, соответствующем установлению периодических колебаний удвоенного периода.

Неоднородность характера колебаний удвоенного периода в пространстве проиллюстрирована на рис. 4 видом фазового портрета в различных точках среды. Таким образом, после бифуркации удвоения периода в некоторых точках пространства можно наблюдать цикл периода T_0 . Однако следует отметить, что режим колебаний в различных точках среды со взаимной связью между элементами должен быть топологически эквивалентен. Соответственно, существование в одних точках пространства колебаний удвоенного периода, а в других – исходного периода являются, скорее всего, только визуальным эффектом: расстояние между витками цикла оказывается меньше погрешности построения сечения.

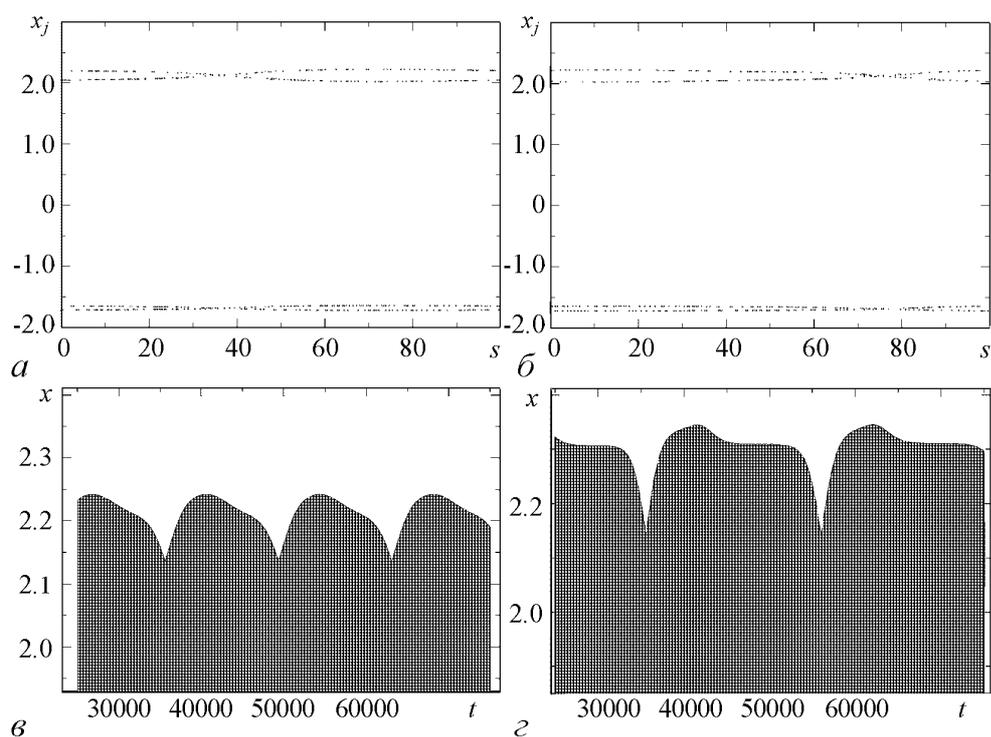


Рис. 3. Режим медленной модуляции, возникающий для одноволновой моды при переходе к колебаниям удвоенного периода: *a, б* – распределения $x_i(s)$, построенные при $m = 0.968$ для двух последовательных интервалов времени, в течении которых в каждой точке пространства было получено 500 точек в сечении траектории; *в, г* – фрагменты зависимости переменной x от времени в точке $s = 25$ при $m = 0.968$ и $m = 0.972$, соответственно. Черная область соответствует плотно «упакованным» колебаниям на основной частоте

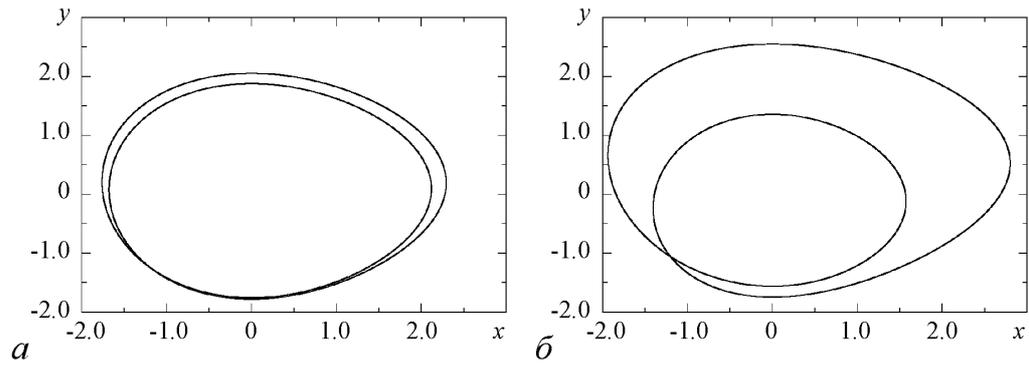


Рис. 4. Фазовые портреты колебаний, полученные для $n = 1$ при $m = 1.03$ в двух точках среды: $s = 2$ (а); $s = 20$ (б)

Полностью аналогичный сценарий, но при некотором малом смещении по параметру m , имеет место и для двух других устойчивых пространственно неоднородных мод ($n = 2$ и $n = 3$). Вместо «обычной» бифуркации удвоения периода для пространственно неоднородных мод удвоение периода колебаний во времени происходит сложным эволюционным путем, начинающимся с бифуркации рождения квазипериодических колебаний. Результаты проведенных нами вычислений говорят о том, что для разных мод бифуркационное значение параметра m_1 , при котором возникают квазипериодические колебания, оказывается неодинаковым. Оно несколько возрастает с увеличением номера моды.

Можно отметить, что рождение квазипериодических колебаний и переход к колебаниям удвоенного периода через резонанс на торе наблюдается для несинфазных режимов в системе двух взаимодействующих генераторов с бифуркациями удвоения периода [22]. Квазипериодические во времени колебания были обнаружены для пространственно неоднородных режимов в цепочках логистических отображений [8, 9, 23] и автогенераторов Чуа [6]. В этом отношении непрерывная среда ведет себя подобно пространственно дискретным моделям. Однако дискретные модели не могут демонстрировать в полной мере пространственно-временные структуры, возникающие в непрерывной среде после удвоения периода и нарушения квазигармоничности.

Мгновенные пространственные профили колебаний для $n \neq 0$ в результате удвоения периода во времени искажаются и уже не являются квазигармоническими. Профиль каждой пространственно неоднородной моды между двумя последовательными бифуркациями удвоения периода претерпевает сложную эволюцию. Увеличивая m , можно наблюдать, как «горбы» и «впадины» на мгновенном пространственном профиле трансформируются, образуя все новые экстремумы. Возникают все более мелкомасштабные пространственные осцилляции [24].

Наблюдаемое в непрерывной среде (1) усложнение пространственного профиля не было зафиксировано в пространственно дискретной модели автоколебательной среды с удвоениями периода колебаний во времени [6]. Возможно, это объясняется слишком малым количеством автогенераторов в цепочке, моделирующей среду.

3. Вторая бифуркация рождения квазипериодических колебаний и переход к хаосу для неоднородных мод

Второе удвоение периода для неоднородных мод при выбранном значении коэффициента диффузии не наблюдается. При некотором значении m_2 снова происходит рождение квазипериодических колебаний, уже на основе периодических колеба-

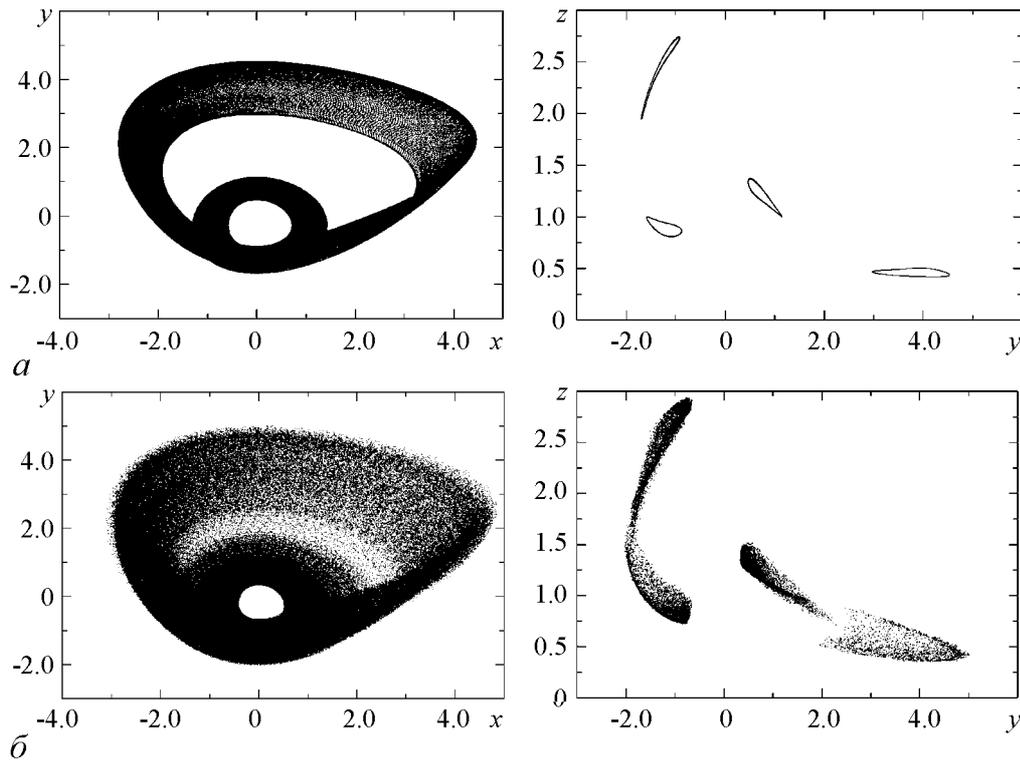


Рис. 5. Вторичное возникновение квазипериодических колебаний, их разрушение и переход к хаосу для моды $n = 1$: $m = 1.34$ (а), $m = 1.39$ (б). Слева – фазовые портреты в точке $s = 40$, справа – соответствующие сечения фазового пространства плоскостью $x = 0$

ний удвоенного периода. Это значение, как и m_1 , несколько различно для различных мод. При дальнейшем увеличении m квазипериодические колебания разрушаются и возникает хаотическая динамика точек среды во времени. По имеющимся у нас результатам исследования среды, задаваемой теми же уравнениями (1), но с открытыми концами, неоднородные моды также порождают квазипериодические колебания и переход к хаосу через их разрушение. Таким образом, возникновение и разрушение квазипериодических колебаний является типичным механизмом перехода к хаосу в автоколебательной среде. Рождение квазипериодических колебаний с удвоенным квазипериодом и их разрушение проиллюстрировано для моды $n = 1$ на рис. 5.

4. Воздействие шума на среду.

Бифуркации удвоения периода в присутствии шума

В работе рассматривалось воздействие аддитивного шума на среду в режимах с различными номерами n в окрестности первой бифуркации удвоения. Будем использовать шум, представляющий собой воздействие одной и той же случайной δ -коррелированной во времени силы $F(t) = \sqrt{2D}\xi(t)$ на все точки среды. Здесь $\xi(t)$ – нормированный источник гауссова белого шума (со средним значением $\langle \xi(t) \rangle \equiv 0$ и корреляцией $\langle \xi(t)\xi(t + \tau) \rangle = \delta(\tau)$); D – константа, характеризующая интенсивность шума. Если воздействовать такой силой только на некоторый участок среды, то каче-

ственных изменений наблюдаемых эффектов не будет. Уменьшение длины участка, подверженного действию случайной силы, оказывается эквивалентным уменьшению интенсивности шума [25]. Проведенные исследования показали, что разные моды по-разному устойчивы к шуму. Чем больше номер n , тем меньшей интенсивности шума D достаточно, чтобы данный режим перестал существовать. При этом система переключается в режим с номером $n - 1$ и не возвращается в режим с номером n ни с течением времени, ни при изменении начальных условий. Таким образом, можно говорить о том, что шум подавляет пространственно-неоднородные моды, начиная с больших значений номера n . При достаточно сильном шуме в кольце можно наблюдать только зашумленный пространственно-однородный режим, которому соответствует нулевой средний сдвиг фазы на всей длине системы: $\bar{\varphi}(L) = 0$ [25]. Похожие эффекты наблюдались в кольце периодических генераторов [17] и, по-видимому, носят достаточно общий характер.

Выберем значение интенсивности шума D таким, чтобы все устойчивые моды, наблюдаемые без шума, еще сохранялись, и рассмотрим, как влияет шум на удвоения периода колебаний. Зафиксируем значение m , соответствующее колебаниям удвоенного периода для данной моды. Увеличивая интенсивность шумового воздействия, можно наблюдать «смазывание» фазовых портретов колебаний настолько, что становится невозможно различить два витка на предельном цикле. Такое же поведение под действием шума имеет место в сосредоточенных системах малой размерности и отображениях последования [26].

В среде с ростом интенсивности шума имеют место стохастические бифуркации связанности (или обратные бифуркации удвоения). Они представляют собой бифуркации феноменологического типа (так называемые Р-бифуркации [27]), состоящие в качественном преобразовании плотности вероятности динамических переменных. Рассмотрим эволюцию распределения переменной $x(s, t)$ в точке пространства s . Если без шума имели место колебания удвоенного периода, то при достаточно малом шуме практически во всех точках среды устанавливается стационарное распределение $p(x, s)$, имеющее четыре локальных максимума. С ростом интенсивности шума D происходит постепенная эволюция распределения, приводящая к изменению числа максимумов: их становится два. Значение $D = D_c$, при котором происходит изменение числа максимумов, соответствует стохастической бифуркации. Стохастические бифуркации связанности наблюдались для всех существующих устойчивых мод. На рис. 6 приведены примеры распределений $p(x, s)$ в фиксированной точке s , полученные для моды $n = 0$ при различных значениях интенсивности шума D . Они иллюстрируют стохастические бифуркации связанности.

Проведенные исследования показывают, что изменение числа максимумов распределения $p(x, s)$ происходит одновременно во всех точках среды как для однородной моды $n = 0$, так и для неоднородных мод. Одновременность наблюдается даже при локальном характере шумового воздействия и несмотря на то, что для $n \neq 0$ расстояние между витками траектории на фазовом портрете сильно меняется в зависимости от координаты s ! Если и существует бифуркационный интервал значений $D_c(s)$, то он очень мал. Во всяком случае, для всех значений s переход от распреде-

ления с четырьмя максимумами к распределению с двумя максимумами наблюдался для очень близких значений интенсивности D_c , различия между которыми укладывались в пределы ошибки численного эксперимента.

Имеется некоторая особенность шумового воздействия на неоднородные моды в режиме удвоенного периода вблизи его возникновения. Шум как бы «возвращает» систему в квазипериодический режим, порождая медленную модуляцию колебаний во времени и характерные медленные изменения пространственной структуры точек сечения. Однако огибающая в данном случае является не периодическими колебаниями, а медленным случайным процессом. Соответствующие иллюстрации приведены на рис. 7.

Если зафиксировать интенсивность шума и увеличивать параметр m , то число максимумов распределения при некотором бифуркационном значении параметра будет удваиваться. То есть вместо бифуркаций связанности в этом случае правильнее говорить о стохастических бифуркациях удвоения. В действительности, это одни и те

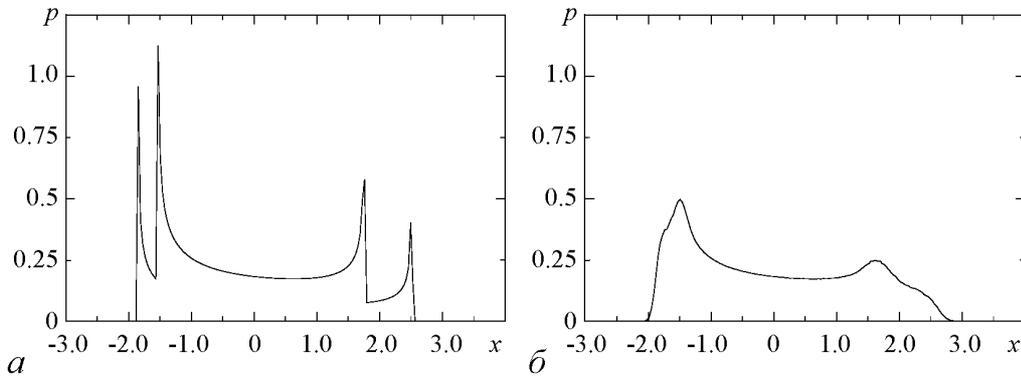


Рис. 6. Вызванные шумом бифуркации связанности в среде при $m = 0.972$: плотности вероятности $p(x, s)$ в точке $s = 25$, полученные для однородного режима $n = 0$ при однородном шуме с интенсивностью $D = 0.0000001$ (а) и $D = 0.0001$ (б)

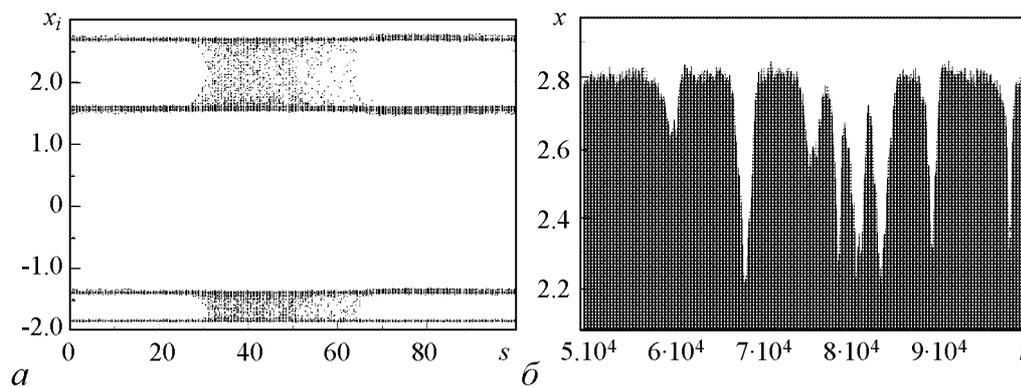


Рис. 7. Режим медленной случайной модуляции, наблюдающийся для моды $n = 1$ при $m = 1.03$ в результате действия шума с интенсивностью $D = 0.00001$: а – распределение $x_i(s)$; б – фрагмент зависимости переменной x от времени в точке $s = 40$

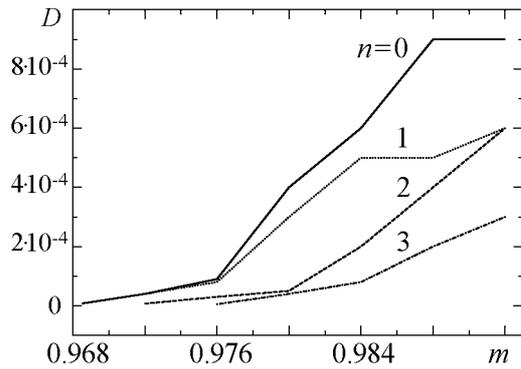


Рис. 8. Зависимость критического значения интенсивности шума D_c от параметра возбуждения m для мод с различным числом n .

же бифуркации, которым на плоскости параметров m, D соответствуют одни и те же бифуркационные линии, разделяющие области с разным числом экстремумов. Соответствующие линии, построенные для разных мод, представлены на рис. 8. Можно видеть, что бифуркации удвоения с ростом интенсивности шума все больше «запаздывают», смещаясь в сторону больших m . Это же происходит с ростом номера моды: удвоение происходит позже, а бифуркация связанности с ростом D наблюдается раньше.

Заключение

Предлагаемая нами модель автоколебательной среды со сложной динамикой элементарной ячейки демонстрирует большое разнообразие пространственно-временных режимов, бифуркации удвоения периода колебаний и переход к хаотической динамике. В среде при выбранных значениях параметров существует несколько устойчивых мод, отличающихся числом полных оборотов фазы колебаний на длине системы (номер моды n). Все они эволюционируют с ростом параметра возбуждения m . Однако для однородной моды $n = 0$, соответствующей одинаковым колебаниям всех точек среды, и для мод $n \neq 0$ эта эволюция различна. Если для однородной моды характерна фейгенбаумовская последовательность «обычных» удвоений периода, то для бегущих волн механизм удвоения периода связан с рождением квазипериодических колебаний и их постепенной эволюцией, приводящей к установлению колебаний удвоенного периода во всех точках среды.

Бифуркации мод $n \neq 0$ приводят к образованию пространственно неоднородных структур, для которых характеристики колебаний зависят от точки среды. С ними также связано отклонение пространственного профиля волны от гармонической формы и его постепенное усложнение с ростом параметра m . После вторичного возникновения квазипериодических колебаний происходит их разрушение и переход к хаосу.

Воздействие случайной силы на среду при достаточной интенсивности приводит к исчезновению режимов бегущих волн. Сохраняется только режим $n = 0$. Если интенсивность шума мала, то можно наблюдать различные сосуществующие моды. В присутствии шума время от времени должны происходить переключения между устойчивыми режимами, однако в численных экспериментах этого наблюдать не удавалось из-за ограниченности рассчитываемых реализаций во времени. Для любой существующей моды в случае колебаний удвоенного периода с ростом интенсивности шума наблюдались индуцированные шумом бифуркации связанности (обратные бифуркации удвоения). Они фиксировались по изменению числа максимумов вероятностного распределения переменной $x(s, t)$ в выбранной точке среды s . Бифурка-

ционное значение интенсивности шума было примерно одинаковым для всех точек среды и зависело от номера моды n . Чем больше значение n , тем раньше происходит бифуркация связанности. Таким образом, бегущие волны с большими номерами n (коротковолновые режимы) оказываются наиболее чувствительными к шуму.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (контракт №14.740.11.0074).

Библиографический список

1. Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И. Уравнение Гинзбурга–Ландау и нелинейная динамика неравновесных сред // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. 1987. Т. 32, № 2. С. 131.
2. Aranson I.S., Kramer L. The world of the complex Ginzburg–Landau equation // Reviews of Modern Physics. 2002. Vol. 74, № 1. P. 99.
3. Osipov G.V., Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J. Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillators // Physical Review E. 1997. Vol. 55, № 3. P. 2353.
4. Shabunin A.V., Feudel U., Astakhov V.V. Phase multistability, phase synchronization in an array of locally coupled period-doubling oscillators // Physical Review E. 2009. Vol. 80, № 2. P. 026211.
5. Belykh V.N., Verichev N.N., Kocarev L., Chua L.O. On chaotic synchronization in a linear array of Chua's circuits // Journal of Circuits, Systems, Computers. 1993. Vol. 3, № 2. P. 579.
6. Shabunin A.V., Astakhov V.V., Anishchenko V.S. Developing chaos on base of traveling waves in a chain of coupled oscillators with period-doubling: synchronization, hierarchy of multistability formation // International Journal of Bifurcation, Chaos. 2002. Vol. 12, № 8. P. 1895-.
7. Анищенко В.С., Арансон И.С., Постнов Д.Э., Рабинович М.И. Пространственная синхронизация и бифуркации развития хаоса в цепочке связанных генераторов // Доклады Академии Наук СССР. 1986. Т. 286, № 5. С. 1120.
8. Kaneko K. Spatiotemporal Chaos in one-, two-dimensional coupled map lattices // Physica D. 1989. Vol. 37, № 1-3. P. 60.
9. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. Критическая динамика решеток связанных отображений у порога хаоса // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. 1991. Т. 34, № 10–12. С. 1079.
10. García-Ojalvo J., Sancho J.M. Noise in spatially extended systems. New York: Springer. 1999. P. 307.
11. García-Ojalvo J., Hernández-Machado A., Sancho J.M. Effects of external noise on the Swift–Hohenberg equation // Physical Review Letters. 1993. Vol. 71, № 10. P. 1542.
12. Cross M.C., Hohenberg P.C. Pattern formation outside of equilibrium // Reviews of Modern Physics. 1993. Vol. 65, № 3. P. 851.

13. *Viñals J., Hernández-García E., Miguel M.S., Toral R.* Numerical study of the dynamical aspects of pattern selection in the stochastic Swift-Hohenberg equation in one dimension // *Physical Review A*. 1991. Vol. 44, № 2. P. 1123.
14. *Kuznetsov S.P.* Noise-induced absolute instability // *Mathematics, Computers in Simulation*. 2002. Vol. 58, № 4–6. P. 435.
15. *Anishchenko V.S., Akopov A.A., Vadivasova T.E., Strelkova G.I.* Mechanisms of chaos onset in an inhomogeneous medium under cluster synchronization destruction // *New Journal of Physics*. 2006. Vol. 8, № 6. P. 84.
16. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Popov P.V.* Incomplete noise-induced synchronization of spatially extended systems // *Physical Review E*. 2008. Vol. 77, № 3. P. 036215.
17. *Шабунин А.В., Акопов А.А., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е.* Бегущие волны в дискретной ангармонической автоколебательной среде // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2005. Т. 13, № 4. С. 37.
18. *Анищенко В.С., Астахов В.В.* Экспериментальное исследование механизма возникновения и структуры странного аттрактора в генераторе с инерционной нелинейностью // *Радиотехника и электроника*. 1983. Т. 28, № 6. С. 1109.
19. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. Москва: Наука, 1990. С. 312.
20. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Strelkova G.I.* Instantaneous phase method in studying chaotic, stochastic oscillations and its limitations // *Fluctuation, Noise Letters*. 2004. Vol. 4, № 1. P. L219.
21. *Pecora L.M.* Synchronization conditions, desynchronizing patterns in coupled limit-cycle, chaotic systems // *Physical Review E*. 1998. Vol. 58, № 1. P. 347.
22. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Гуляев Ю.В., Селезнев Е.П.* Мультистабильные состояния диссипативно-связанных фейгенбаумовских систем // *Письма в Журнал Технической Физики*. 1988. Т. 15, № 3. С. 60.
23. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И.* Формирование мультистабильности, классификация изомеров и их эволюция в связанных фейгенбаумовских системах // *Известия высших учебных заведений. Радиофизика*. 1991. Т. 34, № 1. С. 35.
24. *Слепнев А.В., Вадивасова Т.Е., Листов А.С.* Мультистабильность, удвоения периода и подавление бегущих волн шумовым воздействием в нелинейной автоколебательной среде с периодическими граничными условиями // *Нелинейная Динамика*. 2010. Т. 6, № 4. С. 755.
25. *Слепнев А.В.* Фазовая мультистабильность и влияние локального источника шума в модели автоколебательной среды. Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2009: Сборник материалов научной школы-конференции. Саратов: ООО ИЦ «Наука», 2010. С. 94.
26. *Svensmark H., Samuelsen M.R.* Perturbed period-doubling bifurcation. I. Theory // *Physical Review B*. 1990. Vol. 41, № 7. P. 4181.
27. *Arnold L.* *Random Dynamical Systems*. Berlin: Springer. 2003. P. 586.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию 8.11.2010
После доработки 8.07.2011*

PERIOD DOUBLING BIFURCATIONS AND NOISE EXCITATION EFFECTS IN A MULTISTABLE SELF-SUSTAINED OSCILLATORY MEDIUM

A.V. Slepnev, T.E. Vadivasova

The model of a self-oscillatory medium composed from the elements with complex self-oscillatory behavior is studied. Under periodic boundary conditions the stable self-oscillatory regimes in the form of traveling waves with different phase shifts are coexisted in medium. The study of mechanisms of the oscillations period doubling in time is performed for different coexisted modes. For all observed spatially-non-uniform regimes (traveling waves) the period doubling occurs through the appearance of time-quasiperiodic oscillations and their further evolution. The period doubling result in multistability development. For each mode with the given phase shift the different stable non-uniform structures, which are differed by the distribution of oscillations characteristics in space, emerge. The influence of a noise signal leads to the shift of doubling bifurcation in the direction of the control parameter increasing. When the value of control parameter is fixed the stochastic bifurcations of contingency, which are shown in reduction of extremes numbers in the probabilistic distribution, are observed with the increasing of noise intensity. When the noise is sufficiently great the spatially-non-uniform modes corresponding to nonzero phase shifts disappear.

Ключевые слова: Self-oscillatory medium, multistability, period doubling, spatial structures, stochastic bifurcation, P-bifurcation, noise.



Слепнев Андрей Вячеславович – родился в Саратове (1987), окончил физический факультет Саратовского государственного университета по специальности «радиофизика и электроника» (2009). В 2011 году получил в СГУ степень магистра физики по направлению «физика». Научные интересы: динамика распределенных систем, пространственные структуры, влияние случайного воздействия на динамику нелинейных систем.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: a.v.slepnev@gmail.com



Вадивасова Татьяна Евгеньевна – родилась в 1958 году. Окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981), доктор физико-математических наук. В настоящее время – профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических осцилляторов, явление фазовой мультистабильности взаимодействующих хаотических систем, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, статистические характеристики динамического хаоса, роль флуктуаций в нелинейных системах и др. Автор более 60 публикаций в отечественной и зарубежной печати, включая 3 монографии.

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: vadivasovate@yandex.ru



**ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ И МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ
В СИСТЕМЕ НЕСИММЕТРИЧНО СВЯЗАННЫХ ДВУМЕРНЫХ
ОТОБРАЖЕНИЙ, ДЕМОНИСТРИРУЮЩИХ БИФУРКАЦИИ
УДВОЕНИЯ ПЕРИОДА И НЕЙМАРКА–САКЕРА**

М.В. Поздняков

Исследуется явление мультистабильности в системе двух связанных универсальных двумерных отображений, допускающих переход к хаосу как через последовательность бифуркаций удвоения периода, так и через разрушение квазипериодических движений. При различных режимах динамики подсистем исследована эволюция областей мультистабильности в пространстве параметров и бассейнов притяжения сосуществующих аттракторов этой системы при отстройке связи от симметричной. Выявлено уменьшение числа возможных сосуществующих аттракторов, исчезновение гиперхаоса и трехчастотного тора при введении асимметрии связи.

Ключевые слова: Мультистабильность, удвоения периода, бифуркация Неймарка–Сакера.

Как известно, динамическая система может иметь несколько аттракторов, реализации каждого из которых отвечает определенный набор начальных условий в фазовом пространстве, называемый бассейном притяжения аттрактора. Такой эффект носит название мультистабильности. Явление мультистабильности распространено и играет важную роль в физике лазеров, физике полупроводников, химии, экологии и других естественных науках (см., например, обзор [1]). Часто мультистабильность возникает в связанных системах и выражается в возможности синхронизации подсистем в различных фазах [1–10]. В настоящее время достаточно хорошо изучены связанные системы с удвоениями периода. Были выявлены основные механизмы появления, эволюции и разрушения мультистабильности в системах с симметричной связью. В [11] было изучено влияние введения несимметричной связи на мультистабильность в системе связанных логистических отображений. Выявлено постепенное сокращение мультистабильных режимов и дальнейшее исчезновение мультистабильности с ростом отстройки по параметру связи.

