



ОСОБЕННОСТИ УСТРОЙСТВА ПРОСТРАНСТВА ПАРАМЕТРОВ ДВУХ НЕИДЕНТИЧНЫХ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ – ДУФФИНГА

А.П. Кузнецов, В.И. Паксютов

Рассматривается система, состоящая из двух неидентичных диссипативно связанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга. При помощи перехода к укороченным уравнениям показана возможность применения уравнения Адлера для описания областей синхронизации системы, что приводит к нетривиальной форме основного языка синхронизации на плоскости управляющих параметров подсистем. Обсуждается вид системы языков синхронизации в исходной дифференциальной системе и влияние фазовой нелинейности на ее конфигурацию. Обсуждается также случай несимметричной нелинейности в осцилляторах.

Введение

Система двух связанных осцилляторов Ван дер Поля является классической в теории колебаний и нелинейной динамике [1]. Соответствующая система дифференциальных уравнений не имеет точного аналитического решения. В связи с этим при ее исследовании традиционно используются асимптотические методы. Хорошо известна картина неподвижных точек, которая уже достаточно подробно описана аналитически при помощи системы укороченных уравнений [1, 2]. Подобное аналитическое исследование весьма эффективно, однако, вследствие усреднения по частоте и других предполагаемых упрощений, не может описывать области кратной синхронизации, давать глобальную картину синхронизации в пространстве параметров. Весьма ограничены возможности аналитического анализа также для описания гистерезисов, одновременного сосуществования нескольких устойчивых циклов, сложной динамики и хаотических режимов. Известно, что, несмотря на простоту уравнений Ван дер Поля и Ван дер Поля – Дуффинга, картина бифуркаций системы в пространстве параметров может выглядеть чрезвычайно сложно. При современном уровне развития компьютерной техники становится реализуемой возможность подробного численного исследования различных динамических систем при помощи таких методов нелинейной динамики, как построение карт динамических режимов, метод

секущей плоскости Пуанкаре и т.д. В работе [4] методом построения карт динамических режимов проводился численный анализ динамики связанных систем Ван дер Поля и Ван дер Поля – Дуффинга с диссипативной связью на плоскости расстройки собственных частот осцилляторов и величины связи. Исследована картина языков кратной синхронизации, характеризуемых различными числами вращения, отличными от 1/1. Обнаружен ряд новых эффектов, например, раскачки колебаний за счет диссипативной связи с отрицательным значением коэффициента связи.

В силу сложности задачи и большого числа существенных параметров, как правило, исследовалась ситуация, когда управляющие параметры подсистем одинаковы, а отличие состоит в разных собственных частотах. Однако задача о динамике связанных систем в случае неидентичных управляющих параметров является интересной не только с точки зрения расширения представления о поведении связанных осцилляторов Ван дер Поля, но и в более широком, общеколебательном аспекте. Действительно, представим себе две системы с бифуркацией Андронова – Хопфа. В этом случае, варьируя управляющий параметр первой подсистемы λ_1 , можно добиться возникновения в ней автоколебательного режима, а варьируя второй параметр λ_2 , можно добиться возникновения автоколебаний во второй системе. Если же системы связаны, то развитие «сценария» возникновения колебательных режимов оказывается двухпараметрической задачей, результаты которой естественно представить на плоскости параметров (λ_1, λ_2) , управляющих возникновением бифуркаций Андронова – Хопфа в изолированных подсистемах. Подобное исследование и является основной целью настоящей работы. Прежде всего необходимо выбрать систему, которая будет наиболее удобной для такого исследования.

В большинстве работ, посвященных анализу различных аспектов динамики автогенератора Ван дер Поля [2, 5–10], уравнение изолированной подсистемы выбирается в следующей нормировке:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \lambda(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (1)$$

При этом фазовая траектория выходит на предельный цикл в независимости от управляющего параметра λ . Амплитуда колебаний всегда равна единице, и бифуркация Андронова – Хопфа невозможна. В этом плане предпочтительнее иное представление уравнения Ван дер Поля:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (\lambda - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (2)$$

В системе (2) имеется устойчивая неподвижная точка, когда управляющий параметр λ имеет отрицательное значение. При $\lambda = 0$ эта точка теряет устойчивость и наблюдается бифуркация Андронова – Хопфа. Предельный цикл системы (2) с увеличением λ растет в размере пропорционально $\sqrt{\lambda}$.

Уравнение (2), однако, приводит не к столь общим укороченным уравнениям – так, уравнение для фазы не зависит от амплитуды, в то время как для нормальной формы бифуркации уравнения Андронова – Хопфа производная от фазы выражается через квадрат амплитуды [1].

Положение можно исправить, если обратиться к уравнению Ван дер Поля – Дуффинга с дополнительной кубической нелинейностью

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (\lambda - x^2)\frac{dx}{dt} + x + \beta x^3 = 0.$$

Величину β мы будем далее называть коэффициентом фазовой нелинейности, так как в укороченных уравнениях она связывает производную от фазы с квадратом амплитуды (см. [1] и ниже). Наличие фазовой нелинейности в связанных осцилляторах оказывает достаточно существенное влияние на динамику. Так в работе [4] было показано, что фазовая нелинейность за счет трансформации языков синхронизации приводит к образованию на картах динамических режимов областей типа crossroad-area, что свидетельствует о возникновении сложной динамики в некоторых областях пространства параметров. Это становится возможным, только если величины коэффициентов нелинейности и управляющих параметров достаточно велики.

Таким образом, мы приходим к системе связанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - (\lambda_1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x + \beta x^3 + \mu \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \right) &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} - (\lambda_2 - y^2) \frac{dy}{dt} + (1 + \delta)y + \beta y^3 + \mu \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где μ – коэффициент диссипативной связи, λ_1 и λ_2 – управляющие параметры осцилляторов, δ – расстройка собственных частот, β – параметр фазовой нелинейности.

1. Укороченные уравнения и уравнение Адлера

Одной из целей настоящей работы является поиск приближенных уравнений, позволяющих описать картину бифуркаций и получить форму языков синхронизации на плоскости управляющих параметров связанных осцилляторов.

Осуществить переход к укороченным уравнениям можно при помощи метода медленно меняющихся амплитуд, произведя замену в уравнениях (3)

$$x = ae^{it} + a^*e^{-it}, \quad y = be^{it} + b^*e^{-it} \quad (4)$$

и полагая

$$\frac{da}{dt}e^{it} + \frac{da^*}{dt}e^{-it} = 0, \quad \frac{db}{dt}e^{it} + \frac{db^*}{dt}e^{-it} = 0, \quad (5)$$

где a и b – комплексные амплитуды колебаний первого и второго осцилляторов. Они изменяются с течением времени медленно по сравнению с основной частотой колебаний, которая в данном случае равна 1. После проведенного усреднения можно получить уравнения для комплексных амплитуд a и b :

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \lambda_1 a - |a|^2 a + 3\beta i |a|^2 a - \mu a + \mu b, \\ \frac{db}{dt} &= \lambda_2 b - |b|^2 b + i b \delta + 3\beta i |b|^2 b - \mu b + \mu a. \end{aligned} \quad (6)$$

Комплексные амплитуды a и b можно представить в следующем виде: $a = R e^{i\varphi_1}$, $b = r e^{i\varphi_2}$, где R, r – действительные амплитуды колебаний первого и второго осциллятора, соответственно, $\varphi_{1,2}$ – фазы колебаний осцилляторов. Тогда получаем

систему из четырех дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{dR}{dt} &= R(\lambda_1 - \mu) - R^3 + \mu r \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \\
\frac{dr}{dt} &= r(\lambda_2 - \mu) - r^3 + \mu R \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \\
\frac{d\varphi_1}{dt} &= 3\beta R^2 + \frac{\mu r}{R} \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \\
\frac{d\varphi_2}{dt} &= \delta + 3\beta r^2 + \frac{\mu R}{r} \sin(\varphi_1 - \varphi_2).
\end{aligned} \tag{7}$$

Поскольку фазы колебаний осцилляторов входят в уравнения только в виде разности $\psi = (\varphi_1 - \varphi_2)$, то можно вычесть из третьего уравнения четвертое и получить систему уже из трех дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{dR}{dt} &= R(\lambda_1 - \mu) - R^3 + \mu r \cos \psi, \\
\frac{dr}{dt} &= r(\lambda_2 - \mu) - r^3 + \mu R \cos \psi, \\
\frac{d\psi}{dt} &= -\delta + 3\beta(R^2 - r^2) - \mu\left(\frac{r}{R} + \frac{R}{r}\right) \sin \psi.
\end{aligned} \tag{8}$$

Система (8) представляет собой систему укороченных уравнений Ван дер Поля – Дуффинга [1, 4].

В автономном режиме предельный цикл имеет форму окружности с радиусом $\sqrt{\lambda}$. Если величина коэффициента связи μ мала, то можно считать, что $R = \sqrt{\lambda_1} + \tilde{R}$, $r = \sqrt{\lambda_2} + \tilde{r}$, $\tilde{R}, \tilde{r} \ll 1$. Пренебрегая малыми слагаемыми, из первого и второго уравнения системы (8) получим соотношения

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{R}} &= -2\tilde{R}\lambda_1 - \mu\sqrt{\lambda_1} + \mu\sqrt{\lambda_2} \cos \psi, \\
\dot{\tilde{r}} &= -2\tilde{r}\lambda_2 - \mu\sqrt{\lambda_2} + \mu\sqrt{\lambda_1} \cos \psi.
\end{aligned} \tag{9}$$

В установившемся режиме положим $\dot{\tilde{R}} = \dot{\tilde{r}} = 0$. Тогда из уравнений (9) легко найти, что

$$\begin{aligned}
\tilde{R} &= -\frac{\mu}{2\sqrt{\lambda_1}} + \frac{\mu}{2} \frac{\sqrt{\lambda_2}}{\lambda_1} \cos \psi, \\
\tilde{r} &= -\frac{\mu}{2\sqrt{\lambda_2}} + \frac{\mu}{2} \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\lambda_2} \cos \psi.
\end{aligned} \tag{10}$$

Теперь из третьего уравнения системы (8) можно получить уравнение

$$\frac{d\psi}{dt} = -\delta + 3\beta(\lambda_1 - \lambda_2) + 3\beta\mu\left(\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} - \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\right) \cos \psi - \mu\left(\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} + \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\right) \sin \psi. \tag{11}$$

Это уравнение позволяет определить границы основного языка синхронизации системы. Оно может быть представлено в следующем виде:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\delta + 3\beta(\lambda_1 - \lambda_2) + \mu\sqrt{9\beta^2\left(\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} - \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} + \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\right)^2 \sin^2(\psi + \theta)}, \tag{12}$$

где $\theta = \pm \arcsin(3\beta(\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} - \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}})/\sqrt{9\beta^2(\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} - \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}})^2 + (\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} + \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}})^2}) + \pi n$,
 $n \in Z$.

Таким образом, мы получили уравнение Адлера [1] для неидентичных связанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга с разными значениями управляющих параметров λ_1, λ_2 . Аналог уравнения (12) был ранее получен в [1] для системы Ван дер Поля с равными значениями этих параметров. При $\lambda_1 = \lambda_2$ исчезают все члены в правой части уравнения (12), содержащие параметр нелинейности β . Таким образом, фазовая нелинейность осцилляторов влияет на форму языка синхронизации только при разных значениях управляющих параметров системы.

Уравнение (12) позволяет определить область основного языка синхронизации системы. Внутри этой области должна существовать устойчивая неподвижная точка уравнения Адлера, которая исчезает на границе языка синхронизации. Такая точка ψ_0 существует, когда $|\sin \psi_0| \leq 1$. В этом случае границы языка синхронизации даются соотношением

$$\delta = 3\beta(\lambda_1 - \lambda_2) \pm \mu \sqrt{9\beta^2(\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} - \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}})^2 + (\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} + \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}})^2}. \quad (13)$$

Вне языка синхронизации траектория укороченной системы выходит на предельный цикл, что соответствует квазипериодическому движению исходной дифференциальной системы (3), режиму, когда разность фаз осцилляторов меняется во времени. Внутри языка разность фаз осцилляторов остается постоянной.

Из полученного соотношения видно, что на плоскости параметров расстройка δ – величина связи μ языки синхронизации имеют классическую форму в виде острых «углов», как показано на рис. 1, а. Вершина языка располагается в точке $\delta = 3\beta(\lambda_1 - \lambda_2)$. Таким образом, неидентичность управляющих параметров проявляется лишь в смещении вершины языка, причем лишь при наличии фазовой нелинейности.

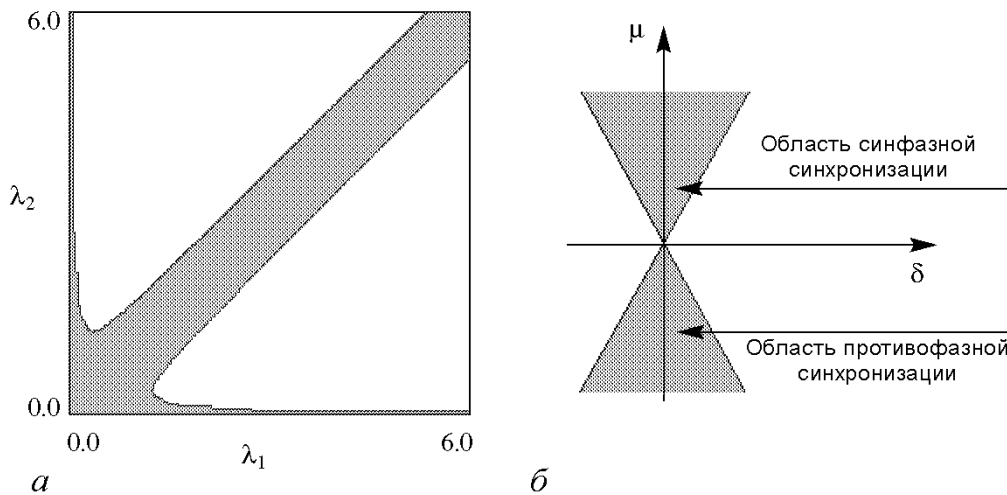


Рис. 1. а – языки синхронизации системы типа 1/1 на плоскости параметров (δ, μ) . б – язык синхронизации системы типа 1/1 на плоскости параметров (λ_1, λ_2) ; значения $\beta = 0.3, \mu = 0.3, \delta = 0$

Совершенно иная ситуация имеет место на плоскости управляющих параметров подсистем, где язык синхронизации имеет весьма своеобразную форму (рис. 1, б). Режим квазипериодических колебаний изображен белым цветом. В этой части плоскости параметров оба осциллятора в автономном состоянии находятся за порогом бифуркации Андронова – Хопфа. Появление квазипериодических движений объясняется конкуренцией двух собственных частот осцилляторов. Можно видеть, что две «ветви» языка синхронизации вытянуты вдоль координатных осей, что соответствует ситуации, когда автономные осцилляторы (при отсутствии связи) выходят на собственные предельные циклы и совершают колебания с собственными частотами, причем размер предельного цикла одного из осцилляторов много больше размеров предельного цикла другого. При наличии связи и положительных значениях обоих управляющих параметров внутри этих «ветвей» языка синхронизации происходит захват частоты тем осциллятором, величина предельного цикла которого больше. Одна из «ветвей» языка синхронизации вытянута вдоль диагонали. Внутри нее предельные циклы автономных осцилляторов близки по размеру, и происходит взаимная синхронизация.

На рис. 1, б представлен случай, когда собственные частоты осцилляторов одинаковы ($\delta = 0$). Метаморфозы языка для случая разных собственных частот и вариации других параметров мы обсудим ниже, параллельно с рассмотрением карт динамических режимов дифференциальной системы.

Можно сделать еще более грубое приближение. Пусть, как и в автономной системе, $R \approx \sqrt{\lambda_1}$, $r \approx \sqrt{\lambda_2}$. Тогда из третьего уравнения системы (8) можно получить уравнение

$$\frac{d\psi}{dt} = -\delta + 3\beta(\lambda_1 - \lambda_2) - \mu\left(\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} + \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\right) \sin \psi. \quad (14)$$

В этом случае условие границы области синхронизации 1/1 будет выглядеть следующим образом:

$$\delta = 3\beta(\lambda_1 - \lambda_2) \pm \mu\left(\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} + \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\right). \quad (15)$$

Сравнивая полученное соотношение с (12), заключаем, что оно эффективно, если параметр фазовой нелинейности β мал. Соотношение (15) – простейший вариант формулы, описывающей форму языка синхронизации на плоскости параметров (λ_1, λ_2) , управляющих возникновением бифуркаций Андронова – Хопфа в изолированных подсистемах.

2. Численный анализ исходной системы

2.1. Методология численного исследования. Обратимся теперь к численному исследованию системы (3). Численный анализ далее проводится преимущественно при помощи построения карт динамических режимов системы на плоскостях различных параметров [3], на которых оттенками серого цвета обозначены различные периоды колебаний одного из связанных осцилляторов. Белый цвет соответствует хаотическим либо квазипериодическим движениям.

Периоды циклов при построении карт динамических режимов определялись численно с использованием метода сечений Пуанкаре. После достаточно длительного переходного процесса, когда можно считать фазовую траекторию вышедшей

на предельный цикл, определялись точки ее пересечения с секущей плоскостью. Но при этом рассматривались только траектории, «протыкающие» сечение Пуанкаре в одном направлении. Количество точек пересечения секущей плоскости принималось за период предельного цикла. В качестве сечения Пуанкаре выбирались плоскости $x = 0$ и $y = 0$, позволяющие определить число вращения m/n , характеризующее режим установившейся синхронизации. Здесь m – период колебаний первого осциллятора, а n – период колебаний второго осциллятора. Число вращения рационально внутри языков синхронизации и иррационально за их границами.

На рис. 2 представлена карта динамических режимов для системы связанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга на плоскости: расстройка собственных частот δ – величина силы связи μ . Интересно отметить, что, поскольку мы разрешаем параметру μ принимать и положительные, и отрицательные значения, то осцилляторы могут синхронизоваться как в фазе (сдвиг фаз между осцилляторами $\psi = 0$), так и в противофазе ($\psi = \pi$). Действительно, обратимся к уравнению (14) в случае идентичных подсистем

$$\frac{d\psi}{dt} = -\delta - 2\mu \sin \psi.$$

Из него нетрудно понять (вводя, например, эффективный потенциал $U(\psi) = \delta\psi - 2\mu \cos \psi$), что при $\mu > 0$ устойчивым будет состояние равновесия $-\pi/2 < \psi < \pi/2$. В частности, при нулевой расстройке δ фазы осцилляторов точно совпадут: $\psi = 0$. Соответственно, при $\mu < 0$ и нулевой расстройке, наоборот, колебания осцилляторов противофазны, и $\psi = \pi$. В численных экспериментах наличие противофазной синхронизации можно отследить, фиксируя различные знаки величин скоростей отдельных осцилляторов в момент прохождения сечения Пуанкаре. Результатом такого моделирования служат отмеченные штриховкой на рис. 2 области противофазной синхронизации. Хорошо видно, что они действительно отвечают отрицательным значениям μ .

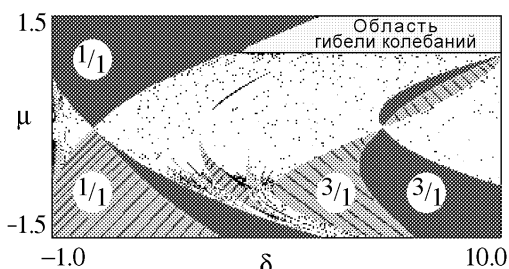


Рис. 2. Карта динамических режимов системы связанных осцилляторов Ван дер Поля на плоскости параметров (δ, μ) при $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.0$, $\beta = 0$. Заштрихованы области противофазной синхронизации

2.2. Плоскость управляющих параметров системы.

Обратимся теперь к устройству плоскости управляющих параметров осцилляторов (λ_1, λ_2) . На рис. 3 представлена карта динамических режимов системы с диссипативной связью на плоскости управляющих параметров, а также фазовые портреты, построенные для некоторых точек пространства параметров для значений $\mu = 0.3$, $\delta = 1.5$.

Если оба управляющих параметра отрицательны, колебания системы затухают. На карте динамических режимов заштрихована область, где единственным устойчивым положением равновесия является нулевая неподвижная точка. Черным цветом изображен режим синхронизации $1/1$. Он захватывает часть плоскости, где оба параметра λ_1 и λ_2 положительны. В этой четверти реализуется ситуация, аналогичная изображенной на рис. 1, б. Также можно видеть область квазипериодических движений, изображенную белым цветом. Однако на карте динамических режимов внутри

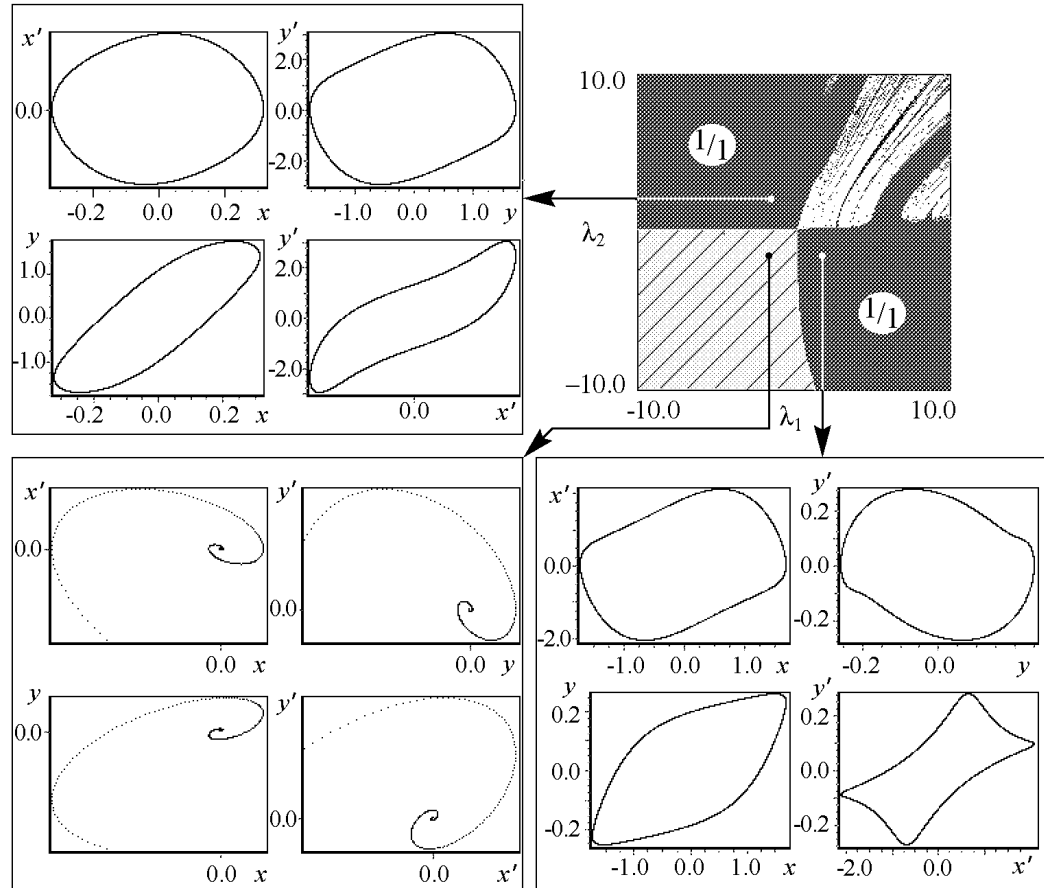


Рис. 3. Карта динамических режимов системы связанных осцилляторов Ван дер Поля на плоскости управляющих параметров (λ_1, λ_2) для $\mu = 0.3, \delta = 1.5$ и фазовые портреты системы, иллюстрирующие появление бифуркации Андронова – Хопфа

области квазипериодики есть тонкие языки кратной синхронизации, которые отсутствуют на рис. 1, б в силу использования приближенных укороченных уравнений.

Если же один из управляющих параметров системы отрицателен, а второй положителен, то в автономном режиме колебания одного из осцилляторов должны затухать. Но в связанном состоянии имеет место конкуренция двух аттракторов: устойчивой нулевой точки первого осциллятора и предельного цикла второго осциллятора. В результате реализуется одна из двух возможных ситуаций: колебания второго осциллятора подавляются первым осциллятором, либо второй осциллятор индуцирует колебания первого. На рис. 3 граница этих динамических режимов проходит по линии, разделяющей черную и заштрихованную области.

На рис. 4 и 5 в левой колонке изображены карты динамических режимов системы на плоскости (λ_1, λ_2) для различных значений других параметров дифференциальной системы (3). В правой колонке показаны соответствующие им языки синхронизации $1/1$, построенные в ходе приведенного выше аналитического анализа, границы которых описываются соотношением (13). Рисунки в левой и правой колонках демонстрируют замечательное соответствие, что говорит о правильном определении

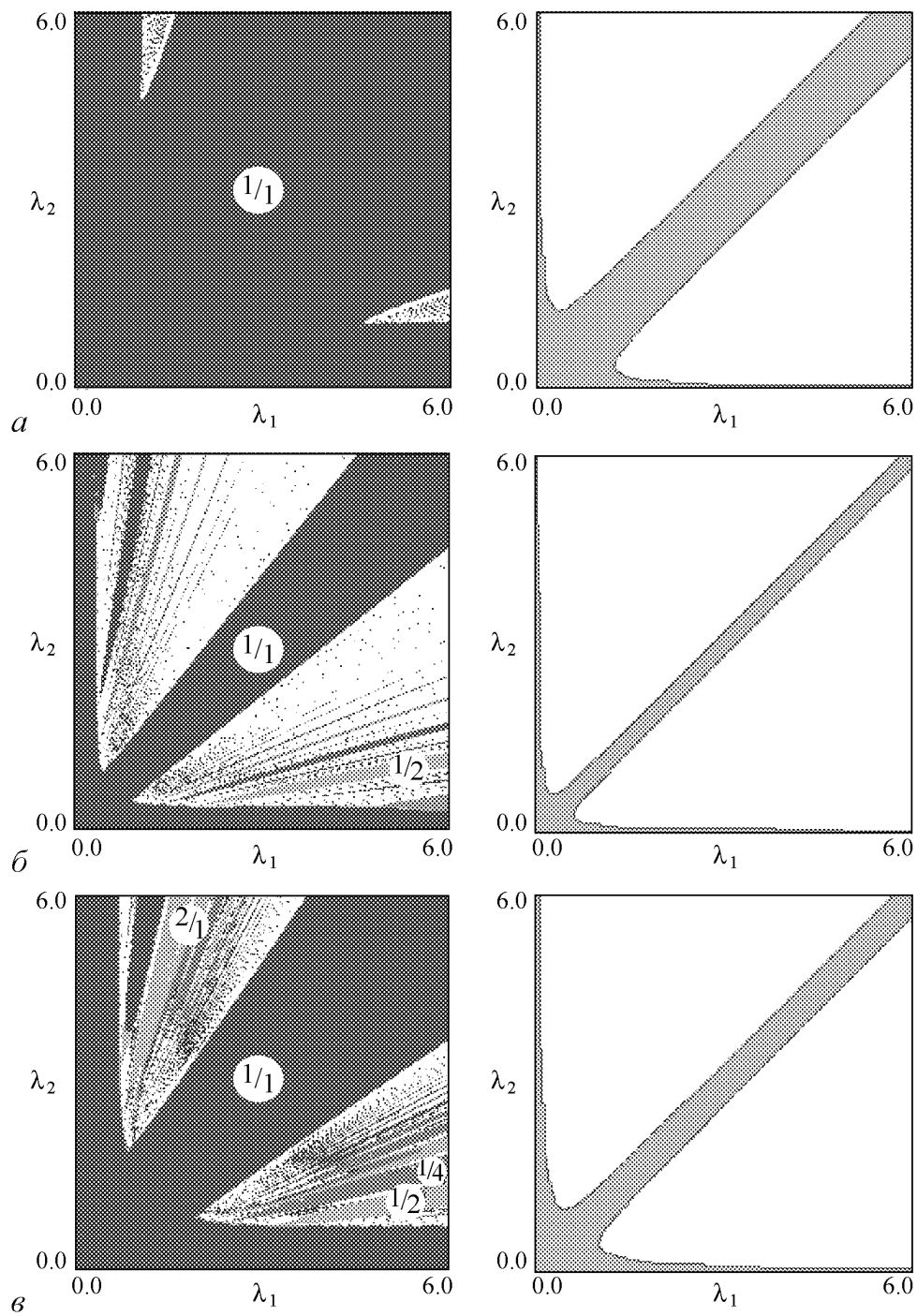


Рис. 4. Карты динамических режимов системы при $\delta = 0$ для значений параметров $\beta = 0.3, \mu = 0.3$ (*a*); $\beta = 1, \mu = 0.3$ (*б*); $\beta = 1, \mu = 0.5$ (*в*) и соответствующие им языки синхронизации $1/1$, построенные в ходе аналитического анализа, границы которых задаются соотношением (13)

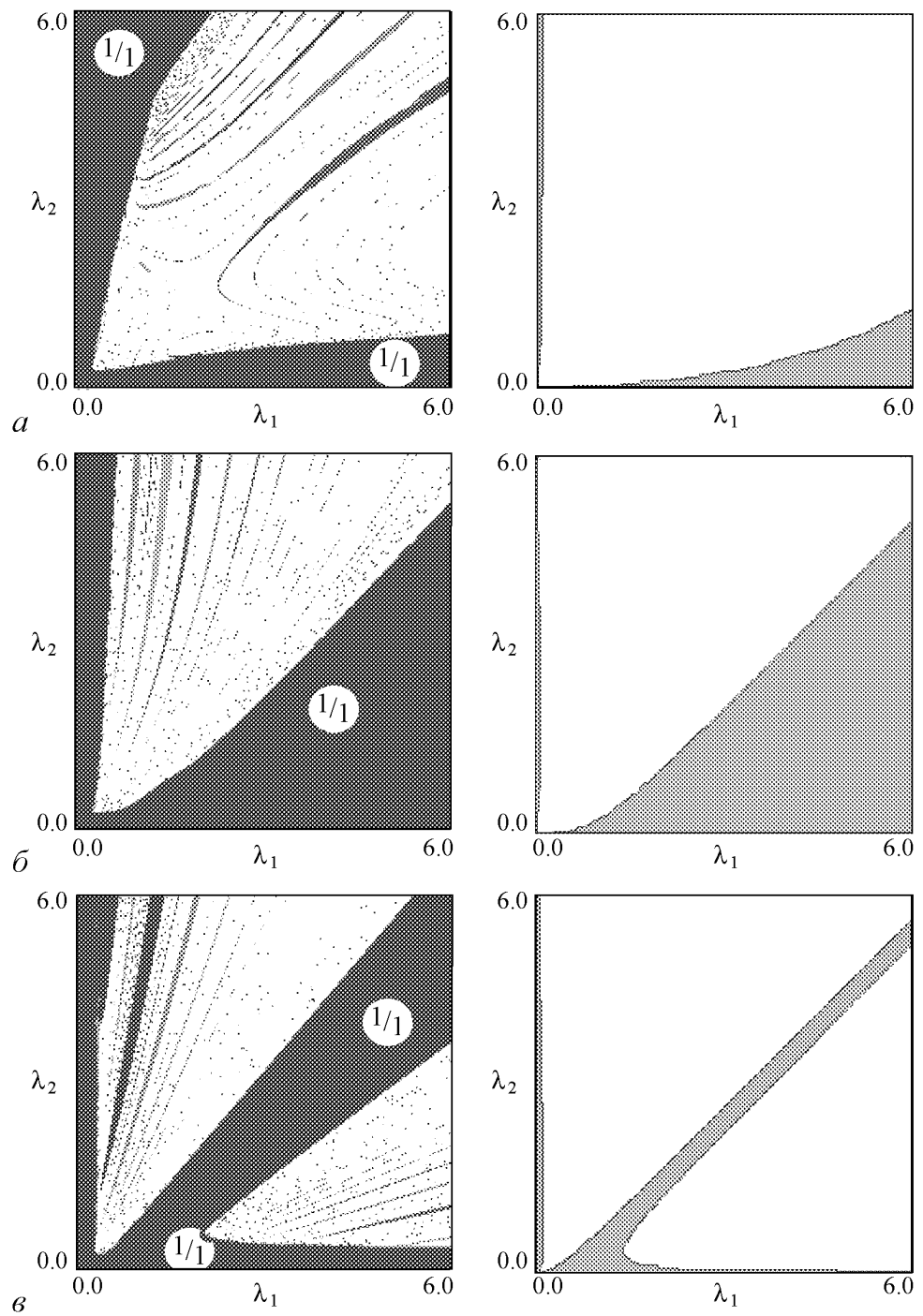


Рис. 5. Карты динамических режимов системы при $\delta = 1.5$ для значений параметров $\beta = 0.1, \mu = 0.3$ (a); $\beta = 0.3, \mu = 0.3$ (б); $\beta = 1, \mu = 0.3$ (в) и соответствующие им языки синхронизации 1/1, построенные в ходе аналитического анализа, границы которых задаются соотношением (13)

конфигурации основного языка синхронизации в разделе 1 вблизи точки бифуркации Андронова – Хопфа в связанных осцилляторах Ван дер Поля – Дуффинга. Но в левой колонке, в отличие от правой, присутствует большое число очень тонких языков синхронизации других периодов.

3. Влияние фазовой нелинейности на динамику дифференциальной системы

На плоскости расстройки собственных частот и величины коэффициента связи увеличение параметров нелинейности приводит к некоторому изменению формы языков синхронизации и их смещению вдоль оси расстройки частот [4]. При этом языки Арнольда сохраняют классическую форму «углов», сужающихся либо к линии нулевой связи, либо к границе основного языка синхронизации типа 1/1 (также см. [4]). Однако, если обратиться теперь к плоскости управляющих параметров (λ_1, λ_2) , то можно наблюдать существенное изменение формы языков синхронизации уже при незначительном увеличении параметра фазовой нелинейности β .

На рис. 6 представлены карты динамических режимов системы диссипативно связанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга на плоскости управляющих па-

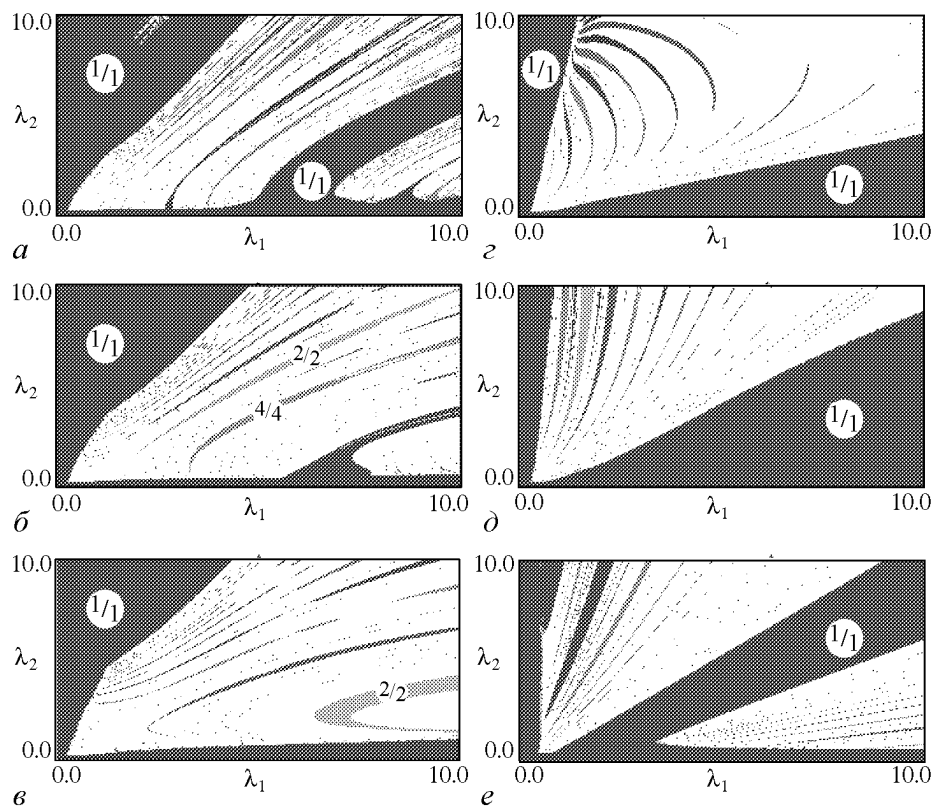


Рис. 6. Карты динамических режимов на плоскости параметров (λ_1, λ_2) при $\mu = 0.3, \delta = 1.5$ и следующих значениях β : 0 (a), 0.05 (б), 0.1 (в), 0.2 (г), 0.3 (д), 1.0 (е)

раметров системы для различных значений величины коэффициента нелинейности β , изменяющегося от 0 до 1. Хорошо видно, что структура языков очень чувствительна к изменению β . Особенно сильно видоизменяются языки кратной синхронизации $2/1$, $1/2$, $3/1$, $1/3$ и т.д. Основные языки синхронизации типа $1/1$ также трансформируются. Образуется область синхронизации типа $1/1$, расположенная вдоль диагонали, где параметры λ_1 и λ_2 близки по значению.

На рис. 6 карты динамических режимов были построены при положительном значении расстройки собственных частот осцилляторов δ . Карты режимов при отрицательной расстройке (она может изменяться в интервале $[-1, 0]$) на рис. 7 устроены несимметрично относительно диагонали и в большей степени чувствительны к увеличению параметра нелинейности. При значении коэффициента $\beta = 0.04$ вся структура языков синхронизации разрушается.

До данного момента мы рассматривали осцилляторы, в которых величины коэффициента фазовой нелинейности β были равны. Интересно также рассмотреть случай «несимметричной» системы, в которой параметры фазовой нелинейности

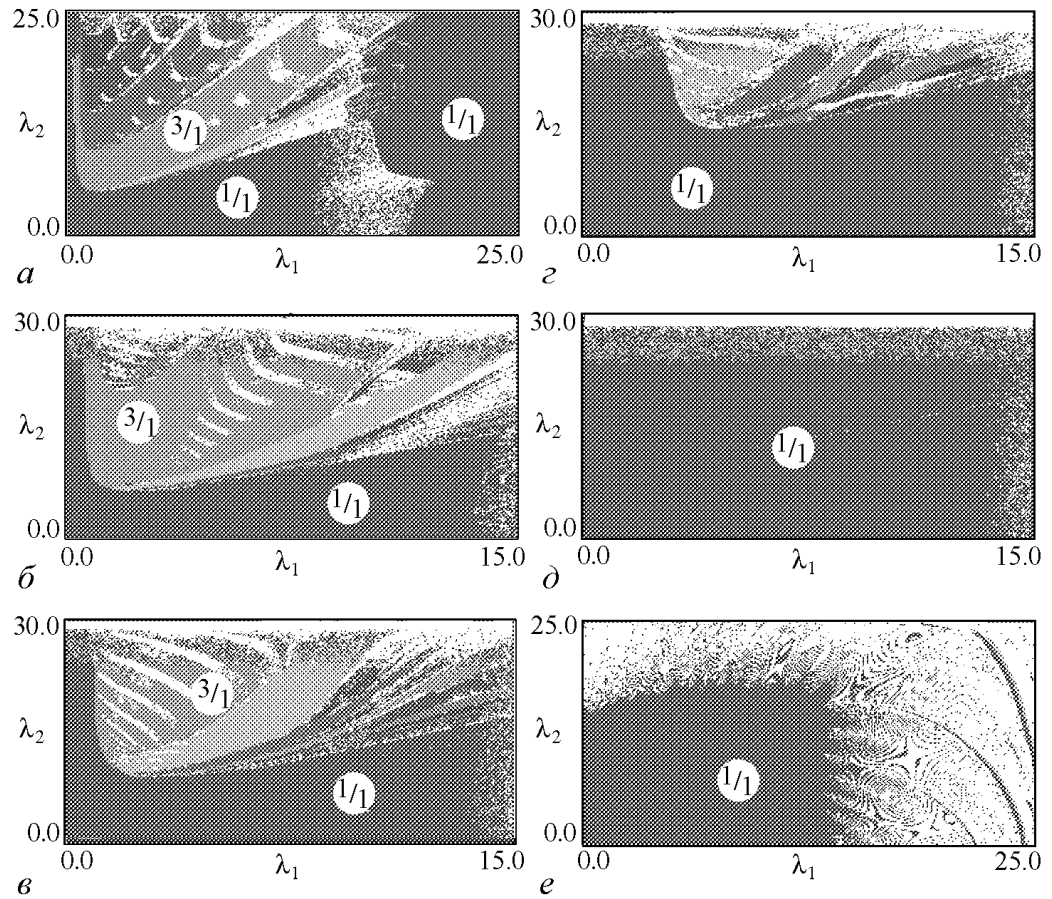


Рис. 7. Карты динамических режимов на плоскости параметров (λ_1, λ_2) при $\mu = 1$, $\delta = -0.5$ и следующих значениях β : 0 (а), 0.01 (б), 0.02 (в), 0.03 (г), 0.04 (д), 0.1 (е)

будут различны. Обозначим их β_1 и β_2 для первого и второго осциллятора, соответственно. Далее рассмотрим следующие два случая:

- нелинейность первого осциллятора β_1 существенно больше нуля, а нелинейность второго равна нулю ($\beta_2 = 0$ либо мало);
- нелинейность второго осциллятора β_2 велика при нулевой нелинейности первого ($\beta_1 = 0$ либо мало).

Если добавить нелинейность только в какой-либо один осциллятор, можно наблюдать движение точки на оси расстроек собственных частот, к которой сходится вершина основного языка синхронизации $1/1$. Если нелинейность добавляется в первый осциллятор, то указанная точка движется в сторону увеличения величины расстройки, то есть вправо. Если же неизохронен только второй осциллятор, то наоборот – влево. Ранее, при симметричной нелинейности, эти два процесса компенсировали друг друга и положение вершины языка Арнольда типа $1/1$ на оси нулевой связи оставалось неизменным независимо от величины нелинейности.

На рис. 8 представлены карты динамических режимов для случая присутствия нелинейности только в первом осцилляторе при единичных значениях управляющих параметров $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.0$, для значений параметра нелинейности $\beta_1 = 1.0, 2.0$ и 5.0 . Увеличение значения параметра β_1 приводит к «перекрыванию» основного языка синхронизации типа $1/1$ и структуры языков Арнольда кратной синхронизации. Для случая $\beta_1 = 5.0$ приведены две карты, построенные при различных значениях начальных условий и демонстрирующие наличие областей перекрытия, в которых одновременно сосуществуют несколько различных динамических режимов для одного набора значений параметров, но реализующихся при различных начальных условиях.

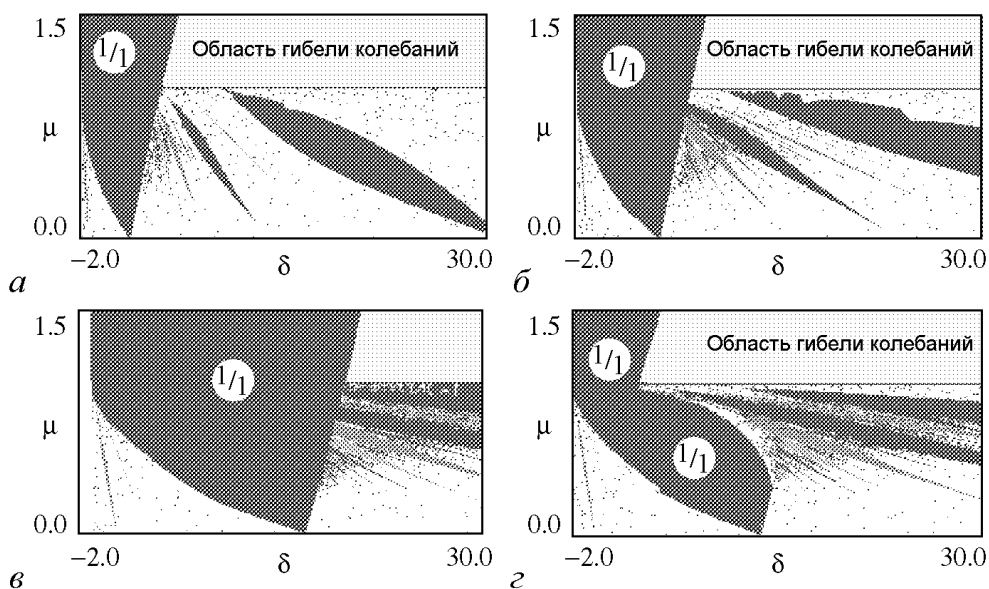


Рис. 8. Карты динамических режимов, построенные для значений параметров $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.0$, $\beta_2 = 0$ и следующих значений β_1 : 1.0 (а); 2.0 (б); 5.0 (в, з)

На рис. 9 изображена карта динамических режимов, на которой можно видеть язык синхронизации $1/1$ сложной формы, которая объясняется исключительно выбором начальных условий при построении карты. Это свидетельствует о том, что бассейны притяжения в области сосуществования различных динамических режимов устроены достаточно сложным образом.

Увеличение параметра нелинейности в первом осцилляторе сопровождается изменением формы и усложнением устройства языков синхронизации, так как

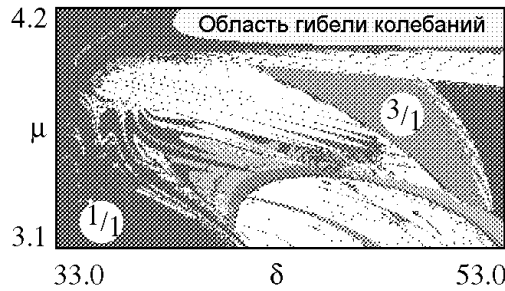


Рис. 9. Карты динамических режимов, построенные для значений параметров $\lambda_1 = \lambda_2 = 4.0$, $\beta_1 = 2.0$, $\beta_2 = 0$

в области верхней границы языков образуются структуры crossroad-area. Это говорит о сложной динамике осцилляторов в области пространства параметров.

Если колебания осцилляторов «сделать» релаксационными, то есть увеличить значения управляющих параметров λ_1 и λ_2 , то языки синхронизации также меняют форму. Они расширяются, формируя более широкие области динамического хаоса и crossroad-area (рис. 10).

