

От редактора выпуска

Уважаемый читатель! Предлагаем Вашему вниманию специальные выпуски журнала «Прикладная нелинейная динамика» (№ 4, 2009 и № 5, 2009), которые содержат статьи, написанные по материалам лекций, озвученных авторами на Международной научной школе-семинаре «Статистическая физика и информационные технологии» («StatInfo-2009»). Школа-семинар проходила в Саратовском государственном университете им. Н.Г. Чернышевского в период со 2 по 5 июня 2009 года. Организатором школы был Научно-образовательный центр «Нелинейная динамика и биофизика» СГУ при поддержке ректората СГУ и Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF). Школа-семинар «StatInfo-2009» посвящена 100-летию юбилею Саратовского государственного университета. Вся техническая работа по организации и проведению школы-семинара выполнялась коллективом сотрудников кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ (Председатель Оргкомитета школы проф. В.С. Анищенко).

Программа работы школы включала 15 лекций ведущих специалистов в области статистической физики, нелинейной динамики и информационных технологий и обсуждение 56 стендовых докладов студентов, аспирантов и молодых ученых, участников школы-семинара. Основной целью, которую ставили перед собой организаторы школы-семинара, являлось обсуждение современных фундаментальных и прикладных проблем статистической физики и радиофизики, нелинейной динамики, теории информации и информационных технологий для повышения уровня научной подготовки молодых специалистов. Для этого в качестве лекторов организаторами были приглашены профессора ведущих университетов и научных центров. Являясь известными учеными, они успешно ведут в своих коллективах учебно-педагогическую работу по подготовке молодых научных кадров. Приглашенные лекторы одновременно выполнили роль экспертного совета по оценке научных результатов, представленных молодыми учеными в докладах на стендовых сессиях. О высоком научном уровне лекторского коллектива можно во многом судить по составу университетов и научных организаций, которые они представляли: Московский государственный университет им. М. Ломоносова (проф. А.Ю. Лоскутов), Московский физико-технический институт и Институт радиотехники и электроники РАН (проф. А.С. Дмитриев), Пулковская Астрономическая Обсерватория (проф. Н.Г. Макаренко), Гумбольдтский университет г. Берлина (проф. L. Schimansky-Geier, проф. I. Sokolov), Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН (проф. С.П. Кузнецов), Институт проблем точной механики и управления РАН (проф. В.П. Рябухо), а также представители трех факультетов Саратовского государственного университета (профессора В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова, Б.П. Безручко, В.М. Аникин, С.А. Смолянский, А.А. Короновский и доценты А.Н. Павлов и А.В. Шабунин).

Несколько слов к вопросу о выборе научной тематики школы-семинара. Статистическая физика представляет собой самостоятельный раздел классической теоретической физики и существует много лет. Как и положено классической науке, она служит основой создания новых научных направлений по мере получения новых знаний. Так, на основе создания и развития теории колебаний и радиофизики появилась статистическая радиофизика и статистическая теория связи (или теория информации). В основе этих наук лежат принципы и математический аппарат статистической физики и теории случайных процессов. На основе статистической теории связи развиваются новые современные информационные технологии и системы, создаются новые методы обработки сигналов и т.д. Перечисленные проблемы уже не один десяток лет составляют одно из актуальных направлений исследований. В частности, исследования в области статистической теории флуктуаций в радиофизике и электронике были начаты на физическом факультете СГУ в середине прошлого века (проф. А.Ф. Голубенцев, доц. А.И. Штыров и др.). Сегодня многие классические проблемы статистической физики и теории флуктуаций приобрели особую важность и значимость. В первую очередь, это обусловлено более глубоким осмыслением понятия нелинейности и ее принципиального влияния на характер статистических закономерностей функционирования зашумленных нелинейных систем. Отметим явления стохастического и когерентного резонансов, стохастической синхронизации, индуцированных шумом переходов, динамику нелинейных возбудимых систем и сред и т.д. С другой стороны, укажем те новые возможности исследований статистических закономерностей поведения зашумленных нелинейных систем, которые предоставляет нам сегодня современная вычислительная техника. И здесь кроется весьма важная проблема – проблема корректности постановки численного эксперимента. Необходимо скрупулезно сверять модели, алгоритмы, методы вычислений, используемые характеристики и т.д. со строгими результатами статистической физики, теории информации и теории случайных процессов. Не хотелось бы повторять ошибки прошлого. В свое время с открытием эффекта детерминированного хаоса появилось достаточно большое количество численных исследований, которые во многом оказались ошибочными. Основной причиной послужил разрыв между строгими выводами теории динамических систем и методикой постановки численных экспериментов. Сейчас это стало понятным для большинства исследователей и проблема в целом снята.

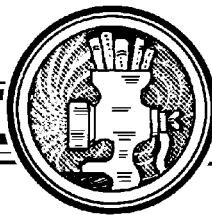
Одной из главных ценностей большинства представленных в этом выпуске работ (лекций) является достаточно квалифицированное изложение теоретических аспектов рассматриваемых научных проблем, что безусловно будет полезно молодым ученым в их дальнейшей исследовательской деятельности.

Мы не будем давать анализ результатов публикуемых в выпусках работ. Краткий анализ вряд ли можно считать целесообразным, а подробный – просто невозможен в силу большого объема представленных материалов. Надеемся, что читатели сами дадут им оценку и определят степень их важности и полезности.