В нелинейной динамике известно несколько универсальных (то есть одинаковых для целых классов систем) сценариев перехода к хаосу. Основными являются переход через удвоения периода и через разрушение квазипериодических движений [12]. Последние тесно связаны с явлением синхронизации и сопутствующими

эффектами, таким как возможность существования системы языков кратной синхронизации (языков Арнольда) на плоскости параметров. Поэтому интерес представляет исследование моделей связанных систем, автономная динамика которых демонстрирует возможность сосуществования обоих типичных сценариев.

В данной работе в этом контексте исследуется система связанных универсальных двумерных отображений с диссипативной связью [13], имеющая вид

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n, y_n) + (\varepsilon - \delta)(f(u_n, v_n) - f(x_n, y_n)), \\y_{n+1} &= g(x_n, y_n) + (\varepsilon - \delta)(g(u_n, v_n) - g(x_n, y_n)), \\u_{n+1} &= f(u_n, v_n) + (\varepsilon + \delta)(f(x_n, y_n) - f(u_n, v_n)), \\v_{n+1} &= g(u_n, v_n) + (\varepsilon + \delta)(g(x_n, y_n) - g(u_n, v_n)),\end{aligned}\tag{1}$$

где x, y – динамические переменные первой подсистемы; u, v – динамические переменные второй подсистемы; нелинейные функции f и g задаются в виде $f(x, y) = Sx - y - (x^2 + y^2)$, $g(x, y) = Jx - (x^2 + y^2)/5$, а параметры ε и δ имеют смысл амплитуды симметричной связи и отстройки по параметру связи.

В такой постановке задачи автономной системе отвечает следующее отображение:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= Sx_n - y_n - (x_n^2 + y_n^2), \\y_{n+1} &= Jx_n - \frac{(x_n^2 + y_n^2)}{5}.\end{aligned}\tag{2}$$

Это отображение интересно тем, что для каждой из подсистем параметры S и J представляют собой след и определитель матрицы Якоби, что делает возможным непосредственное наблюдение области устойчивости неподвижной точки на плоскости параметров [14,15]. Как известно, бифуркационные сценарии на плоскости (след-якобиан отображения) определяются именно этими параметрами [12]. Поэтому в системе (2) возможно наблюдение не только каскада бифуркаций удвоений периода, но и бифуркации Неймарка–Сакера, ассоциирующейся с квазипериодической динамикой и системой языков Арнольда.

На рис. 1, *a* приведена полученная численно карта динамических режимов системы (2). На ней цифрами обозначены периоды основных аттракторов (циклов). На рис. 1, *б* приведена карта показателей Ляпунова, на которой: белому цвету соответствует нулевой старший ляпуновский показатель; черному – минимальный; области разбегания колебаний обозначены белым цветом; штриховкой отмечены области, в которых старший показатель больше нуля, то есть области существования хаотической динамики. Бифуркация Неймарка–Сакера наблюдается при $J = 1$.

Целью данной работы было исследование областей мультистабильности и бассейнов притяжения в системе связанных универсальных двумерных отображений при введении отстройки по параметру связи, изучение ее влияния на режимы гиперхаоса и квазипериодические режимы.

Далее будет исследовано устройство плоскостей (S_1, S_2) «одноименных» параметров систем при постоянных J_1, J_2 и устройство плоскостей (J_1, J_2) при постоянных S_1, S_2 и различных значениях параметров связи. Для этого было выбрано несколько «путей» движения по плоскости параметров автономной системы. Плоскость параметров (S_1, S_2) рассматривалась при движении по пути «*a*» (см. рис. 1, *a*),

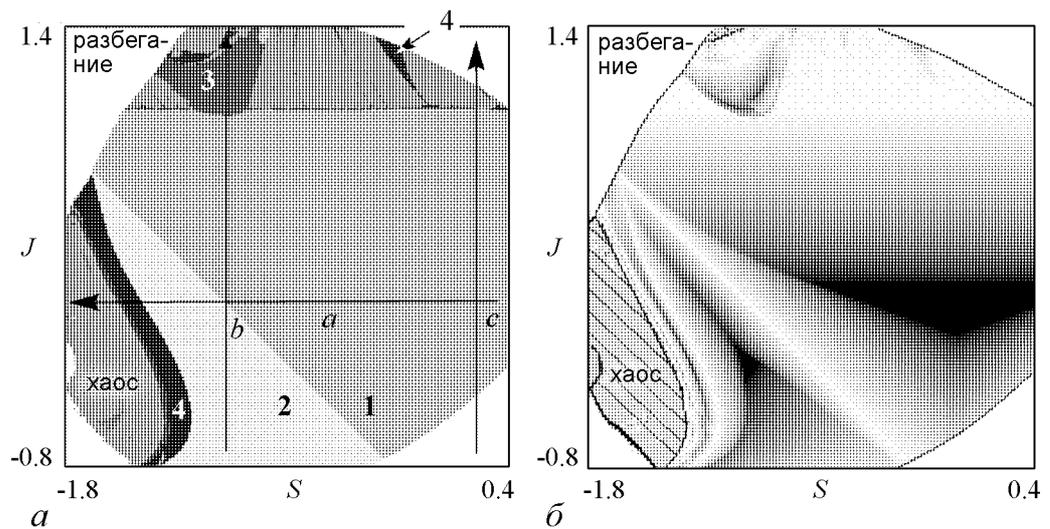


Рис. 1. a – карта динамических режимов; b – карта старшего показателя Ляпунова системы (2). Цифрами на карте динамических режимов обозначен период аттрактора, устойчивого в данной области

то есть при постоянных значениях J_1, J_2 ($J_1 = J_2 = 0$). В данном случае в системе наблюдается переход к хаосу через последовательность удвоений периода. При движении вдоль путей « b » и « c » (см. рис. 1, a) были выбраны постоянными S_1, S_2 , и рассматривалось устройство плоскости параметров (J_1, J_2) . Путь « b » при пересечении линии $J = 1$ проходит через язык синхронизации с периодом 3 ($S_1 = S_2 = -1$), а путь « c » – через область квазипериодических движений.

Для анализа системы (1) применялся метод построения карт мультистабильности, заключающийся в окрашивании определенным цветом каждой точки плоскости параметров в зависимости от количества сосуществующих аттракторов при данных параметрах [11]. Сначала рассмотрим движение вдоль пути « a ». На рис. 2, a приведена карта динамических режимов системы (2) в случае симметричной связи, а на рис. 2, b – соответствующая ей карта мультистабильности, на которой количество сосуществующих аттракторов в каждой области обозначено цифрой. Область существования двух аттракторов опирается на линию рождения цикла периода 2 и располагается вдоль диагонали плоскости (S_1, S_2) . Существуют две области сосуществования трех аттракторов. Они также располагаются вдоль диагонали, одна смещена относительно другой. В области их перекрывания сосуществуют четыре аттрактора, то есть наблюдается типичный вид устройства плоскости параметров для связанных систем, демонстрирующих переход к хаосу через последовательность удвоений периода. При введении отстройки по параметру связи на карте динамических режимов появляются разрывы линий бифуркаций удвоения периода, вблизи диагонали появляются области существования квазипериодической динамики (рис. 2, b). При этом происходит сокращение площади областей мультистабильности, при постепенном увеличении δ перестает наблюдаться сосуществование четырех и трех аттракторов. Так, при $\delta = 0.1$, возможно сосуществование только двух аттракторов (рис. 2, c), при этом область их сосуществования значительно сокращается по площади, и большая ее часть расположена по одну сторону относительно диагонали. При $\delta \approx 0.2$ мультистабильность практически не наблюдается.

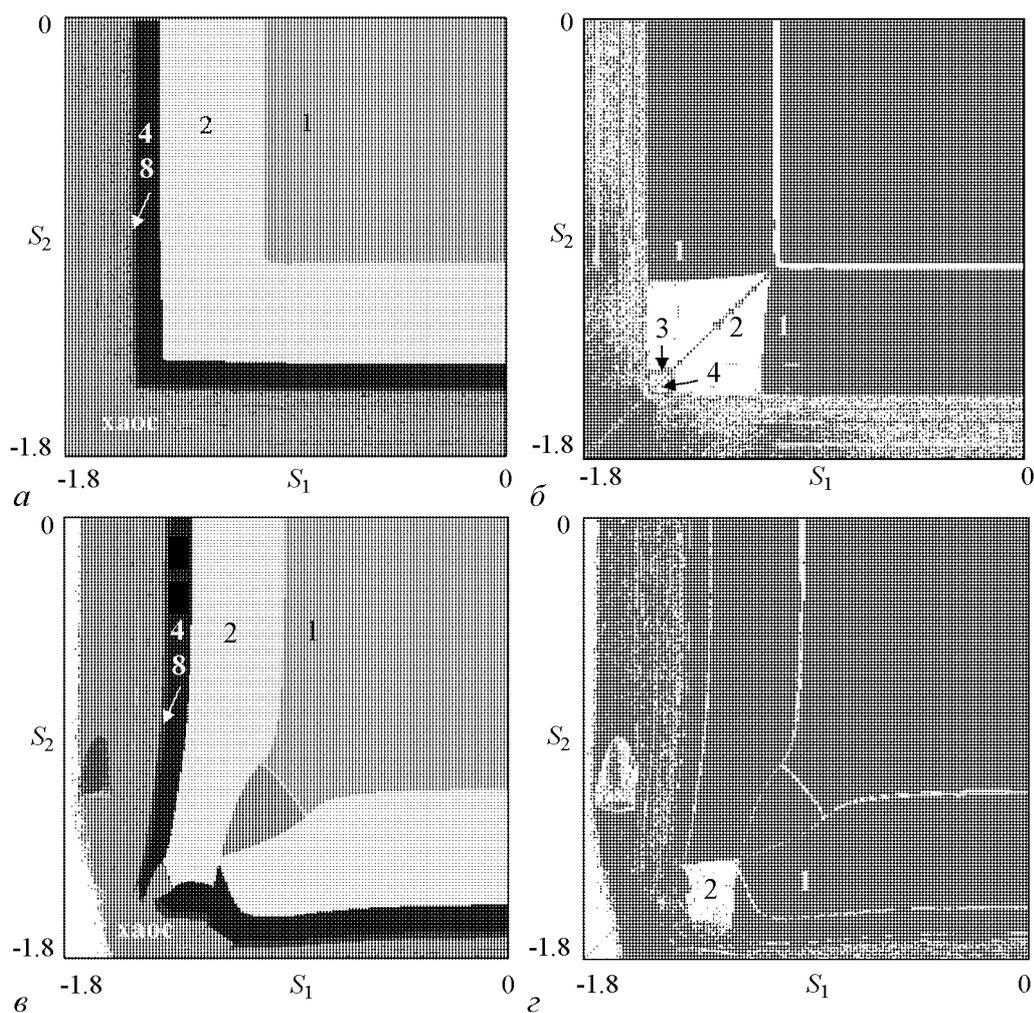


Рис. 2. *a, в* – карты динамических режимов; *б, з* – карты мультистабильности системы (1) при $J_1 = J_2 = 0$, $\varepsilon = 0.01$; *a, б*: $\delta = 0$; *в, з*: $\delta = 0.1$. Цифрами на картах мультистабильности обозначено количество сосуществующих аттракторов в каждой из отмеченных областей

Изучим устройство плоскости параметров (J_1, J_2) при движении вдоль пути «*b*», который пересекает линию рождения цикла периода 2 при $J = 0$ и проходит через язык синхронизации периода три, опирающийся на линию бифуркации Неймарка–Сакера. На соответствующей плоскости параметров (J_1, J_2) в области $J_1 < 0$, $J_2 < 0$ будет наблюдаться область сосуществования двух аттракторов, подобная изображенной на рис. 2, *б*. Сосуществования большего количества аттракторов наблюдаться не будет, так как путь «*b*» не пересекает линии рождения циклов больших периодов. При введении асимметрии связи эволюция этой области будет происходить так же, как и в первом случае. Поэтому подробно рассмотрим только область плоскости (J_1, J_2) , в которой расположен язык синхронизации. Устройство областей мультистабильности в этой части карты демонстрирует рис. 3, *a*. Сосуществование двух аттракторов наблюдается только вдоль линии, разделяющей область устойчивости неподвижной точки и область квазипериодической динамики. При $J_1 > 1$, $J_2 > 1$ наблюдается область сосуществования трех аттракторов, кото-

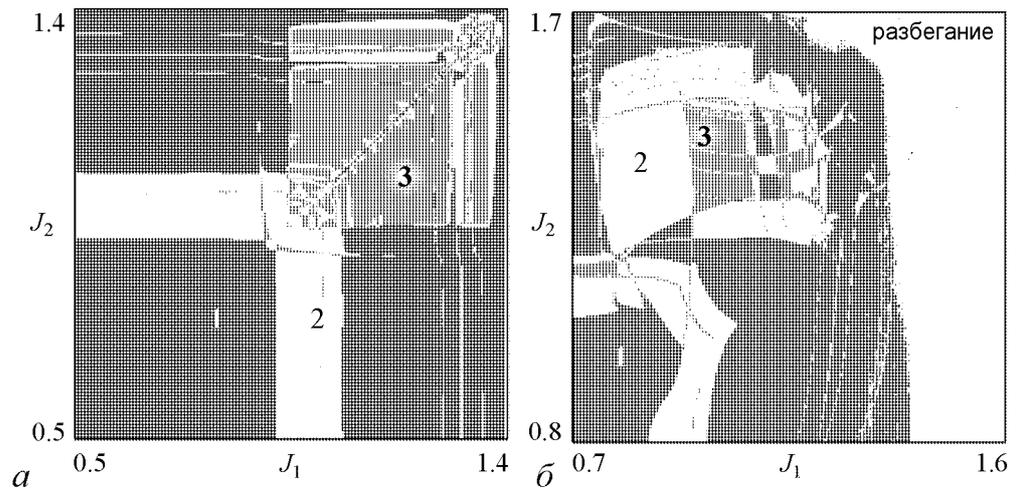


Рис. 3. Карты мультистабильности системы (1) при $S_1 = S_2 = -1$, $\varepsilon = 0.01$ и δ : а - 0; б - 0.05

рая симметрична относительно диагонали плоскости. Данная область представляет собой полное перекрытие двух областей, в каждой из которых сосуществуют два аттрактора: синхронный и несинхронный. При этом отличаются они только несинхронным аттрактором. При введении отстройки по параметру связи это перекрытие становится неполным (рис. 3, б), области смещаются перпендикулярно диагонали и сокращаются в размерах. При значении отстройки $\delta \approx 0.15$ мультистабильность исчезает.

Теперь рассмотрим устройство плоскости параметров (J_1, J_2) при движении по плоскости (S, J) автономной подсистемы по пути «с», то есть при пересечении линии бифуркации Неймарка–Сакера вне языка синхронизации. В таких областях представляет трудность определение количества сосуществующих аттракторов. Наиболее удобным в данном случае представляется метод построения карт спектра показателей Ляпунова, поскольку он легко позволяет отличить квазипериодические режимы от хаотических. Каждая точка плоскости параметров в этом случае окрашивается в определенный цвет в зависимости от значений, принимаемых каждым из показателей Ляпунова. Исследуемая система (1) четырехмерная, поэтому ей соответствует четыре показателя. Два из них всегда отрицательны, и в зависимости от знаков двух других возможны следующие сигнатуры: $\Lambda_1 < 0, \Lambda_2 < 0$ – периодический режим; $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 < 0$ – двухчастотный тор; $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = 0$ – трехчастотный тор; $\Lambda_1 > 0, \Lambda_2 < 0$ – хаос; $\Lambda_1 > 0, \Lambda_2 > 0$ – гиперхаос. На рис. 4, а приведена карта спектра ляпуновских показателей системы (1) на плоскости (J_1, J_2) при $S_1 = 0.2, S_2 = 0.2$. Видно, что в области $J_1 < 1, J_2 < 1$ наблюдается периодическая динамика. На линиях $J_1 = 1, J_2 = 1$ происходит рождение двухчастотного тора. При $J_1 > 1, J_2 > 1$ симметрично диагонали плоскости расположены две области, в которых $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = 0$, то есть области существования трехчастотного тора, разделенные узкой областью, в которой равен нулю только старший показатель. При введении отстройки по параметру связи области существования трехчастотного тора сокращаются в размерах, расстояние между ними увеличивается (см. рис. 2, б). При дальнейшем увеличении δ существование трехчастотного тора наблюдаться перестает.

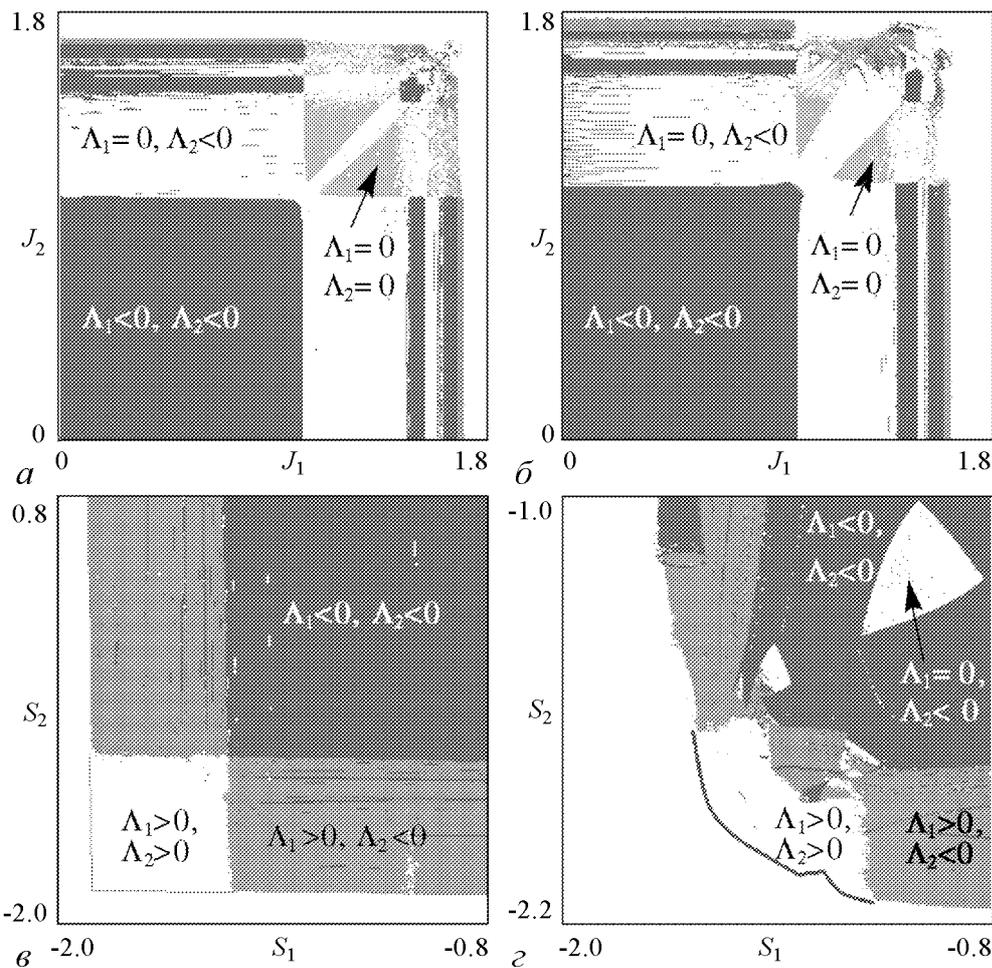


Рис. 4. Карты спектра ляпуновских показателей системы (1): *a*, *б* – на плоскости (J_1, J_2) при $S_1 = S_2 = -1$, $\varepsilon = 0.01$ и δ : *a* – 0, *б* – 0.02; *в*, *г* – на плоскости (S_1, S_2) при $J_1 = J_2 = 0$, $\varepsilon = 0.01$ и δ : *в* – 0, *г* – 0.1

Вернемся к рассмотрению устройства плоскости параметров (S_1, S_2) при значении параметров J_1, J_2 , соответствующем движению по пути «*a*». Теперь изучение проведем с помощью построения карт спектра ляпуновских показателей, аналогично тому, как это было проделано для пути «*c*». На рис. 4, *в* приведена карта для симметричного случая, на которой видно, что помимо областей хаоса в системе существует режим гиперхаоса, область которого располагается вдоль диагонали плоскости параметров. С введением δ она сужается вдоль диагонали, становится шире в направлении, ей перпендикулярном (рис. 4, *г*), и при $\delta \approx 0.2$ практически исчезает.

Также было рассмотрено устройство бассейнов притяжения аттракторов в обеих из рассмотренных областей мультистабильности. В области, опирающейся на линию рождения цикла периода 2 (см. рис. 2, *б*, *г*) структура бассейнов имеет типичный для связанных систем вид (рис. 5, *а*). При введении асимметрии связи возможны искажения границ бассейнов, объединение отдельных частей бассейна синхронного аттрактора в одну связную область (рис. 5, *б*). Таким образом, структура бассейнов притяжения аттракторов в этой области (как в случае симметричной, так

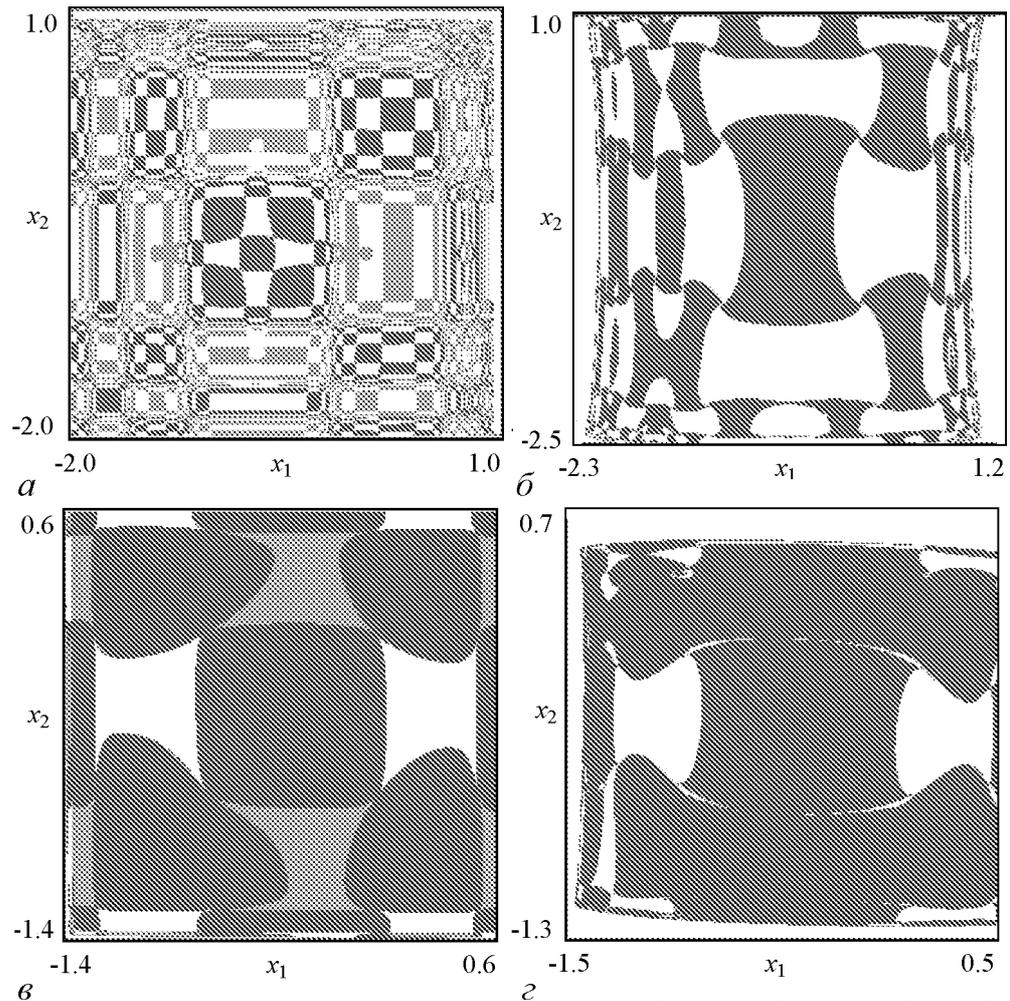


Рис. 5. Бассейны притяжения аттракторов системы (1) при: $a - S_1 = -1.5, S_2 = -1.5, J_1 = 0, J_2 = 0, \varepsilon = 0.01, \delta = 0, y_1 = 0.2, y_2 = 0.2$; $б - S_1 = -1.236, S_2 = -1.452, J_1 = 0, J_2 = 0, \varepsilon = 0.01, \delta = 0.1, y_1 = 0, y_2 = 0$; $в - S_1 = -1, S_2 = -1, J_1 = 1.01, J_2 = 1.017, \varepsilon = 0.01, \delta = 0, y_1 = 0.1, y_2 = 0.1$; $г - S_1 = -1, S_2 = -1, J_1 = 0.85, J_2 = 1.274, \varepsilon = 0.01, \delta = 0.05, y_1 = 0.2, y_2 = 0.2$

и при несимметричной связи) подобна наблюдавшейся в системе связанных логистических отображений. Несколько иное устройство имеют бассейны аттракторов, реализуемых в языке синхронизации периода 3, опирающемся на линию бифуркации Неймарка–Сакера (соответствующая область мультистабильности изображена на рис. 3, $a, б$). Если в случае удвоения периода бассейны при увеличении числа аттракторов образовывали сложную фракталоподобную структуру (см. рис. 5, a), при этом каждый отдельный элемент бассейна аттрактора граничил с четырьмя элементами бассейна другого аттрактора, то теперь отдельные части бассейна одного из аттракторов сразу могут быть окружены элементами бассейнов сразу двух других аттракторов (рис. 5, $в$). При введении отстройки прекращается сосуществование трех аттракторов; структура становится в целом похожа на структуру бассейнов притяжения, наблюдавшихся при мультистабильности, возникающей в результате удвоения периода (рис. 5, $г$). Происходит увеличение площади бассейна одного аттрактора при уменьшении площади бассейна другого. Формы границ бассейнов аттракторов в обеих областях схожи между собой.

Заключение

Таким образом, в работе было проведено исследование мультистабильных состояний системы связанных универсальных двумерных отображений с помощью построения «карт мультистабильности». Исследована эволюция областей мультистабильности при введении асимметрии связи в случае реализации в подсистемах как перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода, так и режимов синхронизации, опирающихся на линию бифуркации Неймарка–Сакера. Показано, что в этом случае области мультистабильности становятся несимметричными, а с ростом отстройки происходит сокращение их размеров. Аналогичное поведение наблюдалось в системе связанных логистических отображений, а именно: влияние отстройки связи на мультистабильность происходит одинаково в различных связанных системах. Также исследован случай квазипериодического поведения подсистем. Показано, что при этом с ростом расстройки связи на плоскостях параметров происходит сокращение областей трехчастотного тора и гиперхаоса. Также выявлено существенное искажение бассейнов притяжения аттракторов в областях мультистабильности.

Автор выражает благодарность профессору А.П. Кузнецову и к.ф.-м.н. А.В. Савину за полезное обсуждение работы.

Работа выполнена при поддержке АБЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект № 2.1.1./1738) Минобрнауки РФ и грантом Президента РФ для молодых ученых-кандидатов наук (МК-905.2010.2).

Библиографический список

1. *Feudel U.* Complex dynamics in multistable systems // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2008. Vol. 18, № 6. P. 1607.
2. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Ерастова Е.Н., Селезнев Е.П.* Виды колебаний и их эволюция в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах // ЖТФ. 1990. Т. 60, вып. 10. С. 19.
3. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Гуляев Ю.В., Селезнев Е.П.* Мультистабильные состояния диссипативно связанных фейгенбаумовских систем // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15, вып. 3. С. 60.
4. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.О ЕСТЬ, Астахов В.В.* Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во СГУ, 1999.
5. *Постнов Д.Э., Некрасов А.М.* Механизмы фазовой мультистабильности при синхронизации 3D-осцилляторов // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13, № 1–2. С. 47.
6. *Безручко Б.П., Селезнев Е.П.* Бассейны притяжения хаотических аттракторов в связанных системах с удвоениями периода. // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23, № 4. С. 40.
7. *Fujisaka H., Yamada Y.* Stability theory of synchronized motions in coupled oscillatory systems // Progr. Theor. Phys. 1983. Vol. 69. P. 32.
8. *Postnov D.E., Vadivasova T.E., Sosnovstseva O.V., Balanov A.G., and Mosekilde E.* Role of multistability in the transition to chaotic phase synchronization // Chaos. 1999. Vol. 9. P. 227.

9. *Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.V., Balanov A.G., and Astakhov V.V.* Phase multistability of synchronous chaotic oscillations // *Discrete Dynamics in Society and Nature*. 2000. Vol. 4. P. 231.
10. *Sosnovtseva O.V., Postnov D.E., Nekrasov A.M., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.H.* Phase multistability of self-modulated oscillators // *Phys. Rev. E*. 2002. Vol. 66. P. 0362.
11. *Поздняков М.В., Савин А.В.* Особенности мультистабильных режимов несимметрично связанных логистических отображений // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2010. Т. 18, № 5. С. 45.
12. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 356 с.
13. *Кузнецов С.П.* О критическом поведении одномерных цепочек // *Письма в ЖТФ*. 1983. Т. 9, № 2. С. 94.
14. *Кузнецов А.П., Кузнецова А.Ю., Сатаев И.Р.* О критическом поведении отображения с бифуркацией Неймарка–Сакера при разрушении фазовой синхронизации в предельной точке фейгенбаумовского каскада // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2003. Т. 11, № 1. С. 12.
15. *Кузнецов А.П., Савин А.В., Тюрюкина Л.В.* Введение в физику нелинейных отображений. Саратов: Изд-во «Научная книга», 2010. 134 с.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию
После доработки*

*1.03.2011
15.05.2011*

DYNAMIC REGIMES AND MULTISTABILITY IN THE SYSTEM OF NON-SYMMETRICALLY COUPLED TWO-DIMENSIONAL MAPS WITH PERIOD-DOUBLING AND NEIMARK–SACKER BIFURCATIONS

M.V. Pozdnyakov

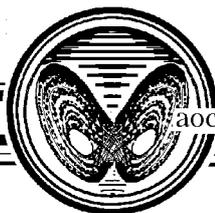
The phenomenon of multistability in the system of coupled universal two-dimensional maps which shows period-doubling and Neimark–Sacker bifurcations is investigated. The decreasing of possible coexisting attractors number, the evolution of the attractor basins, the disappearance of hyperchaos and three-dimensional torus while putting coupling asymmetry are exposed.

Keywords: Multistability, period-doublings, Neimark–Sacker bifurcation.