На рис. 10, б изображена вырожденная структура crossroad-area, у которой «хвосты» пересекают друг друга, образуя область, состоящую из колец, соответствующих различным режимам синхронизации. При движении в направлении центра этой структуры происходит каскад бифуркаций удвоения периода и переход к хаосу.

Специфическая картина бифуркаций с достаточно широкими языками синхронизации $1/1$ и $3/1$ образуется также при отрицательном значении параметра связи μ . Это проиллюстрировано на картах динамических режимов рис. 11.

Обратимся теперь ко второму случаю, когда нелинейность присутствует только во втором осцилляторе. Расстройка частот δ входит только во второе уравнение системы (3). В отсутствие нелинейности при $\delta < -1.0$ второй осциллятор перестает быть автоколебательной системой, поскольку при $\delta = -1.0$ его собственная частота становится равной нулю. На картах динамических режимов на плоскости парамет-

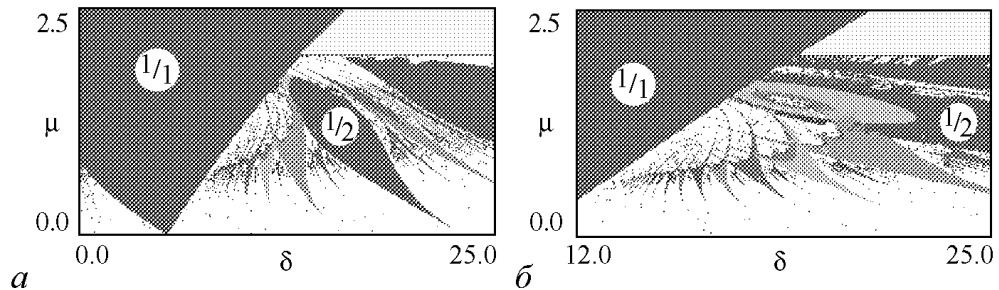


Рис. 10. Карты динамических режимов, построенные для значений параметров $\lambda_1 = \lambda_2 = 2.0$, $\beta_2 = 0$, $\beta_1 = 1.0$ (a); $\beta_1 = 2.0$ (b)

ров (δ, μ) в линейном случае левее линии $\delta = -1.0$ нет языков синхронизации. Добавление нелинейности во второй осциллятор изменяет форму его потенциала, что приводит к появлению собственных частот второго осциллятора даже при сильно отрицательном значении расстройки. Причем это осуществляется при любом сколь угодно малом значении β_2 , если $\beta_2 > 0$. Изменение вида потенциала при добавлении нелинейности проиллюстрировано на рис. 12.

На картах динамических режимов (рис. 13), построенных на плоскости (δ, μ) , при добавлении нелинейности во второй осциллятор происходит расширение основного языка синхронизации типа $1/1$ в область отрицательных расстроек собственных частот осцилляторов. Показана также область «активной» связи осцилляторов ($\mu < 0$). Видно, что сформирована сложная картина динамики, где присутствуют области crossroad-area, а также пересечения языков синхронизации. Пересечение языков синхронизации говорит о том, что при активной связи возможна мультистабильность в поведении системы.

Поскольку система связанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга проявляет высокую чувствительность к величине нелинейности, включенной в оба осциллятора, следует ожидать сильный отклик и на несимметрию нелинейности. Действительно, добавление нелинейности только в один (второй) осциллятор позволяет наблюдать совершенно иную картину бифуркаций на плоскости параметров (λ_1, λ_2) . Образуется периодическая структура, состоящая из полос синхронизации $1/1$ и областей квазипериодической динамики, внутри которых расположено множество очень тонких языков старших периодов (рис. 14). При увеличении параметра связи полосы синхронизации $1/1$ расширяются и начинают сливаться друг с другом.

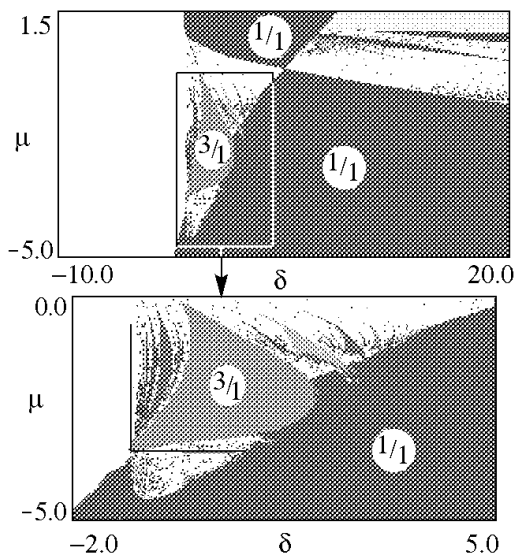


Рис. 11. Карта динамических режимов и ее увеличенный фрагмент, построенные для значений параметров $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.0$, $\beta_1 = 2.0$, $\beta_2 = 0$

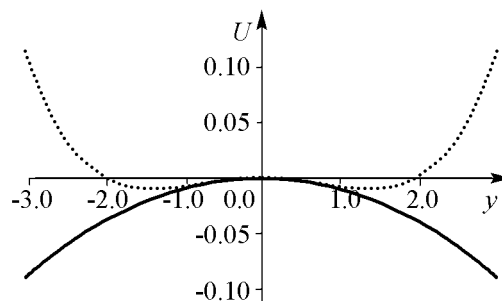


Рис. 12. Вид потенциала второго осциллятора при $\delta = 0.02$ при наличии нелинейности и без нее

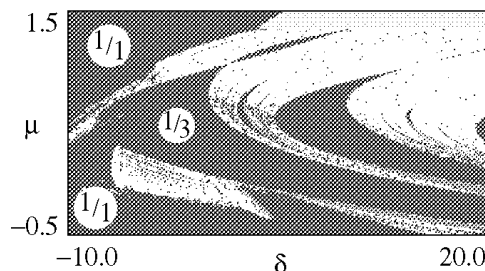


Рис. 13. Карта динамических режимов, построенная для значений параметров $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1.0$

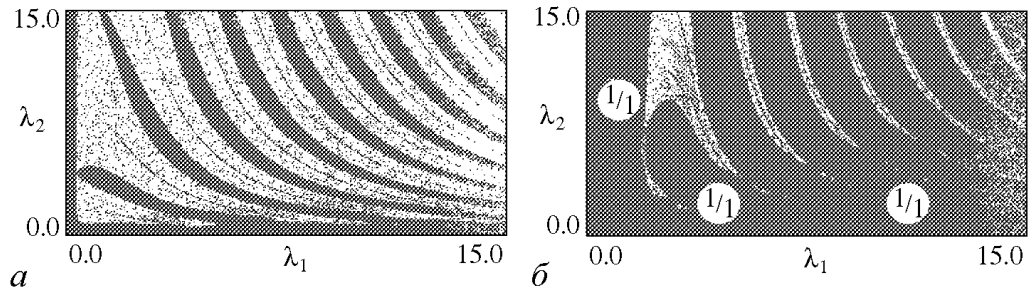


Рис. 14. Карты динамических режимов на плоскости параметров (λ_1, λ_2) для случая несимметричной нелинейности при $\beta_1 = 0, \beta_2 = 1.0, \delta = -0.5; \mu = 0.3$ (а), $\mu = 1.0$ (б)

Заключение

Система связанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга дает хороший пример связанных систем с бифуркацией Андронова – Хопфа, возможной в изолированных подсистемах. Ее изучение на плоскости управляющих параметров подсистем представляется существенным для описания картины динамических режимов. Приближенное аналитическое исследование в рамках метода медленно меняющихся амплитуд, а затем и численное исследование исходной дифференциальной системы показали, что языки синхронизации на плоскости управляющих параметров имеют своеобразную форму. Неидентичность осцилляторов как по величине частотной расстройки, так и по величине фазовой нелинейности оказывает существенное влияние на вид и устройство языков синхронизации.

Работа поддержана грантом РФФИ № 03-02-16074 и Американского фонда гражданских исследований (REC 006).

Библиографический список

1. Пиковский А., Розенблюм М., Куртц Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
2. Aronson D.G., Ermentrout G.B., Kopell N. Amplitude Response of Coupled Oscillators // Physica D. 1990. Vol. 41. P. 403.
3. Кузнецов С.П. Динамический хаос. Сер. Современная теория колебаний и волн. М.: Изд-во Физматлит, 2001. 296 с.
4. Кузнецов А.П., Паксютов В.И. О динамике двух связанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга с диссипативной связью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т. 11, № 6.
5. Storti D.W., Rand R.H. Dynamics of two strongly coupled Van der Pol oscillators // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1982. Vol. 17, № 3, 143-152.
6. Chakraborty T., Rand R.H. The transition from phase locking to drift in a system of two weakly coupled van der Pol oscillators // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1988. Vol. 23, № 5/6, 369-376.
7. Poliashenko M., McKay S.R., Smith C.W. Chaos and nonisochronism in weakly coupled nonlinear oscillators // Phys. Rev. A. 1991. Vol. 44. P. 3452.
8. Poliashenko M., McKay S.R., Smith C.W. Hysteresis of synchronous – asynchronous regimes in a system of two coupled oscillators // Phys. Rev. A. 1991. Vol. 43. P. 5638.

9. *Pastor I., Perez-Garcia V.M., Encinas-Sanz F., Guerra J.M.* Ordered and chaotic behavior of two coupled van der Pol oscillators // *Phys. Rev. E.* 1993. Vol. 48. P.171.
10. *Camacho E., Rand R.H., Howland H.* Dynamics of two van der Pol oscillators coupled via a bath // *Int. J. of Solids and Structures.* 2004. Vol. 41. P. 2133-2143.

Саратовский филиал ИРЭ РАН

Поступила в редакцию 14.03.2005

Саратовский государственный университет

После доработки

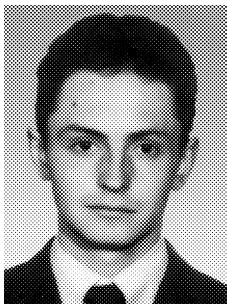
12.05.2005

FEATURES OF THE PARAMETER PLANE OF TWO NONIDENTICAL COUPLED VAN DER POL – DUFFING OSCILLATORS

A.P. Kuznetsov, V.I. Paksyutov

The system of two nonidentical dissipative coupled Van der Pol – Duffing oscillators is considered. A possibility of Adler equation application to describe the synchronization areas is shown due to transition to the closed equations. There is a nontrivial form of the main synchronization tongue on the plane of the control parameters. The view of synchronization tongues system of the original differential model and the influence of the phase nonlinearity on its configuration are discussed. The case of the nonsymmetrical nonlinearity in oscillators is also considered.

Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СО ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и заочной школы факультета нелинейных процессов. Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и лицея прикладных наук СГУ, шести учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002). Член редколлегии журнала «Империя математики». E-mail: alkuz@sgu.ru; www.sgtnd.tserv.ru



Паксютов Владимир Игоревич – родился в Саратове (1982). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского в 2004 году. Аспирант кафедры динамических систем факультета нелинейных процессов СГУ. Занимается научной работой по направлению: динамические режимы и синхронизация в автоколебательных системах различной природы. С 2000 года постоянный участник ежегодной научной школы-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых», принял участие в нескольких международных конференциях. Имеет 7 научных публикаций.



ОБРАТНЫЕ БИФУРКАЦИИ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ РЕССЛЕРА

Л.Б. Ряшко, П.В. Стихин

На примере нелинейной модели Ресслера рассматривается эффект воздействия случайных возмущений на предельные циклы динамической системы. После того как интенсивность шума становится достаточно большой, наблюдается размытие детерминированного цикла. В данной работе исследуются обратные бифуркации уменьшения кратности стохастических циклов при росте уровня случайных возмущений. Представлен анализ эмпирических плотностей распределения точек пересечения пучка случайных траекторий с секущими плоскостями детерминированной орбиты. Теоретический подход к анализу обратных бифуркаций использует аппарат функций чувствительности. Строится достаточно простая аппроксимация эмпирической плотности распределения. Находятся бифуркационные значения для параметра интенсивности случайных возмущений.

Введение

Присутствие случайных возмущений в динамических системах и связанные с этим многочисленные эффекты рассматривались в большом количестве работ [1-4]. Обзор некоторых последних результатов можно найти в [5, 6].

Среди эффектов воздействия шума на поведение динамических систем можно выделить две группы. К первой группе относятся явления сдвига бифуркационных линий в пространстве параметров за счет шума [7-9]. Другая группа явлений связана с понятием индуцированных шумом переходов (noise-induced transitions) [10, 11]. Как описывается в [11], внешние шумы, несмотря на свое, казалось бы, дезорганизующее действие, способны индуцировать гораздо более богатое разнообразие режимов в сравнении с детерминированными системами. Впервые явление индуцированного шумом перехода при рассмотрении флуктуаций в автогенераторе описано в работе Р.Л. Стратоновича и П.С. Ланды [12]. Из последующих работ, посвященных данной тематике, можно отметить [11, 13-16].

Для динамических систем, имеющих устойчивые предельные циклы, воздействие случайных возмущений приводит к тому, что траектории, стартующие из точек орбиты цикла, начинают отклоняться от детерминированной орбиты, формируя вокруг нее некоторый пучок.

Размытие каскада бифуркаций удвоения периода и переход к хаосу под воздействием шума рассматривалось для одномерных отображений в [8, 9, 17, 18]. Обзор можно найти в [3]. Размытие предельных циклов под воздействием случайных возмущений и установление хаотического режима колебаний для осцилляторов Чуа, Лоренца и Ресслера изучалось в [19, 20].

В данной работе рассматривается система Ресслера [21] в диапазоне каскада бифуркаций удвоения периода. Изучается поведение пучков случайных траекторий данной системы при увеличении интенсивности случайных возмущений. При помощи прямого численного моделирования показано, что с увеличением уровня шума части пучка случайных траекторий на соседних участках орбиты сначала начинают пересекаться, а затем, при некоторой так называемой критической интенсивности случайных возмущений, полностью сливаются. При соответствующих критических значениях интенсивности возмущений стохастический 2-цикл превращается в 1-цикл, стохастический 4-цикл – в 2-цикл и т.д. Такое превращение стохастического 2^k -цикла в 2^{k-1} -цикл, связанное с увеличением интенсивности шума, в данной работе будем называть обратной стохастической бифуркацией.

Феноменологический и динамический подходы к формализации интуитивного понятия стохастических бифуркаций обсуждались в [5] и [22]. Стохастические бифуркации, возникающие при определенных уровнях внешних возмущений, подробно рассмотрены для одномерного случая в [11, 23-25] и для динамических систем на плоскости в [22, 25-27]. В работах [22, 26] обсуждается влияние шума на бифуркацию Хопфа. В [22] изучается изменение поведения стационарной плотности распределения под воздействием случайных возмущений.

В данной статье механизм обратных бифуркаций для стохастических (3-мерных) аттракторов Ресслера изучается при помощи функций плотности распределения точек пересечения пучка с опорными плоскостями. Излагаются эмпирический и теоретический подходы. В теоретическом подходе используется аппарат функций чувствительности [28-30].

В пунктах 1.1 и 1.2 представлены циклы детерминированной и стохастической систем Ресслера в зоне удвоения периода. Подробный анализ можно найти в [31].

В пункте 1.3 статьи дается краткое описание функций стохастической чувствительности для общей нелинейной динамической системы со случайными возмущениями, в основе которого лежит метод квазипотенциала. Функция, называемая квазипотенциалом, появилась в связи с решением задачи Колмогорова о выходе случайной траектории из окрестности устойчивой точки покоя [32-34]. Функция чувствительности, задавая аппроксимацию квазипотенциала [35] в случае малых шумов и малых отклонений от невозмущенной орбиты, позволяет описать разброс случайных траекторий в пучке [30-31].

В пункте 2.1 обратные стохастические бифуркации системы Ресслера исследуются при помощи прямого численного моделирования. Рассматриваются эмпирические плотности распределения случайных траекторий вокруг детерминированного цикла для разных значений параметра и разных участков орбиты. Наблюдается сли-

яние всплесков плотностей распределения в один при росте интенсивности возмущений. Обсуждается задача отыскания критических значений интенсивности шума, отвечающих обратным бифуркациям.

В пункте 2.2 излагается теоретический подход к анализу стохастических обратных бифуркаций. Стохастические функции чувствительности позволяют достаточно просто аппроксимировать плотности распределения пучка в сечениях аттрактора модели Ресслера, исследовать обратные стохастические бифуркации, находить соответствующие бифуркационные значения для параметра интенсивности возмущений.

1. Система Ресслера и аппарат функций чувствительности

1.1. Детерминированная система Ресслера. Рассмотрим детерминированную систему Ресслера [21]

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z), \\ \dot{y} = x + \alpha y, \\ \dot{z} = \alpha + z(x - \mu), \end{cases} \quad \alpha = 0.2. \quad (1)$$

Для этой системы по параметру μ можно выделить зоны структурной устойчивости с постоянной кратностью циклов – интервалы I_0, I_1, \dots . На интервале I_k наблюдается 2^k -цикл. Для (1) имеем $I_0 = (0.400; 2.830)$, $I_1 = (2.830; 3.836)$, $I_2 = (3.836; 4.123)$, $I_3 = (4.123; 4.186)$ и т.д. На интервале $I_0 \cup I_1 \cup \dots$ система (1) демонстрирует каскад бифуркаций удвоения периода при переходе к хаосу.

В данной работе рассматриваются предельные циклы системы Ресслера на интервале удвоения периода $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$.

1.2. Стохастическая система Ресслера. Наличие аддитивных случайных возмущений в детерминированной системе (1) приводит к рассмотрению стохастической системы Ресслера

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z) + \varepsilon \dot{w}_1, \\ \dot{y} = x + \alpha y + \varepsilon \dot{w}_2, \\ \dot{z} = \alpha + z(x - \mu) + \varepsilon \dot{w}_3, \end{cases} \quad \alpha = 0.2, \quad (2)$$

где $w_i(t)$ – независимые стандартные винеровские процессы ($i = 1, 2, 3$), а ε – малый параметр (интенсивность случайных возмущений).

Траектории, стартующие из точек замкнутой детерминированной орбиты (цикла Γ), отклоняясь под воздействием случайных помех, формируют вокруг Γ пучок случайных траекторий. По ширине пучка можно судить как о степени устойчивости отдельных участков орбиты, так и о чувствительности всего цикла Γ в целом к случайным возмущениям. На рис. 1 для $\mu = 3$ изображен аттрактор (2-цикл) при нулевом шуме, а также при «слабом» и «сильном» шумах. Соответствующий аттрактор для $\mu = 4$ при нескольких значениях уровня помех представлен на рис. 2.

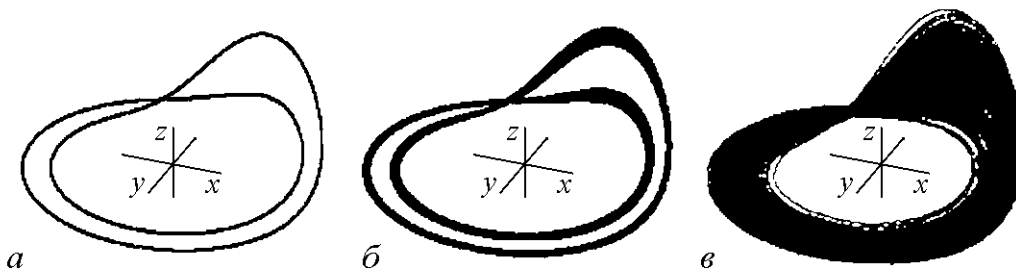


Рис. 1. Стохастические бифуркации 2-цикла ($\mu = 3$) системы Ресслера при различных значениях ε : $a - 0.0$, детерминированный цикл; $б - 0.005$; $в - 0.05$

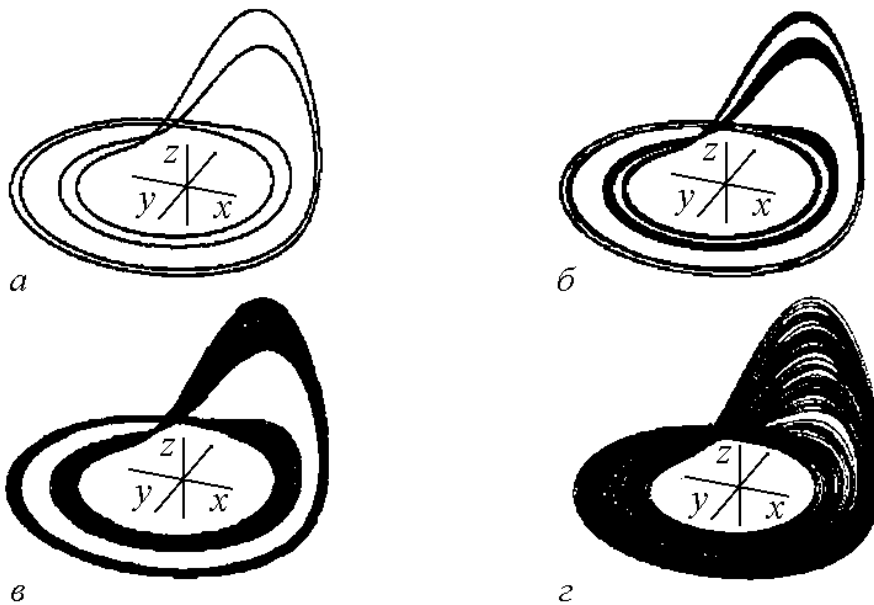


Рис. 2. Стохастические бифуркации 4-цикла ($\mu = 4$) системы Ресслера при различных значениях ε : $a - 0.0$, детерминированный цикл; $б - 0.005$; $в - 0.015$; $г - 0.05$

Для детального анализа стохастической чувствительности предельных циклов может быть использован подход, в основе которого лежат метод квазипотенциала и стохастические функции чувствительности [28-30].

1.3. Метод квазипотенциала и функции чувствительности. Рассмотрим общую систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad (3)$$

где x – n -мерный вектор, $f(x)$ – вектор-функция. Предполагается, что система (3) имеет T -периодическое решение $x = \xi(t)$ (цикл Γ). С системой (3) связана система стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon \sigma(x) \dot{w}, \quad (4)$$

где $w(t)$ – n -мерный стандартный винеровский процесс; $\sigma(x)$ – достаточно гладкая $n \times n$ – функция, характеризующая распределение случайных возмущений по координатам; ε – интенсивность случайных возмущений.

В анализе стохастической чувствительности предельных циклов системы (4) используется метод квазипотенциала. В случае малых шумов асимптотика стационарной плотности распределения $p(x, \varepsilon)$ случайных траекторий стохастической системы (4) вокруг цикла Γ выражается в виде

$$p(x, \varepsilon) \approx K \cdot e^{-\frac{q(x)}{\varepsilon^2}},$$

где функция $q(x)$ называется квазипотенциалом

$$q(x) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln p(x, \varepsilon).$$

Квазипотенциал связан с некоторой вариационной задачей минимизации функционала действия и удовлетворяет уравнению Гамильтона – Якоби [32], точное решение которого является весьма сложной задачей даже при $n = 2$.

При условии, что шумы и отклонения траекторий от цикла Γ малы, асимптотика стационарной плотности распределения может быть записана [28] в форме нормального распределения

$$p(x, \varepsilon) \approx K \cdot e^{-\frac{(\Delta(x), \Phi^+(\gamma(x)) \Delta(x))}{2\varepsilon^2}}, \quad (5)$$

где $\Delta(x) = x - \gamma(x)$ – отклонение точки x от цикла Γ , $\gamma(x)$ – ближайшая к x точка цикла Γ , а символ $^+$ означает псевдообращение.

Здесь ковариационная матрица $\varepsilon^2 \Phi(\gamma)$ характеризует разброс точек пересечения пучка случайных траекторий системы (4) с гиперплоскостью, ортогональной Γ и проходящей через точку $\gamma \in \Gamma$. В силу вырожденности матрицы $\Phi(\gamma)$ одно из ее собственных чисел равно нулю, $\lambda_1(\gamma) \equiv 0$. Остальные собственные числа $\lambda_j(\gamma)$, $j = 2, \dots, n$, характеризуют реакцию системы (4) вблизи цикла на случайные воздействия и позволяют описать неравномерность ширины пучка случайных траекторий по направлениям соответствующих собственных векторов [30]. Будем называть функции $\lambda_j(\gamma)$, $j = 2, \dots, n$, стохастическими функциями чувствительности [28-30].

Собственные числа и соответствующие им собственные векторы матрицы Φ позволяют построить в каждой точке цикла доверительную область – эллипс рассеивания. Эллипсы рассеивания наглядно иллюстрируют особенности стохастической чувствительности этих циклов не только по величине, но и по направлению, и дают отчетливое представление об изменении формы и пространственной ориентации пучка случайных траекторий вдоль орбиты цикла [31].

2. Обратные стохастические бифуркации

Присутствие случайных возмущений в динамической системе приводит к тому, что фазовые траектории покидают детерминированную орбиту предельного цикла Γ , формируя вокруг него некоторый пучок. С увеличением интенсивности случайных возмущений происходит рост ширины пучка – траектории начинают сильнее

отклоняться от Γ . При дальнейшем увеличении интенсивности возмущений наблюдаются переходы траектории между соседними участками орбиты (отклонения траектории становятся сравнимы с расстоянием между соседними петлями цикла Γ). Части пучка случайных траекторий, соответствующие соседним участкам детерминированной орбиты, начинают пересекаться. При дальнейшем росте интенсивности возмущений, начиная с некоторого значения, происходит полное слияние частей пучка соседних участков. Поэтому кратность стохастического аттрактора при данном уровне помех становится в 2 раза меньше. Происходит качественное изменение фазового портрета системы.

Проиллюстрируем описанный сценарий поведения пучка случайных траекторий для системы Ресслера (2). При $\mu = 3$ (см. рис. 1) невозмущенная система Ресслера (1) имеет детерминированный устойчивый 2-цикл (a). При добавлении малого шума ($\varepsilon = 0.005$) вокруг орбиты этого детерминированного 2-цикла формируется пучок случайных траекторий – стохастический 2-цикл (b). Воздействие сильных шумов ($\varepsilon = 0.05$) приводит к тому, что возмущенный 2-цикл выглядит как стохастический 1-цикл (c).

Для $\mu = 4$ (см. рис. 2) исходным является уже детерминированный 4-цикл (a). Воздействие шума приводит к появлению пучка случайных траекторий вокруг детерминированной орбиты (b). Увеличение интенсивности шума приводит к превращению стохастического 4-цикла (при $\varepsilon = 0.015$) в стохастический 2-цикл (c) и далее (при $\varepsilon = 0.05$) – в стохастический 1-цикл (d).

Такое уменьшение кратности стохастического цикла при увеличении интенсивности шума в данной работе будем называть обратной стохастической бифуркацией.

Значения интенсивности помех, при которых для 2^k -цикла ($k \geq 1$) системы Ресслера при значении параметра $\mu \in I_k$ происходят обратные бифуркации, будем называть критическими значениями интенсивности шума и обозначать следующим образом: $\varepsilon_{k-1}^*(\mu)$ – уровень шума при первой обратной бифуркации перехода 2^k -цикла в 2^{k-1} -цикл, $\varepsilon_{k-2}^*(\mu)$ – уровень шума при второй обратной бифуркации перехода 2^{k-1} -цикла в 2^{k-2} -цикл, \dots , $\varepsilon_0^*(\mu)$ – уровень шума при k -й обратной бифуркации образования 1-цикла из 2-цикла.

В рамках данной работы для 2^k -циклов системы Ресслера на интервале $I_1 \cup I_2 \cup I_3$ изучаются переходы 2-цикла в 1-цикл, 4-цикла в 2-цикл и 8-цикла в 4-цикл. Рассматриваемые переходы соответствуют только первой обратной бифуркации уменьшения кратности цикла в 2 раза. Определяются критические значения интенсивности $\varepsilon_{k-1}^*(\mu)$. Анализ последовательности критических значений $\varepsilon_{k-1}^*(\mu)$, $\varepsilon_{k-2}^*(\mu)$, \dots , $\varepsilon_0^*(\mu)$ в цепочке последовательных обратных бифуркаций при фиксированном параметре μ для многооборотных стохастических циклов системы Ресслера является отдельной интересной темой для исследования и не рассматривается в данной статье.

В анализе обратных бифуркаций и определения критических значений интенсивности рассмотрим два подхода – эмпирический и теоретический.

2.1. Эмпирический анализ. Эмпирический анализ опирается на численное построение пучка случайных траекторий B системы (2). На детерминированной орбите цикла Γ выбираются опорные точки γ_i , $i = 1 \dots m$, для каждой из которых определяется точка $\hat{\gamma}_i$, являющаяся ближайшей к γ_i на соседнем участке орбиты. Прямая l_i проходит через точки γ_i и $\hat{\gamma}_i$ и лежит в секущей плоскости Π_i . В данном пункте рассматриваются плотности распределения проекций на l_i точек пересечения пучка B с плоскостями Π_i .

Эмпирический анализ проиллюстрируем для двух аттракторов системы Ресслера: 2-цикла ($\mu = 3$) и 4-цикла ($\mu = 4$).

Для параметра $\mu = 3$ рассмотрим на 2-цикле две опорные точки: $\gamma_1(-2.13; -4.60; 0.03)$ и $\gamma_2(3.07; 2.61; 2.11)$.

Для точки γ_1 ближайшей на соседнем участке орбиты является точка $\hat{\gamma}_1(-1.86; -3.59; 0.03)$. Прямая l_1 проходит через γ_1 , $\hat{\gamma}_1$. Построим секущую плоскость Π_1 : $9.67x - 2.53y + 8.96z = 0$, содержащую прямую l_1 (рис. 3, а). В плоскости Π_1 введем систему координат (рис. 4, а) с началом в точке γ_1 и осями с координатами u и v , задаваемыми единичными векторами $(0.25; 0.96; 0) \parallel l_1$, и $(0; 0; 1) \perp l_1$, соответственно.

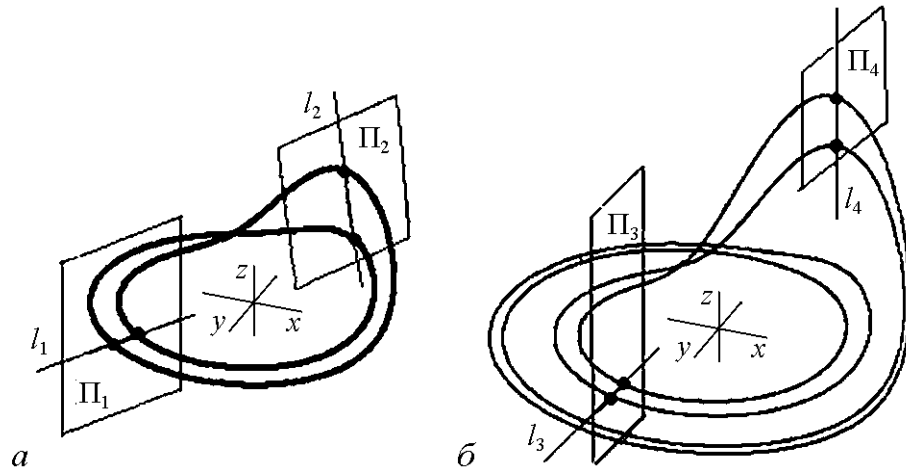


Рис. 3. Секущие плоскости для 2-цикла при $\mu = 3$ (а) и 4-цикла при $\mu = 4$ (б) модели Ресслера

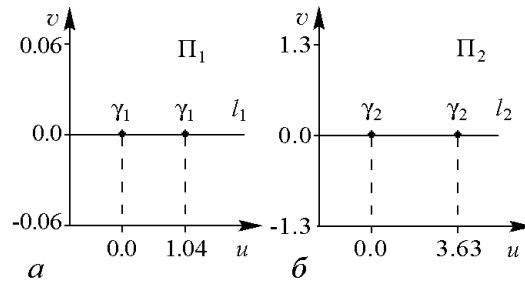


Рис. 4. Сечения Π_1 (а) и Π_2 (б) для 2-цикла при $\mu = 3$

Для точки $\gamma_2(3.08; 2.61; 2.11)$ ближайшей на соседнем участке орбиты является точка $\hat{\gamma}_2(3.00; 2.28; 5.73)$. Прямая l_2 проходит через $\gamma_2, \hat{\gamma}_2$. Секущая плоскость $\Pi_2: 9.75x - 2.21yz - 24.25 = 0$ содержит прямую l_2 (см. рис. 3, *а*). В плоскости Π_2 введем систему координат (рис. 4, *б*) с началом в точке γ_2 и осями с координатами u и v , задаваемыми единичными векторами $(-0.02; -0.09; 0.99) \parallel l_2$, и $(0.22; 0.97; 0.09) \perp l_2$, соответственно.

Рассмотрим пересечения пучка B с плоскостями Π_1 и Π_2 .

На рис. 5 для $\mu = 3$ приведен вид сечения пучка B плоскостью Π_1 при разных значениях интенсивности случайных возмущений. На рис. 6 для точек пересечения пучка B с Π_1 представлены эмпирические плотности $p(u)$ распределения (на прямой l_1). Как видим, для малых шумов (*а*) в точках γ_1 и $\hat{\gamma}_1$ наблюдаются два четко выраженных отдельных всплеска. С увеличением интенсивности помех ε наблюдается их «наложение» друг на друга (*б*). При дальнейшем увеличении уровня помех и достижении интенсивностью шума некоторого критического значения наблюдается один четко выраженный «всплеск» (*в*).

Именно единственность данного «всплеска» (унимодальность) плотности распределения при данном значении шума позволяет считать стохастический аттрактор (возмущенный детерминированный 2-цикл при $\mu = 3$) стохастическим 1-циклом. С точки зрения плотности распределения в рассматриваемом сечении стохастический 2-цикл при данном значении уровня помехи неотличим от некоторого стохастического 1-цикла.

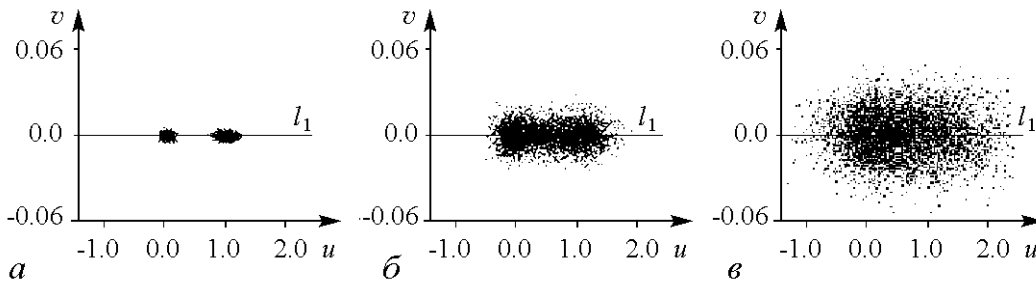


Рис. 5. Точки пучка случайных траекторий в сечении Π_1 . Для рис 5-6: $\mu = 3, \varepsilon = 0.005$ (*а*), 0.02 (*б*), 0.05 (*в*)

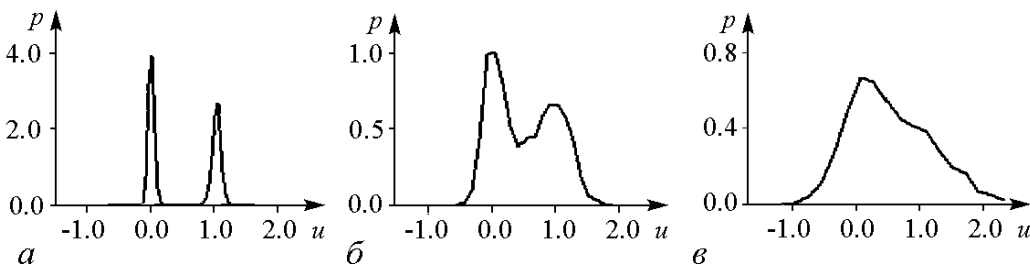


Рис. 6. Эмпирические плотности распределения в сечении Π_1

На рис. 7 и 8 для возмущенного 2-цикла при том же значении $\mu = 3$ представлены точки пересечения и плотности распределения (на прямой l_2) в плоскости Π_2 . Рассмотренные плотности распределения для плоскостей Π_1 и Π_2 стохастического аттрактора при увеличении шума демонстрируют схожее качественное поведение. Та же картина для плотностей распределения при $\mu = 3$ наблюдается для любого сечения Пуанкаре Π_i ($i = 1, \dots, m$).

Значение интенсивности шума, при котором график плотности распределения $p(u)$ демонстрирует переход от бимодальной к унимодальной форме, будем называть критическим значением шума для рассматриваемого участка цикла Γ .

Для точек $\gamma_3(-0.35; -5.01; 0.03)$ и $\gamma_4(4.20; 2.50; 8.33)$ орбиты 4-цикла ($\mu = 4$) рассмотрим две секущие плоскости $\Pi_3: 9.99x + 0.31y + 5.08 = 0$ и $\Pi_4: 9.88x + 1.50y - 45.29 = 0$, содержащие прямые l_3 и l_4 , соответственно (рис. 3, б). Здесь прямые l_3 и l_4 построены по аналогии с прямыми l_1 и l_2 для 2-цикла ($\mu = 3$).

На рис. 9 и 10 для $\mu = 4$ представлены эмпирические плотности распределения на прямых l_3 и l_4 для двух значений интенсивности случайных возмущений. Как видим, при $\varepsilon = 0.015$ плотность распределения в сечении стохастического 4-цикла имеет унимодальный вид. Это свидетельствует о произошедшей обратной бифуркации превращения стохастического 4-цикла в стохастический 2-цикл.

Для $\mu = 3$ критическое значение шума лежит в интервале $(0.02; 0.05)$. Для $\mu = 4$ критическое значение шума заключено в интервале $(0.005; 0.015)$. Точное определение точек обратной бифуркации в рамках эмпирического подхода являет-

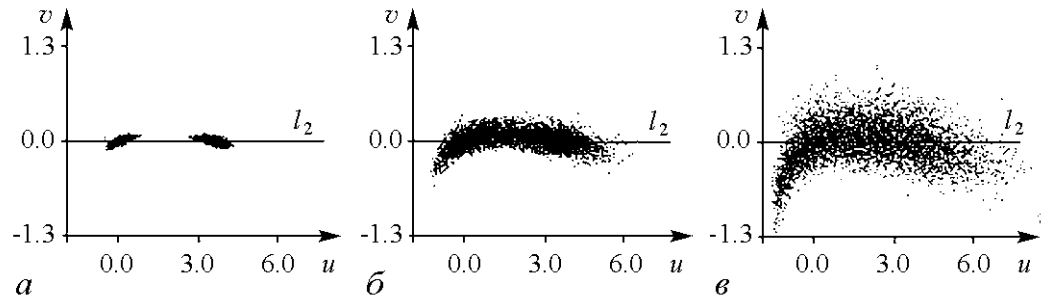


Рис. 7. Точки пучка случайных траекторий в сечении Π_2 . Для рис 7-8: $\mu = 3$, $\varepsilon = 0.005$ (а), 0.02 (б), 0.05 (в)

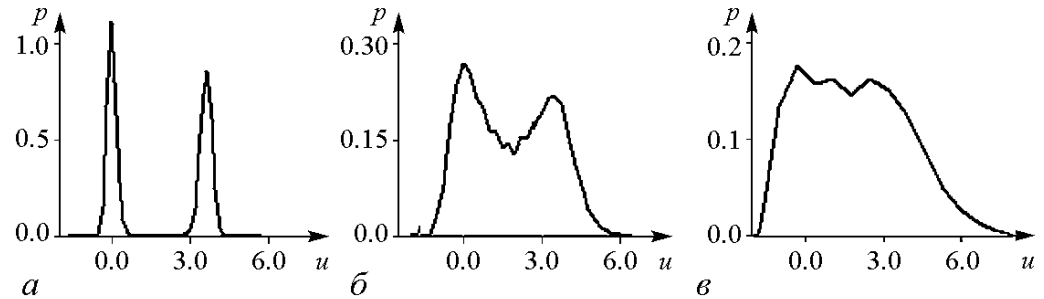


Рис. 8. Эмпирические плотности распределения в сечении Π_2

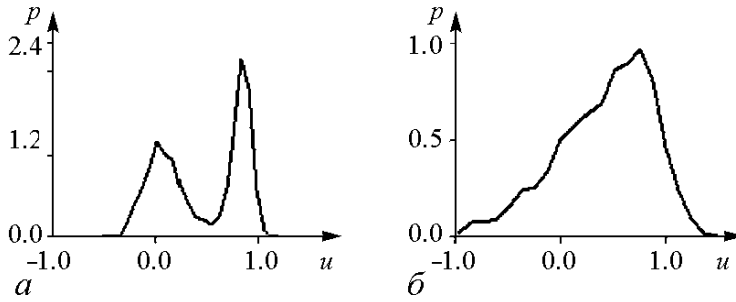


Рис. 9. Эмпирические плотности распределения в сечении Π_3 . Для рис. 9-10 $\mu = 4$, $\varepsilon = 0.005$ (а), 0.015 (б)

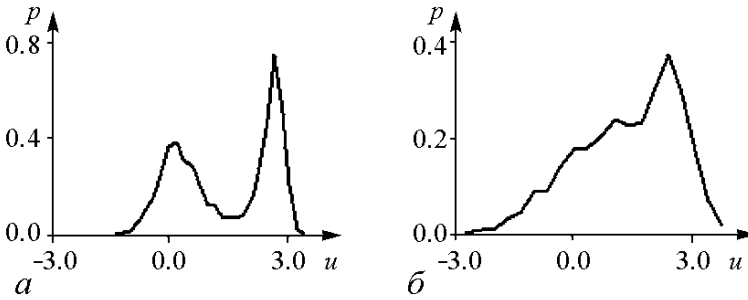


Рис. 10. Эмпирические плотности распределения в сечении Π_4

ся сложной задачей, связанной, в первую очередь, с численным построением пучка случайных траекторий. Эмпирический анализ является весьма затратной по вычислительной сложности процедурой. В следующем пункте рассматривается построение теоретических оценок плотностей распределения и определение критических значений шума с использованием аппарата функций чувствительности.

2.2. Аппроксимация плотности распределения. Рассмотрим детерминированный 2^k -цикл Γ ($k \geq 1$) системы Ресслера (1). На орбите Γ выберем опорную точку γ . Для γ можно указать ближайшую точку $\hat{\gamma}$ на соседнем участке (петле) орбиты. Обозначим через l прямую, проходящую через γ и $\hat{\gamma}$.

При асимптотически малых шумах точки пересечения пучка B с ортогональной плоскостью в малой окрестности точки γ имеют нормальное распределение (5). Рассмотрим точки пересечения пучка с секущей плоскостью Π , содержащей прямую l . Используя (5), найдем параметры распределения проекций этих точек на прямую l .

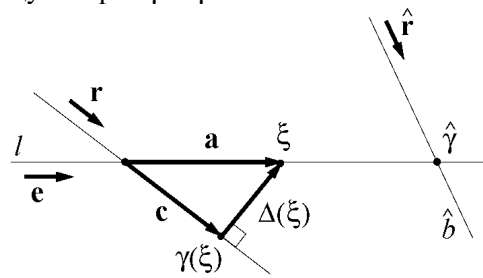


Рис. 11. Соседние участки орбиты цикла Γ

Прямая l задается функцией $\xi(u) = \gamma + ue$, где u - скалярная координата, а e - единичный направляющий вектор прямой l (рис. 11). В малой окрестности точки γ орбиту цикла Γ можно считать прямой b (с направляющим единичным вектором r). Пусть вектор $a = ue$.

Для вектора \mathbf{c} – проекции \mathbf{a} на прямую b – справедливо:

$$\mathbf{c} = (u\mathbf{e}, \mathbf{r})\mathbf{r} = u(\mathbf{e}, \mathbf{r})\mathbf{r} \quad (6)$$

Для отклонения $\Delta(\xi) = \xi - \gamma(\xi)$ точки $\xi = \xi(u)$ от $\gamma(\xi)$ – ближайшей к ξ точки цикла Γ – выполняется:

$$\Delta(\xi) = \mathbf{a} - \mathbf{c}.$$

С учетом (6) вектор $\Delta(\xi)$ записывается в виде

$$\Delta(\xi) = u[\mathbf{e} - (\mathbf{e}, \mathbf{r})\mathbf{r}] = u\mathbf{h}, \quad (7)$$

где $\mathbf{h} = \mathbf{e} - (\mathbf{e}, \mathbf{r})\mathbf{r}$.

В силу линеаризации орбиты Γ в рассматриваемой малой окрестности вектор \mathbf{h} не зависит от выбора точки ξ (то есть от выбора u), а определяется только расположением прямых l и b .

Для квадратичной формы в (5) с учетом (7) справедливо соотношение

$$(\Delta(\xi), \Phi^+(\gamma(\xi))\Delta(\xi)) = u^2(\mathbf{h}, \Phi^+(\gamma(\xi))\mathbf{h}), \quad (8)$$

где $\Phi(\gamma)$ – матрица, характеризующая разброс точек пересечения пучка B плоскостью, ортогональной Γ и проходящей через $\gamma \in \Gamma$.

В малой окрестности точки γ можно считать, что $\Phi^+(\gamma(\xi)) \approx \Phi^+(\gamma)$.

