



**ОСОБЕННОСТИ синхронизации в системе
НЕИДЕНТИЧНЫХ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ
ВАН ДЕР ПОЛЯ И ВАН ДЕР ПОЛЯ – ДУФФИНГА.
ШИРОКОПОЛОСНАЯ синхронизация**

А.П. Кузнецов, В.И. Паксютов, Ю.П. Роман

Обсуждаются особенности динамики диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля, неидентичных по параметру, ответственному за бифуркацию Андронова – Хопфа. Указана возможность режима синхронизации в такой системе, которому отвечает бесконечно длинная полоса, разделяющая области гибели колебаний и квазипериодических режимов. Обсуждаются особенности бифуркационной картины для различных значений управляющих параметров и для дополнительной нелинейности, введенной по типу осциллятора Дуффинга. Обсуждение сопоставляется с анализом укороченных уравнений.

Введение

Система связанных осцилляторов ван дер Поля является базовой моделью теории колебаний и привлекает внимание исследователей как с точки зрения развития теории синхронизации, так и с точки зрения возможных приложений (см., например, монографию [1], работы [2–12] и цитированную там литературу). Большинство работ на эту тему, однако, ограничиваются случаем идентичных параметров осцилляторов, управляющих бифуркацией Андронова – Хопфа. Определенное исключение составляет недавняя работа [12]. Однако в ней авторы ограничились предположением о малости параметра, отвечающего за неидентичность осцилляторов, и квазигармоническим приближением. Также не была учтена неизохронность осцилляторов, но именно неизохронность приводит к нормальной форме бифуркации Андронова – Хопфа, и ее учет представляется важным с точки зрения обобщения результатов [1]. В тоже время компьютерные эксперименты с исходной дифференциальной системой в случае, когда управляющие параметры могут заметно отличаться, выявляют интересные особенности динамики [11]. В настоящей работе исследуется устройство плоскости параметров (частотная расстройка – величина связи) для неидентичных по управляющему параметру связанных осцилляторов ван дер Поля и ван дер Поля – Дуффинга.

Исходная дифференциальная система, описывающая взаимодействие осцилляторов указанного типа, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - (\lambda_1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x + \beta x^3 + \mu \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \right) &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} - (\lambda_2 - y^2) \frac{dy}{dt} + (1 + \delta)y + \beta y^3 + \mu \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь λ_1 и λ_2 – параметры, характеризующие степень превышения над порогом бифуркации Андронова – Хопфа в автономных осцилляторах; δ – частотная расстройка автономного второго осциллятора относительно первого; μ – коэффициент связи. Параметр β отвечает введению в уравнение ван дер Поля нелинейности по типу осциллятора Дуффинга. В рамках квазигармонического приближения он отвечает за нелинейность в фазовом уравнении и, соответственно, за неизохронность [1, 13]. В полной системе уравнений (1) неизохронность возможна и за счет не малых значений параметров λ_1 и λ_2 . Однако для удобства будем и в этом случае называть параметр β параметром фазовой нелинейности или неизохронности.

Будем исследовать осцилляторы с диссипативной связью. Одним из интересных эффектов в такой системе является так называемый эффект «гибели колебаний», который состоит в том, что достаточно сильная связь приводит к ситуации, когда устойчивым становится тривиальное состояние равновесия и колебания затухают [1, 2]. Обсудим проявления этого эффекта в неидентичных по управляющим параметрам осцилляторах.

Скажем несколько слов об использованной нормировке. В литературе более принятым является вариант, когда автономная система ван дер Поля выглядит следующим образом:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \lambda(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (2)$$

В этом случае, однако, в квазигармоническом приближении осциллятор движется по орбите фиксированного, единичного радиуса. А в рамках нормировки, использованной в (1), – по орбите радиуса $\sqrt{\lambda}$. Таким образом, в системе (2), фактически, исчезает бифуркация Андронова – Хопфа рождения предельного цикла, реализующаяся с ростом λ . Кроме того, исчезает удобная интерпретация для неидентичных систем, когда радиусы орбит естественным образом связаны с управляющими параметрами по закону корня квадратного. Поэтому будем использовать нормировку, примененную в системе (1).

1. Устройство плоскости параметров частотная расстройка – величина связи для неидентичных подсистем. Возможность широкополосной синхронизации

Представим, прежде всего, результаты компьютерного исследования системы (1). Эффективным инструментом такого исследования может служить метод карт динамических режимов, подробно описанный в работах [13, 14]. В его рамках на плоскости параметров (частотная расстройка δ – величина связи μ) черным и оттенками серого цвета будем обозначать период колебаний системы свя-

занных осцилляторов. Белый цвет соответствует хаотическим либо квазипериодическим движениям. Периоды циклов вычислялись с использованием метода сечений Пуанкаре. Для этого определялось количество точек пересечения аттрактора с выбранной в качестве сечения Пуанкаре секущей поверхностью, которое принималось за период колебательного процесса. При этом учитывались траектории, пересекающие эту секущую только в одном направлении. Исследуемая система характеризуется четырехмерным фазовым пространством (x, \dot{x}, y, \dot{y}) . Поэтому в качестве сечений Пуанкаре будет выступать трехмерная гиперповерхность, заданная некоторым дополнительным условием, например, равенством нулю скорости второго осциллятора $\dot{y} = 0$. В этом случае определялось число точек n пересечений траектории и секущей. Поскольку мы имеем все же систему двух связанных осцилляторов, для повышения информативности метода оказалось полезным построить еще одно сечение, отвечающее гиперповерхности $\dot{x} = 0$, и определить число m ее пересечений с траекторией. На картах цвет выбран в соответствии с периодом n .

(В альтернативном случае языки синхронизации в области $\delta > 0$ оказались бы окрашенными в один черный цвет.) При этом внутри наиболее характерных языков указано своего рода число вращения m/n , показывающее периоды m и n , вычисленные с помощью обоих способов выбора сечений.

На рис. 1 показана полученная таким образом карта динамических режимов на плоскости частотная расстройка – величина связи для идентичных осцилляторов ван дер Поля (1). На ней видны следующие характерные области:

- основной язык синхронизации, которому отвечает отношение частот осцилляторов 1/1;
- область квазипериодических режимов со встроенной системой высших языков синхронизации, из которых наиболее характерен язык с числом вращения 1/3;
- область эффекта «гибели колебаний», которой отвечает устойчивость состояния равновесия в начале координат.

Различие значений управляющих параметров λ_1 и λ_2 связанных осцилляторов ван дер Поля приводит к изменению устройства плоскости этих параметров. На рис. 2 представлена карта динамических режимов для неидентичных подсистем, когда $\lambda_1 = 1.25$, $\lambda_2 = 1$. При этом неидентичность существенна, но не очень велика. На рис. 2 показаны также фазовые портреты, построенные попарно на плоскостях (x, \dot{x}) и (y, \dot{y}) для нескольких выделенных точек плоскости параметров.

Сравнивая карты режимов на рис. 1 и 2, можно видеть, что они в одном моменте существенно отличаются. Граница между областями гибели колебаний и квазипериодических режимов на рис. 2 является не линией, а представляет собой полосу конечной ширины по коэффициенту связи $\lambda_1 > \mu > \lambda_2$, безгранично простирающуюся в область возрастающей частотной расстройки. Наличие синхронизации системы при сколь угодно больших значениях расстройки собственных частот осцилляторов можно назвать «широкополосной синхронизацией».

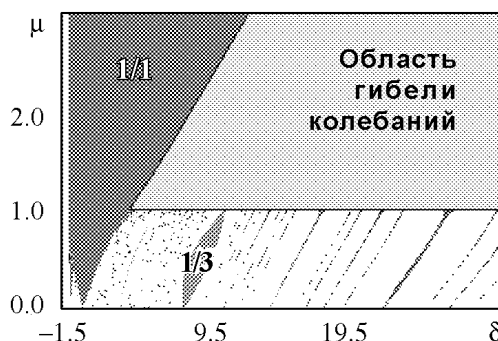


Рис. 1. Карта динамических режимов системы (1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\beta = 0$

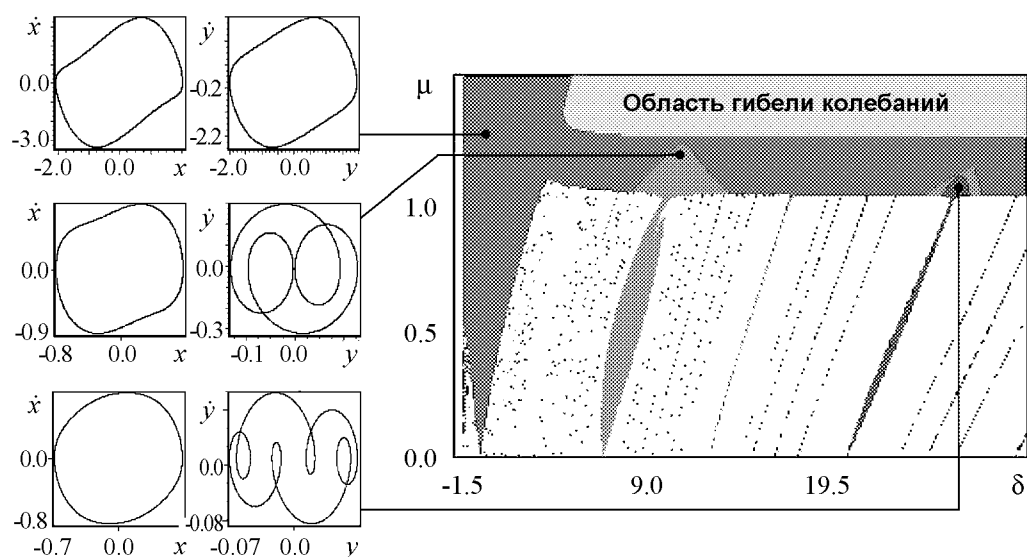


Рис. 2. Карта динамических режимов системы (1) при $\lambda_1 = 1.25$, $\lambda_2 = 1$, $\beta = 0$ и фазовые портреты в характерных областях плоскости параметров

Если двигаться внутри этой полосы, увеличивая собственную частоту второго осциллятора, то можно наблюдать синхронные режимы, отличающиеся на фазовых портретах числом «оборотов» фазовой траектории второго осциллятора, что демонстрируют приведенные на рис. 2 фазовые портреты. Соответствующие области на карте выглядят как «размытые» вершины языков синхронизации (что лучше заметно, в первую очередь, для характерного языка синхронизации $1/3$).

На рис. 3 приведены карты динамических режимов системы связанных осцилляторов ван дер Поля – Дуффинга, когда управляющий параметр первой системы возрастает ($\lambda_1 = 2$, $\lambda_1 = 2.5$), а второй – остается фиксированным ($\lambda_2 = 1$, см. рис. 2). В отличие от рис. 2, осцилляторы уже существенно неидентичны. Как видно из рис. 3, при увеличении разницы в управляющих параметрах помимо расширения самой «полосы» синхронизации по оси величины связи μ , происходит существенное расширение областей кратной синхронизации внутри нее. При этом области кратной синхронизации постепенно заполняют собой большую часть полосы широкополосной синхронизации. Таким образом, замечательная особенность задачи – сохранение фиксированного числа вращения в очень широком диапазоне частот, превышающем в разы (и более) ширину соответствующих языков для идентичных подсистем.

В случае заметно отличающихся по параметрам λ_1 и λ_2 осцилляторов можно дать простое объяснение появления широкополосной синхронизации. Оно существенно опирается на неидентичность осцилляторов. Действительно, если μ превышает и λ_1 , и λ_2 , то оба осциллятора находятся за порогом эффекта «гибели колебаний». В диапазоне же $\lambda_1 > \mu > \lambda_2$ существенно диссипативным оказывается только второй осциллятор. При этом можно считать, что первый осциллятор является «ведущим» и, фактически, возбуждает второй. В этом плане весьма характерны разные масштабы по осям координат для первого и второго осцилляторов на фазовых портретах рис. 2.

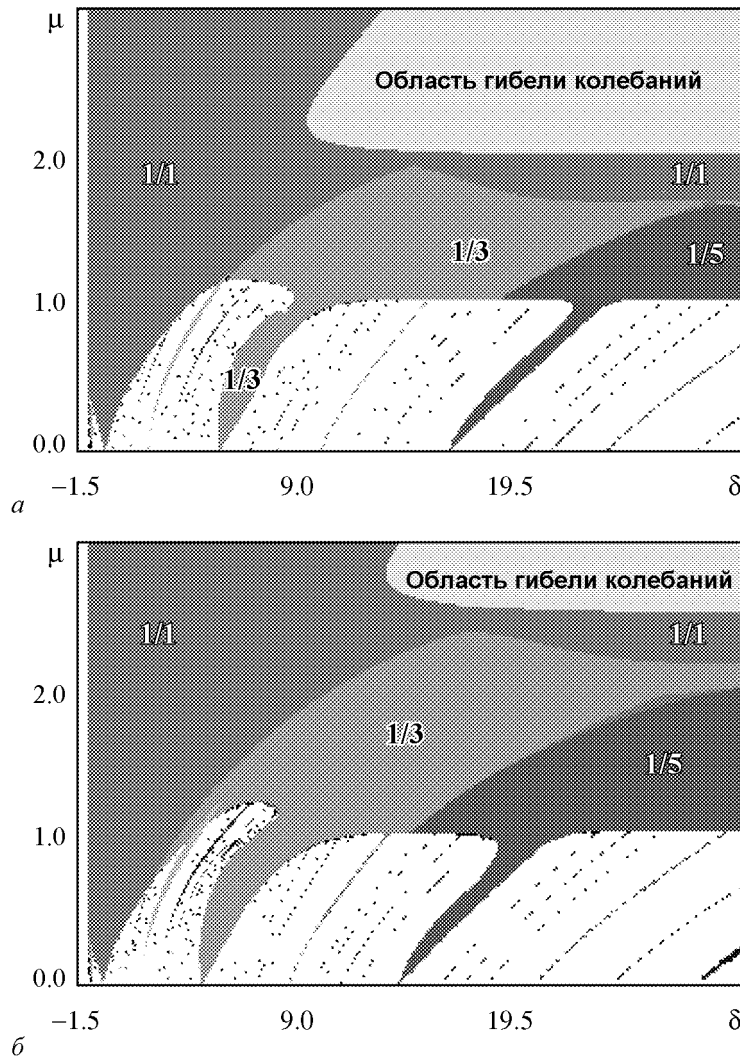


Рис. 3. Карты динамических режимов системы (1), построенные для значений параметров $\lambda_2 = 1$, $\beta = 0$ при $\lambda_1 = 2$ (а) и $\lambda_1 = 2.5$ (б)

Для обсуждения вопроса взаимного влияния связанных осцилляторов ван дер Поля в интересующей нас области параметров рассмотрим систему (1) с «выключенным» воздействием второго осциллятора на первый

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - (\lambda_1 - \mu - x^2) \frac{dx}{dt} + x &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} - (\lambda_2 - \mu - y^2) \frac{dy}{dt} + (1 + \delta)y &= \mu \frac{dx}{dt}. \end{aligned} \quad (3)$$

На рис. 4 приводится карта динамических режимов системы (3) для $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. Сравнивая полученную карту с картой для случая взаимного воздействия осцилляторов (см. рис. 3, а), можно видеть, что образование полосы широкополосной синхронизации происходит за счет воздействия первого осциллятора, находящегося за порогом бифуркации Андронова – Хопфа, на второй, колебания которого без этого воздействия затухали бы. Размеры и устройство области широкополосной синхро-

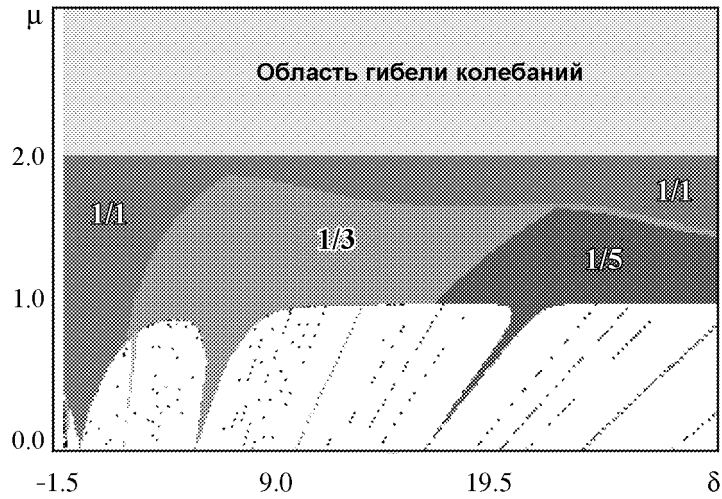


Рис. 4. Карта динамических режимов системы (3), отвечающая «выключенному» воздействию второго осциллятора на первый при $\lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = 2$

низации на рис. 3, а и рис. 4 аналогичны. Отличие состоит том, что без взаимного воздействия осцилляторов гибель колебаний наблюдается в любой точке пространства параметров, в которой $\lambda_1 < \mu$ и $\lambda_2 < \mu$. Это имеет простое объяснение: в отсутствие влияния второго осциллятора на первый, первый осциллятор оказывается до порога бифуркации Андронова – Хопфа, имеющей место при $\lambda_1 - \mu = 0$, и его колебания угасают. Второй осциллятор также находится до порога бифуркации Андронова – Хопфа, поскольку $\mu > \lambda_1 > \lambda_2$, и в отсутствие возбуждения со стороны первого осциллятора его колебания также угасают.

Проведенное обсуждение, однако, справедливо лишь при заметно отличающихся λ_1 и λ_2 . Если же эти параметры близки, то оно в чистом виде не применимо.

2. Анализ широкополосной синхронизации с помощью укороченных уравнений

Интересно выяснить, какие элементы описанной картины можно выявить методом медленно меняющихся амплитуд. Для этого, как обычно [1, 13], положим

$$x = \frac{1}{2}(ae^{it} + a^*e^{-it}), \quad y = \frac{1}{2}(be^{it} + b^*e^{-it}) \quad (4)$$

при стандартном дополнительном условии

$$\frac{1}{2}(\dot{a}e^{it} + \dot{a}^*e^{-it}) = 0, \quad \frac{1}{2}(\dot{b}e^{it} + \dot{b}^*e^{-it}) = 0. \quad (5)$$

После проведенного усреднения получаем уравнения для комплексных амплитуд

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\lambda_1 a}{2} - \frac{|a|^2 a}{8} + \frac{3i\beta|a|^2 a}{8} - \frac{\mu}{2}(a - b), \\ \frac{db}{dt} &= \frac{\lambda_2 b}{2} - \frac{|b|^2 b}{8} + \frac{3i\beta|b|^2 b}{8} - \frac{\mu}{2}(b - a) + \frac{idb}{2}. \end{aligned} \quad (6)$$

С заменой переменных: $\tau = \frac{t}{2}$, $z = \frac{a}{2}$, $\omega = \frac{b}{2}$, уравнения (6) приобретают вид

$$\begin{aligned}\frac{dz}{d\tau} &= \lambda_1 z - |z|^2 z + 3i\beta|z|^2 z + \mu(\omega - z), \\ \frac{d\omega}{d\tau} &= \lambda_2 \omega - |\omega|^2 \omega + 3i\beta|\omega|^2 \omega + \mu(z - \omega) + i\delta\omega.\end{aligned}\quad (7)$$

Полагая $z(t) = R(t) \exp(i\varphi_1)$ и $\omega(t) = r(t) \exp(i\varphi_2)$, приходим к уравнениям для амплитуд осцилляторов R , r и их фаз φ_1 и φ_2

$$\begin{aligned}\frac{dR}{d\tau} &= R(\lambda_1 - \mu) - R^3 + \mu r \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \frac{dr}{d\tau} &= r(\lambda_2 - \mu) - r^3 + \mu R \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \\ \frac{d\varphi_1}{d\tau} &= 3\beta R^2 + \frac{r}{R} \mu \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \frac{d\varphi_2}{d\tau} &= 3\beta r^2 + \frac{R}{r} \mu \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - \delta.\end{aligned}\quad (8)$$

В уравнения для амплитуд входит лишь разность фаз осцилляторов. Поэтому можно вычесть из первого уравнения для фазы второе уравнение и получить следующие укороченные уравнения, содержащие относительную фазу осцилляторов $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$:

$$\begin{aligned}\frac{dR}{d\tau} &= R(\lambda_1 - \mu) - R^3 + \mu r \cos \psi, \\ \frac{dr}{d\tau} &= r(\lambda_2 - \mu) - r^3 + \mu R \cos \psi, \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= \delta + 3\beta(R^2 - r^2) - \mu\left(\frac{r}{R} + \frac{R}{r}\right) \sin \psi.\end{aligned}\quad (9)$$

Мы получили систему уравнений, аналогичную [1, 2], но с учетом возможной неидентичности системы по управляющим параметрам. Заметим, что при выводе укороченных уравнений была использована близость частоты колебаний к собственной, но нигде явным образом не использована малость разницы параметров λ_1 и λ_2 . Таким образом, при обсуждении можем считать их существенно отличающимися.

Проведем теперь с помощью укороченных уравнений (9) аналитическую оценку нижней границы области широкополосной синхронизации. Обратимся к стационарной системе (9)

$$\begin{aligned}0 &= R(\lambda_1 - \mu) - R^3 + \mu r \cos \psi, \\ 0 &= r(\lambda_2 - \mu) - r^3 + \mu R \cos \psi, \\ \delta &= 3\beta(R^2 - r^2) - \mu\left(\frac{r}{R} + \frac{R}{r}\right) \sin \psi.\end{aligned}\quad (10)$$

Предположим, что на границе области синхронизации слагаемые $\mu R \cos \psi$ и $\mu r \cos \psi$ малы. Тогда для установившихся амплитуд предельных циклов осцилляторов имеем оценки

$$R \approx \sqrt{\lambda_1 - \mu}, \quad r \approx \sqrt{\lambda_2 - \mu}.\quad (11)$$

Поскольку подкоренные выражения должны быть неотрицательными, необходимо выполнение условий $(\lambda_1 \geq \mu)$ и $(\lambda_2 \geq \mu)$. Подставим оценки (11) в третье уравнение (10). Тогда получим

$$\delta = 3\beta((\sqrt{\lambda_1 - \mu})^2 - (\sqrt{\lambda_2 - \mu})^2) - \mu\left(\frac{\sqrt{\lambda_2 - \mu}}{\sqrt{\lambda_1 - \mu}} + \frac{\sqrt{\lambda_1 - \mu}}{\sqrt{\lambda_2 - \mu}}\right) \sin \psi. \quad (12)$$

Этому уравнению, как разновидности известного стационарного уравнения Адлера [1, 13], отвечает граница области синхронизации при условии $\sin \psi = 1$. Но тогда $\cos \psi = 0$, и наше предположение о малости отброшенных членов в первых двух уравнениях (10) оправдано.

Рассмотрим случай отсутствия фазовой нелинейности. Тогда из (12) следует

$$\delta = \pm \mu \left(\frac{\sqrt{\lambda_2 - \mu}}{\sqrt{\lambda_1 - \mu}} + \frac{\sqrt{\lambda_1 - \mu}}{\sqrt{\lambda_2 - \mu}} \right). \quad (13)$$

Функция $\delta(\mu)$, заданная соотношением (13), определяет границу области синхронизации, которая, в соответствии с рис. 2 и 3, должна превращаться в нижнюю границу бесконечной полосы синхронизации. Обозначим эту ветвь $\delta_+(\mu)$. Обсудим асимптотические свойства $\delta_+(\mu)$. Пусть $\lambda_1 > \lambda_2$. Если параметр связи приближается по величине к значению управляющего параметра второго осциллятора, то $(\lambda_2 - \mu) \rightarrow 0$. Это означает, что $\sqrt{(\lambda_2 - \mu)/(\lambda_1 - \mu)} \ll \sqrt{(\lambda_1 - \mu)/(\lambda_2 - \mu)}$, а функция $\delta(\mu)$ стремится к бесконечности, то есть $\lim_{\mu \rightarrow \lambda_2} \delta_+(\mu) = \infty$. Если обратиться к графику обратной функции $\mu = \mu(\delta)$, то для нее, таким образом, должно быть $\mu \rightarrow \lambda_2$ при $\delta \rightarrow \infty$. Это и означает, что на плоскости частотная расстройка – величина связи граница области синхронизации простирается сколь угодно далеко в область больших расстроек.

Функция $\delta(\mu)$, заданная соотношением (13), определяет нижнюю границу бесконечно длинной полосы синхронизации. Верхняя граница этой полосы является границей области гибели колебаний, когда становится устойчивой тривиальная неподвижная точка в начале координат. Для аналитической оценки этой границы воспользуемся полученными ранее укороченными уравнениями для системы связанных осцилляторов ван дер Поля – Дуффинга (7). Проведем линеаризацию системы (7) в окрестности начала координат

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &= \lambda_1 z + \mu(\omega - z), \\ \frac{d\omega}{d\tau} &= \lambda_2 \omega - \mu(z - \omega) + i\delta\omega. \end{aligned} \quad (14)$$

Для исследования устойчивости нулевого положения равновесия полученной линейной системы положим, что

$$z \sim \sin e^{(\eta+i\varepsilon)t}, \quad \omega \sim \sin e^{(\eta+i\varepsilon)t}, \quad (15)$$

где η, ε – действительные числа. Для реализации режима гибели колебаний необходимо выполнение условия $\eta < 0$. Соответственно на границе области гибели колебаний $\eta = 0$. Тогда

$$z \sim \sin e^{i\varepsilon t}, \quad \omega \sim \sin e^{i\varepsilon t}. \quad (16)$$

Подставляя (16) в систему (14), получим соотношение

$$\begin{aligned} (i\varepsilon - \lambda_1 + \mu)(i\varepsilon - \lambda_2 + \mu - i\delta) &= \mu^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \varepsilon^2 + \varepsilon(-\delta + i(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\mu)) + (\mu(\lambda_1 + \lambda_2) - \lambda_1\lambda_2 + i\delta(\mu - \lambda_1)) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \alpha_x &= -\delta, \quad \alpha_y = \lambda_1 + \lambda_2 - 2\mu, \\ \beta_x &= \mu(\lambda_1 + \lambda_2) - \lambda_1\lambda_2, \quad \beta_y = \delta(\mu - \lambda_1). \end{aligned} \quad (18)$$

Тогда

$$\varepsilon^2 + \varepsilon(\alpha_x + i\alpha_y) + (\beta_x + i\beta_y) = 0, \quad (19)$$

где $\alpha_x, \alpha_y, \beta_x, \beta_y$ – действительные числа. Поэтому можно разделить уравнение (19) на действительную и мнимую части: $\varepsilon^2 + \varepsilon\alpha_x + \beta_x = 0$ и $\alpha_y + \beta_y = 0$. Откуда следует, что

$$\varepsilon = -\frac{\beta_y}{\alpha_y}, \quad \frac{\beta_y^2}{\alpha_y^2} - \frac{\beta_y\alpha_x}{\alpha_y} + \beta_x = 0. \quad (20)$$

Подставляя (18) в (20), после некоторых преобразований получаем соотношение, задающее границу области гибели колебаний и, соответственно, верхнюю границу полосы синхронизации

$$\delta^2 = \frac{(\mu(\lambda_1 + \lambda_2) - \lambda_1\lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\mu)^2}{(\lambda_1 - \mu)(\lambda_2 - \mu)}. \quad (21)$$

В частном случае, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, соотношение (21) принимает вид

$$\delta^2 = 4\lambda(2\mu - \lambda), \quad (22)$$

и область гибели колебаний будет определяться известными [1, 2] неравенствами

$$\lambda < \mu < \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{\delta^2}{4\lambda}\right). \quad (23)$$

Исследуя поведение функции $\delta(\mu)$, заданной соотношением (21), отметим ее асимптотические свойства

$$\lim_{\mu \rightarrow \lambda_1} \delta(\mu) = \infty, \quad (24)$$

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \delta(\mu) = 2\sqrt{\mu(\lambda_1 + \lambda_2)}. \quad (25)$$

Графики функций $\delta(\mu)$, заданных соотношениями (13) и (21), представлены на рис. 5. Внутри области, окрашенной в серый цвет, существует неподвижная точка уравнения Адлера, и соответственно возможна синхронизация осцилляторов. Видим, что имеется бесконечно длинная по оси расстройки собственных частот полоса в области значений параметра связи $\lambda_2 < \mu < \lambda_1$. Таким образом, проведенный анализ также позволяет продемонстрировать наличие бесконечной по частотной расстройке полосы синхронизации. Следует, однако, заметить, что он не позволяет диагностировать режимы кратной синхронизации, и, следовательно, речь идет лишь о синхронизации типа 1/1. Как мы видели выше, для исходной дифференциальной системы с ростом разности управляющих параметров бесконечная полоса синхронизации сохраняется, но режимы типа 1/3, 1/5, ... «вытесняют» режим типа 1/1.

3. Широкополосная синхронизация в системе с фазовой нелинейностью

Рассмотрим теперь случай, когда в системе присутствует фазовая нелинейность. Интересен вопрос, каким образом фазовая нелинейность влияет на область широкополосной синхронизации и общее устройство плоскости параметров (расстройка собственных частот – сила связи). Нижнюю границу полосы синхронизации можно определить из уравнения (12), используя тот факт, что оно является стационарным уравнением Адлера. Эта граница задается соотношением

$$\delta = \pm \mu \left(\frac{\sqrt{\lambda_2 - \mu}}{\sqrt{\lambda_1 - \mu}} + \frac{\sqrt{\lambda_1 - \mu}}{\sqrt{\lambda_2 - \mu}} \right) + 3\beta \left((\sqrt{\lambda_1 - \mu})^2 - (\sqrt{\lambda_2 - \mu})^2 \right). \quad (26)$$

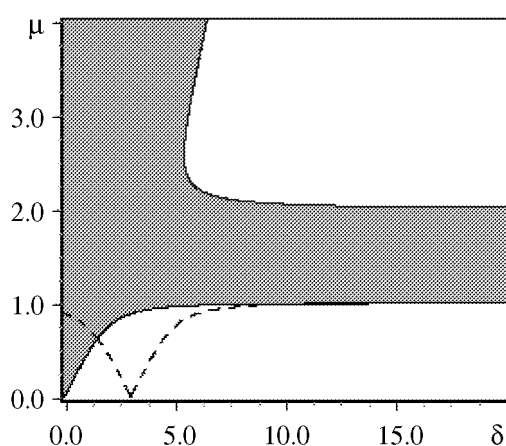


Рис. 5. Область синхронизации 1/1 (выделена серым цветом), построенная аналитически для случая связанных осцилляторов ван дер Поля. Значения параметров $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\beta = 0$. Пунктир – граница области синхронизации при наличии фазовой нелинейности $\beta = 1$

ван дер Поля – Дуффинга для различающихся значений λ_1 и λ_2 при наличии фазовой нелинейности в системе. Видно, что язык синхронизации при увеличении параметра такой нелинейности β сдвигается вправо вдоль оси расстройки собственных частот, как и предсказывает анализ уравнения Адлера. Однако можно видеть, что фазовая нелинейность сильно влияет на области кратной синхронизации. Внутри полосы синхронизации они несколько уменьшаются в размерах, меняют форму, а их частотный порог сильно сдвигается в область больших расстроек (вправо).

На рис. 6, б приведены фазовые портреты в различных точках плоскости параметров. Фазовые портреты построены попарно на плоскостях (x, \dot{x}) слева и (y, \dot{y}) справа для каждой точки плоскости параметров. Двигаясь вдоль полосы синхронизации (см. центральный рисунок), можно проследить, как режим синхронизации типа 1/1 сменяется режимом 1/3. Это происходит за счет появления новых «петель» у аттрактора. Приведенные фазовые портреты демонстрируют, что образование таких петель на боковой левой и верхней границах области типа 1/3 происходит по-разному.

График функции $\delta(\mu)$, заданной соотношением (26), представлен на рис. 5 штриховой линией. При этом верхняя граница полосы синхронизации, изображенная на рис. 5, по-прежнему определяется соотношением (21), поскольку оно отвечает линеаризованной системе и справедливо в независимости от присутствия или отсутствия фазовой нелинейности. Можно видеть, что наличие фазовой нелинейности приводит к смещению языка синхронизации вдоль оси расстройки собственных частот и не влияет на область широкополосной синхронизации в случае больших расстроек.

На рис. 6 изображены полученные в результате компьютерных экспериментов карты динамических режимов системы связанных осцилляторов ван

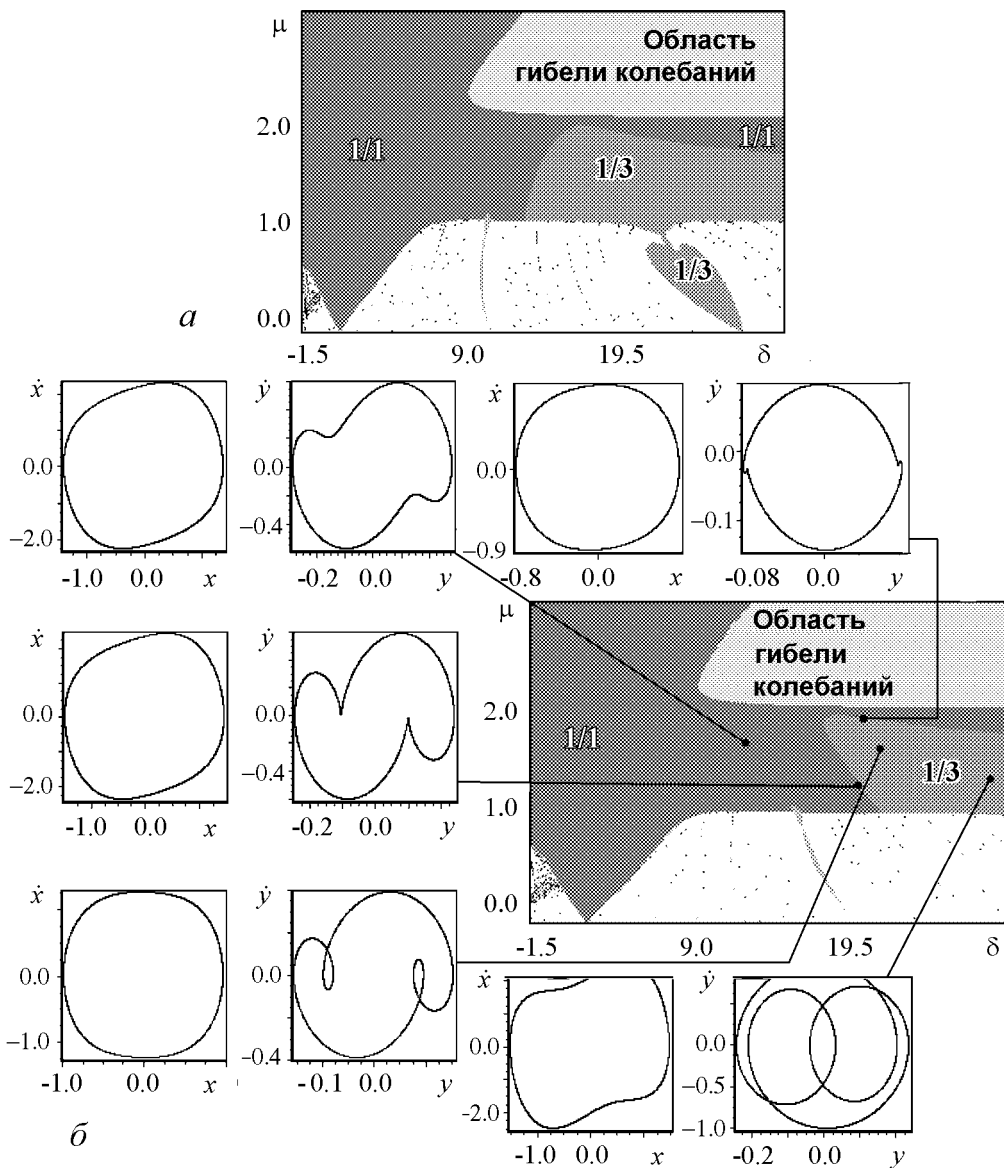


Рис. 6. Карты динамических режимов системы (1) для $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ при $\beta = 0.5$ (а) и $\beta = 1$ (б), а также фазовые портреты системы

Заключение

Таким образом, диссипативно связанные неидентичные по управляющим параметрам осцилляторы ван дер Поля демонстрируют интересные особенности синхронизации. На плоскости параметров (частотная расстройка – величина связи) граница между областями гибели колебаний и квазипериодическими режимами из линии превращается в полосу конечной ширины по константе связи, простирающуюся в область очень больших расстроек. При небольшой неидентичности этой полосе отвечает, в основном, синхронизация с числом вращения $1/1$. Представлены, однако, и режимы типов $1/3$, $1/5$ и т.д., аттракторы которых содержат соответствующее число «петель», а области реализации на плоскости параметров выглядят как «размытые»

вершины соответствующих языков синхронизации. С ростом неидентичности отвечающие этим режимам области существенно расширяются, заполняя, фактически, всю полосу. В этом случае реализуется режим колебаний, когда один осциллятор заметно доминирует над другим. При учете фазовой нелинейности, введенной по типу осциллятора Дуффинга, области кратной синхронизации уменьшаются в размерах, их частотный порог смещается в сторону больших расстройек.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-02-16773).

Библиографический список

1. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация: фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003, 508 с.
2. Aronson D.G., Ermentrout G.B., Kopell N. Amplitude response of coupled oscillators // *Physica D*. 1990. Vol. 41. P. 403.
3. Rand R., Holmes P.J. Bifurcation of periodic motions in two weakly coupled van der Pol oscillators // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 1980. Vol. 15. P. 387.
4. Storti D.W., Rand R.H. Dynamics of two strongly coupled van der Pol oscillators // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 1982. Vol. 17(3). P. 143.
5. Chakraborty T., Rand R.H. The transition from phase locking to drift in a system of two weakly coupled van der Pol oscillators // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 1988. Vol. 23, № 5/6. P. 369.
6. Poliashenko M., McKay S.R., Smith C.W. Chaos and nonisochronism in weakly coupled nonlinear oscillators // *Phys. Rev. A*. 1991. Vol. 44. P. 3452.
7. Poliashenko M., McKay S.R., Smith C.W. Hysteresis of synchronous – asynchronous regimes in a system of two coupled oscillators // *Phys. Rev. A*. 1991. Vol. 43. P. 5638.
8. Pastor I., Perez-Garcia V.M., Encinas-Sanz F., Guerra J.M. Ordered and chaotic behavior of two coupled van der Pol oscillators // *Phys. Rev. E*. 1993. Vol. 48. P. 171.
9. Camacho E., Rand R.H., Howland H. Dynamics of two van der Pol oscillators coupled via a bath // *Int. J. of Solids and Structures*. 2004. Vol. 41. P. 2133.
10. Кузнецов А.П., Паксютов В.И. О динамике двух связанных осцилляторов ван дер Поля – Дуффинга с диссипативной связью // *Изв. вузов. ПНД*. 2003. Т. 11, № 6.
11. Кузнецов А.П., Паксютов В.И. Особенности устройства пространства параметров двух неидентичных связанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга // *Изв. вузов. ПНД*. 2005. Т. 13, № 4. С. 3.
12. Ivanchenko M.V., Osipov G.V., Shalfeev V.D., Kurths J. Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators // *Physica D*. 2004. Vol. 189, № 1-2. P. 8.
13. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. Сер. Современная теория колебаний и волн. 2-е изд. М.: Физматлит, 2006.
14. Кузнецов С.П. Динамический хаос. Сер. Современная теория колебаний и волн. 2-е изд. перераб. и доп. М.: Физматлит, 2006, 356 с.

*Саратовский филиал Института
радиотехники и электроники РАН*

*Поступила в редакцию 01.03.2007
После доработки 28.05.2007*

**PROPERTIES OF SYNCHRONIZATION IN THE SYSTEM
OF NONIDENTICAL COUPLED VAN DER POL
AND VAN DER POL – DUFFING OSCILLATORS.
BROADBAND SYNCHRONIZATION**

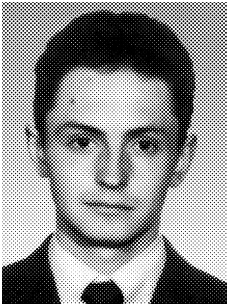
A.P. Kuznetsov, V.I. Paksyutov, Yu.P. Roman

The particular properties of dynamics are discussed for the dissipatively coupled van der Pol oscillators, nonidentical in values of parameters controlling the Hopf bifurcation. The opportunity of a special synchronization regime in an infinitively long band between oscillation death and quasiperiodicity areas is shown for such system. The features of the bifurcation picture are observed for different values of the control parameters and for the case of additional Duffing type nonlinearity. In discussion a comparison with closed equation analysis is made.

Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского госуниверситета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и школьной научной лаборатории. Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и лица прикладных наук СГУ, 10 учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002). E-mail: alkuz@sgu.ru; www.sgtn.d.narod.ru

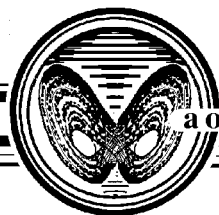


Паксютов Владимир Игоревич – родился в Саратове (1982). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского в 2004 году. Аспирант кафедры динамических систем факультета нелинейных процессов СГУ. Занимается научной работой по направлению: динамические режимы и синхронизация в автоколебательных системах различной природы. С 2000 года – постоянный участник ежегодной научной школы-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых», принял участие в нескольких международных конференциях. Имеет 14 научных публикаций.



Роман Юлия Павловна – родилась в 1987 году. Окончила с отличием Лицей прикладных наук города Саратова (2004). В настоящее время студентка 3 курса факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского. Имеет 5 научных публикаций. E-mail: yuliaro@mail.ru





СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ХАОТИЧЕСКИХ АВТОГЕНЕРАТОРОВ

Т.Е. Вадивасова, А.С. Захарова

В статье исследуются спектры колебаний двух взаимодействующих автогенераторов хаоса и их связь с парциальными коэффициентами эффективной диффузии фазы. Прослеживается эволюция спектров и коэффициентов диффузии от несинхронного режима к режиму синхронизации хаоса. Выявлена аналогия между спектральными характеристиками взаимодействующих генераторов детерминированного хаоса и взаимодействующих периодических генераторов с шумом.

Введение

Хаотическая автоколебательная система в режиме фазово-когерентного (спирального) хаоса во многом подобна квазигармоническому генератору, содержащему источники шума [1, 2]. Детальные численные и натурные эксперименты, осуществленные в последние годы, показали, что скорость расщепления корреляций и спектральные характеристики хаотических колебаний в значительной степени определяются коэффициентом эффективной диффузии мгновенной фазы колебаний [3–5]. Спектральная плотность мощности хаотических автоколебаний в режиме спирального аттрактора имеет характерный максимум на частоте Ω , равной средней частоте автоколебаний [6]

$$\Omega = \langle \dot{\Phi}(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Phi(t_0 + T) - \Phi(t_0)}{T}, \quad (1)$$

где $\Phi(t)$ – полная фаза хаотических автоколебаний. В окрестности максимума спектр имеет форму лоренциана с шириной, равной $2B_{\text{эф}}$:

$$S(\omega) = \frac{2CB_{\text{эф}}}{B_{\text{эф}}^2 + (\omega - \Omega)^2}, \quad (2)$$

где C – константа, определяемая дисперсией колебаний, связанной с флуктуациями фазы.

Ширина основной спектральной линии хаоса является не менее важной характеристикой «степени хаотичности», чем сумма положительных показателей Ляпунова (энтропия Колмогорова). Так, возможность частотно-фазовой синхронизации хаотических автогенераторов ограничивается именно шириной спектра. С ростом

ширины основной спектральной линии эффект синхронизации перестает наблюдаться [6]. Следует отметить, что взаимосвязь показателей Ляпунова со спектрально-корреляционными свойствами хаоса пока не установлена и, по-видимому, является достаточно сложной и неоднозначной [4, 7–9].

Рассмотрим взаимодействие генераторов спирального хаоса с различными спектральными характеристиками. В отсутствие связи ширина основной спектральной линии первого и второго генератора определяется соответствующим коэффициентом эффективной диффузии фазы $B_{\text{эф1}}^0$ и $B_{\text{эф2}}^0$, а спектральные максимумы расположены на частотах Ω_1^0 и Ω_2^0 . Во взаимодействующих генераторах хаотические колебания в общем случае будут характеризоваться двумя мгновенными фазами. Соответственно, будем рассматривать парциальные средние частоты Ω_1 и Ω_2 , а также попытаемся ввести парциальные коэффициенты эффективной диффузии фазы $B_{\text{эф1}}$ и $B_{\text{эф2}}$. При достаточно сильной связи наблюдается частотно-фазовая синхронизация, состоящая в захвате фаз и равенстве (в общем случае – кратности) средних частот [2, 10]. Для основной области синхронизации (соответствующей равенству средних частот) коэффициент диффузии разности фаз $\Delta\Phi(t) = \Phi_1(t) - \Phi_2(t)$ становится равным нулю. Отсюда следует равенство парциальных коэффициентов диффузии фазы $B_{\text{эф1}} = B_{\text{эф2}}$. Таким образом, в системе связанных генераторов имеются два качественно различных хаотических режима: синхронный хаос и несинхронный хаос (тор-хаос). Режим синхронного хаоса характеризуется одним коэффициентом эффективной диффузии фазы, а режим несинхронного хаоса предполагает существование двух таких коэффициентов. Очевидно, спектры колебаний в случае синхронного и несинхронного хаоса должны определенным образом отражать особенности динамики фаз парциальных систем, в частности иметь связь с величинами $B_{\text{эф1}}$ и $B_{\text{эф2}}$.

В данной работе исследуются спектры мощности колебаний взаимодействующих автогенераторов фазово-когерентного хаоса, которые не только могут быть построены по частоте, но также характеризуются различной шириной основной спектральной линии. Цель проводимых численных экспериментов – установить, возможно ли введение парциальных коэффициентов диффузии фазы взаимодействующих хаотических генераторов (то есть имеет ли место линейный рост дисперсии фазы в каждом из генераторов) и, если введение таких коэффициентов возможно, проанализировать их связь со спектрами колебаний. Мы также хотим в деталях рассмотреть особенности поведения спектров мощности колебаний для режима несинхронного хаоса и на границе фазового захвата. В частности, нас будет интересовать форма и ширина основных линий в спектрах парциальных генераторов. Кроме того, мы хотим убедиться в существовании порогового значения параметра связи для синхронизации хаотических генераторов, которое следует из теоретических представлений [2, 11].

1. Исследуемая модель

В качестве генераторов хаоса были выбраны осцилляторы Ресслера [12]. Исследуемая математическая модель задается уравнениями

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -y_1 - z_1 + \gamma(x_2 - x_1), \\
 \dot{y}_1 &= x_1 + \alpha_1 y_1, \\
 \dot{z}_1 &= \beta_1 + z_1(x_1 - \mu_1), \\
 \dot{x}_2 &= -(1 - \Delta)y_2 - z_2 + \gamma(x_1 - x_2), \\
 \dot{y}_2 &= (1 - \Delta)x_2 + \alpha_2 y_2, \\
 \dot{z}_2 &= \beta_2 + z_2(x_2 - \mu_2).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Были выбраны следующие значения параметров: $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0.2$, $\mu_1 = 6.5$, $\mu_2 = 4.5$. Параметр Δ , управляющий расстройкой базовых частот парциальных осцилляторов, и параметр связи γ менялись в ходе проведения численных экспериментов.

Рассчитывались мгновенные фазы, коэффициенты эффективной диффузии мгновенных фаз, средние частоты и спектральные плотности мощности хаотических колебаний в каждом из генераторов. Мгновенные фазы колебаний парциальных осцилляторов $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$ вводились как полные углы поворота радиуса-вектора изображающей точки в соответствующих плоскостях x_1, y_1 и x_2, y_2 . Для вычисления коэффициента эффективной диффузии фазы $\Phi(t)$ численно строилась зависимость дисперсии фазы σ_Φ^2 от времени t и по методу наименьших квадратов находилась ее линейная аппроксимация: $\sigma_{\text{аппр}}^2 = at + b$. Тогда коэффициент эффективной диффузии фазы $\Phi(t)$ определяется как $B_{\Phi} = a/2$. При расчете спектров использовалось быстрое преобразование Фурье с последующим усреднением результатов по ансамблю независимых массивов данных (обычно не менее 100 усреднений).

2. Анализ спектров в режимах несинхронного и синхронного хаоса

В обоих парциальных осцилляторах Ресслера в отсутствие связи наблюдается спиральный хаотический аттрактор. В силу расстройки параметров μ_1, μ_2 хаос в первой системе более развит, что можно видеть по проекциям аттракторов (рис. 1, *a*) и значениям показателей Ляпунова (старшие показатели для невзаимодействующих осцилляторов имеют следующие значения: $\lambda_1^0 = 0.084 \pm 10^{-3}$; $\lambda_2^0 = 0.062 \pm 10^{-3}$). Кроме того, для каждой из парциальных систем без связи характерен линейный рост дисперсии фазы, а коэффициенты эффективной диффузии отличаются более чем на порядок: $B_{\Phi_1}^0 = 0.00018 \pm 10^{-5}$; $B_{\Phi_2}^0 = 0.00001 \pm 0.5 \cdot 10^{-5}$ (рис. 1, *b*). Соответствующим образом ведут себя спектры колебаний двух систем (рис. 1, *в, г*). Они характеризуются основными спектральными линиями различной ширины. Основная спектральная линия для каждого из автогенераторов имеет максимум на средней частоте (соответственно Ω_1 или Ω_2) и по форме близка к лоренциану с полушириной на уровне половинной мощности, равной коэффициенту эффективной диффузии фазы.

Границу области синхронизации парциальных осцилляторов легко определить, проследив за средними частотами Ω_1, Ω_2 или их отношением $\theta = \Omega_1 : \Omega_2$ (числом вращения). В основной области синхронизации $\Omega_1 = \Omega_2$ и, соответственно, $\theta = 1$. Зафиксируем $\Delta = 0.02$. В этом случае в отсутствие связи ($\gamma = 0$) имеется небольшая частотная расстройка парциальных осцилляторов. Средняя частота Ω_2 немного меньше средней частоты Ω_1 . Введем связь между осцилляторами и будем ее увеличивать. Расчеты показывают, что граница фазового захвата соответствует параметру связи $\gamma_{\text{кр}} \approx 0.0095 \pm 10^{-4}$. При $\gamma > \gamma_{\text{кр}}$ средние частоты парциальных систем равны (с точностью 10^{-8}).

Рассмотрим, каким будет характер роста дисперсий фазы в области несинхронного хаоса (тор-хаоса). Результаты, полученные при $\Delta = 0.02$, $\gamma = 0.008$, представлены на рис. 2. На фоне линейного роста дисперсии фазы в обоих генераторах возникают медленные затухающие осцилляции (рис. 2, *a*). Их частота соответствует

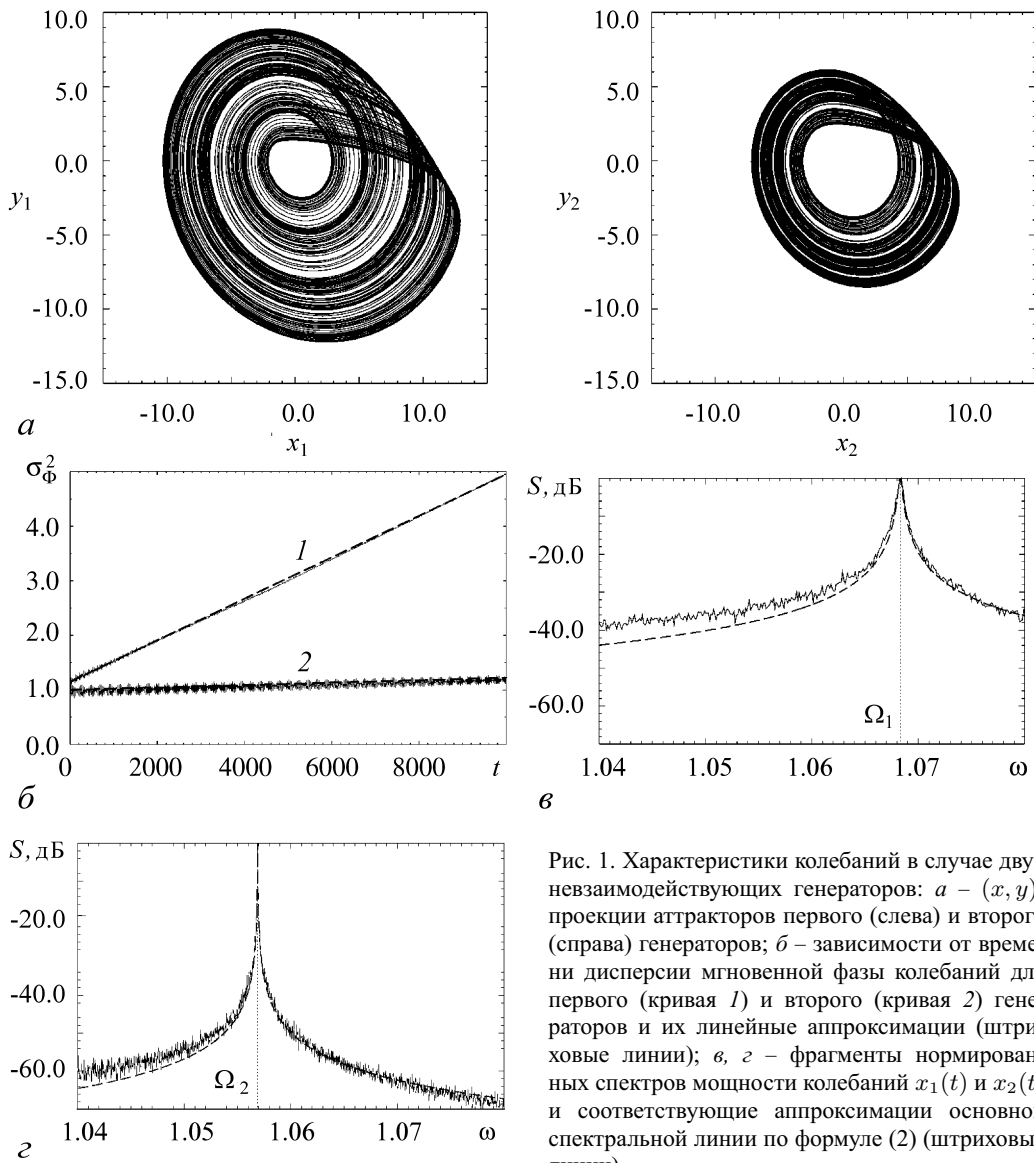


Рис. 1. Характеристики колебаний в случае двух не взаимодействующих генераторов: *a* – (x, y) -проекции аттракторов первого (слева) и второго (справа) генераторов; *b* – зависимости от времени дисперсии мгновенной фазы колебаний для первого (кривая 1) и второго (кривая 2) генераторов и их линейные аппроксимации (штриховые линии); *v, z* – фрагменты нормированных спектров мощности колебаний $x_1(t)$ и $x_2(t)$ и соответствующие аппроксимации основной спектральной линии по формуле (2) (штриховые линии)

разностной частоте $\delta\Omega = \Omega_1 - \Omega_2$. Однако в целом линейный рост сохраняется и можно ввести коэффициенты $B_{\text{эф1}}$ и $B_{\text{эф2}}$: $B_{\text{эф1}} = 0.00014$, $B_{\text{эф2}} = 0.00022$. Можно заметить также, что соотношение между коэффициентами диффузии заметно меняется. Спектр автоколебаний каждого из генераторов имеет основную спектральную линию в форме лоренциана, полуширина которого по-прежнему определяется парциальным коэффициентом диффузии фазы данного генератора, а максимум соответствует средней частоте колебаний. Кроме того, в спектре присутствует другая спектральная линия с максимумом на средней частоте второго генератора. Ширина этой линии определяется вторым коэффициентом диффузии фазы (рис. 2, *b, v*). Имеются также спектральные линии на комбинационных частотах. Таким образом, режим несинхронного хаоса подобен режиму биений в двух взаимодействующих зашумленных квазигармонических генераторах, и название «тор-хаос» в этом смысле вполне оправданно.

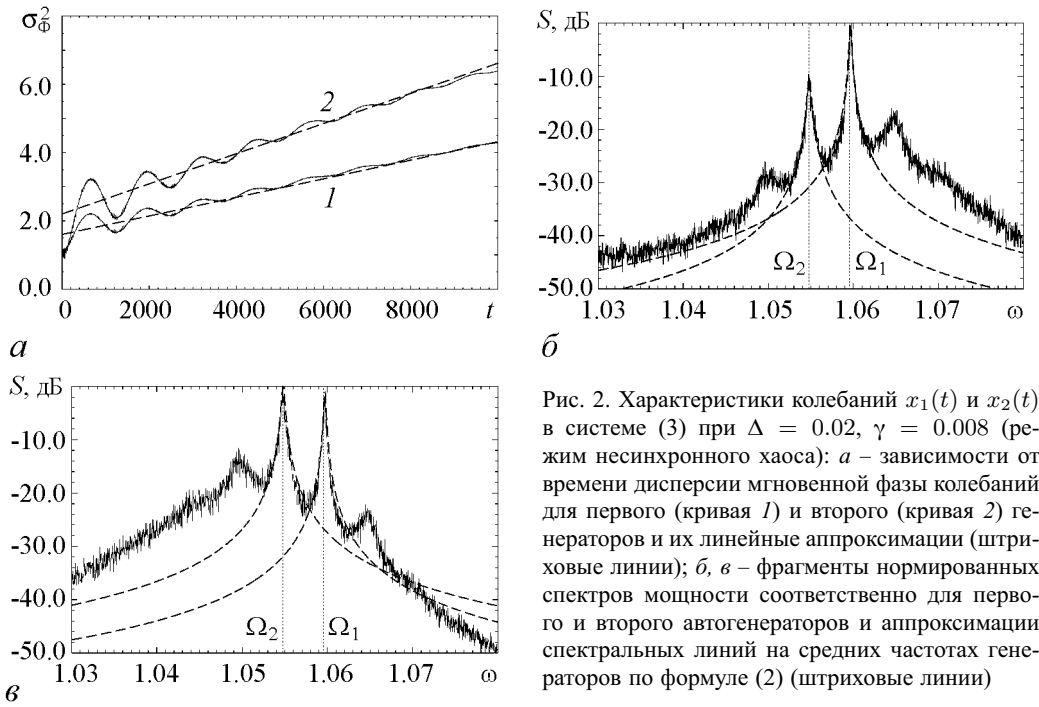


Рис. 2. Характеристики колебаний $x_1(t)$ и $x_2(t)$ в системе (3) при $\Delta = 0.02$, $\gamma = 0.008$ (режим несинхронного хаоса): a – зависимости от времени дисперсии мгновенной фазы колебаний для первого (кривая 1) и второго (кривая 2) генераторов и их линейные аппроксимации (штриховые линии); $б, в$ – фрагменты нормированных спектров мощности соответственно для первого и второго автогенераторов и аппроксимации спектральных линий на средних частотах генераторов по формуле (2) (штриховые линии)

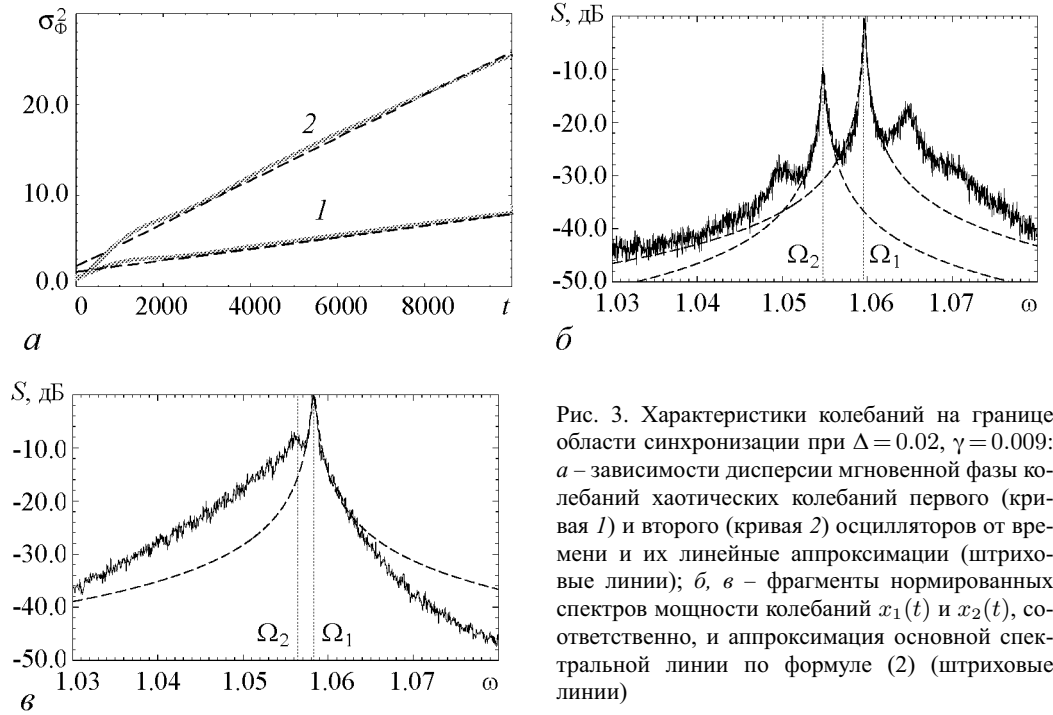


Рис. 3. Характеристики колебаний на границе области синхронизации при $\Delta = 0.02$, $\gamma = 0.009$: a – зависимости дисперсии мгновенной фазы колебаний хаотических колебаний первого (кривая 1) и второго (кривая 2) осцилляторов от времени и их линейные аппроксимации (штриховые линии); $б, в$ – фрагменты нормированных спектров мощности колебаний $x_1(t)$ и $x_2(t)$, соответственно, и аппроксимация основной спектральной линии по формуле (2) (штриховые линии)

Исследуем характер роста дисперсии фазы и вид спектров колебаний на границе области синхронизации ($\gamma = 0.009$), где значения коэффициентов $B_{\phi 1}$ и $B_{\phi 2}$ значительно возрастают. Для каждого генератора дисперсия мгновенной фазы растет во времени почти линейно, а парциальные коэффициенты диффузии фазы существенно различны: $B_{\phi 1} = 0.00032$, $B_{\phi 2} = 0.00118$ (рис. 3, a). Различие $B_{\phi 1}$

и $B_{\text{эф}2}$ означает, что фазовый захват еще не произошел. Однако в спектрах обоих генераторов главный максимум расположен на одной и той же частоте, которая с точностью до численной ошибки совпадает со средней частотой первого генератора $\Omega_1 = 1.0582 \pm 10^{-4}$ (рис.3, б, в). То есть в первом генераторе средняя частота совпадает с частотой основного максимума, а во втором – не совпадает. Таким образом, совпадение частот главных максимумов в спектрах парциальных колебаний еще не означает синхронизации, и в этом смысле расчет средних частот дает правильный результат. Кроме главного максимума в спектрах обоих генераторов присутствует еще один максимум. Он соответствует средней частоте второго генератора $\Omega_2 = 1.0565 \pm 10^{-4}$ (рис. 3, б, в). То, что этот максимум в спектре второго генератора не является главным, легко объяснить. Хотя связь симметричная, но интенсивность колебаний в первом генераторе больше, следовательно, воздействие первого генератора на второй более существенно, чем второго на первый. Спектральная линия с максимумом на частоте Ω_2 является широкой и образует пьедестал для основной линии. Поскольку ее форма отлична от лоренцевой (она несимметрична относительно Ω_2 и различается для двух генераторов), то связать ее ширину с коэффициентом $B_{\text{эф}2}$ не удастся. Однако, по-видимому, именно образованный этой линией широкий пьедестал связан с более сильной диффузией фазы во втором генераторе. В целом же спектры колебаний для данного режима шире, чем для синхронных или несинхронных режимов при удалении от границы.

В области фазового захвата диффузия разности фаз $\Delta\Phi(t) = \Phi_1(t) - \Phi_2(t)$ должна быть равна нулю. Это очевидный факт, поскольку захват «строгий» (на сколько угодно больших временах). Отсюда следует равенство $B_{\text{эф}1} = B_{\text{эф}2}$ (см. рис 4, а, где $B_{\text{эф}1} = B_{\text{эф}2} = 0.000026$). Фрагменты спектров колебаний $x_1(t)$ и $x_2(t)$ приведены на рис. 4, б, в. Основной максимум в спектрах колебаний обоих генераторов расположен на одной и той же частоте $\Omega = \Omega_1 = \Omega_2$, а спектральные линии имеют одну и ту же лоренцеву форму с шириной $2B_{\text{эф}}$.

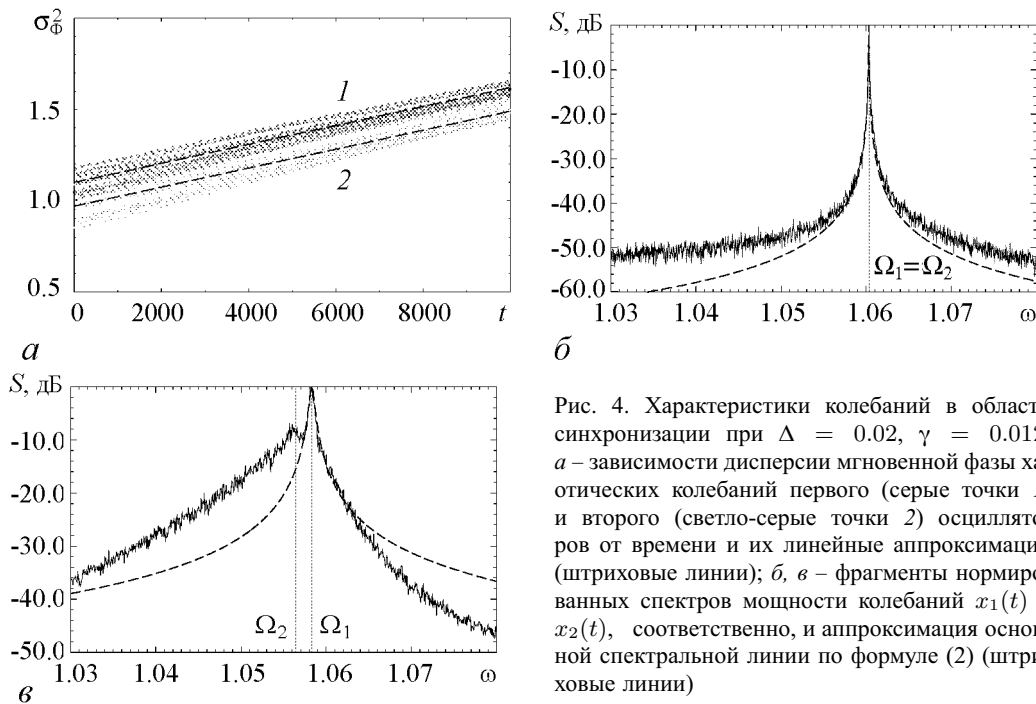


Рис. 4. Характеристики колебаний в области синхронизации при $\Delta = 0.02$, $\gamma = 0.012$: а – зависимости дисперсии мгновенной фазы хаотических колебаний первого (серые точки 1) и второго (светло-серые точки 2) осцилляторов от времени и их линейные аппроксимации (штриховые линии); б, в – фрагменты нормированных спектров мощности колебаний $x_1(t)$ и $x_2(t)$, соответственно, и аппроксимация основной спектральной линии по формуле (2) (штриховые линии)

3. Зависимость парциальных коэффициентов диффузии фазы и коэффициента диффузии разности фаз от параметра связи

Рассмотрим, как зависят парциальные коэффициенты диффузии фазы $B_{\text{эф1}}$, $B_{\text{эф2}}$ и коэффициент диффузии разности фаз $B_{\text{эф12}}$ от параметра связи γ при фиксированном значении расстройки $\Delta = 0.02$ (рис. 5, *a*). В области несинхронного хаоса значения коэффициентов $B_{\text{эф1}}$ и $B_{\text{эф2}}$ не просто сближаются при усилении связи, но, начиная с некоторого значения γ , выстраиваются в другом порядке: коэффициент $B_{\text{эф2}}$ становится больше, чем $B_{\text{эф1}}$. Впрочем, какой из двух коэффициентов будет больше вблизи границы синхронизации, зависит от расстройки. На самой границе синхронизации имеет место резкий скачок коэффициентов диффузии фазы в обеих парциальных системах, но особенно во второй. Причина роста коэффициентов диффузии фазы на границе фазового захвата нам пока не совсем понятна. Можно отметить, что данный эффект типичен и для других задач взаимной и вынужденной синхронизации, например для синхронизации зашумленных автоколебаний. Значение $B_{\text{эф12}}$ в области несинхронного хаоса меняется слабо и немонотонно. Вблизи границы синхронизации имеет место заметный рост $B_{\text{эф12}}$. При переходе в область фазового захвата численно полученные значения $B_{\text{эф12}}$ резко (на несколько порядков) уменьшаются, а значения парциальных коэффициентов диффузии фазы, как уже отмечалось, становятся равными: $B_{\text{эф1}} = B_{\text{эф2}} = B_{\text{эф}}$. Таким образом, по поведению коэффициентов $B_{\text{эф1}}$, $B_{\text{эф2}}$ и $B_{\text{эф12}}$ легко определить границу фазового захвата. Как показывают проведенные вычисления, она совпадает с границей $\gamma_{\text{кр}} \approx 0.0095 \pm 10^{-4}$, определенной по числу вращения (пунктирная линия на рис. 5, *a*) В области синхронизации коэффициент эффективной диффузии фазы $B_{\text{эф}}$ синхронных автоколебаний убывает с удалением от границы и становится ближе к наименьшему из двух коэффициентов $B_{\text{эф1}}^0$ и $B_{\text{эф2}}^0$, соответствующих невзаимодействующим генераторам. Для сравнения на рис. 5, *a* штрихпунктирной линией показано среднее арифметическое значение для $B_{\text{эф1}}^0$ и $B_{\text{эф2}}^0$. Однако при изменении параметра связи в широких пределах характер синхронного хаоса может существенно меняться, что приводит к сильным колебаниям значений $B_{\text{эф}}$.

Теперь выберем значение расстройки Δ таким образом, чтобы базовые (и, соответственно, средние) частоты невзаимодействующих генераторов, несмот-

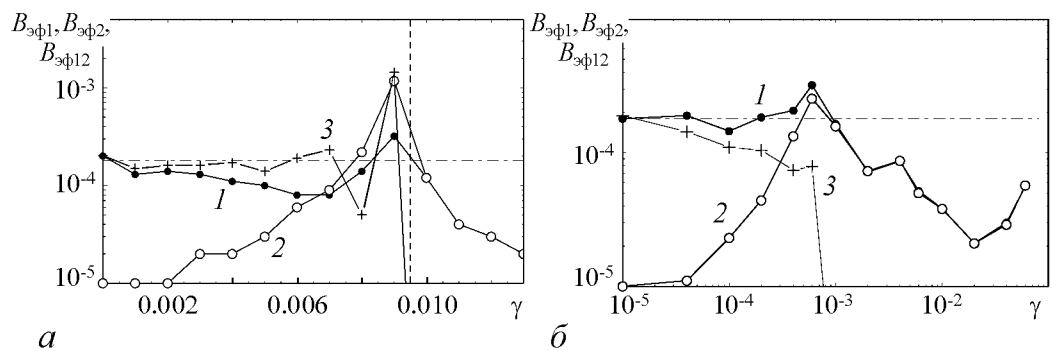


Рис. 5. Зависимости парциальных коэффициентов эффективной диффузии фаз $B_{\text{эф1}}$, $B_{\text{эф2}}$ (кривые 1 и 2) и коэффициента эффективной диффузии разности фаз $B_{\text{эф12}}$ (кривая 3) от параметра связи γ : *a* – при $\Delta = 0.02$ (средние частоты невзаимодействующих генераторов различны); *б* – при $\Delta = 0.095$ (средние частоты невзаимодействующих генераторов одинаковы). Горизонтальная штрихпунктирная линия соответствует среднему арифметическому $(B_{\text{эф1}}^0 + B_{\text{эф2}}^0)/2$. Вертикальной пунктирной линией на рис. (*a*) отмечена граница фазового захвата, установленная по числу вращения

ря на различную степень их хаотичности, были бы равны. Такое равенство (с точностью до 10^{-4}) имеет место при $\Delta = 0.0095$. В соответствии с теорией [2, 11] захват фаз хаотических автогенераторов даже в случае одинаковых средних частот происходит при конечном значении коэффициента связи, то есть существует некоторый порог γ_{\min} . При $\gamma < \gamma_{\min}$ синхронизация невозможна и коэффициент $B_{\text{эф}12}$ отличен от нуля. На рис. 5, б приведены полученные для этого случая зависимости $B_{\text{эф}1}$, $B_{\text{эф}2}$ и $B_{\text{эф}12}$ от параметра γ . Для большей наглядности значения γ , как и значения коэффициентов диффузии фаз, даны в логарифмическом масштабе. По приведенным зависимостям действительно можно сделать вывод о существовании порога синхронизации. Для исследуемого случая $\gamma_{\min} \approx 0.001$. В целом полученные графики подобны представленным на рис. 5, а, хотя некоторые детали поведения коэффициентов $B_{\text{эф}1}$, $B_{\text{эф}2}$ и $B_{\text{эф}12}$ в области несинхронного хаоса различаются. Так, коэффициент $B_{\text{эф}1}$ всюду в области несинхронного хаоса больше, чем $B_{\text{эф}2}$, а $B_{\text{эф}12}$ монотонно убывает. Величина коэффициента диффузии фазы синхронных автоколебаний $B_{\text{эф}}$ для различных значений параметра связи сильно изменяется, но всюду, где были проведены вычисления, остается на порядок меньше, чем $B_{\text{эф}1}^0$. Как следует из теории [2] и проведенных численных расчетов, порог синхронизации существует и при взаимодействии совершенно идентичных хаотических генераторов. Так, при $\mu_1 = \mu_2 = 6.5$, $\Delta = 0$ нами было получено пороговое значение $\gamma_{\min} \approx 0.002$, что даже больше, чем в рассмотренном выше случае, когда хаос во втором генераторе является менее развитым ($\mu_2 = 4.5$). Можно предположить, что высота порога связана с коэффициентами эффективной диффузии фазы хаотических генераторов $B_{\text{эф}1}^0$ и $B_{\text{эф}2}^0$. Однако пока данный вопрос нами не рассматривался. Ответ на него требует проведения специальных исследований.

Заключение

Полученные результаты показывают, что при взаимодействии двух автогенераторов спирального хаоса, так же как и в отдельно взятом генераторе, коэффициент эффективной диффузии фазы определяет ширину основной спектральной линии в каждой из двух парциальных систем. Режим несинхронного хаоса (за исключением близкой окрестности границы синхронизации) подобен квазипериодическим колебаниям взаимодействующих периодических генераторов с источниками шума. В спектрах имеются две независимые линии конечной ширины, причем ширина линий определяется парциальными коэффициентами диффузии. На границе синхронизации из-за сильного взаимного влияния парциальных систем наблюдается более сложная связь коэффициентов диффузии фазы со спектрами колебаний. Хотя дисперсия фазы в каждом из генераторов растет во времени почти линейно, форма основной спектральной линии отличается от лоренциана. Оба парциальных коэффициента диффузии фазы при приближении к границе синхронизации существенно возрастают.

Синхронный хаос является фазово-когерентным, так же как хаос в невзаимодействующих генераторах. Парциальные колебания имеют один и тот же коэффициент диффузии фазы, что является следствием фазового захвата. С точки зрения эволюции спектров синхронизация хаоса проявляется не только в захвате средних частот, но и в установлении одной и той же ширины спектральных линий обоих автогенераторов. Подобно эффективной синхронизации шумящих генераторов [13–15], синхронизация хаотических генераторов имеет порог по параметру связи, который

зависит от коэффициентов диффузии фазы взаимодействующих генераторов. Однако при синхронизации детерминированного хаоса диффузия разности фаз подавляется полностью, что невозможно в стохастических системах.

Для рассмотренного типа связи синхронный хаотический режим вблизи границы своего возникновения характеризуется небольшим значением коэффициента диффузии фазы. В наших расчетах он был на порядок меньше, чем наибольший из двух коэффициентов диффузии невзаимодействующих генераторов. То есть взаимная синхронизация двух хаотических генераторов приводит к упорядочиванию фазовой динамики и более медленному перемешиванию.

Данная работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (НОЦ СГУ) и гранта Президента РФ (НШ-4319.2006.2).

Библиографический список

1. *Farmer J.D.* Spectral broadening of period-doubling bifurcation sequences // *Phys. Rev. Lett.* 1981, Vol. 47. № 5. P. 179.
2. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
3. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Kurths J., Okrokvertskhov G.A., Strelkova G.I.* Autocorrelation function and spectral linewidth of spiral chaos in a physical experiment // *Phys. Rev. E.* 2004. Vol. 69. P. 036215.
4. *Anishchenko V.S., Okrokvertskhov G.A., Vadivasova T.E.* Mixing and spectral-correlation properties of chaotic and stochastic systems: numerical and physical experiments // *New Journal of Physics.* 2005. Vol. 7. P. 76.
5. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Окроквертцхов Г.А., Стрелкова Г.И.* Корреляционный анализ режимов детерминированного и зашумленного хаоса // *Радиотехника и электроника.* 2003. Т. 48, № 7. С. 824.
6. *Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С.* Взаимосвязь частотных и фазовых характеристик хаоса. Два критерия синхронизации // *Радиотехника и электроника.* 2004. Т. 49, № 1. С. 77.
7. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Kopeikin A.S., Kurths J., Strelkova G.I.* Effect of noise on the relaxation to an invariant probability measure of nonhyperbolic chaotic attractors // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 87, № 5. P. 4101.
8. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Kopeikin A.S., Kurths J., Strelkova G.I.* Peculiarities of the relaxation to an invariant probability measure of nonhyperbolic chaotic attractors in the presence of noise // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 65, № 2. P. 036206.
9. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Strelkova G.I., Okrokvertskhov G.A.* Statistical properties of deterministic and noisy chaotic systems // *Прикладная нелинейная динамика.* 2003. Т. 11, № 3. С. 4.
10. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
11. *Pikovsky A., Osipov G., Rosenblum M., Zaks M., Kurths J.* Attractor – repeller

collision and eyelet intermittency at the transition to phase synchronization // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol.79. P. 47.

12. *Rössler O.E.* An equation for continuous chaos // Phys. Lett. A. 1976. Vol. 57. P. 397.

13. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.

14. *Малахов А.Н.* Флуктуации в автоколебательных системах. М.: Наука, 1968.

15. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию 02.03.2007

SPECTRAL ANALYSIS OF OSCILLATIONS IN THE SYSTEM OF COUPLED CHAOTIC SELF-SUSTAINED OSCILLATORS

T.E. Vadivasova, A.S. Zakharova

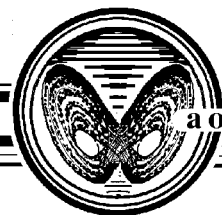
Spectra of oscillations in the system of two coupled self-sustained chaotic oscillators are investigated in present work. The relation between spectra and partial effective phase diffusion coefficients is determined. We follow the evolution of spectra and diffusion coefficients from the asynchronous regime to the regime of synchronous chaos. The analogy between spectral characteristics of coupled chaotic oscillators and noisy coupled periodic oscillators is drawn.



Вадивасова Татьяна Евгеньевна – родилась в 1958 году. Окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981), доктор физико-математических наук. В настоящее время - профессор кафедры радиоп физики и нелинейной динамики СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических осцилляторов, явление фазовой мультстабильности взаимодействующих хаотических систем, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, статистические характеристики динамического хаоса, роль флуктуаций в нелинейных системах и др. Автор более 60 публикаций в отечественной и зарубежной печати, включая 3 монографии.
E-mail: tanya@chaos.ssu.runnet.ru



Захарова Анна Сергеевна – инженер учебной лаборатории кафедры радиоп физики и нелинейной динамики. Область научных интересов: теория динамического хаоса, статистические характеристики хаоса, стохастические процессы в нелинейных системах, влияние случайного воздействия на динамику нелинейных систем. Имеет 9 научных публикаций по данному направлению.



**ВЫДЕЛЕНИЕ НЕУСТОЙЧИВЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ
ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЙ
ДИНАМИКИ ПРОСТРАНСТВЕННО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ
ХАОТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ**

А.А. Короновский, А.Е. Храмов

В работе предложен метод выделения неустойчивых периодических пространственно-временных состояний хаотической динамики пространственно распределенных систем, аналогичных неустойчивым орбитам хаотических аттракторов систем с малым числом степеней свободы. Предложенный метод применен к анализу пространственно-временного хаоса в пучково-плазменной системе со сложным поведением – гидродинамической модели диода Пирса.