Поздняков Михаил Валерьевич – родился в Саратове (1986). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (2008). В настоящее время аспирант кафедры динамических систем факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов – динамические режимы и мультистабильность в несимметрично связанных системах. Принимал участие в нескольких международных конференциях. Имеет 17 научных публикаций.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: mpozdneyakov@yandex.ru



**МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА ОСНОВЕ КРИТЕРИЯ
МЕЛЬНИКОВА И ОПТИМАЛЬНОЕ ПОДАВЛЕНИЕ ХАОСА
В ПЕРИОДИЧЕСКИ ВОЗМУЩАЕМЫХ
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ**

Ю.В. Талагаев, А.Ф. Тараканов

Представлены результаты, иллюстрирующие плодотворность идеи оптимальной коррекции параметров для анализа и оптимизации класса периодически возбуждаемых хаотических систем. С использованием критерия Мельникова решены две задачи, которые вскрывают особенности подавления хаотической динамики и предоставляют способ регуляризации поведения диссипативного нелинейного осциллятора. Полученные аналитические результаты сравнены с решением двухкритериальной задачи, использующим для нахождения оптимальных параметрических возмущений условия принципа максимума Понтрягина. Оценки эффективности различных форм параметрических воздействий на систему, определенные указанными двумя независимыми способами, находятся в соответствии между собой.

Ключевые слова: Многопараметрический анализ, нелинейные осцилляторы, оптимальное подавление хаоса, критерий Мельникова, принцип максимума.

Введение

Вот уже более двадцати лет внимание ученых привлекает проблема управления хаотическими системами [1–3]. Изучение разнообразных методов управления хаосом, практические приложения которых простираются от биомедицины до защиты информации, вскрыло две взаимосвязанные проблемы. С одной стороны, эффективность схем контролирования хаотического поведения зависит от того, насколько полно используются специфические свойства хаотических систем. Например, работоспособность популярного метода Отта–Гребоджи–Йорка (OGY) [4] обусловлена рекуррентностью хаотических траекторий. С другой стороны, часто хаотическая система имеет несколько доступных для управления параметров. Показательным здесь стало многопараметрическое обобщение метода OGY [5,6] и метода обратной связи с запаздыванием (метод Пирагаса) [7]. Многомерность параметрического пространства и высокая чувствительность хаотических систем к возмущениям параметров

существенно затрудняют понимание механизмов появления нерегулярного поведения. Часто остается неясным, какие из параметров и форм их возмущения будут наилучшими для достижения цели управления. Поэтому прогресс в области управления хаосом требует разработки средств многопараметрического анализа, опираясь на которые, можно повышать эффективность имеющихся или строить новые методы управления хаосом.

Согласно общепринятой классификации [3], методы управления хаосом делятся на две группы: с обратной связью (OGY и др.) и без обратной связи [8–12]. Признанию методов второй группы способствует следующее: объектом управления является важный в теоретическом и прикладном аспектах класс возмущаемых динамических систем – периодически возбуждаемые диссипативные нелинейные осцилляторы; простота практической реализуемости – контролируемое возмущение является гармонической функцией. Для нахождения критических значений параметров возмущения, при которых возникает (исчезает) хаотическое поведение, удобным аналитическим инструментом стала служить теория Мельникова [13–15]. Учитывая особенности возникновения сложной динамики, критерий Мельникова позволил оценить эффективность управляющего воздействия [16]. Совершенствование подхода связано с минимизацией амплитуды приложенного возмущения через выбор оптимальной формы внешнего и/или параметрического возбуждения (см. обзор [3]). В последнее время продвижение в этом направлении было достигнуто при более глубоком изучении влияния характеристик возмущения (phase control of chaos [17,18]).

Данная работа представляет результаты по многопараметрическому анализу, оптимизации и обобщению методов подавления хаотического поведения без обратной связи. Продуктивность развитого подхода показывается на примере осциллятора Дуффинга–Холмса. При многопараметрическом взгляде на эту «парадигмальную» [18] модель наибольший интерес представляет выявление связей между ключевыми параметрами осциллятора и нахождение оптимальных способов подавления хаотической динамики, а также сравнение таковых для различных видов возмущений параметров. Эта задача более общая и является развитием работ [19,20], где была предложена идея оптимальной многопараметрической коррекции, открывшая новое направление в анализе хаотических систем. Нами сформулированы несколько оптимизационных задач, в которых для данного вида возмущений вводится собственный, учитывающий условия хаотизации и требование малости воздействия, критерий оптимальности, и ищется удовлетворяющий ему способ подавления хаотической динамики. Полученные решения дают полезную информацию о скрытых особенностях подавления хаоса.

1. Структура параметрического пространства нелинейного диссипативного осциллятора: анализ на основе критерия Мельникова

Методы управления без обратной связи в основном используются для подавления хаоса в периодически возбуждаемых динамических системах. Среди них широкий класс представляют диссипативные нелинейные осцилляторы, общее уравнение которых может быть записано в следующем виде

$$\ddot{x} + \frac{dV}{dx} = -\gamma\dot{x} + F(t),$$

где $V(x)$ – нелинейный потенциал, характеризующий внутренние свойства системы (зависимость возвращающей силы от смещения); γ – уровень линейного демпфирования, описывающий механизм диссипации энергии в системе; $F(t) = f \cos(\omega t)$ – внешняя периодическая сила. При соответствующей комбинации параметров диссипации и возбуждения могут возникнуть условия, приводящие к хаотизации динамики осциллятора. Возможность аналитического изучения условий возникновения сложной динамики предоставляет критерий Мельникова (детальное изложение теории метода см. в [13–15]). Его идея состоит в вычислении функции Мельникова $M(t)$, которая описывает расщепление сепаратрисы гиперболической точки, вызываемое присутствием малого возмущения. Если в некоторый момент времени θ функция $M(t)$ меняет знак, то устойчивая и неустойчивая ветви сепаратрисы сложным образом пересекаются. При этом в окрестности гиперболической точки возникает образованная ветвями сепаратрисы структура (гомоклиническое сплетение), которая является причиной возникновения хаоса.

В случае, когда свойства осциллятора задает симметричный потенциал $V(x) = -\alpha x^2/2 + \beta x^4/4$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, получаем модель осциллятора Дуффинга–Холмса

$$\ddot{x} - \alpha x + \beta x^3 = -\gamma\dot{x} + f \cos(\omega t). \quad (1)$$

Параметрическое пространство осциллятора (1) пятимерно ($\{\alpha, \beta\} \cup \{\gamma, f, \omega\}$) и объединяет две группы параметров, различающихся их ролью в динамике. Оно включает собственные параметры α, β и параметры γ, f, ω , характеризующие внешние условия, в которых находится система. Многомерность параметрического пространства влечет многопараметричность функции Мельникова, вычисление которой для (1) дает объединяющее все параметры системы выражение

$$M(\theta) = M(\theta, P) = A(\alpha, \beta, f, \omega) \sin(\omega\theta) - C(\alpha, \beta, \gamma),$$

где

$$A = \sqrt{2\pi}(\beta)^{-1/2} f \omega \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega}{2\sqrt{\alpha}}\right), \quad C = \frac{4\alpha^{3/2}\gamma}{3\beta}.$$

Если через P обозначить все множество возможных значений параметров осциллятора (1), то использование условия знакопеременности функции Мельникова позволяет выделить в P : область *регулярной* динамики $P_R \subset P$, соответствующую значениям параметров, для которых $A < C$ ($\operatorname{sign}(M(\theta, P_R)) = \operatorname{const}$); область *сложной* динамики $P_C \subset P$, где $A > C$ ($\operatorname{sign}(M(\theta, P_C)) \neq \operatorname{const}$); *границу* \tilde{P} (критические значения параметров) между областями регулярной и сложной динамики (далее – *граница* RC), определяемую условием $A = C$ ($M(\theta, \tilde{P}) = 0$). В качестве исходной ситуации в данной работе будет использована конфигурация параметров $P_0 \subset P_C$, $P_0 = \{\alpha_0, \beta_0\} \cup \{\gamma_0, f_0, \omega_0\} = \{1, 4\} \cup \{0.154, 0.095, 1.1\}$, при которых осциллятор (1) демонстрирует типичное хаотическое поведение.

Удобным способом наглядного изучения особенностей устройства пространства параметров осциллятора (1) является двухпараметрический анализ границы областей регулярной и сложной динамики. Преобразуем равенство $A = C$ сначала к

виду

$$\beta(\alpha) = \frac{8}{(3\pi)^2} \left(\frac{\gamma_0}{f_0 \omega_0} \right)^2 \alpha^3 \left(\cosh \left(\frac{\pi \omega_0}{2\sqrt{\alpha}} \right) \right)^2, \quad (2)$$

а затем –

$$f(\omega) = \frac{4}{3\pi} \sqrt{\frac{\alpha_0^3}{2\beta_0}} \gamma_0 \omega^{-1} \cosh \left(\frac{\pi \omega}{2\sqrt{\alpha_0}} \right). \quad (3)$$

Полученные зависимости предоставляют две точки зрения для изучения системы. Для фиксированных значений параметров из группы $\{\gamma_0, f_0, \omega_0\}$ функция (2) определяет границу RC на плоскости (α, β) собственных параметров осциллятора. Функция (3) позволяет при фиксированных значениях $\{\alpha_0, \beta_0\}$ и γ_0 изучить границу RC на плоскости параметров хаотизирующего возбуждения (ω, f) .

Вид границы RC, построенной согласно функциям (2) и (3), показан на рис. 1. Для полноты представления дополнительно к исходной конфигурации параметров P_0 построены два варианта границы на плоскости параметров (α, β) , соответствующие вариации значений частоты возбуждения $\omega_0 \pm \delta\omega$, $\delta\omega = 0.1$ (рис. 1, а) и значений амплитуд возбуждения $f_0 \pm \delta f$, $\delta f = 0.005$ (рис. 1, б)). Также в трех вариантах построена граница RC на плоскости параметров (ω, f) : для исходного значения α_0 и двух различных значений $\alpha_0 \pm \delta\alpha$, $\delta\alpha = 0.5$ (рис. 1, в) и для β_0 и $\beta_0 \pm \delta\beta$, $\delta\beta = 0.5$ (рис. 1, г).

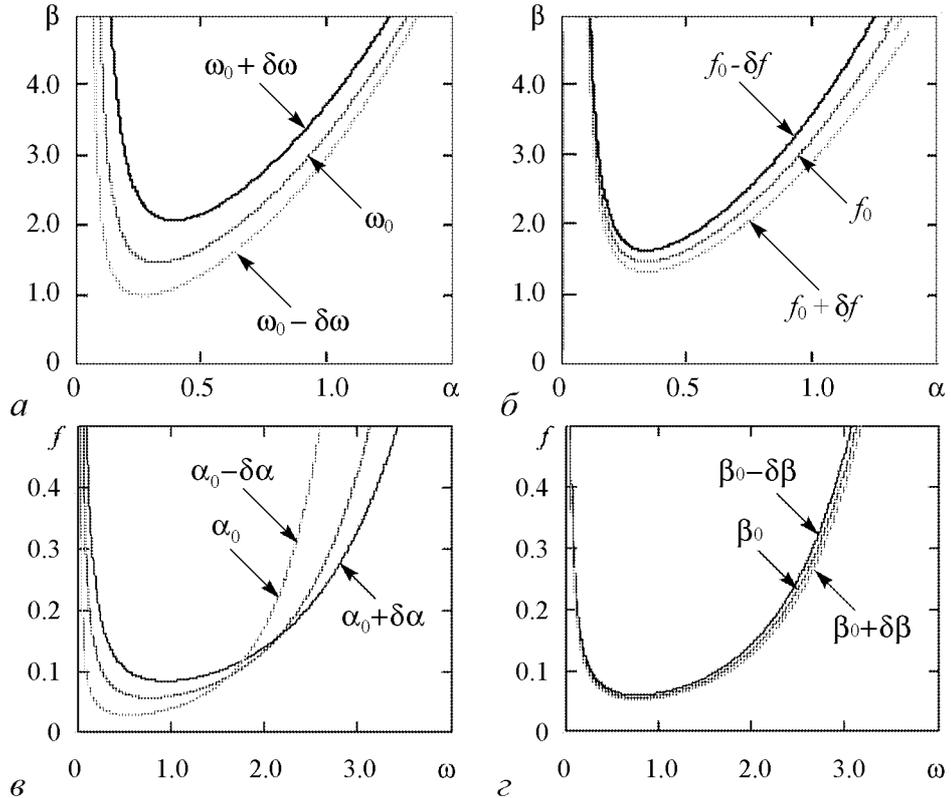


Рис. 1. Двухпараметрическая граница областей регулярной и сложной динамики осциллятора Дуффинга-Холмса

Иллюстрируя взаимозависимость двух основных групп параметров осциллятора, результаты на рис. 1 выявляют особенность границы RC, заключающуюся в том, что функции $\beta(\alpha)$ и $f(\omega)$ достигают минимума. Для конфигурации P_0 минимумами являются соответственно точки $(\alpha_{\min}, \beta_{\min}) = (0.329, 1.447)$ и $(\omega_{\min}, f_{\min}) = (0.764, 0.055)$, а область существования области сложной динамики дается условиями $\beta > \beta_{\min}$ и $f > f_{\min}$. При этом вариация значений параметров приводит к различному смещению положения границы RC и изменению положения минимума.

2. Оптимальное подавление хаоса на основе критерия Мельникова

В данной части представлено решение двух оптимизационных задач. Их особенность в том, что с использованием критерия Мельникова решение ищется непосредственно на границе RC. Такой подход позволяет обнаружить тонкие связи между параметрами системы и найти те их значения, которые обеспечивают оптимальное подавление хаоса.

2.1. Оптимальная коррекция параметров. Многопараметрический анализ оптимального подавления хаотической динамики начнем с изучения ситуации, когда происходит коррекция исходных значений параметров α_0 и β_0 . После добавления корректирующих поправок h_α и h_β уравнение осциллятора (1) запишется в виде

$$\ddot{x} - \alpha_0(1 + h_\alpha)x + \beta_0(1 + h_\beta)x^3 = -\gamma_0\dot{x} + f_0 \cos(\omega_0 t). \quad (4)$$

Наибольший интерес вызывает изучение совместного влияния поправок h_α и h_β , которое может обеспечить подавление хаоса. Претендентами на роль минимальных корректирующих поправок $h_{\alpha \min}$, $h_{\beta \min}$, с которыми решение уравнения (4) превратится из хаотического в устойчивое, являются значения h_α и h_β , которые лежат на границе RC.

Определим множество допустимых значений величин h_α и h_β в виде

$$K = \{h_\alpha, h_\beta \mid M_1(\theta, P_1) = 0 \quad \forall \theta\},$$

где $M_1(\theta, P_1) = M_1(\theta, \{\alpha_0(1 + h_\alpha), \beta_0(1 + h_\beta)\} \cup \{\gamma_0, f_0, \omega_0\})$ – функция Мельникова осциллятора (4). Тогда формализация требования малости корректирующих поправок, необходимых для оптимального подавления хаоса, приводит к задаче оптимальной коррекции

$$h_\alpha^2 + h_\beta^2 \rightarrow \min_{h_\alpha, h_\beta \in K}. \quad (5)$$

Для решения задачи (5) вместо повторного вычисления функции Мельникова M_1 можно воспользоваться выражением (2). Делая замену $\alpha_0 \rightarrow \alpha_0(1 + h_\alpha)$, $\beta_0 \rightarrow \beta_0(1 + h_\beta)$, преобразуем (2) к виду

$$h_\beta(h_\alpha) = \frac{8}{(3\pi)^2} \frac{1}{\beta_0} \left(\frac{\gamma_0}{f_0 \omega_0} \right)^2 (\alpha_0(1 + h_\alpha))^3 \left(\cosh \left(\frac{\pi \omega_0}{2\sqrt{\alpha_0(1 + h_\alpha)}} \right) \right)^2 - \beta_0. \quad (6)$$

В виде зависимости $h_\beta = h_\beta(h_\alpha)$ выражение (6) дает *связь* между значениями корректирующих поправок h_α и h_β , которые лежат на границе RC. Выражение (6) сразу

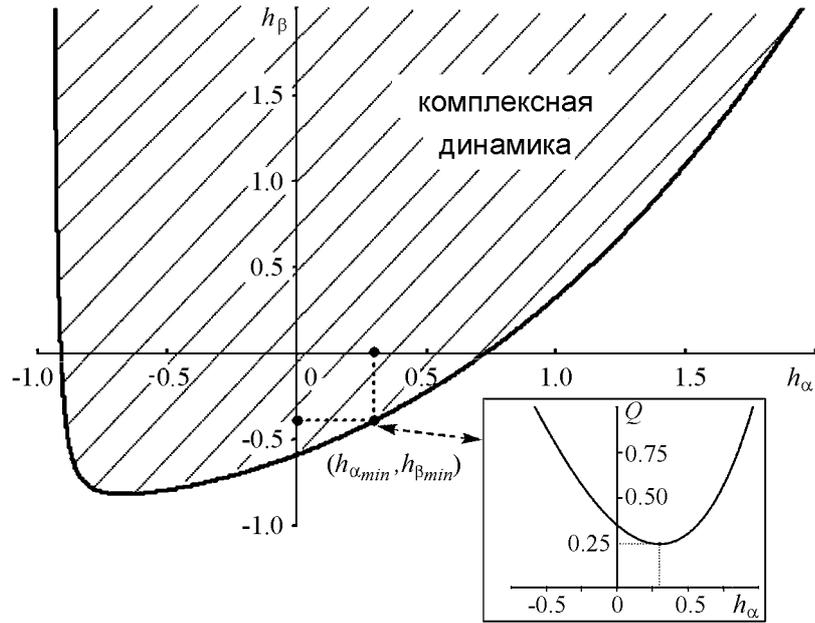


Рис. 2. Граница областей регулярной и сложной динамики осциллятора (6) и положение пары $(h_{\alpha \min}, h_{\beta \min})$, дающей оптимальное сочетание корректирующих поправок, обеспечивающих подавление хаоса

устанавливает ограничения на значения h_{α} . Из $\alpha_0(1 + h_{\alpha}) > 0$ следует, что $h_{\alpha} > -1$. На рис. 2 построена зависимость $h_{\beta} = h_{\beta}(h_{\alpha})$, показано расположение области сложной динамики и положение найденной ниже оптимальной пары $(h_{\alpha \min}, h_{\beta \min})$.

Фактически каждая точка кривой $h_{\beta} = h_{\beta}(h_{\alpha})$ может являться решением (5), но среди них только одна наилучшая. Например, при возмущении параметров α_0 и β_0 по отдельности получаем, соответственно, пары (h_{α}, h_{β}) : $(0.723, 0)$ и $(0, -0.588)$. Это означает, что устойчивость системы при коррекции параметра β_0 достигается с меньшей по критерию (5) поправкой, чем для α_0 . Для нахождения оптимальной пары $(h_{\alpha \min}, h_{\beta \min})$ необходимо, двигаясь вдоль границы РС, найти минимум функции $Q(h_{\alpha}) = h_{\alpha}^2 + (h_{\beta}(h_{\alpha}))^2$. Изменение критерия качества вдоль границы регулярной и сложной динамики в виде графика функции $Q(h_{\alpha})$ также показано на рис. 2. Минимуму $Q(h_{\alpha}) = 0.241$ соответствует значение $h_{\alpha \min} = 0.298$. С использованием (6) получаем $h_{\beta}(h_{\alpha \min}) = h_{\beta \min} = -0.39$.

Таким образом, решение оптимизационной задачи (5) дает взаимосвязанные значения поправок $h_{\alpha \min}$ и $h_{\beta \min}$, которые для данной конфигурации параметров $P_0 \subset P_C$ обеспечивают оптимальный переход в пространстве параметров из области хаотической динамики в регулярную.

2.2. Эффективное резонансное соотношение. Рассмотрим ситуацию, когда возмущение осциллятора (1) помимо внешнего хаотизирующего возбуждения $f \cos(\omega t)$ содержит контролируемую часть – параметрическое возбуждение $u(t) = \mu \cos(\Omega t)$, которому подвергается параметр при нелинейном слагаемом, где μ и Ω – амплитуда и частота параметрического возбуждения, соответственно. Тогда

$$\ddot{x} - \alpha_0 x + \beta_0(1 + u(t))x^3 = -\gamma_0 \dot{x} + f_0 \cos(\omega_0 t). \quad (7)$$

Пространство параметров осциллятора (7) дополняется двумя контролируемыми параметрами: $P_2 = P_0 \cup \{\mu, \Omega\}$. Вычисляя функцию Мельникова, получим

$$M_2(\theta, P_2) = M(\theta, P_0) - aB(\alpha_0, \beta_0, \mu, \Omega) \sin(\Omega\theta),$$

где $M_0(\theta, P_0)$ – функция Мельникова неконтролируемого осциллятора (см. п. 1) и

$$B(\alpha_0, \beta_0, \mu, \Omega) = \pi\mu(6\beta_0)^{-1}\Omega^2(\Omega^2 + 4)\operatorname{csch}\left(\frac{\pi\Omega}{2\sqrt{\alpha_0}}\right).$$

Целью внесения управления $u(t)$ является регуляризация динамики осциллятора (при $\mu = 0$ уравнение (7) превращается в (1) и имеет хаотическое решение). При выборе значений μ и Ω естественно потребовать, чтобы подавляющее хаос возмущение было малым. Это приводит к задаче минимизации амплитуды μ параметрического возбуждения, уже получившей рассмотрение в работе [16]. Применение критерия Мельникова дает два условия, необходимых для подавления хаотической динамики. Функция $M_2(\theta, P_2)$ сохраняет знак, если, во-первых, значение амплитуды удовлетворяет неравенству $\mu > \mu_{\min} = (A - C)/B$ и, во-вторых, выполняется резонансное соотношение частот $\Omega_z = z\omega_0$, z – целое.

Обеспечивающая подавление хаоса минимальная амплитуда μ_{\min} лежит на границе RC, где $M_2(\theta, P_2) = 0$. Однако оценка для μ_{\min} является «локальной», поскольку верна только для фиксированных значений параметров $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, f_0, \omega_0$ и z . Например, для частоты $\omega_0 = 1.1$ вычисление при $z = 1$ дает $\mu_{\min} = 0.095$, тогда как при $z = 2$ получим $\mu_{\min} = 0.081$. Это приводит нас к необходимости решения следующей оптимизационной задачи:

$$\mu_{\min}(\omega_0, z) \rightarrow \min_z.$$

Чтобы прояснить особенности подавления хаотической динамики функцией $u(t) = \mu_{\min} \cos(\Omega_z t)$, на рис. 3 показана общая картина зависимости $\mu_{\min}(\omega)$ при различных z (поскольку рассмотрение больших значений оказалось несущественным, мы ограничились резонансами $z = 1, 2, 3, 4$). На рис. 3 видно, что на интервале

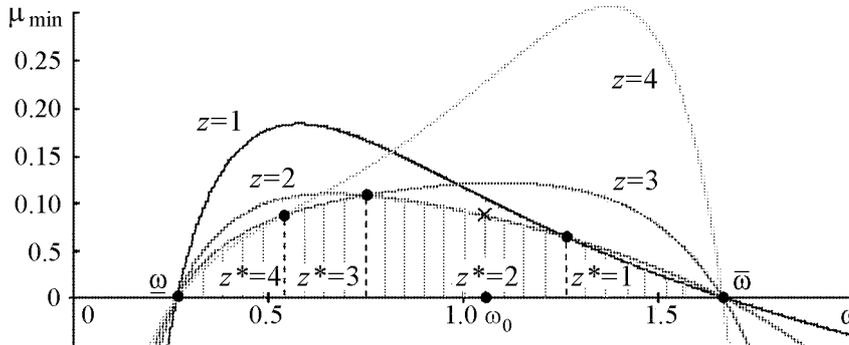


Рис. 3. Оптимальная граница областей регулярной и сложной динамики осциллятора (7), образованная эффективным резонансным соотношением

частот $(\underline{\omega}, \bar{\omega}) = (0.265, 1.661)$ с увеличением z граница РС претерпевает значительные изменения. В действительности наименьшее значение амплитуды μ достигается только при некотором z и только для вполне определенного интервала частот $w_i = (\omega_i, \omega_{i+1}) \in (\underline{\omega}, \bar{\omega})$, $i = 5 - z$, где $\underline{\omega} = \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_5 = \bar{\omega}$, $\bigcup_{i=1}^4 w_i = (\underline{\omega}, \bar{\omega})$ (на рис.3 $\omega_2 = 0.531$, $\omega_3 = 0.746$, $\omega_4 = 1.265$).

Каждый из интервалов w_i однозначно определяет для стабилизирующей функции $u^*(t) = \mu_{\min}(\omega, z^*) \cos(z^* \omega t)$ эффективное резонансное соотношение

$$\Omega_z = z^* \omega,$$

где $z^* \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\omega \in w_{5-z^*}$, такое что на каждом интервале w_i для значения z^* выполняется

$$\mu_{\min}^*(\omega) = \mu_{\min}(\omega, z^*) \leq \mu_{\min}(\omega, z).$$

В результате точки $(\omega, \mu_{\min}^*(\omega))$, где $\omega \in (\underline{\omega}, \bar{\omega})$, образуют оптимальную границу РС.

Если мы знаем, к какому интервалу w_i принадлежит данное значение частоты ω контролируемого возмущения, то решением задачи $\mu_{\min}(\omega, z) \rightarrow \min_z$ можно определить эффективный резонанс z^* и дополнительно минимизировать амплитуду $\mu_{\min}(\omega, z^*)$ подавляющего хаос резонансного параметрического возмущения. На рис. 3 показано, что для $\omega_0 = 1.1$ наименьшему значению амплитуды соответствует резонанс $z^* = 2$.

3. Оптимальное подавление хаоса при неизвестной структуре параметрического возмущения

Рассмотрим осциллятор

$$\ddot{x} - \alpha_0(1 + h_\alpha(t))x + \beta_0(1 + h_\beta(t))x^3 = -\gamma_0 \dot{x} + f_0 \cos(\omega_0 t), \quad (8)$$

в котором корректирующие параметрические возмущения $h_\alpha(t)$ и $h_\beta(t)$ являются функциями времени и ограничены множеством $U: |h_\alpha(t)| \leq a, |h_\beta(t)| \leq b$. Коррекция в данном случае является динамической. Исследование условий оптимального подавления хаоса усложняется тем, что одновременно с нахождением минимальных ограничений a_{\min}, b_{\min} необходимо выяснить структуру оптимальной функции $h^0(t) = (h_\alpha^0(t), h_\beta^0(t))$. Это приводит к двухкритериальной оптимизационной задаче

$$\max \left(\max_{0 \leq t \leq T} |h_\alpha^0(t)|, \max_{0 \leq t \leq T} |h_\beta^0(t)| \right) \rightarrow \min_{a, b \in K_\Lambda, h^0 \in U^0}, \quad (9)$$

$$h^0 = (h_\alpha^0, h_\beta^0) \in U^0 = \text{Arg} \min_{h \in U} \int_0^T (h_\alpha^2 + h_\beta^2) dt. \quad (10)$$

Физический смысл критерия оптимальности (10) состоит в том, что искомая стабилизирующая функция $h^0(t)$ должна обеспечить минимум затрат энергии на процесс подавления хаоса.

При неизвестной структуре параметрического возмущения применение метода Мельникова в задаче (9)–(10) становится затруднительным. Эффективным методом решения является двухэтапная схема коррекции (описание реализации схемы и ее обоснование можно найти в [19, 20]). Согласно специфике задачи (9)–(10), объединяющей (а точнее – упорядочивающей) два критерия оптимальности, двухэтапная схема коррекции комбинирует методы теории оптимального управления с компьютерным моделированием динамического поведения системы. При анализе характера устойчивости в качестве критерия возникновения хаоса используется локальная неустойчивость траекторий системы (эквивалентной уравнению (8))

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \alpha_0(1 + h_\alpha(t))x_1 - \beta_0(1 + h_\beta(t))x_1^3 - \gamma_0 x_2 + f_0 \cos(\omega_0 t). \end{aligned} \quad (11)$$

Исходя из этого, множество K_Λ допустимых значений ограничений a и b определяется условием отрицательности старшего показателя Ляпунова ($\Lambda_1(a, b) < 0$). При этом интервал времени $[0, T]$, на котором численно исследуется динамика системы, выбирается так, чтобы $T \gg T^*$, где T^* – время переходного процесса.

При реализации схемы сначала на основе условий принципа максимума выясняется аналитическая структура функции $h^0(t) = (h_\alpha^0(t), h_\beta^0(t))$. Составив функцию Гамильтона–Понтрягина [21] $H = \psi_1 \dot{x}_1 + \psi_2 \dot{x}_2 - 0.5(h_\alpha^2(t) + h_\beta^2(t))$, из равенств $\partial H / \partial h_j = 0$, $j = \alpha, \beta$, нетрудно получить из (10) искомую структуру стабилизирующего параметрического возмущения $h^0(t)$

$$\begin{aligned} h_\alpha^0(t) = \text{sat}(\tilde{h}_\alpha(t)) &= \begin{cases} \tilde{h}_\alpha(t), & |\tilde{h}_\alpha(t)| \leq a, \\ a \cdot \text{sign}(\tilde{h}_\alpha(t)), & |\tilde{h}_\alpha(t)| > a, \end{cases} \\ h_\beta^0(t) = \text{sat}(\tilde{h}_\beta(t)) &= \begin{cases} \tilde{h}_\beta(t), & |\tilde{h}_\beta(t)| \leq b, \\ b \cdot \text{sign}(\tilde{h}_\beta(t)), & |\tilde{h}_\beta(t)| > b, \end{cases} \end{aligned}$$

где $\tilde{h}_\alpha(t) = \alpha x_1 \psi_2$, $\tilde{h}_\beta(t) = -\beta x_1^3 \psi_2$. Соответствующая возмущению $h^0(t)$ траектория $x^0(t)$ находится численным интегрированием системы $\dot{x}_i = \partial H / \partial \psi_i$, $\dot{\psi}_i = -\partial H / \partial x_i$, или в подробной записи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \alpha(1 + \text{sat}(\tilde{h}_\alpha(t)))x_1 - \beta(1 + \text{sat}(\tilde{h}_\beta(t)))x_1^3 + f \cos(\omega t) - \gamma x_2, \\ \dot{\psi}_1 = \psi_2(3\beta(1 + \text{sat}(\tilde{h}_\beta(t)))x_1^2 - \alpha(1 + \text{sat}(\tilde{h}_\alpha(t))), \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \gamma \psi_2, \end{cases} \quad (12)$$

с начальными условиями $x_0 = (x_{01}, x_{02})^T$, $\psi_0 = (-x_{02}, x_{01})^T$.