Тогда степень экспоненты в (5) с учетом (8) записывается в виде

$$-\frac{u^2(\mathbf{h}, \Phi^+(\gamma(\xi))\mathbf{h})}{2\varepsilon^2} \approx -\frac{u^2}{2\varepsilon^2\sigma^2}, \quad (9)$$

где σ не зависит от u и ε , а определяется только выбором точки γ и прямой l

$$\sigma^2 = \frac{1}{(\mathbf{h}, \Phi^+(\gamma)\mathbf{h})}. \quad (10)$$

Рассмотрим спектральное разложение $\Phi(\gamma) = \lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^T + \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2\mathbf{v}_2^T$, где $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$ – собственные значения матрицы $\Phi(\gamma)$, соответствующие (нормированным) собственным векторам \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 . Тогда

$$\Phi^+(\gamma) = \lambda_1^{-1} \cdot \mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^T + \lambda_2^{-1} \cdot \mathbf{v}_2\mathbf{v}_2^T. \quad (11)$$

С учетом (11) формулу (10) можно преобразовать:

$$\sigma^2 = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_2 \cdot (\mathbf{h}, \mathbf{v}_1)^2 + \lambda_1 \cdot (\mathbf{h}, \mathbf{v}_2)^2}. \quad (12)$$

Полученное в (9) выражение для степени экспоненты у стационарной плотности распределения показывает, что точки пересечения пучка B с секущей плоскостью в проекции на прямую l имеют нормальное распределение с параметрами $(0; \varepsilon\sigma)$. Параметр σ определяется (12). Плотность распределения записывается в виде

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon\sigma} \exp\left(-\frac{u^2}{2\varepsilon^2\sigma^2}\right). \quad (13)$$

В малой окрестности точки $\hat{\gamma}$ орбиту цикла Γ можно считать прямой \hat{b} с направляющим единичным вектором \hat{r} (см. рис. 11). По аналогии можно показать, что в окрестности точки $\hat{\gamma}$ плотность распределения проекций (на прямую l) точек пересечения пучка B с ортогональной плоскостью выражается в виде

$$\hat{f}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon\hat{\sigma}}} \exp\left(-\frac{(u-d)^2}{2\varepsilon^2\hat{\sigma}^2}\right), \quad (14)$$

где $d = \|\hat{\gamma} - \gamma\|$ – расстояние между точками γ и $\hat{\gamma}$, а величина $\hat{\sigma}$ определяется выражением

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\lambda}_1 \cdot \hat{\lambda}_2}{\hat{\lambda}_2 \cdot (\hat{h}, \hat{v}_1)^2 + \hat{\lambda}_1 \cdot (\hat{h}, \hat{v}_2)^2}. \quad (15)$$

Здесь $\hat{\lambda}_1$ и $\hat{\lambda}_2$ – собственные значения матрицы $\Phi(\hat{\gamma})$, соответствующие (нормированным) собственным векторам \hat{v}_1 и \hat{v}_2 . Вектор \hat{h} определяется таким образом:

$$\hat{h} = \mathbf{e} - (\mathbf{e}, \hat{r})\hat{r}, \quad (16)$$

где \hat{r} – направляющий вектор прямой \hat{b} .

Результирующую плотность распределения на прямой l будем полагать равной

$$p(u) = (f(u) + \hat{f}(u))/2. \quad (17)$$

На рис. 12 представлены графики функции $p(u)$, полученные с использованием (17) на прямой l_1 для $\mu = 3$ при нескольких значениях интенсивности случайных возмущений. Эмпирические плотности распределения для значений $\varepsilon = 0.005$, 0.02 и 0.05 приведены на рис. 6. Графики функций $p(u)$ (см. рис.12), полученные из (17) с помощью функций чувствительности $\lambda_1(\gamma)$ и $\lambda_2(\gamma)$, достаточно хорошо аппроксимируют соответствующие эмпирические кривые на рис. 6. Данный факт наблюдается и для других секущих плоскостей 2-цикла при $\mu = 3$.

Численные эксперименты демонстрируют соответствие между эмпирической плотностью и ее теоретическим аналогом в сечениях для 2^k -циклов системы Ресслера в широком диапазоне интенсивности шума ε .

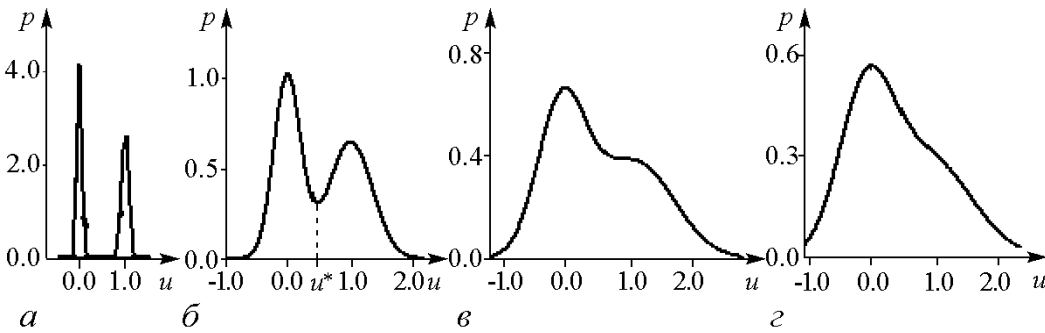


Рис. 12. Теоретическая плотность распределения (в плоскости Π_1) для $\mu = 3$, $\varepsilon = 0.005$ (а), 0.02 (б), 0.036 (в), 0.05 (г)

Проиллюстрируем соответствие графиков для случая больших шумов на примере значений $\mu = 3$ и $\mu = 4$. На рис. 13 для $\mu = 3$ при значении шума $\varepsilon = 0.05$ представлены эмпирические и теоретические плотности распределения в секущих плоскостях Π_1 и Π_2 . На рис. 14 для $\mu = 4$ при значении шума $\varepsilon = 0.015$ представлены эмпирические и теоретические плотности распределения в секущих плоскостях Π_3 и Π_4 .

Хорошая аппроксимация эмпирической плотности распределения в сечениях стохастических циклов системы Ресслера при помощи функций чувствительности позволяет использовать данный аппарат в анализе рассматриваемых стохастических обратных бифуркаций.

На рис. 12 приведены графики функции $p(u)$ для $\mu = 3$ в сечении Π_1 при различных уровнях шума ε . При увеличении ε ширина всплесков функции растет, происходит наложение всплесков друг на друга (рис. 12, б). Значение $p(u^*)$ (u^* – точка локального минимума функции $p(u)$ на $(0; d)$) возрастает и приближается к одному из локальных максимумов функции $p(u)$. Здесь $d = 1.04$ (см. рис. 4, а). При некотором значении $\varepsilon = \varepsilon^*$ на графике $p(u)$ происходит совпадение локального максимума с локальным минимумом (рис. 12, в). Такое качественное изменение поведения графика плотности соответствует началу слияния соседних частей пучка.

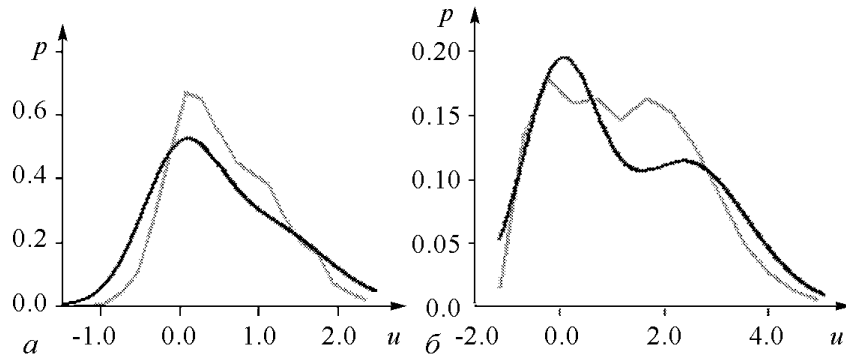


Рис. 13. Графики теоретической (черный цвет) и эмпирической (серый цвет) плотности распределения для $\mu = 3$ при $\varepsilon = 0.05$ в сечениях: а – плоскость Π_1 ; б – плоскость Π_2

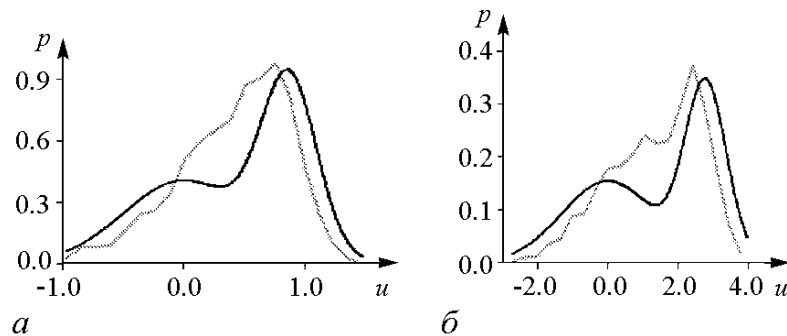


Рис. 14. Графики теоретической (черный цвет) и эмпирической (серый цвет) плотности распределения для $\mu = 4$ при $\varepsilon = 0.015$ в сечениях: а – плоскость Π_3 ; б – плоскость Π_4

Интенсивность случайных возмущений, соответствующую этому состоянию, будем называть критической интенсивностью. При дальнейшем росте ε (рис. 12, z) у функции $p(u)$ на интервале $(0; d)$ будет всего один экстремум.

Уравнение $p'(u) = 0$ приводится к виду

$$\exp\left(-\frac{u^2}{2\varepsilon^2\sigma^2}\right) \cdot \frac{u}{\sigma^3} + \exp\left(-\frac{(u-d)^2}{2\varepsilon^2\sigma^2}\right) \cdot \frac{u-d}{\sigma^3} = 0. \quad (18)$$

Из описанного поведения графика функции $p(u)$ следует, что $\exists \varepsilon^* > 0$, таких что $\forall \varepsilon < \varepsilon^*$, уравнение (18) имеет три различных вещественных корня, являющихся точками локальных экстремумов $p(u)$ (см. рис. 12, $a, б$). При $\varepsilon = \varepsilon^*$ уравнение (18) имеет два корня. Один корень является точкой локального максимума $p(u)$ на $(0; d)$. Второй корень имеет кратность 2, что соответствует совпадению точки второго локального максимума с точкой локального минимума (см. рис. 12, $в$). Значение интенсивности шума ε^* будем считать критическим значением перехода 2^k -цикла в 2^{k-1} -цикл (в окрестности точки γ) и обозначать ε_{k-1}^* . Величина ε_{k-1}^* является тем единственным значением параметра ε , при котором уравнение (18) имеет кратный корень. Это условие и служит аналитическим правилом отыскания бифуркационного значения ε_{k-1}^* в исследуемой первой обратной бифуркации.

Рассматриваемая при фиксированном μ функция $p(u)$ зависит еще и от точки γ . Соответствующее бифуркационное значение шума ε_{k-1}^* также зависит от γ . Будем обозначать его $\varepsilon_{k-1}^*(\gamma)$. При уровне шума $\varepsilon_{k-1}^* = \max_{\gamma \in \Gamma} \varepsilon_{k-1}^*(\gamma)$ обратная бифуркация превращения стохастического 2^k -цикла в 2^{k-1} -цикл имеет место уже во всех точках орбиты.

Рассмотрим зависимость бифуркационных значений интенсивности шума от параметра μ . Введем величины $m_k = \max_{\mu \in I_k} \varepsilon_{k-1}^*(\mu)$, $\mu_k^* = \arg \max_{\mu \in I_k} \varepsilon_{k-1}^*(\mu)$. На интервале I_k при $\mu = \mu_k^*$ обратная бифуркация превращения стохастического 2^k -цикла в 2^{k-1} -цикл происходит при наибольшем значении шума $\varepsilon = m_k$.

Графики бифуркационных значений $\varepsilon_0^*(\mu)$, $\varepsilon_1^*(\mu)$, $\varepsilon_2^*(\mu)$ для системы Ресслера на начальных интервалах структурной устойчивости $I_1 = (2.830; 3.836)$, $I_2 = (3.836; 4.123)$, $I_3 = (4.123; 4.186)$ демонстрируют самоподобие (рис. 15).

Найденные величины $m_1 = 0.096$, $m_2 = 0.017$, $m_3 = 0.0028$ свидетельствуют о быстром убывании бифуркационных значений шума при увеличении μ .

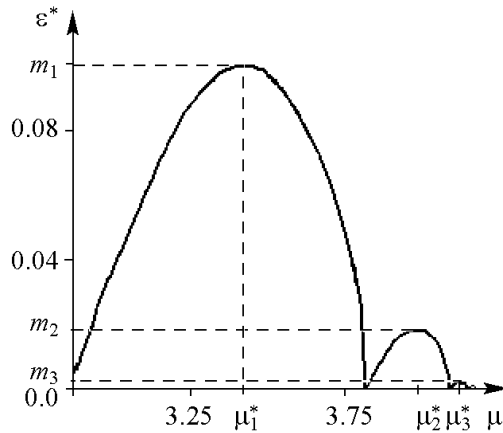


Рис. 15. Диаграмма обратных стохастических бифуркаций системы Ресслера

Заклучение

В данной статье были рассмотрены вызванные шумом стохастические обратные бифуркации уменьшения кратности предельных циклов системы Ресслера.

Были изложены эмпирический и теоретический подходы. В эмпирическом подходе рассматриваются плотности распределения пучка случайных траекторий в секущих плоскостях. В рамках теоретического подхода с помощью аппарата функций чувствительности строится аппроксимация плотности распределения. Показано, что функции чувствительности, изначально введенные для бесконечно малых шумов в асимптотически малой окрестности орбиты предельных циклов, могут быть успешно использованы для моделирования плотностей распределения в сечениях аттрактора Ресслера и изучения механизма обратных бифуркаций.

Для системы Ресслера найдены бифуркационные значения интенсивности шума и исследована их зависимость от параметра системы.

Работа частично поддержана грантом РФФИ № 04-01-96098 Урал.

Библиографический список

1. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. Радио, 1961.
2. *Диментберг М.Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980.
3. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
4. *Soong T.T., Grigoriu M.* Random vibration of mechanical and structural systems. RTR Prentice-Hall. Englewood Cliffs. New Jersey. 1993.
5. *Arnold L.* Random dynamical systems. Springer-Verlag. Berlin, 1998.
6. *Landa P.S., McClintock P.V.E.* Changes in the dynamical behavior of nonlinear systems induced by noise // Physics Reports. 2000. Vol.323. P.1.
7. *Anishchenko V.S., Neiman A.B.* Structure and properties of chaos in presence of noise // Nonlinear Dynamics of structures / Ed. R.Z. Sagdeev et al. Singapore: World Scientific, 1991. P.21.
8. *Crutchfield J., Nauenberg M., Rudnick J.* Scaling for external noise at the onset of chaos // Phys. Rev. Lett. 1981. Vol. 46. P. 933.
9. *Crutchfield J., Farmer J., Huberman B.* Fluctuations and simple chaotic dynamics // Phys. Rep. 1982. Vol. 92. P. 45.
10. *Arnold L., Horsthemke W., Lefever R.* White and coloured external noise and transition phenomena in nonlinear systems // Zs. Phys. 1978. B29. P.867.
11. *Хорстхемке В., Лефевр Р.* Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987.
12. *Стратонович Р.Л., Ланда П.С.* Воздействие шумов на генератор с жестким возбуждением // Известия вузов. Радиофизика. 1959. Т. 2 №1. С. 37.
13. *Lefever R., Turner J.* Sensitivity of a Hopf bifurcation to external multiplicative noise // In Fluctuations and sensitivity in nonequilibrium systems / Eds W.Horsthemke, D.K.Kondepudi, Springer-Verlag. Berlin. 1984.
14. *Lefever R., Turner J.* Sensitivity of a Hopf bifurcation to multiplicative colored noise // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56. P. 1631.
15. *Franzoni L., Mannella R., McClintock P., Moss F.* Postponement of Hopf bifurcations by multiplicative colored noise // Phys. Rev. A. 1987. Vol. 36. P.834.

16. *Altare V., Nicolis G.* Stochastically forced Hopf bifurcation: approximate Fokker Planck equation in the limit of short correlation times // *Phys. Rev. A.* 1988. Vol. 37. P. 3630.
17. *Neiman A., Anishchenko V., Kurths J.* Period-doubling bifurcations in the presence of colored noise // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49. P. 3801.
18. *Gao J. B., Hwang S. K., Liu J. M.* When can noise induce chaos? // *Phys. Rev. Lett.* 1999. Vol. 82, № 6. P. 1132.
19. *Ying-Cheng L., Zonghua L., Billings L., Schwartz I.* Noise-induced unstable dimension variability and transition to chaos in random dynamical systems // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 67. P.026210.
20. *Xu B., Lai Y.-C., Zhu L., Do Y.* Experimental characterization of transition to chaos in the presence of noise // *Phys. Rev. Lett.* 2003. Vol. 90. P. 164101.
21. *Roessler O.E., Wegman K.* Chaos in Zhabotinski reaction // *Nature.* 1978. Vol. 271. P. 89.
22. *Arnold L., Bleckert G., Schenk-Hoppe K.* (1999). The stochastic Brusselator: parametric noise destroys Hopf bifurcation // in: *Stochastic Dynamics* / Eds H. Crauel, M. Gundlach. Springer. 1999. P.71.
23. *Arnold L. and Boxler P.* Stochastic bifurcation: Instructive examples in dimension one // in *Diffusion processes and related problems in analysis* / Eds Mark Pinsky and Volker Wihstutz, Vol. II: *Stochastic flows.* Progress in Probability. Boston Basel Stuttgart. Birkhaeuser. 1992. Vol. 27. P. 241.
24. *Crauel H., Imkeller P., Steinkamp M.* Bifurcations of one-dimensional stochastic differential equations // in *Stochastic dynamics* / Eds H. Crauel and M. Gundlach. Springer-Verlag. New York. 1999. P. 27.
25. *Leng G., Namachchivaya N., Talwar S.* Robustness of nonlinear systems perturbed by external random excitation // *ASME Journal of Applied Mechanics.* 1992. Vol. 59. P. 1.
26. *Malick K., Marcq P.* Stability analysis of noise-induced Hopf bifurcation // *Eur. Phys. J.* 2003. Vol. 36. P. 119.
27. *Baras F.* Stochastic analysis of limit cycle behavior // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 77. P. 1398.
28. *Баширцева И.А., Ряшко Л.Б.* Метод квазипотенциала в исследовании локальной устойчивости предельных циклов к случайным воздействиям // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2001. Т.9, № 6. С.104.
29. *Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B.* Sensitivity analysis of stochastically forced Lorenz model cycles under period-doubling bifurcations // *Dynamic systems and applications.* 2002. Vol. 11. P. 293.
30. *Bashkirtseva I. A., Ryashko L. B.* Stochastic sensitivity of 3D-cycles // *Mathematics and Computers in Simulation.* 2004. Vol. 66. Issue 1 (June 2004). P. 55.
31. *Баширцева И.А., Ряшко Л.Б., Стихин П.В.* Стохастическая чувствительность циклов системы Ресслера при переходе к хаосу // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2003. Т. 11, № 6. С. 32.
32. *Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука. 1979.

33. Day M.V. Regularity of boundary quasi-potentials for planar systems// Applied Mathematics and Optimization. 1994. Vol. 30. P. 79.
34. Naeh T., Klosek M.M., Matkowsky B.J., Schuss Z. A direct approach to the exit problem// SIAM Journal Appl.Math. 1990. Vol. 50. № 2. P. 595.
35. Мильштейн Г.Н., Ряшко Л.Б. Первое приближение квазипотенциала в задачах об устойчивости систем со случайными невырожденными возмущениями // Прикл. математика и механика 1995. Т. 59. Вып. 1. С. 51.

Уральский государственный
университет

Поступила в редакцию 31.01.2005
После доработки 3.05.2005

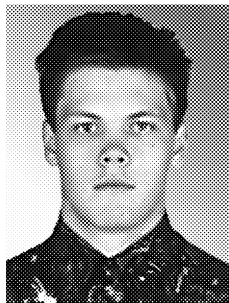
NOISE-INDUCED BACKWARD BIFURCATIONS IN STOCHASTIC ROESSLER SYSTEM

L.B. Ryashko, P.V. Stihin

Noise essentially influences the behavior of deterministic cycles of dynamical systems. Backward bifurcations of stochastic cycles for nonlinear Roessler model are investigated. Two approaches are demonstrated. In empirical approach the distribution densities of intersection points in intersecting planes are used. Theoretical analysis is based on stochastic sensitivity functions. This approach allows to achieve rather simple approximation of distribution densities in planes. Bifurcational values for noise intensities are found.



Ряшко Лев Борисович – родился в 1953 году, окончил Уральский госуниверситет (1975), кандидат физико-математических наук, зав. кафедрой вычислительной математики Уральского госуниверситета, Соросовский доцент (1996,1998). Область научных интересов - устойчивость, стабилизация и управление стохастическими системами. Автор ряда статей по данной тематике. E-mail: Lev.Ryashko@usu.ru



Стихин Павел Викторович – родился в 1979 году, окончил Уральский госуниверситет (2002), аспирант кафедры математической физики. Область научных интересов - анализ чувствительности к возмущениям и моделирование стохастических нелинейных систем. E-mail: paul-st@mail.ru



БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ В ДИСКРЕТНОЙ АНГАРМОНИЧЕСКОЙ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СРЕДЕ

А.В. Шабунин, А.А. Акопов, В.В. Астахов, Т.Е. Вадивасова

Рассматривается динамика режимов бегущих волн в кольце осцилляторов Ван дер Поля с диффузионной связью. Строятся области существования и устойчивости в пространстве управляющих параметров. Исследуется типичность появления режимов с разными длинами волн и закономерности их исчезновения. Исследуется влияние ангармоничности на явление мультистабильности пространственно-периодических режимов. Рассматривается переключение между мультистабильными состояниями под действием внешнего шума.

Введение

Регулярные, хаотические и стохастические процессы в распределенных автоколебательных системах в последние десятилетия являются предметом пристального внимания специалистов в различных областях математики, физики, химии, биологии и других наук. При моделировании пространственно-временной динамики таких сред обычно используют либо модели, описываемые дифференциальными уравнениями в частных производных, либо ансамбли связанных осцилляторов, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями [1, 2].

Одним из характерных режимов в активных одномерных средах является режим автоволн, бегущих вдоль пространственной координаты среды с постоянной фазовой скоростью. Подобные режимы могут возникать в цепочках локально связанных осцилляторов с периодическими граничными условиями. При этом колебания в соседних осцилляторах имеют равные амплитуды и различающиеся на постоянную величину фазы колебаний. В цепочках конечной длины число возможных режимов бегущих волн конечно. Аттракторы, соответствующие режимам с разными длинами волн, могут сосуществовать в фазовом пространстве при одних и тех же значениях параметров, демонстрируя тем самым явление мультистабильности.

Синхронизация колебаний в ансамблях осцилляторов с регулярным поведением – одна из традиционных областей исследований для нелинейной динамики. Первые работы в этом направлении известны с середины прошлого века [3]. Рассматривалась, как правило, задача частотной синхронизации в цепочке осцилляторов с гармоническим поведением [4–7]. В работе [6] было обращено внимание на

то, что в подобных системах возможны режимы с разными фазовыми сдвигами между осцилляторами, то есть сосуществуют разные пространственные моды. Условия существования и устойчивости разных пространственных мод в ансамблях осцилляторов, колебания в которых возникают через бифуркацию Андронова – Хопфа, были получены для разных типов связей в работах Эрментроута [8–10]. Детальное описание динамики пространственно-однородных и неоднородных волн, возникновение пространственно разупорядоченных колебательных режимов и особенности переходов между режимами с разными длинами волн для ансамбля автогенераторов с жестким возбуждением можно найти в работе [11].

Большинство указанных работ используют в качестве модели либо фазовые уравнения, либо укороченные уравнения для амплитуд и фаз, решениями которых являются гармонические колебания. В то же время, представляется интересным вопрос, как ведут себя ансамбли «реальных» регулярных осцилляторов, в которых присутствуют такие явления, как ангармоничность и неизохронность. Одной из попыток ответить на данный вопрос можно считать работу Даидо [12], в которой он моделирует ангармоничность введением дополнительного слагаемого в уравнение для фазового осциллятора. При этом, при большой ангармоничности в кольце осцилляторов наблюдается появление пространственной разупорядоченности (так называемые странные волны). Моделирование ангармоничности в работе Даидо носит достаточно искусственный характер. Кроме того, обнаруженные эффекты наблюдаются в его модели при очень больших значениях ангармоничности, не наблюдаемых в более реалистичных моделях. Будут ли подобные режимы возникать в реальных ангармонических осцилляторах? Какие еще особенности поведения там возможны? Мы рассматриваем различные пространственные моды в кольце диффузионно связанных генераторов Ван дер Поля, принципиально не ограничиваясь случаем малой нелинейности, то есть квазигармоническими колебаниями. Кроме того, мы исследуем типичность появления разных волновых мод при случайных и пространственно-периодических начальных условиях.

Исследования последних лет показали, что в распределенных нелинейных системах и средах шум может играть конструктивную роль, индуцируя новые режимы, приводя к образованию различных пространственно упорядоченных структур и переводя, таким образом, систему в более организованное состояние [14, 15]. Воздействие шума также позволяет осуществлять управляемые переходы между сосуществующими колебательными режимами в системах с мультистабильностью [16, 17]. Каким образом внешний шум влияет на волновые режимы в ансамбле осцилляторов? Можно ли использовать флуктуации для переходов между сосуществующими бегущими волнами? Данные вопросы также оказались в центре внимания настоящей работы.

1. Исследуемая система и рассматриваемые колебательные режимы

Рассмотрим цепочку осцилляторов Ван дер Поля с симметричной диссипативной связью, замкнутую в кольцо,

$$\ddot{x}_i - (\varepsilon - x_i^2)\dot{x}_i + x_i - \gamma(\dot{x}_{i+1} - 2\dot{x}_i + \dot{x}_{i-1}) = 0, \quad (1)$$

$$i = 1, 2, \dots, N; \quad x_1 = x_{N+1}, \quad \dot{x}_1 = \dot{x}_{N+1}.$$

Здесь параметр ε определяет динамику одиночного осциллятора, γ – коэффициент связи. Исследования проводились для цепочки из 30 осцилляторов ($N = 30$).

Осциллятор Ван дер Поля представляет собой классическую автоколебательную систему и его динамика хорошо известна. При отрицательных значениях параметра ε в фазовом пространстве (x, \dot{x}) существует единственный аттрактор – устойчивое состояние равновесия в начале координат. Увеличение ε приводит к бифуркации Андронова – Хопфа (при $\varepsilon = 0$), в результате которой состояние равновесия теряет устойчивость и в его окрестности рождается устойчивый предельный цикл. При значении параметра ε , близком к бифуркационному ($0 < \varepsilon \ll 1$), предельный цикл соответствует квазигармоническим колебаниям с малой амплитудой. При дальнейшем увеличении ε амплитуда колебаний увеличивается, а их форма искажается, что соответствует появлению в спектре гармонических составляющих на кратных частотах. При больших ε колебания становятся релаксационными.

В цепочке осцилляторов (1) при нулевой связи будут наблюдаться периодические колебания с равными амплитудами и произвольными начальными фазами. При этом, вследствие периодических граничных условий полный набег разностей фаз между колебаниями осцилляторов вдоль кольца должен быть кратен 2π

$$\sum_{i=1}^N (\varphi_{i+1} - \varphi_i) = 2\pi k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Если ограничиться рассмотрением режимов, для которых разности фаз между колебаниями соседних осцилляторов являются постоянными, то есть $\varphi_{i+1} - \varphi_i = \Delta\varphi$ для всех i (бегущие вдоль кольца с постоянной фазовой скоростью волны), то в цепочке из N осцилляторов возможно конечное число подобных режимов. Действительно, поскольку $\Delta\varphi \in [-\pi, \pi]$, то рассматривая волны, распространяющиеся в прямом направлении ($\Delta\varphi \geq 0$), и учитывая, что длина волны $\Lambda_k = 2\pi/\Delta\varphi_k = N/k$ есть (вследствие дискретности пространственной координаты i) целое число, получим, что k может представлять собой всевозможные целые делители числа N от 0 до $N/2$. Для рассматриваемой цепочки из 30 осцилляторов k принимает следующие значения: 0, 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15. Значение $k = 0$ соответствует пространственно-однородному режиму, а прочие значения k – режимам бегущих волн с длинами волны $\Lambda_k = 30, 15, 10, 6, 5, 3, 2$. Число k может выступать индексом бегущей волны. При максимальном значении $k = 15$ имеют место противофазные колебания соседних осцилляторов ($\Delta\varphi = \pi$). Аналогичные режимы бегущих волн существуют и для отрицательных значений k . Это волны, распространяющиеся в противоположном направлении ($\Delta\varphi < 0$). Для однородного режима ($k = 0$) и противофазного режима ($k = 15$) изменение знака k не приводит к появлению нового режима. Любым другим значениям k и $-k$ соответствуют различные волны. Таким образом, в цепочке из 30 осцилляторов может существовать следующий набор циклических волн, распространяющихся с постоянной фазовой скоростью:

$$\{C^k\} = \{C^{-10}, C^{-6}, C^{-5}, C^{-3}, C^{-2}, C^{-1}, C^0, C^1, C^2, C^3, C^5, C^6, C^{10}, C^{15}\}$$

2. Области существования и устойчивости гармонических бегущих волн

Рассмотрим области существования и устойчивости для указанных выше волновых режимов при условии гармонических колебаний в каждом из осцилляторов. Эта задача может быть решена аналитически стандартными методами (см. например [8, 13]). В настоящем разделе мы приводим результаты соответствующих выкладок, проделанных для цепочки осцилляторов (1). Если колебания в осцилляторах

близки к гармоническим, то удобно перейти к укороченным уравнениям для комплексных амплитуд, используя замену переменных

$$x_i = \frac{1}{2}((a_i(t) \exp(jt) + a_i^*(t) \exp(-jt)), \quad j = \sqrt{-1}. \quad (2)$$

Используя метод усреднения, получим уравнения для комплексных амплитуд

$$\dot{a}_i = \frac{\varepsilon}{2}a_i - \frac{a|a|^2}{8} + \frac{\gamma}{2}(a_{i+1} + a_{i-1} - 2a_i), \quad i = 1, 2, 3 \dots N, \quad a_1 = a_{N+1},$$

или, переходя к вещественным амплитудам ρ_i и фазам φ_i , запишем

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_i &= \frac{\varepsilon}{2}\rho_i - \frac{\rho_i^3}{8} + \frac{\gamma}{2}(\rho_{i+1} \cos(\varphi_{i+1} - \varphi_i) + \rho_i \cos(\varphi_i - \varphi_{i-1}) - 2\rho_i), \\ \dot{\varphi}_i &= \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\rho_{i+1}}{\rho_i} \sin(\varphi_{i+1} - \varphi_i) - \frac{\rho_{i-1}}{\rho_i} \sin(\varphi_i - \varphi_{i-1}) \right), \\ \rho_1 &= \rho_{N+1}, \quad \varphi_1 = \varphi_{N+1}. \end{aligned} \quad (3)$$

В силу идентичности всех элементов кольца в уравнениях (3) можно положить, что все амплитуды равны ρ , и разности фаз между любыми соседними осцилляторами равны $\Delta\varphi_k$. Тогда для ρ и φ_i справедливы уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\rho}^{(k)} &= \frac{\dot{\varepsilon}_k}{2}\rho^{(k)} - \frac{(\rho^{(k)})^3}{8}, \\ \varphi_{i+1} - \varphi_i &= \Delta\varphi_k = 2\pi \frac{k}{N} = \text{const}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\dot{\varepsilon}_k = \varepsilon - 2\gamma(1 - \cos \Delta\varphi_k)$, индекс (k) означает принадлежность решения волне с индексом k . Амплитудное уравнение (4) совпадает по форме с укороченным уравнением одиночного осциллятора Ван дер Поля. Соответственно, как и в одиночном осцилляторе, при переходе параметра $\dot{\varepsilon}_k$ через ноль решение $\rho^{(k)} = 0$ теряет устойчивость, что соответствует бифуркации Андронова – Хопфа для состояния равновесия в нуле координат в исходной системе (1). При этом возникает новое решение $\rho^{(k)} = 2\sqrt{\dot{\varepsilon}_k}$, соответствующее бегущей волне с заданным значением индекса k . Таким образом, линии $\varepsilon = 2\gamma(1 - \cos \Delta\varphi_k)$ являются бифуркационными. При увеличении параметра ε сначала выполняется бифуркационное условие $\varepsilon = 0$, соответствующее пространственно-однородному режиму ($\Delta\varphi = 0$). Затем, при $\varepsilon = 2\gamma(1 - \cos(2\pi/N))$ бифуркационное условие выполняется для режимов с $k = \pm 1$, соответствующих бегущим в противоположных направлениях волнам с длиной $\Lambda_1 = N$. Аналогичные бифуркации имеют место для всей последовательности возможных индексов k . При этом новые режимы рождаются неустойчивыми (за исключением однородного состояния). Последним возникает пара неустойчивых бегущих волн с $\Lambda_{15} = 2$ на линии $\varepsilon = 4\gamma$. Таким образом, на линии b_0 (рис. 1) рождается устойчивая неподвижная точка, соответствующая пространственно-однородному режиму $x_i(t) = 2\sqrt{\varepsilon} \cos(t)$, а на линиях $b_1 - b_{15}$ – седловые неподвижные точки, соответствующие бегущим вдоль кольца автоволнам $x_i(t) = 2\sqrt{\varepsilon_k} \cos(t - \frac{2\pi k}{N}i)$. При определенных значениях управляющих параметров данные пространственно-периодические режимы могут приобрести устойчивость. Условия устойчивости можно получить, используя стандартный метод определения устойчивости по первому приближению.

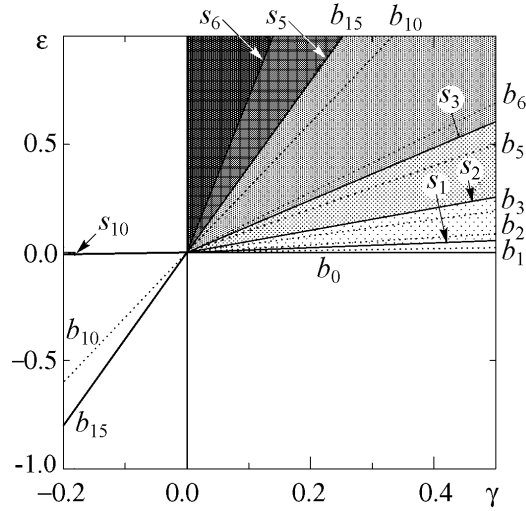


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма режимов в системе (3). Сплошная линия b_0 соответствует рождению пространственно-однородного режима колебаний; пунктирные линии b_k – границы существования режимов бегущих волн с волновым числом k ; сплошные линии s_k – границы областей устойчивости соответствующих волновых режимов. Области существования устойчивых режимов бегущих волн обозначены серым цветом: более темный фон соответствует области устойчивости для более коротковолнового режима

Для кольца из гармонических осцилляторов применение данного метода описано, например, в работе [13]. Для системы уравнений (3) анализ устойчивости дает следующие собственные значения для матрицы линеаризации:

$$\lambda_{0,1}^{(k)} = 0,$$

$$\lambda_{0,2}^{(k)} = -\dot{\epsilon}_k,$$

$$\lambda_{i,1(2)}^{(k)} = -\frac{\dot{\epsilon}_k}{2} \pm \sqrt{\frac{\dot{\epsilon}_k^2}{4} + \gamma^2 \sin^2(\Delta\varphi_k) \sin^2\left(\frac{2\pi i}{N}\right) - \gamma \cos(\Delta\varphi_k) (1 - \cos(\frac{2\pi i}{N}))},$$

$$i = 1 \div N - 1.$$

Нулевое собственное значение $\lambda_{0,1}^{(k)}$ является следствием инвариантности решений системы (3) относительно выбора начальной фазы. Переход через ноль собственных значений $\lambda_{0,2}^{(k)}$ соответствует рождению рассматриваемой неподвижной точки при бифуркации состояния равновесия в начале координат. Анализ выражений для остальных собственных значений дает следующие условия для областей устойчивости бегущих волн в цепочке гармонических осцилляторов:

$$\epsilon > \gamma \left[2 - 4 \cos(\Delta\varphi_k) + \frac{1 + \cos(\frac{2\pi}{N})}{\cos(\Delta\varphi_k)} \right], \quad \cos(\Delta\varphi_k) > 0. \quad (5)$$

Соответствующие линии рождения и линии устойчивости для рассматриваемых пространственно-периодических режимов построены на рис. 1. Линия $\epsilon = 0$ разграничивает области существования устойчивых длинноволновых режимов $C^0 - C^6$ ($\gamma > 0$, $\cos(\Delta\varphi_k > 0$) и коротковолновых C^{10} , C^{15} ($\gamma < 0$, $\cos(\Delta\varphi_k < 0$). Рассмотрим сначала область плоскости параметров, соответствующую положительной связи. Сплошная линия b_0 соответствует рождению устойчивого режима пространственно-однородных колебаний. Линии рождения неустойчивых колебательных режимов с разными пространственными периодами изображены на рис. 1 пунктиром и обозначены буквами b_k , где $k = 1, 2, 3, \dots$ – индекс соответствующей бегущей волны. На

линиях s_1, s_2, s_3, s_5 и s_6 режимы с соответствующими значениями k становятся устойчивыми.

Таким образом, в конусе, ограниченном линиями $\varepsilon = 0$ и s_6 (обозначена на рисунке темным цветом) существуют устойчивые режимы бегущих волн C^0, C^1, C^2, C^3, C^5 и C^6 с длинами волн $\Lambda = \infty, 30, 15, 10, 6$ и 5 , соответственно. Правее линии s_6 (между линиями s_6 и s_5) режим C^6 перестает быть устойчивым, в результате чего наблюдаются пять сосуществующих волн C^0, C^1, C^2, C^3, C^5 . Далее, правее линии s_5 остается четыре устойчивых режима C^0, C^1, C^2, C^3 и так далее. В пространстве параметров формируется вложенная структура областей существования устойчивых бегущих волн с разными длинами волны. Чем короче длина волны, тем ближе к линии $\gamma = 0$ располагается область устойчивости соответствующего колебательного режима. При большой связи, то есть ниже линии s_1 в системе наблюдается только пространственно-однородный колебательный режим.

При отрицательной связи все рассматриваемые выше режимы становятся неустойчивыми. Из состояния равновесия в нуле на линии s_{15} ($\gamma < 0$) рождается устойчивый режим с длиной волны $\Lambda = 2$, когда колебания в соседних осцилляторах происходят в противофазе: $x_i = -x_{i+1} = -x_{i-1}$, $\dot{x}_i = -\dot{x}_{i+1} = -\dot{x}_{i-1}$. Данный тип волны наблюдается при любых значениях параметров $\varepsilon > -4\gamma$, $\gamma < 0$. Легко видеть, что рождение противофазных колебаний происходит при отрицательных значениях параметра возбуждения ε , то есть тогда, когда в одиночном осцилляторе колебания еще отсутствуют. Затем, на линии b_{10} ($\gamma < 0$) в окрестности ставшего неустойчивым состояния равновесия рождается режим бегущей волны C^{10} с длиной волны $\Lambda = 3$, соответствующей разности фаз между соседними осцилляторами, равной $2\pi/3$. На линии s_{10} данный режим становится устойчивым и может наблюдаться в эксперименте.

Области устойчивости пространственно-периодических режимов, исключая пространственно-однородный C^0 и противофазный C^{15} , зависят от числа элементов N в ансамбле (через функцию $\cos(2\pi/N)$ в выражении (5)). Однако при большой длине цепочки эта зависимость является очень слабой в силу того, что производная от косинуса вблизи максимума близка к нулю. Для цепочки бесконечной длины $N \rightarrow \infty$ в формуле (5) $\cos(2\pi/N)$ следует заменить на единицу. При этом получаем условие

$$\varepsilon > \gamma \left[2 - 4 \cos(\Delta\varphi_k) + \frac{2}{\cos(\Delta\varphi_k)} \right], \quad \cos(\Delta\varphi_k) \neq 0. \quad (6)$$

Проведенный двухпараметрический анализ областей устойчивости для гармонических бегущих волн показал, что рассматриваемая система является мультистабильной. Пространство параметров состоит из перекрывающихся листов, каждый из которых не ограничен по параметру ε , но ограничен по параметру связи γ . Зафиксировав параметр возбуждения ε и увеличивая параметр связи, мы сможем пронаблюдать характерные переходы с коротковолновых режимов на более длинноволновые, описанные в работе [11]. Отсутствие ограничения областей устойчивости по параметру возбуждения приводит к тому, что при любом $\varepsilon > 0$ последовательность этих переходов оказывается одинаковой, то есть для гармонических волн однопараметрический анализ устойчивости является достаточным. Как будет показано ниже, дело обстоит иначе, если волны являются ангармоническими.

3. Области существования и устойчивости ангармонических бегущих волн

Рассмотренные области существования и устойчивости имеют место для осцилляторов с гармоническим поведением, описываемых укороченными уравнениями. Перейдем теперь к анализу поведения исходной системы автогенераторов (1). Принципиальное отличие между (3) и (1) заключается в следующем. Состояниям равновесия в фазовом пространстве укороченной системы соответствуют предельные циклы в фазовом пространстве полной системы. При увеличении параметра ε в полной системе происходит не только рост амплитуды колебаний, но и изменение их формы, приводящее к генерации новых гармоник в спектре колебаний. При этом укороченные уравнения перестают адекватно описывать динамику системы и указанные выше аналитические выражения для областей устойчивости в своей верхней (по параметру ε) части не будут соответствовать реально наблюдаемому.

Поскольку для колебаний произвольной формы нельзя указать аналитические методы анализа на устойчивость, области существования и устойчивости для бегущих волн в системе (1) определялись нами в численном эксперименте. Для наблюдения и графического представления режимов бегущих волн в системе (1) удобно использовать сечение Пуанкаре. Значения динамических переменных всех осцилляторов ансамбля $\{x_i\}$ фиксируются в моменты времени, соответствующие обращению в ноль производной по времени от одной из динамических переменных (например, \dot{x}_1). Таким образом делаются мгновенные «снимки» состояний осцилляторов (то есть строится профиль бегущей волны) в моменты времени, соответствующие определенной фазе опорного элемента (в нашем случае x_1). Изображения режимов с разными длинами волн представлены на рис. 2.

Постоянство разности фаз между соседними осцилляторами вдоль цепочки проиллюстрировано на рис. 3.

Колебательные режимы, приведенные на рис. 2, не исчерпывают всех возможных устойчивых режимов, наблюдающихся в системе (1). В частности, возможно существование бегущих волн, у которых амплитуды колебаний и разность фаз между соседними осцилляторами не постоянны вдоль цепочки. Это характерно для тех случаев, когда длина цепочки не кратна длине волны рассматриваемого режима. Например, на рис. 4 показан профиль режима с четырьмя максимумами ($k = 4$), пространственный период у которого равен пятнадцати ячейкам, так как каждый максимум точно повторяется только через один. В этом случае разность фаз между соседними осцилляторами не одинакова вдоль кольца. Как видно из рис. 4, вдоль цепочки наблюдаются четыре сбоя разности фаз. Аналогичная пространственная модуляция имеет место и для амплитуды колебаний. Наблюдающиеся «дефекты» в распределении амплитуды и фазы вдоль цепочки являются стационарными, поскольку их положение в кольце не меняется. В системе (1) возможны и режимы с нестационарными дефектами, которые будут рассмотрены ниже.