В заключение отметим, что доклады молодых ученых, представленных на «StatInfo-2009» будут опубликованы в сборнике трудов школы-семинара до конца 2009 года.

6 октября 2009

Профессор В.С. Анищенко



ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СТРАННЫЕ АТТРАКТОРЫ СИСТЕМ, ДОПУСКАЮЩИХ ФИЗИЧЕСКУЮ РЕАЛИЗАЦИЮ

С.П. Кузнецов

Представлен обзор исследований, нацеленных на выявление или конструирование физических систем с гиперболическими странными аттракторами, такими как аттрактор Плыкина и соленоид Смейла–Вильямса. Приводятся примеры отображений, дифференциальных уравнений, а также простых радиотехнических устройств с хаотической динамикой, обусловленной присутствием таких аттракторов. Рассматривается и иллюстрируется принцип построения систем с гиперболическим хаосом, основанный на манипуляции фазами сигналов в попеременно возбуждающихся осцилляторах и в системах с запаздыванием. Обсуждаются другие подходы, намеченные в имеющихся публикациях, и перспективы дальнейших работ.

Ключевые слова: аттрактор, динамическая система, отображение Пуанкаре, соленоид Смейла–Вильямса, аттрактор Плыкина, гиперболический хаос, осциллятор, генератор хаоса.

Введение

Около 40 лет назад в теории динамических систем был введен в рассмотрение класс *однородно гиперболических аттракторов* [1–11]. Это предмет так называемой *гиперболической теории*, связанной с именами Аносова, Алексеева, Смейла, Вильямса, Синая, Плыкина, Рюэля, Песина, Ньюхауса и других. Хаотическая природа динамики на этих аттракторах безупречно обоснована. Они обладают свойством структурной устойчивости, то есть устройство фазового пространства и характеристики хаоса нечувствительны к вариации определяющих уравнений. Первоначально казалось, что гиперболические аттракторы будут адекватными образами для многих физических ситуаций, где приходится иметь дело с хаосом. Однако со временем стало ясно, что многочисленные известные примеры конкретных систем с хаотической динамикой не вписываются в рамки, предлагаемые ранней гиперболической теорией. На гиперболические аттракторы стали смотреть как на рафинированный образ хаоса, не имеющий прямого отношения к реальным системам. Усилия же математиков оказались направленными на разработку обобщений, применимых для более широких классов систем [12–14].

Остался не вполне прояснен вопрос – можно ли указать физические системы, хаотическая динамика которых была бы обусловлена присутствием однородно гиперболических аттракторов? Проблема представляется принципиальной. Уместна

аналогия с таким историческим прецедентом, как установление соответствия между феноменом автоколебаний и его математическим образом – предельным циклом. Так же как в свое время предельные циклы, гиперболические аттракторы должны найти свое место как математические образы феноменов в реальных нелинейных системах.

В математических учебниках и обзорах в качестве примеров с гиперболическими аттракторами обычно фигурируют модели с дискретным временем на основе геометрических конструкций. Для физика, однако, это не более чем исходный пункт работы.

Прежде всего, в дополнение к геометрическим построениям желательно иметь отображения в виде явно записанных формул. Это, по крайней мере, дает возможность привлечь вычислительные методы для анализа характеристик динамики, интересных с точки зрения возможных приложений.

Далее нужно перейти к системам с непрерывным временем, поскольку для физики и техники именно они интересны в первую очередь. Хотя этот шаг также можно сделать на уровне геометрических построений, по-настоящему конструктивным следует признать получение в явном виде дифференциальных уравнений.

Желательно указать, как осуществить динамику на гиперболическом аттракторе путем комбинации структурных элементов, известных в контексте теории колебаний и приложений (осцилляторы, связанные системы, цепи обратной связи).

Наконец, самостоятельная задача состоит в создании реально функционирующих устройств, например, радиотехнических, на основе моделей с гиперболическими аттракторами.

1. Основные понятия гиперболической теории

Рассмотрим ансамбль большого числа одинаковых систем, различающихся только начальными состояниями. В фазовом пространстве ему отвечает облако изображающих точек, меняющее с течением времени размеры и форму из-за перемещения точек согласно динамическим уравнениям. В диссипативных системах объем «облака» убывает, и оно в итоге оседает на аттрактор (или, возможно, несколько аттракторов). Хаос имеет место при наличии повторяющихся преобразований, включающих растяжение и сплющивание облака изображающих точек, что обеспечивает перемешивающий характер динамики. Гиперболический хаос будет реализоваться, если такая эволюция во времени происходит совершенным образом, без разрывов и образования локальных уплотнений¹.

Однородно гиперболический хаотический аттрактор – это притягивающий объект в фазовом пространстве диссипативной системы, составленный из седловых гиперболических траекторий. Фазовую траекторию называют гиперболической, если для каждой ее точки в векторном пространстве всевозможных бесконечно малых воз-

¹То, что это возможно, показывает забавный пример машины для вытягивания и перемешивания сахарной ваты. Благодаря вращательному движению поперечных стержней, в ней происходит постоянное растяжение и сворачивание ваты из патоки и сахара с формированием тонкой волокнистой структуры. В работе Хальберга и Йорке [12] показано, что имеющий место в этой машине способ продольного расширения и поперечного сжатия субстанции именно такой, какой нужен для однородно гиперболического аттрактора. Оговоримся, что это не тот вариант физической реализации гиперболического хаоса, который хотелось бы иметь. Машина не является маломерной динамической системой, а содержит подвергаемую деформациям сплошную среду, при описании перемещения локальных элементов которой возникает отображение соответствующего типа. Читатель может найти фотографии и ролики такой машины в сети Интернет (ключевые слова – taffy-pulling machine).