При исследовании сложной динамики хаотических систем с малым числом степеней свободы одной из важных характеристик оказываются наборы неустойчивых периодических орбит, встроенных в хаотический аттрактор. Неустойчивые периодические орбиты (НПО) представляют собой седловые периодические решения уравнений, описывающих исследуемую динамическую систему. Интерес к НПО хаотических аттракторов определяется, во-первых, тем, что набор НПО является важной характеристикой динамической системы, позволяя сделать выводы о сложности хаотического режима [1–3]. Во-вторых, особенности динамики связанных хаотических систем в терминах неустойчивых периодических орбит часто используются для объяснения особенностей различных типов хаотической синхронизации, в частности, полной [4], фазовой синхронизации [5], синхронизации временных масштабов [23]. В-третьих, знание НПО имеет большое прикладное значение в задачах управления хаосом, под которым понимаются методы стабилизации НПО малыми воздействиями на систему с помощью различных типов обратной связи. В частности, в методе непрерывной обратной связи [7], наиболее часто используемом на практике, для такой стабилизации необходимо знать траекторию в фазовом пространстве, соответствующую НПО. Для нахождения НПО используется либо метод построения распределения времен возврата [8], либо метод, предложенный P. Schmelcher и F. Diakonov (SD-метод) [9, 10].

В пространственно распределенных хаотических системах аналогом НПО являются неустойчивые периодические пространственно-временные состояния

(НППВС) [11–14], которые также могут быть использованы для управления хаотической динамикой распределенных систем. Так, в работах [12, 14, 15] исследовалось управление сложной хаотической динамикой распределенных пучково-плазменных систем путем стабилизации НППВС. В [12, 14, 16] для нахождения НППВС модели хаотической пучково-плазменной системы (диод Пирса в режиме с образованием виртуального катода и полного прохождения электронов) был использован метод построения распределений времен возврата, аналогичный соответствующему методу для систем с малым числом степеней свободы [8], однако такой подход недостаточно точен и требует больших численных затрат для построения соответствующих распределений.

В данной работе мы предлагаем использовать для выделения НППВС SD-метод [9, 10], адаптированный для анализа распределенной системы. В качестве исследуемой модели рассмотрим гидродинамическую модель диода Пирса, которая является одной из эталонных моделей с хаотической динамикой [17–21].

Динамика электронного потока в диоде Пирса в рамках гидродинамического приближения описывается самосогласованной системой уравнений движения, непрерывности и уравнения Пуассона относительно безразмерных переменных [17]

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \alpha^2(\rho - 1) \quad (1)$$

с граничными условиями: $v(0, t) = 1$, $\rho(0, t) = 1$, $\varphi(0, t) = \varphi(1, t) = 0$. В уравнениях (1) гидродинамической теории диода Пирса использованы безразмерные переменные: потенциал поля пространственного заряда φ , плотность ρ , скорость электронного потока v , координата x и время t , которые связаны с размерными переменными соотношениями $\varphi' = (v_0^2/\eta)\varphi$, $\rho' = \rho_0\rho$, $v' = v_0v$, $x' = Lx$, $t' = (L/v_0)t$, где штрихом обозначены размерные величины, η – удельный заряд электрона; α – параметр Пирса, имеющий смысл относительного угла пролета электронов по плазменной частоте ω_p (подробнее см. [17]).

Рассмотрим процедуру выделения НППВС с помощью SD-метода применительно к распределенной системе.

На первом этапе исследования восстанавливается вектор состояния \mathbf{R} системы в фазовом пространстве. Известно [17–20], что размерность N фазового пространства хаотических колебаний в диоде Пирса может быть приближенно оценена как $N = 3$, что косвенно подтверждается расчетом размерности аттракторов [19] и построением конечномерной модели методом Галеркина [21]. В качестве вектора состояния в данном случае использовался вектор, составленный из значений плотности пространственного заряда, снимаемых из различных точек пространства взаимодействия: $\mathbf{R}(t) = \{\rho(x = 0.25, t), \rho(x = 0.5, t), \rho(x = 0.75, t)\}^T$.

Важным моментом здесь является однозначное соответствие между восстановленным вектором $\mathbf{R}(t_0)$ в конечномерном фазовом пространстве и пространственным состоянием распределенной системы $\mathbf{U}(t_0) = \langle \rho(x, t_0), v(x, t_0), \varphi(x, t_0) \rangle^T$ в произвольный момент времени $t = t_0$. Для анализа такого соответствия в работе использовался метод ближайших соседей [22], с помощью которого было показа-

но, что расстояние $d(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2\|$ между двумя векторами $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}(t_1)$ и $\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}(t_2)$ в моменты времени t_1 и t_2 близко к нулю только тогда, когда расстояние между двумя пространственными состояниями

$$S(\mathbf{U}(t_1), \mathbf{U}(t_2)) = \left(\int_0^1 \|\mathbf{U}(x, t_1) - \mathbf{U}(x, t_2)\|^2 dx \right)^{1/2} \quad (2)$$

также близко к нулю. Здесь $\|\cdot\|$ суть Евклидова норма в пространстве \mathbb{R}^n . Согласно методу ближайших соседей это означает однозначное соответствие между состоянием исходной распределенной системы $\mathbf{U}(x, t)$ и восстановленным вектором $\mathbf{R}(t)$, поэтому мы можем использовать восстановленный аттрактор в конечномерном фазовом пространстве для нахождения НППВС с помощью SD-метода.

Далее для нахождения неустойчивой орбиты и соответствующего ей неустойчивого периодического пространственно-временного состояния в восстановленном фазовом пространстве выбирается некоторая произвольная плоскость (в данном случае $\rho(x = 0.25, t) = 1.0$), которая рассматривается как плоскость сечения Пуанкаре. Обозначим состояние системы, соответствующее моменту n -го пересечения фазовой траекторией выбранного сечения Пуанкаре, как \mathbf{R}_n (отметим, что данное пересечение происходит в некоторый момент времени t_n). Тогда описание поведения системы можно свести к дискретному отображению вида

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{G}(\mathbf{R}_n), \quad (3)$$

где $\mathbf{G}(\cdot)$ – оператор эволюции. Очевидно, что аналитическое выражение для оператора \mathbf{G} найти невозможно, однако, численно интегрируя исходную систему гидродинамических уравнений (1), возможно найти последовательность значений $\{\mathbf{R}\}_n$, получающуюся из отображения (3).

SD-метод для нахождения неустойчивых периодических орбит предполагает исследование модифицированной модели распределенной системы, которая описывалась бы следующим отображением [10]:

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_n + \lambda C [\mathbf{G}(\mathbf{R}_n) - \mathbf{R}_n]. \quad (4)$$

В работах [9, 10] строго показано, что подобная модифицированная система в случае анализа дискретных систем и систем с малым числом степеней свободы позволяет эффективно стабилизировать неустойчивые периодические орбиты исходной системы, которые в случае модифицированной системы (4) из седловых становятся устойчивыми по всем направлениям. Применение SD-метода к анализу распределенной системы также оказывается эффективным для выделения НППВС.

В уравнении (4) $\lambda = 0.1$ – константа метода и C – матрица, которая была выбрана, следуя работе [10]

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Модифицированное отображение (4) позволяет определить только неустойчивое периодическое состояние наименьшего периода T_1 , которому соответствует единственное прохождение системой за период T_1 выбранного сечения Пуанкаре. Для нахождения неустойчивых периодических состояний с периодом T_p более высокого порядка, которые характеризуются прохождением фазовой траекторией сечения Пуанкаре p раз за период T_p , необходимо рассматривать модифицированное отображение вида

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_n + \lambda C [\mathbf{G}^p(\mathbf{R}_n) - \mathbf{R}_n], \quad (6)$$

где $\mathbf{G}^p(\cdot)$ – p раз проитерированное отображение $\mathbf{G}(\cdot)$ (то есть при численном решении исходной системы гидродинамических уравнений и восстановлении отображения (6) следует рассматривать только каждое p -е пересечение фазовой траектории плоскости сечения Пуанкаре, где p – очевидно, целое.

Таким образом, численно итерируя отображение (6) при различных значениях p , удается найти неустойчивые периодические пространственно-временные состояния, которые в модифицированной системе, описываемой отображением (6), оказываются устойчивыми. Поэтому результатом интегрирования модифицированной системы (которая представляет собой систему гидродинамических уравнений с учетом отображения (6)) оказывается периодическое решение, соответствующее неустойчивому периодическому состоянию в исходной системе.

При численном интегрировании модифицированной системы возникает единственная сложность, определяемая тем, что при нахождении состояния \mathbf{R}_{n+1} в момент времени t^{n+1} в соответствии с формулой (6) известны только координаты этого состояния в сечении Пуанкаре, но не определены соответствующие ему пространственные распределения плотности пространственного заряда $\rho(x, t^{n+1})$, скорости $v(x, t^{n+1})$ электронного потока и потенциала $\varphi(x, t^{n+1})$. Для нахождения данных пространственных распределений была использована следующая процедура. Система гидродинамических уравнений, описывающая диод Пирса, интегрировалась до тех пор, пока некоторое состояние \mathbf{R}_s системы не совпадало с искомым состоянием \mathbf{R}_{n+1} с некоторой заданной точностью: $\|\mathbf{R}_{n+1} - \mathbf{R}_s\| < \delta = 10^{-3}$. При выполнении данного условия пространственные распределения, соответствующие состоянию \mathbf{R}_s , принимались за пространственные распределения состояния \mathbf{R}_{n+1} и далее делалась очередная итерация в соответствии с формулой (6).

Обратимся к результатам выделения неустойчивых пространственно-временных состояний хаотической динамики диода Пирса SD-методом. На рис. 1, *a* показана пространственно-временная динамика плотности пространственного заряда пучка в диоде Пирса в режиме развитых хаотических колебаний при $\alpha = 2.858\pi$. Как показало исследование неустойчивых пространственно-временных состояний, модифицированная процедура SD-метода применительно к распределенной системе оказывается сходящейся и позволяет находить искомые периодические пространственно-временные состояния. Сходимость процедуры иллюстрирует рис. 1, *б*, на котором показана зависимость значений плотности пространственного заряда $\rho_n(x = 0.75)$ в момент прохождения изображающей точкой в фазовом пространстве сечения Пу-

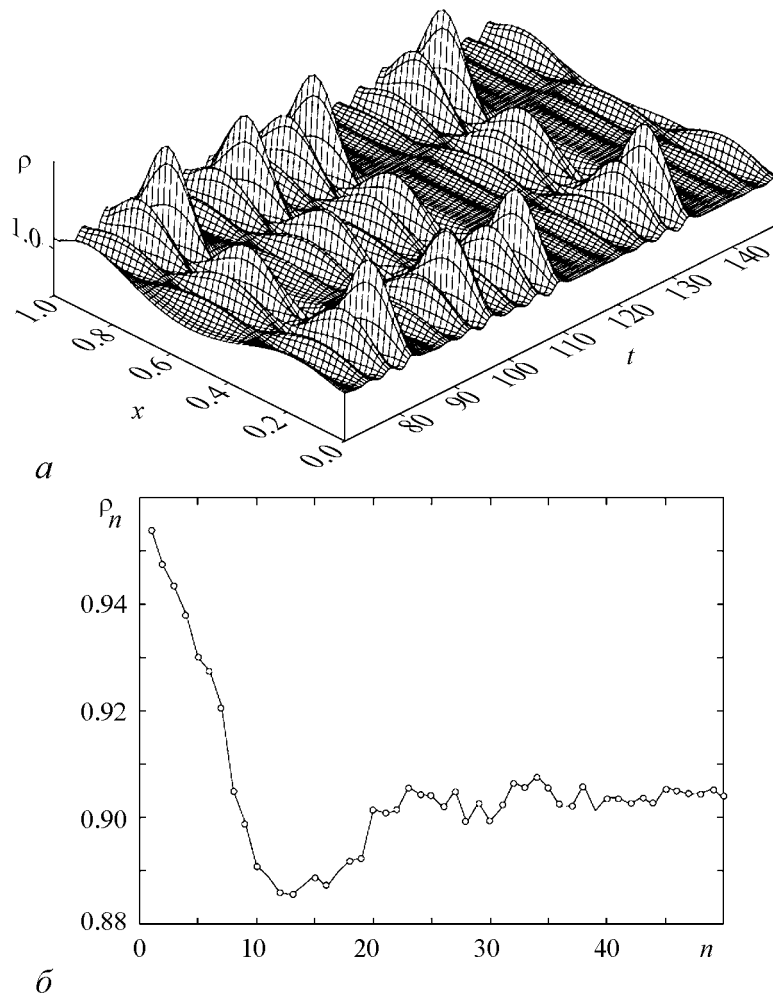


Рис. 1. *a* – Пространственно-временное распределение плотности пространственного заряда $\rho(x, t)$ в исследуемом режиме колебаний при $\alpha = 2.858\pi$, когда в диоде Пирса наблюдается пространственно-временной хаос. *б* – Зависимость значений плотности пространственного заряда ρ в момент прохождения изображающей точки в псевдофазовом пространстве сечения Пуанкаре от номера итерации SD-метода при выделении орбиты первого порядка ($p = 1$, период $T = 4.2$). Параметр Пирса $\alpha = 2.858\pi$

анкаре от номера n итерации SD-метода при выделении неустойчивого состояния первого порядка ($p = 1$). Хорошо видно, что итерационный процесс SD-метода сходится к определенному значению, соответствующему неустойчивому периодическому во времени пространственно-временному состоянию системы.

На рис. 2 показаны пространственно-временные распределения плотности пространственного заряда $\rho^T(t)$, соответствующие НППВС с различными порядками p (и, соответственно, периодами T), выделенные SD-методом. Отметим, что полученные пространственно-временные распределения находятся в очень хорошем соот-

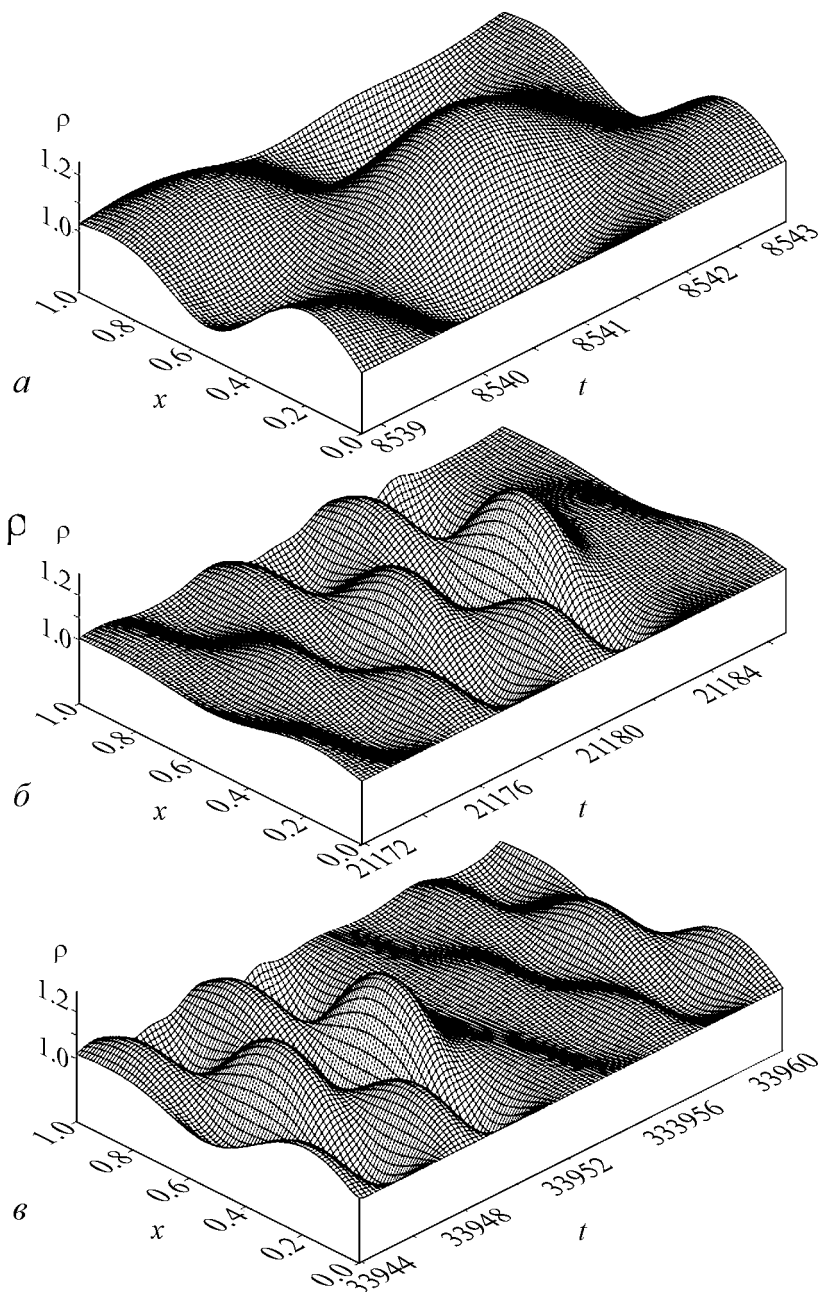


Рис. 2. Пространственно-временные распределения плотности пространственного заряда $\rho(x, t)$ электронного пучка, соответствующие различным неустойчивым периодическим пространственно-временным состояниям при $\alpha = 2.858\lambda$, выделенным SD-методом: $a - T = 4.2$ ($p = 1$), $б - T = 16.9$ ($p = 3$), $в - T = 18.9$ ($p = 4$)

ветствии с распределениями неустойчивых состояний, найденными в работах [11] из анализа распределений времен возврата.

Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований (проекты 05-02-16273 и 06-02-81013), Президентской программой поддержки Ведущих научных школ РФ (проект НШ-4167.2006.2), а также ФНИ «Династия» и МЦФФМ.

Библиографический список

1. Cvitanović P. Periodic orbits as the skeleton of classical and quantum chaos // *Physica D*. 1991. Vol. 51. P. 138.
2. Barreto E., Hunt B.R., Grebogi C., Yorke J.A. From high dimension chaos to stable periodic orbits: The structure of parameter space // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78(24). P. 4561.
3. Carroll T.L. Approximating chaotic time series through unstable periodic orbits // *Phys. Rev. E*. 1999. Vol. 59 (2). P. 1615.
4. Pikovsky A.S., Grassberger P. Symmetry breaking bifurcation for coupled chaotic attractors // *J. Phys. A*. 1991. Vol. 24. P. 4587.
5. Pikovsky A.S., Zaks M., Rosenblum M.G., Osipov G.V., Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillators in terms of periodic orbits // *Chaos*. 1997. Vol. 7 (4). P. 680.
6. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Moskalenko O.I. Synchronization of spectral components and its regularities in chaotic dynamical systems // *Phys. Rev. E*. 2005. Vol. 71 (5). P. 056204.
7. Pyragas K. Continuous control of chaos, by self-controlling feedback // *Phys. Lett. A*. 1992. Vol. 170. P. 421.
8. Lathrop D.P., Kostelich E.J. Characterization of an experimental strange attractor by periodic orbits // *Phys. Rev. A*. 1989. Vol. 40 (7). P. 4028.
9. Schmelcher P., Diakonov F.K. Detecting unstable periodic orbits of chaotic dynamical systems // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79 (25). P. 4734.
10. Pingel D., Schmelcher P., Diakonov F.K. Detecting unstable periodic orbits in chaotic continuous-time dynamical systems // *Phys. Rev. E*. 2001. Vol. 64 (2). P. 026214.
11. Короновский А.А., Ремпен И.С., Храмов А.Е. Исследование неустойчивых периодических пространственно-временных состояний в распределенной автоколебательной системе со сверхкритическим током // *Изв. РАН, сер. физич.* 2003. Т. 67 (12). С. 1705.
12. Ремпен И.С., Храмов А.Е. Стабилизация неустойчивых периодических состояний хаотической динамики в диоде Пирса // *Изв. РАН, сер. физич.* 2004. Т. 68 (12). С. 1789.
13. Franceschini G., Bose S., Schöll E. Control of chaotic spatiotemporal spiking by time-delay autosynchronization // *Phys. Rev. E*. 1999. Vol. 60 (5). P. 5426.
14. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Rempen I.S. Controlling chaos in spatially extended beam-plasma system by the continuous delayed feedback // *Chaos*. Vol. 16 (1) P. 013123.
15. Friedel H., Grauer R., Spatschek H.K. Controlling chaotic states of a Pierce diode // *Physics of plasmas*. 1998. Vol. 5 (9). P. 3187.
16. Анфиногентов В.Г. Хаотические колебания в электронном потоке с виртуальным катодом // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1994. Т. 2, № 5. С. 69.
17. Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. Т. 1. М.: Физматлит, 2003.
18. Godfrey B.B. Oscillatory nonlinear electron flow in Pierce diode // *Phys. Fluids*. 1987. Vol. 30. P. 1553.
19. Анфиногентов В.Г., Трубецков Д.И. Хаотические колебания в гидродинамической модели диода Пирса // *Радиотехника и электроника*. 1992. Т. 37. С. 2251.

20. *Matsumoto H., Yokoyama H., Summers D.* Computer simulations of the chaotic dynamics of the Pierce beam-plasma system // *Phys. Plasmas*. 1996. Vol. 3 (1). P. 177.
21. *Hramov A.E., Rempen I.S.* Investigation of the complex dynamics and regime control in Pierce diode with the delay feedback // *Int. J. Electronics*. 2004. Vol. 91 (1). P. 1.
22. *Pecora L.M., Carroll T.L., Heagy J.F.* Statistics for mathematical properties of maps between time series embeddings // *Phys. Rev. E*. 1995. Vol. 52 (4). P. 3420.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию 10.01.2007

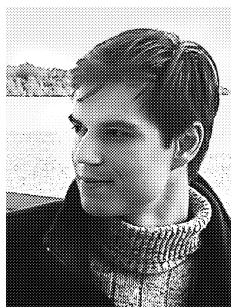
DETECTION OF UNSTABLE PERIODICAL SPATIO-TEMPORAL STATES OF SPATIAL EXTENDED CHAOTIC SYSTEMS DYNAMICS

A.A. Koronovskii, A.E. Hramov

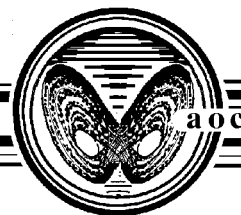
The method of detection of the unstable periodic spatio-temporal states of spatial extended chaotic systems dynamics is proposed. The application of this method is illustrated by the consideration of the fluid model of Pierce diode which is one of the base system of plasma physics and of microwave electronics.



Короновский Алексей Александрович – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995), кандидат физико-математических наук (1997). Доцент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой деятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. Автор ряда статей в центральной печати, а также монографий (в соавторстве) «Нелинейная динамика в действии» и «Непрерывный вейвлетный анализ», вышедших в Издательстве ГосУНЦ «Колледж».



Храмов Александр Евгеньевич – окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1996). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1999) и доктора (2006) физ.-мат. наук. Профессор, заместитель заведующего кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов – радиофизика в той ее части, которая связана со взаимодействием свободных электронов с электромагнитными полями, нелинейная динамика распределенных активных сред, методы анализа и моделирования динамических систем. Опубликовал в соавторстве с чл.-корр. РАН, профессором Д.И. Трубецковым книгу «Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков» (Т. 1, М.: Физматлит, 2003; Т. 2, М.: Физматлит, 2004) и в соавторстве с доцентом А.А. Короновским монографии «Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения» (Москва: Наука, Физматлит, 2003) и «Непрерывный вейвлетный анализ в приложениях к задачам нелинейной динамики» (Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2002).
E-mail: aeh@cas.ssu.runnet.ru



ПРИМЕНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОГО ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА ПЕРЕМЕЖАЮЩЕГОСЯ ПОВЕДЕНИЯ

*А.А. Короновский, И.М. Минюхин, А.А. Тыщенко, А.Е. Храмов,
И.С. Мидзяновская, Е.Ю. Ситникова, G. van Luijelaar, С.М. van Rijn*

В данной работе предлагается эффективный метод анализа сигналов при помощи непрерывного вейвлет-преобразования. Рассматривается применение данного метода для определения длительности ламинарных и турбулентных фаз движения для перемежающегося поведения различных типов, включая анализ временных рядов, порожденных живыми системами. Показано, что предложенный метод обладает высокой устойчивостью к шумам и флуктуациям, искажающим исходную временную реализацию.

Введение. Обсуждение проблемы

Многие процессы в природе и физике носят перемежающийся характер. В частности, в гидродинамике в ряде случаев при больших числах Рейнольдса можно наблюдать перемежающуюся структуру течения [1]. Перемежаемость является одним из классических сценариев перехода от периодических колебаний к хаотическим [1, 2]. При этом сигнал представляет собой последовательность чередующихся регулярных (ламинарных) фаз и нерегулярных всплесков (турбулентные фазы). Число нерегулярных всплесков нарастает при увеличении управляющего параметра до тех пор, пока движение в системе полностью не хаотизируется. Перемежающееся поведение наблюдается вблизи границы возникновения режимов хаотической синхронизации связанных осцилляторов [3–5]; чередование судорожной активности и «нормального» функционирования мозга у животных, генетически предрасположенных к абсанс эпилепсии, также представляет собой перемежаемость [6]. Существует определенная классификация перемежающегося поведения, в частности, выделяют перемежаемость типа I–III [7, 8], on–off перемежаемость [9], перемежаемость типа «игольное ушко» [10].

При исследовании перемежаемости важной проблемой является задача о выделении в сигналах временных интервалов, соответствующих различным типам динамики систем, демонстрирующих перемежающееся поведение (задача о диагностике ламинарных и турбулентных фаз). Как правило, участки временной реализации, на которых наблюдается поведение, близкое к регулярному (так называемые ламинарные фазы), выделяются легче, нежели участки с нерегулярным (турбулентным)

поведением. Классическими методами выделения регулярных фаз движения являются методы, основанные на анализе «текущего» периода колебаний или амплитуды системы. Первый метод может работать лишь тогда, когда ламинарная фаза представляет сигнал, очень близкий к строго регулярному, что имеет место далеко не всегда. Второй метод может быть применен только в том случае, когда турбулентная фаза характеризуется существенно большей амплитудой колебаний по сравнению с ламинарной фазой. В этом случае обычно поступают следующим образом: для наблюдаемой величины задается определенное пороговое значение Δ и пока состояние системы характеризуется значением, по абсолютной величине превышающим этот порог, считается, что в системе реализуется турбулентная фаза, а когда значение, описывающее состояние системы, оказывается ниже порогового – ламинарная. Подобный подход применялся, например, при анализе перемежающегося поведения на границе синхронизации с запаздыванием (см., например, [11]). В этом случае анализируемый сигнал $u(t)$ представлял собой разность состояний двух взаимодействующих систем, сдвинутых друг относительно друга на время запаздывания τ : $u(t) = x_1(t) - x_2(t - \tau)$. В те моменты времени, когда поведение систем было синхронизовано, величина $u(t)$ была близка к нулю (ламинарная фаза), а когда синхронизация разрушалась (турбулентная фаза), величина $u(t)$ изменялась в достаточно широких пределах. Однако в данном случае недостаток метода заключается в том, что в течение турбулентной фазы движения величина $u(t)$ может пересекать нулевое значение, то есть оказываться как выше, так и ниже порога Δ . В свою очередь, это приводит к погрешности выделения турбулентных фаз, так как каждая турбулентная фаза оказывается разделенной на несколько частей и, плюс ко всему, появляются ошибочно диагностированные короткие ламинарные фазы. Таким образом, получается погрешность при анализе статистических свойств перемежающегося поведения (определение средней длительности, законов распределения ламинарных и турбулентных фаз).

В работе [12] для исследования перемежающегося поведения предлагалось использовать непрерывное вейвлет-преобразование, которое является эффективным средством анализа временных реализаций, характеристики которых изменяются с течением времени [13–15]. Метод, предложенный в [12], хорошо работает только если поведение системы в ламинарной фазе является регулярным и имеет одну и ту же структуру в любой момент времени ламинарной фазы системы. Суть метода заключается в следующем: определяется число максимумов вейвлет-поверхности в каждый момент времени t , и интервалы времени, в течение которых число максимумов на вейвлет-поверхности не изменяется, считаются ламинарными фазами, а другие, соответственно, – турбулентными. Однако данный метод оказывается неприемлемым для систем, у которых амплитуда сигнала изменяется в широком диапазоне, а ламинарная фаза непериодична (в этом случае число максимумов в течение ламинарной фазы для любого момента времени различно). В частности, такой режим наблюдается при анализе перехода к синхронному поведению хаотических осцилляторов [11]. Для данного класса связанных хаотических систем также был предложен метод анализа [16], однако и он имел жесткие ограничения – для его применения было необходимо, чтобы во время турбулентной фазы (асинхронная динамика связанных осцилляторов) основная энергия вейвлет-спектра $E(s, t)$ колебаний приходилась на два основных характерных временных масштаба $s_{1,2}$, что также оказалось неприемлемым для широкого круга систем.

В настоящей работе предложен новый универсальный метод выделения ламинарных и турбулентных фаз, основанный на непрерывном вейвлет-преобразовании и позволяющий проводить эффективный анализ временных реализаций систем, демонстрирующих явление перемежаемости. Следует отметить, что данный метод может быть с успехом применен для анализа различных типов перемежающегося поведения в разных системах (как с непрерывным, так и с дискретным временем), включая живые системы.

Структура настоящей работы следующая: в разделе 1 описывается предлагаемый метод. Применение этого метода для анализа перемежающегося поведения различных систем рассматривается в разделе 2: перемежаемость I типа в динамической системе с непрерывным временем (система Лоренца) рассматривается в подразделе 2.1, а тот же самый тип перемежаемости в системе с дискретным временем (логистическое отображение) – в подразделе 2.2. Явление on-off перемежаемости, наблюдаемое вблизи границы возникновения режима синхронизации с запаздыванием, проанализировано с помощью предложенного метода в подразделе 2.3. В разделе 3 рассматривается устойчивость предложенного метода по отношению к шумам и флуктуациям, существующим в анализируемых сигналах. Наконец, использование предлагаемого метода для анализа перемежающегося поведения в спонтанной неконвульсивной судорожной активности у крыс изложено в разделе 4. Обобщающие замечания и выводы приведены в Заключении.

1. Метод выделения ламинарных и турбулентных фаз

Предлагаемый в работе метод выделения различных фаз в поведении системы, демонстрирующей перемежающееся поведение, основан на непрерывном вейвлет-преобразовании анализируемого временного сигнала $x(t)$ [13]

$$W(t, s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') \psi^* \left(\frac{t-t'}{s} \right) dt', \quad (1)$$

где $\psi(\eta)$ – базисный вейвлет (звездочка обозначает комплексное сопряжение), s – временной масштаб. В качестве базисного использовался вейвлет Морле

$$\psi(\eta) = \pi^{-1/4} e^{j\omega_0 \eta} e^{-\eta^2/2}. \quad (2)$$

Параметр вейвлет-функции ω_0 был выбран равным 2π , что, с одной стороны, обеспечивает хорошее соотношение между локализациями вейвлет-функции во времени и фурье-пространстве [13], а с другой стороны, позволяет легко сопоставлять временные масштабы s вейвлет-преобразования (1) с частотами f спектрального представления сигнала, поскольку для данного значения параметра ω_0 выполняется соотношение $s \approx 1/f$ [13, 17].

По аналогии со спектром мощности фурье-преобразования можно ввести в рассмотрение мгновенное

$$E(s, t) = |W(s, t)|^2 \quad (3)$$

и интегральное

$$\langle E(s) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T |W(s, t)|^2 dt \quad (4)$$

распределение энергии по временным масштабам [13].

Поскольку поведение системы во время турбулентных и ламинарных фаз различается¹, то и структура вейвлет-поверхности $W(t, s)$ в области ламинарных и турбулентных фаз движения также будет существенно различна [12, 13]. Иными словами, энергия вейвлет-спектра $E(s, t)$ будет распределена по характерным временным масштабам s , которые для разных фаз временной реализации $x(t)$ будут разными, причем доля энергии, приходящейся на эти характерные временные масштабы, также будет различаться. Таким образом, можно перейти от анализа структуры вейвлет-поверхности $W(s, t)$ к анализу распределения энергии вейвлет-спектра по характерным временным масштабам. Для выделения ламинарных и турбулентных фаз в каждый момент времени t определяется суммарное значение энергии вейвлет-спектра $w(t)$, приходящейся на выбранный диапазон характерных временных масштабов $s \in S = (s_1; s_2)$

$$w(t) = \int_S E(t, s) ds. \quad (5)$$

Диапазон характерных временных масштабов s , по которым будет находиться величина $w(t)$, определяется рассматриваемой системой, и в каждом конкретном случае должен выбираться на основании мгновенных распределений энергии вейвлет-спектра для различных фаз перемежающегося поведения. В ряде случаев может сложиться ситуация, когда необходимо рассматривать несколько диапазонов временных масштабов S_i , которые однозначно позволяли бы охарактеризовать поведение системы. В этом случае интегрирование (5) должно проводиться по объединению $S = \bigcup_i S_i$ соответствующих диапазонов временных масштабов.

2. Выделение ламинарных и турбулентных фаз в поведении нелинейных систем

Рассмотрим теперь применение предложенного метода для анализа различных типов перемежающегося поведения в эталонных нелинейных системах, таких как система Лоренца, логистическое отображение и связанные системы Ресслера.

2.1. Перемежаемость I типа в системе Лоренца. Начнем рассмотрение использования вышеописанного метода применительно к системе Лоренца [12]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= rx - xz - y, \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{aligned} \quad (6)$$

¹Следует обратить внимание, что для различных типов перемежающегося поведения под «ламинарными» и «турбулентными» фазами будут пониматься разные типы поведения.

Известно, что при значениях управляющих параметров $\sigma = 10, b = 8/3$ и при $r < r^* \cong 166.07$ временная реализация $x(t)$ представляет собой устойчивое периодическое движение. При превышении порога r^* регулярные колебания $x(t)$ (ламинарная фаза) прерываются хаотическими всплесками, которые с ростом r становятся все более и более длительными, пока движение полностью не хаотизируется. Перемежаемость в данной системе классифицируется как перемежаемость I типа [18].

На рис. 1 показаны временная реализация $x(t)$ системы Лоренца (6) при значении бифуркационного параметра $r = 166.14$, соответствующая ей проекция вейвлет-поверхности $|W(t, s)|$ на плоскость (s, t) и энергия вейвлет-спектра $w(t)$, приходящаяся на диапазон характерных временных масштабов $s \in (s_1; s_2)$ ($s_1 = 0.15, s_2 = 2.4$). Наиболее темные участки проекции $|W(t, s)|$ на плоскость (s, t) (рис. 1, б) соответствуют максимумам вейвлет-поверхности, кривая на рисунке ограничивает область влияния краевых эффектов. На проекции вейвлет-поверхности четко выделяются структуры, соответствующие ламинарной и турбулентной фазам перемежающегося поведения во временной реализации. Структура вейвлет-поверхности, соответствующая регулярной фазе движения, имеет профиль $W(t, s)|_{t=\text{const}}$ с двумя глобальными максимумами, соответствующими характерным временным масштабам $s_a \approx 0.4$ и $s_b \approx 1.1$ (см. рис. 2, а, на котором показано мгновенное распределение энергии вейвлет-спектра по временным масштабам $E(s)$). Этим максимумам вейвлет-поверхности соответствуют две темные области на проекции поверхности

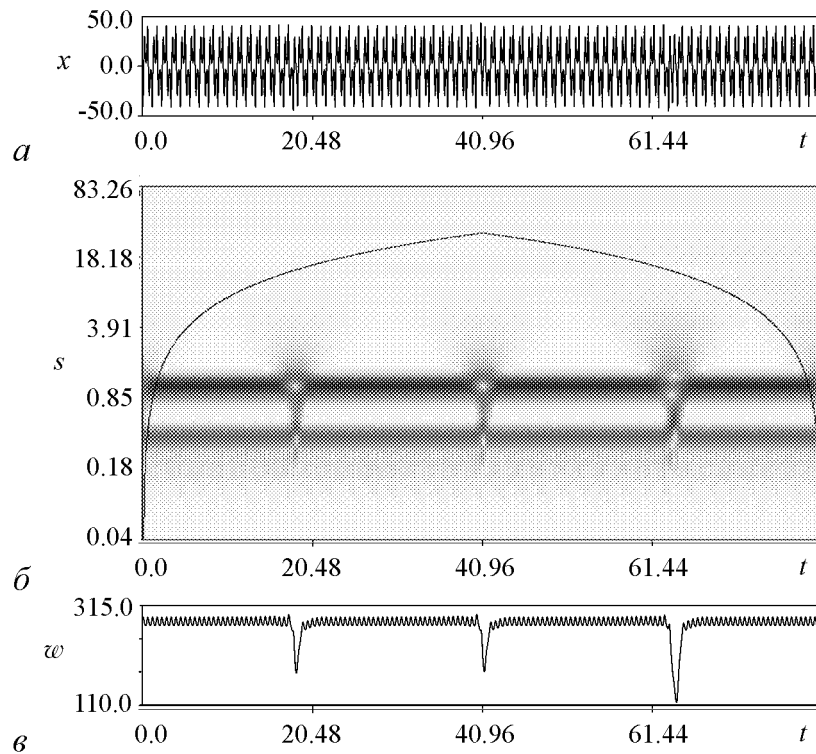


Рис. 1. а – Временная реализация $x(t)$ системы Лоренца (6) при $r = 166.14$. б – Проекция вейвлет-поверхности $|W(t, s)|$ на плоскость (t, s) для временной реализации $x(t)$. Интенсивность градаций серого цвета пропорциональна абсолютной величине вейвлет-поверхности $|W(s, t)|$. Сплошная линия ограничивает область влияния краевых эффектов, достоверные данные располагаются ниже этой линии [13, 15]. в – Энергия вейвлет-спектра $w(t)$, приходящаяся на диапазон характерных временных масштабов $s \in (0.15, 2.4)$

$|W(t, s)|$, расположенные параллельно оси времени (см. рис. 1, б). Профиль поверхности $|W(t, s)|$ не изменяется с течением времени t в пределах ламинарной фазы. Со входом системы в турбулентную фазу вид поверхности $|W(t, s)|$ сильно изменяется. Можно сказать, что в режиме хаотической динамики наблюдается «всплеск» разно-масштабных колебательных явлений. Это хорошо видно на рис. 2, б: распределение энергии вейвлет-спектра по временным масштабам $E(s)$ существенным образом отличается от распределения, соответствующего ламинарной фазе (ср. с рис. 2, а). Из рис. 1, б видно, что области вейвлет-поверхности, соответствующие турбулентным фазам, четко локализованы во времени [12]. Также видно, что в пределах ламинарной фазы функция $w(t)$ имеет структуру, близкую к периодической, и совершает колебания малой амплитуды. В течение турбулентной фазы $w(t)$ испытывает резкий провал (см. рис. 1, в), что позволяет точно диагностировать различные фазы движения. Моменты времени, в которые величина $w(t)$ оказывается больше порогового значения $\Delta = 250$, считаются ламинарными фазами, а интервалы времени, для которых выполняется условие $w(t) < \Delta$ – турбулентными.

На рис. 3 представлена зависимость средней длительности ламинарной t_L и турбулентной t_T фаз от параметра надкритичности $(r - r^*)$. Благодаря логарифми-

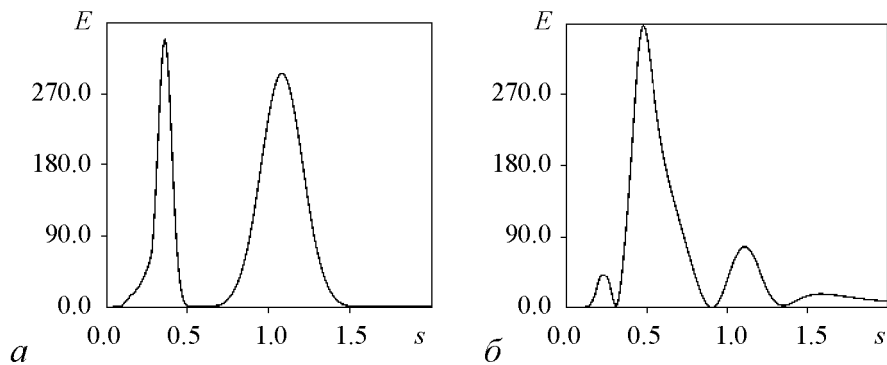


Рис. 2. Профили вейвлет-поверхности $|W(s, t)|$, соответствующие ламинарной (а) и турбулентной (б) фазам временной реализации $x(t)$ системы Лоренца. На профиле вейвлет-поверхности ламинарной фазы отчетливо видны два максимума, соответствующие характерным временным масштабам $s_a \approx 0.4$ и $s_b \approx 1.1$

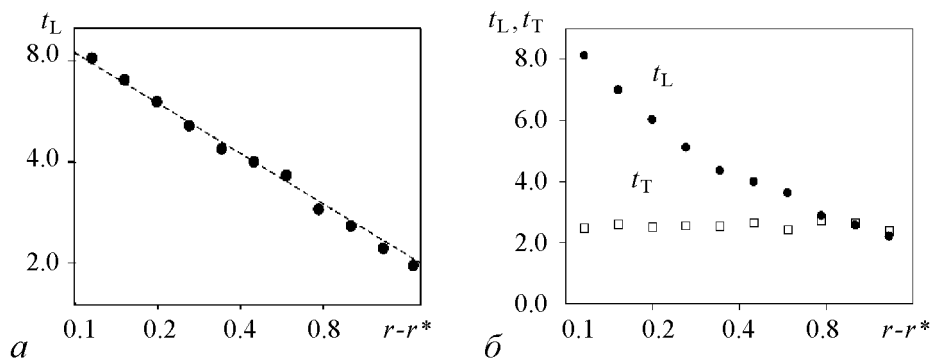


Рис. 3. а – Зависимость средней длительности t_L ламинарных фаз от параметра надкритичности вблизи порога перемежаемости для системы Лоренца (6); пунктирной линией показана степенная зависимость с показателем степени $\alpha = -1/2$. б – Средние длительности t_L ламинарной (\bullet) и t_T турбулентной (\square) фаз колебаний $x(t)$ в системе Лоренца вблизи порога перемежаемости в зависимости от параметра надкритичности

ческому масштабу (рис. 3, *a*) видно, что средняя длительность ламинарной фазы зависит от параметра надкритичности как $t_L \sim (r - r^*)^{-1/2}$. На рис. 3, *б* показаны зависимости средней длительности ламинарной (●) и турбулентной (□) фаз. Видно, что средняя длительность хаотической фазы практически не меняется с увеличением значения параметра надкритичности. Это объясняется тем, что турбулентная фаза движения есть не что иное, как стадия реламинаризации, то есть возвращение к регулярному (ламинарному) движению. Понятно, что длительность реламинаризации определяется системой и практически не зависит от параметра надкритичности. Следует отметить, что полученные результаты по зависимости средней длительности ламинарной фазы от параметра надкритичности хорошо согласуются с теорией перемежаемости I типа [18]. Следует также отметить, что соответствующая зависимость средней длительности турбулентных фаз от параметра надкритичности, как правило, не анализируется, что связано как со сложностью получения аналитических результатов, так и с трудностями выделения турбулентных фаз из анализируемой временной реализации.