Результаты численного исследования областей устойчивости для бегущих волн при положительных значениях параметра связи показаны на рис. 5. Рождение представленных на рис. 2 волновых режимов происходит строго на тех же линиях $b_1 - b_{15}$, что и рождение соответствующих им стационарных состояний в укороченных уравнениях (3) (см. рис. 1). Это естественно, поскольку в момент своего рождения колебания являются гармоническими, а следовательно, точно описываются укороченными уравнениями. Однако при увеличении параметра ε форма колеба-

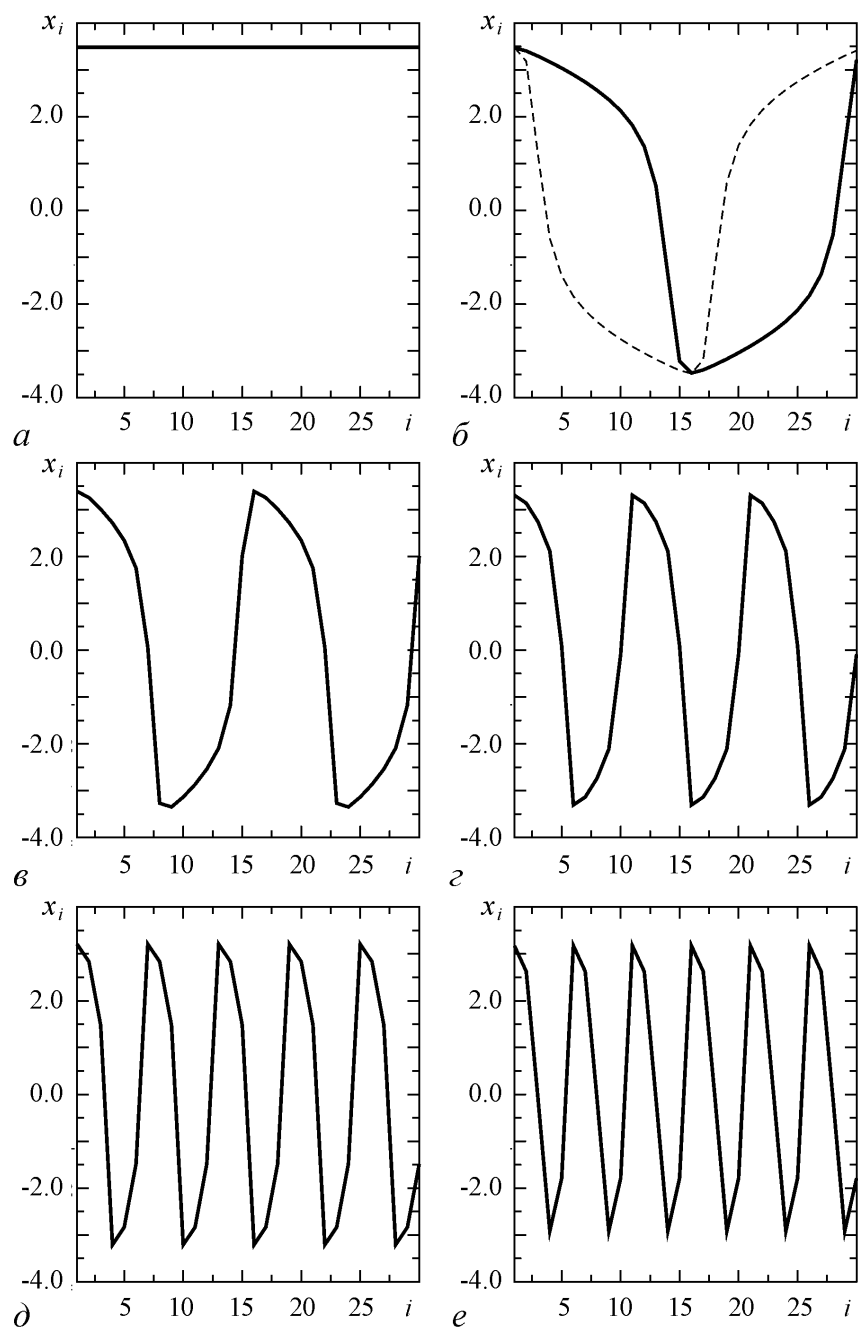


Рис. 2. Колебательные режимы системы (1): пространственно-однородные колебания (а) и режимы бегущих волн, распространяющихся в прямом направлении с длиной волны $\Lambda = 30$ (б), $\Lambda = 15$ (в), $\Lambda = 10$ (з), $\Lambda = 6$ (д) и $\Lambda = 5$ (е). По оси абсцисс отложены порядковые номера осцилляторов в цепочке (дискретная пространственная координата), на оси ординат – значение динамической переменной данного осциллятора в сечении $\dot{x}_1 = 0$. Штриховой линией на рис. (б) показан профиль волны, распространяющейся в обратном направлении

ний становится ангармонической и в спектре колебаний появляются гармоники на кратных частотах. Таким образом, при удалении от порога возникновения генерации исходная система генераторов Ван дер Поля (1) начинает вести себя иначе, чем упрощенная модель (3). Соответственно, области устойчивости для бегущих волн, представленные на рис. 5, качественно отличаются от соответствующих областей, изображенных на рис. 1. Для сравнения на рис. 5 продублированы границы областей устойчивости $s_1 - s_6$ с рис. 1 (штриховые линии). Из сопоставления рис. 1 и 5 видно, что, в отличие от гармонических осцилляторов, в цепочке полных уравнений каждый волновой режим, за исключением пространственно-однородного, имеет конечную область устойчивости. При малой связи нижние границы этих областей (линии $l_1 - l_6$) почти совпадают с соответствующими границами ($s_1 - s_6$) для системы (3). Расхождение начинается при больших значениях γ и особенно хорошо заметно в случае коротковолновых режимов. Рассмотрим, например, границы области устойчивости для бегущей волны длиной $\Lambda = 6$: линии l_5 и h_5 . До значений коэффициента связи $\gamma \simeq 0.5$ нижняя граница устойчивости рассматриваемого режима в (1) почти совпадает с пунктирной линией s_5 . Однако при большей связи она существенно отклоняется от прямой линии. Кроме того, для каждого из рассматриваемых режимов, исключая пространственно-однородный, существует граница, ограничивающая область устойчивости сверху. Верхняя и нижняя границы области устойчивости совместно с бифуркационной линией $\gamma = 0$ замыкают область устойчивости для рассматриваемой бегущей волны. На рис. 5 изображен фрагмент областей устойчивости для значений коэффициента связи $0 \leq \gamma \leq 1$, в котором целиком содержатся области устойчивости для волн с $\Lambda = 5$ и $\Lambda = 6$. Области устойчивости для более длинноволновых режимов ведут себя аналогичным образом, но

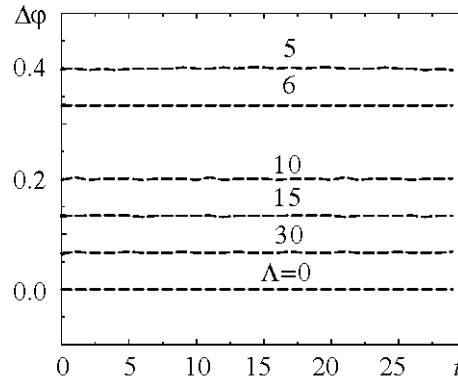


Рис. 3. Распределение разностей фаз соседних осцилляторов вдоль цепочки (соответствуют режимам с тем же волновым периодом, представленным на рис. 2)

для системы (3). Расхождение начинается при больших значениях γ и особенно хорошо заметно в случае коротковолновых режимов. Рассмотрим, например, границы области устойчивости для бегущей волны длиной $\Lambda = 6$: линии l_5 и h_5 . До значений коэффициента связи $\gamma \simeq 0.5$ нижняя граница устойчивости рассматриваемого режима в (1) почти совпадает с пунктирной линией s_5 . Однако при большей связи она существенно отклоняется от прямой линии. Кроме того, для каждого из рассматриваемых режимов, исключая пространственно-однородный, существует граница, ограничивающая область устойчивости сверху. Верхняя и нижняя границы области устойчивости совместно с бифуркационной линией $\gamma = 0$ замыкают область устойчивости для рассматриваемой бегущей волны. На рис. 5 изображен фрагмент областей устойчивости для значений коэффициента связи $0 \leq \gamma \leq 1$, в котором целиком содержатся области устойчивости для волн с $\Lambda = 5$ и $\Lambda = 6$. Области устойчивости для более длинноволновых режимов ведут себя аналогичным образом, но

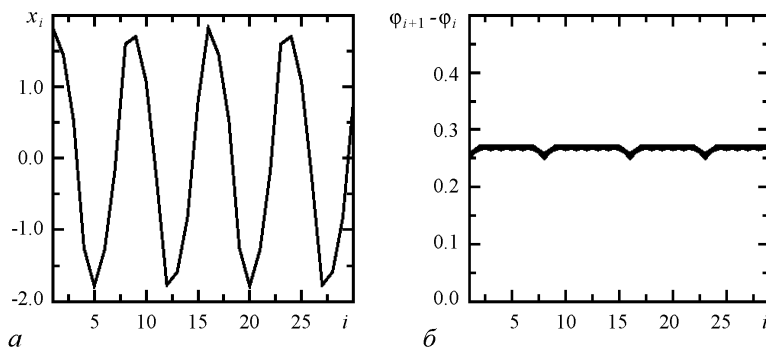


Рис. 4. Пространственный профиль бегущей волны в режиме $k = 4$ (а) и распределение разностей фаз между колебаниями соседних осцилляторов вдоль цепочки (б)

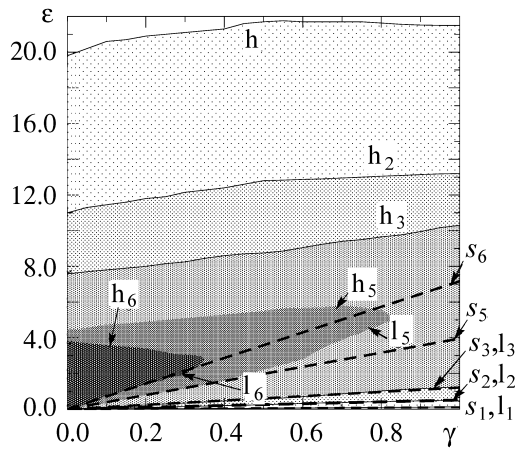


Рис. 5. Границы областей устойчивости режимов бегущих волн в системе (1): l_k и h_k – нижняя и верхняя границы области устойчивости для волны C^k . Области устойчивости обозначены оттенками серого цвета: более коротковолновым режимам соответствует более темный цвет. Штриховыми линиями изображены соответствующие границы областей устойчивости s_1 - s_6 для гармонических осцилляторов (3)

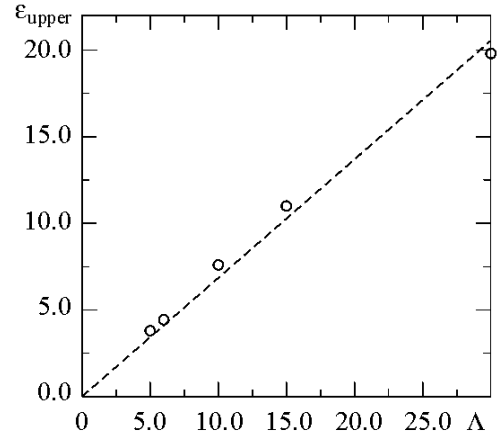


Рис. 6. Зависимость верхней границы области устойчивости режима бегущей волны при слабой связи ($\gamma \rightarrow 0$) ϵ_u от длины волны Λ (кружочки). Приведена аппроксимирующая прямая

их верхняя и нижняя границы замыкаются при коэффициентах связи, больших единицы. Таким образом, диаграмма режимов для цепочки генераторов Ван дер Поля (1) представляет собой вложенные друг в друга структуры ограниченных областей. Области устойчивости более коротковолновых режимов находятся внутри областей устойчивости для режимов с большими длинами волн. Нижние границы областей устойчивости выходят из точки с координатами ($\gamma = 0; \epsilon = 0$) и при малой связи представляют собой прямые линии (как и в случае гармонических осцилляторов). Верхние границы при малой связи представляют собой почти прямые линии, выходящие каждая из своей точки с координатами ($\gamma = 0; \epsilon_u^k$), где k – волновое число бегущей волны. Зависимость параметра нелинейности, соответствующего верхней границе области устойчивости режима от длины волны при нулевой связи ϵ_u^k , хорошо аппроксимируется прямой линией (рис. 6).

4. Исследование областей притяжения бегущих волн

Система уравнений (1), как аналогичные многомерные системы, при малой связи должна демонстрировать развитую мультистабильность. При этом можно предположить, что помимо описанных выше режимов бегущих волн (включая режим с «дефектами» для $k = 4$) в системе могут наблюдаться и другие колебательные режимы, включая режимы с квазипериодической и хаотической временной динамикой. Поэтому возникает закономерный вопрос, насколько описанные выше режимы бегущих волн являются типичными. Под типичностью мы понимаем вероятность выхода на тот или иной колебательный режим при случайном задании начальных условий. При проведении исследований мы задавали случайным образом $x_i(0)$, используя генератор случайных чисел с равномерным распределением, при этом ско-

рости \dot{x}_i полагались равными нулю. В этом случае и при не слишком больших значениях параметра нелинейности $\varepsilon \lesssim 10$ в системе устанавливались только обозначенные выше (см. рис. 2 и рис. 4) волновые режимы. Вероятности выхода на разные пространственные моды изображены на рис. 7. Естественно, что значения параметров были выбраны так, чтобы все указанные выше моды были устойчивы. Вероятности двух самых длинноволновых режимов с $k = 0$ и $k = 1$ практически одинаковы и близки к значению 0.5. В подавляющем большинстве случаев система выходит именно на них. Для других режимов вероятность с ростом индекса k падает почти экспоненциально (для наглядности значения по оси y отложены в логарифмическом масштабе). Выход на режимы с $k = 5$ и $k = 6$ в наших экспериментах отмечен не был. Вид зависимости вероятности от индекса k позволяет предположить, что их вероятность примерно на порядок и на два порядка, соответственно, меньше, чем вероятность для выхода на режим с $k = 4$. К сожалению, необходимые в данном случае времена наблюдения вышли за возможности компьютерного эксперимента. При других значениях параметров ε и γ наблюдается примерно та же зависимость значений вероятности от индекса k . При больших значениях связи вероятность выхода на пространственно-однородный режим начинает превалировать над вероятностью выхода на режим с $k = 1$.

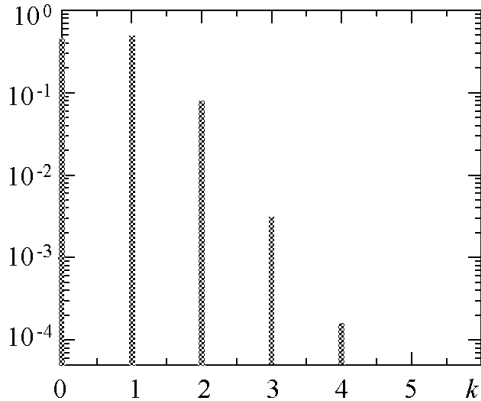


Рис. 7. Вероятность выхода на пространственно-временные режимы, соответствующие разным значениям индекса k при случайном выборе начальных условий x_i из диапазона $x \in [0.1]$. Значения параметров $\varepsilon = 2.0$, $\gamma = 0.1$

Нужно заметить, что при другом выборе модели базового осциллятора цепочки выход на пространственно-регулярные режимы бегущих волн может не наблюдаться. Например, в случае ансамбля из гармонических осцилляторов с жестким возбуждением [11] случайный выбор начальных условий ведет к появлению пространственно-разупорядоченных колебаний.

Для того чтобы система вышла на нужный пространственный режим, можно задать начальные условия и специальным образом. Например, задавая начальные условия с пространственным периодом, близким к периоду желаемого режима. Данный способ использовался нами для построения диаграммы на рис. 5. Так же можно попытаться оценить величину бассейна притяжения аттрактора, соответствующего тому или иному пространственно-временному режиму. Естественно, что построение полных бассейнов притяжения, в силу высокой размерности системы, является задачей практически не реализуемой. Оценку области притяжения можно получить, задавая начальные условия с определенным фазовым сдвигом по пространственной координате

$$x_i = \rho \sin(\phi_i) \quad y_i = \rho \cos(\phi_i).$$

Варьируя ρ и ϕ , мы получили характерную диаграмму для бассейнов притяжения, которая изображена на рис. 8 для двух разных значений параметра связи. При росте параметра связи зоны коротковолновых режимов сужаются или исчезают совсем (мода с $k = 6$ на рис. 8, б), а зоны длинноволновых режимов, соответственно, расширяются. Из диаграммы видно, что при значениях угла ϕ , меньших 90° , области

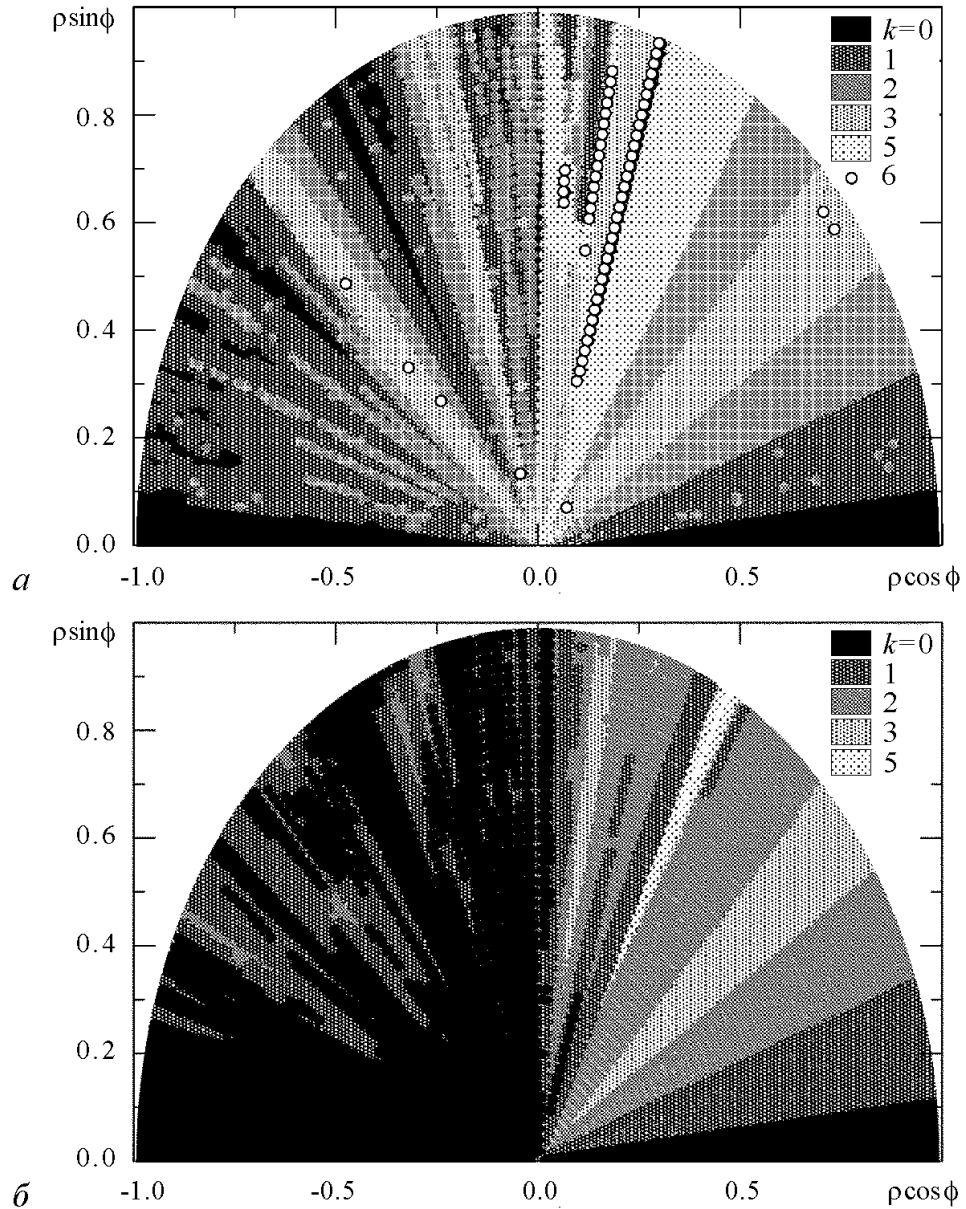


Рис. 8. Диаграмма бассейнов притяжения для разных пространственных мод в полярных координатах: $x_i = \rho \sin(\phi_i)$, $y_i = \rho \cos(\phi_i)$; $\varepsilon = 2.0$; $\gamma = 0.1$ (а), 0.42 (б)

притяжения разных мод устроены достаточно регулярно: они заполняют сектора, примыкающие к значению угла, равного разности фаз, между колебаниями соседних осцилляторов для данного режима. При значениях угла ϕ , больших 90° , области устойчивости ведут себя менее предсказуемо. Поскольку моды со значениями разностей фаз, больших 90° , при положительной связи неустойчивы, в окрестности выбираемых начальных условий нет устойчивых пространственно-волновых режимов. Вследствие этого фазовым траекториям приходится дольше блуждать к устойчивому состоянию, что, видимо, и определяет более сложное устройство бассейна притяжения для больших углов.

5. Волны с движущимися фазовыми дефектами

Если выбрать параметр нелинейности достаточно большим ($\varepsilon \sim 10$), то наряду с уже описанными режимами бегущих волн начинают наблюдаться бегущие волны с движущимися «дефектами». Такие дефекты представляют собой фазовые и амплитудные сбои (то есть точку пространства или номер осциллятора с отличающимся от характерного для данной моды значения разности фаз), которые движутся вдоль кольца с постоянной скоростью. Один из подобных примеров приведен на рис. 9. При наличии одного дефекта временная динамика представляет собой двухчастотные квазипериодические колебания. Если дефектов несколько, то они движутся каждый со своей скоростью, соответственно в фазовом пространстве формируется многомерный тор. Если цепочка осцилляторов достаточно длинная, то возможно формирование торов высокой размерности, что при наличии небольшого шума приводит к поведению, практически не отличимому от хаотического.

Возникновение в кольце осцилляторов квазипериодических колебаний вследствие формирования фазовых дефектов было описано в работе [18]. Однако природа дефекта в нашем случае является иной. В рассматриваемой в [18] системе генераторов с жестким возбуждением исходной причиной возникновения дефектов являлась бистабильность каждого элемента ансамбля. В результате разброса по устойчивым состояниям одиночных осцилляторов, в их ансамбле формировались кластеры синхронных синфазных колебаний. Колебания в разных кластерах характеризовались

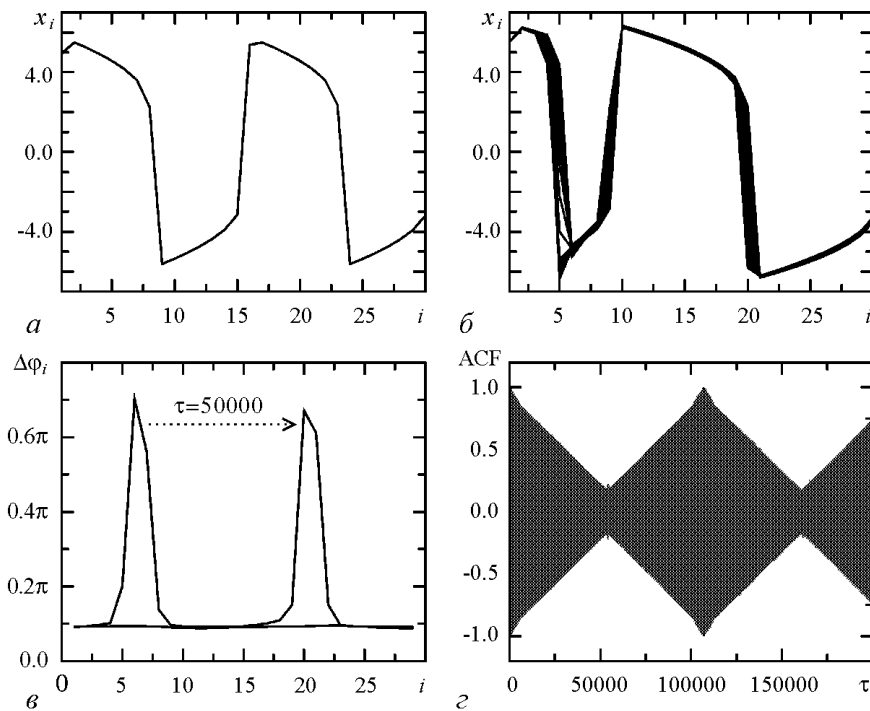


Рис. 9. Исходная волна без «дефекта» с $k = 2$ (а); волна с фазовым «дефектом» (б); зависимость разности фаз между колебаниями соседних осцилляторов в два разных момента времени (в); автокорреляционная функция, построенная по временной реализации одного из осцилляторов (г). Значения параметров: $\varepsilon = 10$, $\gamma = 0.01$

разными амплитудами и частотами. При этом на границе между кластерами наблюдался «сбой фазы». В ансамбле ангармонических осцилляторов Ван дер Поля фазовые дефекты возникают в отсутствие частотных и амплитудных кластеров на базе пространственно-периодических режимов. При этом средние амплитуды и частоты во всех осцилляторах ансамбля остаются одинаковыми.

Области пространства параметров, в которых наблюдаются режимы с фазовыми дефектами, существуют при большой нелинейности и малой связи. Для того чтобы выйти на режим с фазовыми дефектами, образованный на базе волны C^k , необходимо выбрать значения параметров, где «чистый» режим устойчив, и, увеличивая параметр ε , пересечь верхнюю границу устойчивости для исходной волны. Переход между «чистым» режимом и режимом с дефектами сопровождается гистерезисом, то есть оба режима сосуществуют в некоторой области пространства параметров.

6. Переключения между волновыми режимами под действием внешнего шума

Каждому из рассмотренных выше волновых режимов в многомерном фазовом пространстве системы соответствует определенный аттрактор со своим бассейном притяжения. В отсутствие возмущений фазовая траектория, попав в область притяжения одного из аттракторов, притягивается к нему и остается на аттракторе неограниченно долго. Наличие внешнего шума может приводить к следующим эффектам.

- Искажения волнового режима, фазовые сбои и нарушения однородности в распределении амплитуд.

- Переключения между сосуществующими волновыми режимами.

- Появление новых колебательных режимов, в том числе и в результате объединения всех или части сосуществующих структур в единую.

В данной работе мы рассматриваем влияние некоррелированных источников шума с гауссовым распределением на описанные в предыдущем разделе мультистабильные состояния и исследуем индуцированные шумом переходы между мультистабильными состояниями.

Уравнение ансамбля осцилляторов, в каждый из которых добавлен независимый источник некоррелированного гауссова шума, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= y_i \\ \dot{y}_i &= (\varepsilon - x_i^2)x_i - x_i + \gamma(y_{i+1} + 2y_i - y_{i-1}) + \sqrt{2D}\xi_i, \end{aligned} \quad (7)$$

где ξ_i – источник шума в i -м осцилляторе, D – интенсивность шума. Выберем значения управляющих параметров таким образом, чтобы при $D = 0$ все рассматриваемые бегущие волны были устойчивы: $\varepsilon = 3.0, \gamma = 0.25$. Задав соответствующие начальные условия, выберем волну с наименьшим пространственным периодом, что соответствует $k = 6$. При плавном увеличении интенсивности шума профиль бегущей волны начинает искажаться (рис. 10, *a*). При достижении значения интенсивности шума $D = 0.0003$ система переходит на волновой режим со значением $k = 5$ (рис. 10, *б*). Продолжая увеличивать интенсивность шумового воздействия, при достижении значения $D = 0.007$ можно наблюдать переход на новый пространственный режим, с четырьмя максимумами, что соответствует $k = 4$ (рис. 10, *в*). Данный волновой режим наблюдается в системе вплоть до значений интенсивности шума $D = 0.03$ (рис. 10, *г*), после чего происходит переход системы на следующий по длине волны режим с $k = 3$, и при $D = 0.07$ – с $k = 2$.

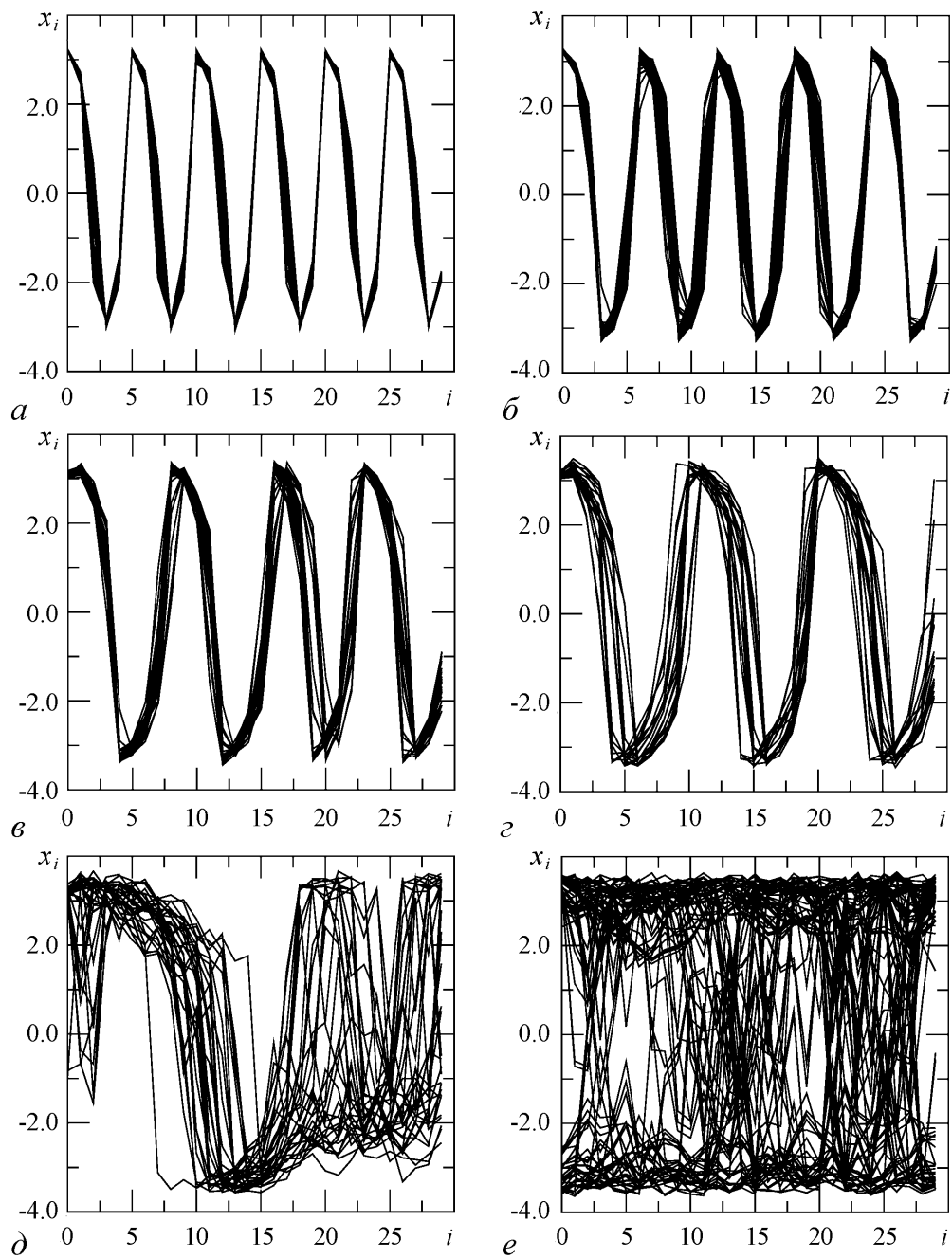


Рис. 10. Переходы между режимами бегущих волн с разными длинами под действием нормально-го белого шума: $a - \Lambda = 5, D = 0.0002$; $b - \Lambda = 6, D = 0.0003$; $c - \Lambda \approx 7.5, D = 0.007$; $d - \Lambda = 10, D = 0.03$; $e - \Lambda = 30, D = 0.17$; $e -$ пространственно-однородный режим $D = 0.22$

В диапазоне значений интенсивности шума $0.17 < D < 0.22$ в цепочке помимо пространственно-однородного колебательного режима существует только режим, объединяющий множество волн в окрестности волны с пространственным периодом,

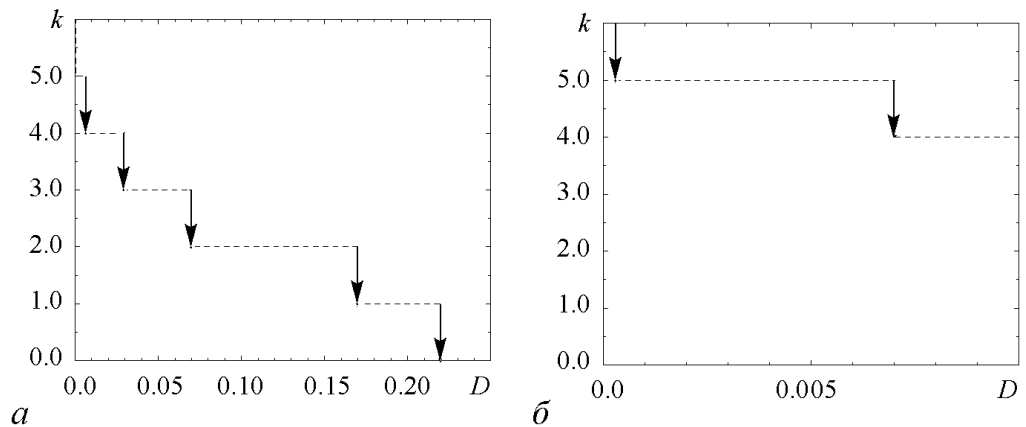


Рис. 11. *a* – диаграмма индуцированных шумом переключений между сосуществующими режимами бегущих волн: зависимость k , соответствующего минимальной длине волны Λ , наблюдаемой в численном эксперименте, от интенсивности шума D при $\varepsilon = 3.0$, $\gamma = 0.25$; *b* – фрагмент диаграммы в увеличенном по оси абсцисс масштабе

равным длине цепочки $\Lambda = 30$ (рис. 10, *d*), а при больших интенсивностях шума – только пространственно-однородный режим (рис. 10, *e*). Диаграммы описанных выше переходов между мультистабильными состояниями приведены на рис. 11. Таким образом, в системе (7) возможны индуцированные шумом переключения между сосуществующими пространственными структурами. В численных экспериментах наблюдались только переходы от коротковолновых режимов к более длинноволновым, так как вероятность обратных переходов мала. Переходы между наиболее длинноволновыми из устойчивых режимов и пространственно-однородным режимом наблюдались только при больших интенсивностях шума. Пороговые интенсивности шума зависят как от длины волны исходного режима, так и от выбранных значений параметров системы. Если параметры выбраны близко к границе зоны устойчивости данного режима (см. рис. 5), то достаточный для перехода уровень шума будет существенно меньшим.

Таким образом, в системе (7) имеются метастабильные состояния, время жизни которых существенно различно. Чем более длинноволновой является рассматриваемая структура, тем более она устойчива к воздействию шума. Флуктуации могут индуцировать переходы между сосуществующими структурами, имеющие односторонний характер: от коротковолновых режимов к более длинноволновым.

Заключение

В кольце связанных автогенераторов сосуществуют режимы бегущих вдоль кольца волн, пространственный период которых целое число раз укладывается вдоль цепочки. Данные режимы являются типичными для рассматриваемой системы, то есть они с близкой к единице вероятностью реализуются при случайном задании начальных условий. Увеличение связи сужает бассейны притяжения более коротковолновых режимов за счет увеличения бассейнов более длинноволновых. В квазигармоническом приближении области устойчивости бегущих волн не ограничены, они наблюдаются при любых положительных значениях параметра возбуждения.

В цепочке ангармонических осцилляторов области существования пространственно-неоднородных режимов являются ограниченными как по параметру связи, так и по параметру возбуждения. Выход за границу области существования, если он происходит при больших значениях нелинейности и слабой связи, ведет к появлению в бегущей волне одного или нескольких фазовых сбоев, движущихся вдоль кольца каждый со своей скоростью.

Обнаруженные и исследованные режимы являются грубыми и наблюдаются как в чисто детерминированной системе, так и при добавлении внешнего шума. Внешний шум разрушает коротковолновые режимы бегущих волн и индуцирует переходы к более длинноволновым режимам.

Авторы выражают благодарность Министерству образования и науки РФ и Американскому фонду гражданских инициатив и развития (CRDF) за финансовую поддержку проведенных исследований (грант REC-006).

Библиографический список

1. Kuramoto Y. Chemical Oscillations Waves and Turbulence. Berlin: Springer, 1984.
2. Cross M.G., Hohenberg P.C. Pattern formation outside of equilibrium // Rev. Mod. Phys. 1993. Vol. 65. № 3. P. 851.
3. Парыгин В.Н. Взаимная синхронизация трех связанных автоколебательных генераторов в случае слабой связи // Радиотехника и электроника. 1956. № 2. С. 197.
4. Малафеев В.М., Полякова М.С., Романовский Ю.М. О процессе синхронизации автогенераторов, связанных через проводимость // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13. С. 936.
5. Мынбаев Д.К., Шиленков М.И. Взаимная фазовая синхронизация генераторов, соединенных по кольцевой схеме // Радиотехника и электроника. 1981. № 2. С. 361.
6. Мальцев А.А., Силаев А.М. Режимы работы цепочки автогенераторов с «жесткими» предельными циклами, связанных с помощью реактивных элементов // Изв. вузов. Радиофизика. 1979. Т. 22. С. 826.
7. Дворников А.А., Уткин Г.М., Чуков А.М. О взаимной синхронизации цепочки резистивно связанных автогенераторов // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. С. 1388.
8. Ermentrout G.B. The behaviour of rings of coupled oscillators // J. of Math. Biol. 1985. Vol. 23. P. 55.
9. Ermentrout G.B. Stable periodic solutions to discrete and continuum arrays of weakly coupled nonlinear oscillators // SIAM J. of Appl. Math. 1992. Vol. 52. P. 1664.
10. Ren L., Ermentrout G.B. Phase locking in chains of multiple-coupled oscillators // Physica D. 2000. Vol. 143. P. 56.
11. Nekorkin V.I., Makarov V.A., Velarde M.G. Spatial disorder and waves in a ring chain of bistable oscillators // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1996. Vol. 6. P. 1845.
12. Daido H. Strange waves in coupled-oscillator arrays: mapping approach // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 1683.
13. Гуртовник А.С., Неймарк Ю.И. Синхронизмы в системе циклически слабосвязанных осцилляторов // Динамические системы: Межвузовский сборник научных трудов. Н. Новгород: Изд.-во Нижегородского университета. 1991. С. 84.

14. *Garcia-Ojalvo J., Lacasta A. M., Sagues F., Sancho J. M.* Noise-sustained signal propagation // *Europhys. Lett.* 2000. Vol. 50. P. 427.
15. *Sancho J.M., Garcia-Ojalvo J.* Noise-induced order in extended systems: *Stochastic Processes in Physics, Chemistry, and Biology.* Springer, 2000.
16. *Khovanov I. A., Luchinsky D. G., Mannella R., McClintock P. V. E.* Fluctuations and the energy-optimal control of chaos // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 85. P. 2100.
17. *Luchinsky D.G., Beri S., Mannella R., McClintock P.V.E. , Khovanov I.A.* Optimal fluctuations and the control of chaos // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* 2002. Vol. 12. P. 583.
18. *Nekorkin V.I., Makarov V.A.* Spatial chaos in a chain of coupled bistable oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 74. P. 4819.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского*

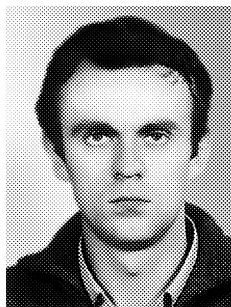
*Поступила в редакцию
После доработки*

*27.01.2005
29.07.2005*

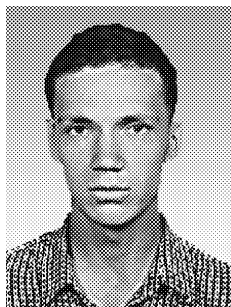
RUNNING WAVES IN A DISCRETE ANHARMONIC SELF-OSCILLATING MEDIUM

A.V. Shabunin, A.A. Akopov, V.V. Astakhov, T.E. Vadivasova

The work is devoted to investigation of dynamics of running waves in the ring of Van-der-Pol oscillators with diffusive coupling. Regions of existence and stability are built in the parameters space. Typicalness of appearance of regimes with different wavelengths and regularities of their disappearance are considered. Influence of anharmonicity on multistability of spatio-periodic regimes is studied.



Шабунин Алексей Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1990). Доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ, кандидат физико-математических наук (1998). Научные интересы - нелинейная динамика, теория колебаний, синхронизация и управление хаосом. Автор более 40 научных публикаций. E-mail: alexey@chaos.ssu.runnet.ru



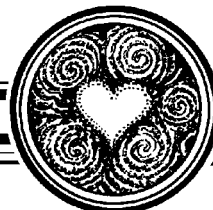
Акопов Артем Александрович – родился в Сочи (1973), окончил физический факультет Саратовского государственного университета (2000). Аспирант кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Имеет 15 публикаций.



Астахов Владимир Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1980). Защитил кандидатскую (1983) и докторскую диссертацию (1999). Профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов - теория колебаний и динамический хаос, синхронизация и управление хаосом. Имеет более 80 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях. E-mail: astakhov@chaos.ssu.runnet.ru



Вадивасова Татьяна Евгеньевна – родилась в 1958 году. Окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981), доктор физико-математических наук. В настоящее время - профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических осцилляторов, явление фазовой мультистабильности взаимодействующих хаотических систем, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, статистические характеристики динамического хаоса, роль флуктуаций в нелинейных системах и др. Автор более 60 публикаций в отечественной и зарубежной печати, включая 3 монографии. E-mail: tanya@chaos.ssu.runnet.ru



ФАЗОВАЯ АВТОПЕРЕУСТАНОВКА И КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ АКТИВНОСТИ В АВТОГЕНЕРАТОРНЫХ МОДЕЛЯХ НЕЙРОННЫХ СИСТЕМ

В.Б. Казанцев, В.И. Некоркин

В работе изучаются процессы формирования колебательных структур активности в автогенераторных моделях нейронных систем. Такие структуры играют ключевую роль в информационных процессах высшей нервной деятельности. Исследуется эффект *автопереустановки* фазы при импульсном воздействии в модели нейронов с подпороговыми колебаниями, при котором значение переустановленной фазы не зависит от исходной фазы и определяется только параметрами стимула. Следствием эффекта автопереустановки является фазовая синхронизация ансамблей автогенераторных элементов и формирование фазовых кластеров. Для поддержания установленных фазовых соотношений в работе предлагается механизм импульсно-управляемого взаимодействия элементов ансамбля. Модель строится на основе динамических закономерностей, характерных для оливомозжечковой системы формирования моторных паттернов.

Введение

Последние исследования нейрофизиологов свидетельствуют о том, что важную роль в функционировании различных нейронных систем играют процессы коллективной колебательной активности [1]. Колебания в частотном диапазоне 1 – 100 Гц регистрируются в различных частях головного мозга. Так, например, сравнительно быстрые процессы (около 40 Гц) происходят в таламокортикальной системе [2, 3]. Они связаны с такими явлениями, как пространственно-временное связывание сенсорной информации (*binding*), приходящей по различным сенсорным каналам, что составляет основу ассоциативного восприятия. Колебания в диапазоне 8 – 12 Гц играют ключевую роль в динамике оливомозжечковых взаимодействий, ответственных за формирование моторных паттернов в системе моторного контроля [4, 5]. Колебательные процессы в гиппокампе (5 – 10 Гц) связаны с явлениями кратковременной памяти и фазовой прецессии [6, 7]. Нейронные системы способны за счет собственной динамики формировать пространственно-временные структуры колебательной активности, изменение (преобразование) которых происходит за

счет сенсорных стимулов. При изучении колебательных свойств нейронных систем важнейшей информационной характеристикой является фаза колебаний. Именно она определяет моменты возникновения импульсов действия – спайков, которые, как считается, являются основой «нейронного кода» и осуществляют различные функции передачи и преобразования информации. Нейроны нижних олив, составляющие основу оливомозжечковой системы, демонстрируют квазипериодические колебания ниже порога возбуждения (подпороговые колебания) с фиксированной амплитудой (5 – 10 мВ) и частотой (8 – 12 Гц). Импульсы возбуждения формируются на пиках подпорогового сигнала, а моменты их возникновения однозначно определяются фазой колебаний. Таким образом, структуры коллективной активности нейронов нижних олив можно классифицировать как фазовые кластеры. Согласно представлениям нейрофизиологов, эти фазовые кластеры и определяют моторные паттерны, задающие шаблоны мышечных сокращений [5]. Например, синфазные колебания нейронов определяют одновременное появление спайков и, как следствие, синхронное сокращение определенных групп мышц. Изменение фазы колебаний нейрона нижних олив и, как следствие, конфигурации фазовых кластеров происходит при получении системой сенсорного или командного стимула. Важную роль в формировании фазовых кластеров играет архитектура оливомозжечковой системы. Нейроны нижних олив взаимодействуют между собой преимущественно локально через электрический синапс (гэп-контакт). Однако характеристики связи не являются фиксированными и изменяются за счет оливомозжечковой петли подавляющей обратной связи, активация которой происходит при возникновении импульса возбуждения нейрона нижних олив. Фактически, межнейронное взаимодействие является *импульс-управляемым*. Его действие играет определяющую роль в поддержании заданной пространственной конфигурации фазовых кластеров, устанавливаемых согласно предложенному стимулу [8].

При моделировании стимул-индуцированных структур активности в нейронных системах одной из основных задач является исследование динамики нейронов при воздействии импульсных стимулов. С динамической точки зрения, это – задача о неавтономной динамике нелинейной системы. Здесь широко известны, например, явления вынужденной синхронизации, захвата фазы и хаотизации колебаний [9-11]. Воздействие одиночного импульса на классический генератор Ван дер Поля приводит к фазовой переустановке. После окончания входного импульса система восстанавливает частоту и амплитуду автоколебаний, однако, фаза колебаний сдвигается по отношению к исходной. Очевидно, что установившаяся фаза зависит от исходной фазы и параметров стимула (амплитуды и длительности). Совершенно по-другому реагируют на стимул нейроны нижних олив (рис. 1 [4]). При получении входного импульса переустановка происходит таким образом, что колебания всегда возвращаются в одинаковую фазу, значение кото-

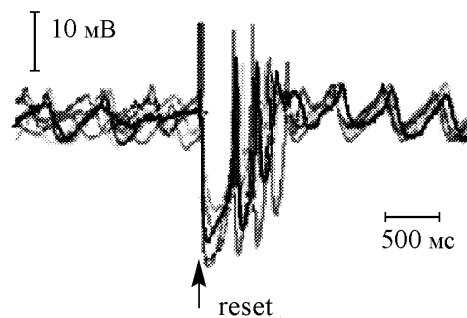


Рис. 1. Фазовая переустановка в нейронах нижних олив. Экспериментальные данные исследования срезов ствола головного мозга крысы. При наложении стимула колебания переустанавливаются к одинаковой фазе. Рисунок взят из статьи [4]

рой не зависит от момента прихода стимула (исходной фазы) и определяется только амплитудой и длительностью стимула.

В этой статье мы рассмотрим отличительные динамические механизмы фазовой переустановки в нейронных системах и обсудим возможность формирования и поддержания фазовых кластеров заданной конфигурации в колебательных нейронных ансамблях с помощью механизма импульсно-управляемых связей. Для моделирования собственной динамики нейронов будем использовать известную модель ФитцХью – Нагумо [8,12-15]. Эта модель, с одной стороны, воспроизводит все ключевые черты динамики нейронов, с другой стороны, представляется наиболее выгодной для теоретического рассмотрения в неавтономном случае и расчета динамики больших ансамблей нейронов.

1. Модель

Как было показано в работах [8, 15] динамику нейронов нижних олив можно описать с помощью следующей феноменологической модели:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{\text{Na}} \frac{du}{dt} = f(u) - v, \\ \frac{dv}{dt} = [v - d(z - I_{\text{Ca}}) - I_{\text{Na}}], \\ \frac{dz}{d(kt)} = f(z) - w, \\ \frac{dw}{d(kt)} = \varepsilon_{\text{Ca}}(z - I_{\text{Ca}} - I_{\text{st}}(t)). \end{array} \right. \quad (1)$$

Модель представляет собой совокупность двух взаимодействующих блоков, динамика которых определяется переменными (z, w) и (u, v) , соответственно. Первый блок описывает сравнительно медленные процессы в мембране нейрона, определяемые кальциевым компонентом трансмембранных ионных токов. Эта подсистема формирует квазисинусоидальные подпороговые колебания нейрона. Второй блок (переменные (u, v)) описывает генерацию потенциалов действия (спайков). В этих процессах определяющую роль играют натриево-калиевые компоненты ионных токов. Нелинейная функция f имеет вид $f(x) = x(x - a_{\text{Ca,Na}})(1 - x)$, $0 < a_{\text{Ca,Na}} < 1$. Параметры $I_{\text{Ca,Na}}$ характеризуют уровни деполяризации и управляют порогами возбуждения соответствующих компонентов модели. Параметр k регулирует относительные временные масштабы блоков. Взаимодействие между блоками управляется параметром связи d . В данном варианте модели связь между блоками является однонаправленной. Параметры системы (1) выбираются таким образом, чтобы в первой подсистеме (переменные (z, w)) генерировались квазисинусоидальные автоколебания, соответствующие предельному циклу в окрестности бифуркации Андронова – Хопфа. Второй блок находится в возбуждимом режиме и генерирует короткие импульсы возбуждения при превышении определенного порога. Функция $I_{\text{st}}(t)$ описывает действие внешнего импульсного стимула. Выберем в качестве такого стимула однократный импульс фиксированной амплитуды A_{st} и длительности τ .