мущений можно определить подпространство векторов, норма которых становится экспоненциально малой при эволюции в прямом времени, и подпространство векторов, норма которых становится экспоненциально малой при эволюции в обратном времени. В системах с непрерывным временем для траекторий, отличных от неподвижной точки, вводится еще одномерное нейтральное подпространство (возмущения вдоль траектории). Произвольный вектор малого возмущения обязан допускать представление в виде линейной комбинации векторов, относящихся к указанным подпространствам.

Множество точек, образы которых с течением времени сближаются с образом точки гиперболической траектории, есть устойчивое многообразие этой точки. Неустойчивое многообразие – это множество точек, прообразы которых приближаются к прообразу исходной точки в обратном времени. Устойчивое или неустойчивое многообразие траектории получается объединением устойчивых или неустойчивых многообразий, построенных для ее точек. То обстоятельство, что для гиперболических орбит это именно многообразия (то есть гладкие кривые, поверхности или гиперповерхности), является заключением специальной теоремы. На однородно гиперболическом аттракторе многообразия всех траекторий обязаны быть одной размерности. Устойчивые и неустойчивые многообразия не должны иметь касаний, а пересечения допускаются только под ненулевым углом.

Существует обоснованный на уровне математической теоремы и допускающий проверку в численных расчетах критерий гиперболичности – *критерий конусов* [3–8]. Пусть динамика задана гладким отображением. Критерий требует, чтобы при некотором выборе константы $\gamma > 1$ для каждой точки на данной траектории можно было определить в пространстве векторов бесконечно малых возмущений расширяющийся и сжимающийся конусы. Расширяющийся конус есть множество векторов, норма которых при действии отображения увеличивается в γ и более раз. Сжимающийся конус есть множество векторов, норма которых увеличивается в γ и более раз при действии обратного отображения. Эти конусы должны быть инвариантны в том смысле, что образ расширяющегося конуса попадает внутрь расширяющегося конуса, определенного для точки-образа, а прообраз сжимающегося конуса – внутрь сжимающегося конуса для точки-прообраза.

Если условия найдены выполняющимися в содержащей аттрактор поглощающей области, то гарантирована справедливость критерия и для всех траекторий на аттракторе. Для систем с непрерывным временем критерий применим в той же форме в рамках описания с помощью отображения Пуанкаре. Примеры компьютерной проверки критерия конусов и некоторые детали вычислительных приемов см. в работах [16–20].

2. Геометрические конструкции гиперболических аттракторов

Начнем с обсуждения гиперболических аттракторов в моделях с дискретным временем, формулируемых как геометрические конструкции [1–10].

Аттрактор Смейла–Вильямса [1–10]. Рассмотрим тор в трехмерном пространстве, как поглощающую область конструируемого отображения. Растянем его в длину, сожмем в поперечном направлении, сложим в виде двойной петли и вложим внутрь исходного тора (рис. 1). Полагаем, что поперечный размер сокращается более чем вдвое, и общий объем объекта уменьшается (диссипативность). На каждой итерации число витков удваивается и в пределе становится бесконечным – получа-

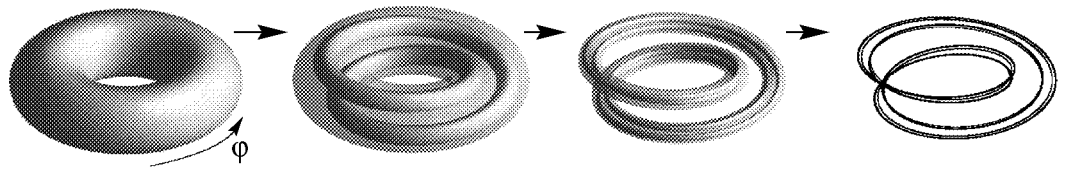


Рис. 1. Торондальная поглощающая область в трехмерном фазовом пространстве (слева), результат ее преобразования на двух итерациях и соленоид Смейла–Вильямса, получающийся при многократном применении отображения (справа)