2.2. Перемежаемость I типа в логистическом отображении. Рассмотрим теперь применение предложенного метода для выделения ламинарных и турбулентных фаз перемежающегося поведения I типа в системе с дискретным временем. Для этого рассмотрим логистическое отображение вида

$$x_{n+1} = \varepsilon x_n(1 - x_n). \quad (7)$$

При значении управляющего параметра $\varepsilon^* = 1 + \sqrt{8}$ в системе происходит касательная бифуркация цикла периода 3, а ниже по параметру ламинарные фазы (колебания, близкие к периодическим с периодом три) прерываются турбулентными (хаотическими) всплесками.

На рис. 4 показана временная реализация x_n логистического отображения для значения параметра надкритичности $(\varepsilon^* - \varepsilon) = 0.001$, соответствующая ей проекция вейвлет-поверхности $|W(n, s)|$ и функция

$$w_n = \int_S |W(s, n)|^2 ds, \quad (8)$$

построенная для диапазона временных масштабов $s \in (s_1; s_2)$ ($s_1 = 2, s_2 = 4$). Из рисунка видно, что в данном случае структура вейвлет-поверхности в течение ламинарных и турбулентных фаз движения, так же как и для системы Лоренца (6), существенно различается, и функция w_n позволяет достаточно точно диагностировать ламинарные и турбулентные фазы, точно так же, как и для системы с потоковым временем (см. подраздел 2.1.).

Понятно, что все закономерности, характерные для перемежаемости I типа, будут проявляться и для системы с дискретным временем. На рис. 5 представлена зависимость средней длительности ламинарной фазы от параметра надкритичности $(\varepsilon - \varepsilon^*)$, полученная для логистического отображения. Зависимость средней длительности ламинарной фазы от параметра надкритичности также подчиняется степенному закону с показателем степени $\alpha = -1/2$, что полностью соответствует теории перемежаемости I типа [18]. Средняя длительность турбулентной фазы практически не меняется с ростом параметра надкритичности (рис. 5, *б*).

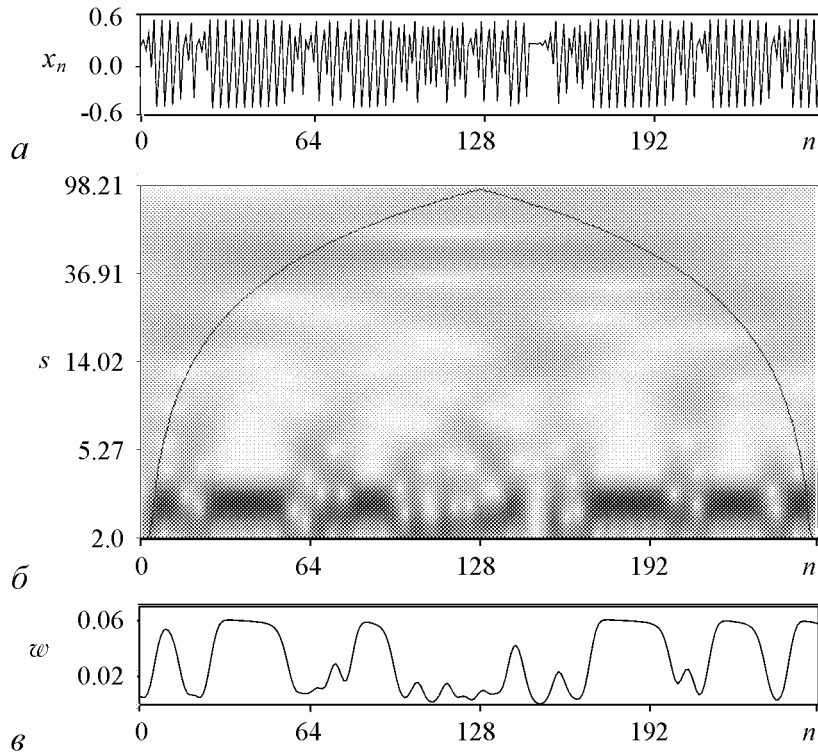


Рис. 4. *a* – Временная реализация x_n логистического отображения (7) при значении параметра надкритичности $(\varepsilon^* - \varepsilon) = 0.001$ и *b* – проекция вейвлет-поверхности $|W(n, s)|$ на плоскость (n, s) для временной реализации x_n . Интенсивность градаций серого цвета пропорциональна абсолютной величине вейвлет-поверхности $|W(s, t)|$. Сплошная линия ограничивает область влияния краевых эффектов, достоверные данные располагаются ниже этой линии. *c* – Мгновенная энергия вейвлет-спектра w_n , приходящаяся на диапазон характерных временных масштабов $s \in (2.0, 4.0)$ в моменты дискретного времени n , пороговое значение было выбрано $\Delta = 0.4$

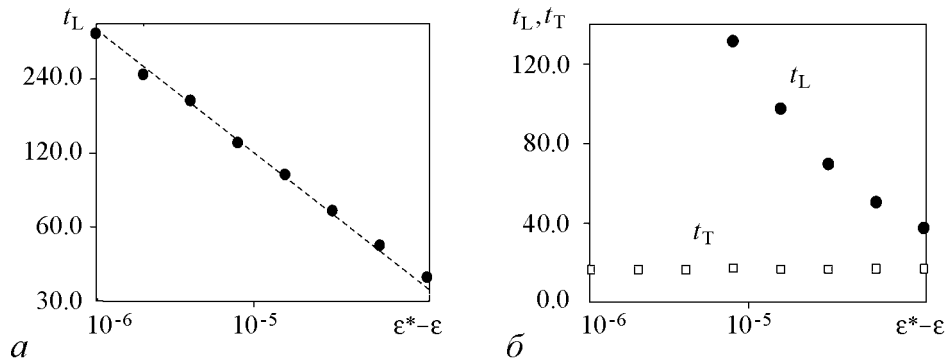


Рис. 5. *a* – Зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности вблизи порога перемежаемости для логистического отображения (7). Пунктирная линия соответствует степенной функции с показателем $\alpha = -1/2$. *b* – Средние длительности t_L ламинарной (\bullet) и t_T турбулентной (\square) фаз колебаний x_n для логистического отображения вблизи порога перемежаемости в зависимости от параметра надкритичности $(\varepsilon - \varepsilon^*)$

2.3. Перемежающаяся синхронизация с запаздыванием в системе связанных осцилляторов Ресслера. До этого момента рассматривались системы (как с непрерывным, так и дискретным временем), в которых наблюдался режим перемежаемости I типа. Покажем теперь применимость данного метода для систем, в которых реализуется перемежающееся поведение принципиально другого класса. Рассмотрим систему осцилляторов Ресслера, связанных двунаправленной связью [3]

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1,2} &= -\omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2} + \varepsilon(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \dot{y}_{1,2} &= \omega_{1,2}x_{1,2} + ay_{1,2}, \\ \dot{z}_{1,2} &= f + z_{1,2}(x_{1,2} - c),\end{aligned}\tag{9}$$

где $\omega_1 = 0.99$, $\omega_2 = 0.95$, $a = 0.165$, $f = 0.2$, $c = 10$. При увеличении параметра связи ε в системе поочередно реализуются режимы фазовой синхронизации, синхронизации с запаздыванием, и при дальнейшем увеличении параметра связи ε системы стремятся к режиму полной синхронизации [19, 20].

Режим *полной синхронизации* характеризуется выполнением для векторов состояния взаимодействующих систем соотношения $|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)| \approx 0$. Режим *синхронизации с запаздыванием* [4] характеризуется тем, что колебания в одной системе отстают от колебаний в другой на некоторый временной сдвиг τ : $\mathbf{x}_2(t + \tau) \approx \mathbf{x}_1(t)$. С увеличением параметра связи между хаотическими системами временной сдвиг τ уменьшается и стремится к нулю, а системы стремятся к режиму полной синхронизации. Переход к режиму синхронизации с запаздыванием сопровождается режимом перемежающейся синхронизации с запаздыванием. Для рассматриваемых систем (9) с указанным набором значений управляющих параметров перемежающееся поведение наблюдается при параметре связи $0.1 < \varepsilon < 0.15$ [4, 11]. В этом случае имеет смысл рассматривать в качестве исследуемого сигнала разность состояний $\mathbf{u}(t) = \mathbf{x}_2(t + \tau) - \mathbf{x}_1(t)$, абсолютная величина которой в случае lag-синхронизации стремится к нулю ($|\mathbf{u}(t)| \rightarrow 0$). В режиме перемежающейся синхронизации с запаздыванием данный сигнал представляет собой последовательность чередующихся участков с малой амплитудой (ламинарных фаз), соответствующих интервалам времени синхронной динамики связанных систем, и нерегулярных всплесков (турбулентных фаз), которые отвечают моментам времени, когда системы демонстрируют асинхронное поведение. Число нерегулярных всплесков уменьшается с увеличением параметра связи. Перемежаемость в данном случае классифицируется как *on-off перемежаемость* [9, 21].

Для определения времени запаздывания τ обычно используют функцию подобия (см. например [3, 4, 11]). Это не совсем удобно, поскольку для различных значений параметра связи ε величины запаздывания τ будут различаться, и, соответственно, процедуру нахождения τ с помощью функции подобия необходимо выполнять для каждого значения параметра связи. В работах [22, 23] было показано, что величина τ для данной системы пропорциональна сдвигу между основными спектральными компонентами спектра Фурье и в зависимости от параметра связи ε подчиняется степенному закону с показателем $\alpha = -1$. Для системы Ресслера (9) с выбранными значениями управляющих параметров было получено $\tau = 0.0418\varepsilon^{-1}$ [16].

На рис. 6 показаны временная реализация $u(t) = x_2(t + \tau) - x_1(t)$ при значении параметра связи $\varepsilon = 0.1$, соответствующая ей проекция вейвлет-поверхности

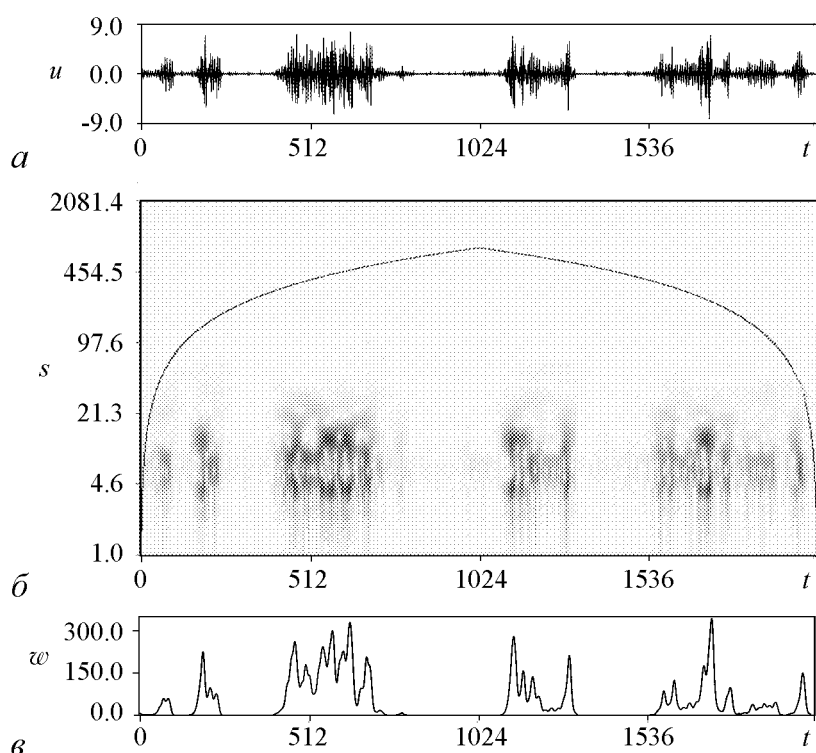


Рис. 6. *а* – Временная реализация $u(t) = x_2(t + \tau) - x_1(t)$ системы двух связанных осцилляторов Ресслера (9) при значении параметра связи $\varepsilon = 0.1$ и *б* – проекция вейвлет-поверхности $|W(t, s)|$ на плоскость (t, s) для временной реализации $u(t)$. По оси абсцисс отложено время t , по оси ординат – временные масштабы s . Интенсивность градаций серого цвета пропорциональна абсолютной величине вейвлет-поверхности $|W(s, t)|$. Сплошная линия ограничивает область влияния краевых эффектов, достоверные данные располагаются ниже этой линии. *в* – Энергия вейвлет-спектра $w(t)$, приходящаяся на диапазон характерных временных масштабов $s \in (5, 15)$

$|W(t, s)|$ и функция $w(t)$, характеризующая значение мгновенной энергии вейвлет-спектра, приходящейся на диапазон характерных временных масштабов $s \in (s_1; s_2)$, $s_1 = 5$, $s_2 = 15$. Вводя в рассмотрение некоторое пороговое значение Δ , можно легко выделить ламинарные и турбулентные фазы в перемежающемся поведении системы (9), которые соответствуют синхронной и асинхронной динамике связанных систем Ресслера в режиме перемежающейся синхронизации с запаздыванием. При анализе функции $w(t)$ были получены зависимости средней длительности ламинарных и турбулентных фаз от параметра надкритичности $(\varepsilon^* - \varepsilon)$, где $\varepsilon^* \approx 0.15$ – порог установления режима синхронизации с запаздыванием. При увеличении параметра надкритичности в диапазоне $0.1 < \varepsilon < 0.15$ число турбулентных (а соответственно, и ламинарных) фаз резко уменьшается, ламинарные фазы становятся более длительными, а турбулентные – более короткими. На рис. 7, *а* в двойном логарифмическом масштабе показана зависимость средней длительности t_L ламинарных фаз от величины параметра надкритичности $(\varepsilon^* - \varepsilon)$. Видно, что средняя длительность ламинарных фаз подчиняется степенному закону $t_L \sim (\varepsilon^* - \varepsilon)^{-1}$, что характерно для режима on-off перемежаемости. На рис. 7, *б* приведена аналогичная зависимость средней длительности t_T турбулентных фаз от параметра надкритичности $(\varepsilon^* - \varepsilon)$ (по оси ординат – масштаб логарифмический). Из рисунка следует, что средняя дли-

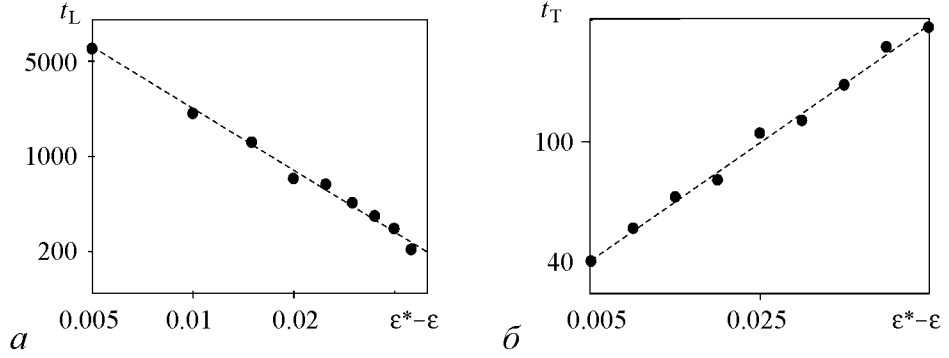


Рис. 7. *a* – Зависимость средней длительности t_L ламинарных фаз от параметра надкритичности вблизи порога возникновения режима синхронизации с запаздыванием для системы (9). Пунктирная линия – степенная функция с показателем $\alpha = -1$. Зависимость приведена в двойном логарифмическом масштабе. *b* – Зависимость средней длительности t_T турбулентной фазы от параметра надкритичности. Пунктирная линия – экспоненциальная функция с показателем, зависящим от параметра надкритичности ($\epsilon^* - \epsilon$). Масштаб по оси абсцисс – логарифмический, по оси ординат – линейный

тельность t_T турбулентных фаз зависит от параметра надкритичности ($\epsilon^* - \epsilon$) по экспоненциальному закону. Следует отметить, что данные результаты хорошо согласуются с полученными ранее [16].

3. Влияние флуктуаций и шумов

Как видно из раздела 2, предложенный метод позволяет очень хорошо выделять ламинарные и турбулентные фазы при различных типах перемежающегося поведения эталонных систем. В то же самое время, почти все временные ряды, полученные в ходе экспериментальных измерений, искажаются за счет влияния различных факторов. Поэтому чрезвычайно важной проблемой, тесно связанной с выделением фаз различной динамики в перемежающемся поведении систем, является учет влияния шумов. Очевидно, что воздействие шумов может приводить к ошибкам в выделении ламинарных и турбулентных фаз, причем число таких ошибок должно расти с увеличением интенсивности шума. В связи с этим возникает вопрос об устойчивости предложенного метода выделения различных фаз перемежающегося поведения к влиянию шумов и флуктуаций. Рассмотрим данный вопрос более подробно.

В качестве исследуемой модели будем рассматривать систему Лоренца (6) со значениями управляющих параметров, указанных в подразделе 2.1. К временной реализации системы Лоренца $x(t)$ будем добавлять случайную величину $\xi(t)$ с нулевым средним, равномерно распределенную на интервале $(-0.5; 0.5)$. Численное моделирование случайной величины $\xi(t)$ осуществлялось так, как это описано в [24]. Интенсивность шума будем характеризовать величиной D

$$x_D(t) = x(t) + D\xi(t). \quad (10)$$

Случай $D = 0$ соответствует поведению системы без шума, выделение ламинарных и турбулентных фаз для которого было подробно рассмотрено в подразделе 2.1. Очевидно, что увеличение D будет приводить к искажениям исходной временной реализации, и, соответственно, ламинарные и турбулентные фазы, определенные

по такому зашумленному временному ряду $x_D(t)$, будут отличаться от фаз, выделенных по временной реализации $x(t)$ исходной системы (6) без шума. Соответственно, исходная временная реализация $x(t)$ может рассматриваться как «эталонная», и, сопоставляя ламинарные и турбулентные фазы, выделенные по временным реализациям $x(t)$ и $x_D(t)$, можно сделать вывод о том, к каким ошибкам в выделении турбулентных и ламинарных фаз приводит добавление шума.

Отметим, что искажения могут быть двух видов. Во-первых, в зашумленной временной реализации $x_D(t)$ может быть обнаружена турбулентная фаза, которой не существует во временной реализации без шума, или наоборот, не найдена турбулентная фаза, присутствующая в исходной временной реализации $x(t)$. Во-вторых, турбулентная фаза по зашумленному временному ряду $x_D(t)$ может быть выделена, но ее длительность, моменты времени возникновения и окончания будут отличаться от истинных, определенных по временной реализации системы без шума $x(t)$.

На рис. 8 показаны временные реализации $x(t)$ и $x_D(t)$ системы Лоренца (6) без добавления шума (рис. 8, а) и при наличии шума с интенсивностью $D = 48$ (рис. 8, б), соответственно. Из рисунка видно, что добавление шума серьезным об-

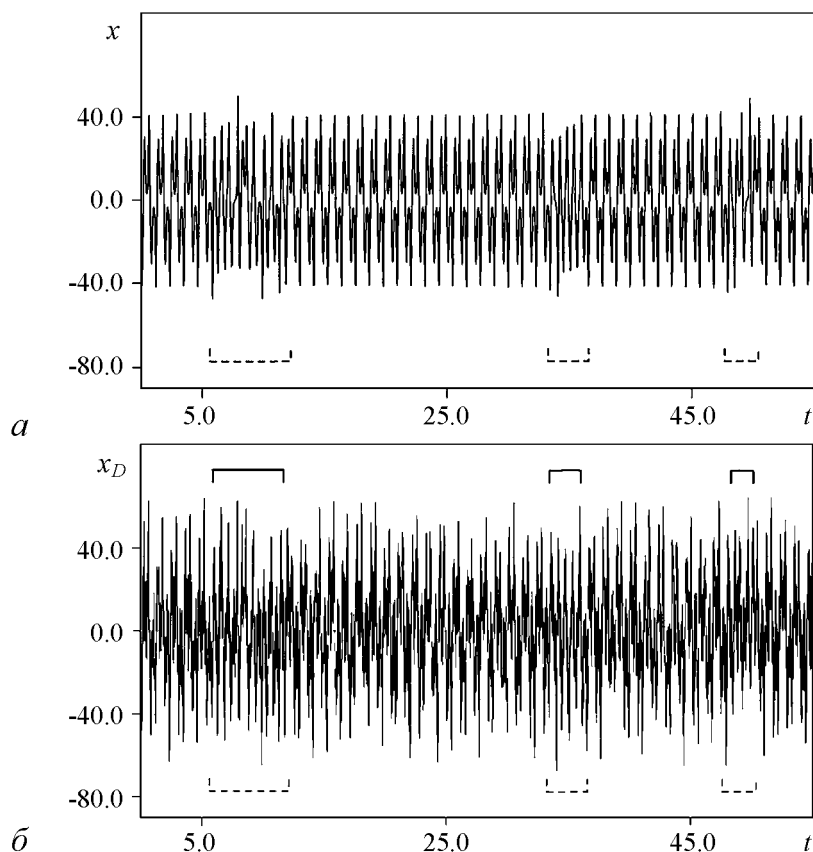


Рис. 8. Временные реализации системы Лоренца (6) для значения управляющего параметра $r = 166.14$: а – $x(t)$ без шума ($D = 0$); б – $x_D(t)$ с добавлением шума (10), интенсивность которого $D = 48$ соответствует примерно половине амплитуды исходного временного ряда. Турбулентные фазы, выделенные по данным временным реализациям методом, описанным в разделе 1, показаны квадратными скобками: пунктирные скобки соответствуют турбулентным фазам, выделенным по временной реализации без шума $x(t)$, сплошные – по временной реализации $x_D(t)$ с шумом интенсивности $D = 48$

разом искажает временной ряд, так что визуально выделить ламинарные и турбулентные фазы не представляется возможным. В то же самое время, используя метод, предложенный в разделе 1, удается легко выделить ламинарные и турбулентные фазы как в исходной, так и в зашумленной временной реализации. На рис. 8 выделенные турбулентные фазы показаны скобками. Из рисунка видно, что, несмотря на значительную интенсивность добавленного шума $D\xi(t)$, предложенный метод позволяет весьма эффективно выделить ламинарные и турбулентные фазы, причем влияние шума приводит, прежде всего, к незначительному изменению диагностирования моментов начала и конца ламинарной фазы. Следует также отметить, что при выделении ламинарных и турбулентных фаз по временной реализации с шумом $x_D(t)$ при больших интенсивностях шума D возникают ошибочно определенные турбулентные фазы с очень короткой длительностью. Эти ошибочно найденные фазы легко могут быть исключены из рассмотрения с помощью анализа длительности турбулентных фаз².

Для того чтобы объективно охарактеризовать ошибки, возникающие при наличии шума, введем в рассмотрение вспомогательную временную реализацию $s(t)$, построенную по анализируемому временному ряду $x(t)$:

$$s(t) = \begin{cases} 1, & \text{для турбулентной фазы,} \\ 0, & \text{для ламинарной фазы.} \end{cases} \quad (11)$$

Очевидно, что произведение $s(t)s_D(t)$ будет равно единице только в те моменты времени t , когда турбулентная фаза выделена как во временной реализации $x_D(t)$ с шумом, так и в исходной временной реализации $x(t)$ без шума. Вводя в рассмотрение оператор $L[\cdot]$

$$L[s(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) dt, \quad (12)$$

можно получить суммарную длину интервалов времени, на которых анализируемая функция $s(t)$ равна единице. Иными словами, $L[s(t)]$ дает суммарную длину всех турбулентных фаз во временной реализации $x(t)$. Очевидно, что $L[s(t)s_D(t)]$ даст суммарную длину всех интервалов времени, для которых турбулентная фаза была выделена как по исходной $x(t)$, так и по зашумленной $x_D(t)$ временным реализациям. Все возникающие ошибки в выделении турбулентных фаз будут приводить к уменьшению величины $L[s(t)s_D(t)]$. Тогда величина

$$\Omega_T = \frac{L[s(t)s_D(t)]}{L[s(t)]} \quad (13)$$

будет характеризовать нормированную ошибку в выделении турбулентных фаз. Понятно, что при нулевом уровне шума $D = 0$ величина Ω_T будет равна единице и по мере возрастания интенсивности шума D эта величина будет уменьшаться.

²В подразделе 2.1 было показано, что средняя длительность турбулентной фазы практически не зависит от величины параметра надкритичности, что определяется механизмами реламинаризации. Очевидно, что существует некоторое характерное время реламинаризации, и турбулентные фазы с очень короткой длительностью будут явным образом отличаться от всех остальных турбулентных фаз.

Аналогично, для того чтобы охарактеризовать ошибку в выделении ламинарных фаз, можно рассмотреть величину

$$\Omega_L = \frac{L[s_D(t)(1 - s(t))]}{L[1 - s(t)]}. \quad (14)$$

Эта величина представляет собой суммарную длительность интервалов времени, на которых ламинарная фаза по временной реализации $x_D(t)$ в присутствии шума была ошибочно определена как турбулентная, нормированная на суммарную длительность ламинарных фаз, выделенных по исходной реализации $x(t)$ без шума. При отсутствии ошибок в выделении ламинарных фаз величина Ω_L будет равна нулю (например, при $D = 0$) и по мере увеличения интенсивности шума и возрастания ошибок в определении ламинарных фаз она будет увеличиваться.

Зависимости нормированных ошибок выделения ламинарных и турбулентных фаз Ω_L и Ω_T приведены на рис. 9. Отчетливо видно, что с увеличением интенсивности шума D количество ошибок в определении ламинарных и турбулентных фаз увеличивается, однако заметные искажения появляются при достаточно больших интенсивностях шума, когда амплитуда случайного сигнала $D\xi(t)$ становится сопоставимой с амплитудой исходного временного ряда $x(t)$.

Таким образом, предложенный метод обладает хорошей устойчивостью по отношению к шумам и флуктуациям и позволяет хорошо выделять ламинарные и турбулентные фазы во временной реализации системы, демонстрирующей перемежающееся поведение даже при достаточно больших интенсивностях шума. При этом основные ошибки связаны с неточным определением моментов времени начала и конца турбулентной фазы.

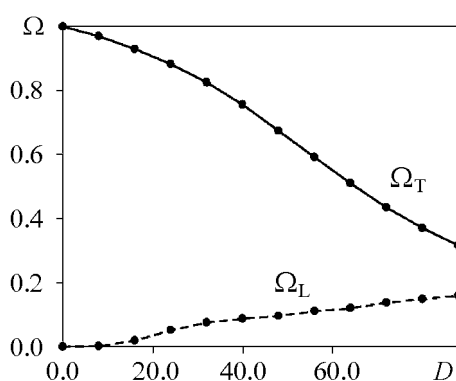


Рис. 9. Зависимость нормированных ошибок в определении ламинарных (пунктирная линия) и турбулентных (сплошная линия) фаз Ω_L и Ω_T от интенсивности шума D . Величина $D = 84$ примерно соответствует случаю, когда амплитуда шума равна амплитуде исходного сигнала $x(t)$

4. Характер перемежающегося поведения в спонтанной неконвульсивной судорожной активности у крыс

Перейдем теперь от рассмотрения модельных систем к изучению поведения сложных реальных систем, демонстрирующих перемежающееся поведение. В качестве такого примера в данной работе приведены результаты анализа временной реализации записей электрической активности головного мозга крыс линии WAG/Rij. Все крысы этой линии имеют генетическую предрасположенность к абсанс эпилепсии. Судорожная активность представлена пик-волновыми разрядами, которые возникают спонтанно, и не сопровождается конвульсиями [25].

В нашем эксперименте запись электрической активности мозга проводили с поверхности коры больших полушарий (электрокортикограмма, ЭКоГ) у интактных

свободно-подвижных крыс посредством хронически вживленных электродов. Частотный диапазон ЭКоГ составил 1–500 Гц, амплитуда сигнала варьировала от 25 до 800 мкВ. Более подробное описание метода приводится в работе [26].

Длительность ЭКоГ записей составляла от 6 часов до 4 суток. В работе были использованы как самцы ($n = 5$), так и самки ($n = 6$) вышеупомянутой линии крыс. Типичная ЭКоГ, регистрируемая в ходе наблюдений, представляла собой чередование низкоамплитудных (от 25 до 100 мкВ) полиритмических участков ЭКоГ, соответствующих «нормальному» функционированию головного мозга (будем называть

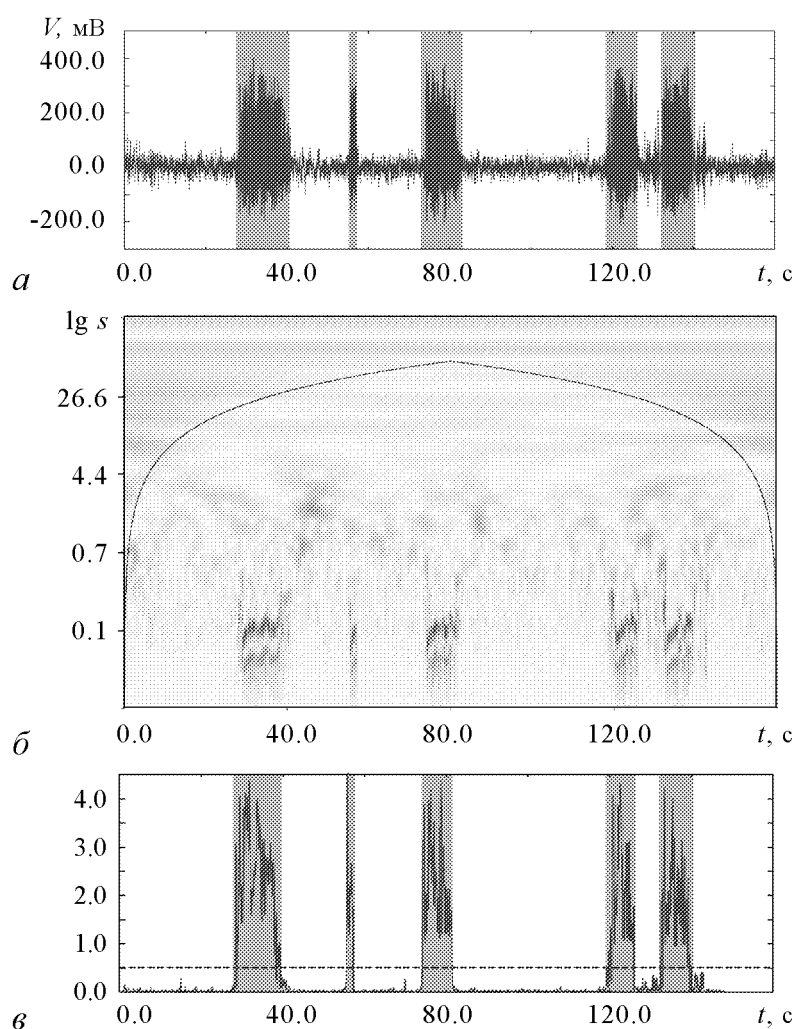


Рис. 10. *a* – Фрагмент электроэнцефалограммы, представляющий собой ламинарные фазы (нормальное поведение), перемежающиеся турбулентными всплесками (эпилептическая активность показана серыми прямоугольниками). *b* – Проекция вейвлет-поверхности $|W(s, t)|$, соответствующая электроэнцефалограмме. По оси абсцисс отложено время t , по оси ординат – временные масштабы s . Интенсивность градаций серого цвета пропорциональна абсолютной величине вейвлет-поверхности $|W(s, t)|$. Сплошная линия ограничивает область влияния краевых эффектов, достоверные данные располагаются ниже этой линии. *в* – Зависимость энергии $w(t)$, приходящейся на диапазон характерных временных масштабов (s_1, s_2). Величина порога $\Delta = 0.5$ показана пунктирной линией

такие участки ламинарными), и участков высокоамплитудной (от 100 до 800 мкВ) генерализованной активности с относительно стабильной несущей частотой от 8 до 12 Гц, соответствующих эпилептическим припадкам (условимся называть эти участки турбулентными фазами).

На рис. 10, *а* приведен фрагмент типичной ЭКоГ, состоящей из фоновой активности (ламинарных фаз), перемежающейся турбулентными всплесками, соответствующими эпилептическим пик-волновым разрядам (серые прямоугольники на рис. 10, *а, в*). Пик-волновые разряды были выделены экспертом по всей длине ЭКоГ на основании критериев, описанных в [25]. Проекция вейвлет-поверхности $|W(s, t)|$ показана на рис. 10, *б*. Отчетливо видно, что фрагменты вейвлет-поверхности, соответствующие ламинарным и турбулентным участкам, оказываются принципиально различными. Зависимость от времени энергии вейвлет-спектра, приходящейся на диапазон временных масштабов $s \in (s_1, s_2)$ ($s_1 = 70$ мс, $s_2 = 110$ мс) показана на рис. 10, *в*. При наступлении турбулентной фазы величина $w(t)$ превышает порог $\Delta = 0.5$, что позволяет легко выделять различные типы поведения во временной реализации. Выбор диапазона временных масштабов (s_1, s_2) обусловлен структурой вейвлет-поверхности $W(s, t)$ в моменты времени, соответствующие ламинарным и турбулентным участкам. Мгновенные распределения энергии вейвлет-спектра $E(s, t)|_{t=t_0}$ для разных участков ЭКоГ показаны на рис. 11.

В результате проведенных исследований было установлено, что чередование судорожной и неэпилептической («нормального» функционирования мозга) активности может быть хорошо описано в рамках динамики on-off перемежаемости [5,9,21]. Такое заключение сделано на основании анализа распределений длительностей фаз «нормального» функционирования мозга (длительностей ламинарных фаз), выделенных из ЭКоГ с помощью вышеописанной методики (см. также [6]).

На рис. 12 показаны распределения $N(t_L)$ длительностей ламинарных фаз для одной из крыс с учетом статистики по всем четырем дням, в течение которых проводились измерения. Распределения построены в двойном логарифмическом масштабе, точками нанесены экспериментальные данные по длительности ламинарных фаз,

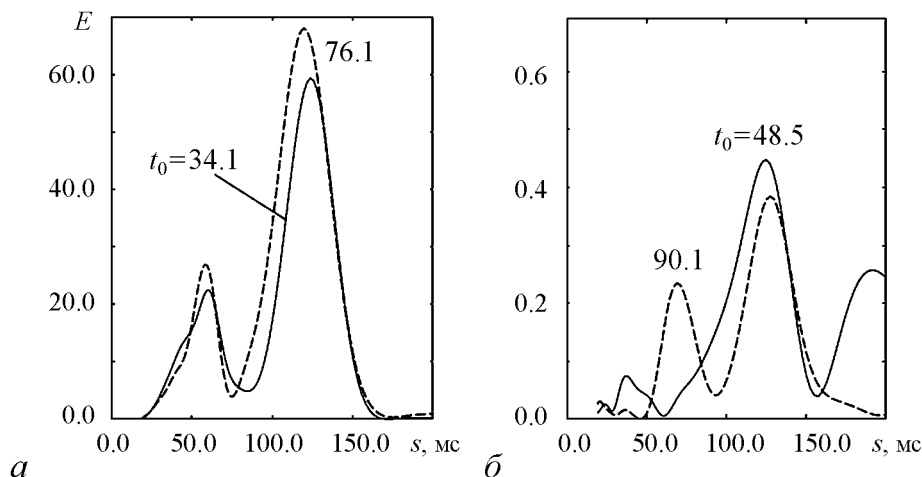


Рис. 11. Типичные распределения энергии вейвлет-спектра по временным масштабам $E(s, t_0)$ для ламинарных (*а*) и турбулентных (*б*) фаз в различные моменты времени t_0 . Обратите внимание, что диапазоны значений величины $E(s)$ различаются на рис. (*а*) и (*б*) в десять раз

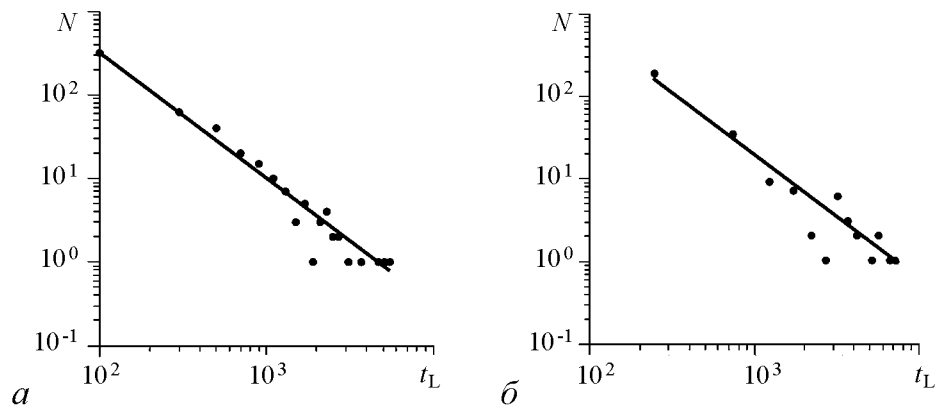


Рис. 12. Распределения N длительностей t_L ламинарных фаз для одной из крыс (в двойном логарифмическом масштабе), точками (\bullet) нанесены данные, полученные в ходе наблюдений. Прямые линии аппроксимируют экспериментально полученные распределения и соответствуют степенной зависимости с показателем степени $\alpha = -3/2$: a – ночное время; b – дневное время

полученные в ходе наблюдений. Поскольку появление судорожной активности зависит от времени суток (наблюдается циркадная периодичность в частоте появления судорог [27]), анализ данных проводился отдельно для светлой и темной фазы светового режима. Рис. 12, a соответствует данным, полученным в ночное время, когда судорожная активность резко возрастает, поэтому статистика получается существенно более богатая). На рис. 12, b показано аналогичное распределение, построенное для судорожной активности, зарегистрированной в дневное время, когда число рядов существенно меньше.

Из рис. 12 видно, что распределения длительностей ламинарных фаз, которые были получены в эксперименте (точки на рисунке), в двойном логарифмическом масштабе близки к прямой линии, характеризующей степенной закон распределения с показателем степени $\alpha = -3/2$. Прямые сплошные линии на рис. 12, a , b аппроксимируют экспериментально полученные распределения и соответствуют степенной зависимости с показателем степени $\alpha = -3/2$. Соответствующие параметры аппроксимации определялись численно путем минимизации среднеквадратичного отклонения теоретического распределения от экспериментальных данных.

Важно отметить, что перемежающееся поведение было диагностировано как для светлого, так и темного периодов, которые сильно различались по интенсивности возникновения судорог. При этом у данных животных в темную фазу число судорог оказывалось большим по сравнению со светлой фазой. Это привело, соответственно, к уменьшению средней длительности ламинарных фаз. В то же самое время, уменьшение среднего значения длительности ламинарных фаз подчинялось тому же степенному закону с показателем степени $\alpha = -3/2$, следовательно, характер распределения длительностей ламинарных фаз не зависел от интенсивности турбулентных фаз.