Определяемый системой (12) процесс является оптимальным только с точки зрения структуры функции возмущения. При произвольных значениях ограничений

a и b подавление хаоса на рассматриваемом интервале времени может не наступить. Если же подавление хаоса происходит, то не обязательно, что значения ограничений будут наименьшими. Требование (9) усиливает (10). Необходимо, чтобы уровни ограничений параметрических возмущений $h_\alpha^0(t)$ и $h_\beta^0(t)$, при которых наблюдается подавление хаоса, были наименьшими. Их минимизация осуществляется посредством процедуры численного тестирования качества подавления хаоса [20]. Для выяснения характера устойчивости системы (12) сопоставляются два близких по начальным условиям процесса. Сравнение позволяет отследить эволюцию малого возмущения $\tilde{x}^0(t) = \bar{x}^0(t) - x^0(t)$, $t \in [0, T]$, вдоль тестируемой траектории $x^0(t)$ и минимизировать значения ограничений a и b :

- задаются два близких начальных условия $x_0^0 = (x_{01}^0, x_{02}^0)^T$, $\bar{x}_0^0 = (\bar{x}_{01}^0 + \varepsilon, \bar{x}_{02}^0 + \varepsilon)^T$, $\varepsilon \ll 1$, и вычисляются соответствующие им ортогональные начальные условия для сопряженных переменных $\psi_0, \bar{\psi}_0$;
- для x_0^0, ψ_0 и $\bar{x}_0^0, \bar{\psi}_0$ на заданном интервале $[0, T]$ методом Рунге–Кутты 4-го порядка интегрируется система (12);
- для выбранных значений $a_0 < 1, b_0 < 1$ на интервале $[0, T]$ отслеживается динамика старшего показателя Ляпунова $\Lambda_1(t, a_0, b_0) = T^{-1} \ln(\varepsilon^{-1} \|\bar{x}^0(t) - x^0(t)\|)$. Если при $t \rightarrow T$ условие $\Lambda_1(t, a_0, b_0) < 0$ выполняется, то вычисления Λ_1 повторяются с некоторой поправкой $\delta a \ll 1$ для последовательности $a_l < \dots < a_1 < a_0$ и $\delta b \ll 1$ для последовательности $b_l < \dots < b_1 < b_0$, пока не будет найдена пара $(a_{\min}, b_{\min}) = \min_{a, b \in K_\Lambda} \{a_m, b_m\}_{m=0, \dots, l}$, где $a_m = a_0 - m\delta a$, $b_m = b_0 - m\delta b$.

Результат реализации схемы коррекции представлен на рис. 4, a – v , δ . Оптимальный переход от хаотической динамики к устойчивой происходит при $|h_\alpha^*(t)| \leq a_{\min}, |h_\beta^*(t)| \leq b_{\min}, a_{\min} = b_{\min} = 0.046$. Для минимизации ограничений a и b система (12) интегрировалась при $x_0 = (0.15, 0.1)^T, t \in [0, 1000]$ и шаге интегрирования $d = 0.02$.

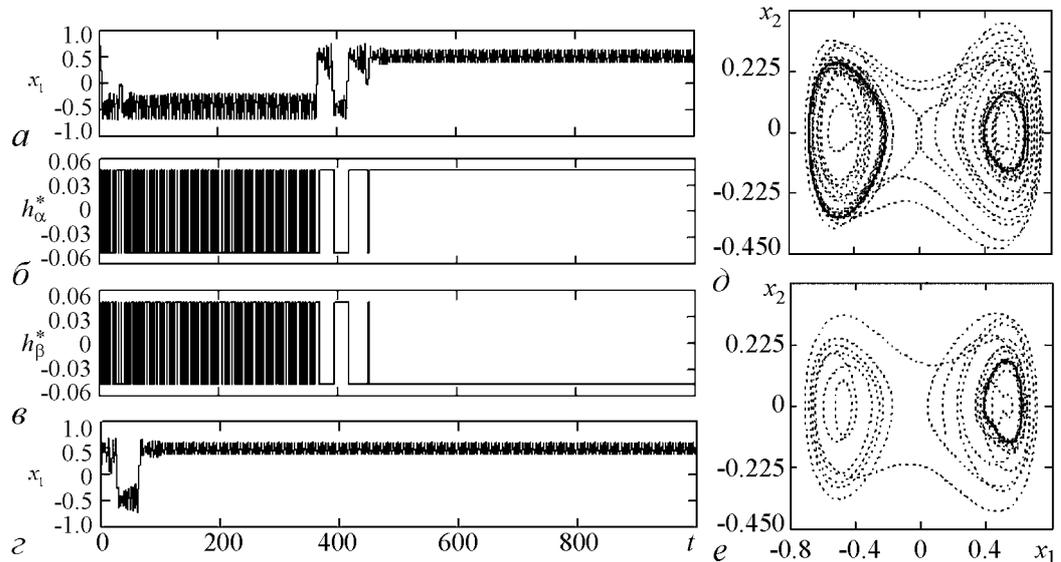


Рис. 4. Результаты оптимального подавления хаотической динамики осциллятора Дуффинга–Холмса: a – v , δ – решение задачи (9)–(10) для системы (11) с $a_{\min} = b_{\min} = 0.046$; z , e – динамика системы (7) при значении амплитуды $\mu_{\min} = 0.081$, соответствующей эффективному резонансу $z^* = 2$

4. Обсуждение результатов

Представленные в работе варианты оптимального (по выбранному критерию) подавления хаотического поведения осциллятора Дуффинга–Холмса имеют свои области приложения и могут рассматриваться как независимые. Однако их сравнение позволяет вскрыть точки соприкосновения между примененными подходами (оптимизация на основе критерия Мельникова (п. 2) и двухэтапная схема коррекции, использующая условия принципа максимума (п. 3)).

Рис. 4, б,в хорошо иллюстрирует особенность процесса оптимального подавления хаоса в задаче (9)–(10). Она заключается в возникновении эффекта насыщения оптимальных возмущений $h_\alpha^*(t)$ и $h_\beta^*(t)$ на верхней

$$h_\alpha^*(t) = a_{\min} \text{sign}(\alpha x_1 \psi_2) = +a_{\min}$$

и нижней

$$h_\beta^*(t) = b_{\min} \text{sign}(-\beta x_1^3 \psi_2) = -b_{\min}$$

границах ограничений. Момент возникновения насыщения точно совпадает с окончанием переходного процесса, в течение которого система переходит в режим устойчивых периодических колебаний. В связи с этим возникновение насыщения может использоваться как индикатор стабилизации системы.

Внимание к эффекту вызывают следующие его особенности. Во-первых, характер насыщения не зависит от числа возмущенных параметров. Например, если у системы (11) будет возмущен только параметр β (то есть $h_\alpha(t) \equiv 0$), то оптимальное подавление хаоса произойдет при большем значении b_{\min} . При этом насыщение возмущения $h_\beta^*(t)$ по-прежнему происходит на нижней границе ограничения. Аналогичная ситуация наблюдается при возмущении параметра α . Во-вторых, характер насыщений возмущений $h_\alpha^*(t)$ и $h_\beta^*(t)$ не зависит от мультистабильности системы, вызванной симметричностью потенциала $V(x)$. При подавлении хаоса устойчивое движение может установиться в окрестности одной из двух потенциальных ям $x_1 = \pm \sqrt{\alpha/\beta} = \pm 0.5$. Малое изменение начальных условий может привести к возникновению аналогичных движений в окрестности уже другой ямы, но не изменяет поведение параметрических возмущений после насыщения.

Объяснить причину возникновения насыщений оптимальных параметрических возмущений можно сопоставлением решения задачи (9)–(10) с аналитическими условиями оптимального подавления хаоса, которые предсказывает критерий Мельникова. При решении задачи (5) были найдены оптимальные корректирующие поправки $h_{\alpha \min} = 0.298$ и $h_{\beta \min} = -0.39$. Их знаки говорят о направлении изменения параметров. Для параметра α это увеличение, а для β – уменьшение. Если посмотреть на рис. 4, б,в, то можно увидеть, что это в точности соответствует наблюдаемому при подавлении хаоса характеру насыщения стабилизирующих возмущений на верхней и нижней границах ограничений. Следовательно, оптимальные параметрические возмущения $h_\alpha^*(t)$ и $h_\beta^*(t)$ запускают такой процесс подавления хаоса, который протекает в соответствии с присущим данной системе механизмом появления/исчезновения хаотического поведения.

Следующей интересной особенностью является локализация в фазовом пространстве уникальной орбиты системы (11), стабилизация которой вызывается возмущениями $h_\alpha^*(t)$ и $h_\beta^*(t)$ (см. рис. 4, д). Значительную часть времени переходный

процесс представляет собой регулярное движение траекторий по орбите, локализованной в окрестности состояния равновесия $(-\sqrt{\alpha/\beta}, 0) = (-0.5, 0)$. Численные эксперименты показали, что варьирование начальных условий может уменьшить регулярность переходного процесса. При этом из-за мультистабильности аналогичные движения могут происходить в окрестности точки $(\sqrt{\alpha/\beta}, 0)$. Однако в конце переходного процесса система «находит» новый устойчивый тип движений. Траектория выходит на замкнутую орбиту, соответствующую режиму периодических колебаний в окрестности состояния равновесия $(0.5, 0)$. На рис. 4, z представлена динамика осциллятора (7) при минимальном значении амплитуды, соответствующей эффективному резонансу $z^* = 2$ (см. п. 2.2). Сравнение рис. 4, δ и рис. 4, z показывает, что локализация оптимальной устойчивой орбиты практически в точности совпадает с решением задачи $\mu_{\min}(\omega_0, z) \rightarrow \min_z$, то есть удовлетворяет эффективному резонансному соотношению. Таким образом, не только поведение оптимальных возмущений, но и сам установившийся режим системы (11) близок к режиму, который предсказывает критерий Мельникова.

Заключение

Представлены результаты изучения многопараметрической картины оптимального подавления хаотической динамики в диссипативных нелинейных осцилляторах. Показано, как при помощи критерия Мельникова можно ставить и решать две оптимизационные задачи, углубляющих понимание специфики подавления хаоса. Выявлена связь между корректирующими поправками к параметрам и найдены их минимальные значения. Вскрыто эффективное резонансное соотношение между частотой контролируемого параметрического возбуждения и частотой внешнего хаотизирующего возбуждения. Сравнение этих результатов с результатами двухэтапной схемы коррекции показало, что найденные на основе условий оптимальности принципа максимума корректирующие функции, которые обеспечивают процесс оптимального подавления хаоса, ведут себя так, как предсказывает теория Мельникова. Соответствие в результатах двух независимых методов говорит, что они являются дополняющими друг друга способами многопараметрического анализа системы.

Работа поддержана Министерством образования и науки РФ в рамках подпрограммы 1 «Фундаментальные исследования» ведомственной научной программы «Развитие научного потенциала высшей школы».

Библиографический список

1. Zhang H., Liu D., Wang Z. Controlling Chaos: Suppression, Synchronization and Chaotification. Series: Communications and Control Engineering. Springer, 2009.
2. Recent Progress in Controlling Chaos / M.A.F. Sanjuan and C. Grebogi, editors. Singapore: World Scientific, 2010.
3. Rega G., Lenci S., Thompson J.M.T. Controlling chaos: The OGY Method, Its Use in Mechanics, and an Alternative Unified Framework for Control of Non-regular Dynamics // In Nonlinear Dynamics and Chaos Advances and Perspectives / Ed. M. Thiel et al. Berlin: Springer-Verlag, 2010. P. 211.
4. Ott E., Grebogi C., Yorke J.A. Controlling chaos // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64, № 11. P. 1196.

5. *Warncke J., Bauer M., Martienssen W.* Multiparameter control of high-dimensional chaotic systems // *Europhys. Lett.* 1994. Vol. 25, № 5. P. 323.
6. *Barreto E., Grebogi C.* Multiparameter control of chaos // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 54, № 4. P. 3553.
7. *Pyragas K., Pyragas V.* Delayed Feedback Control Techniques // *Recent Progress in Controlling Chaos* / M.A.F. Sanjuan and C. Grebogi, editors. Singapore: World Scientific, 2010. P. 103.
8. *Lima R., Pettini M.* Suppression of chaos by resonant parametric perturbation // *Phys. Rev. A.* 1990. Vol. 41. I. 2. P. 726.
9. *Braiman Y., Goldhirsch I.* Taming chaotic dynamics with weak periodic perturbations // *Phys. Rev. Lett.* 1991. Vol. 66. P. 2545.
10. *Kivshar Y.S., Rodelsperger F., Benner H.* Suppression of chaos by nonresonant parametric perturbation // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49, № 1. P. 319.
11. *Belhaq M., Houssni M.* Quasi-periodic oscillations, chaos and suppression of chaos in a nonlinear oscillator driven by parametric and external excitations // *Nonlin. Dyn.* 1999. Vol. 18. P. 1.
12. *Schwalger T., Dzhanoev A., Loskutov A.* May chaos always be suppressed by parametric perturbations? // *Chaos.* 2006. Vol. 16. P. 023109.
13. *Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
14. *Лоскутов А.Ф.* Динамический хаос. Системы классической механики // *Успехи физических наук.* 2007. Т. 177, № 9. С.980.
15. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос (курс лекций). М.: Физматлит, 2001.
16. *Chacon R.* Suppression of chaos by selective resonant parametric perturbation // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 51. P. 761.
17. *Qu Z., Hu G., Yang G., Qin G.* Phase effect in taming nonautonomous chaos by weak harmonic perturbations // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 74. P. 1736.
18. *Zambrano S., Allaria E., Brugioni S., Leyva I., Meucci R., Sanjuan M.A.F., Arecchi F.T.* Numerical and experimental exploration of phase control of chaos // *Chaos.* 2006. Vol. 16. P. 013111.
19. *Талагаев Ю.В., Тараканов А.Ф.* Оптимальное подавление хаоса и переходные процессы в скорректированных многопараметрических колебательных системах // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2008. Т. 15, № 5. С. 100.
20. *Gorelik V., Talagaev Y., Tarakanov A.* Optimal Processes of Chaotic Uncertainty Correction. Proc. 18th IEEE International Conference on Control Applications, Part of 2009 IEEE Multi-conference on Systems and Control. July 8–10, 2009. Saint Petersburg, Russia. P. 878.
21. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления (3-е изд.). М.: Высшая школа, 2003.

*Саратовский государственный
университет (Балашовский филиал)
Борисоглебский государственный
педагогический институт*

*Поступила в редакцию 16.02.2011
После доработки 12.07.2011*

MULTIPARAMETRICAL ANALYSIS BASED ON MELNIKOV CRITERION AND OPTIMAL CHAOS SUPPRESSION IN PERIODICALLY DRIVEN DYNAMIC SYSTEMS

Y.V. Talagaev, A.F. Tarakanov

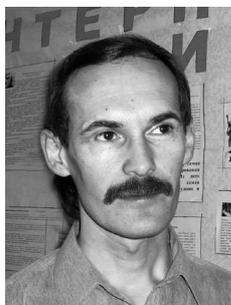
The results that illustrate the fruitfulness of the idea of optimal parametric correction for the analysis and optimization of the class of periodically driven chaotic systems are presented. Two problems that reveal the peculiarities of suppression of chaotic dynamics and present the method of regulation of the behavior of dissipative nonlinear oscillator were solved with the help of Melnikov criterion. The analytical results were compared to the solution of double-criteria problem that uses the conditions of Pontryagin maximum principle to find optimal parametric perturbations. The efficiency evaluations of various forms of parametric perturbations on the system found with the help of two independent methods correspond to each other.

Keywords: Multiparametrical analysis, nonlinear oscillators, optimal chaos suppression, Melnikov criterion, maximum principle.



Талагаев Юрий Викторович – родился в Балашове (1975). Окончил физико-математический факультет Балашовского государственного педагогического института (1997). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата педагогических наук в СГУ (2000) в области приложений системно-синергетического подхода к современным образовательным технологиям. Доцент кафедры физики Балашовского филиала Саратовского государственного университета (с 2004). Область научных интересов: моделирование и оптимизация сложных систем, управление хаосом, многопараметрическая коррекция динамических систем. Автор 48 научных статей в отечественной и зарубежной печати. Принял участие в нескольких международных конференциях. Член Международного общества физики и управления (IPACS, 2007).

412300 Балашов, ул. Карла Маркса, 29
Балашовский филиал Саратовского государственного университета
им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: shangyi@narod.ru



Тараканов Андрей Федорович – родился в Рыбинске Ярославской области (1959). Окончил физико-математический факультет Борисоглебского государственного педагогического института (1982). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1989) и доктора физико-математических наук (1996) в Вычислительном центре АН в области управления динамическими системами в условиях неопределенности, профессор (с 2000). Профессор кафедры прикладной математики и информатики Борисоглебского государственного педагогического института (с 2003). Научные интересы связаны с математической теорией оптимального управления в условиях неопределенности, оптимальной коррекцией динамических систем с неустойчивой и хаотической динамикой, теорией коалиционных и иерархических игр. Автор более 80 научных работ. Состоит в Обществе прикладной математики и механики (GAMM), член Международного общества физики и управления (IPACS), член-корреспондент Российской Академии Естествознания. Осуществляет подготовку аспирантов по специальности «Теоретические основы информатики».

397140 Борисоглебск, ул. Народная, 43
Борисоглебский государственный педагогический институт
E-mail: aft777@rambler.ru



ВЕЙВЛЕТНЫЙ АНАЛИЗ СОННЫХ ВЕРЕТЕН НА ЭЭГ И РАЗРАБОТКА МЕТОДА ИХ АВТОМАТИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ*

*В.В. Грубов, А.А. Овчинников, Е.Ю. Ситникова,
А.А. Короновский, А.Е. Храмов*

Проведен детальный вейвлетный анализ электрической активности головного мозга, зарегистрированной во время сна у крыс с генетической предрасположенностью к абсанс-эпилепсии. Были использованы долговременные записи электроэнцефалограмм, где выявлены характерные особенности частотно-временной структуры сонных веретен – осцилляторных паттернов, являющихся электроэнцефалографическим коррелятом медленно-волнового сна. Работа проведена с использованием непрерывного вейвлетного преобразования. Предварительно были протестированы несколько наиболее распространенных вейвлетных базисов, среди которых комплексный вейвлет Морле оказался наиболее эффективным для выявления частотно-временных особенностей сонных веретен на электроэнцефалограммах. В дальнейшем вейвлет Морле был использован для создания системы автоматической диагностики сонных веретен на электроэнцефалограммах. В результате удалось выделить два типа сонных веретен, имеющих сходную временную динамику, но различающихся по частотному составу. Выявлена сложная динамика основной частоты колебаний в течение сонного веретена. На основании полученных данных предложен метод автоматической диагностики сонных веретен, основанный на расчете величин мгновенных энергий вейвлетного преобразования в двух частотных диапазонах, характерных для двух типов сонных веретен. Тестирование метода показало высокую точность автоматической диагностики исследуемых событий на электроэнцефалограммах. Данный подход может быть использован в рутинных исследованиях электроэнцефалограмм, связанных с выделением и классификацией различных осцилляторных паттернов.

Ключевые слова: Непрерывное вейвлетное преобразование, ЭЭГ, эпилепсия, осцилляторный паттерн, сонные веретена, диагностика.

Введение

Современные математические методы анализа сложных колебательных процессов все чаще находят применение в самых различных областях естествознания, в том числе и в области физиологии и медицины [1–4]. Эти методы оказываются

*Статья написана по материалам доклада на IX Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, Россия, 4–9 октября, 2010.

наиболее эффективными в исследованиях динамики активности нейронных сетей. Последние представляют собой крайне сложные объекты, состоящие из большого числа нейронов, где каждый нейрон можно рассматривать как отдельный колебательный элемент, характеризующийся собственной сложной динамикой [4–6]. Для получения информации о работе головного мозга традиционно используют методы регистрации электрической активности путем записи электроэнцефалограмм (ЭЭГ). ЭЭГ представляет собой усредненную сумму электрических токов, генерируемых группой нейронов, находящихся в области регистрирующего электрода [7, 8]. У человека регистрирующие электроды (сенсоры) обычно размещаются на поверхности головы. Для исследования животных существует практика вживления электродов в поверхностные и глубокие структуры головного мозга. Это дает возможность проведения более точных измерений, поскольку регистрирующие электроды находятся в непосредственном контакте с нервной тканью. Кроме того, запись ЭЭГ у животных можно проводить непрерывно на протяжении долгого периода времени (суток и более), что позволяет получить более полную информацию о мозговой активности.

Одна из задач электроэнцефалографических исследований связана с выявлением определенных форм ритмической активности. Традиционно на ЭЭГ выделяют несколько частотных диапазонов (альфа, бета, гамма, дельта и т.д.). Существуют четкие корреляции между появлением той или иной частотной составляющей на ЭЭГ и функциональным состоянием организма. Одним из наиболее многочисленных осцилляторных паттернов на ЭЭГ являются сонные веретена. Они наблюдаются во время второй фазы сна («медленный сон») и представляют собой колебания характерной «веретенообразной» формы (с увеличивающейся и далее уменьшающейся амплитудой осцилляций) с частотой 10...15 Гц и продолжительностью 0.5...1.5 с. Известно, что сонные веретена формируются вследствие синхронной работы нейронной сети, объединяющей нейроны коры и таламуса. Интерес к изучению сонных веретен продиктован их возможной связью с эпилептической активностью; в частности, существует гипотеза о трансформации сонных веретен в эпилептические пик-волновые разряды [9].

В настоящей работе была исследована частотно-временная структура сонных веретен на ЭЭГ у крыс с генетической формой абсанс-эпилепсии. По сути, на ЭЭГ у этих животных содержались осцилляторные паттерны эпилептической и неэпилептической природы. К первым относились пик-волновые разряды, характерные для абсанс-эпилепсии, ко вторым – сонные веретена.

Диагностика сонных веретен на ЭЭГ сопряжена с рядом технических сложностей из-за отсутствия строгих критериев их оценки на ЭЭГ, а также из-за существенного многообразия форм сонных веретен. Колебания электрического потенциала внутри отдельных веретен могут быть несимметричными (с преобладанием негативного компонента), могут появляться резкие всплески амплитуды (пики), может наблюдаться «дрейф» частоты основной ритмической составляющей веретена. Всё это порождает многообразие форм сонных веретен, создает дополнительные сложности на пути их анализа и затрудняет сопоставление данных, полученных в разных лабораториях. Наша работа направлена на разработку эффективных методов автоматической диагностики сонных веретен на ЭЭГ, а также принципов их стандартизации с использованием методов, развитых в нелинейной динамике. Представленные разработки могут найти применение в клинической электроэнцефалографии, в сомнологии и фундаментальных исследованиях сна.

Основным инструментом в настоящей работе служило непрерывное вейвлетное преобразование [10–12]. Этот метод имеет ряд преимуществ и в настоящее время широко используется для анализа биомедицинских данных, например, в исследованиях реакции нервной системы на воздействие внешнего стимула [13, 14], ритмической активности респираторной и сердечно-сосудистой систем [15–18], синхронизации между различными областями головного мозга у больных эпилепсией [19, 20], для диагностики перемежающегося поведения в нейронных ансамблях [21–23], для выделения особенностей спайковой активности отдельных нейронов [24, 25]. На предварительном этапе настоящей работы было протестировано несколько базисных функций для непрерывного вейвлетного преобразования и выбран базис, дающий наибольшее частотно-временное разрешение применительно к сигналу ЭЭГ. Затем метод был оптимизирован для автоматического распознавания сонных веретен. В целом алгоритм распознавания веретен является модификацией предложенного нами ранее алгоритма выделения эпилептических пик-волновых разрядов [26–28].

1. Аппарат вейвлетного преобразования и исследуемые экспериментальные данные

Для выделения и анализа осцилляторных паттернов на ЭЭГ было использовано непрерывное вейвлетное преобразование, представляющее собой свертку исследуемого экспериментального сигнала $x(t)$ и некоторой базисной функции [29]

$$W(s, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \varphi_{s,\tau}^*(t) dt, \quad (1)$$

где * означает комплексное сопряжение.

Базисная функция $\varphi_{s,\tau}(t)$ может быть получена из материнского вейвлета с помощью следующего преобразования:

$$\varphi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \varphi_0 \left(\frac{t - \tau}{s} \right), \quad (2)$$

где s – временной масштаб, определяющий растяжение или сжатие материнской функции, τ – временной сдвиг вейвлетного преобразования и φ_0 – материнский вейвлет. Часто вместо временного масштаба s рассматривают частоту $f_s = 1/s$, которую вводят по аналогии с частотой спектра Фурье. В то же самое время, следует обратить внимание на то, что интуитивно ожидаемое соответствие $f_s = f$ между величиной f_s вейвлетного преобразования и частотой f преобразования Фурье, в общем случае не справедливо и при трактовании полученных результатов это следует учитывать [29].

Для выявления особенностей частотной динамики сигнала в данный момент времени $t_{\text{фикс}}$ удобно использовать мгновенные распределения амплитуды сигнала по вейвлетному спектру

$$E f_s = |W(f_s, t = t_{\text{фикс}})|. \quad (3)$$

В работе были использованы данные ЭЭГ, зарегистрированные в коре и в таламусе у восьми крыс эпилептической линии WAG/Rij [30]. Для анализа были

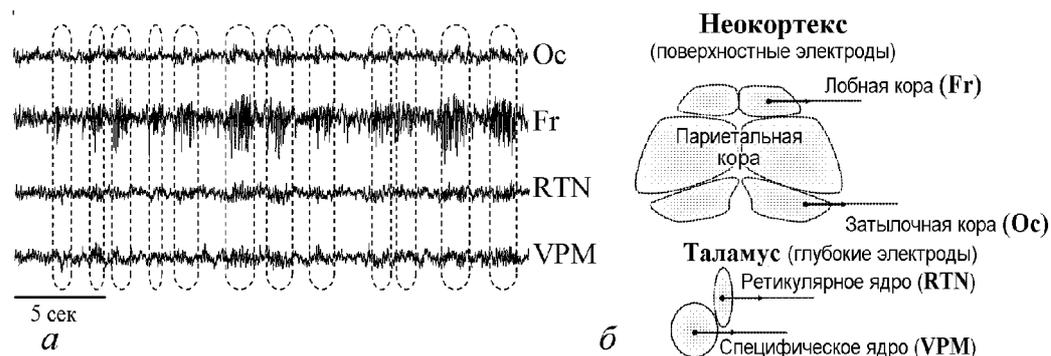


Рис. 1. Пример типичной записи многоканальной эпилептической сонной ЭЭГ, использованной в настоящем исследовании, а также схема расположения регистрирующих электродов

отобраны фрагменты ЭЭГ во время сна с хорошо выраженными сонными веретенами. Характерные записи многоканальной «сонной» ЭЭГ приведены на рис. 1, а. Расположение регистрирующих электродов представлено схематически на рис. 1, б. Исследуемые паттерны – сонные веретена – отмечены на временных реализациях штриховыми рамками. Хорошо видно, что наиболее ярко сонные веретена выделяются в лобной коре (канал Fr), поэтому далее все исследования проводились со скалярным сигналом, снимаемым именно из этой области головного мозга.

Первоначально были протестированы несколько материнских базисных функций для непрерывного вейвлетного преобразования «сонной» ЭЭГ и выявлены достоинства и недостатки каждой из них. Мы сосредоточили внимание на анализе ЭЭГ с помощью действительного – МНАТ [31] – и комплексных – Паула [32] и Морле [33] – материнских вейвлетов, поскольку эти вейвлетные функции наиболее часто используются при исследованиях структуры сигналов. Результаты этого анализа представлены в разделе 2. Необходимо иметь в виду, что каждый вейвлетный базис характеризуется собственным соотношением между частотами f_s вейвлетного преобразования и фурье-частотами, с которыми исследователь имеет дело на практике. Соответственно для МНАТ-вейвлета данное соотношение имеет вид $f_s \approx 3.97f$, для вейвлета Паула с коэффициентом $m = 4 - f_s \approx 0.71f$, и для вейвлета Морле с собственной частотой $\Omega = 2\pi - f_s \approx f$ [29].

На исследованных записях ЭЭГ была проведена «разметка», то есть выделены моменты начала и окончания сонных веретен и пик-волновых разрядов (эпилептических событий). В дальнейшем была проведена оценка эффективности автоматического распознавания сонных веретен путем сравнения экспертной разметки с результатами вейвлетного анализа.

2. Вейвлетный анализ «сонной» ЭЭГ

Результаты вейвлетного анализа ЭЭГ с большим количеством сонных веретен, зарегистрированной в лобной коре во время сна, показаны на рис. 2. Здесь представлен характерный отрезок ЭЭГ и соответствующие амплитудные вейвлетные спектры, полученные с помощью материнских МНАТ (а), Паула (б) и Морле (в) вейвлетных базисов. Штриховые рамки обозначают сонные веретена на ЭЭГ и соответствующие им участки вейвлетных спектров. Учитывая, что частоты сонных

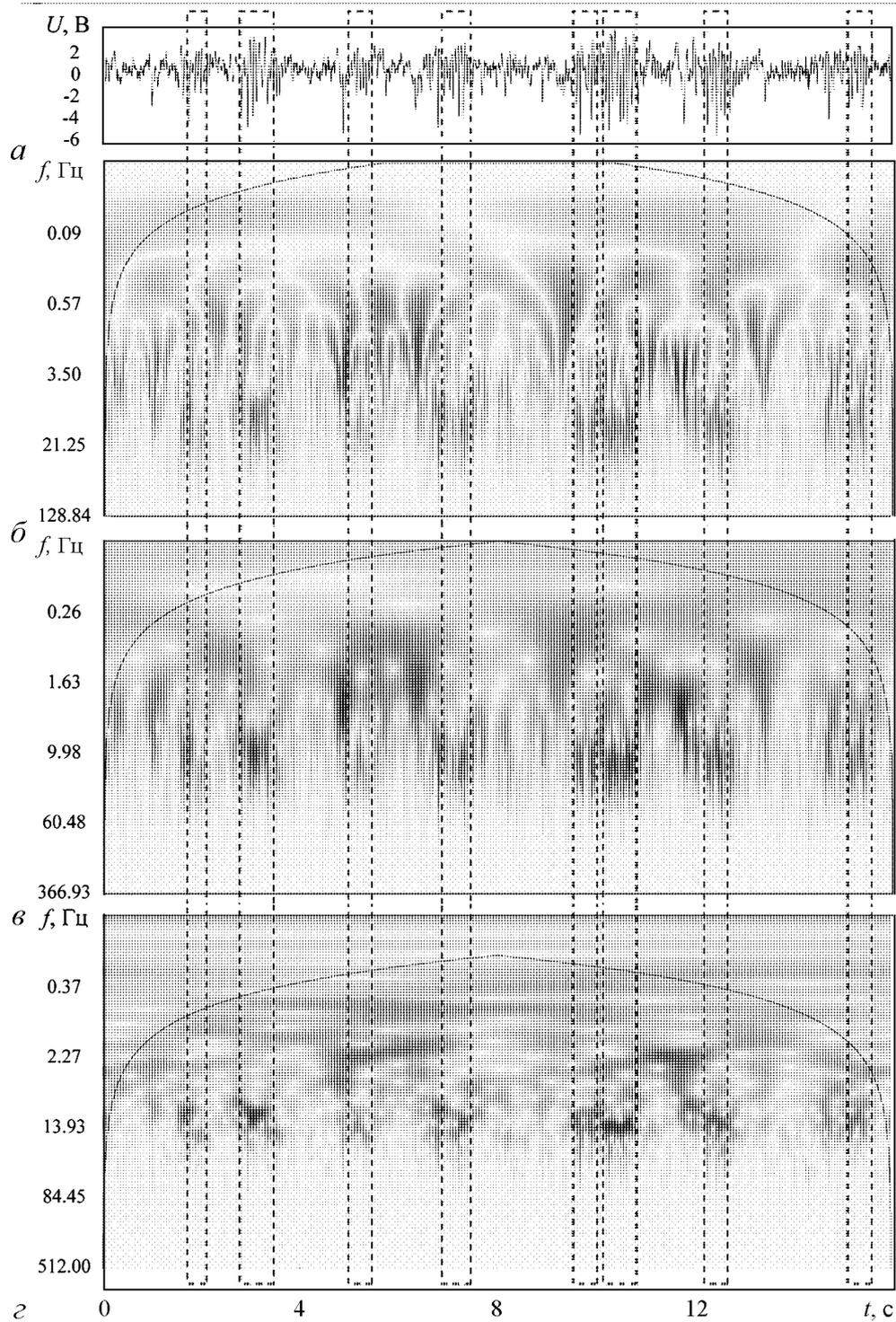


Рис. 2. Отрезок сонной ЭЭГ из фронтальной области (а) и вейвлетные спектры, построенные с различными материнскими вейвлетами: МНАТ (б), Паула (в) и Морле (г)

веретен лежат в диапазоне 10...15 Гц (альфа частоты), этот частотный диапазон был выбран для анализа распределения коэффициентов вейвлетного преобразования.