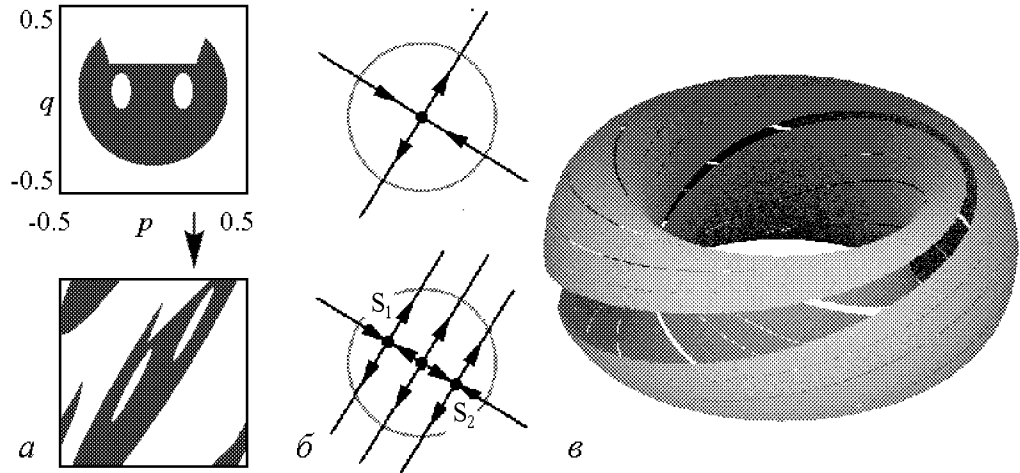


Рис. 2. Иллюстрация действия гиперболического отображения Аносова на точки единичного квадрата, представляющего собой развертку тора (*a*), пояснение модификации отображения в окрестности неподвижной точки в начале координат, составляющей содержание «хирургии Смейла» для перехода к отображению с *DA*-аттрактором (*б*), и портрет аттрактора, представленный на поверхности тора (*в*)

ется так называемый *соленоид*. Если рассмотреть поперечное сечение объекта, то на очередном шаге внутри каждого имеющегося к этому моменту диска выделяются две подобласти в виде дисков, сохраняемые для следующего шага. Когда число итераций стремится к бесконечности, остается множество типа канторова, как поперечное сечение соленоида. Неустойчивое многообразие любой точки на аттракторе одномерно и вытянуто вдоль волокна аттрактора, содержащего эту точку. Взятое целиком, неустойчивое многообразие совпадает с самим аттрактором. С другой стороны, двумерные устойчивые многообразия представлены семейством сечений тора поперек волокон аттрактора.

Следующий пример гиперболического аттрактора введен Смейлом и назван *DA-аттрактор* («Derived from Anosov») [1, 4, 6, 7]. Начнем с отображения Аносова

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} \pmod{1}, \quad (1)$$

фазовое пространство которого интерпретируется как поверхность тора с заданными на ней угловыми координатами $\varphi = 2\pi p$ и $\theta = 2\pi q$. Для графического представления удобно использовать развертку в виде единичного квадрата на плоскости (p, q) , у которого считаются попарно отождествленными противоположные стороны. Отображение (1) относится к классу консервативных. В начале координат оно имеет неподвижную точку типа седла, причем направления устойчивого и неустойчивого многообразий даются собственными векторами фигурирующей в (1) матрицы,

а именно, $\mathbf{a}_1 = (1, W)^T$ и $\mathbf{a}_2 = (-W, 1)^T$, где $W = (\sqrt{5} + 1)/2$. Отображение (1) часто называют отображением кота Арнольда, поскольку Арнольд иллюстрировал его действие, рассматривая область в виде головы кота (рис. 2, *а*).

Чтобы присутствовал аттрактор, отображение модифицируют, и оно становится диссипативным. Модификация затрагивает небольшую окрестность неподвижной точки и состоит в добавлении некоторых функций к правым частям уравнений. Их можно выбрать так, чтобы движение вдоль неустойчивого многообразия не претерпело изменений, а по второму собственному направлению неподвижная точка стала отталкивающей. При этом рядом с ней возникают седла S_1 и S_2 (рис. 2, *б*). За пределами зоны, подвергнутой «хирургии», вид отображения не меняется. Поглощающей областью служит вся поверхность тора за исключением вырезанной окрестности начала координат такого размера, что точки S_1 и S_2 в нее не попадают. При итерациях вырез вытягивается в обе стороны параллельно вектору \mathbf{a}_1 с одновременным сжатием по ортогональному направлению \mathbf{a}_2 , так что «отростки» превращаются в узкие полоски, идущие вдоль линии, отвечающей неустойчивому собственному направлению. Так как угловой коэффициент иррационален, эта линия плотно покрывает тор (рис. 2, *в*). Так формируется характерная для гиперболического аттрактора поперечная канторова структура.

Аттрактор Плыкина [21, 3–10] имеет место в двумерном отображении на плоскости. Поглощающая область составлена из трех полудисков с маленькими полукруглыми вырезами (рис. 3, *а*, слева). Область покрыта штриховкой, обозначающей заданные на ней два поля направлений. Результатом действия отображения