Аналогичные результаты были получены при анализе судорожной активности данного типа на ЭКоГ всех экспериментальных животных (11 крыс). Таким образом, можно сделать вывод, что чередование судорожной и «нормальной» активности головного мозга крыс WAG/Rij является перемежаемостью on-off типа и подчиняется универсальной закономерности, свойственной для данного типа перемежающегося поведения.

Заключение

В настоящей работе описан метод выделения ламинарных и турбулентных фаз во временных реализациях нелинейных систем, демонстрирующих перемежающееся поведение. Данный метод основан на непрерывном вейвлет-преобразовании и, как следует из данной работы, может быть с успехом применен для изучения различных типов перемежаемости в системах различной природы, включая живые системы (нейронные ансамбли, головной мозг [6, 28], сердечно-сосудистая система человека [29, 30]). Предложенный метод является устойчивым к влиянию шумов и флуктуаций, искажающих исходную временную реализацию. Высокая эффективность предложенного метода обусловлена различающимися характерными временными масштабами, на которые приходится наибольшая доля энергии вейвлет-спектра, во время ламинарных и турбулентных фаз.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проекты 05-02-16273 и 07-02-00044), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-4167.2006.2) и Программы Президиума РАН «Фундаментальные науки – медицине». Авторы благодарят также за финансовую поддержку Фонд некоммерческих программ «Династия».

Библиографический список

1. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991.
2. Manneville P., Pomeau Y. Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems // Physica D. 1980. Vol. 1(2). P. 167.
3. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78(22). P. 4193.
4. Boccaletti S., Valladares D.L. Characterization of intermittent lag synchronization // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62(5). P. 7497.
5. Hramov A.E., Koronovskii A.A. Intermittent generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic oscillators // Europhysics Letters. 2005. Vol. 70(2). P. 169.
6. Короновский А.А., Кузнецова Г.Д., Мидзяновская И.С., Ситникова Е.Ю., Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Закономерности перемежающегося поведения в спонтанной неконвульсивной судорожной активности у крыс // Доклады Академии Наук, 2006.
7. Berge P., Pomeau Y., Vidal Ch. L'Ordre Dans Le Chaos, 1988.
8. Dubois M., Rubio M., Bergé P. Experimental evidence of intermittencies associated with a subharmonic bifurcation // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 51. P. 1446.
9. Platt N., Spiegel E.A., Tresser C. On-off intermittency: a mechanism for bursting // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 70(3). P. 279.
10. Pikovsky A., Osipov G., Rosenblum M., Zaks M., Kurths J. Attractor–repeller collision and eyelet intermittency at the transition to phase synchronization // Phys. Rev. Lett. 1997. 79(1). P. 47.

11. *Zhan M., Wei G.W., Lai C.H.* Transition from intermittency to periodicity in lag synchronization in coupled Rössler oscillators // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 65(3). 036202.
12. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Об эффективном анализе перехода к хаосу через перемежаемость с помощью вейвлетного преобразования // *Письма в ЖТФ.* 2001. Т. 27(1). С. 3.
13. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения // М.: Физматлит, 2003.
14. *Daubechies I.* Ten lectures on wavelets // SIAM, 1992.
15. *Torresani B.* Continuous wavelet transform // Paris: Savoire, 1995.
16. *Короновский А.А., Тыщенко А.А., Храмов А.Е.* Исследование распределения турбулентных фаз при разрушении синхронизации с запаздыванием // *Письма в ЖТФ.* 2005. Т. 31(21).
17. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* An approach to chaotic synchronization // *Chaos.* 2004. Vol. 14(3). P. 603.
18. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
19. *Pecora L.M., Carroll T.L.* Driving systems with chaotic signals // *Phys. Rev. A.* 1991. Vol. 44(4). P. 2374.
20. *Murali K., Lakshmanan M.* Drive-response scenario of chaos synchronization in identical nonlinear systems // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49(6). P. 4882.
21. *Heagy J.F., Platt N., Hammel S.M.* Characterization of on-off intermittency // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49(2). P. 1140.
22. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* Новый тип универсальности при хаотической синхронизации динамических систем // *Письма в ЖЭТФ.* 2004. Т. 80(1). С. 25.
23. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Moskalenko O.I.* Synchronization of spectral components and its regularities in chaotic dynamical systems. *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 71(5). P 056204.
24. *Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.T.* Numerical Recipes // Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
25. *Van Luijtelaar E.L., Coenen A.M.* Two types of electrocortical paroxysms in an inbred strain of rats // *Neurosci Lett.* 1986. Vol. 70(3). P. 393.
26. *Мидзяновская И.С.* Два типа разрядов «пик-волна» на электроэнцефалограмме крыс линии wag/rij, генетической модели absence эпилепсии // *Журн. высш. нерв. деят.* 1999. Т. 49(5). С. 855.
27. *Luijtelaar E.L., Coenen A.M.* Circadian rhythmicity in absence epilepsy in rats // *Epilepsy Res.* 1998. Vol. 2(5). P. 331.
28. *Tass P.A. et al.* Synchronization tomography: A method for three-dimensional localization of phase synchronized neuronal populations in the human brain using magnetoencephalography. *Phys. Rev. Lett.* 2003. Vol. 90(8). P 088101.
29. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D.* Detecting synchronization of self-sustained oscillators by external driving with varying frequency // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 73. P. 026208.

30. *Короновский А.А., Пономаренко В.И., Прохоров М.Д., Храмов А.Е.* Изучение синхронизации автоколебаний по унвариантным данным при изменении частоты внешнего воздействия с использованием вейвлетного анализа // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32(11). С. 81.

Саратовский государственный университет

*Поступила в редакцию 20.03.2007
После доработки 7.06.2007*

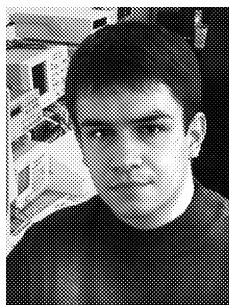
Институт высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН

*NICI-Biological Psychology,
Radboud University Nijmegen,
Nijmegen, the Netherlands*

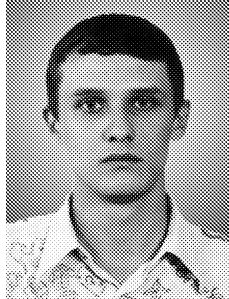
APPLICATION OF CONTINUOUS WAVELET TRANSFORM TO ANALYSIS OF INTERMITTENT BEHAVIOR

*A.A. Koronovskii, I.M. Minyukhin, A.A. Tyshchenko, A.E. Hramov,
I.S. Midzyanovskaya, E.Yu. Sitnikova, G. van Luijtelaar, C.M. van Rijn*

Effective method of signals analysis based on the continuous wavelet transform is proposed in this paper. Application of this method to estimation of mean value both of laminar and turbulent phase durations corresponding to different types of intermittent behavior is considered including analysis of time series produced by living systems. It is shown that the proposed method is stable to noise and fluctuations distorting the initial time series.



Минюхин Игорь Михайлович – родился 24 января 1987 года. Студент 3 курса факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Область научных интересов: применение методов нелинейной динамики к изучению систем различной природы, в том числе социальных, биологических, геологических и т.п. Участник студенческих конференций, автор публикации в сборнике докладов «Нелинейные дни–2005».



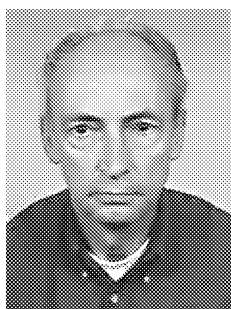
Тыщенко Александр Александрович – родился в Саратове (1984), окончил Саратовский государственный университет, факультет нелинейных процессов (2006), продолжает обучение в магистратуре по направлению радиофизика. Область научных интересов – исследование сложных режимов нелинейных динамических систем. Имеет одну публикацию по данному направлению.



Мидзяновская Инна Станиславовна – родилась в Московской области (1974), окончила физический факультет (кафедра биофизики) Московского государственного университета им М.В. Ломоносова в 1997 году. После окончания МГУ работает в ИВНД и НФ РАН. Победитель конкурса Молодых Ученых на 23-м международном эпилептологическом конгрессе в Праге, Чешская Республика (1999) и на 1-м симпозиуме по нейроповеденческой фармакологии в Окаяме, Япония (2004), финалист конкурса Молодых Ученых на 32-й ежегодной встрече Европейского Гистаминавого Сообщества, Ноордвикерхут, Нидерланды (2000). Защитила диссертацию «Абсанная и смешанная формы эпилепсии у крыс WAG/Rij: характеристики и аминергическая модуляция» в Университете Радбауд г. Наймегена (Нидерланды, 2006). Автор 20 статей по экспериментальной эпилептологии, нейрохимии, анализу ЭЭГ. Рецензент журналов «Neuroscience Letters», «Pharmacology, Biochemistry and Behavior». E-mail:miinn@yandex.ru



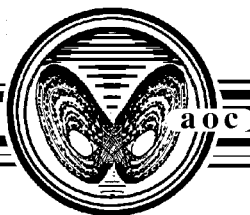
Ситникова Евгения Юрьевна – родилась в Волгограде (1974). Окончила ветеринарно-биологический факультет Московской академии ветеринарной медицины и биотехнологии по специальности «биофизика» (1996), кандидат биологических наук, научный сотрудник лаборатории нейроонтогенеза Института высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН, Москва. Научные интересы в области нейрофизиологии включают математические методы анализа активности головного мозга человека и животных, изучение влияния факторов окружающей среды на формирование функций мозга, адаптивные механизмы поведения и памяти; морфо-функциональные механизмы взаимодействий нервных клеток в ходе индивидуального развития в норме и патологии. Автор более 20 научных трудов в отечественной и зарубежной печати.



G. van Luijtelaar is the senior researcher at the NICI, Dept of Biological Psychology. He received his PhD from Radboud University Nijmegen. He studied Biological Psychology in Tilburg University. His research interests are currently «mechanisms of normal pathological thalamo-cortical interactions». E-mail:g.vanluijtelaar@nici.kun.nl



C.M. van Rijn – received her bachelors of chemistry and in 1984 she graduated as a medical doctor from the University of Leiden, the Netherlands. In 1989 she received her PhD in Nijmegen, the Netherlands on complementary in vivo (EEG) and in vitro studies (receptor binding) concerning the interrelationship of GABA antagonists and epilepsy. Since 1988 she is a docent in NICI (Nijmegen Institute for Cognition and Information), Department of Biological Psychology, Radboud University of Nijmegen. Her research is concentrated on the influence of GABAA -ergic drugs on the EEG of rats and of humans. Clinical topics of her special interest are epileptic phenomena, anaesthesia and neuropathic pain. E-mail:rijn@nici.ru.nl



СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СИНХРОНИЗАЦИИ ГАРМОНИЧЕСКИМ И ИМПУЛЬСНЫМ СИГНАЛОМ НА ПРИМЕРЕ СИСТЕМЫ ЛОРЕНЦА

Ю.С. Айдарова, А.П. Кузнецов, Л.В. Тюрюкина

Численно и аналитически исследована синхронизация внешним периодическим воздействием в системе Лоренца. Детально исследовано изменение картины синхронизации при изменении параметра, отвечающего за возникновение в автономной системе хаотического аттрактора.

Введение

Явление синхронизации является объектом пристального интереса исследователей в различных областях естествознания [1–8]. К настоящему времени достаточно хорошо изучено явление «классической» синхронизации, которая состоит в том, что на автоколебательную систему с устойчивым предельным циклом воздействуют внешним периодическим (обычно гармоническим) сигналом [1, 3, 6, 9–11]. Для этого случая известны фазовые соотношения, зависимость области синхронизации от частоты воздействия и т.д. В настоящее время, однако, наибольший интерес представляет синхронизация систем, демонстрирующих сложную, в том числе хаотическую, динамику [12–14]. Оказалось, что концепция синхронизации также может быть применима и к определенному классу хаотических систем, для которых основная частота легко может быть определена из спектра [6, 14–16]. Сложнее дело обстоит с системами с плохо определенной фазой, на которые воздействует сила большой амплитуды. Синхронизация в таких системах практически не поддается аналитическому исследованию. Примером такой системы может служить система Лоренца, являющаяся одной из «эталонных» моделей нелинейной динамики и одной из первых диссипативных систем с аттракторами, описываемых с помощью дифференциальных уравнений, в которой были обнаружены режимы динамического хаоса [1, 17–19]. Исследованию синхронизации в системе Лоренца посвящено довольно значительное число работ (см., например, [15, 19–21]), однако в них, в основном, рассматривалась синхронизация хаотического аттрактора внешним гармоническим воздействием.

В данной работе проводится сравнительное исследование синхронизации в системе Лоренца под внешним воздействием гармоническим сигналом и периодической последовательностью коротких импульсов, моделируемых последовательно-

стью δ -функций, а для гармонического воздействия проводится также сопоставление численных и аналитических результатов. Кроме этого, исследуется изменение картины синхронизации при изменении управляющего параметра соответствующей автономной системы, отвечающего за наличие бифуркаций и возникновение в ней хаотического аттрактора. Расчеты проводились в существенно более широких диапазонах по параметрам, что позволило выявить области синхронизации на плоскости (частота внешнего воздействия – амплитуда внешнего воздействия), которые ранее не рассматривались. Исследование режимов синхронизации осуществлялось через анализ карт динамических режимов [17], который позволяет с помощью компьютерного эксперимента получить существенную информацию об устройстве пространства параметров.

1. Синхронизация в системе Лоренца, находящейся под гармоническим воздействием

Начнем рассмотрение с наиболее традиционного случая – воздействия на систему Лоренца внешним гармоническим сигналом, которое добавляется в уравнение для динамической переменной z , чтобы не нарушить симметрию системы относительно замены переменных $x \rightarrow -y, y \rightarrow -x$. В этом случае неавтономная система Лоренца выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= Rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy + \varepsilon \cos(\omega t).\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь x, y, z – динамические переменные; σ, b – параметры системы; R – управляющий параметр; ε – амплитуда внешнего воздействия и ω – его частота.

Исследуем картину синхронизации, возникающую в такой системе при изменении управляющего параметра. С этой целью для системы (1) построим карты динамических режимов на плоскости параметров $(\omega - \varepsilon)$. Отметим, что при изменении параметра R в автономной системе Лоренца происходят качественные изменения фазового пространства, в результате которых возникает хаотический аттрактор. В неавтономной системе (1) зафиксируем параметры σ и b , а параметр R будем увеличивать, чтобы проследить изменение картины синхронизации. На рис. 1 представлены карты рассчитанных динамических режимов и их увеличенные фрагменты для нескольких значений параметра R , отвечающих качественно различным режимам в соответствующей автономной системе Лоренца. На этих и всех последующих картах оттенками серого цвета обозначены области существования режимов различных периодов – чем темнее цвет, тем больше период режима. Белым цветом обозначены хаотические и квазипериодические режимы, а также режимы больших периодов – более 16. При определении периода режима использовалось стробоскопическое сечение, которое выбиралось через период внешнего воздействия.

Рассмотрим динамику неавтономной системы Лоренца подробнее. Так, при малых значениях управляющего параметра $R = 0.7$, когда в фазовом пространстве автономной системы есть единственная устойчивая неподвижная точка, в неавтономной системе наблюдается обширная область «синхронизации», отвечающая режиму периода 1, а также достаточно большая область режима периода 2 (рис. 1, а).

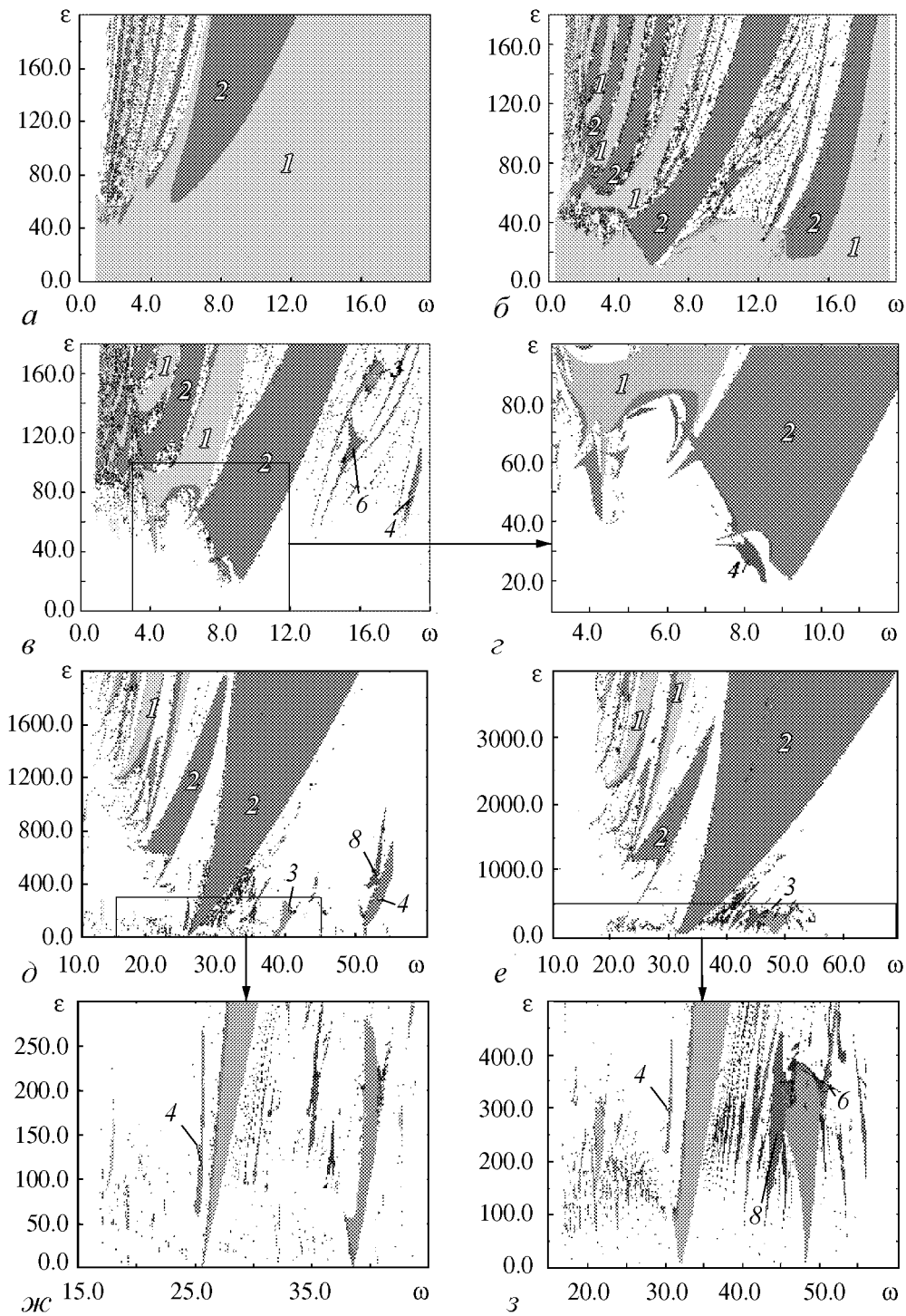


Рис. 1. Карты динамических режимов (*а, б, в, д, е*) и их увеличенные фрагменты (*г, ж, з*) для системы Лоренца под внешним гармоническим воздействием для $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и различных значений параметра R : *а* – 0.7; *б* – 15; *в, г* – 28; *д, ж* – 222; *е, з* – 345. Цифрами на картах обозначены периоды режимов

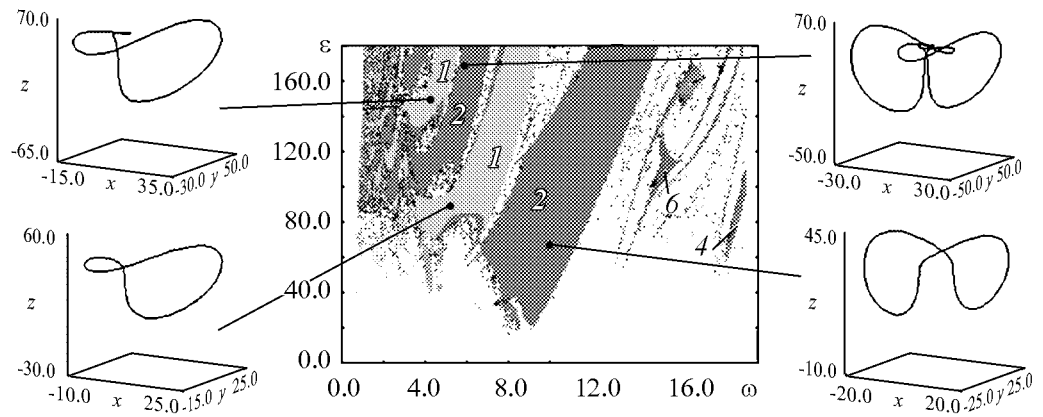


Рис. 2. Карта динамических режимов и аттракторы неавтономной системы Лоренца (1), $R = 28$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$

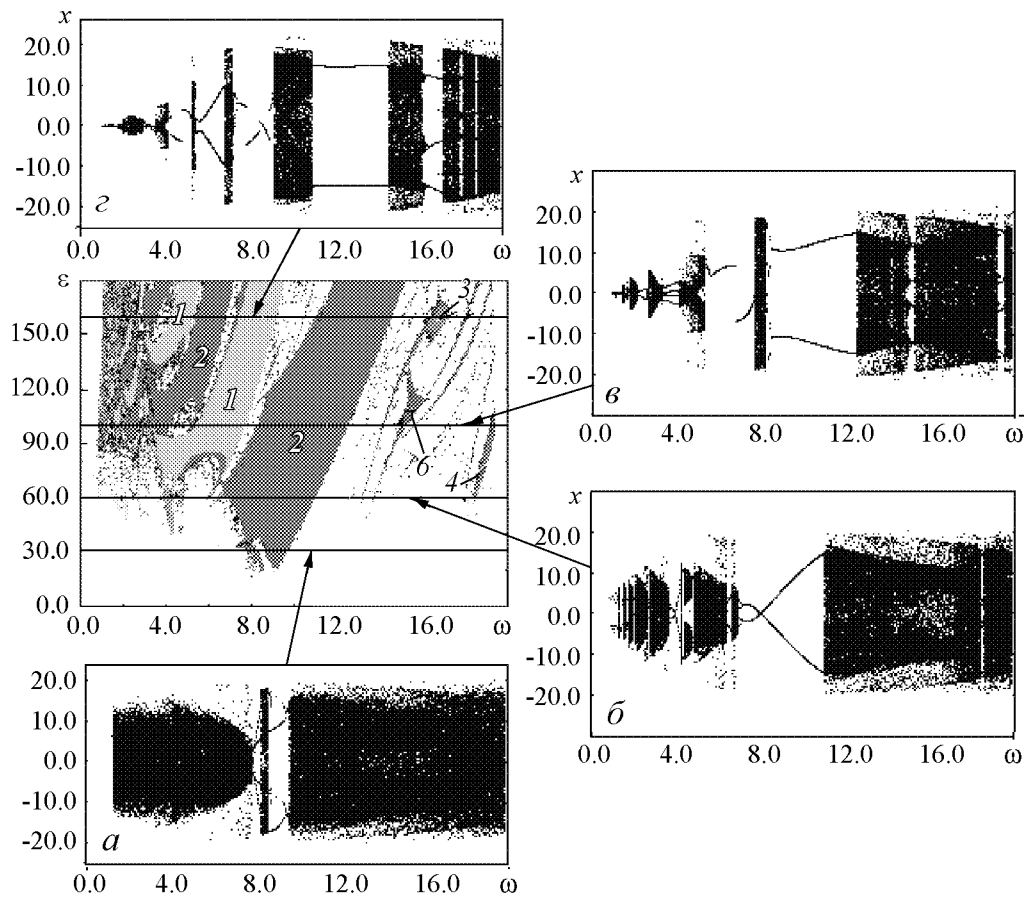


Рис. 3. Карта динамических режимов и бифуркационные деревья для системы Лоренца под гармоническим воздействием при $R = 28$, $b = 8/3$, $\sigma = 10$. Деревья построены вдоль линий $\epsilon = \text{const}$: $a - 30$; $б - 60$; $в - 100$; $г - 160$

При увеличении управляющего параметра $R = 15$, карта динамических режимов существенно меняется (рис. 1, б): область режима периода 1 стала меньше, а области остальных режимов – значительно больше, их внутреннее устройство стало сложнее. Теперь картина синхронизации обладает ярко выраженной периодической структурой. Так, области режимов периодов 1, 2 и т.д. образуют почти вертикальные полосы, которые неоднократно повторяются, становясь все более узкими при движении по карте в область малых значений частоты внешнего воздействия. При дальнейшем увеличении R в автономной системе Лоренца возникает странный хаотический аттрактор. Как следствие, в неавтономной системе происходит существенное изменение карты динамических режимов (рис. 1, в): вместо области режима периода 1, являвшейся «фоном» на предыдущих картах, появилась область квазипериодики (белый фон); исчезла область синхронизации периода 2 в окрестности частоты $\omega \approx 14$, а все остальные языки опять сместились вправо. Однако периодичность языков синхронизации на карте динамических режимов и в данном случае сохраняется. При очень больших значениях управляющего параметра $R = 345$ и 222 в автономной системе Лоренца реализуются устойчивые предельные циклы периода 1 и 2, соответственно. Картина синхронизации в неавтономной системе в этом случае имеет более типичный вид (рис. 1, д, е): на картах хорошо видны языки синхронизации различных периодов, касающиеся своими острями оси $\varepsilon = 0$ (рис. 1, ж, з). Отметим, что картина областей синхронизации на плоскости параметров продолжает сохранять свою периодическую структуру.

Сравним картины синхронизации, имеющей место в неавтономной системе Лоренца (1) при небольших и очень больших значениях параметра R . Так, при всех значениях управляющего параметра (кроме $R = 0.7$) на картах динамических режимов отчетливо виден основной язык синхронизации. Структура языков синхронизации для разных значений параметра R сходна: имеется чередование областей синхронизации с периодом внешней силы и с удвоенным периодом внешней силы. На базе этих областей происходят бифуркации удвоения периода. Такое сходство вида карт динамических режимов можно объяснить большой величиной амплитуды внешнего воздействия, которая «подавляет» собственную динамику системы так, что вид областей синхронизации почти от нее не зависит. Кроме того, полная синхронизация хаотической динамики имеет порог по амплитуде внешнего воздействия (см. рис. 1, в). В работе [18] была высказана гипотеза, что величина амплитудного порога синхронизации связана с метрической энтропией и может служить некоторой мерой хаоса – чем более «развит хаос», тем выше порог.

Для более детальной иллюстрации динамики неавтономной системы были построены аттракторы внутри различных областей синхронизации (рис. 2) и бифуркационные деревья для разных значений амплитуды внешней силы ε (рис. 3).

2. Аналитическое исследование областей сложной динамики системы Лоренца под гармоническим воздействием

Теперь проведем аналитическое исследование неавтономной системы Лоренца (1). Для обнаружения области сложной динамики системы, в фазовом пространстве которой может возникать гомоклиническая петля, можно использовать метод Мельникова [17]. Метод Мельникова основан на аналитическом вычислении по теории возмущений расстояния Δ между сепаратрисами исследуемой системы. Знакопере-

менность Δ означает, что движение в данной области является хаотическим.

Рассмотрим систему, невозмущенная динамика которой описывается гамильтонианом $H(p, x)$. Внешнее периодическое воздействие, диссипацию и т.д. будем рассматривать как малое возмущение

$$\dot{x} = H_p + \varepsilon_1 f(x, p, t), \quad \dot{p} = -H_x + \varepsilon_1 g(x, p, t), \quad (2)$$

где ε_1 – малый параметр, f и g периодические функции времени. Тогда расстояние по Мельникову между устойчивой и неустойчивой возмущенными сепаратрисами будет определяться интегралом

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} (H_x(X, P)f(X, P, t) + H_p(X, P)g(X, P, t))dt, \quad (3)$$

где $X(t), P(t)$ – решение невозмущенных уравнений, отвечающее движению по петле сепаратрисы из седла в седло. Сдвигом начала отсчета времени на произвольную константу θ можно получить однопараметрическое семейство таких решений. При подстановке этих решений вида $X(t + \theta), P(t + \theta)$ в формулу (3) получаем функцию $\Delta(\theta)$.

Критерий Мельникова формулируется так: если функция $\Delta(\theta)$ знакопеременная, то это свидетельствует о наличии трансверсального пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий неподвижной точки в возмущенной системе и служит признаком присутствия гомоклинической структуры, а также связанной с ней сложной динамики (бесконечное счетное множество периодических орбит, континуум неперiodических траекторий) [19].

Метод Мельникова применим в основном для систем, близких к гамильтоновым, при наличии диссипации и периодической внешней силы. Чтобы применить метод Мельникова к неавтономной системе Лоренца, воспользуемся тем, что систему Лоренца можно представить как нелинейный диссипативный осциллятор с инерционным возбуждением. В работе [22] было показано, что в этом случае метод Мельникова может быть эффективно применен к системе Лоренца. Таким образом, используя замену переменных [17]

$$z = \frac{u + x^2}{2\sigma}, \quad (4)$$

получим систему Лоренца в виде неавтономного нелинейного диссипативного осциллятора. Тогда для u имеем

$$\dot{u} = -bu + (2\sigma + b)x^2. \quad (5)$$

Теперь добавим внешнее воздействие

$$\dot{u} = -bu + (2\sigma + b)x^2 + 2\sigma\varepsilon \cos(\omega t) \quad (6)$$

и запишем неавтономную систему Лоренца в виде

$$\ddot{x} + (\sigma + 1)\dot{x} - \sigma(r - 1)x + \frac{x^3}{2} + \frac{xu}{2} = 0. \quad (7)$$

Перепишем уравнение (6) в виде системы двух дифференциальных уравнений более низкого порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = p, \\ \dot{p} = \sigma(r-1)x - \frac{x^3}{2} - (\sigma+1)p - \frac{xu}{2}, \end{cases} \quad (8)$$

тогда гамильтониан системы (7) примет вид

$$H(x, p) = \frac{\dot{X}^2}{2} - \frac{\sigma(r-1)X^2}{2} + \frac{X^4}{8}. \quad (9)$$

Найдем решение невозмущенной системы, отвечающее движению по сепаратрисе. Для этого выпишем интеграл энергии

$$\frac{\dot{X}^2}{2} - \frac{\sigma(r-1)X^2}{2} + \frac{X^4}{8} = C. \quad (10)$$

Константу C выберем равной 0, чтобы равенство (9) удовлетворялось в точке седла $\dot{X} = 0, X = 0$. Из (9) находим

$$X = \frac{2\sqrt{\sigma(r-1)}}{\operatorname{ch}(\sqrt{\sigma(r-1)}(t+\theta))}, \quad P = \frac{2(\sigma(r-1)) \operatorname{sh}(\sqrt{\sigma(r-1)}(t+\theta))}{\operatorname{ch}(\sqrt{\sigma(r-1)}(t+\theta))^2}. \quad (11)$$

Теперь запишем выражение для мельниковского расстояния с учетом уравнений (8)

$$\Delta(\theta) = -(\sigma+1) \int_{-\infty}^{\infty} P^2 dt - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} PXU dt. \quad (12)$$

После некоторых математических вычислений, можно получить критерий Мельникова

$$\begin{aligned} \varepsilon > \frac{-(\omega^2 + b^2) \operatorname{sh}\left(\frac{\pi\omega}{2\sqrt{\sigma(r-1)}}\right)}{4\pi q \omega^2 \sqrt{\omega^2 + b^2}} \left(2(\sigma+1) \int_{-\infty}^{\infty} P^2 dt - b(2\sigma-b) \left\{ (\sigma(r-1))^{3/2} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \left[2\sigma \cos\left(\frac{\pi b}{2\sqrt{\sigma(r-1)}}\right)^2 - 2\sigma(r-1) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - b^2 \Psi\left(1, \frac{b}{2\sqrt{\sigma(r-1)}}\right) \left(\cos\left(\frac{\pi b}{2\sqrt{\sigma(r-1)}}\right)^2 - 1 \right) \right] \right\} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

На рис. 4 изображены области сложной динамики для системы Лоренца (1) для различных значений параметра R , совмещенные с картами динамических режимов. Строгого соответствия между аналитическими и численными результатами не наблюдается. Это объясняется, прежде всего, тем, что возмущение $g(x, p, t)$ не было малым, как это требуется при выводе критерия Мельникова. Однако, тем не менее, численные и аналитические результаты находятся в достаточно хорошем соответствии, особенно для относительно малых значений параметра R .

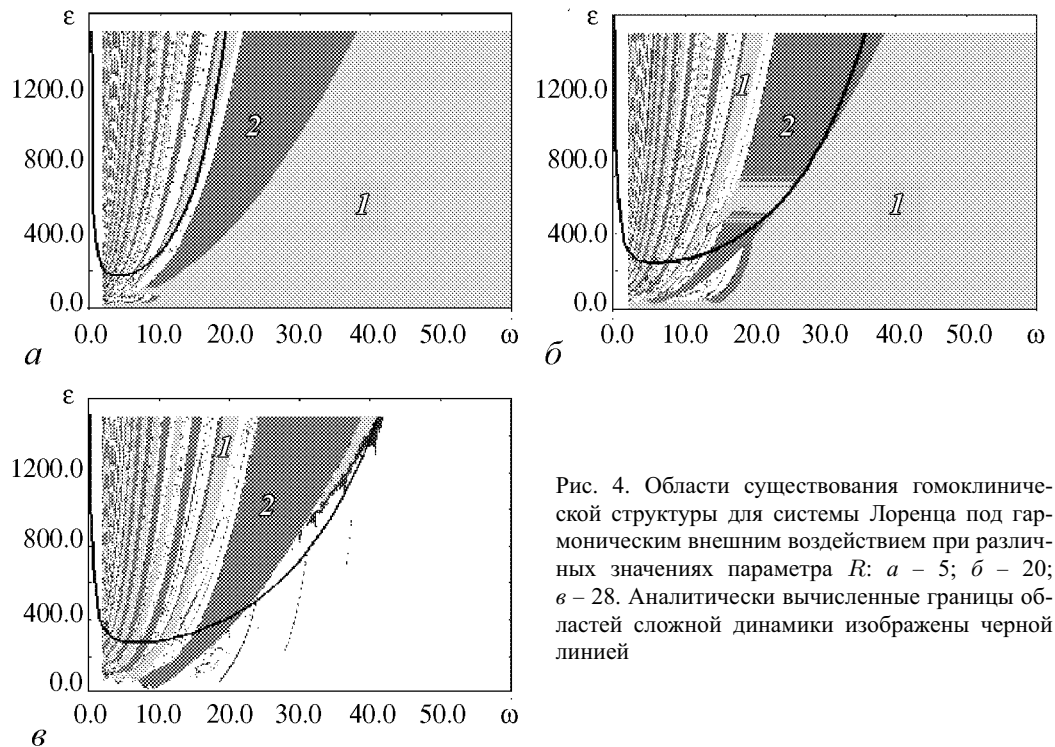


Рис. 4. Области существования гомоклинической структуры для системы Лоренца под гармоническим внешним воздействием при различных значениях параметра R : $a - 5$; $б - 20$; $в - 28$. Аналитически вычисленные границы областей сложной динамики изображены черной линией

3. Синхронизация системы Лоренца, находящейся под импульсным воздействием

В заключение рассмотрим систему Лоренца, находящуюся под воздействием периодической последовательности коротких импульсов, которые можно представить в виде периодической последовательности δ -функций. В этом случае неавтономная система Лоренца описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \sigma(y - x), \\
 \dot{y} &= Rx - y - xz, \\
 \dot{z} &= -bz + xy + \varepsilon \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Здесь ε и T - амплитуда и период внешнего воздействия. Соответственно частота такого воздействия будет $\omega = 2\pi/T$. Отметим, что импульсное воздействие, также как и гармоническое, добавляется в уравнение для динамической переменной z . Это в дальнейшем позволит провести сопоставление карт динамических режимов для моделей с гармоническим и импульсным воздействием. Как и в предыдущем случае исследуем картину синхронизации, возникающую в рассматриваемой системе.

На рис. 5 представлены карты динамических режимов и их увеличенные фрагменты на плоскости $(\omega - \varepsilon)$ для системы (14).

В случае, когда в автономной системе Лоренца имеется один регулярный аттрактор (малые значения R), сложных режимов не наблюдается. После бифуркации вилки, которую претерпевает неподвижная точка в начале координат при

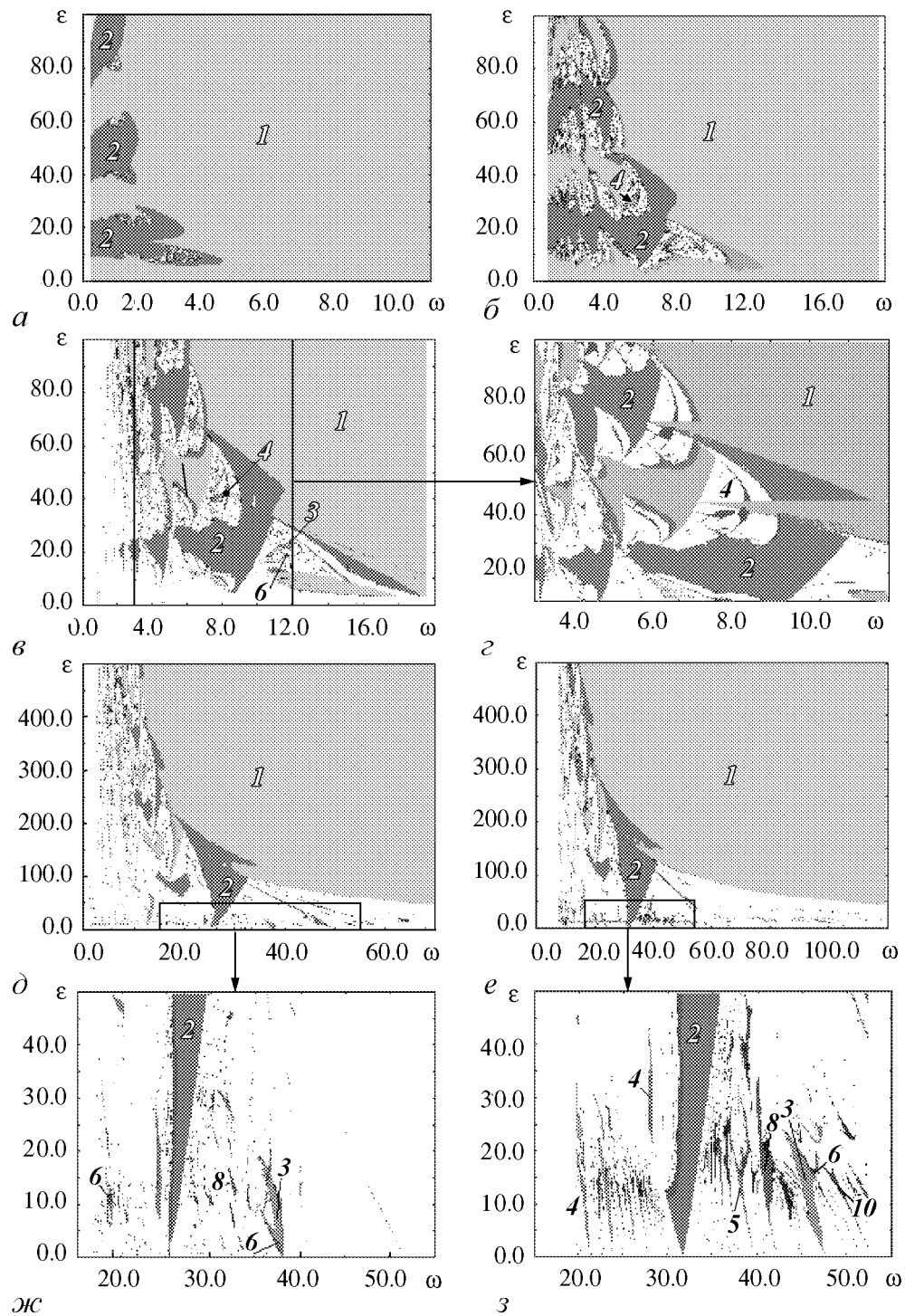


Рис. 5. Карты динамических режимов (*а, б, в, д, е*) и их увеличенные фрагменты (*г, ж, з*) для системы Лоренца под внешним воздействием в виде периодической последовательности δ -функций для $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и различных значений параметра R : *а* – 5; *б* – 15; *в, г* – 28; *д, ж* – 222; *е, з* – 345. Цифрами на картах обозначены периоды режимов

переходе параметра R через 1, в автономной системе возникают две устойчивые неподвижные точки. В неавтономной системе Лоренца при небольших значениях управляющего параметра $R = 5$ также нет сложных режимов (рис. 5, а). Большую часть плоскости параметров занимает область режима периода 1, отвечающая тому, что траектория в фазовом пространстве неавтономной системы во время автономной эволюции приходит в одну из неподвижных точек, а импульс выбрасывает ее из неподвижной точки. И лишь в области малых значений частоты ω наблюдаются небольшие структуры режимов удвоенного периода и хаоса. Причем эти области чередуются вдоль оси амплитуды внешнего воздействия, в то время как при гармоническом воздействии режимы чередуются вдоль частотной оси (см. рис. 1).