Анализ и сравнение различных типов материнских базисов показал, что оптимальным для выявления особенностей частотно-временной структуры сонных веретен на ЭЭГ является вейвлет Морле, на основании чего было сделано заключение об использовании именно этого базиса для создания системы автоматического выделения сонных веретен. Действительно, если рассмотреть вейвлетный спектр, полученный с помощью МНАТ-вейвлета, мы обнаружим, что частотное разрешение данного вейвлета невелико, и диапазон в частотной области сонных веретен оказывается достаточно широким и перекрывается с диапазонами, соответствующими другим осцилляторным событиям на ЭЭГ. В то же время, особенности действительного МНАТ-вейвлета таковы, что резкие пики и прочие события на ЭЭГ демонстрируют на вейвлетном спектре мощные всплески амплитуды вейвлетных коэффициентов в интересующем нас диапазоне частот. Кроме того, форма вейвлетного спектра сонных веретен не позволяет отследить особенности динамики их частоты и амплитуды. К достоинствам МНАТ-вейвлета стоит отнести хорошее временное разрешение, которое определяет резкое увеличение амплитуды коэффициентов вейвлетного спектра при возникновении соответствующего ритма на ЭЭГ. Однако из-за плохого частотного разрешения сложно классифицировать резкие скачки амплитуды вейвлетных спектров.

Аналогичная ситуация наблюдается и в случае с комплексным материнским вейвлетом Паула. Его частотное разрешение также не дает возможности точно определить особенности динамики сигнала в области альфа частот. В рассматриваемом частотном диапазоне на вейвлетной поверхности наблюдается много высокоамплитудных составляющих, не являющихся сонными веретенами, что затрудняет проведение анализа.

Иную картину демонстрирует вейвлет Морле, который сочетает в себе хорошее разрешение как в частотной, так и во временной областях сигнала. В области вейвлетного спектра, соответствующей альфа-диапазону, можно легко локализовать сонные веретена как на шкале времени, так и на шкале частот. Это дает возможность отследить на ЭЭГ изменения частоты и амплитуды колебаний, характерных для сонного веретена, в автоматическом режиме.

Проведенный анализ большого числа вейвлетных спектров сонных веретен показал, что на записях ЭЭГ у крыс эпилептической линии выделяется несколько характерных типов сонных веретен по критерию их частотной динамики, а именно основной частоты вейвлетного спектра. Как уже отмечалось во введении, сонные веретена имеют частоту порядка 10...15 Гц, при этом их форма весьма разнообразна, поэтому базовые частоты существенно варьируются в данном частотном диапазоне от веретена к веретену. Однако на вейвлетных спектрах, построенных с помощью материнского вейвлета Морле, были обнаружены события, форма которых была близка к форме сонных веретен, но базовые частоты лежали в области, характерной для эпилептических пик-волновых разрядов (7...12 Гц, см., например [34]). Данный факт удобно проиллюстрировать мгновенными вейвлетными спектрами $E(f_s)$ типичных сонных веретен.

На рис. 3 показаны характерные распределения амплитуды вейвлетных коэффициентов, а также осциллограммы типичных паттернов ЭЭГ, которые использова-

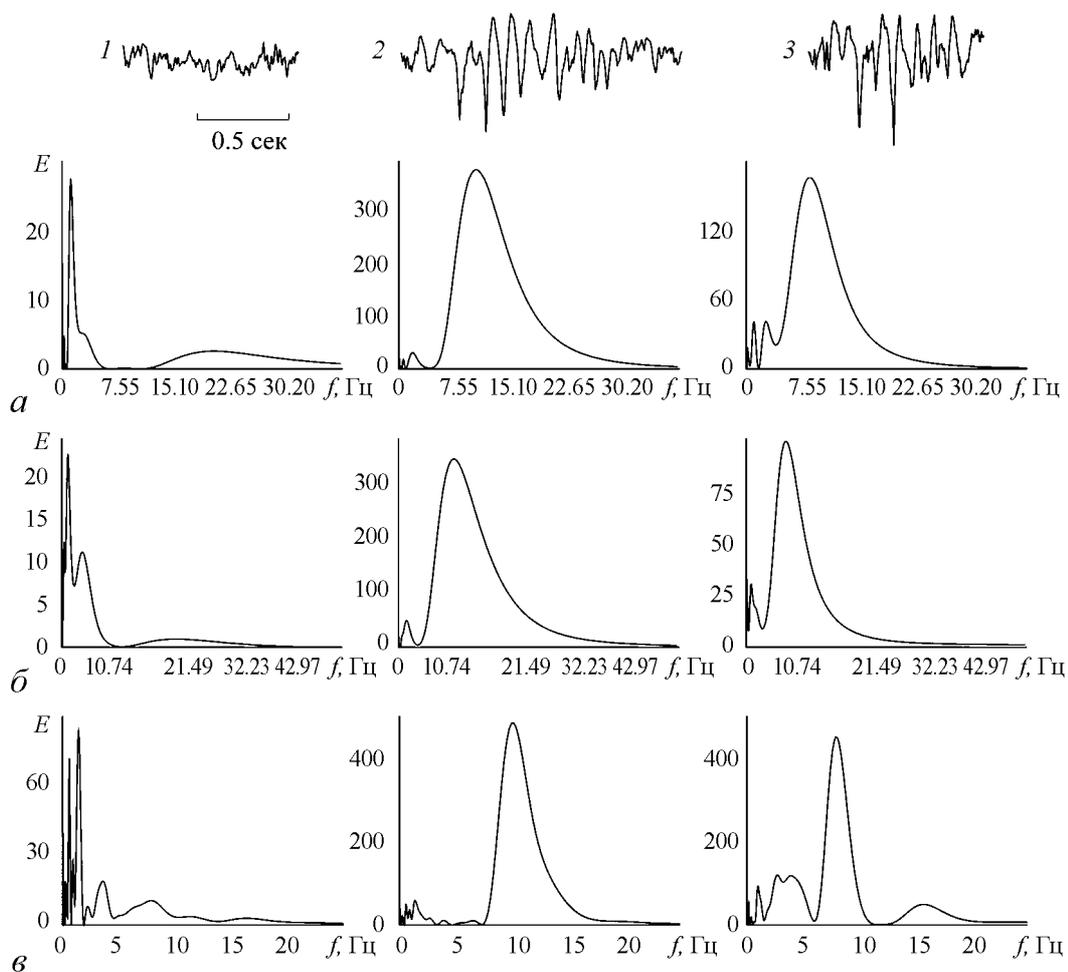


Рис. 3. Распределения амплитуды коэффициентов вейвлетного преобразования по частотам для различных отрезков ЭЭГ, соответствующих фоновой активности (1), типичному (2) и атипичному (проэпилептическому) (3) сонным веретенам, построенные с различными материнскими вейвлетами: МНАТ (а), Паула (б) и Морле (в)

лись для построения мгновенных вейвлетных спектров. Представлены результаты вейвлетных преобразований с базовыми вейвлетными функциями МНАТ (а), Паула (б) и Морле (в). Первая колонка на рис. 3 соответствует фоновой ЭЭГ (состояние десинхронизации ЭЭГ). Хорошо видно, что в это время на ЭЭГ наблюдаются колебания в широком диапазоне частот, но с очень малой амплитудой. Сравнительно большой амплитудой вейвлетного спектра характеризуются только колебания с частотами, соответствующими диапазону 0...5 Гц. Вторая колонка на рис. 3 иллюстрирует спектр типичного сонного веретена. Видно, что максимум амплитуды вейвлетного спектра приходится на частоты 10...12 Гц, что соответствует классическому определению частотного состава сонного веретена. Следует отметить значительно большую (по сравнению с фоновой ЭЭГ) энергию, приходящуюся на спектр сонного веретена, что находит отражение в больших значениях мгновенного спектра E . В третьей колонке на рис. 3 представлен типичный осцилляторный паттерн, имеющий форму сонного веретена, но более низкую частоту (в диапазоне 6...10 Гц), соответствующую частоте эпилептического пик-волнового разряда. Подобные события на ЭЭГ

Таблица 1

№ животного	f_s , Гц		Средняя длительность, с	W_{\max}		$\langle W_{\phi} \rangle$		N	$w_{1\text{кр}}$	$w_{2\text{кр}}$
	F_{s1}	F_{s2}		F_{s1}	F_{s2}	F_{s1}	F_{s2}			
1	8.38 ± 1.60	13.64 ± 1.70	0.63 ± 0.25	0.52 ± 0.44	1.35 ± 0.80	0.40	0.40	0.18	0.06	3.63
2	7.56 ± 1.18	14.3 ± 1.70	0.59 ± 0.27	0.22 ± 0.11	0.22 ± 0.12	0.20	0.20	0.10	0.06	1.99
3	8.17 ± 0.93	13.3 ± 1.26	0.47 ± 0.12	0.27 ± 0.15	0.25 ± 0.07	0.25	0.20	0.08	0.05	1.96
4	8.07 ± 0.73	15 ± 1.00	1.23 ± 0.73	0.87 ± 0.76	0.47 ± 0.21	0.40	0.40	0.15	0.10	1.44

были названы «атипичными» сонными веретенами. Максимум вейвлетного спектра «атипичного» веретена находился в области частот, близких к 8 Гц. Усредненные величины максимальных значений коэффициентов вейвлетного преобразования W_{\max} в каждом частотном диапазоне представлены в табл. 1.

Характерные особенности каждого из четырех анализируемых животных, результаты вейвлетного анализа частотно-временных особенностей сонных веретен с использованием вейвлета Морле, а также параметры описанного в разделе 3 метода приведены в табл. 1. В таблице представлены следующие данные:

- доминирующие частоты f_s колебаний сонного веретена в диапазонах частот $F_{s1} \in [5...9]$ Гц и $F_{s2} \in [10...16]$ Гц, которые, как будет показано ниже, имеют наибольшую мощность на вейвлетном спектре;
- средняя длительность сонного веретена каждого животного;
- усредненные величины максимальных значений W_{\max} вейвлетных коэффициентов в каждом характерном частотном диапазоне в течение сонного веретена;
- средние величины $\langle W_{\phi} \rangle$ вейвлетных коэффициентов в каждом характерном частотном диапазоне фоновой ЭЭГ;
- среднее число N сонных веретен, наблюдающихся на ЭЭГ во время сна на интервале 10 с;
- параметры метода автоматической диагностики сонных веретен (см. раздел 3 статьи).

Сравнивая мгновенные вейвлетные спектры, построенные с помощью различных вейвлетных базисов, можно сделать вывод, что только вейвлет Морле дает возможность выделить и различить два обнаруженных типа сонных веретен. Хорошо видно, что использование МНАТ и комплексного вейвлета Паула в качестве базисных функций не обеспечивает необходимого разрешения по частоте (большая ширина соответствующего максимума в спектре на рис. 3, a и b), поэтому два пика на частотах 12 и 8 Гц практически сливаются и оказываются неразличимыми с точки зрения вейвлетного анализа. Следует также отметить, что энергия «атипичного» веретена оказывается существенно (в 2–3 раза) меньшей, чем энергия типичного сонного веретена; из-за этого «атипичные» веретена сложно выделить на фоне десинхронизованной («фоновой») ЭЭГ и отличить от более часто встречающихся типичных веретен. Данный факт также значительно усложняет автоматическое выделение сонных веретен с использованием вышеназванных типов материнских вейвлетов.

В то же самое время вейвлетный анализ с материнским комплексным вейвлетом Морле позволяет эффективно выделить два типа сонных веретен: во-первых,

благодаря хорошему частотному разрешению, пики, соответствующие двум типам веретен, на вейвлетных спектрах не перекрываются, во-вторых, нормировка амплитуды вейвлетного спектра такова, что амплитуды обоих типов веретен оказываются сравнимы друг с другом. Это делает возможным решение задачи о распознавании сонных веретен на ЭЭГ с использованием материнского вейвлета Морле.

Следует отметить, что сбалансированное частотно-временное разрешение, обеспечиваемое использованием комплексного вейвлета Морле с $\Omega = 2\pi$, позволяет провести эффективный анализ частотной динамики в течение сонного веретена, что было бы невозможно сделать с использованием других вейвлетных базисов. На рис. 4 показан отрезок ЭЭГ (а), соответствующий вейвлетный спектр (б), полученный с помощью комплексного вейвлета Морле, и мгновенные распределения амплитуды (в) вейвлетного спектра, соответствующие моментам времени 1–3, выделенным на рис. 4, а стрелками. На приведенном отрезке можно выделить два сонных

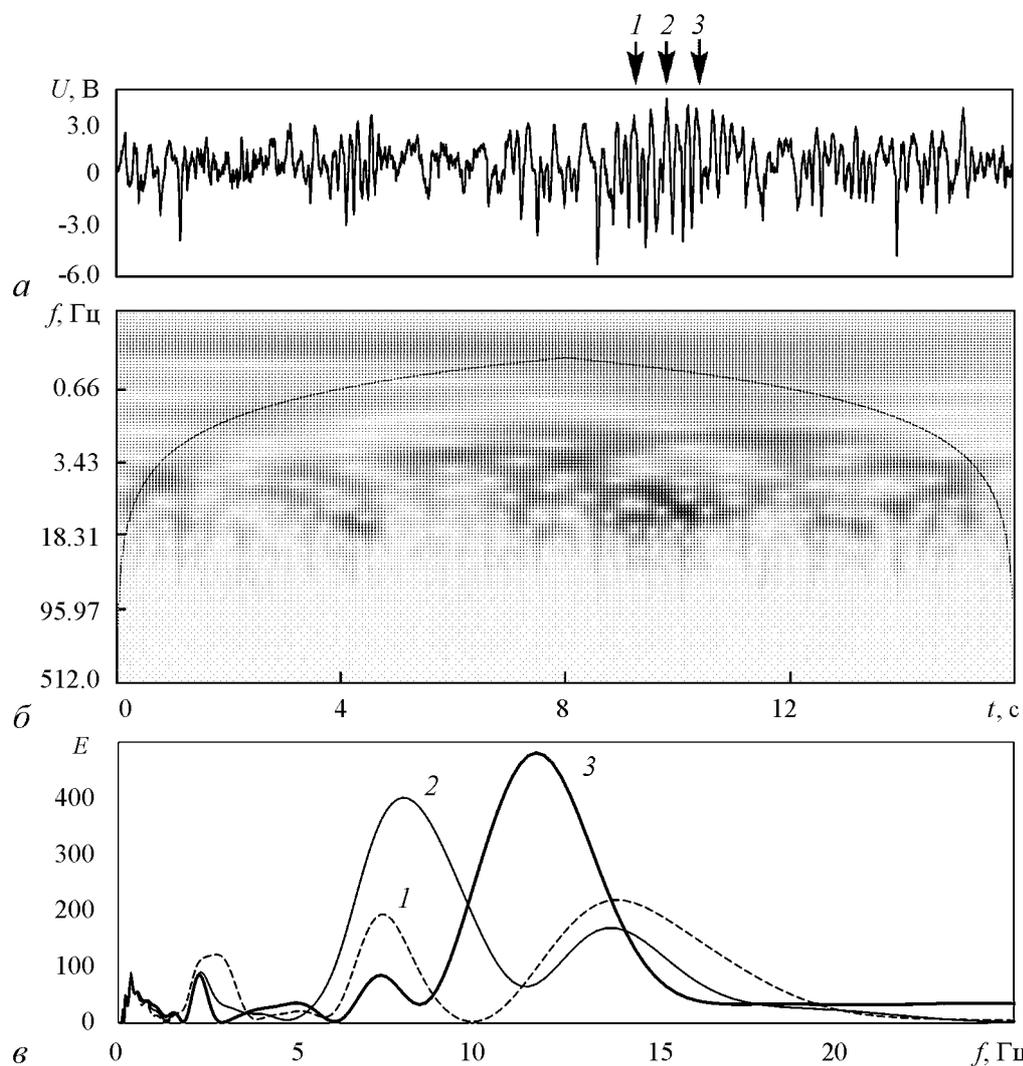


Рис. 4. Динамика частотного состава в течение сонного веретена: временная реализация из фронтальной области (а), вейвлетный спектр (б) и распределение амплитуды коэффициентов вейвлетного преобразования в различные моменты времени (отмечены стрелками на рис. а) (в)

веретена, но первое, появляющееся в момент времени $t = 4$ с, является коротким и слабо выраженным на фоновой ЭЭГ, поэтому анализ проводился для второго сонного веретена, возникающего в момент времени $t = 9...11$ с и отмеченного стрелками. Наиболее важным результатом такого детального анализа является тот факт, что основная частота в течение сонного веретена сильно меняется, увеличиваясь к концу веретена. Это хорошо можно проследить на вейвлетной поверхности и на представленных мгновенных спектрах. Видно, что колебания в начале сонного веретена наблюдаются на частоте порядка 7.5 Гц (кривая 1 на рис. 4, в), затем растет амплитуда колебаний и наблюдается медленный сдвиг частоты в сторону больших частот (кривая 2). Одновременно с этим в спектре имеют место более быстрые колебания с меньшей амплитудой и частотой порядка 14 Гц. Однако к концу сонного веретена происходит быстрое изменение (увеличение) основной частоты до 12 Гц, в то же самое время, более высокочастотная динамика перестает наблюдаться, однако ритм 7.5 Гц, который был в самом начале сонного веретена, остается, хотя и с существенно меньшей амплитудой.

Рост основной частоты (в ряде случаев быстрый, как в рассматриваемом примере, в ряде случаев – более монотонный и плавный) оказывается типичным для сонных веретен на эпилептической ЭЭГ. Это отличает динамику сонных веретен от пик-волновых разрядов, которые также характеризуются сильными изменениями частоты внутри разряда. Однако частота пик-волнового разряда уменьшается, а не увеличивается к концу последнего, как в сонных веретенах. Следует также отметить, что такая сложная перестройка частоты колебаний в течение сонного веретена может существенно усложнить выделение типичного частотно-временного паттерна сонного веретена и, как следствие, создать определенные трудности при автоматической диагностике и выделении сонных веретен. Как было отмечено в работе [34], это связано с большей вариабельностью сонных веретен по сравнению с другими типичными осцилляторными паттернами на ЭЭГ, в частности, пик-волновыми разрядами [35].

3. Автоматическое выделение сонных веретен на ЭЭГ на основе анализа распределения энергии вейвлетного спектра

Рассмотрим возможность построения автоматической экспертной системы, которая позволила бы эффективно и с высокой точностью выделять сонные веретена на записях ЭЭГ на основе описанных выше частотно-временных особенностей сонных веретен. Известен ряд оригинальных методов анализа динамики нейронных ансамблей на базе ЭЭГ с помощью вейвлетного преобразования. Так, в работе [36] описывается метод классификации ЭЭГ с помощью оценки значений вейвлет-пакетных коэффициентов в определенных частотных диапазонах. В работе [37] вейвлетное преобразование было применено для предварительной подготовки сигнала, а именно, для очистки от артефактов посредством дискриминации малозначимых вейвлет-коэффициентов, полученных на основе разложения сигнала по ортогональным вейвлет-пакетам. В работе [38] предложен метод анализа переходных процессов, наблюдаемых на ЭЭГ при фотостимуляции, основанный на наблюдении за динамикой спектральных компонент на вейвлетной поверхности. Широко применяет-

ся вейвлетный анализ и для выделения сигналов отдельных нейронов при записи электрической активности малых групп нейронов [24, 25]. Важно отметить, что наиболее эффективным способом в данном контексте является анализ распределения энергии непрерывного вейвлетного преобразования по частотам и выделение критериев, которые позволили бы описать характерные частотно-временные образы того или иного осцилляторного паттерна [26, 34]. Подобные методы оказываются эффективными для обработки уже записанных сигналов, а также позволяют детектировать осцилляторные паттерны в режиме *реального* времени (см., например, [27, 28]).

Алгоритм распознавания сонных веретен, использованный в рамках настоящего исследования, был впервые использован в работах [26, 34] для автоматической диагностики пик-волновых разрядов. Как уже отмечалось в разделе 2 статьи, вейвлетные спектры сонных веретен характеризуются пиком мощности в диапазоне частот 6...15 Гц, при этом базовая частота в спектре сонного веретена имеет тенденцию увеличиваться в пределах данного частотного диапазона от начала к концу сонного веретена. Основная идея использованных ранее методов [26, 34] заключалась в том, что исследуемый временной ряд (ЭЭГ) подвергался вейвлетному преобразованию, затем проводился расчет мгновенной энергии преобразования $w(t)$ в характерном частотном диапазоне F_s :

$$w(t) = \int_{F_s} |W_{s,t}| ds. \quad (4)$$

В случае, когда значение $w(t)$ превышало некоторый критический уровень $w_{кр}$ ($w(t) > w_{кр}$), делался вывод о наличии искомого паттерна на ЭЭГ.

В работах [26, 34] для выделения пик-волнового разряда был использован частотный диапазон $F_s \in [35...100]$ Гц. В настоящей работе выделение сонных веретен проводили с учетом особенностей их частотного состава, вследствие чего были использованы два частотных диапазона $F_{s1} \in [5...9]$ Гц и $F_{s2} \in [10...16]$ Гц, что позволило детектировать как обычные, так и «атипичные» сонные веретена (см. распределения энергии вейвлетного спектра, рис. 3, в). Вывод о наличии на ЭЭГ сонного веретена делался на основе анализа энергий $w_1(t)$ и $w_2(t)$ в каждом из диапазонов F_{s1} и F_{s2} , когда величины $w_1(t)$ и $w_2(t)$ превышали некоторые пороговые значения $w_{1кр}$ и $w_{2кр}$ (для первого и второго диапазонов, соответственно)

$$w_1(t) > w_{1кр} \vee w_2(t) > w_{2кр}. \quad (5)$$

Отличительной чертой вейвлетного преобразования сигнала ЭЭГ, содержащего сонное веретено, являлась сильная изрезанность функции энергии вейвлетного преобразования $w(t)$ (4) от времени. Это обусловлено обнаруженными изменениями частоты в течение сонного веретена и вариациями амплитуды колебаний. Поэтому для определения момента прекращения сонного веретена был использован следующий критерий:

$$w_1(t) < w_0 \wedge w_2(t) < w_0, \quad (6)$$

где w_0 – средний уровень мощности вейвлетного спектра, рассчитанный для фоновой ЭЭГ в исследуемом частотном диапазоне. Данный подход позволил избежать ложного обнаружения нескольких «коротких» сонных веретен, когда на самом деле существовало одно длинное веретено.

Наконец, необходимо отметить, что ЭЭГ является сложным сигналом, в котором могут появляться отдельные всплески активности в различных диапазонах частот, что отражает динамику функционирования нейронных ансамблей коры головного мозга (в частности, К-комплексы, альфа-подобная активность, комплексы дельта волн). Подобные события могут вызывать резкое кратковременное увеличение мгновенной энергии преобразования, в том числе и в рассматриваемых частотных диапазонах F_{s1} и F_{s2} , и, соответственно, вызывать ложное детектирование сонного веретена. Поскольку подобные всплески энергии представляются достаточно частым событием, в вышеописанный алгоритм был внесен ряд усовершенствований для повышения точности анализа. Так, при диагностике колебаний в соотношениях (5) и (6) при сравнении величин w_1 и w_2 с пороговыми значениями $w_{1кр}$ и $w_{2кр}$ использовали не мгновенные значения энергии преобразования (4), а значения, усредненные по некоторому интервалу времени:

$$\langle w(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_T w(t) dt. \quad (7)$$

Численный анализ показал, что оптимальной шириной окна, позволяющей снизить влияние коротких артефактов на качество распознавания веретен, является величина $T = 0.5$ с.

Рис. 5 наглядно иллюстрирует принципы работы описанного метода (4)–(7) и результаты выделения сонных веретен. На рисунке представлен типичный отрезок «сонной» ЭЭГ с несколькими веретенами (а), соответствующий вейвлетный спектр (б) и энергия вейвлетного преобразования $w_1(t)$ и $w_2(t)$ в диапазонах F_{s1} и F_{s2} (в), а также сонные веретена, выделенные экспертом (г) и автоматически (д). Горизонтальными линиями на рис. 5, г показаны пороговые значения энергий $w_{1кр}$ и $w_{2кр}$, которые были определены эмпирически. Видно, что метод, основанный на анализе энергии ЭЭГ в двух частотных диапазонах, характерных для сонно-веретенной активности, обладает весьма высокой точностью, сопоставимой с экспертной разметкой. В указанном временном интервале наблюдалась единственная ошибка детектирования в момент времени $t = 257$ с, когда метод демонстрирует наличие сонного веретена, в то время как эксперт не отметил данное событие как веретено. Важным аспектом предложенного метода является то, что критические пороги энергий для двух рассматриваемых частотных диапазонов могут различаться (или быть одинаковыми), что позволяет гибко настроить алгоритм для максимальной точности выделения интересующих событий.

Оптимально подобранные параметры метода для каждого из животных представлены в табл. 1. Именно эти параметры были использованы далее для автоматизированной обработки записей ЭЭГ, содержащих сонные веретена.

Вычисления проводились на ЭВМ Pentium Quad 2.4 ГГц, 2 Гб ОЗУ, ОС Windows XP SP3. Программа анализа была разработана в свободно распространяемой среде программирования Python 2.7. Для обработки записи ЭЭГ с длительностью 2 часа требовалось около 4-х часов машинного времени. Так как расчет для продолжительной записи ЭЭГ занимает значительное машинное время, то представляется целесообразным разбиение одной длинной записи ЭЭГ на несколько более коротких отрезков, которые могут обрабатываться параллельно на различных ядрах процессора или на различных компьютерах с использованием, например, Grid-технологии. Это позволяет значительно снизить затраты времени, требуемого для обработки одной анализируемой записи.

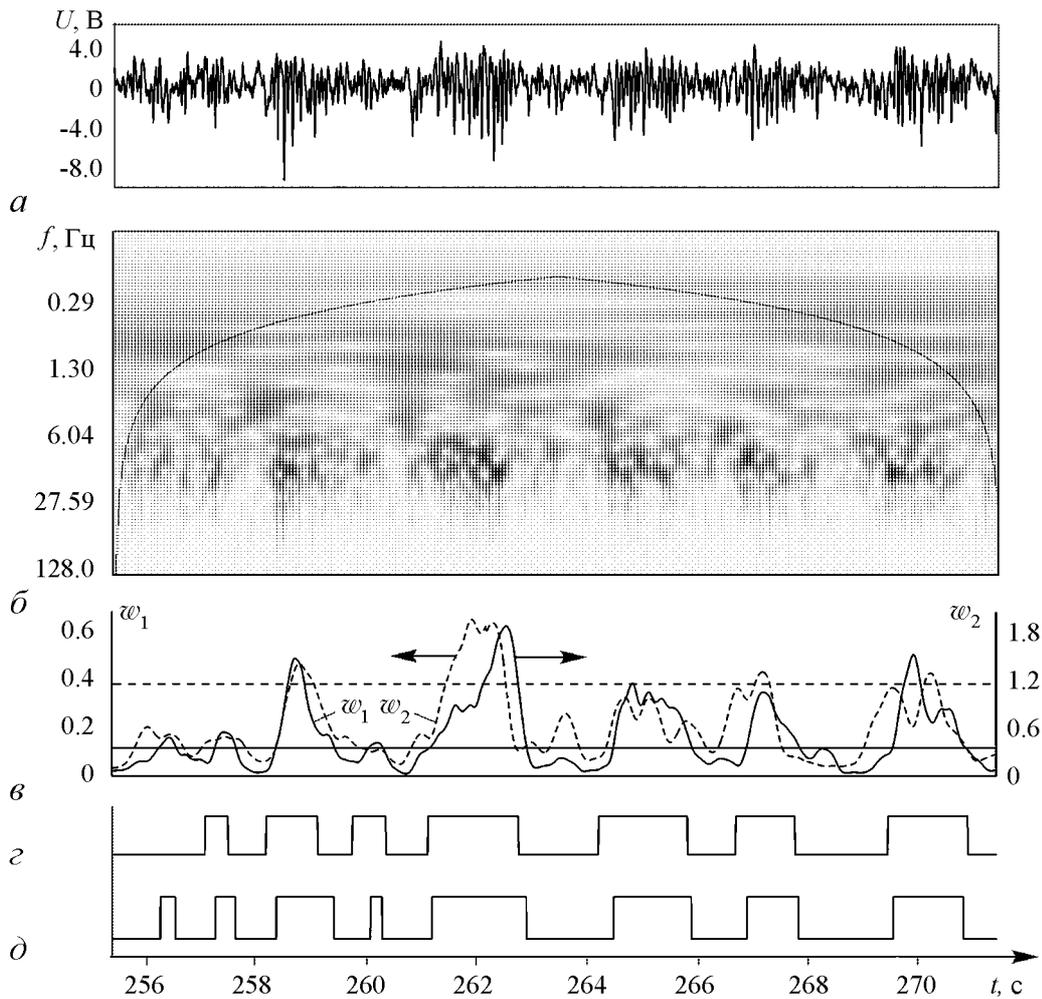


Рис. 5. Отрезок сонной ЭЭГ из фронтальной области (а), вейвлетный спектр (б), мгновенные энергии вейвлетного преобразования в диапазонах F_{s1} (штриховая линия) и F_{s2} (сплошная линия) (в), выделенные экспертом (з) и предложенным в работе методом (д) сонные веретена. Горизонтальными линиями на (в) показаны пороги энергий $w_{1кр}$ (штриховая линия) и $w_{2кр}$ (сплошная линия)

На основании собранной статистики по качеству распознавания сонных веретен на ЭЭГ анализировались такие важные статистические характеристики автоматической диагностики сонных веретен на ЭЭГ, как уровень значимости β и мощность критерия δ [39, 40]:

$$\delta = \frac{N_{TP}}{(N_{TP} + N_{FN})} \times 100\%, \quad \beta = \frac{N_{TP}}{(N_{TP} + N_{FP})} \times 100\%, \quad (8)$$

где N_{TP} – число верно распознанных событий, N_{FP} – число ложно распознанных событий, то есть число событий, которые определялись автоматически как сонное веретено, но не были распознаны экспертом, и N_{FN} – число пропущенных сонных веретен. Данные статистические параметры часто используются в качестве характеристик принятия «бинарного» решения (в данном случае наличие/отсутствие сонного веретена) на базе некоего критерия, который с некоторой вероятностью может давать ложный результат. Первая характеристика (δ) позволяет оценить чувствительность метода, то есть процент распознанных сонных веретен по отношению к

Таблица 2

№ животного	$N_{тр}$	N_{FP}	N_{FP}	$\delta, \%$	$\beta, \%$
1	38	6	1	97	86
2	39	12	30	76	55
3	30	3	12	90	64
4	27	2	4	93	87
Среднее	33.5 ± 5.9	6.3 ± 4.0	11.3 ± 4.0	89 ± 9.1	73 ± 16.0

общему числу сонных веретен на ЭЭГ; вторая (β) – процент событий, верно определенных как сонные веретена от общего числа событий, диагностированных как сонные веретена.