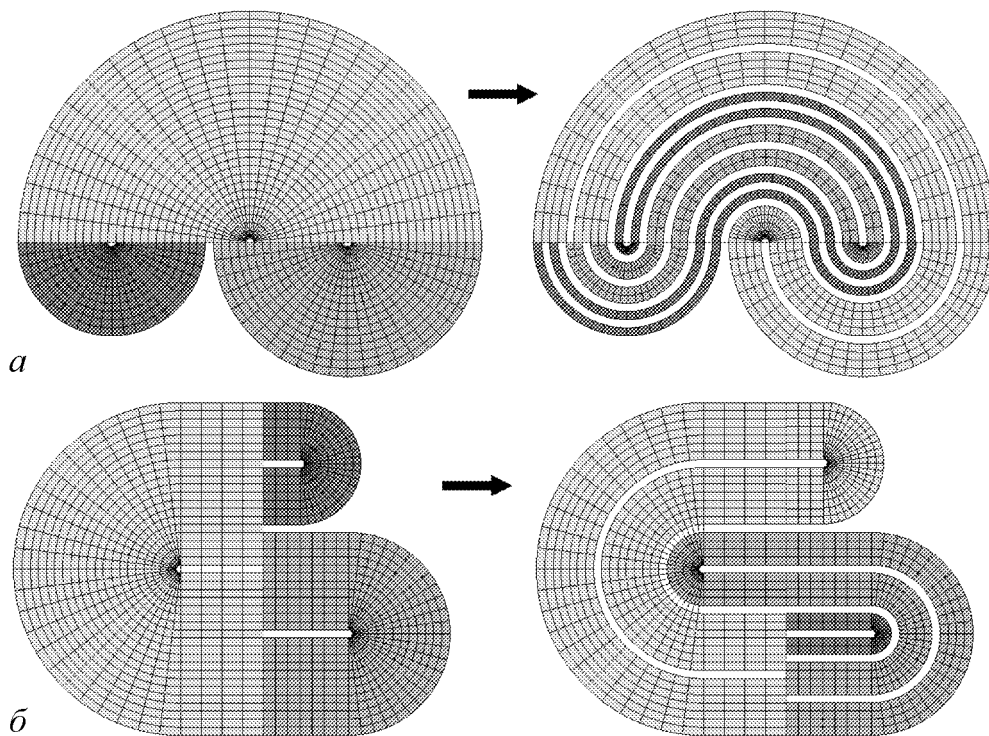


Рис. 3. Поглощающая область и результат ее преобразования при применении отображения для аттрактора Плыкина (*а*) и Плыкина–Ньюхауса (*б*)

является фигура справа. Заметим, что поля направлений после применения отображения совпадают с исходными полями, причем по одному из них осуществляется сжатие, а по другому – растяжение. Это обеспечивает гиперболическую природу аттрактора. Наличие вырезов, или дырок, принципиально. Как доказано Плыкиным, три – минимальное количество дырок, необходимое, чтобы в ограниченной части плоскости мог присутствовать однородно гиперболический аттрактор.

В двумерной области с тремя и более дырками можно сконструировать много гиперболических аттракторов, отличающихся друг от друга по топологической структуре [2]. О них говорят, как об аттракторах типа Плыкина. Одна из модификаций представлена на рис. 3, б; соответствующий аттрактор будем именовать *аттрактором Плыкина–Ньюхауса* [8, 21].

Аттракторы типа Плыкина можно рассматривать на сфере. Переход с плоскости на сферу и обратно производится заменой переменных, которая дается известной из элементарной геометрии стереографической проекцией.

3. Гиперболические аттракторы итерируемых отображений

Математики обычно стремятся конструировать модели так, чтобы по возможности облегчить строгое доказательство гиперболической природы аттракторов. Мы же отдаем предпочтение моделям, для которых рабочие соотношения заданы аналитически единым образом для всего фазового пространства. Что касается обоснования гиперболической природы аттрактора, то в этой ситуации уместно использовать компьютерную проверку критерия конусов.

ДА-аттрактор. Отображение кота Арнольда можно представить как композицию двух отображений, отвечающих половине шага. Именно, если $p_{n+\frac{1}{2}} = p_n + q_n$, $q_{n+\frac{1}{2}} = q_n$ и $p_{n+1} = p_{n+\frac{1}{2}}$, $q_{n+1} = p_{n+\frac{1}{2}} + q_{n+\frac{1}{2}}$, то на полном шаге $p_{n+1} = p_n + q_n$, $q_{n+1} = p_n + 2q_n$. В качестве альтернативы «хирургии Смейла» выполним ДА-модификацию, используя гладкие функции. На первом полушаге добавим в первое уравнение нечетную функцию p , чтобы сохранилась неподвижная точка в начале координат. Эта функция должна иметь период 1. Учитывая две гармоники Фурье, зададим соотношение амплитуд так, чтобы вблизи середины интервала влияние добавки по возможности исключить. Это приводит к функции $\sin 2\pi p + (1/2) \sin 4\pi p$. На втором полушаге добавку в виде такой же функции от q вводим во второе уравнение. Комбинируя оба полушага, имеем

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + q_n + \frac{\varepsilon}{2\pi} (\sin 2\pi p_n + \frac{1}{2} \sin 4\pi p_n) \pmod{1}, \\ q_{n+1} &= p_n + 2q_n + \frac{\varepsilon}{2\pi} (\sin 2\pi p_n + \frac{1}{2} \sin 4\pi p_n + \sin 2\pi q_n + \frac{1}{2} \sin 4\pi q_n) \pmod{1}, \end{aligned} \quad (2)$$

где ε характеризует относительную величину добавок и выбирается в интервале от $1/8$ до $4/9$.²

²С ростом ε , начиная от нуля, оба мультипликатора неподвижной точки увеличиваются. Первый всегда больше единицы, а второй достигает единицы при $\varepsilon = \varepsilon_1 = 1/8$, что отвечает возникновению неустойчивости по второму направлению. Определитель матрицы Якоби остается положительным во всем единичном квадрате, пока $\varepsilon < \varepsilon_2 = 4/9$, так что при этом условии отображение обратимое.