При увеличении связи между подсистемами величина эффективного порога возбуждения (u, v) -подсистемы изменяется согласно квазисинусоидальным колеба-

ниям переменной z . Импульсы генерируются на пиках (максимумах) подпороговых колебаний. Важным следствием является однозначная связь моментов возникновения импульсов с фазой подпороговых колебаний. Таким образом, основной информационной характеристикой модели является фаза колебаний (z, w) -подсистемы. Поскольку обратным воздействием на (z, w) -подсистему в модели (1) пренебрегается, рассмотрим динамику этой подсистемы при действии внешнего стимула.

2. Фазовая автопереустановка

Рассмотрим динамику (z, w) -подсистемы модели (1)

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z) - w, \\ \dot{w} = \varepsilon(z - I - I_{st}(t)). \end{cases} \quad (2)$$

При $I_{st}(t) = 0$ система (2) имеет единственное состояние равновесия в точке $O(I, f(I))$. При $I > z_{\min}$, где z_{\min} – координата минимума функции $f(z)$, это состояние теряет свою устойчивость в результате бифуркации Андронова – Хопфа, и в системе мягко рождается устойчивый предельный цикл, отвечающий квазисинусоидальным колебаниям модели (рис. 2, *a*). Зафиксируем для определенности следующие значения параметров $a_{Ca} = 0.01$, $\varepsilon = 0.02$, $I = I_{Ca} = 0.01$.

Введем в рассмотрение некоторый периодический сигнал $x(t)$, период T которого совпадает с периодом подпороговых колебаний. Такой сигнал можно интерпретировать как опорный, генерируемый, например, соседним нейроном при отсутствии стимула, $I_{st}(t) = 0$. Введем относительную фазу подпороговых колебаний следующим образом:

$$\varphi = 2\pi \frac{p_z - p_x}{T}, \quad \text{mod } 2\pi, \quad (3)$$

где p_z и p_x – времена максимумов подпорогового и опорного сигналов, соответственно. При внешнем импульсном воздействии амплитуда и частота подпороговых колебаний «восстанавливаются» к значениям, определяемым предельным циклом автономной (невозмущенной) системы. Однако фаза колебаний изменяет свое значение от некоторого φ_1 к φ_2 (рис. 2, *б*). Предположим теперь, что на систему действует одиночный прямоугольный импульс с амплитудой A_{st} и длительностью τ . Момент поступления импульса совместим с максимумом опорного сигнала. Будем изменять начальную фазу φ_1 в интервале $[0, 2\pi]$.

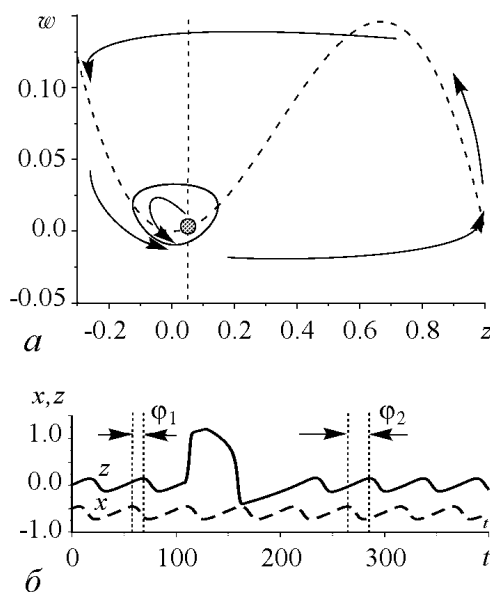


Рис. 2. *a* – фазовая плоскость модели (2) в режиме подпороговых колебаний. Устойчивый предельный цикл мягко рождается в результате бифуркации Андронова – Хопфа; *б* – фаза подпороговых колебаний, определяемая как временной сдвиг относительно опорного сигнала $x(t)$ согласно формуле (3)

На рис. 3 представлены временные реализации колебаний модели при различных начальных фазах. Очевидно, что фаза установившихся колебаний оказывается одинаковой, $\varphi_2 \approx \text{const}$, для любых значений начальной фазы. Отметим, что эффект фазовой

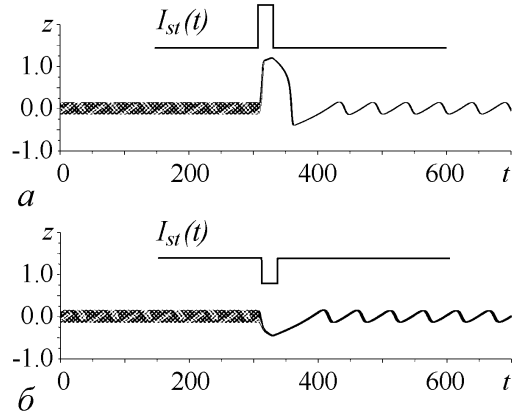


Рис. 3. Фазовая автоперестройка в модели ФитцХью – Нагумо. Временные реализации для различных начальных условий, синхронизованные относительно импульса-стимула: *a* – $A_{st} = 1.15$, $\tau = 0.4T$; *б* – $A_{st} = -1$, $\tau = 0.4T$; T – период колебаний

переустановки в модели ФитцХью – Нагумо фактически повторяет экспериментальные данные с нейронов нижних олив (см. рис. 1). На рис. 4, *a* представлена зависимость стандартного отклонения (разброса) переустановленных фаз от амплитуды импульса-стимула. Эта зависимость описывается некоторой колоколообразной функцией с быстро спадающими «хвостами». При достаточно малой амплитуде импульса фазовая переустановка не происходит, фазовая переменная остается распределенной в интервале $[0, 2\pi]$. При увеличении амплитуды происходит сильное сжатие фазовой переменной к некоторому среднему значению φ^* . Заметим, что при увеличении амплитуды импульса (интенсивности воздействия) девиация фазовой переменной асимптотически уменьшается. Отметим также, что фазовая переустановка имеет место как для положительной амплитуды импульса, $A_{st} > 0$ (см. рис. 3, *a*), так и для отрицательной, $A_{st} < 0$

переустановки в модели ФитцХью – Нагумо фактически повторяет экспериментальные данные с нейронов нижних олив (см. рис. 1). На рис. 4, *a* представлена зависимость стандартного отклонения (разброса) переустановленных фаз от амплитуды импульса-стимула. Эта зависимость описывается некоторой колоколообразной функцией с быстро спадающими «хвостами». При достаточно малой амплитуде импульса фазовая переустановка не происходит, фазовая переменная остается распределенной в интервале $[0, 2\pi]$. При увеличении амплитуды происходит сильное сжатие фазовой переменной к некоторому среднему значению φ^* . Заметим, что при увеличении амплитуды импульса (интенсивности воздействия) девиация фазовой переменной асимптотически уменьшается. Отметим также, что фазовая переустановка имеет место как для положительной амплитуды импульса, $A_{st} > 0$ (см. рис. 3, *a*), так и для отрицательной, $A_{st} < 0$

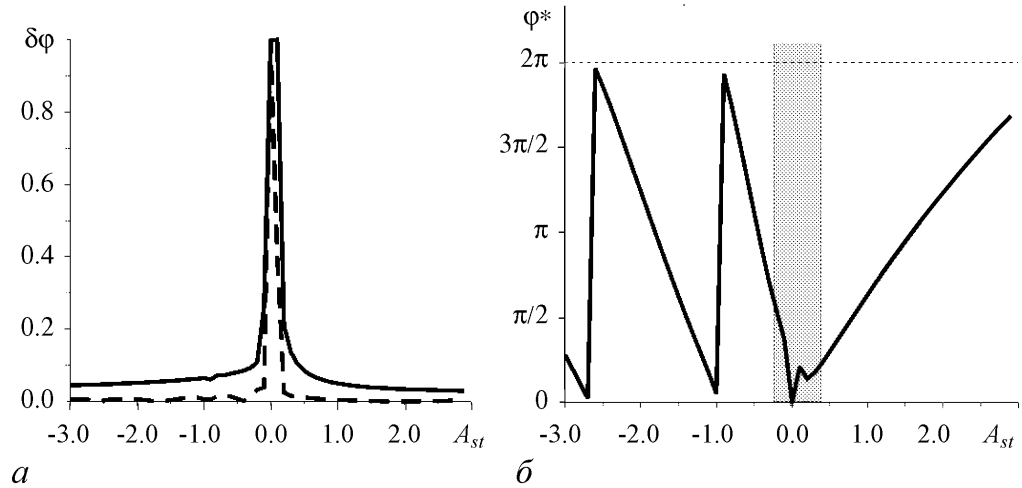


Рис. 4. *a* – зависимость стандартного приведенного к 1 отклонения фаз колебаний от амплитуды импульса-стимула при фиксированной длительности импульса $\tau = 0.4T$. Расчет проводился по 100 временным реализациям с начальными фазами, равномерно распределенными в интервале $[0, 2\pi]$. Сплошная кривая соответствует отклику на одиночный импульс; штриховая – на дуплет импульсов с достаточно большим (примерно $10T$) межимпульсным интервалом; *б* – зависимость установившейся фазы от амплитуды импульса при фиксированной длительности $\tau = 0.4T$

(см. рис. 3, б). Другими словами, переустановка происходит как в случае возбуждающего стимула, так и в случае подавляющего (тормозящего) воздействия на нейрон. При этом «точность» переустановки выше для возбуждающего импульса. Исследуем теперь зависимость установившейся фазы φ^* от амплитуды импульса (рис. 4, б). При изменении амплитуды установившаяся фаза может принимать любые значения в интервале $[0, 2\pi]$. Таким образом, любое требуемое значение фазовой переменной может быть установлено выбором соответствующей амплитуды импульсного воздействия независимо от начальной фазы. Система фактически «забывает начальные условия». По аналогии с автоколебательными процессами в нелинейных диссипативных системах эффект можно трактовать как фазовую *автопереустановку*.

2.1. Динамический механизм фазовой автопереустановки. Исследуем динамический механизм фазовой автопереустановки. При отсутствии стимула, $I_{st} = 0$, наличие в системе (2) малого параметра, $\varepsilon \ll 1$, позволяет разделить движения на быстрые и медленные. Медленные движения происходят в окрестности кривой $w = f(z)$ медленных движений в слое толщиной, примерно равной ε^α ($0 < \alpha < 1$). При этом два участка этой кривой с $f'(z) < 0$ являются устойчивыми по отношению к быстрым движениям $w = w_0 = \text{const}$, происходящим вне слоя (см. рис. 2, а). Устойчивый предельный цикл сравнительно малой амплитуды расположен в окрестности минимума функции $z = f(w)$. Мгновенная фаза колебаний характеризуется угловым положением изображающей точки на предельном цикле при $I_{st} = 0$. Рассмотрим преобразование кривой, отвечающей предельному циклу, при воздействии на систему одиночного прямоугольного импульса. Во время действия импульса, $0 < t < \tau$, динамика модели описывается автономной системой ФитцХью – Нагумо с эффективным параметром деполяризации $I_{eff} = I + A_{st}$

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z) - w, \\ \dot{w} = \varepsilon(z - I_{eff}). \end{cases} \quad (4)$$

Потребуем, чтобы амплитуда импульса была достаточно велика, $A_{st} > z_{\max} - I$. В этом случае система (4) имеет устойчивое состояние равновесия, расположенное на правой ветви кривой $f(z)$. Кроме того, пусть длительность импульса τ будет также достаточно большой, чтобы за это время все траектории с начальными условиями на предельном цикле оказались в области быстрых движений, расположенной между средней и правой ветвями функции $f(z)$ (рис. 5, а). Тогда образ исходной кривой, отвечающей предельному циклу, будет определяться некоторой замкнутой кривой, вытянутой вдоль быстрых движений. По окончании действия импульса, $t > \tau$, динамика системы определяется исходным параметром деполяризации I (см. рис. 2, а), и образ кривой продолжает эволюционировать по траекториям невозмущенной системы. При движении в слое медленных движений вдоль устойчивой (по отношению к быстрым движениям) правой ветви кривой $f(z)$ происходит сжатие образа в «продольном» направлении. Далее, преодолев участок быстрых движений, образ вновь сжимается в окрестности левой ветви и возвращается в окрестность устойчивого предельного цикла (см. рис. 5, а). В результате любая начальная фаза под действием стимула оказывается переустановленной, приближаясь к одному и тому же значению φ^* , которое определяется параметрами системы и импульса-стимула. Пре-

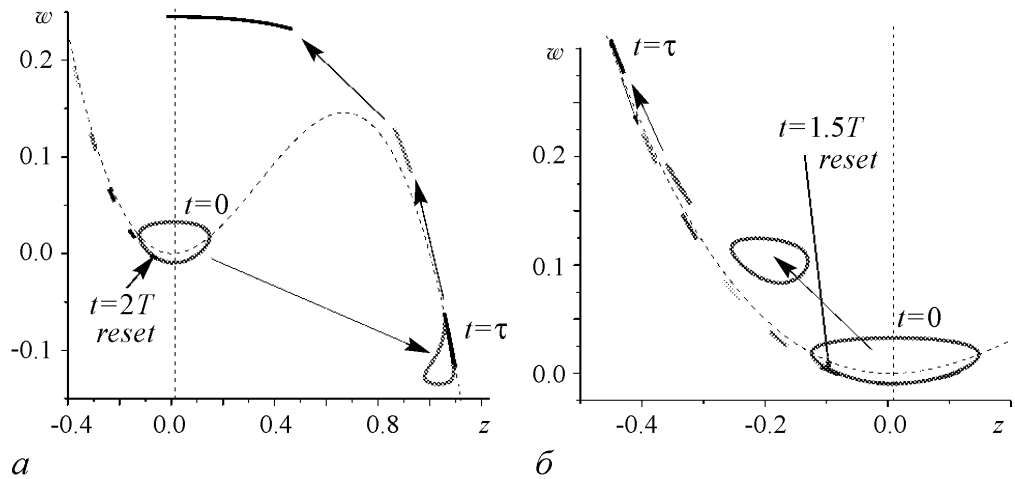


Рис. 5. Механизм фазовой переустановки на фазовой плоскости (z, w) . Преобразование замкнутой кривой, отвечающей предельному циклу, под действием стимула. Последовательность мгновенных снимков $N = 100$ начальных условий, равномерно распределенных по предельному циклу при $t = 0$. Параметры возбуждающего стимула: $a - A_{st} = 1.15, \tau = 0.4T$; $b - A_{st} = -1, \tau = 0.4T$

небрегая временем движения по быстрым траекториям, «точность» переустановки можно оценить сжатием образа в окрестности кривой медленных движений. Полагая $w = w_0 = \text{const}$, получаем из первого уравнения системы (4), что правая и левая ветви медленных движений устойчивы по отношению к быстрым с ляпуновским показателем $\lambda \sim f'(z_0) < 0$. Из второго уравнения системы (4) легко видеть, что время движения по медленным ветвям $\Delta t \sim 1/\varepsilon$. Тогда показатель экспоненциального сжатия образа по переменной z можно оценить приблизительно $\delta \lambda_z = \ln \delta z \sim f'(z_0)/\varepsilon$. Другими словами, при достаточно малом ε в системе происходит сильное сжатие фазового объема в окрестности кривой медленных движений. Таким образом, фазовая автоперустановка в модели ФитцХью – Нагумо определяется релаксационным характером движений на фазовой плоскости. В случае тормозящего (подавляющего) стимула, $A_{st} < 0$, переустановка происходит подобным образом. При воздействии стимула образ предельного цикла «перебрасывается» в окрестность левой ветви кривой медленных движений (рис. 5, б). Ясно, что в этом случае «точность» переустановки снижается по сравнению с возбуждающим стимулом, поскольку время эволюции по медленным движениям уменьшается.

2.2. Отображение фазы. Для описания эффекта фазовой автоперустановки построим отображение фазы [10, 11]. Предположим, что входной сигнал $I_{st}(t)$ представляет собой последовательность прямоугольных импульсов с амплитудой A_{st} , длительностью τ и межимпульсным интервалом T_s , удовлетворяющим следующим предположениям.

(А) Момент прихода i -го импульса в последовательности синхронизован с максимумом опорного сигнала, $t_i = p_x + mT, m \in \mathbb{Z}$.

(Б) Интервал следования импульсов достаточно велик по сравнению с периодом подпороговых колебаний, $T_s = nT, n \gg 1$.

Фазовое пространство неавтономной системы (2) является трехмерным. При

выполнении условия (Б) на секущих Пуанкаре $t = t_i = p_x + mT, m \in Z$, фазовые траектории возвращаются в окрестность замкнутой кривой, отвечающей предельному циклу автономной системы (см. рис. 2, а). Используя определение относительной фазы (3), введем отображение фазы

$$\varphi_{i+1} = T(\varphi_i), \quad (5)$$

где φ_i – фаза колебаний на момент прихода i -го импульса стимула. Отображение (5) является отображением окружности и определено на интервале $[0, 2\pi]$. Оно описывается функцией T , которую называют функцией фазового отклика (phase response curve). В случае, когда интенсивность стимула достаточно велика, функция фазового отклика близка к константе (рис. 6). Отображение (5) имеет единственную неподвижную точку φ^* , координаты которой определяются параметрами стимула, и любая начальная фаза отображается в малую окрестность этой неподвижной точки. Заштрихованная область, отвечающая образу интервала $[0, 2\pi]$ под действием отображения (5), задает «точность» фазовой автоперестройки. Ясно, что повторное итерирование отображения (5), соответствующее дуэту импульсов стимула, еще более сжимает этот образ. Так как импульсы стимула синхронизованы с опорным сигналом (условие (А)), фазовая автоперестройка приводит к захвату фазы колебаний со сдвигом φ^* относительно опорного сигнала. Выбирая соответствующим образом амплитуду импульса, можно получить любое наперед заданное значение φ^* в интервале $[0, 2\pi]$.

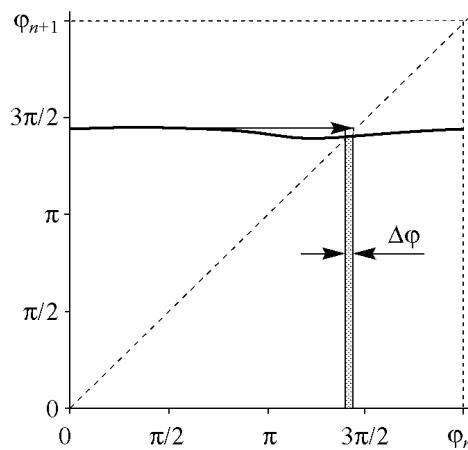


Рис. 6. Отображение фазы при фазовой автоперестройке при $A_{st} = 1.15, \tau = 0.4T$

2.3. Синхронизация ансамблей автогенераторов. Эффект фазовой автоперестройки можно использовать для фазовой синхронизации колебаний ансамблей автогенераторных систем. Поскольку устанавливаемая фаза не зависит от исходной фазы, то при воздействии одинаковым импульсом на элементы ансамбля, нейроны, фаза каждого из них будет переустановлена к одному и тому же значению φ^* (рис. 7). Заметим, что эффект не требует абсолютной идентичности элементов ансамбля, они могут иметь некоторый разброс по частотам. Этот разброс, как показано на рис. 7, приводит к расплыванию фазы и выходу элементов из режима синхронизации. Повторное стимулирование системы импульсом вновь приводит к установлению синхронного режима. Заметим также, что, в отличие от классической синхронизации ансамблей автоколебательных систем, осуществляемой за счет непосредственного взаимодействия между элементами (например, диссипативной связи), стимул-индуцированная синхронизация не требует непосредственного контакта между элементами. В пространстве они могут находиться на значительном удалении друг от друга и не взаимодействовать вообще. Ясно, что такой эффект требует некоторого «центрального» элемента, формирующего импульс-стимул. Более того,

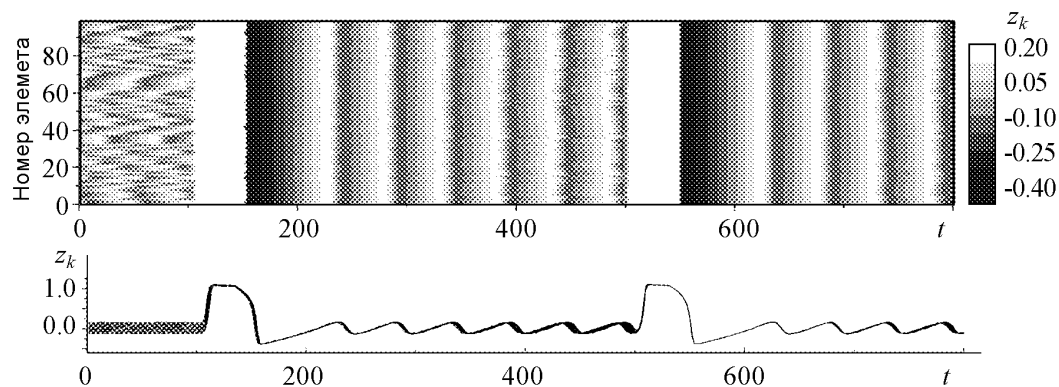


Рис. 7. Пространственно-временная диаграмма стимул-индуцированной синхронизации ансамбля из 100 не взаимодействующих элементов (1)

этот импульс должен поступать на вход каждого из элементов одновременно. Эти два условия определяют архитектуру построения системы стимул-индуцированной синхронизации. Такой архитектурой обладают, например, таламокортикальная и оливомозжечковая нейронные системы. В первом случае роль «центрального» осциллятора играет таламус, который «опрашивает» различные области коры. Во втором случае, в оливомозжечковой системе, – нейроны нижних олив, импульсы возбуждения которых происходят на фоне подпороговых колебаний. Эти импульсы распространяются по аксонам – «лазающим» волокнам, возбуждая клетки Пуркинье коры мозжечка. Как было установлено в экспериментах нейрофизиологов [16], это возбуждение происходит в высшей степени синхронизованно. Время распространения импульса оказывается одинаковым для клеток, расположенных в различных областях коры. Это обеспечивается различной скоростью распространения импульса по аксонам различной толщины.

3. Импульсно-управляемые связи

Как известно, предельный цикл имеет один нулевой ляпуновский показатель, соответствующий движению вдоль траектории. Поэтому установленное с помощью фазовой автопереустановки значение фазы не является асимптотически устойчивым. Это, в частности, приводит к нарушению фазового синхронизма в ансамблях как за счет внутренних частотных расстройек (см. рис. 7), так и за счет разного рода внешних возмущений, шумов и т.д. Поэтому для поддержания требуемых фазовых соотношений необходим другой механизм, обеспечивающий, по крайней мере, локальную устойчивость режимов фазовой синхронизации. Ясно, что такую устойчивость может обеспечить слабое межэлементное взаимодействие между автогенераторами, как это происходит, например, в сетях фазовых осцилляторов [17]. Однако в этом случае, во-первых, процесс установления синхронных режимов будет достаточно длительным, а во-вторых, становится затруднительным обеспечение требуемых фазовых соотношений между элементами ансамбля, например, для формирования фазовых кластеров наперед заданной конфигурации.

Одним из механизмов эффективного контроля фазовых соотношений в ансам-

блях являются так называемые импульсно-управляемые связи. Этот механизм лежит в основе формирования моторных паттернов в оливомозжечковой нейронной системе. Ансамбль нейронов нижних олив снабжен системой подавляющей обратной связи [1]. Ее действие заключается в том, что импульс возбуждения, возникающий на пике подпороговых колебаний, активирует оливомозжечковое взаимодействие, что приводит к подавлению гЭП-контактов, связывающих данный нейрон с соседями. Таким образом, на временном интервале порядка периода подпороговых колебаний нейрон оказывается эффективно изолированным. В течение этого временного интервала, в частности, его фаза может быть переустановлена к любому наперед заданному значению за счет автоперустановки. Следует отметить, что гЭП-контакт обеспечивает сильное межнейронное взаимодействие, что приводит к достаточно быстрой синхронизации колебаний элементов при отсутствии подавляющих импульсов, то есть при подпороговой эволюции системы (1).

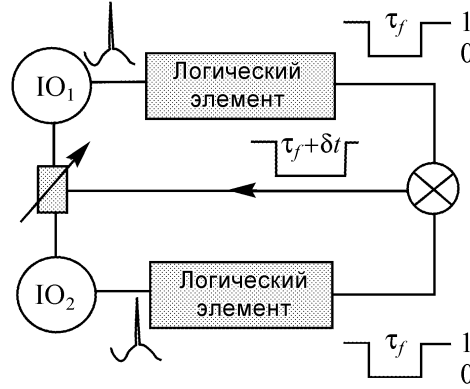


Рис. 8. Блок-схема импульсно-управляемой связи с логическим блоком задержки

Рассмотрим динамику импульсно-управляемой связи сначала на примере двух взаимодействующих элементов (1). Блок-схема такого взаимодействия представлена на рис. 8. Здесь IO_1 и IO_2 – два возбудимых элемента с подпороговыми колебаниями (1) (IO – inferior olive, нижние оливы). Динамическую систему можно записать в виде

$$\begin{cases} \frac{d(z_1 - z_2)}{dt} \sim D_g p(z_1 - z_2), \\ \frac{dp}{dt} = -\alpha(p - 1) - \alpha(1 - \Phi(u)), \end{cases} \quad (6)$$

где z_1 и z_2 – переменные первого и второго нейронов, соответственно; D_g – коэффициент взаимодействия; p – переменная связи; α – постоянная времени; функция $\Phi(u)$ – характеристика логического блока формирования подавляющих импульсов длительностью τ_f ,

$$\Phi(u) = \begin{cases} 1, & t < t_u, \\ 0, & t_u < t < t_u + \tau_f. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь t_u – время возникновения импульса. Импульсы возбуждения на каждом из элементов активируют логические блоки задержки, формирующие импульс отрицательной полярности длительностью τ_f . Сигналы с блока задержки поступают на логический сумматор, суммирующий длительности импульсов. Результирующий импульс через фильтр низких частот (не показан на рис. 8) воздействует на параметр связи, устремляя его к нулю. Таким образом, при отсутствии импульсов возбуждения переменная связи p описывается линейным одномерным уравнением и при любых начальных условиях асимптотически приближается к 1. Элементы в этом случае связаны резистивно, что ведет к синхронизации подпороговых колебаний и, следовательно, импульсов возбуждения. При возникновении импульса

возбуждения на интервале времени τ_f переменная p падает к 0, что фактически означает блокирование или разрыв межэлементной связи. Здесь динамика системы определяется автономной эволюцией элементов, что может привести, например, к десинхронизации колебаний за счет разности частот. Далее связь восстанавливается, и элементы снова стремятся быть синхронизованными. Таким образом, динамику системы определяют два основных механизма: тенденция к синхронизации импульсов при отсутствии подавляющего воздействия, управляемая коэффициентом D_g , и тенденция к десинхронизации на интервале времени τ_f , зависящая от разности частот колебательных подсистем системы (1). В зависимости от соотношений этих параметров можно выделить три основных динамических режима. При сравнительно коротком времени разрыва, $\tau_f \ll T_{av}$ (где T_{av} – средний период собственных колебаний элементов), импульсы возбуждения остаются синхронизованными между

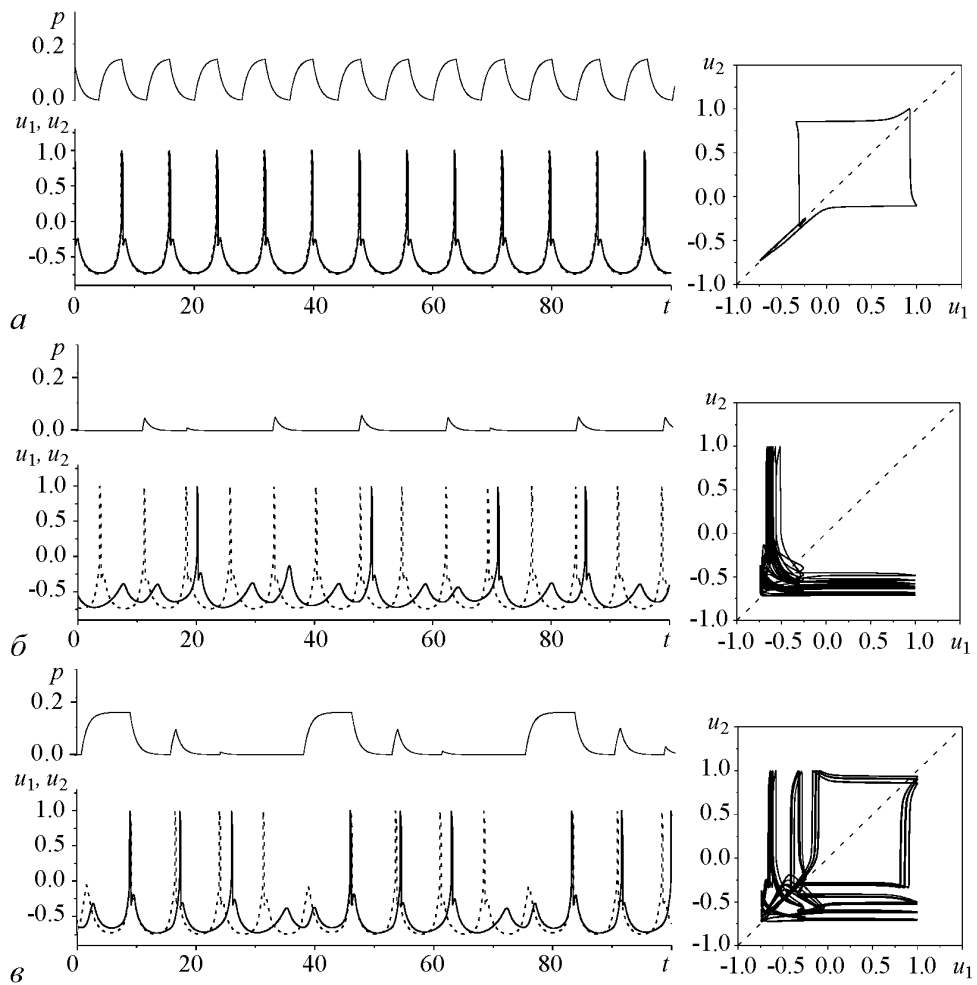


Рис. 9. Динамика двух взаимодействующих элементов (1) с импульсно-управляемыми связями, $a_{Ca,Na} = 0.01$, $k = 10$, $\varepsilon_{Ca} = 0.02$, $\varepsilon_{Na} = 0.001$, $I_{Ca(1)} = 0.014$, $I_{Na} = -0.55$, $\delta I_{Ca} = 0.15$, $d = 1$, $D_g = 0.015$, $\alpha = 1$: *a* – синхронный режим при коротком времени блокирования связи, $\tau_f = 4$; *b* – асинхронный режим при времени блокирования связи, превышающем период собственных колебаний, $\tau_f = 7$; *v* – режим «временного связывания», $\tau_f = 6.54$

собой (рис. 9, *a*). С другой стороны, очевидно, что если время разрыва связи превышает период собственных колебаний, то элементы становятся фактически независимыми и демонстрируют асинхронные колебания (рис. 9, *б*). Здесь предполагается, что импульсы возбуждения, по крайней мере в одном из элементов, возникают на каждом периоде подпороговых колебаний. Наиболее интересный режим наблюдается при $\tau_f \sim T_{av}$. В этом случае импульсы появляются синхронно лишь в некоторые моменты времени (рис. 9, *в*). Этот эффект можно трактовать как «временное связывание» (time binding) импульсов. Другими словами, элементы эффективно взаимодействуют лишь на некоторых временных интервалах. Длительность этого взаимодействия управляется, с одной стороны, длительностью блокирования связей, с другой – частотой возникновения импульсов возбуждения, управляющих блокированием.

Заметим, что в представленных примерах элементы имели достаточно большой частотный разброс (примерно 20%), задаваемый различными параметрами I_{Ca} для двух элементов (1). Это делалось в целях иллюстрации возможных динамических режимов модели с импульсно-управляемыми связями. При малых частотных расстройках, когда элементы можно считать практически идентичными, механизм импульсно-управляемых связей способен поддерживать установленные фазовые соотношения колебаний элементов. Если импульсы возбуждения возникают синхронно (подпороговые колебания синхронизованы), то эффективное время разрыва связи определяется параметром $\tau_f < T_{av}$ и синхронные колебания поддерживаются (см. рис. 9, *a*). Если же колебания имеют фазовый сдвиг, что соответствует некоторой разности времен δt возникновения импульсов, то за счет импульсно-управляемых связей эффективные длительности разрыва складываются, $\tau_f + \delta t$. Если эта величина превышает период подпороговых колебаний, то элементы эффективно не взаимодействуют и поддерживают установленные фазовые соотношения на достаточно больших интервалах времени, определяемых внутренней частотной расстройкой.

Рассмотрим теперь, как за счет совместного действия эффектов автопереустановки и импульсно-управляемых связей в ансамбле элементов (1) можно формировать фазовые кластеры сколь угодно сложной пространственной конфигурации.

4. Фазовые кластеры

Рассмотрим ансамбль элементов с подпороговыми колебаниями, упорядоченный в пространстве в виде квадратной решетки с локальными связями.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{Na} \frac{du_{j,k}}{dt} = f(u_{j,k}) - v_{j,k}, \\ \frac{dv_{j,k}}{dt} = [v_{j,k} - d(z - I_{Ca}) - I_{Na}], \\ \frac{dz_{j,k}}{d(kt)} = f(z_{j,k}) - w + D_g(\Delta_p z)_{j,k}, \\ \frac{dw_{j,k}}{d(kt)} = \varepsilon_{Ca}(z_{j,k} - I_{Ca} - I_{j,k}^{st}(\psi, t)). \end{array} \right. \quad (8)$$

Здесь пара $j, k = 1, 2, \dots, N$ задает пространственное расположение элемента ансамбля; слагаемое $(\Delta_p z)_{j,k}$ описывает импульсно-управляемое взаимодействие и имеет

вид

$$\begin{aligned}
(\Delta_p z)_{j,k} = & \Phi(u_{j+1,k})\Phi(u_{j,k})P(|\psi_{j+1,k} - \psi_{j,k}|)(z_{j+1,k} - z_{j,k}) + \\
& + \Phi(u_{j-1,k})\Phi(u_{j,k})P(|\psi_{j-1,k} - \psi_{j,k}|)(z_{j-1,k} - z_{j,k}) + \\
& + \Phi(u_{j,k+1})\Phi(u_{j,k})P(|\psi_{j,k+1} - \psi_{j,k}|)(z_{j,k+1} - z_{j,k}) + \\
& + \Phi(u_{j,k-1})\Phi(u_{j,k})P(|\psi_{j,k-1} - \psi_{j,k}|)(z_{j,k-1} - z_{j,k}).
\end{aligned}$$

Функция $\Phi(x)$ описывает импульсно-управляемые связи (7). Заметим, что в модели (8) без ограничения общности мы пренебрегаем динамикой сглаживающей переменной, полагая $\alpha \rightarrow \infty$. Функция P определяет импульсное воздействие на межэлементные связи за счет стимула. Предположим, что стимулом для решетки (8) является некоторое $(N \times N)$ -изображение, интенсивность (цвет) которого описывается некоторой матрицей $\{\psi_{j,k}\} \in [\psi_{\min}, \psi_{\max}]$. Выберем P в виде

$$P(x) = \begin{cases} 1, & x < \delta, \\ 0, & x > \delta. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь δ – некоторое малое положительное число, которое определяет разрешающую способность системы (8) по интенсивности входного стимула. Действие функции P заключается в следующем. Она блокирует межэлементные связи по контурам заданного стимула. Этот контур соответствует изменению интенсивности входного сигнала на величину, превышающую δ . Таким образом, элементы системы (8), попадающие в пределы одной градации, оказываются эффективно связанными. Их динамика управляется внутренней петлей обратной связи (функция Φ , модель (6)).

Функция $I_{j,k}^{st}(\psi, t)$ в модели (8) соответствует импульсному входу непосредственно на элемент ансамбля для фазовой автопереустановки. Она имеет вид

$$I_{j,k}^{st}(\psi, t) = \begin{cases} A_0 + (A_1 - A_0) \frac{\psi_{j,k} - \psi_{\min}}{\psi_{\max} - \psi_{\min}}, & t_{st} < t < t_{st} + \tau, \\ 0, & t < t_{st}, t > t_{st} + \tau. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь $[A_0, A_1]$ определяет интервал изменения амплитуд стимулирующего импульса, который, в свою очередь, определяет диапазон фаз $[\varphi_{\min}, \varphi_{\max}]$, на который будет переустановлены фазы колебаний осцилляторов. Этот диапазон можно выбрать согласно рис. 4, б. Время t_{st} определяет момент подачи импульса, одинаковый для всех элементов. Последнее достигается введением в ансамбль упомянутого выше центрального (опорного) осциллятора.

Заметим, что архитектура модели (8) точно воспроизводит архитектуру оливо-мозжечковой системы формирования моторных паттернов [1]. При отсутствии подавляющей обратной связи, взаимодействие между нейронами нижних олив является локальным, диффузионного или разностного типа (гэп-контакт) [18]. При включении петли гэп-контакты блокируются лишь в малой окрестности элемента, который сгенерировал управляющий импульс. Блокирование связей также может происходить за счет внешних стимулов, поступающих в нижние оливы через клетки Пуркинью и ядра мозжечка. Последние, в свою очередь, играют роль «компаратора» при настройке фазовых кластеров, формирующих моторные паттерны. Непосредственное воздействие на нейроны олив, приводящее к фазовой автопереустановке, соответствует «командному входу».

Рассмотрим процесс формирования фазовых кластеров в модели (8) за счет фазовой автопереустановки и импульсно-управляемых связей. Выберем в качестве изображения-стимула достаточно сложную пространственную структуру – фотографию жука, преобразованную в паттерн стимулирующего воздействия согласно (10). Процесс формирования фазовых кластеров в системе (8) представлен на рис. 10, *a*.

Рис. 10. *a* – формирование фазовых кластеров в решетке (8) согласно предложенному шаблону для: $\tau = 0.4T, T = 51.1, A_0 = 0.4, A_1 = 3.5, N = 200$; *b* – формирование фазовых кластеров в решетке (8) при подавляющем воздействии для: $\tau = 0.4T, T = 51.1, A_0 = -2.5, A_1 = -1.05, N = 200$; здесь структура фазовых кластеров воспроизводит негатив исходного стимула

Заметим, что процесс формирования структуры достаточно быстрый, порядка одного – двух периодов подпороговых колебаний, что придает эффекту неоспоримые преимущества по сравнению с методами формирования изображений за счет межэлементных связей в градиентных моделях [17, 19]. Результирующее распределение фазовых кластеров практически однозначно повторяет требуемый шаблон. Кроме того, система способна воспроизвести $M = \pi/\delta$ градаций изображения по интенсивности (цвету). Здесь параметр δ определяется точностью автопереустановки. При дальнейшей эволюции системы за счет различных внутренних возмущений (например, шумов) фазы генераторов могут измениться, размывая полученный образ. В этом случае образ легко восстановить повторной импульсной стимуляцией. Поскольку фазовая автопереустановка работает и при отрицательных амплитудах стимула, требуемую конфигурацию фазовых кластеров можно получить и при подавляющем импульсном воздействии. Здесь, поскольку наклон «амплитудно-фазовых» кривых отрицателен (см. рис. 4, б), установившиеся фазовые кластеры воспроизведут негатив изображения (рис. 10, б). В этом случае точность переустановки ниже, и для получения требуемого образа необходима повторная стимуляция.

Заключение

Изучен эффект фазовой автопереустановки в автогенераторной релаксационной системе. При воздействии на такую систему сравнительно коротким импульсом (длительностью порядка половины периода колебаний) происходит переустановка фазы колебаний к значению, не зависящему от исходной фазы на момент прихода импульса-стимула. Это значение определяется только параметрами самого стимула. В основе эффекта лежит динамическое преобразование (коллапс) фазового объема за счет релаксационного характера движений. С помощью фазовой автопереустановки возможно осуществлять эффективную синхронизацию (на временах порядка одного-двух периодов колебаний) и формировать фазовые кластеры любой, сколь угодно сложной пространственной конфигурации в больших ансамблях автогенераторных элементов. Эффект обладает очевидными преимуществами по сравнению с традиционными способами синхронизации и кластеро-формирования в колебательных системах (например, в ансамблях фазовых осцилляторов [18]), поскольку не требует непосредственного межэлементного взаимодействия и происходит достаточно быстро. Исследуемая модель является феноменологической моделью нейронов нижних олив и качественно воспроизводит эффект автопереустановки, наблюдаемый в нейрофизиологическом эксперименте.

Для поддержания установленных фазовых соотношений в ансамблях нейронов с подпороговыми колебаниями рассмотрен механизм импульсно-управляемых связей, построенный на основе динамики оливомозжечковой нейронной системы. Блокирование связей при возникновении импульсов возбуждения позволяет, с одной стороны, поддерживать режим синхронизации внутри кластерной группы (группы элементов с одинаковыми фазами), где элементы эффективно взаимодействуют, с другой стороны, изолировать кластерные группы между собой для поддержания требуемой конфигурации кластеров. Кроме того, управление связями позволяет формировать кластерные структуры за счет стимул-индуцированного подавления связей по «контурам» стимула задаваемыми переходами между различными уровнями «интенсивности» (цвета в рассмотренном примере).

С прикладной точки зрения, ансамбли с импульсно-управляемыми связями могут представлять перспективный прикладной интерес для систем динамической записи, хранения, стирания информации и систем параллельного многопараметрического управления на основе динамики нейронных моделей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (гранты 03-02-17135, 05-02-17441), гранта CRDF (программа BRHE, НОЦ-006) и гранта Президента РФ для молодых ученых (МК-4586.2004.2).

Библиографический список

1. *Llinas R.* I of the Vortex. From Neurons to Self. The MIT Press Cambridge. Massachusetts, 2002. 302 p.
2. *Llinas R.* Consciousness and the thalamocortical loop // International Congress Series. 2003. Vol. 1250. P. 409.
3. *Behrendt R.P.* Hallucinations: Synchronisation of thalamocortical oscillations under-constrained by sensory input // Consciousness and Cognition. 2003. Vol. 12. P. 413.
4. *Leznik E., Makarenko V.I., Llinas R.* Electrotonically mediated oscillatory patterns in neuronal ensembles: An In Vitro Voltage-Dependent Dye-Imaging Study in the Inferior Olive // J. Neurosci. 2002. Vol. 22. P. 2804.
5. *Welsh J.P., Llinas R.* Some organizing principles for the control of movement based on olivocerebellar physiology / Eds. de Zeeuw C. I., Strata P. and Voodg // Progress in Brain Research. 1997. Vol. 114.
6. *Henze D.A., Buzsak G.* Single cell contributions to network activity in the hippocampus // International Congress Series. 2003. 1250. P. 161.
7. *Magee J.C.* A prominent role for intrinsic neuronal properties in temporal coding // Trends Neurosci. 2003. Vol. 26, №1. P. 14.
8. *Kazantsev V.B., Nekorkin V.I., Makarenko V.I., Llinas R.* Olivo-cerebellar cluster-based universal control system // Procs. Natl. Acad. Sci. USA. 2003. Vol. 100 (22). P. 13064.
9. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 916 с.
10. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
11. *Гласс Л., Мэкки М.* От часов к хаосу. Ритмы жизни. М.: Мир, 1991. 248 с.
12. *FitzHugh R.* Mathematical models of excitation and propagation in nerve. In Biological Engineering (Ed. H.P. Schwan). 1969. 1-85.
13. *Казанцев В.Б., Некоркин В.И.* Динамика колебательных нейронов. Информационные аспекты // Нелинейные волны – 2002. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2003. 29 с.
14. *Казанцев В.Б., Некоркин В.И.* Фазово-управляемые колебания в нейродинамике // Нелинейные волны – 2004. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2005. С. 345.
15. *Kazantsev V.B., Nekorkin V.I., Makarenko V.I., Llinas R.* Self-referential phase reset based on inferior olive oscillator dynamics // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 2004. Vol. 101, № 52. P. 18183.
16. *Lang E.J., Sugihara I., Welsh J.P., Llinas R.* Patterns of spontaneous Purkinje cell complex spike activity in the awake rat // J. Neurosci. 1999. Vol. 19(7) P. 2728.

17. *Hoppensteadt F.C., Izhikevich E.M.* Oscillatory neurocomputers with dynamic connectivity // *Phys. Rev. Lett.* 1999. Vol. 82. P. 2983.
18. *Llinas R., Baker R., Sotelo C.* Electrotonic coupling between neurons in cat inferior olive // *J. Neurophysiol.* 1974. Vol. 37. P. 560.
19. *Hopfield J. J.* Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* 1984. Vol. 81. P. 3088.

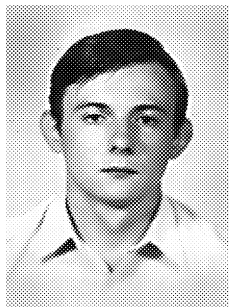
*Институт прикладной физики РАН,
Н. Новгород*

Поступила в редакцию 15.07.2005

AUTORESET OF PHASE AND OSCILLATORY ACTIVITY PATTERNS IN AUTOOSCILLATORY MODELS OF NEURONAL SYSTEMS

V.B. Kazantsev, V.I. Nekorkin

The processes of oscillatory pattern formation in autooscillatory neuronal models are investigated. Such patterns play a key role in the information processes used in higher brain functions. The effect of pulse-induced phase *autoreset* in the model of neurons with subthreshold oscillations is studied. As a result of this effect the reset phase value does not depend on the initial phase. It is defined only by the stimulus parameters. The autoreset effect can be used for phase synchronization and phase cluster formation in ensembles of autooscillatory units. To sustain the inter-unit phase relations it is proposed to use the mechanism of pulse-controlled coupling between neuronal elements with subthreshold oscillations. The model is developed on the base of the dynamics of olivo-cerebellar neuronal system responsible for motor pattern formation in the brain.



Казанцев Виктор Борисович – родился в Дзержинске (1973), Нижегородской области, окончил радиофизический факультет ННГУ (1996). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1999). В настоящее время является старшим научным сотрудником отдела нелинейной динамики Института прикладной физики РАН в Нижнем Новгороде. Область научных интересов – теория колебаний и волн, нелинейная динамика дискретных систем и нейродинамика. Имеет более 60 научных публикаций.