При увеличении значения управляющего параметра $R = 15$ в автономной системе происходят качественные изменения устройства фазового пространства, а в неавтономной системе – области режимов удвоенного периода и хаоса увеличиваются в размере и сдвигаются в область больших частот ω (рис. 5, б). При этом области хаотической динамики становятся более выраженными, а внутри них наблюдается структура типа crossroad area. Особенно это характерно для структур, возникающих при небольших значениях амплитуды внешнего воздействия. Если и дальше увеличивать параметр R (переходя к значениям, при которых в автономной системе Лоренца существует хаотический аттрактор), то на карте динамических режимов можно различить две большие области, характеризующиеся существенно разной динамикой (рис. 5, в, г). Первая область располагается в правой верхней части карты, где неавтономная система демонстрирует лишь режим периода 1. Вторая область – в левой части карты, где наблюдаются разнообразные области синхронизации различных периодов и достаточно большая область квазипериодических режимов. Причем, так же как и раньше, они характеризуются ярко выраженной периодичностью. Отметим также, что при воздействии на хаотический аттрактор последовательностью импульсов, как и при гармоническом воздействии, появляется порог синхронизации по амплитуде воздействия (см. рис. 5, в)

Характерное для карты динамических режимов неавтономной системы Лоренца (13) разбиение на две части, сохраняется и при больших значениях параметра R , например, при $R = 222$ и 345 (рис. 5, д, е), когда в автономной системе имеют место устойчивые предельные циклы периода 2 и 1, соответственно. В этом случае при небольших значениях амплитуды внешнего воздействия ϵ наблюдаются квазипериодические режимы (при больших значениях амплитуды – лишь режим периода 1) и разнообразные языки синхронизации, которые выглядят так же, как и при гармоническом воздействии (рис. 5, ж, з).

В отличие от случая гармонического воздействия при импульсном воздействии на картах динамических режимов имеется обширная область синхронизации с периодом 1 (с периодом внешней силы), которая возникает при больших частотах и больших амплитудах внешнего воздействия (см. рис. 5). Это может быть обусловлено тем, что траектория попадает на двумерное устойчивое многообразие точки $O(0, 0, 0)$, по которому она очень медленно спускается к ней. Например, это может происходить так: при запуске траектории в начальный момент времени из точки, расположенной вблизи нуля (начальные условия всегда выбирались следующим образом: $x_0 = 0.01$, $y_0 = 0.01$, $z_0 = 0$), импульс выбрасывает ее вверх вдоль оси z так, что она не сходит с устойчивого многообразия точки O . После действия импульса, траектория начинает медленно спускаться по многообразию вниз, по направлению к этой точке. В случае частых импульсов она не успевает значительно отклониться от

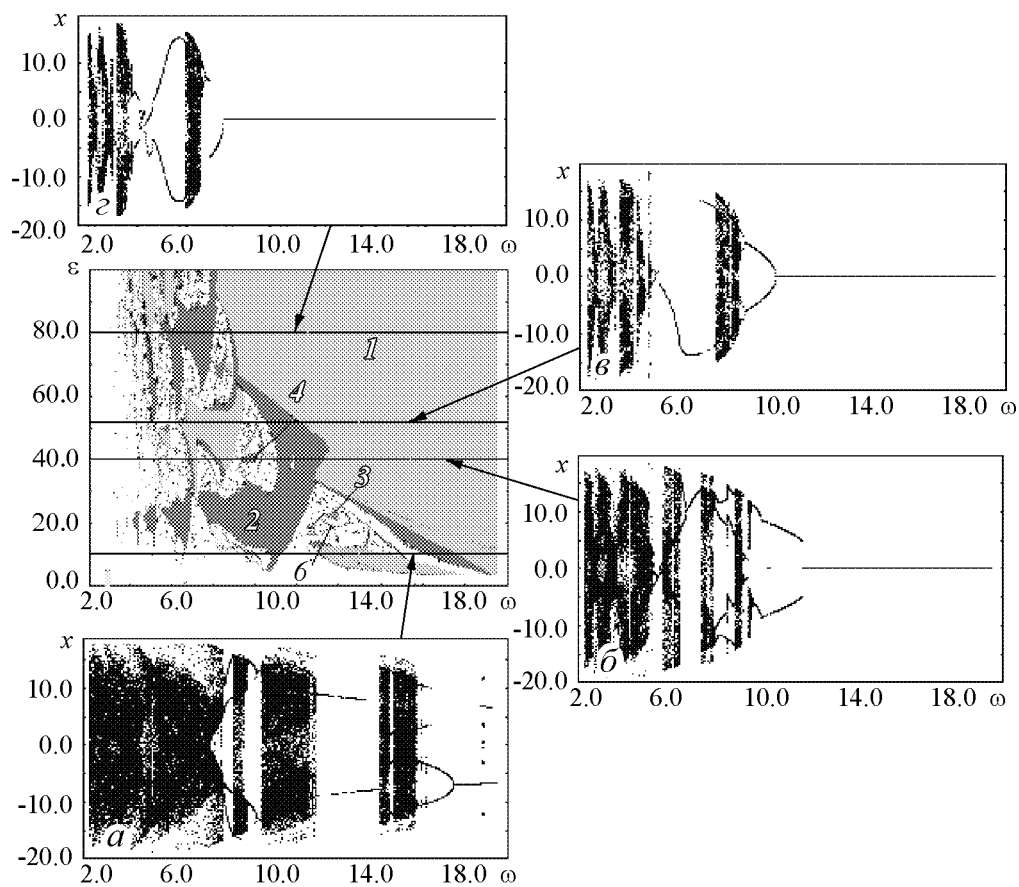


Рис. 6. Карта динамических режимов и бифуркационные деревья для системы Лоренца под импульсным воздействием при $R = 28$, $b = 8/3$, $\sigma = 10$. Деревья построены вдоль линий $\varepsilon = \text{const}$: $a - 10$; $b - 40$; $z - 52$; $z - 80$

устойчивого многообразия до следующего импульса, который выбрасывает ее вновь вверх, и т. д.

Для более детальной иллюстрации динамики неавтономной системы Лоренца (14) были построены бифуркационные деревья вдоль линий $\varepsilon = \text{const}$ для различных значений амплитуды ε (рис. 6). Хорошо видно, что независимо от величины амплитуды импульсного воздействия ε на всех бифуркационных деревьях наблюдаются области квазипериодических режимов, чередующиеся с областями режимов различных периодов, внутри которых имеет место переход к хаосу через последовательность удвоения периода.

Выводы

В настоящей работе проведено исследование синхронизации в неавтономной системе Лоренца. В качестве внешнего воздействия были выбраны гармонический сигнал и периодическая последовательность δ -функций. Для обоих типов внешнего воздействия построены карты динамических режимов на плоскости параметров (частота воздействия – амплитуда внешнего воздействия). Карты построены для нескольких значений управляющего параметра системы Лоренца, отвечающих раз-

личным типам устройства фазового пространства соответствующей автономной системы. Показано, что картина синхронизации в неавтономной системе Лоренца характеризуется рядом закономерностей. С помощью метода Мельникова произведена аналитическая оценка условия возникновения сложной динамики.

Работа поддержана грантами РФФИ № 06-02-16773 и CRDF BRHE REC-006 № Y2-P-06-13.

Библиографический список

1. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
2. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991.
3. *Ott E.* Chaos in dynamical systems. Cambridge university press, 1993.
4. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
5. *Winfree A.T.* The Geometry of Biological Time. Springer Berlin, 1980.
6. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
7. *Mosekilde E., Maistrenko Yu., Postnov D.* Chaotic synchronization: applications to living systems. Singapore: World Scientific. 2002.
8. *Kuramoto Y.* Chemical oscillations, waves and turbulence. Berlin: Springer-Verlag. 1984.
9. *Caldas I.L., Tasson H.* Limit cycles of periodically forced oscillations // Phys. Lett., 1989. Vol. A135. P. 264.
10. *Steeb W.H., Kunick A.* Chaos in limit-cycle systems with external periodic excitation // Int. J of Nonlinear Mechanics. 1987. № 22. P. 349.
11. *Glass L., Sun J.* Periodic forcing of a limit-cycle oscillator: Fixed points, Arnold tongues, and the global organization of bifurcations // Phys. Rev. 1994. Vol. 50, № 6. P. 5077.
12. *Pecora L. and Carroll T.* Synchronization in chaotic systems // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64. P. 821.
13. *Dykman G., Landa P. and Neimark Y.* Synchronizing the chaotic oscillations by external force // Chaos, Solitons and Fractals. 1992. Vol. 1. P. 339.
14. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E. and Safonova M.A.* Synchronization of chaos // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1992. Vol. 2. P. 633.
15. *Anishchenko V.S., Silchenko A.N. and Khovanov I.A.* Synchronization of switching processes in coupled Lorenz systems // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 57. P. 316.
16. *Rosenblum M., Pikovsky A. and Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76. P. 1804.
17. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001.
18. *E. Lorenz.* Deterministic Nonperiodic Flow // Journal of Atmospheric Sciences. 1963. Vol. 20. P. 130.
19. *Park E.-H., Zaks M.A., Kurths J.* Phase synchronization in the forced Lorenz system // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 60. P. 6627.

20. Кузнецов Ю.И., Ланда П.С. и др. Связь между амплитудным порогом синхронизации и энтропией в стохастических автоколебательных системах // Доклады Академии наук СССР. 1985. Т. 281, № 2. с. 291.
21. Ланда П.С., Рендель Ю.С., Шер В.А. Синхронизация колебаний в системе Лоренца // Известия вузов: Радиофизика. 1989. Т. 32, № 9. С. 1172.
22. Афанасьев В.В., Польский И.С. и др. Применение метода Мельникова для оценки эффективности влияния внешних воздействий на сложные нелинейные системы со странными аттракторами // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23, № 23.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 24.01.2007
После доработки 05.06.2007

THE COMPARATIVE ANALYSIS OF SYNCHRONIZATION BY A HARMONIOUS AND PULSE FORCE BY THE EXAMPLE OF LORENTZ SYSTEM

Yu.S. Aidarova, A.P. Kuznetsov, L.V. Turukina

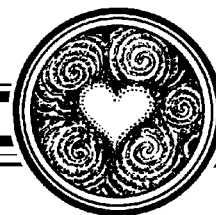
The synchronization by external periodic force of Lorenz system is under both numeric and analytical investigation in this paper. Properly studied the changes in synchronization caused by alteration of parameter value, which is responsible for arising of chaotic attractor in autonomous system.



Айдарова Юлия Сериковна – родилась в 1983 году в Саратове, окончила Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского (2006). В данное время является аспирантом кафедры динамических систем на факультете нелинейных процессов. Является соавтором нескольких научных статей.



Тюрюкина Людмила Владимировна – родилась в 1977 году. Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, ассистент базовой кафедры динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов – динамический хаос, критические явления на пороге хаоса, сложная динамика нелинейных осцилляторов и автоколебательных систем с внешним периодическим воздействием в контексте сопоставления различных подходов к их описанию, синхронизация короткими импульсами и управление неустойчивыми режимами посредством коротких импульсов. Автор 26 научных публикаций, в том числе 7 статей в российских и зарубежных журналах. Лауреат стипендии Президента РФ для студентов и аспирантов. В 2001 и 2002 годах получила персональные гранты РФФИ для молодых исследователей. Принимает участие в работе международных научных коллективов.
E-mail: ludmila@forpost.ru



**ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ
КВАНТОВЫХ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ В СИСТЕМЕ
С ТРЕНИЕМ, КВАДРАТИЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ
И НЕПРОНИЦАЕМЫМИ СТЕНКАМИ**

А.Л. Санин, А.А. Смирновский

В рамках уравнения Шредингера – Ланжевена – Костина исследована одномерная диссипативная система с квадратичным потенциалом, распределенным между стенками ямы, и подверженная импульсной накачке. Численное моделирование распространения квантовых волновых пакетов, динамических средних, частотного отклика, отображения Пуанкаре демонстрирует установившийся колебательный режим движения пакетов. Проводится сравнение с классическими аналогами.

Введение

Исследование квантовых динамических закономерностей имеет фундаментальное значение для развития физики, химии и нанотехнологий. Современные достижения лазерной импульсной фемто- и аттосекундной техники позволяют проводить экспериментальные исследования динамики микрочастицы на разных пространственных масштабах. Поэтому возрос интерес к теоретическим исследованиям процессов локализации и фрагментации квантовых волновых пакетов, когерентных колебаний, дифракции и туннелирования в простых модельных системах. В большинстве работ эти системы рассматривались как изолированные от окружающей среды. Для описания изолированных систем используются различные формы уравнений движения, например, нестационарное уравнение Шредингера, квантовое уравнение Гамильтона – Якоби. Влияние окружающей среды на динамику микрочастицы может быть учтено различными способами. Один из них состоит в использовании метода матрицы плотности. Однако, если не требуется полного описания системы, окружающей среды и взаимодействия между ними, то можно перейти к упрощенному, более краткому описанию. Оно состоит в том, чтобы ввести в уравнение квантовой динамики для рассматриваемой системы один или несколько параметров, характеризующих окружающую среду. Так появилось уравнение Гейзенберга – Ланжевена для оператора импульса [1], которое послужило основой для формулировки уравнения Шредингера – Ланжевена – Костина (ШЛК) [2]. Уравнение ШЛК содержит слагаемое, включающее коэффициент трения. Так как оно предназначалось для описания квантового

броуновского движения, то содержит еще одно слагаемое – потенциал случайной силы. Оба слагаемых входят в уравнение ШЛК аддитивно и не зависят друг от друга. При определенных допущениях, а также в модельных задачах действие случайной силы можно игнорировать, как это сделано в рассматриваемых ниже статьях. Уравнение ШЛК без случайной силы имеет в качестве классического аналога уравнение движения с диссипативной силой, пропорциональной скорости. Уравнение ШЛК детально обсуждалось в рамках лагранжевой полевой теории в обзоре [3]. Здесь также сравнивалось гидродинамическое представление уравнения ШЛК с уравнениями классической гидродинамики. Другие подходы к формулировке диссипативных слагаемых, вводимых в уравнение Шредингера, рассматривались в статьях [4, 5]. При определенных значениях параметров этих диссипативных слагаемых наблюдалось структурное сходство с уравнением ШЛК. В статье [6] формулируется семейство нелинейных уравнений Шредингера с диссипативными слагаемыми и показывается их связь с уравнением ШЛК. Здесь отмечается фундаментальное значение уравнения Шредингера с диссипативными слагаемыми для исследования необратимых процессов. Гидродинамический метод квантования систем с диссипацией, предложенный в статье [7], позволяет также воспроизвести уравнение ШЛК. Уравнение ШЛК, а также соответствующие ему гидродинамические уравнения применялись для решения конкретных задач, например, в статьях [8, 9].

Классическая теория колебаний динамических систем с диссипацией разработана в большей мере, чем квантовая. К настоящему времени существует множество статей и монографий по классической теории колебаний, например [10] – [16]. Вместе с тем, переход к наноразмерам и фемтосекундным импульсам в радиоэлектронике побуждает к детальным исследованиям квантовых динамических систем с диссипацией и к разработке теории колебаний в этой области.

Настоящая статья посвящена численному моделированию динамики микрочастицы, подверженной действию силовых полей и силы трения. Рассматривается одномерная система, ограниченная непроницаемыми стенками. В начальный момент времени микрочастице сопоставляется узкий гауссов пакет с конечной скоростью. Исследуемая динамическая модель может применяться для очень малых пространственных масштабов, вплоть до атомных. В первом разделе излагаются основные уравнения и допущения, во втором – рассматриваются собственные колебания квантового осциллятора. Третий раздел посвящен вынужденным колебаниям при импульсном силовом воздействии на квантовый волновой пакет. В последнем разделе обсуждаются результаты численного моделирования.

1. Основное уравнение и расчетные формулы

Уравнение Шредингера – Ланжевена – Костина, записанное в безразмерном виде, можно представить как

$$i \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \zeta^2} + \tilde{U}_\Sigma \tilde{\psi} - \frac{ik}{2} \left(\ln \frac{\tilde{\psi}}{\tilde{\psi}^*} - \langle \ln \frac{\tilde{\psi}}{\tilde{\psi}^*} \rangle \right) \tilde{\psi}, \quad (1)$$

где безразмерные величины определяются следующим образом:

$$\zeta = \frac{x}{b_\delta}, \quad \tau = \frac{t}{t_\delta}, \quad \tilde{U}_\Sigma = \frac{U_\Sigma}{U_\delta}, \quad \tilde{\psi} = \frac{\psi}{\psi_\delta}, \quad k = \frac{f}{m_e \omega_\delta}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\tau_\delta} \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{b_\delta^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2},$$

а единицы измерения равны

$$b_\delta = \sqrt{\frac{\hbar}{m_e \omega_\delta}}, \quad t_\delta = \omega_\delta^{-1}, \quad U_\delta = \frac{\hbar^2}{m_e b_\delta^2}, \quad \psi_\delta = \sqrt{b_\delta^{-1}}.$$

Здесь x, t – координата и время, соответственно; f – диссипативный коэффициент, ψ – волновая функция; m_e, \hbar – масса частицы и постоянная Планка, соответственно. Безразмерная комплексно-сопряженная волновая функция обозначена как $\tilde{\psi}^*$, i – мнимая единица. Рассматриваемая квантовая система ограничена непроницаемыми стенками в точках $\zeta = \pm \zeta_L$, где $\zeta_L = L/b_\delta$, L – полуширина системы. Величина \tilde{U}_Σ состоит из двух слагаемых

$$\tilde{U}_\Sigma = \frac{1}{2} \zeta^2 + \tilde{U}_{\text{ext}}. \quad (2)$$

Первое слагаемое в (2) определяет ограниченный квадратичный потенциал на отрезке $-\zeta_L \leq \zeta \leq \zeta_L$. Второе слагаемое в (2) характеризует импульсную накачку

$$\tilde{U}_{\text{ext}}(\zeta, \tau) = \begin{cases} -\tilde{F}_0 \zeta, & \tau \in (nT, nT + \Delta\tau), \\ 0, & \tau \notin (nT, nT + \Delta\tau). \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $\tilde{F}_0 = F_0/F_\delta$, F_0 – классическая сила, $F_\delta = U_\delta/b_\delta$, T – период повторения импульса, n – целое число.

Слагаемое в (1), включающее множитель k , характеризует диссипативные свойства системы. Величина $\ln(\tilde{\psi}/\tilde{\psi}^*)$ может быть представлена в виде

$$\ln \frac{\tilde{\psi}}{\tilde{\psi}^*} = i (2 \arg(\tilde{\psi}) + 2n\pi), \quad (4)$$

где $\arg(\tilde{\psi}) = \arctg(\text{Im}\tilde{\psi}/\text{Re}\tilde{\psi})$ есть главное значение фазы. Необходимо отметить, что физически корректные решения имеют место, когда фаза является непрерывной функцией координаты ζ . Символ $\langle \rangle$ означает среднее значение, так что

$$\langle \ln \frac{\tilde{\psi}}{\tilde{\psi}^*} \rangle = \int \tilde{\psi}^* \ln \frac{\tilde{\psi}}{\tilde{\psi}^*} \tilde{\psi} d\zeta. \quad (5)$$

Ниже использованы безразмерные величины для плотности вероятности N и полевой скорости V

$$N = \tilde{\psi}^* \tilde{\psi}, \quad V = \frac{1}{2iN} \left(\tilde{\psi}^* \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \zeta} - \tilde{\psi} \frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial \zeta} \right). \quad (6)$$

Условие нормировки для волновой функции $\tilde{\psi}$ может быть записано в виде

$$\int_{-\zeta_L}^{\zeta_L} N d\zeta = 1. \quad (7)$$

Расчетные формулы для средних значений динамических переменных и функций от них имеют вид

$$\begin{aligned}\langle \zeta \rangle &= \int_{-\zeta_L}^{\zeta_L} \tilde{\psi}^* \zeta \tilde{\psi} d\zeta, \quad \langle V \rangle = \int_{-\zeta_L}^{\zeta_L} \tilde{\psi}^* \left(-i \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \tilde{\psi} d\zeta, \\ \langle \tilde{T} \rangle &= \frac{1}{2} \int_{-\zeta_L}^{\zeta_L} \left| \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \zeta} \right|^2 d\zeta, \quad \langle \tilde{U}_\Sigma \rangle = \int_{-\zeta_L}^{\zeta_L} \tilde{\psi}^* \tilde{U}_\Sigma \tilde{\psi} d\zeta.\end{aligned}\quad (8)$$

Здесь $\langle \zeta \rangle$, $\langle V \rangle$ – средние значения координаты и скорости, соответственно; $\langle \tilde{T} \rangle$, $\langle \tilde{U}_\Sigma \rangle$ – средние значения кинетической и потенциальной энергий, соответственно. В отдельных случаях проводились вычисления средней полной энергии $\langle \tilde{E} \rangle$ как суммы $\langle \tilde{T} \rangle$, $\langle \tilde{U}_\Sigma \rangle$. Величины $\langle \zeta \rangle$, $\langle V \rangle$, $\langle \tilde{T} \rangle$, $\langle \tilde{U}_\Sigma \rangle$ являются безразмерными. Для анализа соотношения неопределенностей проведены вычисления среднеквадратичных отклонений координаты и скорости $\langle (\Delta \zeta)^2 \rangle$, $\langle (\Delta V)^2 \rangle$, а также стандартных отклонений, определяемых как

$$\sigma_\zeta = \sqrt{\langle (\Delta \zeta)^2 \rangle}, \quad \sigma_V = \sqrt{\langle (\Delta V)^2 \rangle}. \quad (9)$$

Произведение $\sigma_\zeta \sigma_V$ описывает соотношение неопределенностей как функцию времени. С использованием метода дискретного преобразования Фурье [17] проанализированы квадраты модулей

$$F_W(\Omega) = |\Phi_W(\Omega)|^2 \quad (10)$$

как функции Ω . Здесь W – некоторая переменная времени, $\Phi_W(\Omega)$ – фурье-преобразование, $\Omega = \omega/\omega_\delta$, ω – частота процесса. Были также вычислены квадраты модулей фурье-компонент для $W = \langle \zeta \rangle$ и $W = N(0, \tau)$. Граничные условия на стенках системы и начальное условие задавались в виде

$$\tilde{\psi}(\pm \zeta_L, \tau) = 0, \quad \tilde{\psi}(\zeta, \tau = 0) = \tilde{\psi}_0(\zeta). \quad (11)$$

Было проведено численное интегрирование уравнения ШЛК при заданных начальном и граничных условиях. Поскольку уравнение является нелинейным, использовался итерационный конечно-разностный метод установления по псевдовремени, который является аналогом метода простых итераций. Производные по координате аппроксимировались со вторым порядком точности, временные производные также вычислялись со вторым порядком точности за исключением тех моментов времени, где внешний потенциал \tilde{U}_{ext} меняется скачком (первый порядок аппроксимации). В процессе вычислений контролировалось условие нормировки (7), которое сохранялось с высокой степенью точности (менее 10^{-6}). Реализованный численный метод также тестировался на простейших задачах (например, для гармонического осциллятора). Для получения приведенных ниже результатов в расчетах использовалась равномерная пространственно-временная сетка с шагом по времени $\Delta \tau_{\text{сетки}} = \pi/1024$ и с 400 узлами по координате.

2. Собственные колебания пространственно ограниченного квантового осциллятора

Специфика рассматриваемой квантовой системы, как отмечалось выше, состоит в том, что квадратичный потенциал задан на конечном отрезке $[-\zeta_L; \zeta_L]$ между стенками системы. Как известно [18], энергетический спектр такой системы становится неэквидистантным. При малых номерах квантовых состояний он с высокой степенью точности совпадает со спектром квантового гармонического осциллятора. Однако с ростом номера состояния происходят изменения в структуре спектра. При достаточно больших номерах можно ожидать переход к состояниям частицы в потенциальной яме без квадратичного потенциала. Характер спектров и динамика квантовых волновых пакетов при отсутствии диссипации изучалась нами ранее [19]. Обычный классический резонанс при периодическом импульсном воздействии на такой пространственно ограниченный осциллятор был исследован в деталях в работе [20]. Прежде чем перейти к изложению динамики квантовых волновых пакетов в диссипативной системе с импульсной накачкой, рассмотрим более простые режимы движения, когда импульсная накачка (3) «выключена» и трение отсутствует, то есть $\tilde{U}_{\text{ext}} = 0$, $k = 0$. В этих режимах характер динамических свойств зависит от начальных условий: отклонения пакета от состояния равновесия, начальной скорости и, соответственно, степени приближения средней координаты $\langle \zeta \rangle$ к ζ_L , то есть к стенкам системы. Рассмотрим простейший вариант начальных условий в форме гауссова пакета, размещенного в центре системы, но с малой начальной скоростью

$$\tilde{\psi}_0(\zeta) = A \exp\left(-\frac{1}{2}\zeta^2 + iV_0\zeta\right), \quad (12)$$

где A определяется из условия нормировки, а $V_0 \simeq \langle V \rangle$ характеризует скорость центра гауссова пакета в начальный момент времени. При малых скоростях V_0 можно организовать режимы колебательного движения, соответствующие или близкие к режиму квантового гармонического осциллятора на неограниченном интервале $(-\infty; \infty)$. В этих режимах колебания происходят на собственной частоте осциллятора $\Omega = 1$. Анализ реализаций и фурье-спектров динамических переменных и их средних подтверждают возможность таких колебаний, если V_0 достаточно мала. Простейший пример таких колебаний, когда осциллятор возбуждается при помощи одиночного импульса, рассмотрен для параметров системы: $\tilde{F}_0 = -0.5$, $\Delta\tau = \pi/16$, $k = 0$, начальный гауссов пакет соответствует основному состоянию, а начальная скорость $V_0 = 0$. Вычисления проведены для $\zeta \in [-4; 4]$, $\tau \in [0; 300]$. Длительность одиночного импульса накачки, включаемого в момент $\tau = 0$ и выключаемого в момент $\tau = \Delta\tau$, много меньше периода собственных колебаний, равного 2π . Реализации для средних значений координаты и скорости как функции времени даны на рис. 1, а, а фурье-преобразование временной зависимости средней координаты $\langle \zeta \rangle$ дано на рис. 1, б. В этом простом режиме отклонение $\langle \zeta \rangle$ от равновесного значения, равного нулю, много меньше полуширины системы ζ_L . Влияние стенок не сказывается на спектре колебаний, который имеет одну собственную частоту $\Omega = 1$ (см. рис. 1, б), фурье-компонента для средней координаты $F_{\langle \zeta \rangle}(1) \simeq 2.5 \cdot 10^{-3}$ является единственной спектральной линией. Рассматриваемому движению на фазовой

плоскости ($\langle \zeta \rangle$, $\langle V \rangle$) соответствует замкнутая траектория. Варьируя начальные условия, можно получить континуум фазовых траекторий, вложенных одна в другую.

Однако при увеличении начальной скорости V_0 или интенсивности импульса накачки до значений, при которых среднее значение $\langle \zeta \rangle$ становится сравнимым с ζ_L , характер временных реализаций $\langle \zeta \rangle$ и их фурье-спектров существенно изменяется. Например, для динамического режима, определяемого параметрами $\tilde{F}_0 = 0$, $\Delta\tau = \pi/16$, $k = 0$, $V_0 = -10$, временная реализация $\langle \zeta \rangle$ имеет области интенсивных колебаний, слабых колебаний, а также области, где они отсутствуют вовсе (рис. 2, а). Фурье-спектр колебаний становится сложным; функциональная зависимость $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$ имеет широкополосный максимум и набор отдельных спектральных линий, огибающие которых также характеризуются максимумами (рис. 2, б). Проведенный анализ энергетических уровней λ_n стационарных состояний и разностей между соседними уровнями $\Delta\lambda_n$ показывает близость отдельных значений $\Delta\lambda_n$ к частотам спектра Ω временной зависимости $\langle \zeta \rangle$.

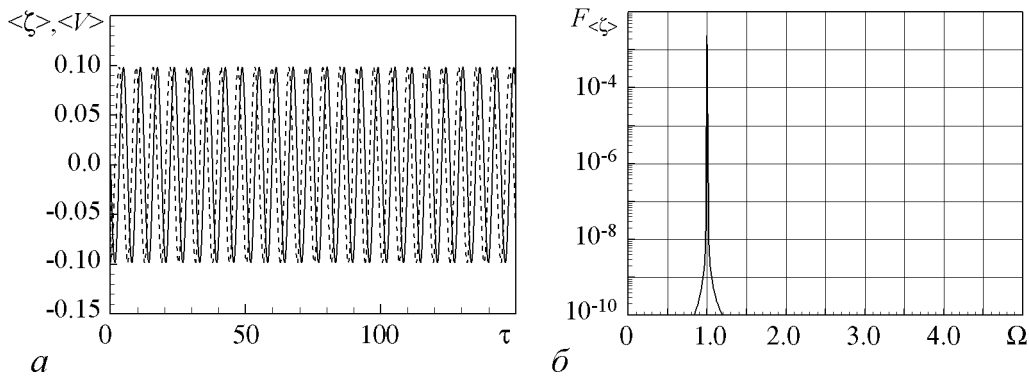


Рис. 1. Гармонические колебания пространственно ограниченного осциллятора при малой величине \tilde{F}_0 одиночного импульса: а – временные реализации $\langle \zeta \rangle$ (сплошная линия) и $\langle V \rangle$ (штриховая линия) с малым отклонением от равновесия, $\langle \zeta \rangle \ll \zeta_L$; стенки не оказывают существенного влияния на динамику колебаний; б – частотный отклик; точность расчета фурье-спектра достигает 10^{-8} (даже при такой точности не обнаружено сильное уширение спектральной линии)

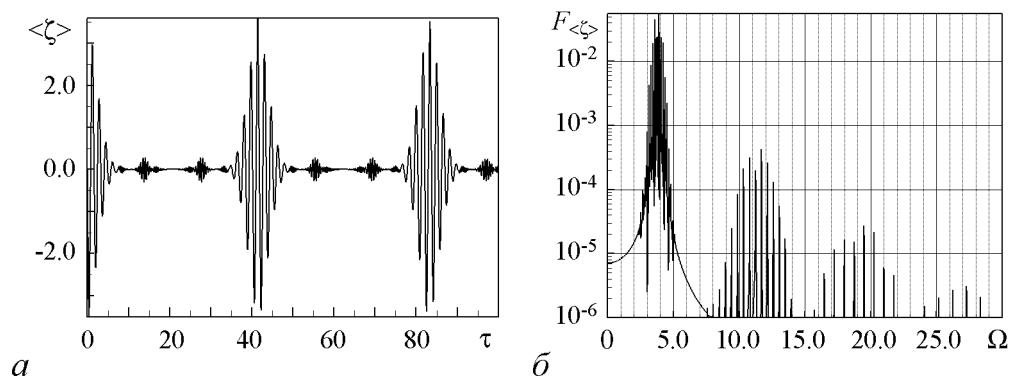


Рис. 2. Влияние стенок на спектр колебаний при высокой начальной скорости квантового пакета: а – структура временных колебаний, $\langle \zeta \rangle$ близко к ζ_L ; отметим присутствие в колебаниях биений, обусловленных большим числом спектральных компонент; б – формирование многочастотного спектра; частота осциллятора отсутствует

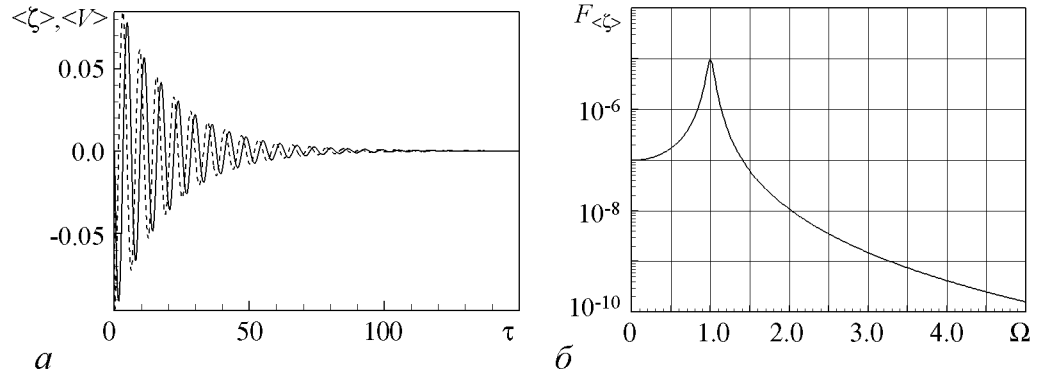


Рис. 3. Пространственно ограниченный осциллятор с трением в режиме слабых колебаний: *a* – затухание собственных колебаний средней координаты (сплошная линия) и средней скорости (штриховая линия) происходит по экспоненциальному закону аналогично классическому случаю; *б* – уширение спектральной линии

Имея эти результаты как исходные, можно перейти к изучению диссипативных динамических процессов. В качестве иллюстрации рассмотрим динамический режим, характеризующийся параметрами $\Delta\tau = \pi/16$, $k = 0.1$, $V_0 = 0$; осциллятор возбуждается под действием одиночного импульса с $\tilde{F}_0 = -0.5$. Временные реализации для $\langle \zeta \rangle$, $\langle V \rangle$ и фурье-преобразование представлены на рис. 3, *a*, *б*, соответственно. Динамические средние $\langle \zeta \rangle$, $\langle V \rangle$ стремятся к нулю. Как и в классической механике, имеем осциллятор с затуханием, отдельную спектральную линию с уширением на демпфированной частоте $\Omega_d = \sqrt{1^2 - (1/4)k^2}$. Система переходит в основное состояние, при этом произведение стандартных отклонений $\sigma_\zeta \sigma_V$ равно 0.5. Это соответствует минимизированной величине для основного состояния гармонического осциллятора. Аналогичные результаты были получены для осциллятора с трением на неограниченном интервале $(-\infty; \infty)$ в рамках уравнения Добнера – Голдина [21,22]. В этих работах были найдены точные аналитические решения и асимптотический переход к стационарному состоянию – «аттрактору в гильбертовом пространстве». В отличие от этих результатов мы развиваем теорию пространственно ограниченного осциллятора на отрезке $[-\zeta_L; \zeta_L]$ в рамках уравнения ШЛК. Следует отметить, что переход в основное стационарное состояние при разных V_0 изучался нами в статье [23] для ограниченного осциллятора с квадратичным потенциалом и в системе с двумя полиномиальными ямами.

3. Вынужденные колебания квантового волнового пакета

Теперь можно перейти к основной задаче, когда на систему действует импульсная накачка, представляемая формулой (3). Для сравнения с предыдущим результатом, когда включается одиночный импульс, сохраним значения параметров задачи $\tilde{F}_0 = -0.5$, $\Delta\tau = \pi/16$, $k = 0.1$. Период повторения импульсного воздействия $T = 2\pi$. Начальное условие осталось прежним, то есть в виде гауссова пакета с начальной нулевой скоростью. Динамический режим с указанными значениями параметров будем условно называть основным. По отношению к нему другие динамические режимы могут отличаться величиной какого-либо одного параметра: V_0 ,

Δt , T , или одновременно несколькими. Для анализа динамики квантового волнового пакета проведены достаточно подробные исследования карты уровней плотности вероятности на плоскости (ζ, τ) , ее распределений по координате ζ в фиксированные моменты времени τ , временной зависимости средних значений координаты и скорости пакета, а также соотношения неопределенностей. Кроме того, исследована и показана независимость установившихся колебаний пакета и динамических средних от начальных условий, проведены расчеты фазовых траекторий, точечных отображений и устойчивости периодических колебаний.

Функция двух переменных $N = N(\zeta, \tau)$ может рассматриваться в трехмерном пространстве (ζ, τ, N) как уравнение поверхности, где N – высота, а ζ, τ – координаты точки в горизонтальной плоскости. Если построить сечения поверхности плоскостями $N = \text{const}$ и затем спроектировать полученные линии уровня на плоскость (ζ, τ) , то получим карту уровней плотности вероятности. Используя различные цвета, легко построить довольно подробную картину рельефа. Ниже проведены расчеты для параметров основного режима. На рис. 4, а более светлые тона соответствуют большим значениям N , а более темные – меньшим. Несмотря на упрощения, имеем вполне приемлемую картину динамических процессов.

Как видно из рис. 4, а, карта уровней плотности вероятности на временном интервале $(0, 60)$, содержащем около десяти периодов, соответствует переходному процессу. На этом интервале отклонения квантового волнового пакета от равновесного положения постепенно увеличиваются, пока не достигнут определенных значений, после чего картина колебаний сохраняется. В соответствии с эволюцией N происходят колебания средних величин $\langle \zeta \rangle, \langle V \rangle$ во времени (рис. 4, б). Фурье-преобразование $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$, соответствующее временной реализации $\langle \zeta \rangle$, имеет вид, приведенный на рис. 4, в. На временном интервале $(0, 150)$ колебания имеют инкрементный участок, а затем в системе устанавливается режим колебаний с постоянной амплитудой. Такое поведение является характерным для аналогичных колебательных систем в классической механике. Фурье-преобразование $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$ имеет резко выраженную отдельную фурье-компоненту $F_{\langle \zeta \rangle}(1)$. Ее форма имеет вид пика, который уширяется относительно $\Omega = 1$. Постоянная составляющая $F_{\langle \zeta \rangle}(0) \simeq 10^{-2} F_{\langle \zeta \rangle}(1)$, высшие гармоники $F_{\langle \zeta \rangle}(2), F_{\langle \zeta \rangle}(3)$ очень слабые. Следует отметить, что фурье-спектр сигнала, задаваемого формулой (3) для $\tau \in [0; 300]$, $T = 2\pi$, $\Delta t = \pi/16$, имеет множество высших гармоник, амплитуда которых очень медленно уменьшается с ростом номера гармоники. Однако, как видно из рис. 4, в, в частотном отклике все высшие гармоники $F_{\langle \zeta \rangle}(n)$ при $n > 4$ исчезают полностью. Для последующего анализа удобно ввести фазовое пространство $(\langle \zeta \rangle, \langle V \rangle, \tau)$ и проекции фазовых траекторий на плоскость $(\langle \zeta \rangle, \langle V \rangle)$. Ради упрощения вместо термина «проекция фазовой траектории» будем использовать термин «фазовая траектория на плоскости». Фазовая траектория на плоскости $(\langle \zeta \rangle, \langle V \rangle)$ для параметров рассматриваемого основного динамического режима представлена на рис. 4, г, она исходит из начальной точки $\langle \zeta \rangle = 0, \langle V \rangle = 0$ на фазовой плоскости, раскручивается изнутри по спирали и навивается на предельную траекторию.