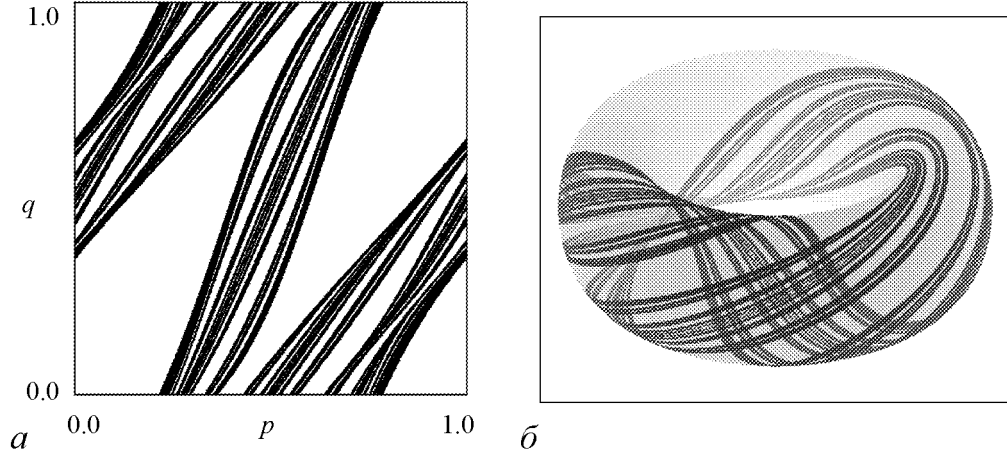


Рис. 4. Портрет аттрактора отображения (2) при $\varepsilon=0.35$ в единичном квадрате (а) и на поверхности тора (б)

На рис. 4 показаны портреты аттрактора в единичном квадрате (а) и на поверхности тора (б) при $\varepsilon = 0.35$. Можно наблюдать характерную поперечную канторову структуру. Вычисления подтверждают выполнение критерия конусов, так что аттрактор следует признать гиперболическим. Показатели Ляпунова согласно результатам расчетов, $\Lambda_1 = 0.962$, $\Lambda_2 = -1.345$, а размерность по Каплану–Йорке $D_L = 1 + \Lambda_1/|\Lambda_2| \approx 1.72$. Отметим, что старший показатель близок к величине, отвечающей отображению кота Арнольда $\ln((3 + \sqrt{5})/2) \approx 0.962$.

От DA-аттрактора к аттрактору Пльикина–Ньюхауса. Преобразуем модель с DA-аттрактором, следуя идее, изложенной в книге Катока и Хассельблата [10] и в диссертации Ханта [22]. Сначала в уравнениях (2) удвоим аргументы под знаком добавленных функций:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + q_n + \frac{\varepsilon}{2\pi} (\sin 4\pi p_n + \frac{1}{2} \sin 8\pi p_n) \pmod{1}, \\ q_{n+1} &= p_n + 2q_n + \frac{\varepsilon}{2\pi} (\sin 4\pi p_n + \frac{1}{2} \sin 8\pi p_n + \sin 4\pi q_n + \frac{1}{2} \sin 8\pi q_n) \pmod{1}, \end{aligned} \quad (3)$$

что вносит нужную для построения дополнительную симметрию. Изображение аттрактора в единичном квадрате составлено теперь из четырех уменьшенных копий объекта на рис. 4, а. Учитывая симметрию, условимся считать эквивалентными точки, связанные соотношением $(p, q) \leftrightarrow (1 - p, 1 - q)$. Далее выполним последовательность шагов, иллюстрируемую на рис. 5. Возьмем верхнюю или нижнюю половинку изображения (а). Представляя картинку нарисованной на резиновой пленке, согнем ее пополам по вертикальной линии и склеим по левому, верхнему и нижнему краям (б). В силу присущей отображению симметрии, при таком склеивании волокна аттрактора аккуратно и правильно соединятся. Далее, надуем получившийся квадратный «конверт», как воздушный шарик, превратив его в сферу (с). Со сферы можно перейти на плоскость, используя стереографическую проекцию (е).

Формально переход на плоскость производится так. Введем комплексную величину $z = p + iq$. Замена переменных должна даваться функцией z с периодами 1 и i . Как известно, двоякопериодические функции комплексной переменной – это эллиптические функции [23]. В частности, функция Вейерштрасса с периодами 1 и