Некоркин Владимир Исаакович – родился на Украине в 1948 году, окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета (1971). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1981, ННГУ) и доктора физико-математических наук (1992, СГУ). С 1971 года работал в Нижегородском институте прикладной математики, с 1983 по 1986 год в Нижегородском политехническом институте, с 1986 года и по настоящее время работает на радиофизическом факультете ННГУ, профессор. Область научных интересов - теория колебаний и волн, структурообразование и нелинейные волны в непрерывных и дискретных средах, синхронизация и пространственно-временной хаос. Имеет более 100 научных публикаций в указанных направлениях, соавтор двух монографий. В качестве приглашенного профессора читал лекции в Мадридском и Стэнфордском университетах. Работал в Калифорнийском университете.



Изв. вузов «ПНД», т. 13, № 4, 2005

APPROXIMATE SYNCHRONIZATION OF CHAOTIC ATTRACTORS

Oscar de Feo, Martin Hasler

This work presents a dynamical phenomenon strongly related with the problems of synchronization and control of chaotic dynamical systems. Considering externally driven homoclinic chaotic systems, it is shown experimentally and theoretically that they tend to synchronize with signals strongly correlated with the saddle cycles of their skeleton; furthermore, when they are perturbed with a generic signal, uncorrelated with their skeleton, their chaotic behavior is reinforced. This peculiar behavior of approximate synchronization has also been called *qualitative resonance*, underlining the fact that such chaotic systems tend to resonate/synchronize with those signals which are qualitatively similar to an observable of their skeleton.

Introduction

Since the pioneering works of Afraimovich, Verichev, and Rabinovich [1], a considerable investigative effort has been dedicated to the problem of synchronization of chaotic dynamical systems as well as to the problem of their control. In this work, a dynamical phenomenon strongly related to these two problems is introduced and its analysis, both experimental and theoretical, is presented. In particular, it is shown that different dynamical models (ordinary differential equations) admitting chaotic behavior organized by a homoclinic bifurcation (here called Shil'nikov-like chaotic systems) tend to have a quite particular selective property when externally perturbed. Namely, these systems settle on a very narrow chaotic behavior, which is strongly correlated to the forcing signal, when they are slightly perturbed with an external signal which is similar to their corresponding generating cycle (GC). Here, the «generating cycle» is understood to be the saddle cycle colliding with the equilibrium at the homoclinic bifurcation or, in other words, the lowest period cycle embedded in the Shil'nikov-like chaotic attractor. On the other hand, when they are slightly perturbed with a generic signal, with no particular correlation with their GC, their chaotic behavior is reinforced. This peculiar sympathetic behavior of approximate synchronization has also been called «qualitative resonance» (QR) [2, 3]. This

name wants to highlight the fact that such chaotic systems tend to *resonate* with those signals which are qualitatively similar to an observable of their corresponding GC. Indeed, when approximately synchronizing, the behavior of the forced system shrinks from a wide chaotic attractor to a very narrow one, which is very similar to a resonating torus which is shrinking from many modes to few ones. Moreover, this name has also been chosen to distinguish this phenomenon from proper synchronization; because, even if related to it, the observed behavior is not, rigourously speaking, strict synchronization.

The paper is organized as follows: first, the QR phenomenon is introduced and previous results [2, 3] about it are briefly recalled; second, a linear explanation of the phenomenon is given together with a geometrical conjecture of it; finally, the geometrical conjecture is confirmed by means of bifurcation analysis.

1. The Qualitative Resonance Phenomenon

Given a generic *error driven* dynamical system (Eq. (1)) admitting Shil'nikov-like chaotic behavior when there is no external control ($K = 0$):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x) + K(y - u(t)), & x \in \mathbb{R}^n, F : \mathbb{R}^n &\mapsto \mathbb{R}^n \\ y &= H(x), & y \in \mathbb{R}^m, H : \mathbb{R}^n &\mapsto \mathbb{R}^m, m < n \end{aligned} \quad (1)$$

the system is *slightly* (*i.e.* small value of $\|K\|$) perturbed with different kinds of perturbing signals $u(t)$, some strongly related to the GC of the Shil'nikov-like strange attractor and some not. For each given driving signal, the system's steady state is classified as follows: whenever the steady state is shrinking to a periodic solution or to a chaotic solution with a very small variance with respect to the GC, *i.e.* something very close to a limit cycle, the ensemble is said to *qualitatively resonate* or to *approximately synchronize* [2, 3]; on the other hand, whenever the steady state is chaotically wandering, the ensemble is said to not qualitatively resonate or to *anti-resonate/synchronize*.

More precisely, K is considered slightly perturbing the system if:

$$\max_{\substack{x \in \text{SA} \\ u(t)=y(t), y \in \text{GC}}} \|K(y - u(t))\| < \frac{1}{\beta} E \left[\|F(x)\| \mid x \in \text{SA} \right], \quad \beta > 1$$

where $x, y \in \text{SA}$ means that the state x or the corresponding output y are on the uncontrolled strange attractor (SA); $u(t) = y(t), y \in \text{GC}$ means that the perturbing signal $u(t)$ is the time series of the output y while evolving on the GC; and, $E[\cdot]$ is the averaging operation. In simple words, the maximal external perturbation on the evolution of the system (LHS) must be at least β times smaller than the average natural evolution (RHS). Furthermore, the system is classified as *qualitatively resonating* whenever the following condition is satisfied:

$$\int_{t-nT_G}^t (y(\tau) - u(\tau))^2 d\tau < \frac{1}{\gamma} E \left[\int_{t-nT_G}^t \left(y(\tau)|_{y \in \text{SA}} - y(\tau)|_{y \in \text{GC}} \right)^2 d\tau \right], \quad \gamma > 1, n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

where T_G is the period of the GC. In simple words, a system is said to be resonant when the driven trajectories (LHS) are γ time closer to the perturbing signal $u(t)$ than what is expected to be the free strange attractor to the GC (RHS).

1.1. Experimental Evidence. In [2] experimental evidence of QR occurring in Shil'nikov-like chaotic systems has been reported. To have a feeling about the phenomena, here some of the results reported in [2] are shown. Fig. 1 reports the occurrence of QR in the Colpitts oscillator [4] perturbed with fine or coarse piecewise linear approximations of its observable $y = x_2$ while evolving on the GCs of different strange attractors, where the GCs have been obtained by numerical continuation [5,6].

2. Working Principles of Qualitative Resonance

It is intuitive to explain the QR phenomenon in the case of resonance with the clean signal coming from the GC. Such a case correspond to a simple reconstruction of a periodic linear system [7], *i.e.* just a particular case of synchronization between chaotic systems. In fact, consider an autonomous nonlinear system like (1) with $K = 0$, and suppose that the system admits a periodic solution of period T

$$\hat{x}(t) : \hat{x}(t+T) = \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t) = F(\hat{x}(t)), \quad \hat{y}(t) = H(\hat{x}(t)),$$

then $\hat{x}(t)$ is also a periodic solution of the nonautonomous system with $K \neq 0$, $\forall K : \dim(K) = n \times m$. Furthermore, under suitable conditions, $\hat{x}(t)$ is a stable solution of the nonautonomous ($K \neq 0$) system independently from its stability in the autonomous ($K = 0$) system. Indeed, system (1) can be linearized around the periodic solution $\hat{x}(t)$ leading to a periodic linear system

$$\begin{aligned} \dot{\delta x} &= A(t)\delta x - K \underbrace{(y - \hat{y})}_{\delta y}, \\ \delta y &= C(t)\delta x. \end{aligned} \tag{3}$$

In control theory [8] it is known that if the couple $(A(t), C(t))$ is observable then the characteristic multipliers of system (3) can be arbitrarily assigned and, if the observation matrix $C(t)$ is a constant matrix, this can be done with a constant matrix K . Then, the stability of the solution $\delta x(t) = 0$ of system (3) corresponds to the asymptotic stability of the periodic solution $\hat{x}(t)$ of system (1) provided that the Jacobian matrix $A(t)$ and the reference signal $\hat{y}(t)$ are almost in phase. Namely, provided that the state $x(t)$ of system (1) univocally identifies the periodic time $t \bmod T$ in system (3), since one is an autonomous nonlinear system while the other is a time-varying linear system. In a Shil'nikov-like strange attractor, this condition is implicitly satisfied since the phase changes randomly whenever the trajectory passes nearby the equilibrium bearing the homoclinic. Thus, if the gain matrix K is such that Shil'nikov's conditions are not violated, sooner or later the driving signal and the state of the driven system will be in phase, and the linear control theory will warrant the convergence to the GC. Concluding, the QR with the clean signal coming from the GC of a Shil'nikov-like strange attractor is a straight consequence of the random phase seeking of Shil'nikov-like chaos and of the periodic linear control theory.

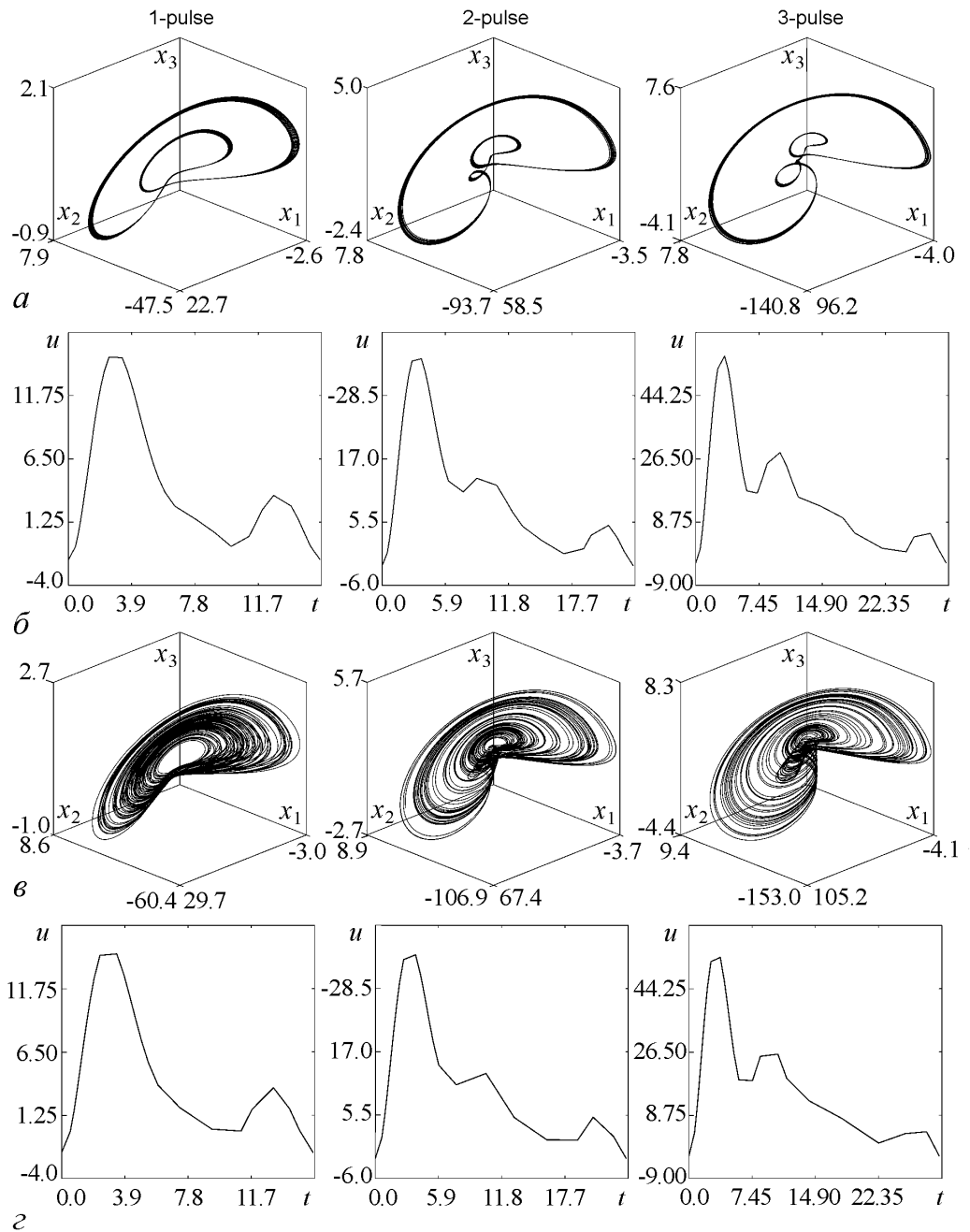


Fig. 1. Qualitative resonance for the Colpitts oscillator when driven with piecewise linear approximations of the observable $y = x_2$ corresponding to the n -pulse generating cycle of its strange attractors: a – qualitative resonance with a fine piecewise linear approximation; b – driving signals corresponding to a ; c – qualitative anti-resonance with a coarse piecewise linear approximation; d – driving signals corresponding to c .

2.1. Geometric Conjecture. The above control theory argument is also useful to explain the occurrence of the QR phenomena for not so clean driving signals. When a feedback matrix gain K is chosen, the asymptotic *noise reduction ratio* (NRR) of the input noise for the filter given by Eqs. (3) is uniquely defined (periodic Kalman Filter). Therefore, feeding the system (1) with a signal $\hat{y}(t) + \varepsilon_{in}$, when the signal and the system will be phase, will lead the system to shrink close to the periodic solution $\hat{x}(t)$ as much as predicted by the NRR. Therefore, since a very simple generalization of a cycle is a Feigenbaum-like (period doubling) strange attractor, it follows that feeding the system (1) with a Feigenbaum-like signal coming from a strange attractor lying on a Möbius strip large ε will lead the system to shrink on a strange attractor NRR time narrower than that of the source, similarly as what shown in Figs. 1, *a*.

Taking into account the geometrical structure of a Shil'nikov-like strange attractor, *i.e.* a Matrioshka containing infinite self-similar Feigenbaum-like strange saddles (Fig. 2, *a*), the geometrical working principle of the QR is easily understandable. Because of the existence of infinite self similar skeleton saddle cycles that lie on the strange attractor manifold, also a cycle built by a piecewise composition of arcs of skeleton cycles which, consequently, lies on the manifold and satisfies the tachometric law on it, can be stabilized by a similar procedure as the one described above. Obviously, such a new cycle cannot be to much different from the skeleton cycles, because of its construction constraints. Thus, it will be «just a generalization» of the stereotype cycles of the skeleton leading to the QR phenomenon. A geometrical sketch of this working principle is given in Fig. 2, *b*.

Finally, due to the fact that a Shil'nikov-like strange attractors lie on an almost one-dimensional manifold which has a transversal attracting direction and is repulsive in the directions that are parallel to this manifold, and since it has been assumed that the feedback gain matrix K does not alter excessively the dynamic of the system, it follows that the minimal K which stabilizes the periodic solution $\hat{x}(t)$ must mainly stabilize the repelling direction while leaving almost unaltered the dynamics in the already stable direction.

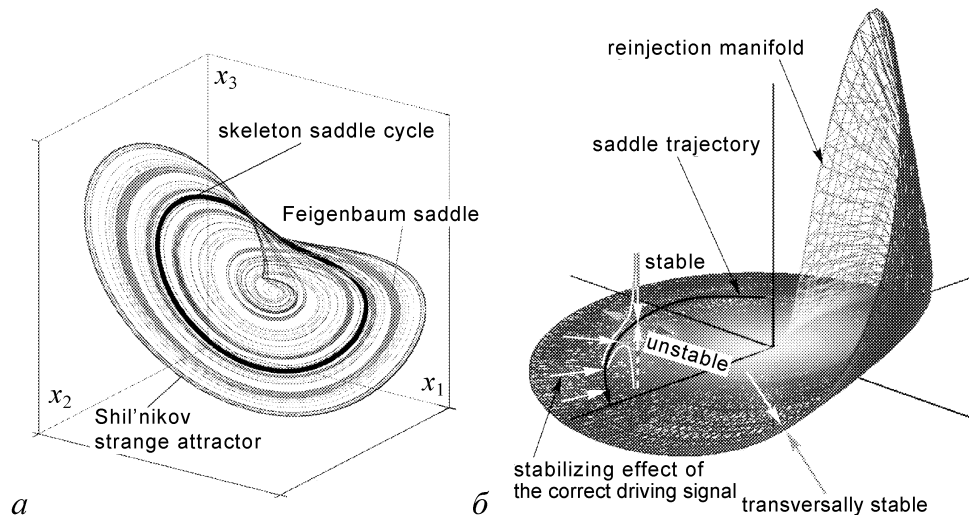


Fig. 2. Geometrical explanation of QR: *a* – Matrioshka structure of a Shil'nikov-like attractor; *b* – the driving forces of qualitative resonance in a Shil'nikov-like strange attractor.

3. Mathematical Analysis of Qualitative Resonance

The previous section has given, on the basis of linear control theory and on the basis of geometrical arguments, an explanation of how can it be argued that the signals which can drive a Shil'nikov-like chaotic system to QR are those that can be obtained by perturbing the GC in the direction of its stable manifold and, on the other hand, those that drive the systems to anti-resonance can be obtained by perturbing it in the direction of its unstable manifold. Such a conjecture is confirmed by an almost exhaustive and very detailed bifurcation analysis of the phenomenon, conducted on several models combining advanced continuation techniques [5,6] with theoretical arguments [3].

3.1. Bifurcation Analysis. The behavior of system (1) perturbed with

$$u(t) = \hat{y}(t) + \varepsilon(t) = \hat{y}(t) + C(e_p(t)\delta_p + e_s(t)\delta_s + e_u(t)\delta_u), \quad (4)$$

where $\hat{y}(t)$ is the output y when the state evolves on the GC and $e_i(t)$ are the eigenvectors of the monodromy matrix tangent to the center (p), stable (s), and unstable (u) manifolds of the GC, has been analyzed with respect to the intensity (δ_i) of the perturbations in the stable and unstable direction of the GC. The generic result is reported in Fig. 3, *f* showing that indeed are the perturbations in the unstable direction which mainly lead to anti-resonance. Furthermore, a 1D bifurcation analysis of the transition from qualitative

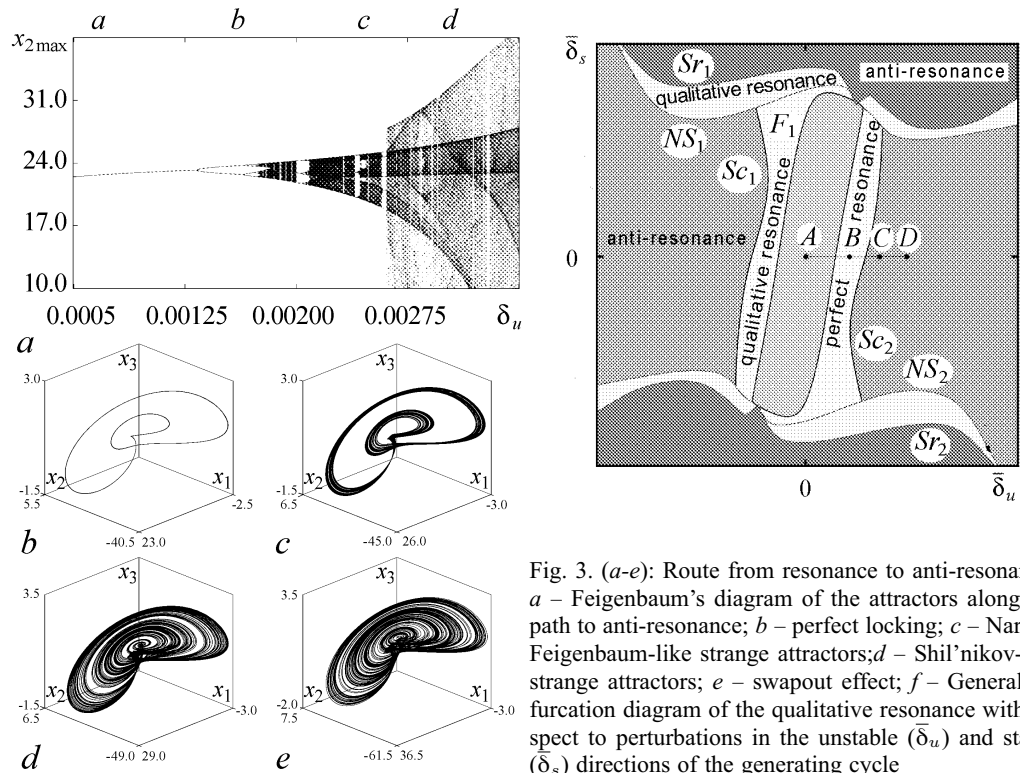


Fig. 3. (a-e): Route from resonance to anti-resonance: a – Feigenbaum’s diagram of the attractors along the path to anti-resonance; b – perfect locking; c – Narrow Feigenbaum-like strange attractors; d – Shil’nikov-like strange attractors; e – swapout effect; f – General bifurcation diagram of the qualitative resonance with respect to perturbations in the unstable (δ_u) and stable (δ_s) directions of the generating cycle

resonance (point **b** in Fig. 3, *a,c*) to anti-resonance (point **c** in Fig. 3, *a,d*) shows that anti-resonance occurs when the perturbations in the unstable direction lead the driven state to get excessively close to the equilibrium bearing the homoclinic trajectory.

4. Remarks on Qualitative Resonance

Considering the above results together with the periodic control theory, it is possible to conclude that an externally perturbed Shil'nikov-like chaotic system acts as a state space reconstructor (periodic Kalman filter) with saturation. As long as the dynamics of the driving signal is sufficiently similar to the natural dynamics of the driven system, the latter tends to follow the driving signal attenuating its irregular fluctuations. When, on the contrary, the dynamics of the driving signal is too far from that of the driven system, the trajectory of the driven system is lead to approach the equilibrium bearing the homoclinic trajectory, reinforcing in this way its chaotic dynamics.

Finally, since the transition from QR to anti-resonance is rather sharp, the QR phenomenon can be exploited in practical problems of temporal pattern recognition [9,10].

This work was supported by the European project APEREST: IST-2001-34893 and OFES-01.0456.

Bibliography

1. *Afraimovich V.S., Verichev N.N., Rabinovich M.I.* General Synchronization // Rad. Quant. El. 1986. Vol. 29. P. 795.
2. *De Feo O.* Qualitative resonance of Shil'nikov-like strange attractors, part I: Experimental evidence // International Journal of Bifurcation & Chaos. 2004. Vol. 14. P. 873.
3. *De Feo O.* Qualitative resonance of Shil'nikov-like strange attractors, part II: Mathematical analysis // International Journal of Bifurcation & Chaos. 2004. Vol. 14. P. 893.
4. *De Feo O., Maggio G.M., Kennedy M.P.* The Colpitts oscillator: Families of periodic solutions and their bifurcations // Int. J. Bif. & Chaos. 2000. Vol. 10. P. 935.
5. *Doedel E.J., Keller H.B., Kernévez J.P.* Numerical analysis and control of bifurcation problems, part I: Bifurcation in finite dimensions // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1991. Vol.1. P. 493.
6. *Doedel E.J., Champneys A.R., Fairgrieve T. F., Kuznetsov Y.A., Sandstede B., Wang X.J.* AUTO 97: Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations *with HomCont*. 1998. Computer Science Department, Concordia University, Montreal, Canada, Motreal, Quebec, Canada.
7. *Bittanti S. Bittanti S. and Colaneri P.* Periodic Control, pages 59-74, John Wiley & Sons, New York, NY, 1999.
8. *Callier F. M. and Desoer C. A.* Linear System Theory. Springer-Verlag, New York, NY, 1991.
9. *De Feo O.* Self-emergence of chaos in identifying irregular periodic behavior // Chaos. 2003. Vol. 13. P. 1205.

10. *De Feo O.* Tuning chaos synchronization and anti-synchronization for applications in temporal pattern recognition // International Journal of Bifurcation & Chaos. 2005. Accepted, to appear.

*Laboratory of Nonlinear Systems,
Swiss Federal Institute of Technology Lausanne
EPFL-IC-LANOS, CH-1015 LAUSANNE, SWITZERLAND*

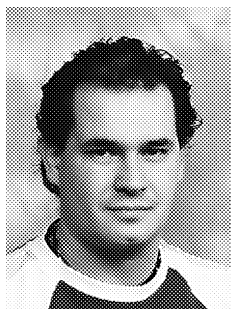
Поступила в редакцию 3.03.2005

УДК 537.86

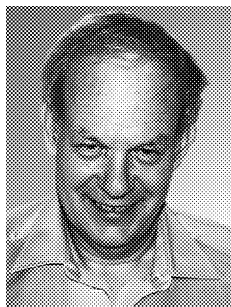
КАЧЕСТВЕННЫЙ РЕЗОНАНС ХАОТИЧЕСКИХ АТТРАКТОРОВ

Оскар де Фео и Мартин Хаслер

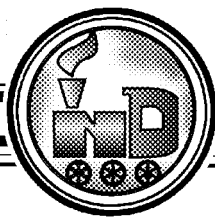
В работе рассматривается динамическое явление, имеющее непосредственное отношение к проблемам синхронизации и управления хаотическими динамическими системами. Рассмотрена хаотическая система вблизи гомоклинической бифуркации, управляемая внешним сигналом/системой. Показано, что если внешний сигнал качественно близок к одному из седловых циклов, «составляющих» странный аттрактор, то ведомая система синхронизируется внешним сигналом. В противном случае синхронизация не наступает. Это резонансное поведение названо качественным резонансом и исследовано теоретически и экспериментально.



Оскар де Фео – родился в 1971 году. В 1995 закончил с отличием Политехнический Институт (Милан, Италия). В 2001 получил ученую степень в Швейцарском Технологическом Институте (Лозанна, Швейцария). В настоящее время научный сотрудник и старший преподаватель кафедры нелинейных систем Швейцарского Технологического Института в Лозанне. Удостоен премии за лучшую статью на Европейской конференции по теории цепей (ECCTD'99); премии Михалевича (Mikhalevich); премии научного фонда Хорафас (Chorafas). Автор 50 научных работ, в том числе 20 статей в международных журналах. Научные интересы: моделирование и анализ связанных комплексных систем, включая ансамбли нейронов, синхронизация и бифуркации динамических систем, теория управления.



Мартин Хаслер – родился в 1945. В 1969 закончил Швейцарский Технологический Институт в Цюрихе, там же в 1973 получил ученую степень. В настоящее время заведует кафедрой нелинейных систем Швейцарского Технологического Института в Лозанне. Удостоен множества премий, вице-президент общества IEEE по секции электрические цепи и системы, член совета Швейцарского Национального Научного Фонда. В 1993-1995 был главным редактором журнала IEEE Transactions on Circuits and Systems, Part I. Автор более 200 научных работ, включая 4 монографии. Научные интересы включают нелинейные цепи и системы, динамику ансамблей биологических систем и синхронизацию, использование хаотической динамики для передачи информации, моделирование высокотемпературных сверхпроводников и др.



ФРАКТАЛЬНОСТЬ В СТРОЕНИИ РАКОВИНЫ И ЭВОЛЮЦИИ ГОЛОВОНОГИХ МОЛЛЮСКОВ

Н.Ю. Иванова, В.Б. Сельцер, А.В. Иванов

На примере головоногих моллюсков, аммонитов, прослежено усложнение фрактальности строения их раковины как в процессе индивидуального развития (онтогенезе), так и в эволюции группы (филогенезе). Допускается аналогия с кривыми Коха. Предполагается, что фрактальность следует рассматривать как адаптивное и эволюционное преимущество, объясняющее высокий темп эволюции аммонитов и конкретные причины их вымирания.

Широкое распространение фракталов в природе общеизвестно. Фрактальность обнаружена в строении самых различных природных объектов, в том числе, живых организмов (см., например, [1]). Этот факт рассмотрен нами на примере строения раковин ископаемых головоногих моллюсков – аммонитов, у которых черты фрактальности выражены наиболее ярко.

Аммониты (подкласс Ammonoidea) – вымершая группа головоногих моллюсков [2], имевших в подавляющем большинстве случаев плоскостепиральную раковину (рис.1). С каждым оборотом спирали у раковины увеличивается площадь сечения, что естественно связано с ростом организма. Внешняя поверхность раковины может быть гладкой, а может иметь разнообразные ребра, пережимы, иногда бугорки и шипы, расположенные чаще всего вдоль плоскости навивания оборотов. Такая гофрировка наружной поверхности напоминает ребра жесткости, что упрочняло раковину. Внутреннее пространство раковины разделено перегородками (септами). По мере роста моллюск последовательно формирует новую перегородку, а между ними остается пространство, называемое внутренней камерой. Таким образом, спиральная раковина взрослой особи состояла из последовательно расположенных друг за другом многочисленных камер, соединенных тонкой трубкой – сифоном, который проходил через все камеры,

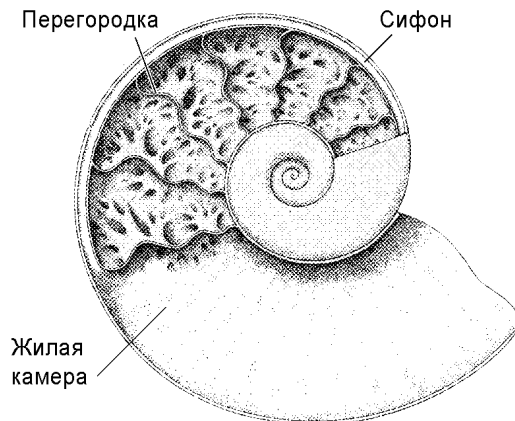


Fig. 1. Схема строения раковины аммонита (по Уорду [3])

включая самую первую. Сифон занимал краевое положение, примыкая к внутренней поверхности наружной стенки. Внутренние камеры несли разную функциональную нагрузку и, видимо, при жизни были заполнены так называемой камеральной жидкостью, уровень которой моллюск мог менять, используя сифон, для поддержания плавучести. Последняя открытая камера служила вместилищем тела моллюска. Практически все современные головоногие являются хорошими пловцами, и аммониты в подавляющем большинстве, видимо, относились к ним.

Наиболее необычна у всех аммонитов форма поверхности внутренних перегородок, которые сильно изогнуты, а их края рассечены, особенно в местах контакта с внутренней поверхностью раковины. На сегодняшний день нет однозначного ответа на вопрос: почему у этих моллюсков внутренняя перегородка имела такую сложную конфигурацию? Несомненно одно – эта форма способствовала существенному упрочнению достаточно тонкостенной раковины, что позволяло моллюску погружаться на значительные глубины, не опасаясь быть раздавленным. Кроме того, такое внутреннее строение значительно усложняло разрушение раковины и при нападении хищников.

Сильная изогнутость поверхности перегородок обеспечивала большую площадь контакта камеры с живой тканью, а также увеличивала объем и вес жидкости внутри камер, позволяя по необходимости регулировать ее уровень, и, следовательно, быть моллюску более мобильным. Такой путь усложнения складчатости перегородок может рассматриваться как процесс оптимизации и совершенствования регулирования плавучести [4].

Место контакта перегородки с внутренней поверхностью раковины напоминает по конфигурации изогнутую линию с зубчиками, которая отчетливо заметна при вскрытии наружной стенки раковины (рис.2, а). Наружный край внутренней перего-

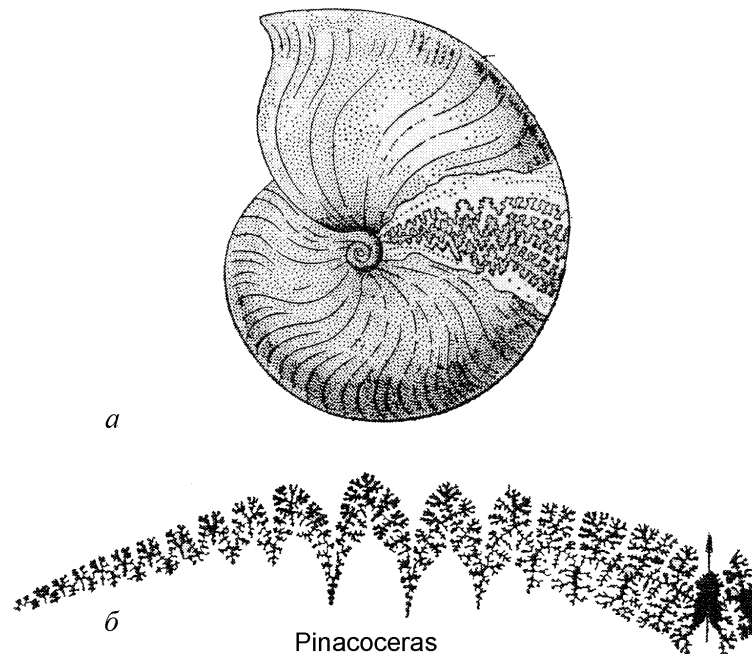


Fig. 2. Общий вид лопастной линии аммонита

родки (рис.2, б) имеет вид линии, напоминающей в плане плавные или рассеченные волны, зигзаги с зазубринами, листья папоротников и даже линию, напоминающую морозные узоры на стекле. Эта линия получила разнообразные синонимичные названия – лопастной, сутурной, перегородочной или аммонитовой, то есть присущей только этим моллюскам. Плоскоспиральная раковина аммонита симметрична относительно плоскости навивания, поэтому конфигурация рисунка линии в общих чертах повторяется на обеих поверхностях, и для изучения вполне достаточно просмотреть ее с одной стороны.

В эволюционном развитии аммонитов на ископаемом материале установлен факт усложнения лопастной линии, от плавных волнообразных очертаний до сложной и рассеченной за период времени порядка 280 миллионов лет. Однако внутри отдельных семейств и подсемейств иногда наблюдался и обратный процесс [5,6], который, впрочем, никогда не сводился к полному возврату к предковым формам, а тенденция усложнения на уровне подкласса в целом сохранилась. При изучении юрских аммонитов удалось обнаружить существование определенных отношений между отдельными структурами раковины. Например, расширение поперечного сечения оборотов раковины приводит к образованию новых элементов скульптуры наружной стенки, с одной стороны, и пропорциональному растяжению соответствующих элементов у лопастной линии, с другой [7]. Согласно [8], выделяют четыре типа лопастных линий (рис.3) у последовательно сменявших друг друга таксонов аммоноидей: I – агониатитовый (самый древний) с округлыми плавными очертаниями; II – гониатитовый, сочетающий элементы плавных очертаний с заостренными участками; III – цератитовый, сочетающий округлые и зазубрено-заостренные участки; IV – аммонитовый – наиболее сложно построенную по всей длине рассеченную линию. Элементы линии, направленные назад (к внутренним оборотам), получили название лопастей, а направленные вперед (к жилой камере) – седла. На окаменевших остатках раковин, принадлежащих разным родам и семействам, удается проследить, насколько разнообразна форма рассеченности как всей линии в целом, так и отдельных ее элементов. В зависимости от места расположения элемента, выделяют боковые, брюшные, наружные и внутренние лопасти и седла (рис. 4).

Другой особенностью является то, что подобная картина наблюдается при «разворачивании» раковины аммонита. На начальных оборотах линия тоже имеет плавные очертания, по мере увеличения количества оборотов она усложняется, достигая наиболее сложного рисунка у жилой камеры. Наблюдаемое усложнение на примере отдельной особи как бы отражает весь эволюционный путь, пройденный предками, – филогенез.

Таким образом, усложнение лопастной линии имеет место как на уровне крупных биологических групп (таксонов), так и на уровне индивидов, начиная от ювенильной и вплоть до геронтической стадий.

Аммониты как в своем эволюционном развитии, так и в строении самой раковины моллюска являют собой сложно построенные объекты с невыясненными до конца родственными связями. Они служат ярким примером демонстрации нелинейных закономерностей, наблюдаемых в живой природе, которые математически могут быть описаны в терминах фракталов.

Эволюционная динамика в развитии аммонитов прослежена на примере анализа новых данных, собранных на ископаемом материале, в достаточно широком диапазоне юра – мел. Эволюция группы исследуется с позиции мультифрактальной модели, в которой выстроены определенные иерархические взаимосвязи [1].

Обнаружение элементов фрактального строения аммонитов вызвало попытку математического описания сложной конфигурации лопастной линии, для которой

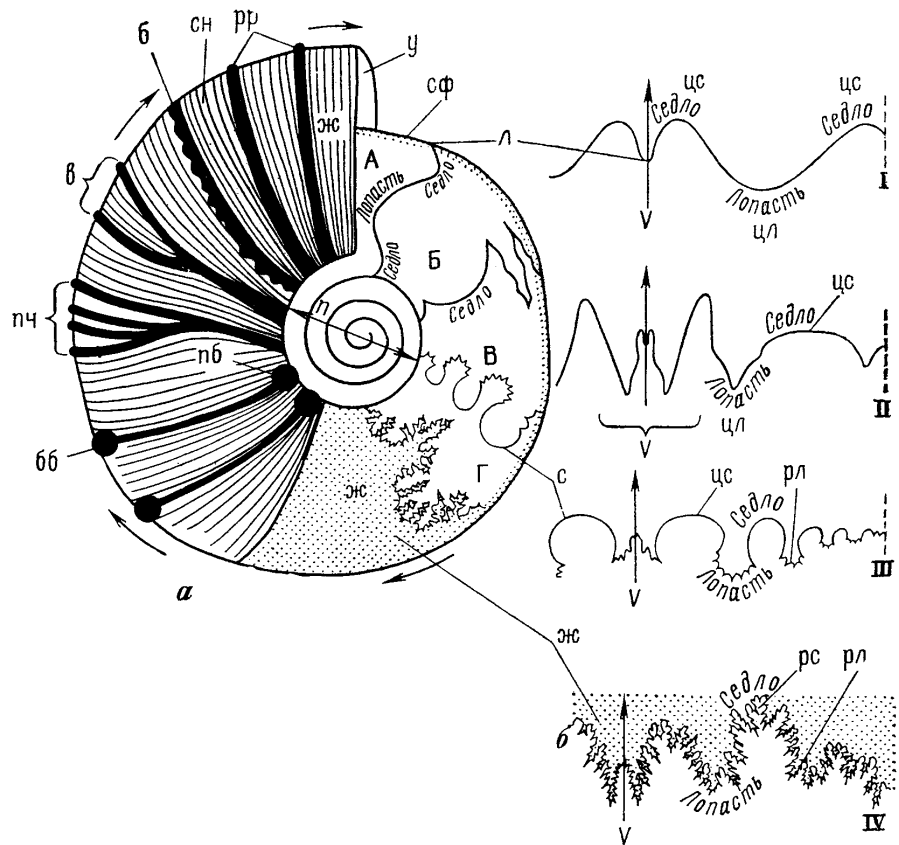


Схема строения спирально-плоскостной полуинволютной раковины аммоноидей (слева — внешняя поверхность раковины, справа — ядро раковины); б — четыре типа лопастных линий: I — агониатитовая, II — гониатитовая, III — цератитовая, IV — аммонитовая (стрелка указывает направление к жилой камере), V — брюшная лопасть, рядом с ней лопасти, находящиеся на боковой стороне, б — бахромчатые ребра, бб — брюшные бугорки, в — вильчатые ребра, ж — жилая камера, л — лопасть, п — пупок, пч — пучок ветвящихся ребер, пб — пупковые бугорки, рл — рассеченная лопасть, рр — простые (поперечные) радиальные ребра, рс — рассеченное седло, с — седло, сн — струйки нарастания, сф — брюшной сифон, у — устье, цл — цельная (нерассеченная) лопасть, цс — цельное (нерассеченное) седло; А — Г — гидростатические камеры

Fig. 3. Конфигурации отдельных элементов лопастной линии

наиболее близким аналогом, видимо, является кривая Коха. Конечно, лопастная линия аммонитов не представляет собой идеальный фрактальный объект, но основные принципы строения и эволюционного изменения имеют элементы самоподобия. Были получены фрактальные коэффициенты для перегородочных линий [9]. Приведенный авторами показатель сложности выделенных элементов перегородок для всего подкласса аммоноидей составляет от 1.02 до 1.64, а с появлением собственно аммонитов дальнейшее усложнение не наблюдается. Скорее всего, это можно объяснить некоей стабилизацией при окончательном эволюционном формировании группы, занявшей наиболее оптимальные для нее основные экологические ниши в древних сообществах.

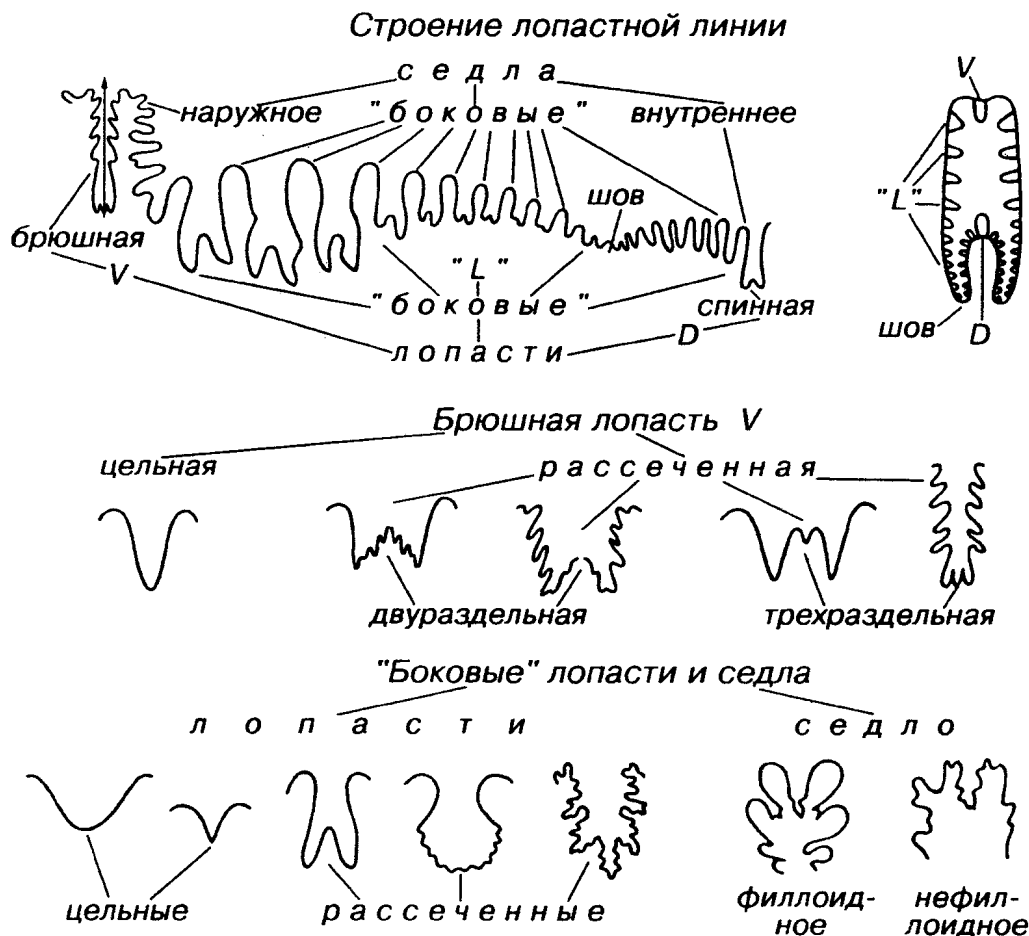


Fig. 4. Обобщенная схема строения раковины аммоноидей

Наблюдаемое сходство с кривой Коха прослеживается (рис.5) как на уровне эволюционного развития всего подкласса от древних аммоноидей (апарцестид) до собственно аммонитов, так и на примере усложнения лопастной линии по мере роста отдельной особи (онтогенез). Примером служит возрастная эволюция рисунка лопастной линии раковины позднекелловейского аммонита *Quenstedtoceras lamberti* Sowerby [10].

Проявление фрактальности, возможно, следует рассматривать как эволюционное преимущество – рациональнее заложить информацию об отдельном элементе объекта, а дальнейшее усложнение в развитии проводить по принципу подобия, чем сохранять и предавать информацию о всей структуре в целом. Фактически такой способ сохранения информации позволяет многократно «сжать» ее объем в геноме и тем самым облегчить наследственную передачу признаков.

В эволюции аммоноидей усложнение лопастной линии рассматривается как «основное звено» [11]. Было показано, что закрепление способов усложнения лопастной линии обеспечило эволюционную пластичность формы раковины на уровне крупных групп, а разные пути этого усложнения могли быть связаны с неодинаковой продолжительностью существования различных филогенетических ветвей.