Для изучения свойств предельной траектории следует выполнить точечные преобразования, а также проверить теорему Кенигса [10, 11, 15] и показать устойчивость решений. Вначале изучим множество дискретных точек $X_n = (\langle \zeta \rangle_n, \langle V \rangle_n)$ на фазовой плоскости в моменты времени nT , $n=0, 1, 2, \dots$. На рис. 4, д дан после-

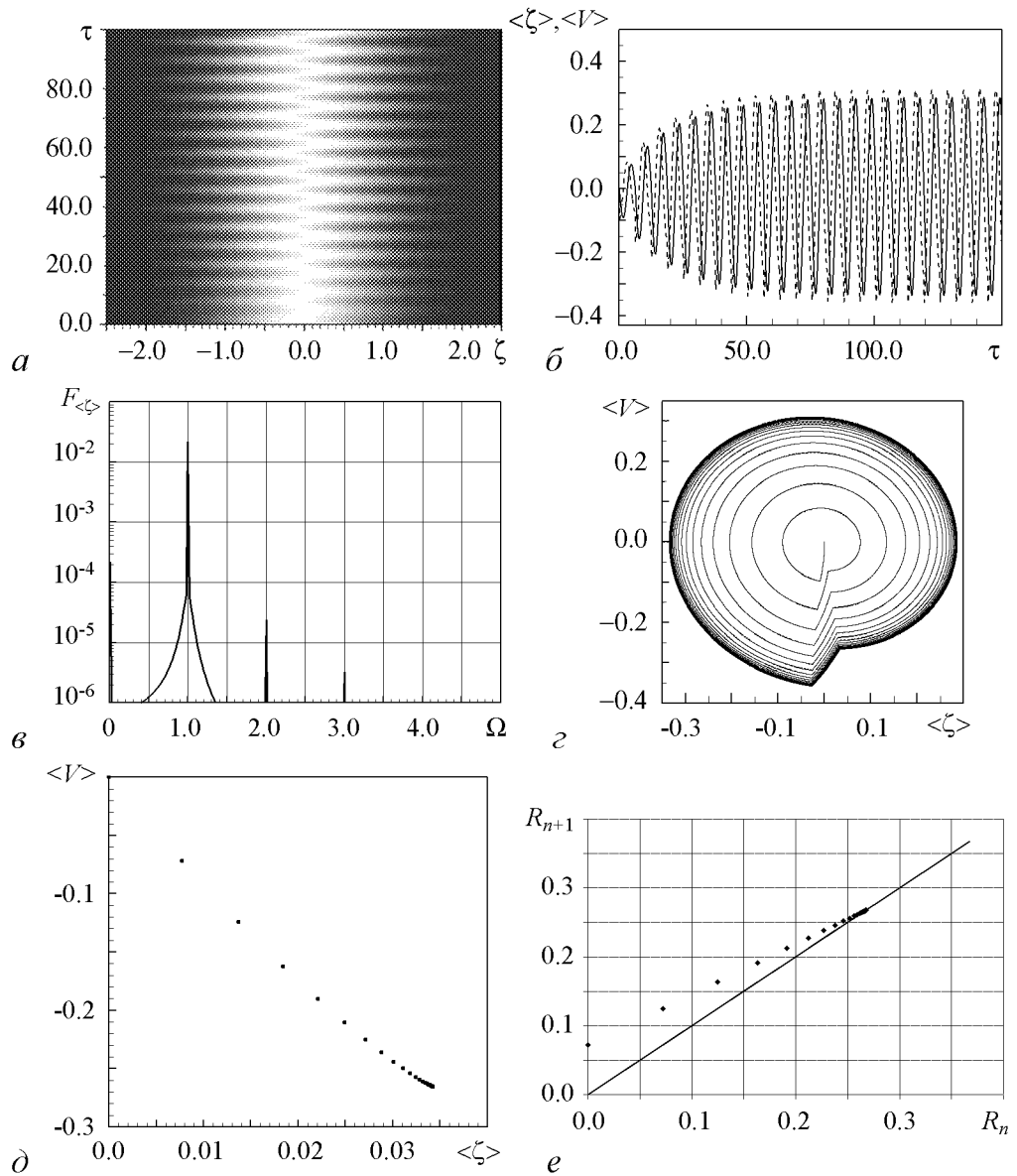


Рис. 4. Вынужденные колебания для параметров основного динамического режима: *a* – карта уровней плотности вероятности; *b* – эволюция динамических средних; *в* – фурье-преобразование временной зависимости $\langle \zeta \rangle$; в фурье-спектре присутствуют не только частота внешнего воздействия, но и её высшие гармоники; *г* – фазовые траектории на плоскости $(\langle \zeta \rangle, \langle V \rangle)$; под действием первого импульса накачки фазовая точка смещается из исходного положения (начало координат), раскручивается по спирали, получает очередной импульс и т.д.; каждая очередная спираль удаляется от начала координат, пока не достигнет предельного положения (аттрактора); *д* – стробоскопическое отображение; точки X_n , соответствующие моментам времени $\tau_n = nT$, $n = 0, 1, \dots$, характеризуют постепенный переход к предельной точке и установившимся колебаниям; *e* – точечные отображения $R_{n+1} = f(R_n)$; на графике расстояния между соседними точками уменьшаются, последовательность R_n стремится к предельной точке R_c ; в точке R_c модуль производной $|df/dR| = 0.73$, поэтому колебания устойчивы

довательный набор точек от заданной начальной $X_0 (\langle \xi \rangle_0, \langle V \rangle_0) = 0$ до некоторой конечной $X (0.034, 0.27)$. Расстояния между соседними точками постепенно уменьшаются, возникает область сгущения и переход к предельной точке. В дополнение можно также ввести определение расстояния на фазовой плоскости при помощи соотношения

$$R_n = \sqrt{\langle \xi \rangle_n^2 + \langle V \rangle_n^2}, \quad (13)$$

построить график зависимости $R_{n+1} = f(R_n)$ и определить неподвижную точку, соответствующую установившимся колебаниям. График этой зависимости представлен на рис. 4, *e*. Последовательность R_n стремится к неподвижной точке R_c . Модуль производной в этой точке, рассчитываемый как

$$\left. \frac{df}{dR} \right|_{R=R_c} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_{n+1} - R_n}{R_n - R_{n-1}}, \quad (14)$$

равен 0.73. В соответствии с теоремой Кенигса это означает существование устойчивого аттрактора. Прежде чем перейти к другим начальным условиям, обсудим структурные свойства квантового волнового пакета для параметров основного режима.

Координатная зависимость функции N в фиксированные моменты времени дает информацию о пространственном распределении плотности вероятности, которое определяет динамические свойства. При больших временах имеем динамический режим с установившимися колебаниями, типичная картина имеет вид, приведенный на рис. 5, *a*. Квантовый волновой пакет остается достаточно локализованным, его ширина на половинном уровне N составляет примерно 0.24 от размера ямы. С течением времени он смещается от исходного положения как целое (см. рис. 5, *a*). Для указанных фиксированных моментов времени координатная зависимость N изучалась при помощи расчетов фурье-преобразования $F_N(q)$ (рис. 5, *b*). График представляет монотонно спадающую зависимость от q (волнового числа для координатного фурье-преобразования). При изменении $F_N(q)$ от $2 \cdot 10^{-2}$ до 10^{-4} величина q увеличивается от 0 до 3.0, то есть $\Delta q \simeq 3.0$. Изменения положения пакета в пространстве,

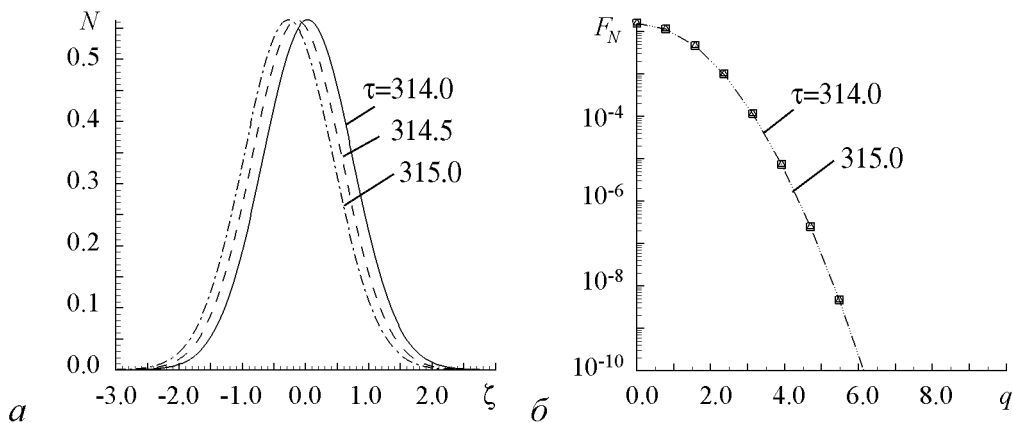


Рис. 5. Структурные свойства квантового волнового пакета: *a* – распределение плотности вероятности по координате в разные моменты времени; отметим неизменность формы квантового волнового пакета при колебаниях с трением; *b* – Фурье-преобразование координатного распределения

соответствующие разным моментам времени, не меняют вида функциональной зависимости $F_N(q)$ и спектра волновых чисел. Таким образом, для установившихся колебаний спектр волновых чисел и пространственная форма квантового волнового пакета сохраняются во времени.

Дополнительно были проведены расчеты стандартных отклонений σ_ζ , σ_V и соотношения неопределенностей как функции времени τ для основного режима движения. Функции σ_ζ , σ_V не зависят от времени, и их произведение $\sigma_\zeta\sigma_V$ сохраняет постоянное значение, равное 0.5. Это соответствует минимизированному квантовому волновому пакету. Площадь $S = 0.5 \int_0^{2\pi} R^2 d\varphi$, ограниченная предельной траекторией на фазовой плоскости, равна 0.3065006 и сохраняется с высокой степенью точности при изменении начальной скорости.

Динамические режимы, параметры которых отличаются от основного только тем, что начальные гауссовы пакеты обладают ненулевыми скоростями, были исследованы также достаточно подробно. Обозначая среднюю скорость на предельной траектории V_c , рассмотрим режимы движения при $|V_0| > |V_c|$ для $V_0 = -0.5, -2.0, -10.0$. Результаты численного моделирования для $V_0 = -0.5$ приведены на рис. 6. В отличие от основного режима на интервале $(0, 150)$, колебания $\langle \zeta \rangle, \langle V \rangle$ имеют декрементный участок, а затем участок с постоянной амплитудой. По-прежнему, наиболее интенсивной является фурье-компонента $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$ при $\Omega = 1$, нулевая и

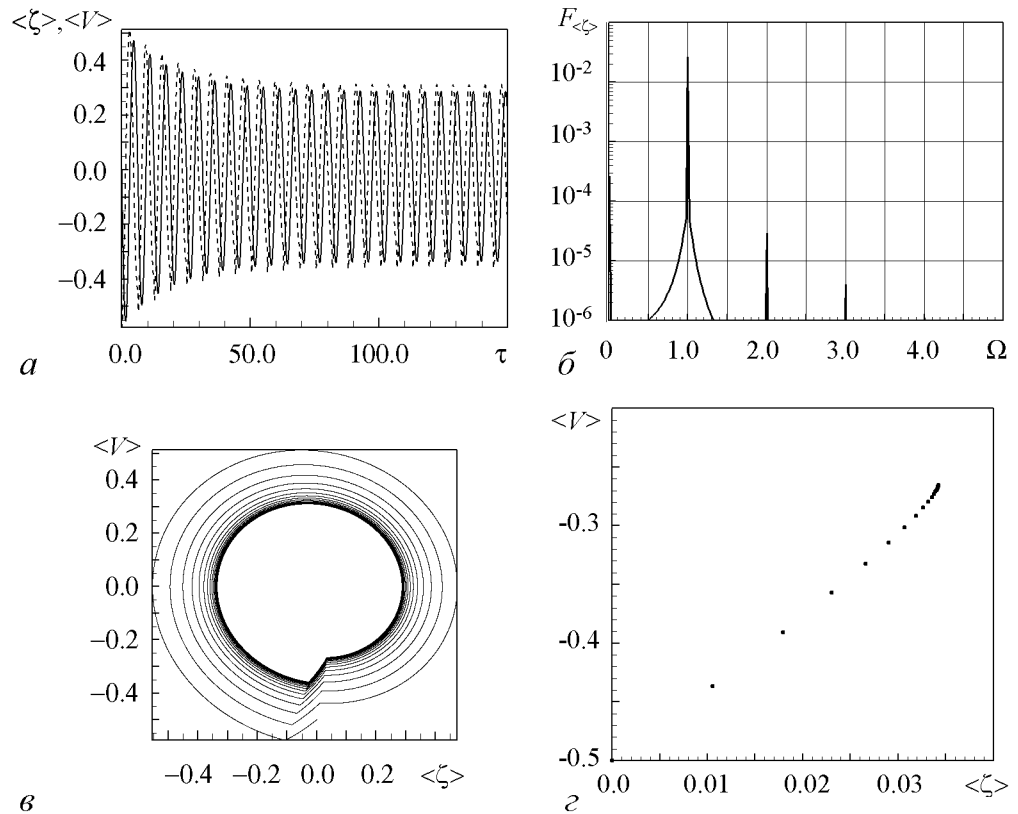


Рис. 6. Независимость установившихся колебаний от начальных условий: а – переходный участок и стационарный характер колебаний; б – фурье-преобразование временной зависимости $\langle \zeta \rangle$; в – переход к предельной фазовой траектории снаружи; г – стробоскопическое отображение

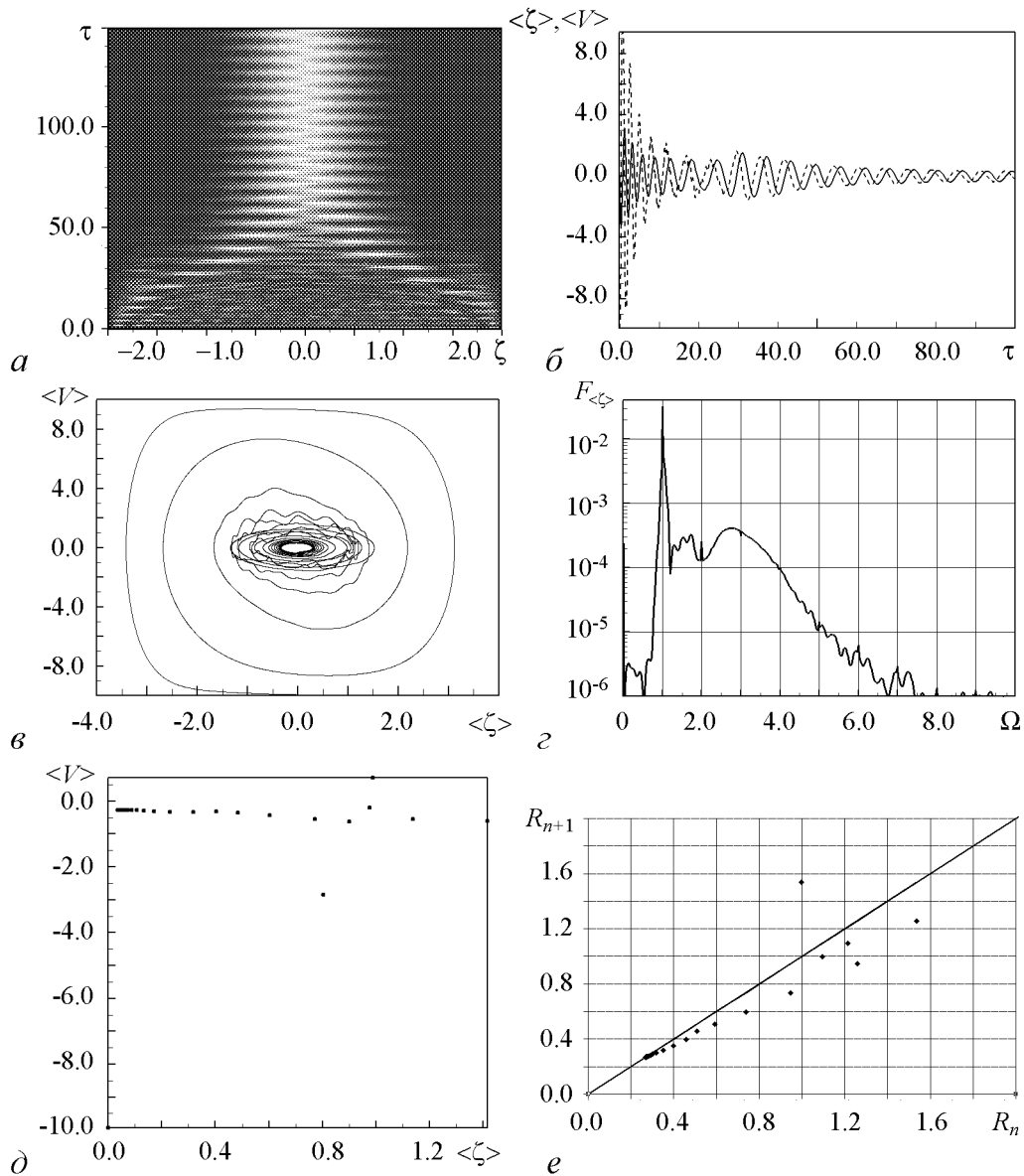


Рис. 7. Переход к предельной фазовой траектории при высокой начальной скорости гауссова пакета: *a* – карта уровней плотности вероятности; по сравнению с основным режимом (см. рис. 4, *a*) карта уровней характеризуется более сложным рельефом; *b* – временная эволюция динамических средних $\langle \zeta \rangle$, $\langle V \rangle$; в переходной области можно отметить крупномасштабную модуляцию, а затем установление колебаний с постоянной амплитудой; *в* – переход к предельной фазовой траектории; с течением времени происходит уменьшение амплитуд $\langle \zeta \rangle$, $\langle V \rangle$, и траектория свертывается до предельной; *г* – частотный отклик; наряду с компонентами $F_{\langle \zeta \rangle}(1)$, $F_{\langle \zeta \rangle}(0)$ спектр частот имеет широкополосный участок, обусловленный влиянием стенок; *д* – стробоскопическое отображение; переходная область колебаний характеризуется заметным разбросом точек X_n ; с течением времени разброс и расстояние между соседними точками уменьшаются, возникает предельная точка; *е* – точечные отображения $R_{n+1} = f(R_n)$; с увеличением n расстояние между соседними точками уменьшается, и последовательность R_n стремится к R_c ; $|df/dR|$ в точке R_c , как и в основном режиме, равна 0.73 и характеризует устойчивость колебаний; несмотря на влияние стенок в переходной области, установившийся режим совпадает с основным

высшие гармоники возбуждаются слабо. Фазовая траектория начинается снаружи от предельной траектории, перемещается по спирали, испытывая малые скачки при воздействии импульсов накачки, пока не осядет на предельную траекторию (рис. 6, в). Предельная траектория практически совпадает с таковой для основного динамического режима (см. рис. 4, з). Это демонстрирует независимость от начального условия. Множество дискретных точек $X_n = (\langle \zeta \rangle_n, \langle V \rangle_n)$ в последовательные моменты времени nT , $n = 0, 1, 2, \dots$ сходится к предельной точке (рис. 6, з), которая характеризует устойчивые периодические колебания. Расчеты для $V_0 = -2.0$ также приводят к аналогичным выводам о независимости от начального условия и устойчивости колебаний. На плоскости $(\langle \zeta \rangle, \langle V \rangle)$ фазовая точка стремится к предельной, что подтверждает установившийся характер колебаний. При достаточно высокой начальной скорости пакета $V_0 = -10.0$, карта уровней плотности вероятности характеризуется заметным фрагментарным распределением на временном интервале $(0, 50)$. Отдельные, более интенсивные фрагменты с течением времени удаляются от стенок системы, а внутренняя, более темная область постепенно исчезает (рис. 7, а). Колебания средних $\langle \zeta \rangle, \langle V \rangle$, обусловленные эволюцией квантового волнового пакета, имеют переходный участок; затем, при достаточно больших τ (расчеты проводились в интервале $(0, 300)$) амплитуда колебаний становится постоянной (рис. 7, б). Фазовая траектория закручивается и переходит к предельной (рис. 7, в). Площадь S , ограниченная предельной фазовой траекторией, равна 0.3065007 и практически такая же, как и для основного динамического режима. Предельная траектория имеет такую же конфигурацию, как и в основном режиме, когда фазовая траектория раскручивалась изнутри.

Фурье-спектр, выражающий частотный отклик для средней координаты, имеет наиболее интенсивную компоненту $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$ на частоте $\Omega = 1$, то есть на частоте повторения импульсов $\Omega_{\text{ext}} = 1$ (рис. 7, з). Численные значения $F_{\langle \zeta \rangle}(1)$ для просчитанных динамических режимов близки друг другу. Стробоскопическое отображение и соответствующее ему точечное отображение $R_{n+1} = f(R_n)$ даны на рис. 7, д, е, при этом в неподвижной точке модуль производной $|df/dR| \approx 0.7$. Согласно теореме Кенигса это означает, что предельная траектория и колебания устойчивы.

Обсуждение результатов

В проведенных расчетах мы ограничились неизменной величиной управляющего параметра \tilde{F}_0 . Другие параметры, а именно: $\Delta\tau = \pi/16$, $k = 0.1$, $\Omega \simeq 1$, $\Omega_{\text{ext}} = 1$, были выбраны с целью получения колебательных решений, которые можно сравнивать с классическими аналогами. В качестве классического аналога можно рассматривать колебания осциллятора с линейным трением и внешней силой, задаваемой в виде периодической последовательности кратковременных импульсов. Анализ частотного спектра решений такой классической задачи показывает, что сильно возбуждается основная частота повторения импульсов, высшие гармоники являются слабыми, поэтому имеет место сходство с классическими результатами. Другими словами, в рамках квантового динамического описания, когда существенны квантовые волновые закономерности, реализуется классический механизм вынужденных колебаний. В рамках модели Шредингера – Ланжевена – Костина диссипативная си-

ла не проявляет своей деструктивной роли в разрушении квантовой когерентности. Колебания квантовых волновых пакетов, соответствующие предельной траектории на фазовой плоскости, характеризуются минимизированным соотношением неопределенностей.

Существенную роль в формировании установившихся колебаний играет основная частота повторения импульсов, определяемая как $\Omega_{\text{ext}} = 2\pi/T$. В спектрах частот, характеризующих отклик системы во всех режимах, она имеет доминирующее значение. Демпфированная частота собственных колебаний при слабой диссипации мало отличается от частоты осциллятора $\Omega = 1$. В основном динамическом режиме частота накачки Ω_{ext} , равная 1, близка к Ω_d . Варьируя периоды импульсов накачки, например, полагая $T_1 = 2\pi + \pi/16$, $T_2 = 2\pi - \pi/16$, в спектрах обнаруживаем опять доминирующую роль частот $\Omega_{\text{ext}} = 2\pi/T_1$, $\Omega_{\text{ext}} = 2\pi/T_2$, а собственная частота явно не обнаруживается. В динамических режимах, когда частота Ω_{ext} , соответствующая периоду импульсной накачки, заметно отличается от демпфированной частоты осциллятора Ω_d , также реализуется режим с установившимися колебаниями. Однако, фурье-преобразование временной зависимости $\langle \zeta \rangle$ показывает, что спектр частот усложняется, и роль собственных колебаний становится более существенной. Например, если динамический режим отличается от основного тем, что параметр $T = 3\pi$ или $\Omega_{\text{ext}} = 2/3$, частотный спектр функции $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$ содержит основную частоту Ω_{ext} и ее высшие гармоники $n\Omega_{\text{ext}}$, $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$, а также частоту осциллятора Ω_d . Теперь пик $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$ на частоте Ω_d обнаруживается явно. Интенсивности спектральных пиков для Ω_{ext} и Ω_d практически одинаковы. Однако при указанном различии частот Ω_{ext} и Ω_d амплитуда установившихся колебаний почти в десять раз меньше, чем в основном динамическом режиме. Из сравнения результатов вычислений следует, что динамический режим при $\Omega_{\text{ext}} \simeq \Omega_d$ наиболее оптимальный, так как амплитуда колебаний наибольшая. Увеличение длительности импульса накачки приводит к возрастанию амплитуд колебаний $\langle \zeta \rangle_c, \langle V \rangle_c$. Расчеты динамических режимов были проведены при $\Delta t < 0.5T$ для разных V_0, T . Эти расчеты подтверждают качественные результаты и выводы, изложенные в предыдущем разделе.

Библиографический список

1. *Ford G.W., Kac M., and Mazur P.* Statistical mechanics of assemblies of coupled oscillators // J. Math. Phys. 1965. Vol. 6, № 4. P. 504.
2. *Kostin M.D.* On the Schrödinger-Langevin equation // J. Chem. Phys. 1972. Vol. 57(9). P. 3589.
3. *Wagner Heinz-Jurgen.* Schrödinger quantization and variational principles of dissipative quantum theory // Z. Phys. B. 1994. Vol. 95. P. 261.
4. *Albrecht K.* A new class of Schrödinger operators for quantized friction // Phys. Lett. 1975. Vol. 56B, № 2. P. 127.
5. *Hasse R.W.* On the quantum mechanical treatment of dissipative systems // J. Math. Phys. 1975. Vol. 16, № 10. P. 2005.

6. *Doebner H.-D., Goldin G.A.* Introducing nonlinear gauge transformation in a family of nonlinear Schrödinger equations // *Phys. Rev. A.* 1996. Vol. 54, № 5. P. 3764.
7. *Wysocki R.J.* Hydrodynamic quantization of mechanical systems // *Phys. Rev. A.* 2005. Vol. 72. P. 032113-1.
8. *Ván P., Fülöp T.* Stability of stationary solutions of the Schrödinger-Langevin equation // *Phys. Lett. A.* 2004. Vol. 323. P. 374.
9. *Санин А.Л.* Квантовый транспорт электрона в пространстве с однородным положительным зарядом и световой волной // *Оптика и спектроскопия.* 1994. Т. 77, № 5. С. 822.
10. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: ГИФМЛ, 1959.
11. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980.
12. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1984.
13. *Мизгулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н.* Основы теории колебаний. М.: Наука, 1988.
14. *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны. М.: Наука – Физматлит, 1997.
15. *Карлов Н.В., Кириченко Н.А.* Колебания, волны, структуры. М.: Физматлит, 2001.
16. *Эрроусмит Д., Плейс К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. М.: Мир, 1986.
17. *Grindlay J.* On an application of a generalization of the discrete Fourier transform to short time series // *Can. J. Phys.* 2001. Vol. 79. P. 857.
18. *Mott N., Sneddon I.* Wave mechanics and its applications. Oxford and the Clarendon Press. 1948, 427 p.
19. *Багманов А.Т., Санин А.Л.* Квантовая динамика микрочастицы в одномерных системах // *Научно-технические ведомости СПбГТУ.* 2005. № 4. С. 7.
20. *Багманов А.Т., Санин А.Л.* Резонансы пространственно ограниченного квантового осциллятора // *Успехи современной радиоэлектроники.* 2005. № 12. С. 46.
21. *Ushveridze A.G.* Dissipative quantum mechanics. A special Doebner-Goldin equation, its properties and exact solutions // *Phys. Lett. A.* 1994. Vol. 185. P. 123.
22. *Ushveridze A.G.* The special Doebner-Goldin equation as a fundamental equation of dissipative quantum mechanics // *Phys. Lett. A.* 1994. Vol. 185. P. 128.
23. *Smirnovsky A.A., Sanin A.L.* Temporal resonances and structures in quantum systems under dissipation // *Proceedings of SPAS jointly with UWM. Tenth Intern. Workshop on NDTSC-2006. 5-8 July 2006. Univ. of Warmia and Mazury in Olsztyn. Olsztyn, Poland. 2006. Vol. 10. P. 43.*

*Санкт-Петербургский государственный
политехнический университет*

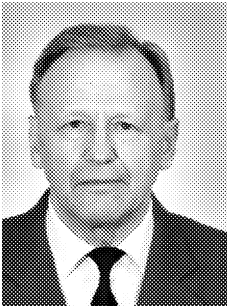
*Поступила в редакцию
После доработки*

*02.02.2007
10.05.2007*

DRIVEN OSCILLATIONS OF QUANTUM WAVE PACKETS IN SYSTEM WITH FRICTION, QUADRATIC POTENTIAL AND IMPENETRABLE WALLS

A.L. Sanin, A.A. Smirnovsky

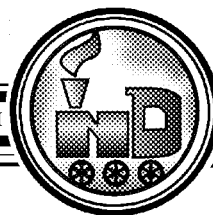
The quantum dissipative system with quadratic potential confined by infinite walls of well and subjected to impulse pump was investigated in detail. The numerical simulation was carried out in context of the Schrödinger-Langevin-Kostin equation. The propagation of quantum wave packets, calculations of phase trajectories and mappings, dynamical averages, frequency spectra have been performed and discussed. These data allow to state the existence of the stable oscillatory regimes and correspondence with classic analogous systems.



Санин Андрей Леонардович – родился в Ленинграде (1935). Окончил Ленинградский политехнический институт (1963), инженер-физик. Работает на кафедре «Теоретическая физика» Санкт-Петербургского государственного политехнического университета (СПбГПУ), доктор физико-математических наук, профессор кафедры. Область научных интересов: качественный анализ и численное моделирование электронных волн, структур, квантовая динамика гамильтоновых и диссипативных систем, фундаментальное образование. По данной тематике имеет более 150 публикаций.



Смирновский Александр Андреевич – родился в Ленинграде (1982). Окончил СПбГПУ (2005), магистр по направлению «Прикладная математика и физика». В настоящее время аспирант кафедры «Теоретическая физика» СПбГПУ. Область научных интересов: квантовая механика, гидроаэродинамика, нелинейные и диссипативные системы, численные методы. Опубликовал около 20 работ, включая тезисы докладов.



ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЙ СЕВЕРНОГО ПОЛЮСА ЗЕМЛИ С ПОМОЩЬЮ ОТОБРАЖЕНИЙ НА ПЕРИОДЕ ВНЕШНЕЙ СИЛЫ

Н.Н. Иващенко, Н.С. Сидоренков, Д.М. Сонечкин

Из обработки астрономических наблюдений известно, что движения Северного полюса Земли состоят из тренда в направлении Гренландии и наложенной на этот тренд вращательной компоненты, в которой доминируют периоды в 12 месяцев, вызываемые сезонным перераспределением масс в атмосфере и гидросфере Земли, и периоды, примерно, в 14 месяцев, называемые чандлеровскими, природа которых не ясна. Из-за несоизмеримости этих периодов во временных рядах координат полюса видны примерно шести-семилетние биения. До сих пор не установлено с определенностью, каков характер этих биений. Цель настоящей работы – прояснить этот вопрос, используя ряд наиболее точных данных о координатах Северного полюса за период с 5 января 1962 года до 18 июля 2004 года (временная дискретность ряда – пять дней). Для этого использована математическая техника точечных отображений на секущих фазовых траекториях, построенных по годовому периоду внешней силы. Найдено, что частота биений меняется квазипериодическим образом, а их амплитуда зависит от сезонов года.

В 1765 году (более двухсот лет назад!) для описания вращения Земли как твердого тела Л. Эйлер [1] вывел систему трех квадратично-нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 &= (B - C)\omega_2\omega_3, & B\dot{\omega}_2 &= (C - A)\omega_1\omega_3, \\ C\dot{\omega}_3 &= (A - B)\omega_1\omega_2, & C > B > A > 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где A, B, C и ω_i ($i = 1, 2, 3$) – компоненты момента инерции и вектора мгновенной угловой скорости Земли, соответственно.

Принимая во внимание, что экваториальное сечение фигуры Земли почти не отличается от окружности, а именно: $\varepsilon = (B - A)/C \approx 10^{-5}$, Эйлер предположил, что (1) можно редуцировать к уравнению линейного осциллятора

$$\ddot{\omega}_i = -\Omega^2\omega_i, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

если положить $\varepsilon = 0$, то есть $B = A$. При этом частота $\Omega = (C - A)\omega_3/A$ дает период свободной нутации Земли (периодических отклонений мгновенных координат полюсов от их среднего положения) в приблизительно десять месяцев.

О том, что небольшие периодические отклонения полюсов имеют место наряду с очень длительными и большими изменениями взаимного расположения полюсов и материков Земли, астрономы догадывались издавна. Эти периодические отклонения действительно очень невелики (сейчас они оцениваются как достигающие максимум 15 метров), но даже такие отклонения являются существенными для некоторых современных навигационных систем. Кроме того, нутация, как выяснено уже в наше время, возбуждает особый, распространяющийся с запада на восток противофазно в северном и южном полушариях прилив в атмосфере и океанах (он называется полюсным), который, как полагают некоторые исследователи, влияет на динамику погоды и короткопериодные колебания климата. В те же давние времена вопрос о существовании нутации представлял немалый познавательный интерес. Так, во второй половине XIX века проблемой движения полюсов Земли заинтересовался У. Томсон (лорд Кельвин). Он посчитал, что нахождение 305-дневного периода в этих движениях полюсов может послужить доказательством того, что Земля не является жидкой внутри, как тогда полагало большинство геологов. Авторитет лорда Кельвина был велик, и астрономы начали поиск соответствующего пика в энергетических спектрах движений полюсов по данным наблюдений изменений широт ряда географических пунктов (Берлина, Вашингтона, Пулкова и некоторых других). Точность этих наблюдений была достаточной для безусловного выявления нутации как таковой, но располагаемые ряды были слишком короткими для того, чтобы расчеты по ним энергетических спектров отклонений полюсов были надежными. Некоторые астрономы, правда, утверждали, что они нашли 305-дневный пик в этих спектрах. Однако в 1891 году американский любитель астрономии С. Чандлер провел очень аккуратные вычисления и нашел (см. [2] и последующие пять публикаций Чандлера в 1891–1892 годах) в энергетическом спектре движений Северного полюса Земли целых два, причем мощных, пика. Их периоды оказались резко отличными от периода эйлеровской свободной нутации. Они составили 12 месяцев и примерно 14 месяцев. Профессионалы сначала отвергали этот результат как недостоверный, но, в конце концов, признали его. Живое и подробное описание этой истории можно найти в книге Ю.А. Авсюка [3]. Обзоры современных результатов обработки данных астрономических наблюдений, которые подтверждают результат Чандлера, хотя и уточняют его в ряде отношений, можно найти в [4, 5].

Что касается периода в 12 месяцев, его происхождение вполне понятно (см., например, [6–8]): это – реакция вращения Земли на сезонное перераспределение масс в атмосфере и гидросфере, возникающая из-за стремления Земли в целом сохранять свой момент инерции. Однако природа колебания с периодом около 14 месяцев (его традиционно называют чандлеровским) остается до конца не понятой даже сейчас. Основную причину чандлеровского колебания многие исследователи видят в пластических деформациях внутренних сфер Земли [9], другие исследователи считают необходимым учитывать также магнитные поля Земли [10], а в [3], например, указано на необходимость рассмотрения совместных движений системы Земля – Луна, что должно приводить к перемещениям самой оси вращения внутри тела Земли.

Нам представляется важным обратить внимание на то, что в любом случае астрономы продолжают пользоваться линеаризованными уравнениями Эйлера. Вместе с тем, из теории асимптотических методов решений дифференциальных уравнений с малыми параметрами сейчас уже хорошо известно, что понижение порядка дифференциальной системы после пренебрежения малым параметром служит признаком

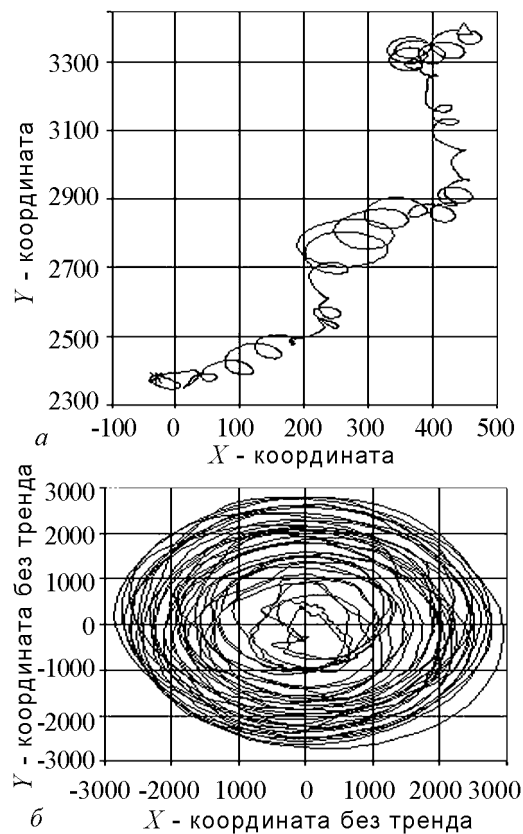


Рис. 1. *a* – траектория скользяще осредненных по шестилетнему периоду координат Северного полюса Земли, представляющая тренд полюса в общем направлении к Гренландии; начальная точка траектории дана звездочкой, конечная – треугольником. *b* – траектория отклонений координат полюса для последовательных пятidineвок в результате тренда для отрезка времени с 5.01.1962 по 18.07.2004, представляющая вращательную компоненту движений полюса

ординат полюса от нуля [14, 15]. Они представляли собой последовательности почти замыкающихся петель, и авторы истолковали это как свидетельство квазипериодичности рассматриваемой динамики. Однако петли почти полностью заполняли секущую плоскость. Не усматривалось даже общего для них центра вращения. Это может быть обязано наличию в движениях полюса систематического изменения – тренда и/или третьей существенной периодичности (внешней или собственной). Ясно, что при тренде нельзя получить отображение типа окружности или кольца, даже если число периодичностей определено правильно. Тренд сдвигает последовательные петли отображения друг относительно друга.

Для исключения тренда из ряда координат Северного полюса в настоящей работе использовано простое скользящее шестилетнее осреднение данных. Результат осреднения – тренд, то есть более или менее систематическое смещение координат полюса в общем направлении Гренландии, показан на рис. 1, *a*, а представляющие вращательную компоненту движений полюса отклонения координат полюса от тренда для последовательных пятidineвок за рассматриваемый период с 5 января 1962 по

сингулярности соответствующих возмущений, и, следовательно, недопустимости такого пренебрежения. Поэтому для объяснения чандлеровского колебания полюсов кажется необходимым [11] вернуться к исходным нелинейным уравнениям (1), а при анализе данных астрономических наблюдений за движениями полюсов исходить из их нелинейной природы [12]. Поэтому в [11] исходная система (1) была преобразована к виду двух кубично-нелинейных осцилляторов (типа осциллятора Дуффинга). Но анализ решений этих осцилляторов (в принципе, они выражаются через эллиптические функции) с целью выявить в них те признаки нелинейности, которые были найдены в данных астрономических наблюдений, например, наличие суб- и супергармоник основного чандлеровского колебания [12], затруднен. Поэтому имеет смысл использовать для анализа различные техники, применяемые при исследовании простых нелинейных динамических систем, в частности технику точечных отображений [13].

Техника отображений уже применялась при исследованиях движений Северного полюса. Так были построены отображения на секущей по годовому периоду для амплитуды отклонений координат полюса от нуля [14, 15].

18 июля 2004 – на рис. 1, б. На рис. 2 можно видеть, что обе координаты вращательной компоненты движений полюса и сама амплитуда этой компоненты обнаруживают примерно шестилетние биения. На рис. 3 для вращательной компоненты показаны отображения на сечениях фазовых траекторий этой компоненты по годовому периоду. На рис. 3, а показано отображение для текущей по фазе января, как и в вышеупомянутых работах [14, 15], а на рис. 3, б – по фазе июля. Сравнивая рис. 3, а с рисунками в [15], можно видеть некоторое сходство в расположении петель траектории относительно начала координат. У первого все петли явно смещены влево и вниз, что соответствует смещению Северного полюса в сторону Сибири. В [15] для тех же самых лет это смещение видно менее четко из-за тренда. Все петли июльского отображения на рис. 3 смещены в противоположную сторону по сравнению с январским отображением, то есть в направлении от Сибири в сторону Гренландии. Можно предположить, что эти противоположные смещения обязаны сезонному перераспределению масс в гидросфере и атмосфере Земли.