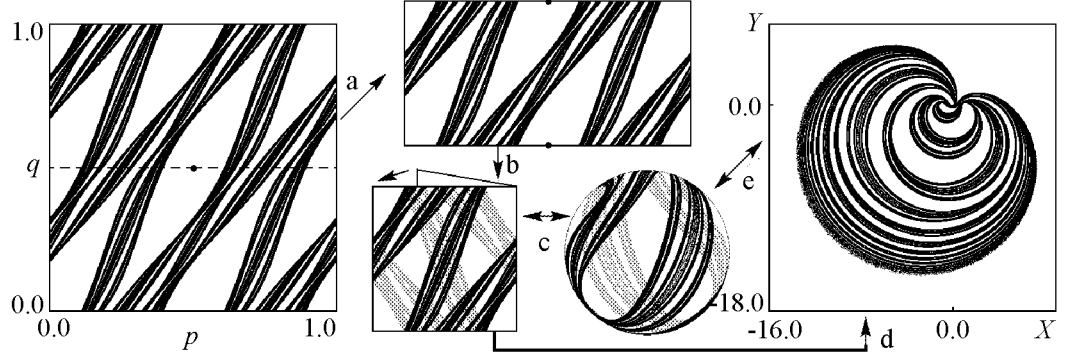


Рис. 5. Иллюстрация перехода от DA-аттрактора отображения (3) при $\varepsilon = 0.35$ (слева) к аттрактору Пльикина–Ньюхауса (справа). Шаги построения: выделение половинки единичного квадрата (а), складывание вдвое (b), переход на сферу (с), который можно реализовать, перейдя сначала на плоскость с использованием функции Вейерштрасса (d), а потом производя стереографическую проекцию (е)

i определяется рядом

$$\wp(z) = z^{-2} + \sum_{\substack{m,n=-\infty \\ (m,n) \neq (0,0)}}^{\infty} [(z - m - in)^{-2} - (m + in)^{-2}]. \quad (4)$$

Заменой $X + iY = 2\wp(p + iq)/\sqrt{g_2}$, $g_2 = 189.07272013$, точки нижней половины единичного квадрата переводятся в точки плоскости X, Y , причем начало координат отображается в бесконечность, а три точки, образующие неустойчивый цикл $(0, 1/2) \rightarrow (1/2, 0) \rightarrow (1/2, 1/2) \rightarrow \dots$, в точки $(-1, 0)$, $(1, 0)$ и $(0, 0)$. В переменных X, Y отображение выражается сложно и его вид здесь не приводится. Практически, разумно проводить итерации в переменных p и q , а функцию \wp использовать только для пересчета координат на плоскость. Вид аттрактора на плоскости показан на рис. 5 справа. Анализ расположения волокон аттрактора приводит к заключению, что по топологической структуре это аттрактор Пльикина–Ньюхауса, причем роль «дырок» играют окрестности точек $(-1, 0)$, $(1, 0)$ и $(0, 0)$.

Для перехода на сферу делаем еще одну замену. Пусть это единичная сфера в пространстве (x, y, z) с центром в начале координат, а центр стереографической проекции соответствует южному полюсу $(0, 0, -1)$. Тогда замена дается соотношением $Z = (x + iy)/(1 + z)$.

Отображения с **аттрактором Смейла–Вильямса** конструируются достаточно просто и приведены во многих учебниках. Например, можно определить отображение, следуя [7], как

$$\varphi_{n+1} = 2\varphi_n, \quad X_{n+1} = \alpha X_n + \frac{1}{2} \cos \varphi_n, \quad Y_{n+1} = \alpha Y_n + \frac{1}{2} \sin \varphi_n, \quad (5)$$

где α достаточно малая константа, X и Y – координаты точки в сечении тора меридиональной плоскостью, а φ – угловая координата, характеризующая положение данного сечения. При $\alpha = 1/3$ получается аттрактор, изображенный на рис. 1. Значения показателей Ляпунова $\Lambda_1 = \ln 2$, $\Lambda_2 = \Lambda_3 = -\ln 3$. (Поскольку за один шаг итераций производится растяжение вдвое вдоль волокон аттрактора по угловой координате φ , и сжатие по двум поперечным направлениям в три раза.) Размерность аттрактора по формуле Каплана–Йорке $D_{KY} = 1 + \Lambda_1/|\Lambda_2| \approx 1.63$.

4. Примеры неавтономных потоковых систем с гиперболическими аттракторами в отображении Пуанкаре

Чтобы перейти от отображения к системе с непрерывным временем или, как говорят математики, выполнить надстройку, нужно указать способ провести видоизменение поглощающей области на одном шаге отображения как непрерывную деформацию. Для неавтономных систем она осуществляется в сечении, перемещающемся вдоль временной оси в расширенном фазовом пространстве за период изменения во времени правых частей уравнений.

В диссертации Ханта [22] представлена модель, реализующая надстройку аттрактора Плыкина–Ньюхауса (см. также [24]). В правых частях дифференциальных уравнений относительно двух переменных вид функций задается по-разному на трех стадиях, составляющих полный период изменения правых частей во времени. Определяющие соотношения различаются в зависимости от области фазового пространства и содержат множество искусственно введенных сглаживающих функций. Достоинство модели в том, что гиперболичность аттрактора строго обосновывается, однако, трудно вообразить, чтобы ее можно было воспроизвести как реальное физическое устройство.

Обратимся к другим примерам неавтономных систем с гиперболическими аттракторами в отображении Пуанкаре, в которых также используется разбиение полного периода на последовательные стадии.

Система, реализующая надстройку аттрактора Плыкина–Ньюхауса введена в недавней работе автора [25]. Мгновенные состояния системы ассоциируются с точками единичной сферы и задаются координатами x, y, z , подчиненными условию $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Роль дырок играют окрестности точек A, B, C, D (рис. 6, *a*). Рассмотрим непрерывные преобразования, каждое из которых занимает единичный интервал времени.