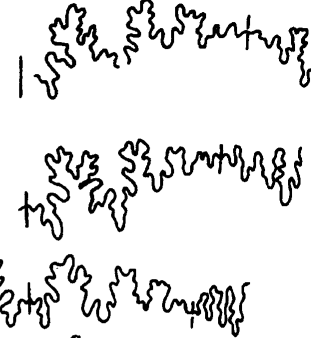
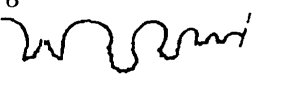
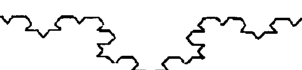


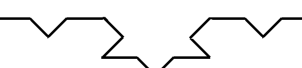
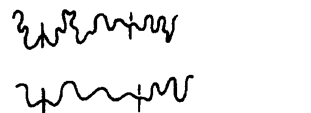


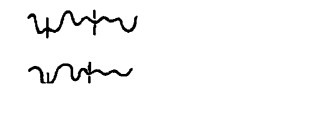

Изменение лопастной линии в эволюции головоногих моллюсков на уровне крупных таксонов от апарцестид до аммонитов	Эволюция кривой Коха	Изменение лопастной линии в онтогенезе на примере аммонита <i>Quenstedtoceras lamberti</i> Sowerby (Меледина, 1987)
 <p>z</p>	 <p>n=4</p>	
 <p>в</p>	 <p>n=3</p>	
 <p>б</p>	 <p>n=2</p>	
 <p>а</p>	 <p>n=1</p>	
	 <p>n=0</p>	

Fig. 5. Сравнение эволюционного и онтогенетического изменения лопастной линии аммонитов с эволюцией кривой Коха (n – номер итерации)

Изучение спирально завитой раковины головоногих моллюсков показывает, что ее **общий** облик также обладает выраженным фрактальным строением. Эту картину можно увидеть, например, просто разрезав раковину перпендикулярно плоскости ее навивания (рис.6). На рисунке схематично показано, что в процессе индивидуального развития конкретной особи сечение каждого оборота хотя и имеет онтогенетические различия, но все же несет элементы подобия предыдущему и по-

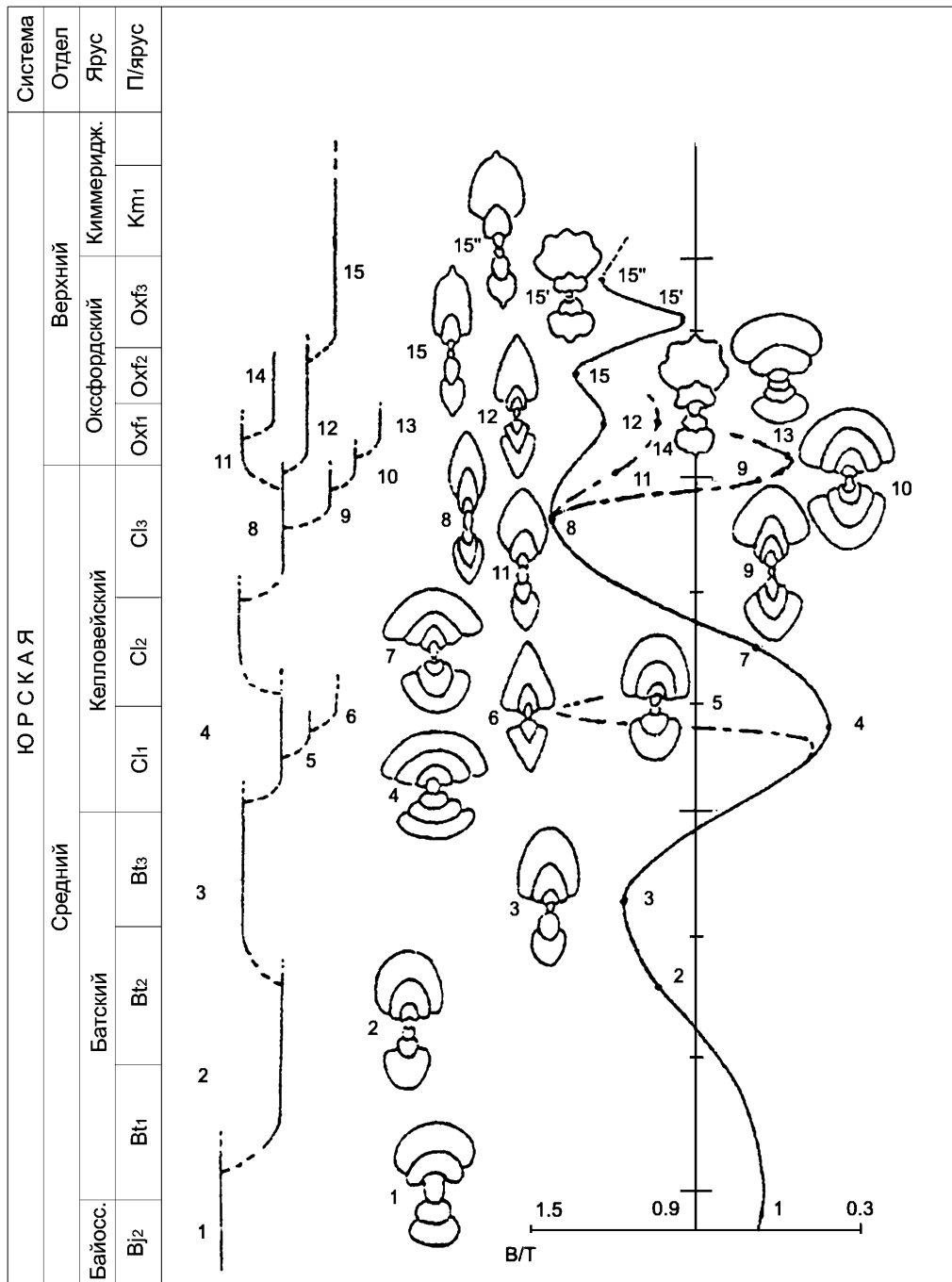


Fig. 6. Периодические изменения характеристик сечения раковин аммонитов в пределах одного семейства кардиоцератид с предполагаемыми филогенетическими связями. В/Т – отношение высоты раковины к толщине. Цифрами обозначены представители родов: 1 – *Cranoccephalites*, 2 – *Arctoccephalites*, 3 – *Arcticoceras*, 4 – *Cadoceras*, 5 – *Cadochamousetia*, 6 – *Chamousetia*, 7 – *Rondiceras*, 8 – *Quenstedtoceras*, 9 – *Longaeviceras*, 10 – *Eboraticeras*, 11 – *Vertumniceras*, 12 – *Cardioceras*, 13 – *Pavloviceras*, 14 – *Vertebriceras*, 15 – *Amoeboceras*, 15' – *A. tuberculatoalternans*, 15'' – *A. leucum*

следующему, что зачастую является значимым для определения рода или вида, а в эволюции одного семейства позволяет проследить периодические изменения характеристик этого сечения [12, 13].

Заключение

Таким образом, на примере головоногих моллюсков наблюдается проявление фрактальности строения их раковины как в процессе эволюции группы в целом, так и в развитии отдельной особи, что вполне объяснимо известным соотношением онтогенеза и филогенеза, согласно которому индивидуальное развитие кратко повторяет весь эволюционный путь предков.

Выявленное самоподобие в развитии элементов лопастной линии аммонитов могло служить обеспечению наиболее быстрых и простых эволюционных изменений, что было связано, видимо, с освоением новых экологических ниш и пространств обширных акваторий палеобассейнов. Действительно, аммониты являлись быстро эволюционирующей группой. Возможно, именно фрактальность позволяла использовать уже работающие, проверенные временем, прошедшие естественный отбор формы и элементы, не затрачивая время и ресурсы на создание и апробирование новых. В этой связи развитие каких-либо структур живых организмов по фрактальной закономерности представляется эволюционно наиболее оптимальным, простым и удобным, что, видимо, объясняет широкое распространение фракталов в живых системах.

В тоже время необходимо заметить, что возникший в конце мелового – начале палеогенового периодов крупный биосферный кризис удалил с лица планеты из числа головоногих моллюсков со спиральной раковиной именно аммонитов – обладателей наиболее сложной лопастной линии с максимально выраженным фрактальным строением. Из всех плоскоспиральных наружнораковинных головоногих, имевших огромное разнообразие родов и видов в мезозое, до сегодняшнего дня дошел лишь один род – наутилус, у которого лопастная линия значительно примитивнее и представляет собой практически прямую линию. Возможно, одну из причин загадочной гибели одной из самых приспособленных групп обитателей мезозойских морей следует искать именно в эволюционном «злоупотреблении» ими возможностями фрактального построения своих раковин.

Авторы благодарят Д.И. Трубецкова за полезное обсуждение материала статьи.

Библиографический список

1. *Yacobucci M.M.* Multifractal and white noise evolutionary dynamics in Jurassic-Cretaceous Ammonoidea // *Geology*. 2005. Feb. Vol. 33, № 3. P. 97.
2. *Рич П.В., Рич Т.Х., Фентон М.А.* Каменная книга. Летопись доисторической жизни. М.: МАИК «Наука», 1997. 623 с.
3. *Уорд П.* Почему вымерли аммониты // *В мире науки*. 1983, № 12. С. 71.
4. *Барсков И.С.* Почему у аммоноидей сложные перегородки и лопастные линии? // *Ископаемые цефалоподы: новейшие достижения в их изучении*. М.: ПИН РАН, 1999. С. 53.

5. *Checa A.* Sutural simplification in Physodoceratinae (Aspidoceratidae, Ammonitina) // *Estud. geol.* 1987. Vol. 43, № 3 – 4, p. 271.
6. *Cobban W.A., Kenedy W.J.* Evolution and biogeography of the Cenomanian (Upper Cretaceous) ammonite *Metoicoceras* Hyatt, 1903, with a revision of *Metoicoceras praecox* Haas, 1949 // *US Geol. Surv. Bull.* 1991, №1934. P.B1 – B25
7. *Checa A.* Interrelated structural variations in Physodoceratinae (Aspidoceratidae, Ammonitina) // *Neues Jahrb. Geol. und Paläontol. Monatsh.* 1986, № 1, s. 16.
8. *Михайлова И.А., Бондаренко О.Б.* Палеонтология. М.: Изд-во МГУ, 1997. 448 с.
9. *Boyajian G., Lutz T.* Evolution biological complexity and its relation to taxonomic longevity in the Ammonoidea // *Geology.* 1992. Vol. 20, № 11. P. 983.
10. *Меледина С.В.* Аммониты и зональная стратиграфия келловей Сибири. М.: Наука, 1977. 290 с.
11. *Попов А.В.* Концепция основного звена В.Е. Руженцева и ее развитие // *Ископаемые цефалоподы: новейшие достижения в их изучении.* М.: ПИН РАН, 1999. С. 14.
12. *Сельцер В.Б., Иванов А.В.* Периодические изменения некоторых признаков в эволюции аммонитов-кардиоцератид // *Вопросы палеонтологии и стратиграфии.* Новая серия. Вып. 1. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1998. С. 28.
13. *Иванов А.В.* Периодическое изменение признаков в эволюции некоторых групп организмов. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1998. 76 с.

*Саратовский государственный
университет*

Поступила в редакцию 12.06.2005

FRACTAL IN STRUCTURE AND EVOLUTION OF CEPHALOPODIAN MOLLUSCA

N.Yu. Ivanova, V.B. Seltzer, A.V. Ivanov

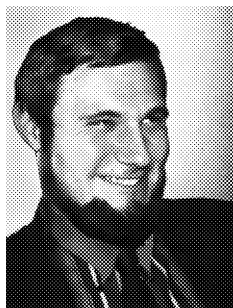
Complication of fractal structure of ammonite's shells has been considered during ontogeny and phylogeny. Analogy to Koh curves has been presumed. Fractality among ammonites may be considered as adaptive and evolutionary advantage that explains their high rate of evolution and certain causes of extinctions.



Иванова Наталья Юрьевна – родилась в Саратове (1988), окончила лицей № 15 в Саратове. Студентка 1 курса факультета нелинейных процессов СГУ. С 1995 года занималась в «Объединении юных геологов» и неоднократно участвовала в различных школьных конференциях и слетах, где занимала призовые места. В 2004 году принимала участие в конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых-2004» с докладом «Элементы фрактальной структуры некоторых живых объектов» и в студенческой конференции факультета нелинейных процессов СГУ. Награждена специальным дипломом.



Сельцер Владимир Борисович – родился в Саратове (1964), окончил Саратовский политехнический институт. С 1987 года специализировался в области технологии листового стекла, имеет ряд изобретений. С 1988 года и по настоящее время является руководителем «Объединения юных геологов», активный популяризатор наук о Земле и краеведения среди учащейся молодежи. С 1995 года на преподавательской работе в средней школе, а с 2003 года на кафедре геоэкологии СГУ. С 1996 года принимал участие в полевых исследованиях по грантовым тематикам. Область научных интересов: исследования юрских и меловых ископаемых головоногих моллюсков, биостратиграфия, палеоэкология и история изучения юрских отложений в Нижнем Поволжье. По палеонтологической и палеоэкологической тематике, а так же исторнографии является автором и соавтором более 25 публикаций.



Иванов Алексей Викторович – родился в Саратове (1974), окончил Саратовский госуниверситет (1996) по специальности «геолог-нефтяник», кандидат геолого-минералогических наук (1996) по специальности «палеонтология и стратиграфия», в 1999 году получил ученое звание доцента. Директор НИИ геологии Саратовского университета (1997-2004), председатель Совета научно-образовательного комплекса наук о Земле СГУ (с 2001 года), первый заведующий новой кафедрой геоэкологии СГУ (с 2002 года), профессор кафедры геоэкологии (с 2003 года). Автор и соавтор более 250 работ, в том числе 18 монографий, 9 учебных пособий, двух научно-популярных книг. Трижды Соросовский доцент, дважды лауреат Государственной научной стипендии, лауреат Потанинской стипендии. Заместитель главного редактора журнала «Недра Поволжья и Прикаспия». Область научных интересов: палеонтология, историческая геоэкология, экологическая геология.

УДК 378.4(470.44-25).096:[55+91]

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НАУКИ О ЗЕМЛЕ В САРАТОВСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

А.В. Иванов

Идеи нелинейной динамики все глубже проникают в самые различные направления науки. Не стали исключением и науки о Земле. Среди геофизиков интерес к этой проблеме возник уже в 1950 – 60-е годы. В 1990-е годы начали появляться публикации, специально посвященные нелинейности геологических систем, процессов и явлений. Были проведены тематические конференции всероссийского масштаба, организованные в Москве Д.Ю.Пушаровским (см., например, Вопросы нелинейной геологии и геодинамики. М.: Геос, 1998. 109 с.).

Саратовские геологи и географы также проявили заинтересованность в изучении нелинейности. Профессорами М.И.Рыскиным, В.Г.Очевым, А.В.Ивановым, Ю.П.Конценебиным в 2001 году был организован «Общедоступный нелинейный семинар» геологического факультета и НИИ геологии СГУ. Работа семинара началась с лекции М.И.Рыскина «Нелинейное мышление и экологическое сознание». В дальнейшем в нем постоянно принимал участие ректор СГУ, чл.-кор. РАН Д.И.Трубецков с докладами и обзорными лекциями: «Как идеи нелинейной динамики проникают в другие науки», «Нелинейная динамика – научное направление XXI века», «О Вавилонской башне, глобализме, современной картине мира и постмодернизме (в контексте нелинейной динамики)». Его ученики, доценты А.А.Короновский и А.Е.Храмов, прочитали для геологической аудитории цикл лекций по основам нелинейной динамики. С лекцией о хаосе выступил профессор физического факультета В.С.Анищенко.

Доцент факультета нелинейных процессов А.А.Князев прочитал цикл «Восемь лекций по синергетике». Ряд докладов сделали геологи: В.Н.Зайонц «Нелинейные процессы в экзогенной динамике», А.В.Иванов «Стрела времени и периодическое изменение признаков в эволюции организмов», Г.А.Бутенко и В.А.Глечиков «Нелинейная геофизика: инфразвуковая сейсморозведка». Завершился семинар последним итоговым докладом В.Г.Очева «О понимании нелинейной динамики и синергетики геологами».

Обмен мнениями на семинаре послужил хорошим импульсом для развития иных форм сотрудничества геологов и географов, с одной стороны, и специалистов по нелинейным процессам, с другой. Были внесены коррективы в учебный процесс: в учебный план специальности «геоэкология» на кафедре геоэкологии включен и читается курс «синергетика», в программы ряда курсов добавлены соответствующие разделы и т.д.

В настоящее время под руководством Д.И.Трубецкова работает общеуниверситетский семинар «Синергетика: от прошлого к будущему». Возникший фактически из «геологического» он охватил сегодня многие подразделения университета. В докладах и дискуссиях участники семинара стараются рассматривать синергетические идеи в разных науках как можно шире вплоть до философских аспектов. На семинаре прозвучали доклады: Д.И.Трубецкова «Д.С.Данин и его кентавристика», «Будет ли конец науки?», «Образование, наука и культура: миссия университета»; Т.П.Фокиной «Теория организации»; А.В.Иванова «Нелинейная Земля».

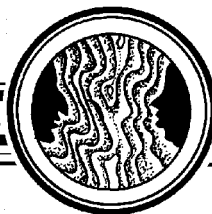
Очевидно, что максимального эффекта при изучении нелинейных процессов в области наук о Земле можно достичь только совместными тематическими исследованиями геологов и географов со специалистами по нелинейной динамике. Тем и объектов таких междисциплинарных исследований уже сегодня намечается множество. И это не удивительно – разнообразные геологические и географические процессы имеют явно нелинейную природу. В настоящее время геологами, географами и физиками СГУ ведется изучение нелинейных свойств овражно-балочной сети и их изменений при антропогенном воздействии. Зарождаются совместные междисциплинарные исследования по таким геонаучным темам, как нелинейные свойства разломной сети и трещиноватости, самоорганизация кольцевых структур Земли, нелинейные эффекты оползневых процессов и др. Постановки и решения нелинейных задач стоит ожидать также в геоморфологических, геоэкологических, палеонтологических, а в первую очередь, конечно, в геофизических исследованиях. В СГУ среда для развития таких междисциплинарных исследований может оказаться особенно благоприятной, а результаты интересными, благодаря развитию сильной синергетической школы в Научно-образовательном институте «Открытые системы», включающем факультет нелинейных процессов и НИИ физики нелинейных систем СГУ.

Предварительные результаты предлагаются к обсуждению и на страницах журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика». Первой стала статья М.И.Рыскина и А.В.Иванова «Нелинейные идеи в науках о Земле: информация к размышлению» («Изв. вузов. ПНД» 2003, т.11, № 6, с. 138). В настоящем журнале представлена статья по результатам исследований в области палеонтологии. Один из авторов, Н.Ю.Иванова, начала свою научную работу, будучи школьницей. Недавно она получила премию по итогам молодежной научной конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2004». Для нее статья является дебютом – результаты ее работы публикуются в научном журнале впервые.

*Саратовский государственный
университет*

Поступила в редакцию 28.08.2005

фото



Изв. вузов «ПНД», т. 13, № 4, 2005

УДК 929 Эйнштейн + 53 (430)(092)

ГОД ФИЗИКИ: ЭТЮДЫ ОБ ЭЙНШТЕЙНЕ

Б.С. Дмитриев, Ю.И. Левин, Ю.П. Шараевский

Сто лет тому назад в области теоретической физики вышли в свет работы А. Эйнштейна, во многом изменившие наши представления об окружающем мире и оказавшие огромное влияние на развитие нашей цивилизации. Но сегодня физика, и прежде всего теоретическая, «не в почете», поэтому «перед международным физическим сообществом стоит задача предпринять активные действия для того, чтобы довести свое видение современной физики до широкой общественности и политиков» (www.wup2005.ru)¹. Именно этой цели посвящена настоящая работа.

Все с детства знают, что то-то и то-то невозможно. Но всегда находится невежда, который этого не знает. Он-то и делает открытие.

А. Эйнштейн

Организация объединенных наций объявила (резолюция Генеральной Ассамблеи № 58/293 от 16.06.2004) 2005 год Всемирным годом физики, признавая тем самым огромное влияние физики на развитие нашей цивилизации. Физика во многом определяет развитие техники и высоких технологий, существенно влияет на наш быт (телевизоры, персональные компьютеры, мобильные телефоны, электронные печи и т.д.). Но не менее важно, что физика является основой современного научного мировоззрения. В резолюции ООН отмечается, что «благодаря изучению физики мужчины и женщины получают в свое распоряжение средства для создания научной инфраструктуры, необходимой для развития».

¹Сотрудники факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета откликнулись на этот призыв и приняли участие в проведении Международного года физики. Совместно с Комитетом по образованию администрации Саратова был разработан проект цикла лекций, посвященных жизни и творчеству А. Эйнштейна, его «звездным» работам и избранным современным проблемам физики. Эти публичные лекции были прочитаны профессорами факультета для школьников и учителей в различных районах города и области, а также для студентов ФНП.

Тем не менее в последние годы, к сожалению, интерес к физике, как и ко всей естественной науке, значительно уменьшился. Часть общества, и прежде всего та часть, которая обладает сегодня реальной властью, явно демонстрирует, несмотря на риторику, непонимание огромной роли современной фундаментальной и прикладной физики «как в создании большинства существующих технологий, так и в решении таких глобальных проблем, как поиск новых источников энергии, защита окружающей среды и здоровья населения» (www.wupr2005.ru). В области образования также все больше проявляется непонимание важности осознания естественно-научной картины мира и места человека в ней, непонимание той роли, которую играет физика в формировании этой картины в сознании молодежи.

*

Почему именно 2005 год стал Всемирным годом физики? Сто лет тому назад, в 1905 году Альберт Эйнштейн опубликовал работы, которые относятся к наиболее значительным результатам в области фундаментальной физики, оказавшим существенное влияние на развитие нашего общества. В 1905 году в течение 10 месяцев из-под пера двадцатилетнего Эйнштейна вышли пять работ, пять шедевров.

К этим работам относится *докторская диссертация «Новое определение размеров молекул»* объемом в 21 страницу, которая была представлена Эйнштейном на естественно-математический факультет Цюрихского университета и за которую ему была присуждена ученая степень доктора философии. Напомним, что это было время, когда существование молекул, считавшееся не более чем удобной абстракцией, ставилось под сомнение. Вначале один из оппонентов вернул диссертацию автору с замечанием, что она слишком короткая. Эйнштейн добавил еще одну фразу и диссертация была принята. В наше время претендент на докторскую степень должен иметь несколько солидных публикаций. Трудно сказать, какие требования предъявлялись к докторской диссертации в Швейцарии в 1905 году, но Эйнштейн имел такие публикации. В 1901 году в журнале «*Annalen der Physik*») была опубликована его первая научная работа «Следствия из явлений капиллярности» объемом в десять страниц. В 1902–1903 годах им опубликованы в том же журнале две работы «Кинетическая теория теплового равновесия» и «Теория основ термодинамики».

В сентябрьском номере журнала «*Annalen der Physik*» за 1905 год (Vd.17) опубликованы сразу три выдающиеся работы Эйнштейна.

«*Об одной эвристической точке зрения на возникновение и превращения света*». Эта работа была направлена в печать 18 марта 1905 года. Она содержит гипотезу о световых квантах и практически констатирует то, что впоследствии назвали корпускулярно-волновым дуализмом; в работе дается объяснение фотоэлектрического эффекта. Часто пишут, что именно за эту работу Эйнштейну была вручена Нобелевская премия за 1921 год². В решении Нобелевского комитета сказано, что премия вручается Эйнштейну в знак высокой оценки «его работ в области теоретической физики и, в частности, за открытие закона фотоэлектрического эффекта». Работа о

²В 1921 году процедуры награждения Нобелевской премией не было. В ноябре 1922 года Комитетом было принято решение о присуждении Нобелевской премии за 1921 год А. Эйнштейну, а за 1922 год – Нильсу Бору (за работы по исследованию структуры атомов и их излучения). Эйнштейн не смог присутствовать на церемонии вручения премии (находился в Японии) и свою Нобелевскую лекцию прочитал позже.

световых квантах выделена, но и остальные работы, в том числе по теории относительности, явно не отодвинуты в сторону. Тем не менее такое выделение работы, в которой сформулирован закон фотоэлектрического эффекта, не случайно. Без нее, может быть, не могли бы появиться знаменитая модель атома Н. Бора (1913) и гениальная гипотеза «волн материи» Луи де Бройля (начало 1920-х).

«*О движении взвешенных в покоящейся жидкости частиц, вытекающем из молекулярно-кинетической теории*». Статья была направлена в печать 11 мая 1905 года, она завершала серию работ по теории молекулярного движения. В этой работе с помощью статистических методов Эйнштейн показал, что наблюдаемое в микроскоп движение взвешенных в жидкости мелких частиц (броуновское движение) есть результат движения невидимых молекул жидкости. В работе дано строгое математическое обоснование того, что за статистическими закономерностями стоит движение частиц, подчиненное динамическим закономерностям. Эйнштейн предсказал, что наблюдение броуновского движения позволяет вычислить массу и число молекул, находящихся в данном объеме. Результаты Эйнштейна были подтверждены блестящими экспериментами французского физика Жана Перрена, получившего за свои работы Нобелевскую премию за 1926 год.

«*К электродинамике движущихся тел*». Статья была направлена в журнал 30 июня 1905 года и явилась основополагающей работой по теории относительности. Сестра Альберта Эйнштейна Майя впоследствии рассказывала (других свидетельств нет), что вначале эта работа была представлена в качестве диссертации в Цюрихский университет, но была отклонена, так как демонстрировала крайне неуважительное отношение автора к авторитетам.

И, наконец, пятая из великих работ. Не проходит и трех месяцев после направления в «*Annalen der Physik*» статьи по теории относительности, как Эйнштейн направляет 27 сентября еще одну работу – «*Зависит ли инерция тела от содержания в нем энергии*». Эта работа была опубликована в следующем номере журнала «*Annalen der Physik*» (1905, Bd.18), в ней фактически содержится доказательство знаменитой формулы $E = mc^2$, но сама формула не приведена, она появляется в другой работе несколько позже.

Указанные пять работ Эйнштейна сделали 1905 год «звездным» годом физики, а двадцатипятилетнего автора поставили в ряд выдающихся физиков.

Современник и друг Эйнштейна Макс Борн (Нобелевская премия по физике за 1954 год) писал: «Идеи Эйнштейна дали физической науке импульс, который освободил ее от устаревших философских доктрин и превратил в одну из решающих сил современного мира людей». Наш современник В.Л. Гинзбург (Нобелевская премия по физике за 2003 год) отметил: «Создание общей теории относительности, решающая роль в создании специальной теории относительности, замечательные работы в области квантовой теории и статистической физики – все это сделал Эйнштейн, и без этого современная физика немислима».

Здесь нет необходимости подробно излагать содержание этих и последующих работ Эйнштейна. Теория относительности и другие теории Эйнштейна стали учебными предметами. Их изучают студенты в курсах общей и теоретической физики естественно-научных факультетов, с ними знакомятся в курсах «Концепции современного естествознания» студенты гуманитарных факультетов, общие представления получают учащиеся средних учебных заведений.

*

Существует огромное число книг, сборников, статей, посвященных биографии и трудам Эйнштейна. Много литературы по этой тематике выпущено в свет в связи со столетием со дня рождения Эйнштейна, которое отмечалось в 1979 году. В популярной, и не только в популярной, литературе биографию Эйнштейна иногда излагают так, что создается впечатление: молодой, «так себе» учившийся, имеющий много свободного времени, но ужасно талантливый уже в утробе матери человек-одиночка взял и в какой-то момент выдвинул несколько революционных физических идей, которые сразу же сделали его знаменитым. Например, в одной из книг об Эйнштейне сказано: «Физики, собственно говоря, никогда не изучал. Своими достижениями обязан лишь своему уму». Это не только упрощенный, но и глубоко неверный взгляд на то, что произошло более 100 лет тому назад.

Эйнштейн родился в городе Ульме, расположенном на левом берегу Дуная в Швабских Альпах, сегодня это территория ФРГ. Дом, в котором он родился, был разрушен во время бомбардировок 1944 года и не был восстановлен. Сохранилась городская регистрационная книга, в которой записано: «К нижеподписавшемуся чиновнику городского регистрационного бюро сегодня явился знакомый ему в лицо коммерсант Герман Эйнштейн, иудейского вероисповедания, проживающий в Ульме на Бронгофштрассе, 135; он сообщил, что его супруга, Паулина Эйнштейн, урожденная Кох, проживающая там же в Ульме, родила 14 марта 1879 года в 10 часов 30 минут утра младенца мужского пола, который был назван Альбертом». В Ульме проживал дед Альберта и многочисленная родня. В 25 километрах от Ульма жил двоюродный брат отца, дочь которого Эльза впоследствии стала женой Эйнштейна. Для среды, к которой принадлежала семья Эйнштейна, был характерен культ Гейне, Лессинга, Шиллера. Отец Альберта обладал незаурядными математическими способностями, и только сложное материальное положение не позволило ему реализовать эти возможности, вместо университета он занялся, как мы теперь говорим, бизнесом. Однако бизнесменом он был неудачным. Мать Альберта была музыкально одаренной женщиной. Обстановка в семье способствовала развитию у маленького Альберта математических способностей, логического мышления, любви к музыке (которая пришла не сразу). Можно отметить еще одну наследственную черту – любовь к природе. Регулярные прогулки по живописным окрестностям мест проживания были традицией семьи Эйнштейна. Позже, будучи студентом в Цюрихе, работая в Берне, Эйнштейн с друзьями часто совершал пешие прогулки.

Менее чем через год после рождения Альберта в поисках лучшего места для бизнеса семья переехала в Мюнхен, где в 1881 году родилась сестра Альберта Майя, которую он нежно любил. Альберт рос тихим, замкнутым ребенком, избегал шумных игр, часто играл один, пристроившись где-нибудь в уголке. Марширующие под музыку военных оркестров солдаты вызывали восторг у его сверстников, а маленький Альберт плакал и просился домой. Но другие факты говорят о том, что в душе этого тихого мальчика бушевали страсти, сильные эмоции не были ему чужды. Правда, они проявлялись, как у многих детей его возраста, своеобразно. Когда Альберту исполнилось шесть лет, мать пригласила учительницу обучать его музыке. Однажды учительница, уроки которой он не любил, вызвала у него такую ярость, что он бросился на нее со стулом. Известен случай, когда он бросил в голову своей сестры кегельный шар. С возрастом такие способы «выплескивания» эмоций прекратились. В студенческие годы в Цюрихе Эйнштейн на окружающих производил впечатле-

ние уравновешенного, гуманного и жизнерадостного человека. Тем не менее, известен такой случай, рассказанный дочерью хозяйки комнаты, которую снимал студент Эйнштейн. Однажды Эйнштейн после какой-то дискуссии со своими друзьями предложил обратиться к музыке. Достал свою скрипку, и в это время раздались звуки фортепьянной сонаты Моцарта. «Кто эта пианистка?» – воскликнул Эйнштейн. Ему сказали, что это учительница музыки, которая живет в мансарде. Он бросился туда со скрипкой в руках. Ему кричали, что врываться в чужую комнату без воротничка и галстука неприлично; он не слышал. Через короткое время к звукам фортепьяно присоединилось пение скрипки. Возвратился Эйнштейн, с восторгом говоря о прелестной барышне, с которой он будет часто музицировать. Через несколько часов пришла уже не молодая фрейлейн в строгом черном платье и робко спросила, кто этот молодой человек, который напугал ее, ворвавшись с криком: «Играйте, играйте дальше!». Ее успокоили, сказав, что это безобидный студент.

В семье Эйнштейна либерально относились к религии и религиозным обрядам. Свободомыслящий отец отдал Альберта в католическую начальную школу. Еврейская школа была далеко от дома, да и обучение в ней было не по средствам. Вероятно, в этой школе Эйнштейн впервые столкнулся с антисемитизмом. Но ни эти «брызги антисемитизма», ни махровый антисемитизм, с которым столкнулся Эйнштейн, будучи уже известным ученым, не вызвали у него чувства национальной обособленности; с детства до своей смерти Эйнштейн оставался приверженцем интернациональной солидарности людей, преданных разуму и справедливости.

В десять лет Эйнштейн поступил в гимназию. Немецкие школы того времени можно характеризовать двумя словами – «воинственная казенщина». Классическое образование сводилось к зубрежке и недопустимости каких-либо признаков самостоятельности. Преподаватели подражали офицерам, а школьники были обязаны выглядеть нижними чинами. Позже Эйнштейн говорил: «По-моему, хуже всего, если школа строит свою работу на запугивании, насилии и искусственно созданных авторитетах. Такая система воспитания губит здоровые чувства и непосредственность школьников, убивает их веру в собственные силы. Так создают приниженных верноподданных». О положении Эйнштейна в гимназии говорят следующие две истории. Классный наставник однажды сказал ему: «Мне хотелось бы, чтобы Вы покинули нашу школу!». Эйнштейн возразил: «Но я ведь ни в чем не провинился!». Учитель продолжал: «Это верно, но одного Вашего присутствия в классе достаточно, чтобы полностью подорвать уважение к учителям». Учитель немецкого языка однажды заявил: «Из Вас, Эйнштейн, никогда ничего путного не выйдет».

Эйнштейн переходил из класса в класс, без блеска (по оценкам преподавателей) справляясь со школьной программой. В образовании Эйнштейна важным оказался другой путь познания, который теперь мы называем «самостоятельной работой». В гимназические годы Эйнштейн знакомится с пятитомным сочинением А. Гумбольдта «Космос», читает составленные Бернштейном «Популярные книги по естествознанию». Изучает книгу Бюхнера «Сила и материя». К двенадцати годам Альберт знал алгебру и развлекался тем, что искал новые способы решения задач. Случайно в его руки попала книга по евклидовой геометрии. Первая же страница завораживает его. Свидетельством того, что интерес к математике проявился рано, являются слова самого Эйнштейна: «В возрасте от двенадцати до шестнадцати лет я овладел основами математики, включая принципы дифференциального и интегрального исчисления».

Примером стремления Эйнштейна к самостоятельности является история с музыкальным образованием. С шести лет его стали обучать игре на скрипке. В течение семи лет учителя не смогли внушить ребенку любовь к музыке, он просто делал то, что велела мать. Но вот он встретился с сонатами Моцарта, грация и эмоциональность которых произвели на него огромное впечатление. Для исполнения сонат не хватало умения. Эйнштейн стал оттачивать свою технику игры и добился – сонаты зазвучали. Музыка стала наслаждением. Моцарт в музыке и геометрия Евклида в математике – звенья одной цепи.

Когда Эйнштейну исполнилось пятнадцать лет, его родители вместе с Майей переехали в Милан (Италия), в поисках лучших условий для бизнеса. Альберта оставили на пансионе у знакомых для окончания гимназии. Но мюнхенскую гимназию, пропитанную казарменным духом, он не закончил. Весной 1895 года он один отправился через горный перевал в Милан. Этот поступок огорчил родителей Эйнштейна, но он заверил их, что самостоятельно приобретет знания, необходимые для поступления в высшую школу. В Милане Эйнштейн в течение нескольких недель посещал Международную школу, в которой обучение не имело ничего общего с казенщиной немецких школ.

*

Коммерческие дела отца шли далеко не лучшим образом. Необходимо было как можно быстрее решать вопрос о приобретении профессии. Молодого Эйнштейна привлекали математика и физика, но поступить в университет без гимназического аттестата было практически невозможно. На семейном совете было решено, что Альберту следует поступать в Цюрихский политехнический институт, пользовавшийся наибольшей известностью, и преподавание в котором велось на немецком языке.

Эйнштейн отправился в Цюрих, но в институт не поступил. Он блестяще сдал математику, но проявил недостаточные знания по иностранным языкам, ботанике и зоологии. Отрицательную роль сыграло также отсутствие гимназического аттестата. Директор института посоветовал ему окончить среднюю школу в маленьком швейцарском городке Аарау, расположенном в двадцати милях от Цюриха, и через год поступать вновь.

Эйнштейн переборол отвращение к школе и последовал совету директора Политехнического института. Вскоре от предубеждений Эйнштейна не осталось и следа. Вспоминая свои годы жизни в Аарау, он писал: «Эта школа произвела на меня неизгладимое впечатление своим либеральным духом, а также скромностью и серьезностью педагогов, которым помогал в работе подлинный, а не дутый авторитет. Сравнение с шестилетним пребыванием в немецкой гимназии, где царила авторитарность, отчетливо показало мне, насколько воспитание, основанное на свободе действий и чувстве ответственности перед собой, совершеннее воспитания, строящегося на муштре, дутом авторитете и честолюбии. Демократия – не пустой звук». В Аарау Эйнштейн наслаждался тесными контактами с учителями и либеральным духом, царившим в гимназии. Все прежнее вызывало у него настолько глубокое неприятие, что он подал официальное прошение о выходе из германского подданства, на что его отец согласился весьма неохотно. Его школьный товарищ Ганс Биланд вспоминал о времени, проведенном в Аарау: «Весьма оживленная в те годы жизнь студенческих корпораций и традиционные сборища за кружкой пива не занимали места в его существовании. Он любил повторять слова Бисмарка: «Пиво делает людей глупыми и

ленивыми». Этот шестнадцатилетний юноша зачитывался «Критикой чистого разума» Канта. Книги по-прежнему играли важную роль в самообразовании Эйнштейна, а проявление самостоятельности поощрялось в кантональной школе Аарау.

Светлые воспоминания Эйнштейна о времени, проведенном в Аарау (с осени 1895 до весны 1896), связаны также с семьей Винтлеров, в доме которых он жил, где его принимали как родного сына, где господствовала атмосфера свободного и непринужденного обмена мнениями. С сыновьями Винтлеров – своими сверстниками – Эйнштейн совершал прогулки в горы. За одного из них сестра Эйнштейна Майя в 1910 году вышла замуж. Дочь Винтлеров стала женой Макеланджело Бессо – впоследствии ближайшего друга Эйнштейна.

В 1896 году Эйнштейн закончил кантональную школу в Аарау и был принят на педагогический факультет (по сути это был физико-математический факультет) Цюрихского политехнического института. Точное название – Федеральное высшее политехническое училище. Для краткости это высшее учебное заведение, основанное в 1855 году, называли Политехникумом, а выпускники свою alma mater с теплотой называли «Поли». Здесь Эйнштейн учился с октября 1896 по август 1900 года. Вместе с ним на педагогический факультет поступили ставшие его друзьями Марсель Гроссман, Луи Коллрос, Якоб Эрат, Милева Марич.

Эйнштейн не был прилежным студентом. По воспоминаниям Макса Борна он «удивлял своих преподавателей нерегулярным посещением лекций и некоторой безучастностью». При подготовке к экзаменам он пользовался конспектами своего друга Марселя Гроссмана. Среди преподавателей Эйнштейна был Герман Минковский, сыгравший впоследствии значительную роль в разработке математического аппарата теории относительности. После публикации работ Эйнштейна он говорил: «По правде говоря, я этого от Эйнштейна не ожидал». Эйнштейн часто пропускал лекции крупного специалиста в области электротехники Генриха Вебера, который читал курс лекций «Введение в теоретическую физику». Электромагнитная теория Максвелла в его лекциях отсутствовала, он просто игнорировал все, что было сделано в физике после Гельмгольца. Эйнштейн не мог почерпнуть что-либо новое из этих лекций. К тому же он допускал тяжкое нарушение кодекса поведения, называя Вебера «господином Вебером», а не «господином профессором», и позволял себе критиковать преподавателя за то, что тот в своих лекциях не упоминал ни работ Максвелла, ни работ Больцмана. Перед выпускными экзаменами Вебер выразил недовольство по поводу дипломной работы Эйнштейна. Во-первых, работа была посвящена теплопроводности, а Вебер считал эту тему малоинтересной. Во-вторых, работа была написана не на той бумаге, которой предписывалось пользоваться. Эйнштейну пришлось переписать работу. Вебер не оставил Эйнштейна на кафедре после окончания «Поли» и, как писал Эйнштейн, Вебер «интриговал» против него, что затруднило получение достойной работы. В физической лаборатории, руководимой профессором Жаном Перне, Эйнштейн откладывал в сторону инструкции с описанием методики выполнения задачи и решал задачу своим путем, что раздражало Перне. Однажды по докладной Перне Эйнштейну объявили выговор за плохое посещение занятий. Перне считал, что способностей у Эйнштейна не хватает и советовал ему оставить физику, заняться чем-нибудь другим, например, медициной или филологией.

Можно ли считать, что Эйнштейн был нерадивым студентом и не получил сколько-нибудь прочных знаний? Обратим внимание на два обстоятельства. Эйнштейн, как и его друзья, успешно сдает трудные выпускные экзамены, получает по

всем предметам, кроме дипломной работы, оценки не менее 5 при максимальной оценке в 6 баллов – не так уж плохо. Следует принять во внимание, что Эйнштейн окончил одно из лучших высших учебных заведений того времени. Свидетельством высокого образовательного и научного потенциала Политехникума может служить то, что в его стенах в разное время преподавали выдающиеся ученые Р. Клаузиус, Э. Кристоффель, Г. Минковский, П. Вейс, В. Паули, П. Дебай, Р. Пайерлс, в его стенах учились В. Рентген, В. Нернст, В. Ритц, О. Пикар, В. фон Браун, Эльвин Бруно.

В студенческие годы для Эйнштейна остается важным самообразование, формирование самостоятельного научного мышления. В автобиографии Эйнштейн с благодарностью пишет, что он имел превосходных учителей, что в «Поли» студенты от принуждения страдали значительно меньше, чем студенты во многих других учебных заведениях, что он широко пользовался свободой, «главным образом для того, чтобы дома изучать труды Кирхгофа, Гельмгольца, Герца и т.д.». В студенческие годы Эйнштейн самостоятельно штудировал работы Максвелла, Больцмана, Лоренца. С Больцманом он вступает в переписку. Эйнштейн впоследствии писал: «Ни у одного из моих профессоров я не был на хорошем счету». Профессора не знали, что их нерадивый студент самостоятельно изучает труды классиков естествознания.

Молодой Эйнштейн не был «сухарем» и не чурался обычных радостей жизни. Дочь хозяйки комнаты, которую он снимал в Цюрихе, рассказывала: «Помимо трех постоянных обитателей пансионата к обеду всегда собирались их приятели... Все они часто вели оживленные споры. По вечерам нередко устраивали импровизированные концерты, в которых Эйнштейн блистал своим искусством скрипача». Далее в своих воспоминаниях она пишет: «Когда ко мне в гости приходили подружки, он с удовольствием пил с нами чай и галантно провожал девушек домой». Частым гостем был Эйнштейн в семье своего друга Марселя Гроссмана, где приветствовались горячие споры, увлечение музыкой, юмор. Однажды Эйнштейн обратился к брату Марселя: «Вы, должно быть, не можете быстро бегать?». И пояснил изумленному юноше, поглядывая на его большие уши: «Ну как же! Из-за сопротивления воздуха Вашим ушам». Эйнштейн посещал семью Якоба Эрата, рядом с которым он обычно сидел на занятиях. Мать Якоба с большой любовью относилась к Эйнштейну. Общался он с семьей Густава Майера, который был другом его отца. Позже Эйнштейн писал супругам Майер: «Ваш гостеприимный дом был всегда открыт для меня в мои студенческие годы, даже тогда, когда я в грязных башмаках спускался с Утлиберга» (гора в окрестности Цюриха). Эйнштейн любил ходить под парусом по Цюрихскому озеру, делать пешие вылазки в горы.

*

В августе 1900 года Эйнштейн окончил Федеральное политехническое училище, и начался самый трудный период его жизни, трудный как в материальном, так и в психологическом плане. Без рекомендации профессора физики Вебера, отношения с которым были совершенно испорчены, поступить в какой-либо университет не было шансов. Попытка стать ассистентом профессора Гурвица окончилась безрезультатно. Начались длительные поиски работы в разных городках Швейцарии. Иногда Эйнштейну удавалось получить временную работу и немного улучшить свое питание. Скучная диета (иногда на ужин был только кусок хлеба с колбасой) впоследствии привела к тяжелому желудочному заболеванию. В феврале 1901 года

Эйнштейн получил швейцарское гражданство; пришлось уплатить соответствующий взнос, отказав себе в самом необходимом. Как всякий гражданин Швейцарии Эйнштейн должен был проходить военную службу. Из-за плоскостопия и расширения вен его признали негодным. Эйнштейн воспринял это как оскорбление. Недостаток материальных благ в период безработицы не только не сломил Эйнштейна, но и не повлиял на его мироощущение. В это время он публикует свою первую научную работу, активно участвует в любительских музыкальных концертах.

На помощь Эйнштейну пришел его друг Марсель Гроссман, а точнее, отец Марселя, который порекомендовал Эйнштейна своему другу Галлеру, директору патентного бюро в Берне. Начался семилетний период пребывания Эйнштейна в патентном бюро. Можно с уверенностью сказать, что это был период научного творчества и великих свершений. На этот период приходится «звездный» 1905 год. Но были ли эти годы для Эйнштейна легкими? Можно ли говорить, что выполнение служебных обязанностей в бюро было некоторым, неизбежным в силу обстоятельств, небольшим отвлечением от размышлений над фундаментальными проблемами физики? Существует легенда о якобы легкой жизни Эйнштейна в патентном бюро, будто бы он имел много свободного времени для занятий любимым делом – теоретической физикой. Так ли это? Официально патентное бюро называлось Федеральным ведомством духовной собственности, или в другом переводе – Федеральное ведомство умственных ценностей. Для того времени это было учреждение высокого класса. Большинство служащих, включая директора, были выпускниками Федерального высшего политехнического училища. Эйнштейн подал на имя директора Галлера заявление с просьбой зачислить его на должность инженера-эксперта II класса. Галлер подверг его двухчасовому строгому экзамену. Положительным было то, что Эйнштейн владел немецким, французским и итальянским языками, имел обширные знания в электродинамике Максвелла, которая в то время считалась верхом сложности. Не в пользу кандидата было то, что он не был инженером и не обладал достаточными знаниями в области технической механики.

16 июня (по другим данным 23 июня) 1902 года Эйнштейн был зачислен в патентное бюро на должность технического эксперта III класса (а не II, как он хотел) с годичным испытательным сроком – он должен был овладеть техническими дисциплинами и черчением. Испытательный срок затянулся более чем на два года. Только в сентябре 1904 года Эйнштейн стал полноправным техническим экспертом III класса, а вопрос о переводе его на должность эксперта II класса был решен только в 1906 году, когда его «звездные» работы были уже опубликованы. Технический эксперт был обязан подвергать проверке, оценке и корректировке поступающие патентные заявки, решать спорные вопросы с изобретателями, выписывать авторские удостоверения. Это была работа не только с бумагами. Эксперт был обязан проводить испытания действующих патентуемых моделей или образцов. За день приходилось обрабатывать не менее трех заявок. Рабочий день служащего патентного бюро длился восемь часов. К тому же Эйнштейн должен был, по крайней мере в первые годы, находить время для освоения технического черчения. Директор бюро Галлер был приверженцем жесткой дисциплины. Себя и своих коллег Эйнштейн называл «батраками», «патентными рабами», а само учреждение – «светским монастырем».

В январе 1903 года Эйнштейн женился на своей однокурснице Милеве Марич, а 14 мая 1904 – у них родился сын. В поисках дополнительного заработка Эйнштейн

пытался давать частные уроки, реферировал статьи в журнале «Annalen der Physik». Можно было наблюдать такую картину: левой рукой Эйнштейн качал детскую коляску, правой делал заметки, чаще всего используя отгрызок карандаша. Семейные заботы тоже требовали времени.

Сказанное свидетельствует о несостоятельности легенды о том, что работа Эйнштейна в патентном бюро была синекурой. Тем не менее Эйнштейн вспоминал о годах службы в патентном бюро как «о счастливых годах». Скорее всего, он имел в виду не материальные блага, к которым он всегда относился с большой долей безразличия, и не наличие якобы свободного времени для занятий наукой, а свободу бернской жизни от академических условностей и университетских авторитетов. В непростой бернский период своей жизни Эйнштейн взялся за сложные нетривиальные задачи и успешно решил их. Он с оптимизмом говорил: «...после восьми часов работы остается еще восемь часов на всякую всячину, да еще есть воскресенье». Макс Борн писал: «Чтобы успешно заниматься наукой в виде побочного труда, нужно было быть Эйнштейном».