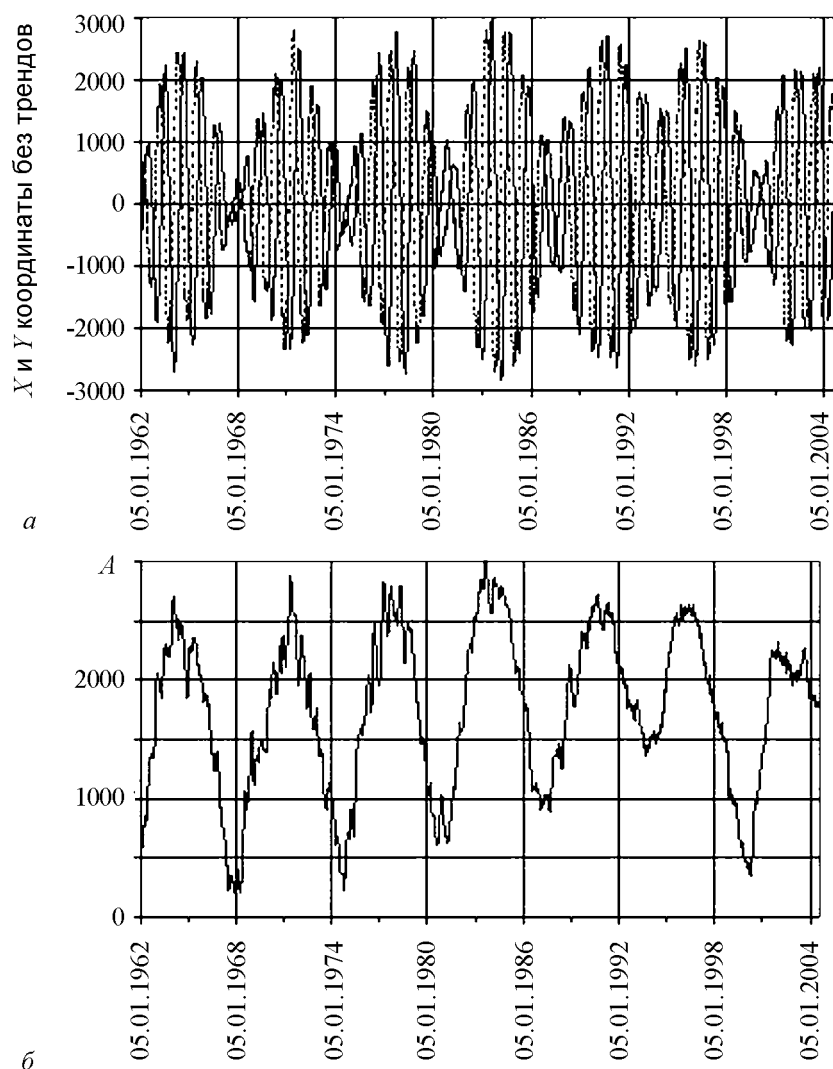


Рис. 2. Временной ход: а – координат X (сплошная линия) и Y (пунктирная линия); б – амплитуды A вращательной компоненты движений Северного полюса

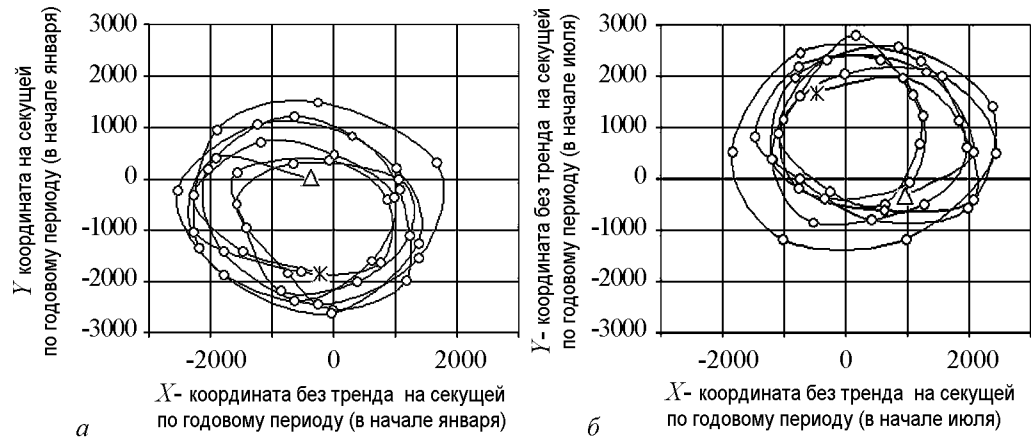


Рис. 3. Отображения вращательной компоненты движений Северного полюса на секущей годового периода в координатах X и Y . a – секущая выбрана по фазе начала января, b – по фазе начала июля. Последовательные точки отображения (малые кружочки) соединены плавными линиями, начальная точка показана звездочкой, а последняя точка – треугольником. Обход точек происходит по часовой стрелке, так что фаза текущей точки почти всегда меньше фазы предыдущей точки

Соотношение между амплитудой вращательной компоненты каждого года и изменением фазы этой компоненты от предыдущего к текущему году показано на рис. 4. Секущая на этом рисунке выбрана по фазе начала января (картина для фазы июля качественно такая же, а потому не приводится). Показаны аппроксимации этого соотношения линейной и квадратичной функциями, свидетельствующие, что при малой амплитуде изменение фазы отображения всегда отрицательно и велико по модулю по сравнению со случаями большой амплитуды, когда оно ближе к нулевому. Поскольку точности показанных аппроксимаций (особенно квадратичной – $R^2 = 0.4809$) довольно велики, это соотношение может быть использовано для предсказаний характера чандлеровского колебания на несколько лет вперед.

Не только тренд усложняет геометрию отображения для движений Северного полюса, но и биения вращательной компоненты. Чтобы учесть биения, были построены отображения первого возвращения на секущую (лестницы Ламерея) для фаз вращательной компоненты $F(t) \rightarrow F(t+1)$. На рис. 5 показана такая лестница Ламерея для последовательности фаз, наблюдавшихся в первые пятидневки январей ($F(t)$, $t=1962, 1963, \dots, 2004$). Видимые на рис. 5 шесть полных обходов лестницы (направление показано стрелками) соответствуют шести периодам биений амплитуды вращательной компоненты. Как завершается очередной обход, легче всего проследить по той ступени лестницы, которая соответствует скачку от почти нулевой фазы к фазе немногим менее 360 градусов (верхний левый угол координатной плоскости на рис. 5). Если бы на этой ступени произошло замыкание, то есть очередная точка совпала с какой-то более ранней точкой, то это доказало бы строгую периодичность рассматриваемой динамики (период равен произведению числа обходов лестницы до замыкания на средний период биения амплитуды). Но, как видно на рис. 5, эта ступень лестницы оканчивается на линии, идущей слева круто вверх направо, то есть величина рассматриваемой ступени отображения неустойчива. Отсюда следует, что динамика фазы вращательной компоненты, хотя и рекуррентна, но, строго говоря, апериодична.

Построенное отображение с учетом трендовой компоненты может быть использовано в целях долгосрочного (минимум на год вперед) прогноза движения Се-

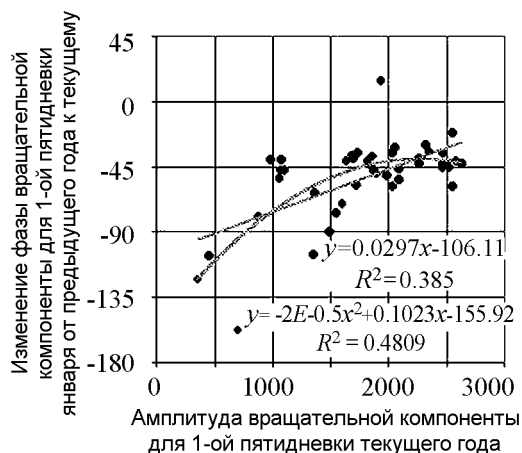


Рис. 4. Соотношение между амплитудой вращательной компоненты каждого года и изменением фазы этой компоненты от предыдущего года к текущему для секущей на рис. 1, выбранной по фазе начала января. Показаны аппроксимации этого соотношения линейной и квадратичной функциями с оценками их точности средними квадратами коэффициентов корреляции между одновременными значениями сравниваемых величин

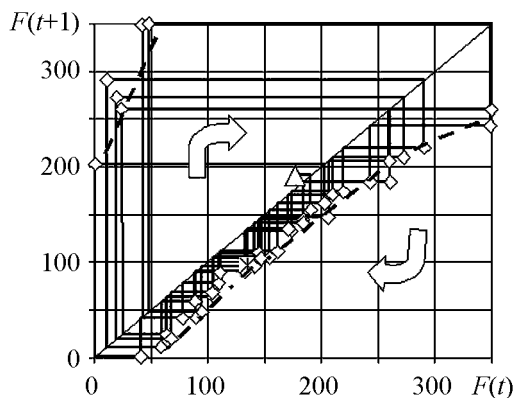


Рис. 5. Лестница Ламерея для фазы вращательной компоненты движений полюса $F(t) \rightarrow F(t+1)$, построенная по значениям фаз, наблюдаемым в первой пятидневке января каждого года. Точки отображения показаны малыми квадратиками. Стрелки указывают направление обхода лестницы. Штриховые линии дают приближенный вид отображения окружности, которое может быть использовано для моделирования рекуррентной динамики вращательной компоненты движений Северного полюса

верного полюса Земли. Однако для этого надо построить также аналогичное отображение для амплитуды вращательной компоненты. К сожалению, учитывая существование примерно шестилетнего биения этой амплитуды, ряд имеющихся данных слишком короток. Поэтому надо строить какие-то дополнительные гипотезы о характере биений, которые можно было бы использовать, чтобы компенсировать недостаток данных наблюдения. Таким образом, на пути к долгосрочному прогнозу движения полюсов Земли предстоит преодолеть еще много препятствий. Но сам такой прогноз очень важен для многих прикладных исследований и даже для чисто практического применения. Например, он необходим для расчета полюсного прилива в атмосфере и океанах, который может быть использован, в свою очередь, как предиктор междугодовых колебаний крупномасштабных процессов в системе атмосфера – океан, в частности, известного процесса Эль Ниньо (см., например, [16]). Заметим, процесс Эль Ниньо сам оказывает обратное воздействие на нутацию Земли, перераспределяя воздушные и водные массы, тем самым еще усложняя проблему долгосрочного прогноза движения полюсов.

Данная работа была выполнена при частичной финансовой поддержке по гранту РФФИ №05-05-64130.

Библиографический список

1. Эйлер Л. Сборник статей в честь 250-летия со дня рождения. М.: Изд-во АН СССР, 1958.
2. Chandler C. On the variation of the latitude // Astron. J. 1891. Vol. 248. P. 59.
3. Авсюк Ю.Н. Приливные силы и природные процессы. М.: Объединенный институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, 1996.

4. *Арато М.* Линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами: Статистический подход. М.: Наука, 1989.
5. *Hoepfner J.* Low-frequency variations, Chandler and annual wobbles of polar motion as observed over one century // *Surveys in Geophysics*. 2004. Vol. 25. P. 1.
6. *Манк У., Макдоналд Г.* Вращение Земли. М.: Мир, 1968.
7. *Монин А.С.* Вращение Земли и климат. Л.: Гидрометеиздат, 1972.
8. *Сидоренков Н.С.* Физика нестабильностей вращения земли. М.: Физматлит, 2002.
9. *Legros H., Amalvict M.* Rotation of a deformable Earth with dynamical superficial fluid layer and liquid core. Part 1: Fundamental equations // *Annales Geophysicae*. 1985. Vol. 3, № 5. P. 655.
10. *Greff-Lefftz M., Legros H.* Magnetic field and rotational eigenfrequencies // *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. 1999. Vol. 112. P. 21.
11. *Сонечкин Д.М.* О нелинейной природе чандлеровского движения полюсов Земли // *Доклады АН*. 2001. Т. 381, № 5. С. 681.
12. *Иващенко Н.Н., Сидоренков Н.С., Сонечкин Д.М.* Свидетельства нелинейности в чандлеровском движении полюсов Земли // *ДАН*. 2006. Т. 409, № 1. С. 110.
13. *Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Введение в теорию нелинейных колебаний // М.: Наука, 1976.
14. *Курбасова Г.С., Корсунь Ф.Ф., Рыхлова Л.В., Рыбалова М.Н., Шликатьев Г.Н.* Сравнение низкочастотных вариаций в двух сериях данных о координатах полюса Земли // *Астроном. журн*. 1997. Т. 74, № 5. С. 785.
15. *Курбасова Г.С., Рыхлова Л.В.* Идентификация режима полярного движения с использованием данных за 1900–1990 гг. // *Астроном. журн*. 1998. Т. 75, № 4. С. 632.
16. *Сидоренков Н.С.* Механизмы междугодовой изменчивости атмосферы и океана // *Труды Гидрометцентра России*. 2000. Вып. 335. С. 26.

*Гидрометеорологический
научно-исследовательский
центр России, Москва,*

Институт океанологии им. П.П. Ширшова, РАН, Москва

*Поступила в редакцию 20.02.2007
После доработки 30.03.2007*

STUDY OF THE EARTH'S POLE MOTION USING A MAPPING ON AN EXTERNAL FORCE PERIOD

N.N. Ivashchenko, N.S. Sidorenkov, D.M. Sonechkin

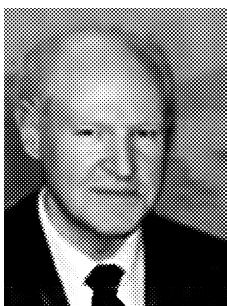
It is known from astronomic observations that the motions of the North pole of the Earth consist of a trend to the Greenland direction, and a rotational component superimposed on the trend. The periods of 12 and about 14 months dominate in these motions. The first period is resulted from the seasonal mass redistribution in atmosphere and oceans. The second period is its called the Chandlerian and nature is vague. Because of incommensurability of both periods each with another one can see six/sevel year beats in the time series of the Earth's pole coordinates. It is not known definitely what is the

character of these beats. The aim of this paper is to clear up this question using the most accurate time series of the North pole coordinates covering the time from 5 January 1962 up to 18 July 2004 (sampled over 5 day period). A mathematical technique of mapping is used for the phase trajectory section chosen at the annual period of the external force. It is found that the beat frequency varies by a quasi-periodic manner, and the beat amplitude is seasonal dependent one.

Иващенко Надежда Назаровна – родилась в 1938 году в Москве, окончила Московский институт электронного машиностроения, после чего занималась экспериментальной работой по полупроводниковой электронике, а в 1980-х годах – вопросами автоматизации проектирования химических производств. С 1991 года работала сначала инженером-программистом, а в настоящее время – научным сотрудником лаборатории динамико-стохастических методов Гидрометеорологического научно-исследовательского центра России. Научные интересы: разработка программ для многомасштабного анализа нестационарных хаотических процессов и временных рядов с приложениями к динамике погоды и климата; исследование роли колебаний полюсов Земли и вызываемых ими приливов в атмосфере и океанах в возбуждении и поддержании междугодовых и междудекадных колебаний климата. Имеет более 20 научных публикаций в отечественных и зарубежных журналах.
E-mail: nnivach@mecom.ru



Сидоренков Николай Сергеевич – доктор физико-математических наук. Закончил Ленинградский Гидрометеорологический институт (1961) и аспирантуру астрономического отделения МГУ (1966). В 1963–1977 г. работал в Государственном астрономическом институте им. П.К. Штернберга. Затем перешел в Гидрометцентр Российской Федерации, где и работает по настоящее время. Автор работ по проблемам: неравномерности вращения Земли, движения географических полюсов, общей циркуляции атмосферы, колебаний климата, солнечно-земной физики и т.д. Опубликовал около 170 работ, включая 3 монографии.



Сонечкин Дмитрий Михайлович – родился в Москве (1937). Окончил географический факультет МГУ (кафедра метеорологии и климатологии, 1959) и был направлен на работу оперативным синоптиком в Центральный институт прогнозов Главного управления гидрометслужбы СССР. С начала 1960-х годов участвовал в работах по созданию метеорологической космической системы «Метеор». В 1970-х годах организовал лабораторию динамико-стохастических методов в Гидрометеорологическом научно-исследовательском центре СССР, где руководил работами по проблеме численного долгосрочного прогноза погоды с использованием понятий и методов теории нелинейных динамических систем. С 2000 года работает главным научным сотрудником Института океанологии им. П.П. Ширшова РАН. Доктор физико-математических наук (1991), профессор геофизики (1992). Академик РАН, Член Европейского общества истории окружающей среды. Научные интересы: теоретические проблемы долгопериодных колебаний погоды и климата; динамика климатов прошлого и современное изменение климата. Автор монографий: «Метеорологическое дешифрирование космических снимков Земли: количественные методы» Л.: Гидрометеоиздат, 1979; «Стохастичность в моделях общей циркуляции атмосферы» Л.: Гидрометеоиздат, 1984; «Колебания климата по данным наблюдений. Тройной солнечный и другие циклы», М.: Наука, 2005 (в соавторстве с А.С.Мониним); «Хаос и порядок в динамике погоды и климата. Водный и тепловой балансы тропосферы», С.-Пб.: Гидрометеоиздат, 2005 (в соавторстве с Р.Ф.Бурлуцким). Общее количество научных публикаций около 200.
E-mail: dsonech@mecom.ru





МЕТОДИКА РАСЧЕТА ПУСКОВЫХ ТОКОВ МНОГОРЕЗОНАТОРНЫХ КЛИСТРОННЫХ АВТОГЕНЕРАТОРОВ

Ю.Д. Жарков

На основе теории каскадной группировки рассмотрена методика расчета пусковых токов многорезонаторных клистронных автогенераторов.

Многорезонаторные клистроны являются традиционными приборами вакуумной сверхвысокочастотной электроники, получившими широкое практическое применение [1]. В последние годы интерес к ним возрос еще и в связи с тем, что на их основе возможно создание автогенераторов хаотических колебаний с большой мощностью и значительным КПД [2].

Одним из основных параметров таких автогенераторов является пусковой ток. Теоретические оценки возможностей клистронных автогенераторов хаотических колебаний с различным числом резонаторов, а также изложение этих вопросов в общих и специальных курсах требуют последовательного расчета пусковых токов клистронных автогенераторов с учетом эффекта группировки электронов в каждом из резонаторов. Эту задачу можно решить только на основе теории каскадной группировки электронов [3].

В настоящей работе дается методика расчета пусковых токов клистронных автогенераторов с разным числом резонаторов на основе каскадной группировки. Для начала колебаний естественным является предположение о малом сигнале. Кроме того, будем считать группировку кинематической, а все резонаторы одинаковыми и настроенными на одну частоту (синхронный режим).

Последовательно рассмотрим расчет пускового тока для двух-, трех-, четырех- и пятирезонаторного клистронов.

Двухрезонаторный клистрон. Допустим, что к первому высокочастотному зазору клистроны приложено напряжение

$$u(t) = u_1 \sin \omega t_1,$$

где u_1 – амплитуда ВЧ-напряжения первого зазора, t_1 – время пролета электроном первого зазора, ω – резонансная частота резонатора. Тогда в приближении малого сигнала скорость электрона v на выходе этого зазора будет

$$v = v_0 \left(1 + \frac{M\xi_1}{2} \sin \omega t_1 \right),$$

где $v_0 = \sqrt{2(e/m)u_0}$; $\xi_1 = u_1/u_0$, u_0 – постоянное ускоряющее напряжение клистрона, e и m – заряд и масса электрона; M – коэффициент эффективности модуляции.

Фаза прибытия электрона во второй (выходной) зазор клистрона будет

$$\omega t_2 = \omega t_1 + \theta_0 - X \sin \omega t_1,$$

где $\theta_0 = \omega l/v_0$ – угол пролета в пространстве дрейфа между резонаторами, l – расстояние между первым и вторым зазорами; $X = M\xi_1\theta_0/2$ – параметр группировки.

Ток i сгруппированного потока в пространстве дрейфа определяется из закона сохранения заряда $I_0 dt_1 = i dt_2$, где I_0 – постоянный ток электронного пучка. Амплитуда сгруппированного тока будет $i_1 = I_0 X$.

Амплитуда напряжения u_2 на втором зазоре

$$u_2 = \frac{M i_1}{G_n} = \frac{1}{2} M^2 \frac{I_0}{u_0} \frac{1}{G_n} \theta_0 u_1 = \varkappa_2 u_1,$$

где $\varkappa_2 = (1/2)M^2(I_0/u_0)(1/G_n)\theta_0$, $G_n = 1/(\rho Q_n)$ – активная проводимость второго резонатора, связанного с нагрузкой, ρ – волновое сопротивление резонатора, Q_n – нагруженная добротность резонатора.

Коэффициент усиления двухрезонаторного клистрона $K_{2u} = \varkappa_2$. Амплитудное условие самовозбуждения, если нет потерь в линии обратной связи, имеет вид $K_{2u} = 1$.

Из этого условия следует уравнение для определения пускового тока $I_{0\text{пуск}2}$ двухрезонаторного клистронного автогенератора

$$\varkappa_2 = \frac{1}{2} M^2 \frac{I_{0\text{пуск}2}}{u_0} \frac{1}{G_n} \theta_0 = 1.$$

Трехрезонаторный клистрон. В трехрезонаторном клистроне сгруппированным в пространстве дрейфа потоком в промежуточном резонаторе при синхронной настройке возбуждается напряжение

$$u_2(t) = -u'_2 \cos(\omega t_2 - \theta_{01}).$$

Знак минус свидетельствует о том, что электронные сгустки попадают в максимум тормозящего поля второго резонатора. Здесь $\theta_{01} = \omega l_{12}/v_0$ – угол пролета в первом пространстве дрейфа, l_{12} – расстояние между первым и вторым резонаторами; $u'_2 = (1/2)M^2(I_0/u_0)(1/G_0)\theta_{01}u_1$ – амплитуда напряжения, возбуждаемого в промежуточном резонаторе, G_0 – активная проводимость промежуточного резонатора.

Скорость электронов на выходе второго зазора

$$v_2 = v_0 \left[1 + \frac{M\xi_1}{2} \sin \omega t_1 - \frac{M\xi_2}{2} \cos(\omega t_2 - \theta_{01}) \right],$$

где $\xi_2 = u'_2/u_0$.

Фаза прибытия электрона в третий, выходной, зазор клистрона ωt_3 в приближении малого сигнала

$$\omega t_3 = \omega t_1 + \theta_{01} + \theta_{02} - X_{13} \sin \omega t_1 + X_{23} \cos \omega t_1.$$

Здесь $\theta_{02} = \omega l_{23}/v_0$ – угол пролета во втором пространстве дрейфа, l_{23} – расстояние между вторым и третьим резонаторами; $X_{13} = (1/2)M\xi_1(\theta_{01} + \theta_{02})$ – первый парциальный параметр группировки; $X_{23} = (1/2)M\xi_2\theta_{02}$ – второй парциальный параметр группировки.

Во втором зазоре происходит дополнительная скоростная модуляция электронного потока, приводящая к каскадной группировке во втором пространстве дрейфа в результате скоростной модуляции в обоих зазорах.

Перепишем ωt_3 в виде

$$\omega t_3 = \omega t_1 + \theta_{01} + \theta_{02} - \omega t_3 = \omega t_1 + \theta_{01} + \theta_{02} - X' \sin(\omega t_1 + \varphi'),$$

где $X' = \sqrt{X_{12}^2 + X_{13}^2}$; $\varphi' = -\arctg(X_{23}/X_{13})$.

Определяя ток сгруппированного во втором пространстве дрейфа потока по закону сохранения заряда, найдем выражение для амплитуды возбужденного в третьем зазоре напряжения

$$u_3 = \frac{MI_0 X'}{G_H} = \frac{MI_0}{G_H} X_{13} \sqrt{1 + \left(\frac{X_{23}}{X_{13}}\right)^2}.$$

Проводя элементарные преобразования, получим

$$u_3 = \varkappa_3 \sqrt{1 + \left[\frac{\varkappa_3(G_H/G_0)\theta_{01}\theta_{02}}{(\theta_{01} + \theta_{02})^2}\right]^2} u_1,$$

где

$$\varkappa_3 = \frac{1}{2} M^2 \frac{I_0}{u_0} \frac{1}{G_H} (\theta_{01} + \theta_{02}).$$

Коэффициент усиления трехрезонаторного клистрона будет

$$K_{3u} = \frac{u_3}{u_1} = \varkappa_3 \sqrt{1 + \left[\frac{\varkappa_3(Q_0/Q_H)\theta_{01}\theta_{02}}{(\theta_{01} + \theta_{02})^2}\right]^2},$$

где $Q_0 = 1/(\rho G_0)$ – собственная добротность резонатора. Пусковой ток трехрезонаторного клистрона $I_{0\text{пуск}3}$ можно найти из уравнения

$$\varkappa_3 \sqrt{1 + \left[\frac{\varkappa_3(Q_0/Q_H)\theta_{01}\theta_{02}}{(\theta_{01} + \theta_{02})^2}\right]^2} = 1.$$

Четырехрезонаторный клистрон. В предпоследнем резонаторе четырехрезонаторного клистрона сгруппированный поток возбуждает напряжение $u_3(t)$

$$u_3(t) = -u_3' \cos(\omega t_3 - \theta_{01} - \theta_{02} - X_{23}),$$

где $u'_3 = (MI_0/G_0)X_{13}\sqrt{1 + (X_{23}/X_{13})^2}$. Тогда скорость v_3 на выходе третьего зазора

$$v_3 = v_0 \left[1 + \frac{M\xi_1}{2} \sin(\omega t_1) - \frac{M\xi_2}{2} \cos(\omega t_2 - \theta_{02}) - \frac{M\xi_3}{2} \cos(\omega t_3 - \theta_{01} - \theta_{02} - X_{23}) \right],$$

где $\xi_3 = u'_3/u_0$.

Фаза прибытия электрона в выходной зазор ωt_4 будет

$$\omega t_4 = \omega t_1 + \theta_{01} + \theta_{02} + \theta_{03} - X_{14} \sin(\omega t_1) + (X_{24} + X_{34}) \cos(\omega t_1),$$

где

$$X_{14} = \frac{M\xi_1(\theta_{01} + \theta_{02} + \theta_{03})}{2}; \quad X_{24} = \frac{M\xi_2(\theta_{02} + \theta_{03})}{2}; \quad X_{34} = \frac{M\xi_3}{\theta_{03}},$$

$\theta_{03} = \omega l_{34}/v_0$, l_{34} – расстояние между третьим и четвертым зазорами. Выражение для ωt_4 можно переписать в виде

$$\omega t_4 = \omega t_1 + \theta_{01} + \theta_{02} + \theta_{03} - X'' \sin(\omega t_1 + \varphi''),$$

где $X'' = \sqrt{X_{14}^2 + (X_{24} + X_{34})^2}$; $\varphi'' = -\arctg((X_{24} + X_{34})/X_{14})$.

Используя, как и прежде, закон сохранения заряда, найдем амплитуду тока сгруппированного в результате каскадной группировки потока

$$i_{a3} = I_0 X''.$$

Тогда амплитуда возбужденного в выходном резонаторе напряжения будет

$$u_4 = \frac{MI_0 X_{14}}{G_n} \sqrt{1 + \left(\frac{X_{24} + X_{34}}{X_{14}} \right)^2}.$$

Выполняя несложные выкладки, найдем для коэффициента усиления четырехрезонаторного клистрона

$$K_{4u} = \frac{u_4}{u_1} =$$

$$= \varkappa_4 \sqrt{1 + \frac{\varkappa_4 Q_0}{Q_n} \left[\frac{\theta_{01}(\theta_{02} + \theta_{03})}{(\theta_{01} + \theta_{02} + \theta_{03})^2} + \frac{\theta_{03}(\theta_{01} + \theta_{02})}{(\theta_{01} + \theta_{02} + \theta_{03})^2} \sqrt{1 + \frac{\varkappa_4 \frac{Q_0}{Q_n} \theta_{01}^2 \theta_{02}^2}{(\theta_{01} + \theta_{02} + \theta_{03})^2 (\theta_{01} + \theta_{02})^2}} \right]^2},$$

где $\varkappa_4 = (1/2)M^2(I_0/u_0)(1/G_n)(\theta_{01} + \theta_{02} + \theta_{03})$. Из условия $K_{4u}=1$ можно найти пусковой ток $I_{0\text{пуск4}}$ четырехрезонаторного автогенератора. Аналогичные вычисления были проведены и для пятирезонаторного клистрона.

Интересно сравнить пусковые токи автогенераторов с разным числом резонаторов при условии, что расстояние между входным и выходным резонаторами остается одним и тем же. В этом случае для трехрезонаторного клистрона $\theta_{01} + \theta_{02} = \theta_0$,

для четырехрезонаторного $\theta_{01} + \theta_{02} + \theta_{03} = \theta_0$, а для пятирезонаторного клистрона $\theta_{01} + \theta_{02} + \theta_{03} + \theta_{04} = \theta_0$. Тогда $\varkappa_2 = \varkappa_3 = \varkappa_4 = \varkappa_5 = \varkappa$. Кроме того, будем считать $Q_0/Q_n = 3$, а $\theta_{01} = \theta_{02}$ (для трехрезонаторного клистрона), $\theta_{01} = \theta_{02} = \theta_{03}$ (для четырехрезонаторного) и $\theta_{01} = \theta_{02} = \theta_{03} = \theta_{04}$ (для пятирезонаторного). Тогда условия самовозбуждения автогенераторов, определяющие пусковые токи для клистронов с различным числом резонаторов n , но одинаковым расстоянием между входным и выходным резонаторами, будут следующими:

$$n = 2 \longrightarrow \varkappa = 1;$$

$$n = 3 \longrightarrow \varkappa \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\varkappa\right)^2} = 1;$$

$$n = 4 \longrightarrow \varkappa \sqrt{1 + \frac{4}{9}\varkappa^2 \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\varkappa^2}{4}}\right]^2} = 1;$$

$$n = 5 \longrightarrow \varkappa \sqrt{1 + \frac{9}{16}\varkappa^2 \left[\frac{3}{4} + \sqrt{1 + \frac{9}{64}\varkappa^2} + \frac{3}{4} \sqrt{1 + \frac{\varkappa^2}{4} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{9\varkappa^2}{64}}\right)^2}\right]^2} = 1.$$

Полученные для пусковых токов результаты можно представить в виде таблицы: число резонаторов n , отношение пусковых токов $I_{0\text{пуск}n}/I_2$

n	2	3	4	5
$I_{0\text{пуск}n}/I_2$	1	0.85	0.72	0.63

Приведенные примеры показывают, что основное влияние на величину пускового тока многорезонаторных клистронных автогенераторов при одинаковой длине пространства дрейфа между первым и последним резонаторами оказывает не число зазоров, расположенных на этой длине, а протяженность пространства дрейфа.

Предложенная методика расчета пусковых токов клистронных автогенераторов может быть обобщена на случай конечной расстройки частот промежуточных резонаторов. Для этого режима работы клистрона проводимость резонаторов Y_n записывается в комплексной форме

$$Y_n = G_0(1 + 2jQ_0\delta_n),$$

где $\delta_n = (\omega/\omega_n - 1)$ – относительная расстройка по частоте n -го резонатора, ω_n – собственная частота n -го резонатора.

Тогда, учитывая, что напряжение на n -м зазоре выражается как $u_n = Mi_{n-1}/Y_n$, можно вычислить коэффициент усиления клистрона K_n и найти условия самовозбуждения генератора с учетом затухания L в линии обратной связи как $K_n = L$.

Расчет пускового тока экспериментального образца клистронного генератора дал для оптимальной зоны с учетом затухания в цепи обратной связи значение $I_{0\text{пуск}} = 6$ мА, в то время как на опыте он оказался равным 8 мА. Следует указать, что в расчете не учитывался пространственный заряд потока.

Достоинством предложенной методики, основанной на теории каскадной группировки, является возможность расчета пусковых токов клистронных автогенераторов с разным числом резонаторов и разными расстояниями между ними при конечных расстройках резонаторов.

Выражаю благодарность профессору Б.С. Дмитриеву за обсуждение этой статьи и полезные замечания.

Работа поддержана грантом РФФИ проект № 06-02-16451-а.

Библиографический список

1. Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Лекции по СВЧ электронике для физиков. Т.1.М.: Физматлит, 2003.
2. Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Клоков Д.В., Рыскин Н.М. Экспериментальное исследование сложной динамики в многорезонаторном клистронном автогенераторе с запаздывающей обратной связью // ЖТФ. 2003. Т. 73, вып. 7. С. 105.
3. Шевчик В.Н. Основы электроники сверхвысоких частот. М.: Сов. радио, 1959.

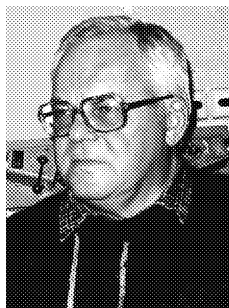
*Саратовский государственный
университет*

*Поступила в редакцию 20.02.2007
После доработки 30.03.2007*

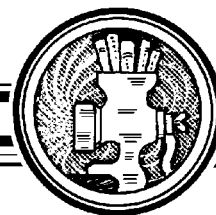
CALCULATION TECHNIQUE OF STARTING CURRENT OF MULTICAVITY KLYSTRON AUTOGENERATORS

Yu. D. Zharkov

On the base of the cascade-bunching theory the calculation technique of starting current of multicavity klystron autogenerators is presented in this paper.



Жарков Юрий Дмитриевич – родился в селе Терса Еланского района Волгоградской области (1931). Окончил физический факультет СГУ (1953). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1961) и доктора (1987) в области радиофизики и электроники СВЧ. В настоящее время – профессор кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – физическое моделирование процессов взаимодействия потоков заряженных частиц с СВЧ-полями, исследование сложной динамики в СВЧ-генераторах с запаздывающей обратной связью. Опубликовал более 200 работ, среди них несколько учебных пособий, 20 изобретений.



НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ' 2006

Отв. ред. А.В. Гапонов-Грехов, В.И. Некоркин

©Институт прикладной физики РАН, 2007

Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2007. 576 с. ISBN 978-5-8048-0061-2

В сборник включены обзорные лекции и оригинальные статьи, написанные по материалам лекций, прочитанных на XXIII школе по нелинейным волнам (Нижний Новгород, 1–7 марта 2006). Рассматриваются проблемы пространственно-временного хаоса, структурообразования, волновой динамики, нелинейные явления в плазме, оптике и при взаимодействии сверхсильных полей с веществом, математические проблемы нелинейной динамики и другие аспекты нелинейно-волновой тематики.

Книга рассчитана на специалистов, занимающихся изучением нелинейных явлений, а также на аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

Проведение школы и издание сборника осуществлены при поддержке Российской академии наук, Министерства образования и науки Российской Федерации, Федерального агентства по науке и инновациям, Российского фонда фундаментальных исследований, Фонда некоммерческих программ «Династия».

Предисловие

Настоящий сборник составлен из обзорных и оригинальных статей, написанных по материалам лекций, прочитанных на XIII научной школе «Нелинейные волны' 2006». Традиционная тематика нижегородских (горьковских) зимних школ по нелинейным волнам является достаточно широкой и охватывает большой круг нелинейных явлений в самых разнообразных областях современной науки, а не только физике и математике. Не явилась исключением и нынешняя школа (Нижний Новгород, март, 2006). На наш взгляд, все наиболее актуальные современные направления в нелинейной физике в той или иной степени на школе были представлены. Значительное внимание было уделено проблемам пространственно-временного хаоса, синхронизации, структурообразования, волновой динамики, нелинейных явлений в акустике, оптике, астрофизике и физике плазмы, теории гравитации и супергравитации, нелинейным явлениям в живых системах и окружающей среде и др. Традиционно на школе был прочитан небольшой цикл лекций по математическим проблемам нелинейной динамики.

Направления развития интересов теории нелинейных волн и колебаний, обозначившиеся на двух предыдущих школах, ясно проявились и на нынешней. Относительно новые для нелинейной динамики области – астрофизика, окружающая среда, живые системы и др. привлекают все большее внимание исследователей. Наиболее

ярко эта тенденция проявилась в тематике, связанной с явлениями в живых системах. Например, в лекции А.А. Веденова принята попытка рассмотреть с физической точки зрения бактериальную клетку, в лекции А.Ю. Лоскутова на основе представления последовательности ДНК как двумерного блуждания предложен новый подход к изучению различных участков хромосом, в лекции Г.Т. Гурия показана принципиальная роль нелинейных колебаний и волн в регуляции турбулинового цитоскелета клетки и т.д. Такая тенденция развития объясняется, по-видимому, как принципиальной значимостью нелинейных явлений в природе, так и впечатляющими успехами общей теории динамических систем, достигнутыми к настоящему времени. Значительный прогресс в понимании общих закономерностей формирования диссипативных пространственно-временных структур и механизмов хаотического поведения динамических систем сформировал своего рода «плацдарм», позволивший перейти к изучению сложных динамических процессов в самых разнообразных областях науки. Можно ожидать, что завоевание теорией нелинейных волн и колебаний новых областей приложения продолжится и возникнут новые, совершенно неожиданные «горячие» проблемы. Возможно, в недалеком будущем это произойдет в сфере нанонауки и нанотехнологий.

В сборник не вошли материалы лекций В.Н. Белых «Проблемы синхронизации в сетях квазиидентичных хаотических динамических систем с асимметричными связями и переменной структурой», Л.М. Зеленого «Фрактальная динамика плазменных процессов в хвосте магнитосферы Земли», Н.Г. Макаренко «Фракталы, стохастическая динамика, марковские процессы и прогноз», А.М. Сергеева «Биомедицинские приложения сверхсильных лазерных полей», Д.И. Трубецкова «2005 год в датах нелинейной динамики» и А.М. Фейгина «Нелинейная динамическая история озонной дыры», опубликованные ранее в других изданиях, хотя они также вызвали большой интерес слушателей.

В заключение мы хотим выразить свою признательность авторам за предоставление материалов в этот сборник.

*А.В. Гапонов-Грехов
В.И. Некоркин*

Содержание

Предисловие

Нелинейная динамика сложных систем

С.Г. Флах. Периодические орбиты, локализация в пространстве нормальных мод и проблема Ферми, Паста и Улама

С.Г. Флах. Симметрии и их нарушения в системах во внешних переменных полях

А.С. Пиковский, Ф. Розенау. Фазовые компактоны

А.Б. Езерский. Пространственно-временная динамика топологических особенностей волновых полей: источники, стоки, дырки, дефекты

С.П. Кузнецов. О реализации некоторых классических моделей и феноменов нелинейной динамики на основе связанных неавтономных осцилляторов

В.В. Клиньшов, В.И. Некоркин. Фазовые кластеры и краткосрочная память в сети нейронов с последеполаризацией

А.А. Короновский, А.Е. Храмов. Непрерывный вейвлетный анализ и некоторые его приложения к задачам нелинейной динамики

А.С. Дмитриев. Системы связи с хаотическими носителями: проблемы, достижения и перспективы

Нелинейные колебания в структурированных системах

О.В. Руденко. Математические модели, точные решения, методы анализа

О.В. Руденко. Актуальные проблемы, связанные с нелинейной акустикой

В.Ю. Зайцев. О «неклассических» проявлениях микроструктурно-обусловленной акустической нелинейности на примере контактодержащих сред

В.В. Курин, А.В. Чигинев. Динамика вихрей в слоистых сверхпроводниках с внутренним эффектом Джозефсона

Ф.А. Стариков. Вынужденное рассеяние Манделштама – Бриллюэна лазерных мод Гаусса – Лагерра: Новые явления

Г.М. Фрайман, А.А. Балакин. Генерация быстрых электронов при электрон-ионных столкновениях в сильных полях

Нелинейные эффекты в гравитации и астрофизической плазме

Ю.М. Зиновьев. Гравитация и супергравитация

Ю.М. Зиновьев. Физика частиц на ускорителях и гравитация

В.С. Бескин. «Центральная машина» в активных галактических ядрах

Е.В. Деряшев, В.В. Кочаровский, Вл.В. Кочаровский, В.Ю. Мартянов. Физика релятивистских джетов

И.Н. Топтыгин. Самоорганизация плазмы и магнитного поля в неравномерных астрофизических объектах

Ю.А. Фадеев. Пульсация звезд

Ю.А. Фадеев. Ударные волны в атмосферах пульсирующих звезд

Нелинейные явления в окружающей среде

Е.А. Мареев, В.В. Клименко. Нелинейная динамика высотного грозового разряда

Д.И. Иудин, В.Ю. Трахтенгерц. Фрактальные лабиринты: структурная динамика

М.А. Носов. Волны цунами: общая характеристика явления, механизмы образования, прогноз

Е.Н. Пелиновский. Нелинейно-дисперсионная теория волн цунами: взгляд после катастрофического цунами в Индийском океане

Ю.И. Троицкая, С.А. Ермаков. Нелинейные механизмы и модели формирования спутниковых изображений процессов в верхнем слое океана

Математические проблемы нелинейной динамики

В.Ф. Ковалев, Д.В. Ширков. Ренормгрупповые симметрии в краевых задачах

А.Д. Морозов. Вырожденные резонансы

А.И. Нейштадт. Затягивание потери устойчивости при динамических бифуркациях

Нелинейные явления в живых системах

А.А. Веденов. Бактериальная клетка с физической точки зрения

С.А. Ларионов, А.Ю. Лоскутов, С.Д. Рыбаков, Е.В. Рядченко. Геном как фрактальное множество, порожденное инверсионно-диффузионной динамикой

Е.А. Катруха, Г.Т. Гурия. Роль неустойчивости, нелинейных колебаний и волн в регуляции турбулинового цитоскелета

В.Л. Воейков, С.Ф. Чалкин, Р.Р. Асфарамов. Аэроиды Чижевского и явление свечения влажного воздуха

Ю.Н. Кульчин, О.А. Букин, С.С. Вознесенский, А.Н. Галкина, С.В. Гнеденков, А.Л. Дроздов, В.Г. Курявий, Т.Л. Мальцева, С.Л. Синебрюхов, А.И. Чередниченко. Биологический вид волоконных световодов

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина*
Оформление художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, О.Н. Строгановой
в пакете $L^A T_E X$

Подписка на 2008 год осуществляется
по каталогу Агентства Роспечать
«Газеты. Журналы», индекс 73498
и по договору между Подписчиком
(юридическим или физическим лицом)
и Издателем (Саратовским государственным университетом)

Стоимость подписки на 2008 год 450 руб. (6 номеров)
Заявки на заключение договора принимаются
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64
E-mail: and@nonlin.sgu.ru

Распространение журнала осуществляется
редакцией журнала по адресной системе

Сдано в набор 26.06.07. Подписано к печати 27.07.07
Формат 70x108/16. Бумага «Снегурочка». Печать трафаретная
Усл. печ. л. 8,75(6,25). Уч.-изд. л. 8,7. Тираж 200. Заказ 396

Отпечатано на ризографе GR 3750 редакции журнала

© Редакция журнала
«Известия вузов. ПНД», 2007
© Оформление художника
Д.В. Соколова, 2007