Результаты статистической проверки метода представлены в табл. 2, где видно, что уровень значимости δ метода был порядка 90%, среднее значение критерия мощности $\beta \approx 73\%$. Принимая во внимание сильную вариабельность и разнообразие паттерна сонного веретена на ЭЭГ, можно считать, что эффективность метода оказывается достаточно большой. Наихудшие результаты использования автоматического распознавания сонных веретен были получены у крысы № 2. ЭЭГ данной крысы характеризовалась очень низкой амплитудой, и сонные веретена были слабо различимы на фоновой записи даже экспертом. Можно предположить, что в данном случае пришлось иметь дело с примером неудачной записи ЭЭГ, что могло быть связано с индивидуальными особенностями животного, дефектом электродов или недостаточностью контакта с электродами.

Заключение

В представленной работе был проведен анализ электрической активности головного мозга, зарегистрированной во время сна у крыс с генетической предрасположенностью к абсанс-эпилепсии. Были исследованы характерные особенности частотно-временной структуры сонных веретен – особых осцилляторных паттернов, являющихся электроэнцефалографическим коррелятом медленно-волнового сна.

В ходе разработки технических средств для обработки сигнала ЭЭГ с помощью непрерывного вейвлетного преобразования было проведено тестирование различных материнских функций. Показано, что комплексный вейвлет Морле является наиболее эффективным базисным вейвлетом, позволившим выявить характерную частотно-временную структуру сонных веретен на ЭЭГ. Данный вывод хорошо согласуется с предыдущими результатами наших работ [26–28,34,41] по изучению других паттернов на ЭЭГ животных, больных абсанс-эпилепсией. Как следствие, вейвлет Морле был использован для создания системы автоматической диагностики сонных веретен на ЭЭГ.

Были обнаружены два типа сонных веретен, имевших сходную временную динамику, но разный частотный состав. Выявлена сложная динамика основной частоты в течение сонного веретена.

Основываясь на результатах работ [23,26,27,34], был разработан новый метод автоматической диагностики сонных веретен. Метод базируется на результатах непрерывного вейвлетного преобразования анализируемых сигналов и предусматри-

вает расчет величин мгновенных энергий вейвлетного преобразования в двух частотных диапазонах, характерных для выделяемых осцилляторных паттернов. Данный метод намного проще в реализации, чем метод, предложенный ранее в работе [34] для выделения сонных веретен и основанный на построении адаптивных вейвлетных базисов. Тем не менее, несмотря на простоту, предложенный нами метод продемонстрировал высокую точность и селективность в отношении сонных веретен.

Следует отметить, основываясь на результатах работы [27], посвященной выделению пик-волновых эпилептических разрядов на ЭЭГ в реальном времени с помощью алгоритма, сходного с рассмотренным в данной работе, что предложенный метод может быть в перспективе адаптирован и использован для диагностики сонных веретен на ЭЭГ во время записи электрической активности головного мозга в режиме реального времени.

Работа поддержана Президентской программой поддержки ведущих научных школ (проект НШ-3407.2010.2), а также ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы.

Библиографический список

1. *Абарбанель Г.Д.И., Рабинович М.И., Селверстон А. и др.* Синхронизация в нейронных ансамблях // *Успехи физических наук.* 1996. Т. 166. С. 363.
2. *Mosekilde E., Maistrenko Yu., Postnov D.E.* Chaotic synchronization, applications to living systems. Singapore: World Scientific. 2002.
3. *Безручко Б.П., Пономаренко В.И., Прохоров и др.* Моделирование и диагностика взаимодействия нелинейных колебательных систем по хаотическим временным рядам (приложения в нейрофизиологии) // *Успехи физических наук.* 2008. Т. 178. С. 323.
4. *Некоркин В.И.* Нелинейные колебания и волны в нейродинамике // *Успехи физических наук.* 2008. Т. 178. С. 313.
5. *Steriade M., Deschenes M.* The thalamus as a neuronal oscillator // *Brain Res. Rev.* 1984. Vol. 8. P. 1.
6. *Destexhe A., Sejnowski T.J.* Thalamocortical assemblies: How ion channels, single neurons and large-scale networks organize sleep oscillations. Oxford University Press, 2001.
7. *Niedermeyer E., Silva F.L.* Electroencephalography: Basic principles, clinical applications, and related fields. Lippincot Williams & Wilkins. 2004.
8. *Nunez P.L., Srinivasan R.* Electric fields of the brain: The neurophysics of EEG. Oxford University Press, 1981.
9. *Kostopoulos G.K.* Spike-and-wave discharges of absence seizures as a transformation of sleep spindles: the continuing development of a hypothesis // *Clinical Neurophysiology.* 2000. Vol. 111. Suppl 2. S27–38.
10. *Holschneider M.* Wavelets: An analysis tool. Oxford University Press, 1995.
11. *Aldroubi A., Unser M.* Wavelets in medicine and biology. CRC-Press, 1996.
12. *Daubechies I.* Orthonormal bases of compactly supported wavelets // *Communications on Pure and Applied Mathematics.* 1988. Vol. 41. P. 909.
13. *Tass P.A. et al.* Detection of n:m phase locking from noisy data: Application to magnetoencephalography // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 81. P. 3291.

14. *Tass P.A., Fieseler T., Dammers J. et al.* Synchronization tomography: A method for three-dimensional localization of phase synchronized neuronal populations in the human brain using magnetoencephalography // *Phys. Rev. Lett.* 2003. Vol. 90, P. 088101.
15. *Anishchenko V.S., Balanov A.G., Janson N.B. et al.* Entrainment between heart rate and weak noninvasive forcing // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 2000. Vol. 10. P. 2339.
16. *Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I., Gridnev V.I. et al.* Synchronization between main rhythmic processes in the human cardiovascular system // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 68. P. 041913.
17. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D.* Detecting synchronization of self-sustained oscillators by external driving with varying frequency // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 73. P. 026208.
18. *Короновский А.А., Пономаренко В.И., Прохоров М.Д., Храмов А.Е.* Метод исследования синхронизации автоколебаний по унивариантным данным с использованием непрерывного вейвлетного анализа // *ЖТФ.* 2007. Т. 77, № 9. С. 6.
19. *Meinecke F.C., Ziehe A., Kurths J., Müller K.-R.* Measuring phase synchronization of superimposed signals // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 94. P. 084102.
20. *Chavez M., Adam C., Navarro V. et al.* On the intrinsic time scales involved in synchronization: A data-driven approach // *Chaos.* 2005. Vol. 15. P. 023904.
21. *Velazquez J.L.P., Khosravani H., Lozano A. et al.* Type III intermittency in human partial epilepsy // *European Journal of Neuroscience.* 1999. Vol. 11. P. 2571.
22. *Короновский А.А., Кузнецова Г.Д., Мидзяновская И.С., Ситникова Е.Ю., Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Закономерности перемежающегося поведения в спонтанной неконвульсивной судорожной активности у крыс // *ДАН.* 2006. Т. 409. С. 274.
23. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Midzyanovskaya I.S. et al.* On-off intermittency in time series of spontaneous paroxysmal activity in rats with genetic absence epilepsy // *Chaos.* 2006. Vol. 16. P. 043111.
24. *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E., Yip K.-P., Holstein-Rathlou N.-H., Marsh D.J.* Synchronization among mechanisms of renal autoregulation is reduced in hypertensive rats // *American Journal of Physiology (Renal Physiology).* 2007. Vol. 293. P. F1545.
25. *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H.* Synchronization phenomena in multimode dynamics of coupled nephrons // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2003. Т. 11, №3. С. 133.
26. *Короновский А.А., Минюхин И.М., Тьценко А.А., Храмов А.Е., Мидзяновская И.С., Ситникова Е.Ю., ван Луйтелаар Ж., ван Рижн С.М.* Применение непрерывного вейвлет-преобразования для анализа перемежающегося поведения // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2007. Т. 15, №4. С. 34.
27. *Ovchinnikov A.A., Luttjohann A., Hramov A.E., van Luijtelaaar G.* An algorithm for real-time detection of spike-wave discharges in rodents // *Journal of Neuroscience Methods.* 2010. Vol. 194. P. 172.
28. *Овчинников А.А., Храмов А.Е., Люттьеханн А., Короновский А.А., ван Луйтелаар Ж.* Метод диагностики характерных паттернов на наблюдаемых временных рядах и его экспериментальная реализация в режиме реального времени применительно к нейрофизиологическим сигналам // *ЖТФ.* 2011. Т. 81. С. 3.
29. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003.

30. *Coenen A.M., van Luijtelaar E.L.* Pharmacological dissociation of EEG and behavior: A basic problem in sleep-wake classification // *Sleep*. 1991. Vol. 14. P. 464.
31. *Mallat S.G.* Multiresolution approximations and wavelets orthonormal bases of $L^2(R)$ // *Trans. Amer. Soc.* 1989. Vol. 315. P. 69.
32. *Paul T.* Function analitic on half-plane as quantum mechanical states // *J. Math. Phys.* 1984. Vol. 24. P. 136.
33. *Grossman A., Morlet J.* Decomposition of hardly functions into square integrable wavelets of constant shape // *SIAM J. Math. Anal.* 1984. Vol. 15, № 4. P. 273.
34. *Sitnikova E.Yu., Hramov A.E., Koronovskii A.A., van Luijtelaar G.* Sleep spindles and spike-wave discharges in EEG: Their generic features, similarities and distinctions disclosed with Fourier transform and continuous wavelet analysis // *Journal of Neuroscience Methods*. 2009. Vol. 180. P. 304.
35. *Sitnikova E., van Luijtelaar G.* Cortical and thalamic coherence during spike-wave seizures in WAG/Rij rats // *Epilepsy Res.* 2006. Vol. 71. P. 159.
36. *Абдуллаев Н.Т., Дышин О.А., Самедова Х.З.* Автоматическая классификация электроэнцефалограмм на основе их вейвлет-пакетной обработки // *Биомедицинская радиоэлектроника*. 2009. № 6. С. 45.
37. *Абдуллаев Н.Т., Дышин О.А., Самедова Х.З.* Вейвлетная очистка электроэнцефалограмм от артефактов с адаптацией к их виду и динамике // *Биомедицинская радиоэлектроника*. 2009. № 12. С. 34.
38. *Божокин С.В., Суворов Н.Б.* Вейвлет-анализ переходных процессов электроэнцефалограммы при фотостимуляции // *Биомедицинская радиоэлектроника*. 2008. № 3. С. 85.
39. *Pearson E.S., Neyman J.* On the problem of two samples. *Joint Statistical Papers*, Cambridge University Press, Cambridge, 1967
40. *Raiiffa H.* Decision analysis: Introductory lectures on choices under uncertainty. Addison-Wesley, Reading, 1968.
41. *van Luijtelaar G., Hramov A.E., Sitnikova E.Yu., Koronovskii A.A.* Spike-wave discharges in WAG/Rij rats are preceeded by delta and theta precursor activity in cortex and thalamus // *Clinical Neurophysiology*. 2011. Vol. 122. P. 687.

*Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
Институт высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН*

*Поступила в редакцию 14.03.2011
После доработки 23.05.2011*

WAVELET ANALYSIS OF SLEEP SPINDLES ON EEG AND DEVELOPMENT OF METHOD FOR THEIR AUTOMATIC DIAGNOSTIC

V.V. Grubov, A.A. Ovchinnikov, E.Yu. Sitnikova, A.A. Koronovskii, A.E. Hramov

The detailed wavelet analysis of sleep electric brain activity, obtained from rats with genetic predisposition to absence-epilepsy, has been performed. Characteristic features of time-and-frequency structure of sleep spindles (oscillatory pattern, that serve as electroencephalographic correlate for slow-wave sleep) have been discovered in long-term

electroencephalographic data. Operation has been performed using continuous wavelet transform. Few common wavelet bases have been tested and complex Morlet-wavelet turned out to be the most effective for detection of time-and-frequency features of sleep spindles on EEG. Morlet-wavelet has been used for development of system for automatic diagnostic of sleep spindles on EEG. As a result of analysis two types of sleep spindles, that have the same time dynamics, but different frequency structure, have been discovered. Complex dynamics of main frequency during the sleep spindle has been revealed. The method for automatic diagnostic of sleep spindles, based on computation of wavelet transform energy in two frequency ranges for two types of sleep spindles, has been proposed according to obtained data. The testing of method revealed high accuracy of automatic diagnostic for investigating events on EEG. The method can be used in routine EEG researches, related to detection and classification of different oscillatory patterns.

Keywords: Continuous wavelet transform, EEG, epilepsy, oscillatory pattern, sleep spindles, diagnostic.



Грубов Вадим Валерьевич – родился в пос. Емильчино Житомирской области (Украина). Студент факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского. Работает лаборантом в лаборатории № 5 ОФНС НИИ ЕН СГУ.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: vvgrubov@gmail.com



Овчинников Алексей Александрович – родился в Саратове (1985), окончил Саратовский государственный университет (2008), защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2011, СГУ). Работает в СГУ на кафедре электроники, колебаний и волн в должности ассистента. Область научных интересов: влияние шумов на явление синхронизации в живых системах; диагностика осцилляторных паттернов.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: a.o.ovtchinnikov@gmail.com



Ситникова Евгения Юрьевна – родилась в Волгограде (1974). Окончила ветеринарно-биологический факультет Московской академии ветеринарной медицины и биотехнологии им. К.И.Скрябина (1996), кандидат биологических наук (специальность 03.00.13 - физиология), PhD (Social science, Radboud University Nijmegen, Нидерланды, 2008). Старший научный сотрудник Учреждения Российской Академии Наук Института высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН. Научные интересы - междисциплинарные исследования функций мозга. Автор около 40 научных работ, опубликованных в отечественных и международных журналах.

117485 Москва, ул. Бутлерова, 5А
Институт высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН
E-mail: eu.sitnicova@gmail.com



ДИНАМИКА ЛОКАЛЬНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ МОЗГА ПРИ АБСАНС-ЭПИЛЕПСИИ: ЭМПИРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Е.В. Филина

Описывается методика исследования электроэнцефалограмм (ЭЭГ) на основе построения авторегрессионных моделей и оценки причинности по Грейнджеру по экспериментальным данным. ЭЭГ были записаны с головного мозга крыс линии WAG/Rij, страдающих абсанс-эпилепсией. При анализе ЭЭГ были выявлены эпизоды, которые достаточно хорошо описываются линейным отображением небольшого порядка, а также эпизоды с выраженной нелинейностью. Проведена систематизация эпизодов ЭЭГ в соответствии с полученными параметрами моделей и физиологическими состояниями животных. Обнаружено, что перед приступом эпилепсии динамика становится проще для прогноза по сравнению с состоянием пассивного бодрствования, что может служить предвестником приступа. Установлено усиление влияния глубоких структур мозга на кору и уменьшение влияния коры и вентропостеромедиального ядра таламуса на ретикулярное ядро перед приступом.

Ключевые слова: Авторегрессионная модель, причинность по Грейнджеру, абсанс-эпилепсия, электроэнцефалограмма, крысы линии WAG/Rij.

Введение

Применение методов математического моделирования, в том числе и методов нелинейной динамики, для анализа биомедицинских данных – актуальное междисциплинарное направление исследований. Так, множество работ посвящено исследованию электроэнцефалограмм (ЭЭГ), с целью выявления информации о физиологическом состоянии головного мозга [1–3].

В качестве объекта исследования были выбраны ЭЭГ крыс линии WAG/Rij. У крыс данной линии появляются спонтанные приступы, сходные по биологическим и электрофизиологическим проявлениям с человеческими при абсанс-эпилепсии (неконвульсивная форма эпилепсии) [4–6]. Концентрация интереса ученых вокруг этого заболевания обусловлена отсутствием точных методик предсказания начала приступа, спорами о механизмах его формирования, а также широким распространением среди детей.

Приступ отражается во временной реализации локального электрического потенциала головного мозга, то есть на записи внутричерепной ЭЭГ, в виде комплексов «пик-волна». В ряде работ были выделены структуры мозга, где пик-волновая активность имеет максимальную амплитуду [7,8]. Одна из гипотез об иницировании и распространении приступа, предложенная в [9], предполагает участие всей таламокортикальной сети. Изучение ЭЭГ данных структур мозга представляет интерес для выявления патофизиологических изменений при абсанс-эпилепсии.

В данной работе представлена методика проведения количественного анализа динамики локальных потенциалов по записям ЭЭГ четырех структур мозга и систематизации эпизодов ЭЭГ на основе построения линейных и нелинейных авторегрессионных моделей (АР-моделей). Целью работы является поиск изменений, которые происходят перед приступом. Для этого ставится ряд задач по изучению и систематизации состояний крысы в зависимости от количественных характеристик моделей, построенных по записям ЭЭГ отдельных структур мозга. Также исследуется взаимодействие между различными структурами мозга, что дополняет результаты линейной оценки причинности по Грейнджеру, полученные в работе [10].

1. Используемые данные и предварительный анализ

Записи ЭЭГ головного мозга крыс линии WAG/Rij были сделаны Е.Ю. Ситниковой на факультете биологической психологии университета Наймегена (Голландия). Во время стереотаксической операции в мозг крысам, находящимся под изофлуорановой анестезией, были имплантированы четыре стальных электрода диаметром 0.25 мм с открытым концом. Электроды были вживлены в следующие участки головного мозга: затылочная и лобная области коры, ретикулярное и вентропостеромедиальное ядра таламуса (РЯТ и ВПМ ЯТ). Соответствующие номера электродов: 1, 2, 3, 4. Каждый сеанс записи ЭЭГ был продолжительностью от пяти до семи часов. Запись была произведена одновременно со всех электродов с помощью аналогоцифрового преобразователя с частотой дискретизации 1024 точки в секунду.

Пик-волновые комплексы (ПВК) на ЭЭГ выглядели как группы пиков высокой амплитуды, повторяющиеся с частотой 7–10 Гц. ПВК имели длительность более 1 с. Моменты их начала и окончания идентифицированы Е.Ю. Ситниковой [10] по записям из лобной коры с использованием автоматизированного алгоритма, основанного на определении порогового значения наклона ЭЭГ. Также были выделены участки пассивного бодрствования без артефактов, которые в данной работе названы фоновой активностью.

В данной работе исследовались записи ЭЭГ пяти крыс (номера, данные крысам в лаборатории Наймегена: 23, 24, 25, 28 и 29). Общая продолжительность записей составила 31 час. Проведено исследование 293 пик-волновых разряда и 71 эпизода пассивного бодрствования. С помощью описанных ниже методов анализировались участки ЭЭГ, соответствующие различным «состояниям» крысы, и результаты сравнивались между собой.

2. Методика исследования

Для описания динамики локального потенциала каждой области мозга строились индивидуальные АР-модели ЭЭГ (п. 2.1). Для парного исследования связей строились совместные АР-модели (п. 2.2). Для сравнения количественных харак-

теристик динамики в состояниях животного использовались статистические тесты на различие средних значений этих характеристик (п. 2.3). Исследование состояния животного в течение 20-секундного интервала перед приступом осуществлялось с помощью методики «скользящего окна» (п. 2.4).

Используемые методики учитывают разброс значений размерности моделей, что дополняет результаты работы [10], где анализ проводился при некоторой типичной фиксированной размерности линейных моделей, и внимание исследования было обращено только на изменение улучшений прогноза (оценки связей) в различных состояниях.

2.1. Построение индивидуальных моделей. Пусть имеется временной ряд $\{x_k(t)\}$, где $t = 1, 2, \dots, N$; N – длина ряда; k – номер временного ряда (номер электрода, с которого производилась запись). Линейная индивидуальная АР-модель строится в виде

$$x_k(t) = A_{k,0} + \sum_{i=1}^{d_k} A_{k,i}x_k(t-i) + \xi_k(t), \quad (1)$$

где d_k – порядок (размерность) соответствующей модели, ξ – нормальный белый шум. Введем обозначения: \mathbf{A}_k – вектор коэффициентов $A_{k,i}$, $\sum_k^2 = \sum_{t=d_k+1}^N (x_k(t) - A_{k,0} - \sum_{i=1}^{d_k} A_{k,i}x_k(t-i))^2$ – сумма квадратов остаточных ошибок модели. Компоненты вектора \mathbf{A}_k находятся методом наименьших квадратов: $\hat{\mathbf{A}}_k = \arg \min_{\mathbf{A}_k} \sum_k^2$. Обозначим $s_k^2 = \min_{\mathbf{A}_k} \sum_k^2$, тогда несмещенная оценка дисперсии шума ξ_k есть $\hat{\sigma}_k^2 = s_k^2 / [N - i_0 - (d_k + 1)]$, где $d_k + 1$ – число оцениваемых коэффициентов.

Для учета возможной нелинейности модель строится в виде

$$x_k(t) = f_k(x_k(t-1), x_k(t-2), \dots, x_k(t-d_k), \mathbf{A}_k) + \xi_k(t) \quad (2)$$

с нелинейной функцией f_k . В данной работе используется алгебраический многочлен некоторого порядка L_k .

Для подбора d_k и L_k используются следующие соображения. При фиксированном L_k величину d_k следует выбирать достаточно большой, чтобы остаточные ошибки модели были дельта-коррелированы. Для автоматизации процедуры удобно использовать информационный критерий Шварца [11]: d_k выбирается так, чтобы минимизировать величину $S_k = \frac{N}{2} \ln \hat{\sigma}_k^2 + \frac{\ln N}{2} P_k$, где P_k – число оцениваемых коэффициентов модели. Для проверки адекватности полученной АР-модели исследуются дельта-коррелированные остаточные ошибки. Кроме того, временные реализации модели должны быть близки к наблюдаемому ряду $x_k(t)$ в статистическом смысле: графики схожи визуально, диапазон вероятных значений модельных переменных содержит весь наблюдаемый ряд, и т.п. Если это выполняется, то индивидуальная модель удовлетворительна, иначе следует увеличивать d_k , а если это не приводит к улучшению, то и L_k . Пробные значения d_k и L_k должны меняться в таком диапазоне, чтобы число коэффициентов АР-модели было значительно меньше N . По грубой оценке оно не должно превышать \sqrt{N} .

2.2. Оценка связей по Грейнджеру. Введем в рассмотрение, кроме ряда $\{x_k(t)\}$, одновременный ряд $\{x_j(t)\}$, $t = 1, 2, \dots, N$, полученный при анализе ЭЭГ, снятой с другого электрода. Требуется выяснить, влияет ли процесс x_j на x_k (воздействие $j \rightarrow k$), и получить количественные характеристики воздействия. Для этого воспользуемся понятием «причинности по Грейнджеру», оценки которой основаны на построении эмпирических моделей и расчете ошибок прогноза одного процесса с учетом и без учета другого.

При линейной оценке причинности по Грейнджеру [12] для процессов $x_k(t)$ сначала строится индивидуальная АР-модель (1). Затем при оптимальном d_k строится совместная АР-модель

$$x_k(t) = a_{k,0} + \sum_{i=1}^{d_k} a_{k,i}x_k(t-i) + \sum_{i=1}^{d_{j \rightarrow k}} b_{k,i}x_j(t-i) + \eta_k(t), \quad (3)$$

где $d_{j \rightarrow k}$ – «размерность добавки» в уравнение для x_k данных от x_j , которая может рассматриваться как характеристика инерционности воздействия; η_k – нормальный белый шум. Аналогичным образом введем сумму квадратов ошибок прогноза процесса x_k при учете x_j

$$\sum_{k|j}^2 = \sum_{t=i_0+1}^N \left(x_k(t) - a_{k,0} + \sum_{i=1}^{d_k} a_{k,i}x_k(t-i) + \sum_{i=1}^{d_{j \rightarrow k}} b_{k,i}x_j(t-i) \right)^2,$$

где $i_0 = \max\{d_k, d_{j \rightarrow k}\}$. Минимальное значение $\sum_{k|j}^2$ обозначим $s_{k|j}^2$, а несмещенную оценку дисперсии остаточных ошибок обозначим $\hat{\sigma}_{k|j}^2$. «Улучшение прогноза» x_k при учете x_j характеризует воздействие $j \rightarrow k$: $PI_{j \rightarrow k} = \hat{\sigma}_k^2 - \hat{\sigma}_{k|j}^2$. Далее везде приводится нормированная величина улучшения прогноза $PI_{j \rightarrow k} / \hat{\sigma}_k^2$.

Чтобы оценить статистическую значимость отличия полученной величины $PI_{j \rightarrow k}$ от нуля, используется F -тест [13]. Обозначим P_k и $P_{k|j}$ – число коэффициентов в индивидуальной и совместной моделях процесса x_k , соответственно. Для статистически независимых процессов x_k и x_j величина

$$F_{j \rightarrow k} = \frac{(N - i_0 - P_{k|j}) (s_k^2 - s_{k|j}^2)}{(P_{k|j} - P_k) s_{k|j}^2} \quad (4)$$

распределена по F -закону Фишера [13] с числом степеней свободы $(P_{k|j} - P_k, N - i_0 - P_{k|j})$. Вывод о наличии влияния $j \rightarrow k$ делается на уровне значимости p , то есть с вероятностью случайной ошибки не более p , если $F_{j \rightarrow k}$ превосходит $(1 - p)$ -квантиль F -распределения.

При учете нелинейности процедура остается той же, но модели строились с нелинейными функциями в правой части. В данной работе использовались алгебраические многочлены (2). Для подбора $d_{j \rightarrow k}$ при оптимальном значении d_k , также использовался критерий Шварца, то есть минимизировалась величина $S_{j \rightarrow k} = \frac{N}{2} \ln \hat{\sigma}_{k|j}^2 + \frac{\ln N}{2} P_{k|j}$. Затем проверялась адекватность построенной совместной АР-модели, как указано выше (см. п. 2.1), и в случае необходимости менялось пробное значение $d_{j \rightarrow k}$. Выбор L_k проводился по критерию Шварца или по наиболее значимой величине $PI_{j \rightarrow k}$.

2.3. Статистическое сравнение результатов оценивания для разных состояний. С помощью описанных методов анализировались участки ЭЭГ, соответствующие следующим «состояниям» (рис. 1): участки, непосредственно предшествующие и следующие за эпилептическим приступом, длительностью 1 секунда; участки внутри приступа – первые 3 секунды каждого приступа; участки фоновой активности длительностью 3 секунды.

Для каждого i -го участка ЭЭГ с каждой области мозга строилась индивидуальная АР-модель. Оптимальное, по критерию Шварца, значение ее размерности $\hat{d}_k^{(i)}$ рассматривалось как характеристика «сложности» динамики. Дисперсия ошибки ее прогноза $\hat{\sigma}_{k,i}^2$ характеризовала предсказуемость процесса. По полученным значениям $\hat{d}_k^{(i)}$ для одного состояния (фон, приступ, до и после приступа) строилась гистограмма и рассчитывалось среднее значение: $\langle d_k \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \hat{d}_k^{(i)}$, где M – количество участков ЭЭГ, соответствующих данному состоянию (это делалось отдельно для каждой крысы и каждой структуры мозга). Аналогично рассчитывалось среднее значение дисперсии ошибки прогноза: $\langle \hat{\sigma}_k^2 \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \hat{\sigma}_{k,i}^2$.

Чтобы ответить на вопрос, отличаются ли распределения величины \hat{d}_k , например, в фоне и перед приступом, можно использовать различные тесты. Наиболее простой из них основан на сравнении средних значений этих распределений. Для его реализации необходимо учесть следующие свойства полученных оценок. Поскольку различные участки ЭЭГ удалены друг от друга, следует ожидать, что значения оценок для различных участков статистически независимы друг от друга. Значит, согласно центральной предельной теореме, величина $\langle d_k \rangle$ распределена по нормальному закону. Стандартная ошибка оценки среднего значения $\langle d_k \rangle$ (то есть средноквадратическое отклонение от среднего) равна при этом

$$\text{var}[\langle d_k \rangle] = \frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^M \left(d_k^{(i)} - \langle d_k \rangle \right)^2.$$

Обозначим средние значения размерности модели и дисперсии в фоне и перед приступом как $\langle d_k \rangle_{\text{фон}}$, $\langle d_k \rangle_{\text{пп}}$, $\text{var}[\langle d_k \rangle]_{\text{фон}}$, $\text{var}[\langle d_k \rangle]_{\text{пп}}$. Гипотеза о равенстве сред-

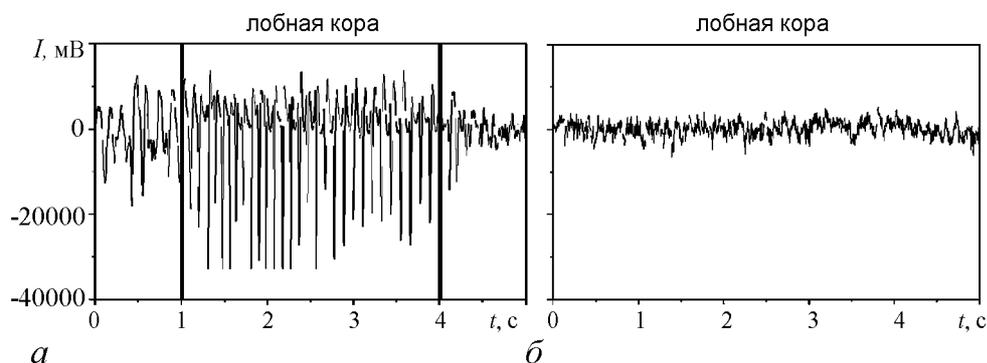


Рис. 1. Различные состояния: a – перед приступом, приступ (выделенный интервал), после приступа; b – фон

них значений $\langle d_k \rangle_{\text{фон}}$ и $\langle d_k \rangle_{\text{пп}}$ отвергается на уровне значимости $p < 0.05$, если отношение

$$g = \frac{\langle d_k \rangle_{\text{фон}} - \langle d_k \rangle_{\text{пп}}}{2\sqrt{\text{var}[\langle d_k \rangle]_{\text{фон}} + \text{var}[\langle d_k \rangle]_{\text{пп}}}}$$

по модулю превосходит единицу. То есть в этом случае фиксируется статистически значимое изменение оптимальной размерности модели перед приступом по сравнению с фоновой активностью. Аналогично проверяются изменения дисперсии ошибок прогноза и сил направленных связей.