Годы работы в патентном бюро были счастливыми, вероятно, и благодаря так называемой «Академии Олимпия». В первые месяцы пребывания в Берне Эйнштейн дал объявление о частных уроках. На объявление откликнулся румын Морис Соловин, изучавший в Цюрихском университете философию. Уроки быстро переросли в обсуждения различных проблем. Соловин предложил вместе читать по вечерам интересные книги. Вскоре к ним присоединился Конрад Габихт, приехавший в Берн для завершения своего математического образования. Свой кружок молодые люди назвали «Академия Олимпия». Они собирались после работы и читали сочинения Спинозы, Юма, Маха, Ампера, Гельмгольца, Римана, Пуанкаре, трактаты математиков Дедекинда и Клиффорда и многое другое. Они читали такие шедевры мировой литературы, как «Антигона» Софокла, «Андромаха» Расина, «Рождественские рассказы» Диккенса, «Дон Кихот» Сервантеса. Соловин вспоминал: «Прочитывалась одна страница, иногда только полстраницы, а порой только одна фраза, после чего следовало обсуждение, которое, если вопросы были важными, могло затянуться на много дней». Эйнштейн в письме к Соловину в 1948 году писал: «Хорошее время было тогда в Берне, когда мы учредили нашу веселую академию, которая была менее ребяческой, нежели те почтенные академии, с которыми я близко познакомился позднее».

Организаторами «Академии Олимпия» были Эйнштейн, Соловин и Габихт. Друзей объединяло искреннее стремление учиться, познавать то, что не давала высшая школа. Вскоре к ним примкнул Микеланджело Бессо. По рекомендации Эйнштейна он поступил в 1904 году в Бернское патентное бюро. С работы они часто возвращались вместе и вели нескончаемые беседы. Бессо обладал энциклопедическими знаниями, был заядлым спорщиком. Эйнштейн потом писал, что не знал «лучшего резонатора новых идей». Бессо был первым, кому Эйнштейн рассказал о теории относительности. Статью «К электродинамике движущихся тел» Эйнштейн заканчивает словами: «В заключение отмечу, что мой друг и коллега М. Бессо явился верным помощником при разработке изложенных здесь проблем и что я обязан ему рядом ценных указаний». Заседания «академии» чаще всего проходили на квартире Эйнштейна. Когда в 1920-х годах журналисты спросили, где была создана теория относительности, он без колебаний назвал адрес своей бернской квартиры.

φωτο

фото

φωτο

фото

φωτο

фото

φωτο

фото

*

В многочисленных биографиях Эйнштейна справедливо указывается, что в 1905 году и до того он не имел непосредственных контактов с профессиональными учеными. Эти контакты, в ряде случаев переросшие в дружбу, появились позже. Ученая степень доктора философии была присвоена Эйнштейну в 1905 году, но только в 1908 он был утвержден приват-доцентом в Берне, а в 1909 принял приглашение занять место экстраординарного профессора теоретической физики в Цюрихском университете и покинул патентное бюро в Берне. В это время он завязывает личные знакомства с Максом Планком, Вильгельмом Винном, Арнольдом Зоммерфельдом, Максом Борном. В Цюрихе он прочел курсы лекций: «Введение в механику», «Кинетическая теория тепла», «Термодинамика», «Электричество и магнетизм». Характерно, что в лекциях главное внимание уделялось содержанию, а не математике. Скептическое отношение к математическому формализму было для Эйнштейна очень характерно, несмотря на то, что он сам внес большой вклад в развитие формальных математических методов. Спустя много лет в Принстоне он сделал ироническое замечание одному из своих ассистентов: «Математика – единственный совершенный способ водить самого себя за нос». Всего лишь три семестра проработал Эйнштейн в Цюрихском университете, после чего по инициативе учеников Маха был приглашен на место ординарного профессора теоретической физики немецкого университета в Праге (Эрнст Мах был первым ректором этого университета). Для утверждения в этой должности на философском факультете в соответствии с требованиями необходима была рекомендация. Факультет обратился к самому известному в Германии физику-теоретику Макс Планку. В рекомендации Планка была следующая фраза: «Если теория Эйнштейна окажется справедливой, как я ожидаю, ее автор станет Коперником XX века». При таких обстоятельствах Эйнштейна ждали в Праге с нетерпением (март 1911). Важнейшей научной работой Эйнштейна в его пражский период была статья «О влиянии тяготения на распространение света», опубликованная в 1911 году в журнале «Annalen der Physik». Она содержала новый вывод: световые лучи, испускаемые звездами и проходящие вблизи солнца, должны изгибаться у его края. Эйнштейн предложил проверить это предсказание с помощью астрономических наблюдений во время полного солнечного затмения. За два года (1911-1912) Эйнштейн опубликовал в различных научных журналах 15 статей. Летом 1912 года Эйнштейн возвратился в Цюрих, где ему предложили место профессора в Политехникуме и где за десять лет до этого ему отказали в должности ассистента. В Цюрихе кипела бурная научная жизнь. В университете кафедру теоретической физики возглавил Макс фон Лауэ. На этой кафедре несколько лет назад работал студенческий товарищ Эйнштейна, математик Марсель Гроссман, в результате совместной работы с которым появилась статья «Набросок обобщенной теории относительности и теории гравитации», явившаяся вторым важным шагом на пути к созданию теории относительности. Окончательная формулировка этой теории была изложена Эйнштейном в 1916 году в работе «Основы общей теории относительности» объемом около 50 страниц, напечатанной в «Annalen der Physik».

О том уважении, которое снискал в ученом мире еще молодой Эйнштейн, свидетельствовал факт его избрания в богатую традициями Берлинскую академию наук. На заседании всех отделений Королевской прусской академии наук 10 июля 1913 года Эйнштейн был избран постоянным ее членом 44 голосами против 2. Свою рекомендацию Планк, Нернст, Рубенс и Варбург заканчивали словами: «...вступле-

ние Эйнштейна в Берлинскую академию наук будет оценено всем ученым миром физиков как особенно ценное приобретение для Академии». Обратим внимание на эти слова в свете дальнейших исторических событий. Избрание было утверждено 12 ноября 1913 года. Эйнштейну были предоставлены благоприятные условия для продолжения научной работы. Как «читающий лекции академик» он обладал всеми правами профессора Берлинского университета (не имея при этом обязательной педагогической нагрузки). Такой род деятельности вполне отвечал склонностям Эйнштейна. Он не испытывал «радости» от систематических лекций по общему курсу физики, которые вынужден был читать будучи профессором в Цюрихе и Праге. За одни только военные 1914–1918 годы Эйнштейн опубликовал более 30 специальных научных исследований, включая отмеченную работу «Основы общей теории относительности», которую сам оценивал как высшее достижение своих теоретических размышлений. Обратим внимание, что в 1917 году была написана статья, в которой уже были изложены основы физики лазеров!

*

В 1919 году две английские астрономические экспедиции в Бразилии и Западной Африке при наблюдении солнечного затмения подтвердили важное следствие общей теории относительности: гравитационное отклонение Солнцем идущих от звезд световых лучей. К Эйнштейну пришла мировая слава. В Лондоне 6 ноября 1919 года состоялось совместное заседание Королевского общества и Королевского астрономического общества. На фоне портрета великого Ньютона первооткрыватель электрона, Нобелевский лауреат и Президент Королевского общества Джозеф Джон Томсон публично провозгласил открытие Эйнштейна «одним из величайших – а может быть, и самым великим – достижением в истории человеческой мысли». А Королевский астроном (это официальное звание директора Гринвичской астрономической обсерватории) сделал официальное сообщение о том, что результаты экспедиций, наблюдавших солнечное затмение, свидетельствуют о победе Эйнштейна над Ньютоном. (Хотя, как измерить степень гениальности? Оба они радикально изменили научные представления о мире. В предисловии к изданию «Оптики» Ньютона в 1931 году Эйнштейн писал: «Природа была для него открытой книгой... Он был и экспериментатором, и теоретиком, и мастеровым, и художником... Он остался в воспоминаниях современников сильным, убежденным и одиноким». Возможно, подобное можно сказать и об Эйнштейне. Оба гения сделали важнейшие открытия в третьем десятилетии своей жизни.)

Портреты Эйнштейна появились на обложках иллюстрированных журналов, его имя мелькало в заголовках ежедневных газет. Аудитории, где Эйнштейн читал лекции в Берлинском университете, во время «релятивистской шумихи» были всегда переполнены, иногда число слушателей превышало тысячу человек. Среди них было много праздных любителей сенсаций, в основном, иностранных туристов. Свою мировую славу Эйнштейн начал воспринимать как тягостное бремя. Его научный триумф вышел далеко за рамки естественных наук. Он совершает многочисленные зарубежные поездки, выступает в переполненных залах Праги, Вены, Нью-Йорка, Манчестера, Лондона, Парижа. Осенью 1922 (в год присуждения ему Нобелевской премии) отправляется в Китай и Японию, где выступает с научными докладами, в основном, по вопросам теории относительности. Позже были поездки в Палестину, Испанию, Южную Америку. Журнал «Scientific American» профинансировал конкурс на самое понятное объяснение относительности с призом в 5 тысяч долларов

(сегодня это составляло бы более 50 тысяч). Эйнштейн пошутил, что среди своих друзей он один не участвовал: «Я боялся, что не справлюсь». Любопытно (или символично), что победитель конкурса Болтон был сотрудником Британского патентного бюро. В декабре 1922 года Эйнштейн был избран членом Академии наук Советской России по рекомендации академиков А.Ф. Иоффе, П.П. Лазарева и В.А. Стеклова. А в декабре 1926 он избирается почетным членом АН СССР вместе с А. Майкельсоном и М. Склодовской-Кюри.

*

Интересно обратить внимание на два факта из многогранной творческой жизни Эйнштейна. В 1915 году, в период интенсивных исследований по общей теории относительности, Эйнштейн обратился к экзотическим лабораторным экспериментам. Он пишет своему другу Микеле Бессо: «Эксперимент скоро закончится... Изумительная работа... Какую же изощренность демонстрирует природа, когда пытаешься проникнуть в ее тайны... я все еще увлекаюсь проведением опытов». Речь идет о гиромангнитных явлениях микрочастиц, а именно, о повороте свободно подвешенного ферромагнитного образца при его намагничивании внешним магнитным полем. Этот уникальный опыт был поставлен совместно с зятем выдающегося голландского теоретика Хендрика Лоренца – де Гаазом. Эйнштейн преодолел трудности, с которыми не смогли справиться многие маститые экспериментаторы. Малоизвестно, что Эйнштейн с различными соавторами имел более двух десятков патентов. Интересно и то, что, уйдя из Бернского патентного бюро, получив мировую известность как физик, Эйнштейн не расстался с патентной деятельностью. Например, совместно с Л. Сциллардом в конце 1920-х годов были запатентованы три типа холодильных машин, насосы для холодильных машин, устройства для сжижения газа и пара (они нашли применение в атомной технике), компрессор. Совместно с Гольдштейном запатентовано устройство для передачи звука, основанное на явлении магнитострикции. Работа над ним дала Эйнштейну повод для стихов: «Я понял, что мыслителю порой немного техники несет отраду и покой...». В 1936 году со своим другом, врачом Г. Буки он запатентовал фотокамеру с автоматической подстройкой под уровень освещенности. Эйнштейн часто выступал в качестве патентного эксперта. В 1916 году (создание общей теории относительности!) он писал Бессо: «У меня сейчас снова весьма забавная экспертиза в одном патентном процессе». Эйнштейн сыграл значительную роль в признании Г. Аншютца изобретателем гироскопического компаса.³ Известно, что он участвовал в патентной тяжбе между фирмами АЭГ и Сименс в 1929 году. Во время второй мировой войны Эйнштейн сотрудничал с Министерством военно-морского флота США в качестве научно-технического эксперта. В его обязанности входила оценка изобретений, поступающих в Министерство. В 1952 году 73-летний ученый выступал в суде в качестве свидетеля-эксперта по патентной тяжбе между Г. Буки и нью-йоркской фирмой «Кореко». Сказанное еще раз подтверждает, что работа Эйнштейна в патентном бюро (в том числе и в 1905 году) не была, как теперь говорят, «халтуркой». Иначе вряд ли он стал бы признанным специалистом и в теоретической физике и в патентных делах – просто эти занятия имеют различный уровень влияния на мировоззрение людей.

³Между открытием эффекта «Эйнштейна – де Гааза» и патентно-экспертной деятельностью есть прямая связь. В 1923 году Эйнштейн писал: «Технический доклад по гирокомпасам, который я подготовил, привел меня к идее выяснения природы парамагнитного атома».

Интересно обратить внимание еще на один факт из жизни Эйнштейна, который имеет отношение к нашей стране. Одна из работ Эйнштейна (скорее, нужно говорить о заметке) была написана специально для журнала, издаваемого в Советском Союзе. Ни в одной из самых подробных библиографий трудов Эйнштейна эта работа не упоминается. В 1929 году (какой год в истории нашей страны!) в Советском Союзе был создан журнал «Изобретатель», готовился к выпуску первый номер. Эйнштейн, судя по всему, по просьбе редакции, написал в первый номер заметку «Массы вместо единиц». Оригинал заметки не сохранился, а корявый перевод не отражает стиля письменной речи Эйнштейна. К тому же трудно отделаться от ощущения, что при переводе попытались текст подогнать под идеологические постулаты того времени. В заметке Эйнштейн пишет о своем отношении к изобретательству и высказывается в поддержку массовости в этом процессе, но тем не менее отмечает: «Образование коллективов изобретателей я бы не советовал ввиду трудности определения настоящего изобретателя. Я думаю, что из этого может получиться только общество укрывающихся от работы бездельников».

*

Широко известна крылатая эйнштейновская фраза по поводу истории физики: «Это драма – драма идей». К сожалению, драматический характер в жизни Эйнштейна приобретали многие события, не связанные с физическими проблемами. Трудные времена выпадали не только в непростой личной жизни.

Уже в 1920 году в Европе возникла организация под названием «Антиэйнштейновская лига». В нее входили отнюдь не невежды: во главе стояли Нобелевские лауреаты – немецкие физики Филипп Ленард (премия за исследование катодных лучей, 1905) и Йоханнес Штарк (премия за эффект расщепления спектральных линий в электрическом поле, 1919). В этой истории особенно поражает эволюция взглядов и мировоззрения профессора Ленарда. Он был на 17 лет старше Эйнштейна. Некоторые экспериментальные наблюдения Ленарда в фотоэффекте были учтены Эйнштейном. Отношение Ленарда к Эйнштейну в эти годы граничило с обожанием. Например, в письме 1909 года Эйнштейну Ленард называл его «глубоким и дальновидным мыслителем» и признавался, что письмо, которое он получил от Эйнштейна в 1905 году, с тех пор всегда лежит на его письменном столе. Но время и ход событий многое изменили. Ленард стал одним из яростных хулителей трудов Эйнштейна. Нападки с его стороны представляли особую опасность, поскольку исходили от авторитетного ученого. С приближением фашизма Ленард издал учебник «Германская физика», в котором «истинно германская физика» противопоставлялась всем «неарийским» теориям.

В Германии стали происходить ужасные вещи, проводилась хорошо организованная и финансируемая антисемитская кампания. В августе 1920 года на организованном митинге в зале Берлинской филармонии подверглась нападкам честь творца теории относительности как ученого и как человека. Эйнштейн присутствовал на этом митинге. Возмущенные этим сборищем профессора Берлинского университета Лауэ (лауреат Нобелевской премии за открытие дифракции рентгеновских лучей, 1914), Нернст (лауреат Нобелевской премии по химии за исследования в области термодинамики, 1920) и Рубенс незамедлительно выступили в печати в защиту Эйнштейна.

В январе 1933 года Гитлер стал канцлером Германии. Уже до этого семья Эйнштейна выехала из Германии, и в феврале ученый принял решение не возвращаться

в Германию. Эйнштейн уже был вне досягаемости для тайной полиции, он находился в Калифорнии. Нацисты обещали 50 тысяч марок за голову ученого. А в Германии началось «очищение» университетов и расправа с наукой. Ленард писал в этот период: «Наиболее важный пример опасного влияния еврейских кругов на изучение природы представляет Эйнштейн со своими теориями и математической болтовней, составленной из старых сведений и произвольных добавок. Сейчас его теория разбита вдребезги – такова судьба всех изделий, далеких от природы. Но ученые с солидными в прошлом трудами не могут избежать упрека, они допустили, чтобы теория относительности могла найти место в Германии. Они не видели или не хотели видеть, какая это ложь, выдавать Эйнштейна – в науке и в равной степени вне ее – за доброго немца».

Прусская академия наук также включилась в общую кампанию травли ученого, его обвиняли в агитационных выступлениях и распространении лживой информации о Германии. Академия заявила, что «не имеет никаких оснований сожалеть о выходе Эйнштейна из ее состава». Дело в том, что уже до этого, 28 марта 1933 года, Эйнштейн заявил в письменной форме о своем выходе из состава академии: «...В течение 19 лет академия давала мне возможность посвятить себя научной работе без каких-либо служебных обязанностей. Я знаю, в сколь высокой мере я должен быть за это ей благодарен. Неохотно покидаю я ее круг еще и потому, что высоко ценю те стимулы, которые я там получал, и те прекрасные человеческие отношения, которыми я наслаждался в течение всего долгого времени, пока был ее членом. Однако обусловленная моим званием зависимость от прусского правительства стала для меня в нынешних условиях неприемлемой». Большинство членов одобрили официальное заявление академии, но не все. Резко осудил официальное заявление академии Лауэ и предложил созвать чрезвычайное пленарное заседание академии. Ответственный секретарь академии Макс Планк в эти дни был в длительной заграничной командировке. Лауэ принял все меры для возвращения Планка, и 11 мая 1933 года состоялось пленарное заседание академии. На нем М. Планк заявил следующее: «Я полагаю, что выражу мнение моих академических коллег, а также мнение подавляющего большинства всех немецких физиков, если скажу: господин Эйнштейн – не только один из многих выдающихся физиков; господин Эйнштейн, будучи членом академии, опубликовал работы, которые привели к такому углублению физических знаний в нашем столетии, что по своему значению их можно сопоставить лишь с достижениями Иоганна Кеплера и Исаака Ньютона. Мне это необходимо высказать, прежде всего, для того, чтобы наши потомки не пришли к заключению, что академические коллеги господина Эйнштейна еще не были в состоянии полностью осознать его значение для науки». В те опасные времена сделать такое заявление Планку было нелегко и небезопасно. Всю свою жизнь он неизменно отдавал должное Эйнштейну, но этот случай, безусловно, заслуживает особого упоминания. Однажды Гитлер, разъярившись, прямо в лицо Планку сказал, что только преклонный возраст спасает его от концлагеря (в это время ему было 75 лет).

*

На этих драматических событиях заканчивается европейский период жизни Эйнштейна. Маленький университетский городок Принстон в США приютил Эйнштейна. Никаких особых мер для обеспечения его личной безопасности не при-

нималось, жители были дружелюбны, называли его «старый док», а студенты распевали про него песенку:

Кто в математике силен,
И в интегралы кто влюблен,
Кто воду пьет, а не рейнвейн,
Для тех пример – наш Аль Эйнштейн.

Приезд Эйнштейна был для Америки огромным событием. Почти сразу же Эйнштейн был приглашен президентом Рузвельтом в Белый дом (ведь у них были общие интересы – огромное увлечение парусным спортом).

Но спокойной жизни в тихом американском городке не получилось. Среди физиков-иностранцев, оказавшихся в эмиграции в США, росла тревога по возможному созданию атомной бомбы в Германии. Они попросили Эйнштейна обратиться к американскому президенту. Сегодня, когда известные ученые обсуждают важные экологические проблемы, вопросы противоракетной обороны и многие другие важные для общества вопросы, раздаются голоса, что не следует смешивать науку с политикой. Эйнштейн же был убежден, что на каждом ученом лежит *моральная ответственность* за судьбу человечества. И ученый обязан донести до людей суть своих работ и объяснить возможные последствия. Поэтому Эйнштейн и физик Лео Сциллард направили письмо Франклину Рузвельту, где сообщали об открытии деления ядер урана и предупреждали об опасности создания ядерного оружия. Это был импульс к развертыванию «Манхэттенского проекта» по созданию атомной бомбы. Опасения Эйнштейна и коллег относительно создания атомной бомбы в Германии, как выяснилось впоследствии, оказались преувеличенными. После Хиросимы Эйнштейн сказал: «Если бы я знал, что до этого дойдет, я стал бы сапожником». Вопреки распространенному мнению, это письмо президенту США и знаменитое уравнение $E = mc^2$ стали единственным вкладом Эйнштейна в создание атомной бомбы.

1 октября 1940 года Эйнштейн стал гражданином США. Однако он не мог привыкнуть к американскому образу жизни, так и остался «неамериканским американцем». В 1950 году он писал: «Вот уже семнадцать лет я нахожусь в Америке, но психологически эта страна осталась мне чужой».

Эйнштейн активно участвовал в борьбе против использования атомной энергии в военных целях, но... джинн уже был выпущен из бутылки. В СССР и США почти одновременно изобрели водородную бомбу. Тогда Эйнштейн выступил по Нью-Йоркскому телевидению: «Америку ведут к фашизму и войне». Так, невольно, он оказался между молотом и наковальней – в Америке маккартизм обвинял его в пособничестве коммунистическому режиму, а в СССР его теорию преподносили как «буржуазную», «идеалистическую». 26 октября 1947 года в московском издании «Новое время» была опубликована заметка «О некоторых заблуждениях профессора Эйнштейна». Авторы – академики Вавилов, Иоффе, Семенов, Фрумкин. Эйнштейна глубоко взволновала эта публикация, он написал ответ «русским коллегам». В нашей стране начинался драматический период борьбы с «физическим идеализмом» и «космополитизмом» по следам и образцу «исторической сессии» ВАСХНИЛ. Наиболее резко эта кампания проявилась на физическом факультете МГУ и в ФИАНе. Например, повестка дня Ученого совета ФИАНа 24 мая 1949 года: «О космополитических ошибках, допущенных сотрудниками ФИАНа». Кто же их допускал – С.Э. Хайкин, С.М. Рытов, Я.Л. Альперт и В.Л. Гинзбург. «Досталось» и вышеназванным авторам публикации в «Новом времени». Особенно «активную» позицию

заняли «правоверные» философы, хорошо известен их коллективный труд «Философские вопросы современной физики» (1952). В свете нашего рассказа особенно показательны следующие утверждения: «Интересы физической науки настоятельно требуют глубокой критики и решительного разоблачения всей системы теоретических взглядов Эйнштейна и его последователей... Идеалистические воззрения Эйнштейна и эйнштейнцев заводят физическую теорию в безысходный тупик». Или: «Общее направление работ Эйнштейна, его трактовка теории затормозили дальнейшие исследования основ теории относительности и развитие эксперимента в этой области...».

*

Имя Альберта Эйнштейна вошло в перечень самых выдающихся людей XX столетия. И сегодня, спустя 100 лет после выхода в свет «звездных» статей, посвященных принципам относительности, квантовой и молекулярной теориям, проблема, волновавшая Эйнштейна, по-прежнему будоражит умы ученых мира. Выражение $E = mc^2$ – это крылатая фраза, знакомая широкой публике так же, как строки Шекспира. 18 апреля 1955 года в 1 час 25 минут перестало биться сердце великого творца. Весь мир скорбел. Но Эйнштейн завещал, чтобы не было ни похорон, ни могилы, ни памятника. Всего десять самых близких человек шли за гробом. Тело было предано кремации, пепел развеян по ветру над рекой Делавэр. Согласно завещанию скрипка великого маэстро перешла внуку – Бернарду Эйнштейну. Река по имени Время продолжает свое течение и где-то несет его прах.

Библиографический список

1. Кузнецов Б.Г. Эйнштейн. Жизнь, смерть, бессмертие. М.: Наука, 1979.
2. Зелиг К. Альберт Эйнштейн. М.: Атомиздат, 1964.
3. Борн М. Физика в жизни моего поколения. М.: Изд-во ин. лит. 1963.
4. Ансельм А.И. Очерки развития физической теории в первой трети XX века. М.: Наука, глав. ред. физ.-мат. лит., 1986.
5. Явелов Б., Френкель В. Патентный эксперт Эйнштейн // Сб. Пути в незнание. М.: Советский писатель, 1983.
6. Дуков В.М. Электродинамика. М.: Высшая школа, 1975.
7. Гернек Ф. Альберт Эйнштейн. М.: Мир, 1984.
8. Собесьяк Ришарл. Шеренга великих физиков. Варшава: Наша Ксенгарня, 1981.
9. Храмов Ю.А. Физики. Библиографический справочник. М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1983.
10. Чолаков В. Нобелевские премии. Ученые и открытия. М.: Мир, 1986.
11. www.wup.2005.ru
12. www.n-t.ru/nl/fz/einstein/htm
13. Гернек Ф. Пионеры атомного века. М.: Прогресс, 1974.
14. Хофман Б. Альберт Эйнштейн. Творец и бунтарь. М.: Мир, 1981.
15. Шмутцер Э. Теория относительности. Современное представление. М.: Мир, 1981.
16. Физика. Энциклопедия для детей. Т. 16, части 1 и 2. М.: Аванта, 2003.

17. Френкель В.Я., Явелов Б.Е. Эйнштейн – изобретатель. М.: Наука, 1982.
18. Сонин А.С. Физический идеализм. М.: Физматлит., 1994.
19. В мире науки. 2004, № 12.
20. Physics World. 2005, January. Einstein 2005.

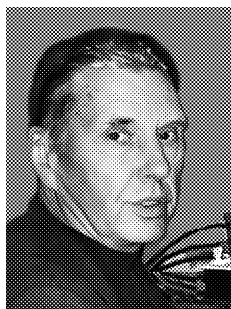
*Саратовский государственный
университет*

Поступила в редакцию 26.07.2005

YEAR OF PHYSICS: ETUDES ABOUT EINSTEIN

B.S. Dmitriev, Yu.I. Levin, Yu.P. Sharaevsky

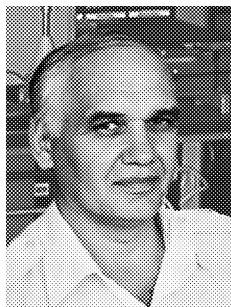
Hundred years ago Albert Einstein's five important works were published. These works changed significantly our representation about the world around and had huge influence on the development of our civilization.



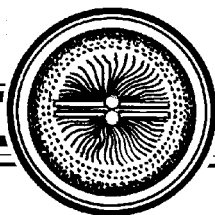
Дмитриев Борис Савельевич – родился в Саратове (1937), окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1959), защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1967). В настоящее время является профессором кафедры нелинейной физики СГУ. Ведет курсы общей физики (механика, молекулярная физика и термодинамика, электродинамика). Область научных интересов - микроволновая электроника и радиофизика. Опубликовал более 120 научных и научно-методических работ и учебных пособий.



Левин Юрий Иванович – родился в Саратове (1942), окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1965), защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1974). В настоящее время является профессором кафедры нелинейной физики СГУ, деканом факультета нелинейных процессов. Автор более 100 научных статей, научно-методических пособий и руководств. E-mail: levin@cas.ssu.runnet.ru



Шараевский Юрий Павлович – родился в Николаевске-на-Амуре Хабаровского края (1942). Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой нелинейной физики СГУ. Работал в области электроники сверхвысоких частот, в настоящее время занимается исследованиями в области физики нелинейных волновых процессов в тонких магнитных пленках. Читает лекции по общему курсу физики, по курсу «Концепции современного естествознания» для студентов гуманитарных специальностей, спецкурс «Колебания и волны в нелинейных активных средах». Опубликовал более 120 научных и научно-методических работ, несколько учебных пособий и монографию в соавторстве со В.С. Стальмаховым и А.В. Вашковским «Магнитоэлектрические волны в электронике сверхвысоких частот» (Изд-во Сарат. ун-та, 1980). E-mail: sharaevskyup@info.sgu.ru



ЗАПИСКИ РУССКОГО ИНТЕЛЛИГЕНТА

В. Д. Зёрнов

© Публ., вступ. статья, коммент., указ. имён В.А. Соломонов, 2005

© Издательство «Индрик», 2005

М.: Изд-во «Индрик», 400 с, илл. ISBN 5-85759-319-0

Владимир Дмитриевич Зёрнов (1878-1946), доктор физико-математических наук, один из семи первых профессоров-учредителей Саратовского университета, прожил яркую, интересную жизнь. Значимость его фигуры как физика и ученика П.Н. Лебедева, а также как педагога, несомненна. Но в ещё большей степени современному читателю будет интересно и поучительно узнать из воспоминаний учёного, как жил типичный представитель интеллигенции в России до и после 1917 года, насколько широк был круг интересов и знакомств человека науки, как формировалась его личность и протекала его деятельность.

Для широкого круга читателей, интересующихся историей российской интеллигенции, вопросами культурного, научного и общественного процессов конца XIX - начала XX вв. как внутри России, так и за её пределами.

Вместо предисловия

Милый мой внучек Алёшенька! Тебе будет интересно, когда ты вырастешь большой, узнать, как рос и жил твой дедушка, с которым ты провёл неразлучно первые годы своей жизни. Мне хочется, чтобы ты знал, кем были и твои прадедушка с прабабушкой, другие твои родственники.

Когда я начал вспоминать своё детство и отрочество, то захотелось записать многие подробности, которые, может быть, и лишние и интересны только мне самому. Возможно, я и в самом деле написал много лишнего, но мне трудно было выбирать, что стоит писать, а что не стоит. В первой тетради я записал только свои детские и отроческие годы. В следующей - год за годом продолжил вспоминать свою юность. Мне хочется рассказать тебе о том, как я провёл студенческие годы и о начале самостоятельной жизни: как встретился с твоей бабушкой, как стал профессором Саратовского университета. Словом, мне хочется вспомнить всю свою жизнь. Я пережил тяжёлые годы войн и революций, встречал много интересных людей и у нас на родине, и за границей. Думаю, всё это тебе будет интересно. Ведь ты любишь своего дедушку.

Крепко тебя целую, твой дедушка

Вл. Зёрнов

Москва 2 ноября 1944 года

Оглавление

Соломонов В.А. Владимир Дмитриевич Зёрнов и его воспоминания

Вместо предисловия

Часть первая (1878-1897). Немного о семье. О том, как отмечались мои именины. Наше дубненское хозяйство. Рождественские праздники и первые шаги в музыкальный мир. Смерть брата Алёши. Поездка в Крым. Гимназия. Болезнь и смерть брата Мити. Детский оркестр Эрарского. Приобщение к церковным службам. Моё первое увлечение. Домашние спектакли. Первая охота. Смерть тёти Катерины Егоровны. Покупка скрипок. Кончина Александра III и торжества по случаю коронации Николая II. Тайное замужество сестры Наташи. На пороге студенческой жизни.

Часть вторая (1897-1900). Студент Московского университета. Инцидент с инспектором Брызгаловым. Мои учителя и наставники - профессора Московского университета. Первые экзамены. Студенческий оркестр. Общество любителей оркестровой, вокальной и камерной музыки. Путешествие на Кавказ. Московские будни. Столетний юбилей Пушкина. Всемирная выставка в Париже. Всемирный съезд физиков.

Часть третья (1900-1904). Занятия у И. В. Гржимали. Лекции по гипнотизму. «Лебедевский подвал». Знакомство с Ф. И. Шаляпиным. Оперная антреприза Бородая. Встречи с А. С. Аренским и Е. Л. Збруевой. Поездка в Вятку. Государственные экзамены и начало самостоятельной жизни. Археологическая экскурсия в Грецию.

Часть четвертая (1904-1909). Начало русско-японской войны. В гимназии Н. П. Щепотьевой. Моё первое знакомство с семьёй Власовых. Кончина и похороны ректора Московского университета С. Н. Трубецкого. Студенческие баррикады. Манифест 17 октября 1905 года. Канун нашей свадьбы. Венчание и первые годы супружеской жизни. Харитоненки и Хлудовы. Рождение нашего первенца. Магистерские экзамены. Первый Менделеевский съезд. Защита диссертации. Ходатайство о предоставлении кафедры в Саратовском университете. «Вдовый дом» при Смольном монастыре.

Часть пятая (1909-1910). Заграничная командировка. Постановка физической науки и образования в заграничных университетах. В гостях у К. А. Кламрота. Поездка в Англию. Приезд в Саратов. Борис Ионович Бируков. Папина крестница. Первые заботы и хлопоты. Начало профессорской деятельности. Накануне торжественных событий. Торжественное открытие Саратовского университета. Начало семейной жизни в Саратове. Радиологический съезд в Брюсселе.

Часть шестая (1910-1911). Покупка научной библиотеки О. Д. Хвольсона. Работа в строительной комиссии Саратовского университета. Семейные события лета 1911 года. Приём в университете высоких гостей. Университетские дела. Музыкальная жизнь в Саратове. В роли главного распорядителя студенческих вечеров.

Часть седьмая (1911-1914). Мои публичные выступления в Саратове. Кончина П. Н. Лебедева. Озеро Эльтон. Артистическая судьба Фатьмы Мухтаровой. Съезд естествоиспытателей и врачей в Тифлисе. Мамина кончина. Первые мои сотрудники. Переезд в новое здание Физического института. Опыты с жидким воздухом. Студенческая забастовка в Саратовском университете. Эпидиаскопы. Воздушный шар. Аэростат Монгольфьера. Приглашение в Московский университет. Лето 1914 года. Начало войны.

Часть восьмая (1914-1919). Детский праздник встречи Нового года. Киевские высшие учебные заведения в Саратове. Весенние прогулки. Последние годы жизни и смерть отца. Погром немецких магазинов в Москве. Дни Февральской революции в Саратове. Университетские дела. Дубна 1917 и 1918 годов. Настя (Кусенька). Новые факультеты. Деканство. На посту ректора Саратовского университета. События первого года Советской власти в Саратове. Лето 1919 года. На Садововских дачах. Обыск.

Часть девятая (1919-1921). Оборона Саратова и заготовка дров для университета. Штафовские дачи. Митюнина операция. Командировка в Москву. Об Александро-Невском соборе и событиях, с ним связанных. Луначарский в Саратове. Мой арест и содержание в саратовской тюрьме № 3. Концентрационный лагерь. Пересылка в Москву. В Бутырской тюрьме. На свободе. Грустное расставание с Саратовом.

Часть десятая (1921-1941). Начало новой московской жизни. Дело об «оскорблении» Чувикова. «Музыкальные среды» в Благовещенском переулке. Оркестр научных работников. 1926 год. Поездка в Крым. 1927 год. Гагры. Съезд физиков в Москве. Поездка в Коктебель. Чаир. Съезд физиков в Одессе. 1936 год. Геленджик. Обучение детей.

КОММЕНТАРИИ

УКАЗАТЕЛЬ ИМЁН

СПИСОК ПРИНЯТЫХ СОКРАЩЕНИЙ

К ВЫХОДУ КНИГИ В.Д. ЗЁРНОВА «ЗАПИСКИ РУССКОГО ИНТЕЛЛИГЕНТА»

Выход в свет новой книги – всегда событие. В данном случае значимость события подчеркивает ее название. Я имею в виду слово «интеллигент».

Роль интеллигенции в обществе оспаривается. Поведение тех или иных представителей вызывает сомнение в нравственных качествах ее в целом. Говорят об исчезновении интеллигентности, прибавляя безжалостно: умерла, так умерла. Неужели умерла? Не может быть! Ведь по Владимиру Ивановичу Далю «интеллигенция – разумная, образованная, умственно развитая часть жителей». Умереть она не может. Но...

Мир заражен вирусом глупости. Увы, это – болезнь мира. По Юрию Любимову, происходит даже не оглушение, а онуление человечества. В нашем обществе нельзя позволить быть заподозренным в принадлежности к этой умственно развитой категории жителей, к интеллигенции. Только ленивый не издевался в свое время над Конгрессом интеллигенции.

Интеллигентом быть трудно. Ведь, по Глебу Успенскому, «интеллигент – человек, который несет свет». «А вот цинизма побольше. – Это легко» (Виктор Пелевин. «Поколение П.»). Цинизм вместо веры в светлые идеалы, свойственные интеллигенции, доминирует.

Бурный исторический процесс перемешал многое в нашей жизни. Конечно, разные его участники вели, ведут и будут вести себя по-разному, включая тех, кого

принято числить по разряду интеллигенции. Но разве В.Д. Зёрнов был вне не менее бурного исторического процесса (см., например, части книги, соответствующие 1909–1921 годам)? Владимир Дмитриевич был не только ученым, он был крупным организатором и хорошим педагогом. Его осеняет имя учителя, П.Н. Лебедева, который, по словам В.Д. Зёрнова, дал направление всей его жизни и деятельности⁴. В.Д. Зёрнов был интеллигентом, любившим *истину*, интересующимся *истиной*⁵. Об этом каждая строчка дневников. Важен язык, важно отношение к близким, к окружающим.

Что бы ни говорили, русская интеллигенция – уникальное генетическое явление. Такого больше нет нигде в мире. Так распорядилась история, создав общность из индивидуальностей для того, чтобы у страны с отягощенной наследственностью был стержень. Гены не исчезают. И интеллигенция никуда не исчезла и не пропала. Книга – напоминание об этом.

Вопреки бесстыдным дельцам, благодаря интеллигентам, родителям и учителям, появляются умственно развитые дети. Эта книга для них.

Наум Коржавин написал стихотворение «Русской интеллигенции», в котором есть такие строчки:

Трижды ругана, трижды воспета.
Вечно в страсти, всегда на краю...
За твою необузданность эту
Я, быть может, тебя и люблю.

Я могу вдруг упасть, опуститься
И возвыситься, дух затая,
Потому что во мне будет биться
Беспокойная жилка твоя.

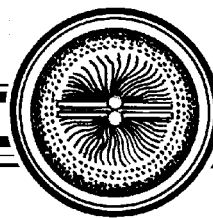
Впервые «Записки» были опубликованы в журнале «Волга» в 1993–1994 гг. благодаря кандидату исторических наук, доценту кафедры истории России Саратовского университета Владимиру Анатольевичу Соломонову. Его усилиями издана и книга. Как он пишет во вводной статье, книга «...содержит разнообразный научно-справочный материал, состоящий из содержательно и информативно насыщенных комментариев». И далее: «Настоящее издание завершает аннотированный именной указатель, в котором даются сведения, отражающие связь упоминаемых лиц как непосредственно с жизнью и деятельностью мемуариста, так и с тем историческим временем и событиями, свидетелем или участником которых он являлся».

Книга посвящена 250-летию Московского и 100-летию Саратовского университетов. Она – замечательный подарок к этим юбилеям.

Член-корр. РАН Д.И. Трубецков

⁴См. статью В.А. Соломонова «Имя П.Н., его записка открывали передо мною любые лаборатории» (к истории взаимоотношений П.Н. Лебедева и В.Д. Зёрнова) // Вопросы истории естествознания и техники. 2004, №4. С. 131–162.

⁵Анна Вежицкая в монографии «Семантические универсалии и описание языков» указывает, что слово «истина» значимо в русской культуре не менее, чем слово «правда». Она считает, что «слово «истина» означает не просто «правду» (truth), но скорее нечто вроде «окончательной правды», «скрытой правды», и что для него характерны сочетания со словом «искать». У В.И. Даля находим: «Истина хороша, да и правда не худа».



Изв. вузов «ПНД», т. 13, № 4, 2005

УДК 53:519.2+929 Климонтович

*Серия: «След вдохновений и трудов упорных...»
Приложение к журналу «Изв. вузов. ПНД»*

Ю.Л. КЛИМОНТОВИЧ

**Воспоминания коллег
и его личные заметки о людях науки**

- © В.С. Анищенко, 2005
- © В. Эбелинг, 2005
- © Ю.М. Романовский, 2005
- © Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2005
- © Д.В. Соколов, оформление, 2005

Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2005. 118 с, илл.
ISBN 5-94409-044-8

Сборник посвящен памяти выдающегося физика-теоретика второй половины XX века Ю.Л. Климонтовича (28.09.1924 - 27.11.2002), внесшего значительный вклад в создание статистической физики и физики открытых систем. Сборник содержит воспоминания о нем и собственные заметки Юрия Львовича о коллегах и друзьях, известных в мире науки ученых. Заметки подготовлены к публикации его учениками и коллегами – профессорами В.С. Анищенко (СГУ), В. Эбелингом (Гумбольдтский университет Берлина) и Ю.М. Романовским (МГУ).

Предисловие редакторов

Юрий Львович Климонтович один из выдающихся физиков-теоретиков второй половины двадцатого века, который внес неоценимый вклад в создание современной статистической физики и физики открытых систем. Детальный анализ всей совокупности научных результатов Ю.Л. Климонтовича еще ждет своих исследователей и,

безусловно, будет проведен в будущем. Настоящая книга представляет собой сборник материалов и воспоминаний о Юрии Львовиче, а также содержит фрагменты его собственных оригинальных заметок, которые он оставил нам, не успев опубликовать их при жизни.

Круг лиц, с которыми Юрий Львович поддерживал профессиональные и дружеские отношения, был необычайно широк. В него входили коллеги Юрия Львовича, его учителя и ученики, а также ряд замечательных людей самых различных профессий. И это естественно, так как Юрий Львович был не только выдающимся ученым, но и очень интересным, самобытным, открытым к общению человеком. Авторы настоящей книги благодарны судьбе, которая каждого из них в разное время свела с Юрием Львовичем и подарила неоценимое счастье многолетнего общения с ним в качестве коллег и близких друзей. Ю.М. Романовский работал с Ю.Л. Климонтовичем в одном коллективе физического факультета и дружил с ним с 1955 года и до его кончины. В. Эбелинг проходил научную стажировку в МГУ в течение одного года в 1960-м и с тех пор был учеником, коллегой и близким другом Юрия Львовича. В.С. Анищенко впервые познакомился с Юрием Львовичем весной 1980 года на конференции в Нижнем Новгороде и был приглашен им на стажировку в МГУ в том же году. Взаимные научные интересы очень быстро переросли в теплые дружеские отношения учителя и ученика, которые продолжались до последних дней жизни Ю.Л. Климонтовича.

Настоящая книга является первой, посвященной воспоминаниям о жизни и деятельности нашего уважаемого друга, учителя и коллеги. Мы не сомневаемся в том, что в будущем появятся новые книги с более подробным и детальным анализом жизни и творчества Юрия Львовича.

Книга состоит из двух частей. В первую часть включены воспоминания друзей и коллег, которые были опубликованы в разных изданиях и посвящены светлой памяти Юрия Львовича. В частности, использован ряд материалов специального выпуска журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика» (№ 4, 2004), посвященного 80-летию Ю.Л. Климонтовича. Мы глубоко благодарны заведующей редакцией журнала Н.Н. Левиной за предоставление этих материалов.

Вторая часть книги включает фрагменты воспоминаний самого Юрия Львовича. Он готовил к печати книгу воспоминаний, делился с нами своими мыслями и идеями. При своей последней встрече с Вернером Эбелингом в июне 2002 года Юрий Львович передал ему рукописи некоторых из своих воспоминаний с просьбой почитать и распространить ее среди друзей и коллег для обсуждения и дискуссии. Он собирался, прежде всего, дополнить этот материал и издать книгу воспоминаний в издательстве МГУ или в каком-либо другом издательстве. При подготовке книги Юрий Львович хотел учесть замечания и предложения друзей, которые способствовали бы ее улучшению. К сожалению, он не успел этого сделать. Мы посчитали своим долгом выполнить последнюю просьбу Юрия Львовича и опубликовать те фрагменты воспоминаний, которые он нам передал лично. С этой целью мы взяли на себя ответственность редактирования тех разделов текста, которые по сути дела не были подготовлены к печати. При работе над рукописью мы позволили себе опустить те разделы и части, которые были явно незаконченными, а также расположить отдельные воспоминания в определенном логическом порядке, произведя некоторые перестановки. Никаких изменений в текст мы не вносили, ограничившись лишь небольшой стилистической правкой.

Мы выражаем надежду, что эта книга, адресованная в первую очередь тем, кто знал и любил Юрия Львовича, позволит еще раз воспроизвести в памяти те замечательные события в жизни каждого, которые были связаны с образом этого неповторимого человека.

Саратов – Берлин – Москва, 2005

*В.С. Анищенко
В. Эбелинг
Ю.М. Романовский*

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редакторов

Часть I

Анищенко В.С. Ю.Л. Климонтович.

Бониц М., Эбелинг В., Романовский Ю.М. Вклад Ю.Л. Климонтовича в кинетическую теорию неидеальной плазмы.

Тригер С.А. Встречи с Юрием Львовичем Климонтовичем.

Романовский Ю.М. Человек необычайной силы воли и необычной судьбы.

Гурия Г.Т. Ученый с очень широким взглядом на мир.

Часть II

Климонтович Ю.Л. Из предисловия.

Мои научные руководители

Василий Степанович Фурсов. Николай Николаевич Боголюбов. К восьмидесятилетию Николая Николаевича Боголюбова.

Встречи на научных перекрестках

Сергей Павлович Стрелков. Руслан Стратонович. Анатолий Александрович Власов. Михаил Александрович Леонтович. Дмитрий Николаевич Зубарев. Борис Борисович Кадомцев. Лев Давидович Ландау. Ландау, Леонтович и работы по самоорганизации.

Друзья по самоорганизации

Илья Пригожин. Герман Хакен. Вернер Эбелинг.

Редкие, но яркие встречи

Юрий Сигов. Александр Александрович Филюков.

Фотографии

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина*
Обложка художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, Н.Н. Васевой
в пакете $L^A T_E X$

Подписка на 2005 год осуществляется
Саратовским государственным университетом
по заключению договора между Подписчиком
(юридическим и физическим лицом) и Издателем

Стоимость подписки на 2005 год 390 руб. (6 номеров)
Заявки на заключение договора принимаются
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64;
E-mail: and@nonlin.sgu.ru

Распространение журнала осуществляется
редакцией журнала по адресной системе

Подписка на I полугодие 2006 года
по каталогу Агентства Роспечать
«Газеты. Журналы», индекс 73498

Сдано в набор 01.10.05. Подписано к печати 14.11.05. Формат 70x108/16
Бумага «Снегурочка». Печать трафаретная.
Усл. печ. л. 11,2(8,0). Уч.-изд. л. 10,0. Тираж 200. Заказ 367

Отпечатано на ризографе GR 3750 редакции журнала

© Редакция журнала
«Известия вузов. ПНД», 2005
© Оформление художника
Д.В. Соколова, 2005