Величина g , позволяющая оценить статистическую значимость вывода об изменении характеристик АР-моделей при смене физиологических состояний крысы, рассчитывалась для всех четырех рассматриваемых областей мозга у всех пяти крыс.

2.4. Анализ длительных интервалов перед приступом с помощью «скользящего окна». В поисках предвестников приступа были проанализированы 20-секундные интервалы перед началом каждого приступа. Анализ проводился по схеме «скользящего окна». За 0.5 секунды до начала приступа строится индивидуальная модель, для которой подбираются оптимальные $\sigma_k^{2(1)}$ и $d_k^{(1)}$. Затем по временной шкале сдвигаются на одну точку влево и снова строится модель с оптимальными $\sigma_k^{2(2)}$ и $d_k^{(2)}$. Таким образом, пошагово был получен набор параметров σ_k^2 и d_k для всего 20-секундного интервала, что позволяет чувствительно проследить изменения характеристик до начала приступа. Интервал длиной 0.5 с, который передвигался от начала припадка влево до 20-секундной отметки, называется «скользящим окном».

По всем приступам строились графики средних значений размерности модели в зависимости от времени (то есть от положения скользящего окна на временной оси) вместе с 95-процентными доверительными интервалами вида $\langle d_k \rangle \pm 2\sqrt{\text{var}[\langle d_k \rangle]}$. Аналогично строились графики для дисперсии ошибок прогноза индивидуальной модели.

3. Результаты анализа

3.1. Индивидуальные модели. При построении линейных моделей для разных областей мозга и при различных состояниях крысы зависимости дисперсии ошибки $\hat{\sigma}_k^2$ и критерия Шварца S_k от d_k имеют схожий вид. Насыщение ошибки прогноза и минимум критерия Шварца происходят при одном d_k и соответствуют оптимальной размерности. Оптимальная размерность всегда находится в пределах от 1 до 10. Дальнейшее увеличение размерности не дает существенных улучшений. Наиболее частые значения размерности близки к значению $d_k = 5$, использованному в работе [10] для анализа динамики во время приступа.

Проверка адекватности построенных оптимальных моделей проводилась выборочно для нескольких интервалов, соответствующих различным состояниям крысы. Дельта-коррелированность и нормальность остаточных ошибок прогноза оценивались путем расчета автокорреляционной функции и гистограммы. Для состояний фоновой активности, динамики перед приступом и после него значения автокорреляционной функции во всех случаях не превышают 0.1 (пример на рис. 2, а) и не значительно отличаются от нуля, гистограммы близки к нормальному распределению

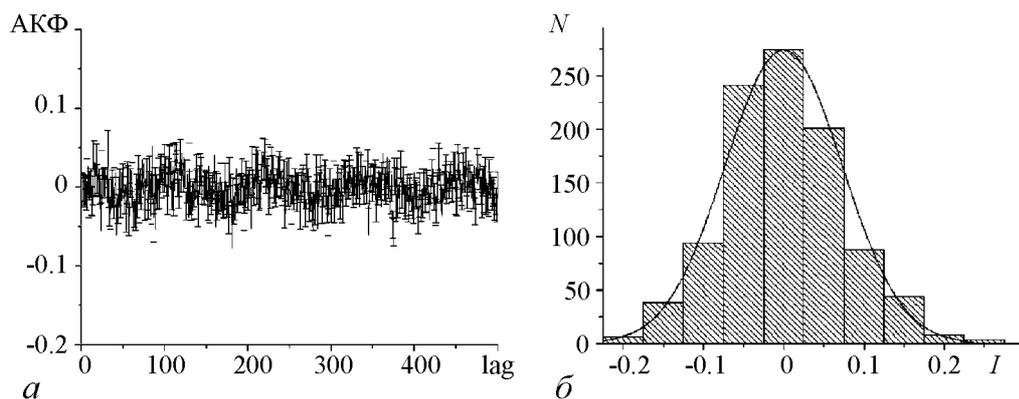


Рис. 2. Анализ остаточных ошибок модели: *a* – автокорреляционная функция; *b* – гистограмма. Пример для интервала перед приступом (лобная кора)

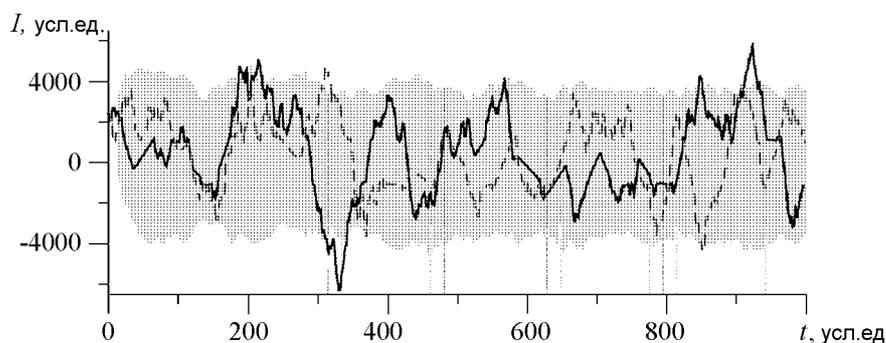


Рис. 3. ЭЭГ записанная в области лобной коры на временном интервале в 1 с перед приступом: наблюдаемый ряд (сплошная линия); одна из реализаций модели (штриховая линия); 95%-й доверительный интервал

(пример на рис. 2, *b*). Таким образом, свойства остаточных ошибок модели соответствуют ожидаемым.

Для тех же состояний крысы сравнивались реализации модели с наблюдаемым рядом, использованным для ее построения. На рис. 3 представлен пример наблюдаемого ряда и одна из реализаций модели, схожая с наблюдаемым рядом. Серый фон – 95%-й интервал модельных значений ($\pm 2\delta$, где δ – стандартное отклонение). Число «выходов» наблюдаемых значений из этого интервала не превышает 5%, как и требуется для адекватности модели. Аналогичные результаты имеют место для других областей мозга до и после приступа, во время фоновой активности. Таким образом, адекватность построенных линейных АР-моделей для этих состояний крысы подтверждена. Учет нелинейности АР-моделей не дает улучшения при рассмотрении состояний вне приступа.

Что касается динамики во время приступа, то линейные модели оказываются неадекватны, как указывалось и в работе [10]. Существенно меньшие величины критерия Шварца и ошибки прогноза достигаются для нелинейных АР-моделей с алгебраическими многочленами порядка 2 или 3. Более высокий порядок многочлена использовать не удастся из-за небольшой длины ряда каждого рассматриваемого участка ЭЭГ. Возможно, еще лучших результатов моделирования удалось бы достичь при использовании других нелинейных функций в АР-модели (радиальных базис-

ных функций, нейронных сетей и т.д.), но это требует специального исследования. В данной работе анализ динамики во время приступа ограничивается использованием алгебраических многочленов невысокого порядка: $1 \leq L_k \leq 3$. Оптимальные значения порядка многочлена и размерности модели определялись также по критерию Шварца. Оказалось, что оптимальное значение порядка многочлена разное для разных каналов. Так, для лобной и затылочной коры оно равно 3, для РЯТ – 2 и ВПМ ЯТ – 2 или 3 (у разных крыс).

Усредненные по всем рассматриваемым интервалам ЭЭГ оптимальные значения размерностей $\langle d_k \rangle$ вместе с 95-процентным доверительным интервалом представлены на рис. 4. Размерность уменьшается перед приступом по сравнению с фоном (кроме затылочной коры и некоторых других отдельных случаев). А именно, для лобной коры и ядер таламуса значение размерности для фоновой активности на единицу и более превышает значение для области перед приступом, а доверительные интервалы почти не пересекаются (рис. 4, б, в, г). Особенно четко изменения заметны в лобной коре и РЯТ (см. рис. 4, б, в). В ВПМ ЯТ изменения размерности менее сильные (см. рис. 4, г). Для затылочной коры не наблюдается закономерностей отличия фоновой динамики от динамики области перед приступом (рис. 4, а). Размерность моделей для состояния перед приступом во всех случаях не отличается значимо от размерности для состояния после приступа, возможно это свидетельствует об идентичности процессов, инициирующих приступ и останавливающих его, хотя данное предположение требует дополнительного анализа.

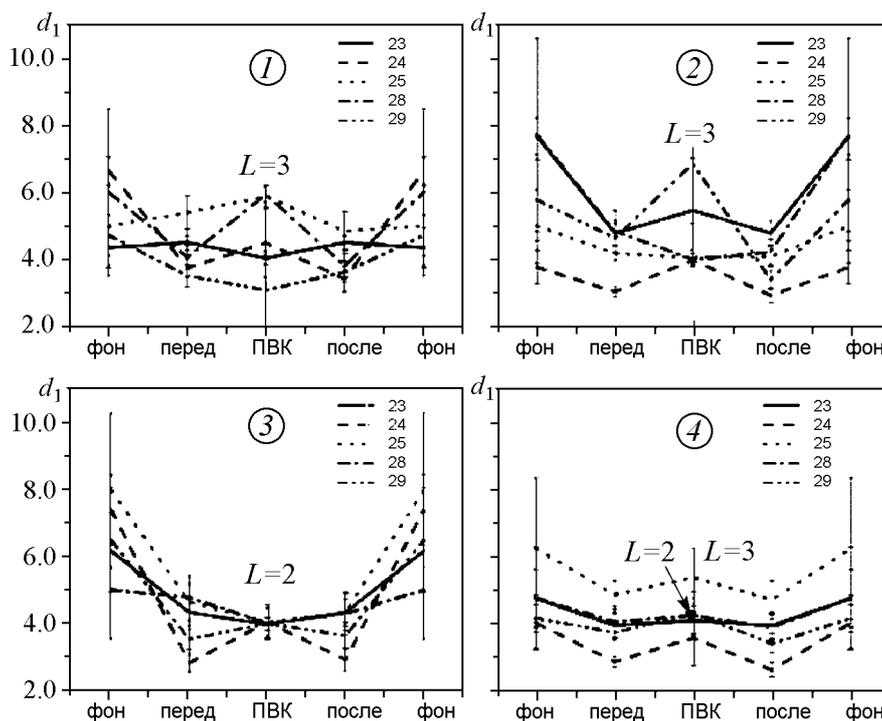


Рис. 4. Размерность модели вместе с 95%-ми доверительными интервалами при различных физиологических состояниях крыс – фоновая динамика, до приступа (до ПВК) и после приступа для 5 крыс и четырех каналов данных: 1 – затылочная кора; 2 – лобная кора, 3 – РЯТ; 4 – ВПМ ЯТ. Здесь 23...29 – номера наблюдаемых крыс

Эти выводы количественно подтверждаются оценкой значимости отличий размерности до приступа и во время фоновой активности (расчет коэффициента g , см. п. 2.3). Результаты представлены в табл. 1.

По большей части величина g принимает отрицательные значения, по модулю большие единицы, что означает статистически значимое (на уровне $p < 0.05$) уменьшение размерности перед приступом по сравнению с фоном. Для крысы № 28 получены незначимые выводы, возможно, из-за малого числа доступных интервалов фоновой активности.

Аналогичный анализ был проведен на основе дисперсии ошибки прогноза для оптимальных моделей. На рис. 5 представлены ее средние значения с 95-процентными доверительными интервалами. По сравнению с оптимальной размерностью модели ошибка прогноза характеризует изменения динамики перед приступом более стабильно для всех областей мозга. Особенно велики такие отличия для РЯТ (рис. 5, в). Кроме того, наблюдаются слабые отличия динамики перед приступом и после него. Проверка статистической значимости вывода об отличии ошибки прогноза для фоновой активности и состояния перед приступом отражена в табл. 2. Величина g в основном принимает отрицательные значения, по модулю больше единицы, то есть ошибка прогноза перед приступом уменьшается по сравнению с фоном статистически значимо. Отличия (незначимые выводы) наблюдаются только для крысы № 28, как и выше, при сравнении оптимальных размерностей.

Таблица 1

Величина g при сравнении средних значений оптимальной размерности

№ крысы-канал	Затылочная кора	Лобная кора	РЯТ	ВПМ ЯТ
23	-4.141	-3.479	-4.869	-5.459
24	-1.572	-3.153	-2.18	-2.664
25	-3.354	-2.694	-2.832	-3.235
28	0.2646	-0.9777	-0.6448	-0.9659
29	-2.174	-4.262	-2.995	-3.028

Таблица 2

Величина g для 5 крыс и 4 каналов при сравнении $\hat{\sigma}_k^2/\text{var}[x_k]$

№ крысы-канал	Затылочная кора	Лобная кора	РЯТ	ВПМ ЯТ
23	-4.133	-4.123	-4.813	-4.868
24	-1.56	-1.551	-2.046	-2.118
25	-3.387	-3.385	-2.832	-2.813
28	0.2682	0.2723	-0.6498	-0.6237
29	-4.906	-3.361	-2.994	-3.011

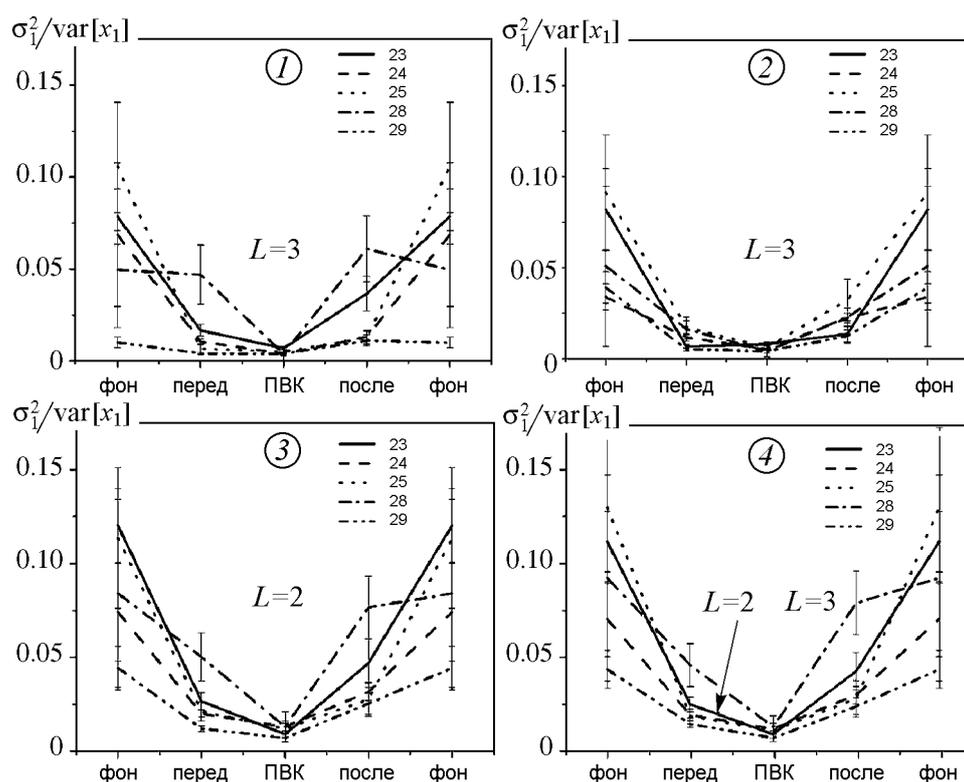


Рис. 5. Средние значения ошибки прогноза вместе с 95-процентными доверительными интервалами при различных физиологических состояниях крыс – фоновая динамика, до ПВК и после ПВК для 5 крыс и четырех каналов данных: 1 – затылочная кора; 2 – лобная кора, 3 – РЯТ; 4 – ВПМ ЯТ;

3.2. Динамика параметров индивидуальных моделей длительных интервалов перед приступом. Для развернутого анализа состояния перед приступом исследовались 20-секундные интервалы в скользящем окне шириной 0.5 секунды согласно методике, описанной в п. 2.2. Выбор величины интервала определяется частотой следования приступов, и 20-секундная длина оказалась достаточной для получения статистически надежных результатов.

На рис. 6 представлены результаты анализа в скользящем окне в зависимости от времени. Ошибка прогноза резко уменьшается за 2 секунды до начала приступа, то есть динамика становится более предсказуемой. Наиболее заметным уменьшение ошибки прогноза оказалось для лобной коры и ВПМ ЯТ. Размерность модели значительно не меняется.

Полученные результаты показывают возможность применения моделирования для получения такой характеристики процесса, как ошибка прогноза модели с целью предсказания ПВК. Однако в данном исследовании четко обнаружено изменение только среднего значения ошибки прогноза, тогда как существуют значительные вариации ошибки прогноза на отдельных интервалах. Для более надежного вывода о «предсказательном потенциале» этой методики требуется дополнительный анализ на большем количестве ЭЭГ.

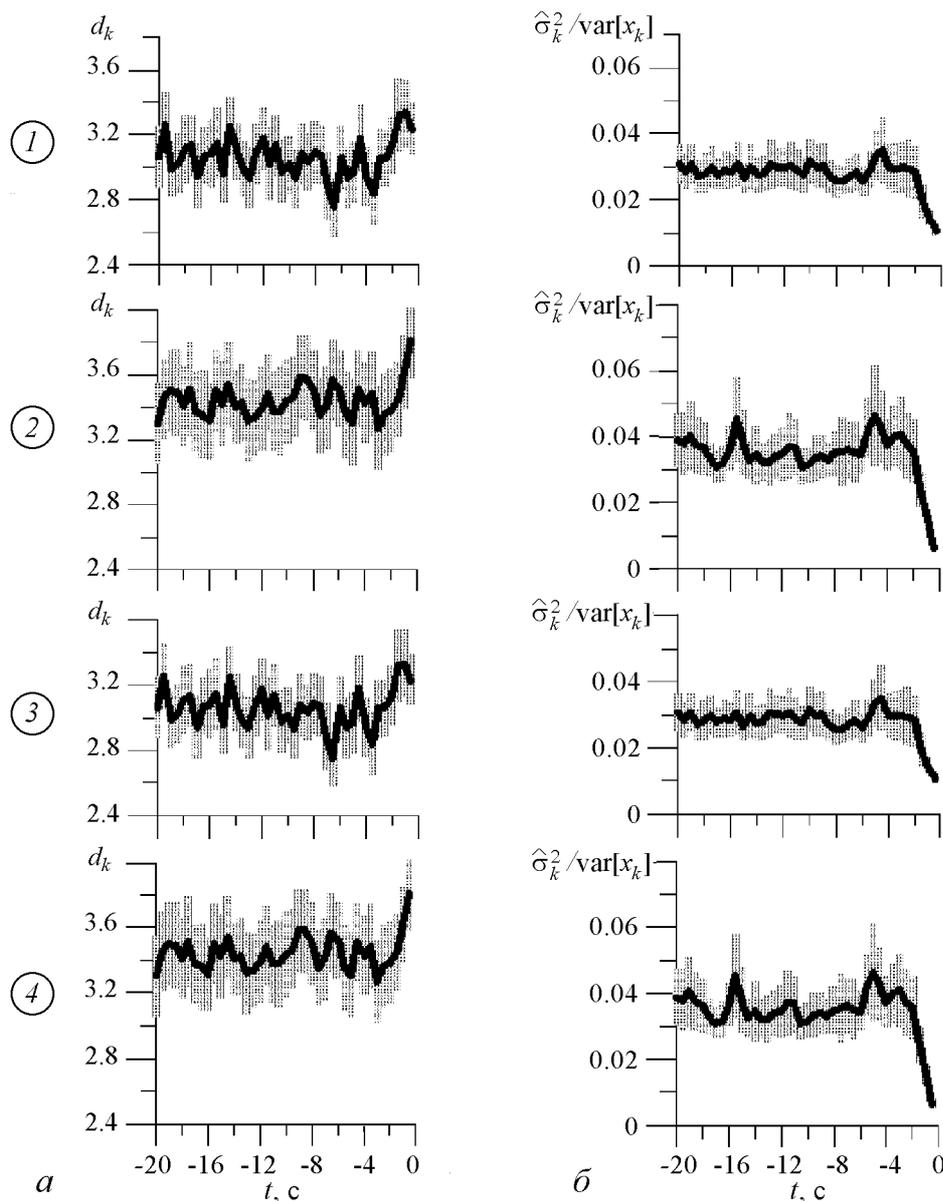


Рис. 6. Размерности (а) и ошибки прогноза (б), усредненные по данным от всех крыс для различных структур мозга: 1 – затылочная кора; 2 – лобная кора; 3 – РЯТ; 4 – ВПМ ЯТ, вместе с 95-процентными доверительными интервалами

3.3. Оценка связей по Грейнджеру. Согласно методике, описанной в п. 2.2, рассчитываем размерности добавки $d_{j \rightarrow k}$ и улучшение прогноза $PI_{j \rightarrow k}$. Затем, согласно п. 2.3, полученные характеристики усредняем по всем интервалам для каждой крысы и вычисляем процент значимых выводов на уровне $p < 0.05$. Размерность добавки наблюдается от 1 до 5. Так, например, для крысы № 23 усредненные значения $d_{j \rightarrow k}$ по всем интервалам фона для каждой пары каналов не значительно отличаются от $d_{j \rightarrow k}$ перед и после приступа, кроме одной пары. Число добавленных значений от ряда лобной коры в модель для ретикулярного ядра таламуса $d_{2 \rightarrow 3}$ в фоне значительно больше, чем до и после приступа (доверительные

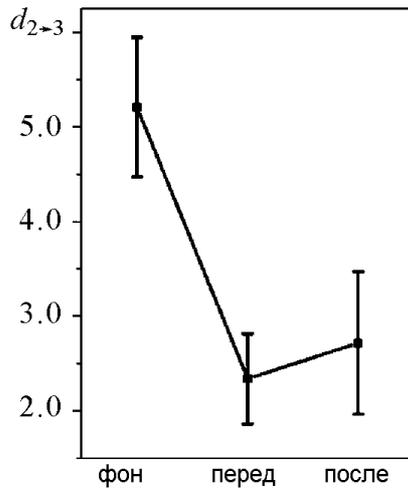


Рис. 7. Различия размерности добавки – количество добавленных точек от ряда лобной коры «2» в модель РЯТ «3»

интервалы не пересекаются). На рис. 7 временные различия размерности добавки изображены аналогично иллюстрации результатов построения индивидуальных моделей в п. 3.1.

Нормированная величина $PI_{j \rightarrow k}$ принимает значения от 0 до 0.12, кроме того, существуют сильные флуктуации для разных крыс и интервалов. Значимые отличия улучшения прогноза фона от результатов до и после приступа имеют место при добавлении данных от ретикулярного ядра в индивидуальные модели других каналов. Такая же ситуация наблюдается при влиянии ядер таламуса друг на друга и ВПМ ЯТ на лобную кору. При этом отличия состояния перед приступом от фона более четкие, чем отличия от фона состояния после приступа.

Улучшение прогноза, усредненное по всем крысам, нормированное на дисперсию индивидуальной модели, меняются в пределах от 0 до 0.05. Если графики улучшения прогноза, нормированного на ошибку индивидуальной модели, разделить на три группы, наблюдаются отличия между корковыми и глубокими структурами головного мозга (рис. 8). Первая группа – влияние корковых структур мозга на глубокие структуры (ядра таламуса) (рис. 8, а): в фоновых интервалах нет значимых отличий от интервалов до приступа, а после приступа имеется тенденция к уве-

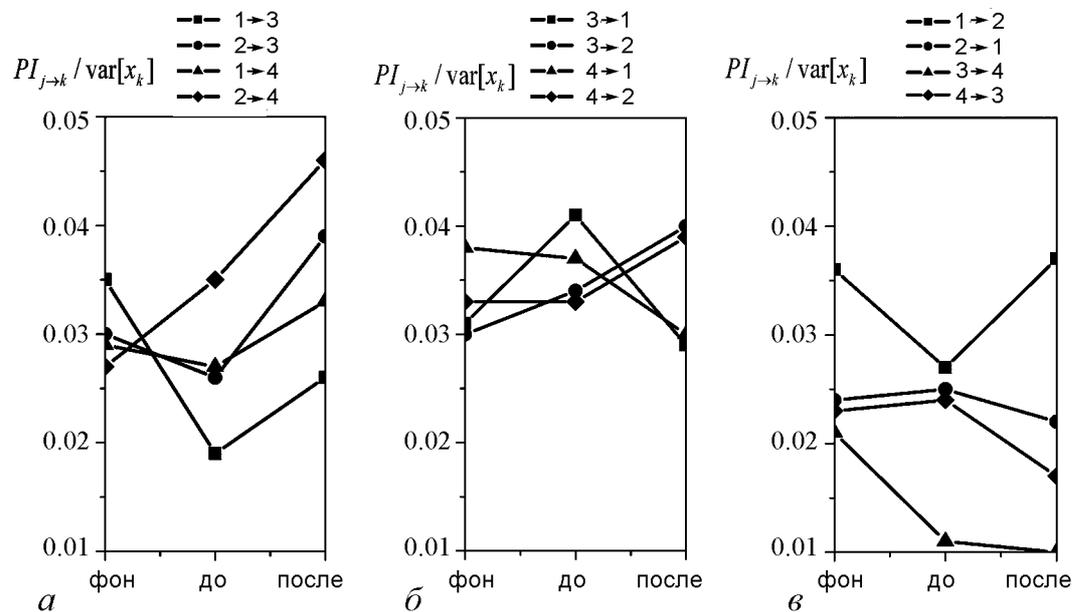


Рис. 8. Улучшение прогноза, нормированное на ошибку индивидуальной модели, в фоновых интервалах, до и после приступа, усредненное для всех крыс: а – влияние коры на таламус, б – влияние таламуса на кору, в – взаимное влияние соседних структур мозга

личению. Исключением является уменьшение улучшения прогноза до приступа по сравнению в фоновыми интервалами при добавлении данных от затылочной коры в индивидуальную модель РЯТ. Вторая группа – влияние глубоких структур мозга на кору (рис. 8, б): средние величины изменяются в интервале от 0.03 до 0.04 и не дают значимых различий между фоновыми интервалами и перед и после приступа. В третьей группе связей между соседними структурами прослеживается асимметрия влияния (рис. 8, в). При добавлении данных лобной коры в модель затылочной коры нет четких изменений между фоновыми интервалами (перед и после приступа), в обратную же сторону влияние затылочной коры уменьшается непосредственно перед приступом. Значимо снижается улучшение прогноза при добавлении данных от РЯТ в модель ВПМ ЯТ до и после приступа, в обратную сторону таких изменений не обнаружено. При формировании приступа (интервалы перед приступом) практически отсутствует влияние РЯТ на ВПМ ЯТ (см. рис. 8, в, треугольники).

Заключение

В работе проведен количественный анализ экспериментальных данных ЭЭГ, полученных из коры и ядер таламуса до и после ПВК у крыс линии WAG/Rij при абсанс-эпилепсии. Построены эмпирические модели по данным ЭЭГ, подобраны оптимальные значения размерности для каждого вида интервалов. Проведено статистическое сравнение свойств моделей.

Анализ ЭЭГ из различных структур мозга для набора интервалов фоновой активности и активности перед приступом позволил выявить в среднем уменьшение размерности модели перед разрядом по сравнению с фоновой активностью. У всех пяти животных динамика локальных потенциалов упрощается перед приступом, что надежно фиксируется для лобной коры. Динамика после приступа имеет практически те же характеристики, что и перед приступом.

Нормированная ошибка прогноза уменьшается перед приступом, то есть динамика процесса становится более предсказуемой. При более детальном анализе в скользящем окне длиной 0.5 с показано, что в среднем ошибка прогноза начинает падать за 2 с до приступа для всех рассмотренных областей мозга. Более заметно это падение ошибки прогноза для лобной коры и ВПМ ЯТ. Эти выводы статистически значимы на уровне $p < 0.05$, то есть с доверительной вероятностью не менее 0.95.

При попарной оценке причинности по Грейнджеру установлено снижение влияния РЯТ на ВПМ ЯТ перед приступом, а также усиление влияния глубинных структур мозга на кору.

Полученные выводы расширяют имеющиеся сведения об изменениях характеристик динамики локальных потенциалов мозга и связей между различными областями мозга перед приступом при абсанс-эпилепсии.

Автор выражает благодарность Е.Ю. Ситниковой за предоставленные экспериментальные данные, Б.П. Безручко и Д.А. Смирнову за полезные обсуждения и советы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-02-00599), программ РАН и федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (грант № 2011-1.2.1-201-007/062).

Библиографический список

1. *Зенков Л.П.* Клиническая электроэнцефалография (с элементами эпилептологии). Таганрог: Изд-во ТРТУ, 1996.
2. *Knyazeva M.G. et al.* Psychogenic seizures and frontal disconnection: EEG synchronisation study // *J. Neurol. Neurosurg. Psychiatry*, May 2011. Vol. 82. P. 505.
3. *Fellinger R., Klimesch W. et al.* Cognitive processes in disorders of consciousness as revealed by EEG time-frequency analyses. *Clinical Neurophysiology*. 2011. P. 8.
4. *Coenen A.M.L., Van Luijtelaar E.L.J.M.* The WAG/Rij rat model for absence epilepsy: age and sex factors // *Epilepsy Res.* 1987. Vol. 1. P. 297.
5. *Van Luijtelaar E.L.J.M., Coenen A.M.L.* The WAG/Rij model for generalized absence epilepsy // *Adv. in Epileptol.* 1989. Vol. 17. P. 16.
6. *De Bruin N.M.W.J., Van Luijtelaar E.L.J.M., Jansen S.J., Cools A.R., Ellenbroek B.A.* Dopamine characteristics in different rat genotypes: the relation to absence epilepsy // *Neuroscience Res.* 2000. Vol. 38. P. 165.
7. *Sitnikova E., van Luijtelaar G.* Cortical and thalamic coherence during spike-wave seizures in WAG/Rij rats // *Epilepsy Res.* 2006. Vol. 71(2-3). P. 159.
8. *Sitnikova E., van Luijtelaar G.* Cortical control of generalized absence seizures: effect of lidocaine applied to the somatosensory cortex in WAG/Rij rats // *Brain Res.* 2004. Vol. 1012(1-2). P. 127.
9. *Gloor P.* Generalized cortico-reticular epilepsies. Some considerations on the pathophysiology of generalized bilaterally synchronous spike and wave discharge // *Epilepsia* 9. 1968. P. 249.
10. *Sitnikova E., Dikanov T., Smirnov D., Bezruchko B.P., van Luijtelaar G.* Granger causality: Cortico-thalamic interdependencies during absence seizures in WAG/Rij rats // *J. Neurosci. Methods.* 2008. Vol. 170(2). P. 245.
11. *Schwartz G.* Estimating the order of a model // *Ann. Stat.* 1978. Vol.6. P. 461.
12. *Granger C.W.J.* Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods // *Econometrica.* 1969. Vol. 37. P. 424.
13. *Seber G.A.F.* Linear regression analysis. John Wiley and Sons, 1977.

Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию
После доработки

17.01.2011
24.05.2011

DYNAMICS OF LOCAL POTENTIALS OF BRAIN AT THE ABSENCE-EPILEPSY: EMPIRICAL MODELLING

E.V. Filina

The EEG research technique on the basis of autoregressive models construction and Granger causality estimation by experimental data are described in this article. The EEG is written down from the brain of WAG/Rij rats, which are absence-epilepsy contaminated. The EEG episodes well enough described in terms of small order linear display along with the episodes with expressed nonlinearity are revealed during the analysis. The EEG

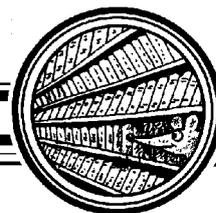
episodes ordering is spent in accordance with the model parameters received and physiological condition of the animals. It is revealed that dynamics becomes easier to predict in comparison to the condition of passive wakefulness before the epilepsy attack. Deep brain structures influence enhancement on the cortex and brain structures influence decrease on the reticular kernel before the attack is established.

Keywords: Autoregressive model, Granger causality, absence-epilepsy, EEG, Wag/Rij rats.



Филина Екатерина Владимировна – родилась в 1986 году в Аткарске, окончила Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского по специальности биохимическая физика (2008). После окончания СГУ обучалась в аспирантуре ФНБМТ СГУ по специальности «Радиофизика». Участвовала в 11 международных и всероссийских конференциях. Область научных интересов – нелинейная динамика, анализ временных рядов, математическое моделирование, приложения методов нелинейного анализа временных рядов к задачам биофизики.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: ekaterinafilina@yandex.ru



К 75-летию со дня рождения Юлия Александровича Данилова



**ЖИЛ ПЕРЕЛЬМАН
В КУРЧАТНИКЕ...***

Сергей Смирнов

В недавнюю советскую пору бытовала шутка, что вырастить нового Салтыкова-Щедрина нам совсем нетрудно. Нужно «только взять Льва Толстого и поселить его в коммунальной квартире». Да вот где бы для начала Льва Толстого найти?

И, правда, Салтыкова вырастить легче: он ведь Царскосельский лицей кончал! А в советские годы первым вузом России считался МГУ; в нем первым факультетом был мехмат. Вот, его и закончил в начале 1960-х Юлий Александрович Данилов, перебежавший в МГУ из Академии химической защиты. На кафедре дифференциальных уравнений, у великого ректора И.Г. Петровского он вырос в настоящего математика. Но в аспирантуру не попал – а попал в Курчатник, сиречь, в Институт атомной энергии.

Был ли тогда шанс у Юлия Данилова стать главным математиком среди наших прославленных ядерщиков? Был, конечно. Но не было желания стать командиром среди ученых – вроде Курчатова или Келдыша. Юлий Данилов хотел стать

* © «З – С», сентябрь 2008. С. 58–59. Фотографии из архива журнала «Изв. вузов. ПНД»

равным среди равных: другом тех физиков и математиков, которых общая судьба свела под секретной крышей ИАЭ. Роль свою в этой команде Юлий нашел быстро. Он – передатчик математического образа мысли среди породистых физиков! Ну, какая польза физику от изучения группы симметрии дифференциального уравнения? Что такое Странный Аттрактор, где в природе он встречается? Верно ли, что второй закон термодинамики неизбежно вводит фрактальные множества в описание любых неустойчивых систем?

Ответы на такие вопросы хотели знать все сослуживцы Данилова: от академика Исаака Кикоина до честолобивых выпускников Физтеха и МИФИ. В итоге молодой питомец мехмата стал нештатным лидером группы математической разведки в славном Курчатнике. И вскоре понял, что обучать смысленных людей увлекательной математике ему еще интереснее, чем самому делать небольшие открытия в математической физике. Вдобавок шеф-академик Кикоин был главою научно-популярного журнала «Квант». Данилов стал постоянным автором «Кванта» – и в этом качестве ощутил себя преемником великого популяризатора Якова Перельмана.

После жуткой блокадной зимы 1942 года место математического просветителя в России опустело. Десятилетием позже его отчасти заняли математики – братья Ягломы; теперь вровень с ними встал Данилов. В чем он может дополнить и превзойти знаменитых близнецов?

Они распахнули дверь в неведомый прежде мир олимпиадных задач по математике. Их усилиями в России сложился новый научный материк с особой кружково-олимпиадной культурой. Но за морем лежат еще иные материки того же сорта! На них процветает новая ветвь математики: кибернетика, созданная в военные годы Тьюрингом, Винером и фон Нейманом. Надо перевести их труды для русского читателя! В первую очередь – те книги, которые отцы-основатели адресовали самой широкой публике.

Так над российским научным горизонтом блеснула звездочка нового переводчика. В 1960 году на прилавках появилась небольшая желтая брошюра «Может ли машина мыслить?» Ответ был прост: в одиночку – нет, а в диалоге с умным человеком – может!

В студенческие годы Юлий Данилов не блистал успехами в лингвистике: зачем это умение простому математику? Но экскурсоводу оно очень нужно – и вот Данилов осваивает один за другим те европейские языки, на которых говорят и пишут творцы новой увлекательной науки. Сперва американский немец Герман Вейль и американский венгр Евгений Вигнер. Потом «чистый» американец Мартин Гарднер и классический британец Льюис Кэрролл. За ними мудрый поляк Гуго Штейнгауз и вдохновенный мадьяр Альфред Реньи. Все они вспыхивали на нашем небосклоне, как новые или сверхновые звезды. Переводчик Юлий Данилов усиливал их природную яркость, как невидимая глазу гравитационная линза усиливает яркость дальних галактик и квазаров.

Все бы хорошо; но ведь делалось это в порядке личной инициативы, а не по приказу каких-либо партийных инстанций! Любая успешная инициатива наказуема: в СССР это правило не знало исключений. И вот переводчика Данилова литературные боссы приравнивали к его любимым авторам. Тех переводили, не выплачивая никакого гонорара; и Данилову платили гроши, как почти всем нашим переводчикам. Если ты работаешь с интересом, то и работай за интерес! Он и работал, как большинство наших просветителей – включая автора этих строк. Но мне было проще: я служил в несекретной организации, так что смог повидаться с Лемом в Кракове еще в 1972 году. Данилова же лишь в 1990 году выпустили за границу – в Брюссель, к Илье Пригожину, три книги которого он к тому моменту перевел на русский язык.

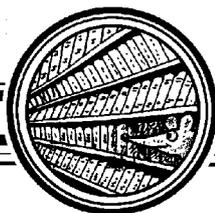


Ю.А. Данилов с участниками (школьниками и студентами-кураторами) научной школы-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых». 1995 год, Волжские Дали, Саратов

Неоднозначно относились тогда в России к этому нашему эмигрантскому чаду. Даже в кругу физиков одни называли его «отцом синергетики», а другие (следуя примеру Ландау) – «бесстыжим трепачом». Нобелевский комитет пожаловал свою премию «Брюссельскому Папе» только в 1977 году. Через 13 лет брюссельский патриарх ласково принял московского гостя из Курчатника: мировое содружество просветителей начало просачиваться сквозь проржавевший железный занавес. Я тогда начал преподавать историю в московской физматшколе. Юлий Данилов стал преподавать естествознание в простой школе, где училась его дочь. Потом начались выездные экспедиции в Саратовский лицей для одаренных ребят: к 60-летнему Данилову пришла третья педагогическая молодость. Но до 70 лет он не дожил: давняя гипертония подстерегла неумного трудоголика.

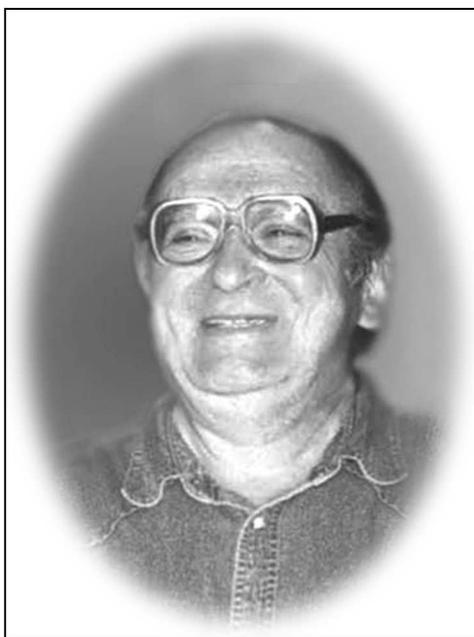
И вот сейчас вышел мемориальный сборник его статей: «Прекрасный мир науки». Тиражом всего в 800 экземпляров! Кстати: тиражи нынешних переизданий Якова Перельмана составляют все же тысячи экземпляров. Что сказать о спектре представленных статей? Здесь есть образцы любого рода. От рассмотрения Льюиса Кэрролла в роли нелинейной физической системы – до введения в колдовской мир фракталов через «Платье голого короля», столь удачно придуманное Андерсеном.

Есть воспоминания близких друзей Юлия – не самых знаменитых и в наши дни людей. Правда, нет воспоминаний самого Данилова. Но он искренне считал их написание ненужным делом. Ведь жизнь человеческая вполне выражена в тех задачах, которые человек сумел решить – и в тех хороших людях, которым он помог стать еще умнее и добрее. Так считал Яков Перельман; так же думал Юлий Данилов. Каждый из них оставил после себя немалую библиотеку из умных и нужных книг. Так какие еще нужны мемуары в память этих двух скромных богатырей? Нужен третий богатырь, готовый подхватить их старое знамя в новом, XXI веке. Где он, кто он? Читатели, откликнитесь!



К 75-летию со дня рождения Юлия Александровича Данилова

**«ПИШЕТ ВАМ УЧЕНИК
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ШКОЛЫ...»***



...Вдруг «Госпожа Удача» получила такое письмо:

«Пишет вам ученик физико-математической школы Петя Васечкин. Очень прошу набраться терпения и дочитать мое письмо до конца.

Совсем недавно учитель математики рассказал нам об удивительной геометрии, созданной Бенуа Мандельбротом и названной им фрактальной геометрией Природы. Эта геометрия описывает реальные предметы с их шероховатыми поверхностями, пористой структурой, извилистыми очертаниями в отличие от других геометрий, занимающихся изучением идеализированных гладких и сплошных фигур и тел.

Учитель показал нам удивительно красивые фракталы, которые обладали свойством самоподобия, т.е. как бы повторяли себя в различных масштабах, и сказал, что бременские математики организовали выставку фракталов, которая экспонировалась по всему миру и даже побывала в Москве. Жаль, не знал, сходил бы.

* © Информационно-энергетическое издание Ассоциации «Женщины в науке и образовании» «Г-жа Удача» № 3, 1999. С. 9

Оказалось, что фракталы не только очень красивы, но и обладают не совсем обычными свойствами, например, имея бесконечный периметр, могут ограничивать конечный участок плоскости.

Вечером того же дня я читал своей младшей сестренке сказку Андерсена «Новое платье короля», которую вы, может, знаете. И тут я вдруг подумал, что события, изложенные Андерсеном, могут быть истолкованы совершенно иначе. Представьте себе, что в город, где жил король-щеголь, прибыли два искуснейших мастера, умевших вышивать по тончайшей ткани прекрасные фрактальные узоры. Ткань была тончайшая, узоры едва видимыми, и у неискушенного наблюдателя вполне могло создаться впечатление, что нет ни ткани, ни узоров. А поскольку линии узоров имели бесконечную длину (ведь узоры были фрактальными), ясно, что никакого запаса шелка и золота в королевстве не могло хватить. Но не станешь же объяснять свою правоту всем профанам! Вот мастерам и пришлось – попросту дать тягу.

Народ во время процессии действительно видел сквозь тонкую ткань голого короля, потому что ничего не знал о фракталах. И со страху молчал. А мальчик, во всеуслышание заявивший, что король – голый, тоже не подозревал о фракталах. Но он крикнул, потому что был смелый. Мне кажется, что именно Андерсена мы должны считать первым человеком, осознавшим феномен фракталов, хоть это слово и придумал значительно позднее Бенуа Мандельброт.

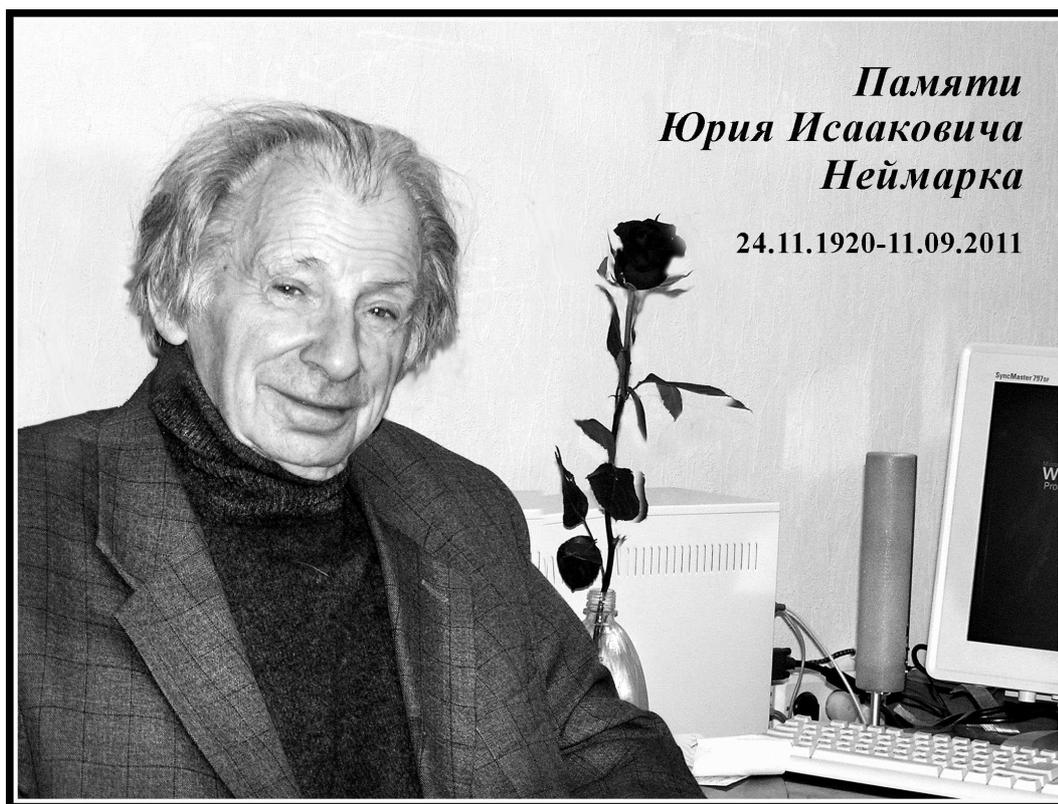
Дорогая редакция! Как по-вашему, имеет ли право на существование моя интерпретация?

Жду ответа, как соловей лета. Петя Васечкин».

Сперва редакция обомлела от гордости за наших детей. Это надо же, как пронзительно, глубоко и тонко простой десятиклассник физико-математической школы со скромным именем Петя Васечкин разбирается в сложной научной проблеме, в которой многие и из нас-то путаются! Видать, у этого парня – учителя высочайшей пробы! В голове замелькали знакомые и дорогие фамилии. Потом, при всей нашей крайней доверчивости, некоторые подробности смутили нашу гордость. Особенно, честно признаемся, «шероховатые поверхности», «пористые структуры» и некоторые другие. Нам даже показалось, что под детским обликом Пети скрывается, скорее всего, Серпинский, может, со своими треугольниками. Но тут мы смутно вспомнили – «Вацлав Серпинский (1882–1969)». Нет, отпадает. Тогда редакции стало ясно, что это шутка Бенуа Мандельброта. Мы же его приглашали в Суздаль. Значит, решил присутствовать таким вот изысканным способом! Нет, вряд ли! Мандельброт бы не стал бесконечно ссылаться на себя. Что ему, славы, что ли, не хватает? А с другой стороны, вряд ли он отказался бы от первоавторства даже в пользу Андерсена. И главное, откуда Бенуа Мандельброту знать чисто российское наше присловье, столь много глаголящее именно нашему менталитету: «Жду ответа, как соловей лета»? Но кто же это тогда, кто?

И тут в редакцию вошла Марина Валентиновна Трошева и сказала: «Вот еще один снимок с семинара «Синергетика». По-моему, Юлий Александрович неплохо получился, как вы считаете?» – «Данилов!!!» – радостно взревели мы. Марина Валентиновна даже испугалась: «Не нравится?» – «Еще как нравится! – закричали мы. – Как мы сразу-то не догадались?!» Действительно, «спрятавшись за словом – уши видно», как сказал философ. Только Юлий Александрович Данилов знает всё про фракталы, а всё, к примеру, что мы знаем про Пригожина и его идеи, мы знаем только от Юлия Александровича, потому что он его и других умных людей для нас переводит. Сейчас, по слухам, готовит новый перевод Шредингера «Жизнь с точки зрения физика». Беспокоить его нашими догадками мы не сочли возможным.

Как вы думаете, дорогие читатели, имеет ли наша интерпретация право на существование?



**ПАМЯТИ МОЕГО БОЛЬШОГО ДРУГА,
ВЫДАЮЩЕГОСЯ УЧЕНОГО И ЗАМЕЧАТЕЛЬНОГО ЧЕЛОВЕКА
ЮРИЯ ИСААКОВИЧА НЕЙМАРКА**

П.С. Ланда

11 сентября 2011 года ушел из жизни мой очень большой друг, выдающийся ученый и очень интересный человек Юрий Исаакович Неймарк. Поверить в это невозможно. Он очень любил жизнь, и поэтому казалось, что такой человек не может умереть. О его любви к жизни свидетельствует стихотворение «Подарок», кото-

рое он написал и опубликовал в сборнике «Перед заходом солнца: Стихотворения» (Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2005. 105 с.):

Подарок

Хоть я старик	Иль по откосу я иду
И чувствую себя не «ах»,	И, Волгу созерцая,
Но иногда подарки	Вспоминаю,
Мне жизнь дарит.	Как я на катере,
И счастлив я,	Скользя по ней,
Что еще жив,	Природы видом наслаждался.
Что, сидя за столом,	И ночью у костра,
Пишу и думаю	Огнем замороженный,
О чем хочу.	Смотрел на небо,
О прошлом вспоминаю	Где звезды яркие
И мысленно ласкаю	В ночи сверкали,
Тех, кого люблю.	И вечность открывалась мне.

24 ноября 2010 года мы замечательно отпраздновали 90-летний юбилей Юрия Исааковича. В этот день по нижегородскому телевидению показывали интервью с ним, которое проводил известный нижегородский тележурналист и кинорежиссер Ю.Б. Беспалов. Юрий Исаакович прекрасно отвечал на все задаваемые ему вопросы, и была полная уверенность, что это интервью не последнее. К сожалению, уверенность не оправдалась и казавшееся невозможным произошло. Единственное, что утешает, – это то, что многие, с кем его сталкивала жизнь, будут помнить его долго.

Фамилию Неймарк я узнала давно, с тех пор как стала студенткой кафедры колебаний физического факультета МГУ, возглавляемой в то время К.Ф. Теодорчиком. В лекциях по колебаниям профессор кафедры Сергей Павлович Стрелков рассказывал нам о методе точечных отображений, основанном на работах Анри Пуанкаре, но детально разработанном профессором Горьковского университета Юрием Исааковичем Неймарком применительно к проблемам теории нелинейных колебаний. В то время этот метод казался мне совершенно бесполезным, потому что не позволял решить аналитически даже такую, казалось бы, простую задачу, как приближенный расчет амплитуды колебаний в генераторе ван дер Поля, что было легко сделать другими методами, например, методом ван дер Поля. Я, конечно, понимала, что этот метод позволял легко получать решение для кусочно-линейных систем, но сама с такими системами почти не сталкивалась. Только спустя несколько лет я сумела по достоинству оценить эту работу Юрия Исааковича.

После окончания университета я много раз встречалась с Юрием Исааковичем лично на конференциях по нелинейным колебаниям в г. Киеве, одним из организаторов которых был академик Ю.А. Митропольский. На этих конференциях Юрий Исаакович и его сотрудники рассказывали о гомоклинических и гетероклинических структурах, в окрестности которых фазовые траектории ведут себя сложным образом. Сотрудники Юрия Исааковича рассказывали, в основном, о своих результатах по численному определению границ областей такого сложного поведения. Но поскольку я не понимала, что это за структуры и какое отношение они имеют к реальным системам, а численными расчетами вообще не занималась, особого интереса



Дискуссия по докладу. Слева направо: 1-й ряд – Ю.И.Неймарк, П.С.Ланда, М.Д. Дольберг;
2-й ряд – И.И. Вульфсон, В.И. Бабицкий, В.К. Асташев *Архив П.С.Ланды*



Участники Школы (фрагмент общей фотографии). Слева направо: 1-й ряд – Н.В.Флорина,?, П.С.Ланда,
Я.Г. Пановко; 2-й ряд – К.М. Рагульскис, Ю.И.Неймарк, Е.Г. Бергер, ?; 3-й ряд – В.Л.Рагульскене,
М.В.Хвингия, Л.М. Литвин; 4-й ряд – Е.А. Бейлин,?, Э.Л. Поздняк *Архив П.С.Ланды*

эта тематика у меня не вызывала. Только в 1974 году на конференции по колебаниям в Зеленом городе (вблизи г. Горького), сидя на бревнышке рядом с Юрием Исааковичем, я пыталась выяснить у него, что представляют собой эти структуры и действительно ли они приводят к случайности колебаний в системе без случайных источников (мне это казалось совершенно невозможным), но, к сожалению, внятного ответа я не получила. Так это и оставалось для меня непонятным и мало меня интересовало. Но в 1978 г. в журнале «Успехи Физических Наук» вышел обзор М.И. Рабиновича «Стохастические автоколебания и турбулентность», в котором не давалось никаких ссылок на работы Ю.И. Неймарка*. Поскольку до этого я много раз слышала доклады Ю.И. об этих проблемах, факт отсутствия ссылок меня очень возмутил. При очередной встрече с Юрием Исааковичем в Киеве (в 1980 г.) недалеко от той гостиницы, где он жил, я его спросила, почему бы ему не написать обзор на ту же тему в тот же журнал. Его ответ «меня не напечатают» был для меня совершенно неожиданным, и я его стала уговаривать все же написать, пообещав всяческое содействие (кое-какие возможности для этого у меня были). Ответ на это мое предложение оказался для меня еще более неожиданным, но сыгравшим очень большую роль в моей дальнейшей научной жизни. Он сказал: «Только вместе с Вами». Обсуждая будущую работу, мы с ним пошли гулять по любимейшему моему маршруту вдоль Днепра и прогуляли всю ночь. Во время этой прогулки Юрий Исаакович рассказал мне о своей жизни, после чего он стал для меня очень близким человеком. Обзор мы написали, но предсказание Юрия Исааковича оказалось пророческим: наш обзор, действительно, отказались печатать без каких-либо веских оснований. Но это, как часто бывает, было к лучшему. Поскольку у нас был собран и подготовлен к печати громадный материал, мы решили написать книгу, что и сделали. Книга под названием «Стохастические и хаотические колебания», конечно, тоже вызвала значительное противодействие ее публикации, что и привело к существенной задержке, но, не знаю почему, на нашей стороне оказался зав. редакцией физико-математической литературы изд-ва «Наука» академик Леонид Иванович Седов, что и привело к тому, что в 1986 г. книга была опубликована. После публикации книга очень быстро разошлась, и в 2010 г. было ее второе издание. Кроме того, в 1992 г. книга была опубликована на английском языке изд-вом Kluwer Academic Publishers, и понемногу допечатывается до сих пор, о чем свидетельствует перечисление нам небольших гонораров.

После 1980 г. мы стали часто встречаться с Юрием Исааковичем недалеко от Москвы (в поселке Колюбакино), где проходили замечательные школы по турбулентности, организуемые институтом механики МГУ, и на конференциях в Прибалтике, организуемых профессором М.В. Закржевским. Все доклады Юрия Исааковича на этих конференциях вызвали исключительный интерес у слушателей. Особенно запомнился доклад о простенькой математической модели смены общественных формаций в человеческом обществе. Эта модель, как и множество других, была опубликована прошлым летом в совершенно замечательной книге Неймарк Ю.И. «Математическое моделирование как наука и искусство: Учебник» (Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2010. 404 с.). Эта книга была значительно переделана и улучшена автором по

*Как мне потом рассказывал Юрий Исаакович, М.И. Рабинович пришел к нему и попросил рассказать про его работы по гомоклиническим структурам и связанную с ними случайность, что Ю.И. и сделал. Но, как уже написано, никаких ссылок в своем обзоре Рабинович не дал.

сравнению с предыдущими изданиями. Она вышла перед 90-летним юбилеем автора. По моим сведениям сейчас эту книгу купить невозможно. Указанная книга отражала большой интерес Юрия Исааковича к разработкам простейших математических моделей сложных процессов в природе и обществе. Кроме того, его по-прежнему интересовали проблемы динамического хаоса. Я была свидетелем, что еще прошлым летом Юрий Исаакович интенсивно работал над новой книгой об этих проблемах и надеялся успеть ее издать. К большому сожалению, эти его надежды не оправдались.

Хотя мы жили в разных городах, но я всегда знала, что есть человек, с которым я могу обсудить любые волнующие меня вопросы и проблемы. Часто у него оказывался готовый ответ на мои вопросы. Так было, например, когда сын моей приятельницы М. Розенблюм, работавший в Институте машиноведения АН СССР, заинтересовался и заинтересовал меня проблемой диагностики нервных заболеваний. На наш вопрос Юрий Исаакович сразу же посоветовал использовать метод хорошо приспособленного базиса, опубликованный в одной из его книг Неймарк Ю.И., Коган Н.Я., Савельев В.П. «Динамические модели теории управления» (М.: Наука, 1985. 400 с.). Этот метод, действительно, оказался очень продуктивным для любой диагностики, задача которой состоит в распознавании образов. Для интересующей нас с М. Розенблюмом задачи мы получили этим методом очень интересные результаты.

Меня всегда поражало, как Юрий Исаакович сразу же понимал существо задаваемого ему вопроса и очень часто довольно быстро давал весьма квалифицированный ответ. Это очень редкое качество.

Одно обстоятельство хочется особо отметить. Юрий Исаакович обладал довольно редким даром четко и понятно рассказывать на конференциях и семинарах о результатах своих работ. По-видимому, он также прекрасно читал лекции, но я, к сожалению, их не слышала.

И, наконец, не могу умолчать об одном эпизоде. На одной из конференций профессор из Ростова В.И. Юдович в одной из своих лекций по незнанию назвал Юрия Исааковича моим учителем. Я потом сделала ему замечание по этому поводу, потому что считала своими учителями С.П. Стрелкова и К.Ф. Теодорчика. Формально я была права. Но сейчас я считаю, что Виктор Иосифович правильно отразил суть дела. Безусловно, Юрий Исаакович меня многому научил и по праву может считаться одним из моих учителей. За это я ему очень благодарна.

В школе и университете нас учили, что незаменимых людей нет. Но это совершеннейшая неправда. Для близких все люди незаменимы. Но даже в более общем плане, например, для науки, таких людей, конечно, не много, но, к счастью, они есть. И Юрий Исаакович был одним из таких незаменимых, не только для близких людей, но и для науки в целом. С его уходом из жизни наука значительно обеднеет.

19 сентября 2011

ПРАВИЛА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ

Рукописи, объемом **не более 16 стр. и 8 рис.** принимаются в редакцию в 2 вариантах: бумажном и электронном.

1. Бумажный вариант (2 экз.) должен быть напечатан шрифтом размера 12 pt, через 1,5 интервала при ширине рабочего поля не менее 16 см. Если рисунки (только черно-белые!) не вставлены в текст, то они выполняются на отдельных страницах также в 2-х экз. Под рисунком указывается его номер, фамилии авторов, название статьи; **подрисуночные подписи печатаются на отдельном листе и не должны дублировать внутритекстовое описание рисунка.** *Требования к оформлению текста.* На первой странице перед текстом статьи должны быть напечатаны: индекс УДК, название статьи, инициалы и фамилии авторов, **краткая аннотация статьи с ключевыми словами**, составленная по форме удобной для непосредственного включения ее в РЖ, издаваемые ВИНИТИ.

К статье прилагаются в 1 экз.:

- перевод на английский язык названия статьи, инициалов и фамилий авторов, аннотации, **ключевых слов.**

- краткие сведения об авторах с фотографиями в графических форматах JPG, GIF и т.д., или сканированные с разрешением не менее 300dpi без дополнительной компьютерной обработки, **e-mail каждого автора и почтовый адрес организации.**

- *Краткие сведения об авторах составляются по следующей форме:*

Сидоров Петр Иванович – родился в 1938 году в Москве, окончил Московский физико-технический институт в 1961 году. После окончания МФТИ работает в ФИАН заведующим отделом. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1964) и доктора физико-математических наук (1977) в области теории колебаний и волн. Автор монографии «Детерминированный хаос и экономика» и учебника «Волны в экологии» (в соавторстве с...). Опубликовал 120 научных статей по направлениям, указанным выше. Лауреат Государственной премии СССР. Редактор журнала International Journal of Chaos Theory и член редакционной коллегии журнала «Физика и жизнь».

В библиографическом списке нумерация источников должна соответствовать очередности ссылок на них в тексте. В списке указываются:

а) для книг – фамилия автора, инициалы, название книги, город, издательство, год издания, том;

б) для журнальных статей – фамилия автора, инициалы, название статьи, название журнала, серия, год, том, номер, выпуск, первая страница статьи;

в) для депонированных статей – название статьи, инициалы, фамилия автора, название организации, в которой выполнена работа, город, год, объем статьи, название депонирующей организации, дата депонирования, регистрационный номер;

г) для препринта – фамилия автора, инициалы, название издания, полное название издающей организации, год, количество страниц;

д) для материалов конференций, школ, семинаров – фамилия автора, инициалы, название статьи, название издания, время и место проведения конференции, город, издательство, год, первая страница статьи.

В конце статьи авторы должны указать наименование программы, в рамках которой выполнена работа, или наименование фонда поддержки.

2. Электронный вариант. Статья оформляется с использованием макропакета \LaTeX 2 ϵ . Рекомендуется пользоваться компилятором MiKTeX (MiKTeX2.4), так как именно им пользуются в редакции. В редакцию присылать только TEX-файл (с англ. аннотацией и ав. сведениями) без стилевых файлов и PDF статьи. Все иллюстрации, включенные в оригинал-макет, предоставляются в виде отдельных файлов, записанных в любом из форматов: TIFF, GIF, JPEG, EPS. **Название файла должно соответствовать номеру рисунка в тексте.**

В виде исключения принимаются статьи, подготовленные с помощью текстового редактора Microsoft Word (все формулы должны быть набраны при помощи Equation или MathType).

Все публикации в журнале, в том числе и публикации аспирантов, бесплатные.