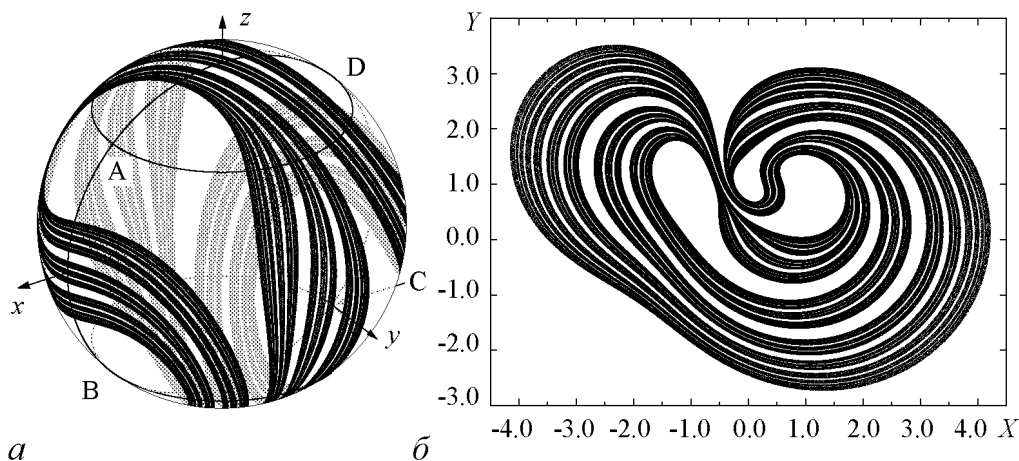


Рис. 6. Аттрактор отображения (7) при $\varepsilon = 0.77$ на единичной сфере (*a*) и его представление на плоскости переменных X, Y (*б*)

1) Сток по параллели

$$\dot{x} = -\varepsilon xy^2, \quad \dot{y} = \varepsilon x^2 y, \quad \dot{z} = 0.$$

2) Дифференциальное вращение вокруг оси z

$$\dot{x} = \pi(z/\sqrt{2} + 1/2)y, \quad \dot{y} = -\pi(z/\sqrt{2} + 1/2)x, \quad \dot{z} = 0.$$

3) Сток к экватору

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = \varepsilon y z^2, \quad \dot{z} = -\varepsilon y^2 z.$$

4) Дифференциальное вращение вокруг оси x

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = -\pi(x/\sqrt{2} + 1/2)z, \quad \dot{z} = \pi(x/\sqrt{2} + 1/2)y.$$

Эта последовательность преобразований периодически повторяется, что можно представить единой неавтономной системой уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\varepsilon y^2 x f_1(t) + \pi(z/\sqrt{2} + 1/2) y f_2(t), \\ \dot{y} &= \varepsilon x^2 y f_1(t) - \pi(z/\sqrt{2} + 1/2) x f_2(t) + \varepsilon y z^2 f_3(t) - \pi(x/\sqrt{2} + 1/2) z f_4(t), \\ \dot{z} &= -\varepsilon y^2 z f_3(t) + \pi(x/\sqrt{2} + 1/2) y f_4(t), \end{aligned} \quad (6)$$

где $f_k(t) = 1$, если $k - 1 \leq t - 4[t/4] < k$, и 0 в противном случае. (Квадратные скобки здесь означают целую часть числа.)

Заметим, что разрывная зависимость от времени коэффициентов $f_k(t)$ не препятствует существованию аттрактора интересующего типа в отображении Пуанкаре, описывающем изменение состояния $x_n = (x_n, y_n, z_n)$ за период $T=4$. Это композиция диффеоморфизмов, каждый из которых отвечает одной из стадий эволюции. Отображение можно выписать явно:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f_+(f_-(x_n)), \\ f_{\pm}(x) &= \begin{pmatrix} \pm z \\ \sqrt{x^2 + y^2} \frac{y e^{\frac{\varepsilon}{2}(x^2+y^2)} \cos(\pi/2)(z\sqrt{2} + 1) \pm x e^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^2+y^2)} \sin(\pi/2)(z\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{x^2 e^{-\varepsilon(x^2+y^2)} + y^2 e^{\varepsilon(x^2+y^2)}}} \\ \sqrt{x^2 + y^2} \frac{y e^{\frac{\varepsilon}{2}(x^2+y^2)} \sin(\pi/2)(z\sqrt{2} + 1) \mp x e^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^2+y^2)} \cos(\pi/2)(z\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{x^2 e^{-\varepsilon(x^2+y^2)} + y^2 e^{\varepsilon(x^2+y^2)}}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

Точка C служит неустойчивой неподвижной точкой отображения, а точки A, B, D образуют неустойчивый цикл периода 3: $A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A$.

На рис. 6, a показан аттрактор отображения (7) на сфере при $\varepsilon=0.77$. Отметим наличие характерной поперечной фрактальной структуры аттрактора, как бы составленного из полосок, каждая из которых содержит полоски следующего уровня, и так далее. Показатели Ляпунова найдены равными $\Lambda_1 = 0.959$, $\Lambda_2 = -1.141$, а размерность аттрактора по формуле Каплана-Йорке $D_L \approx 1 + \Lambda_1/|\Lambda_2| = 1.841$. Проведенные численные расчеты свидетельствуют, что критерий конусов выполнен, так что гиперболичность аттрактора подтверждена [20].

Описание динамики можно переформулировать так, чтобы мгновенные состояния представлялись точками на плоскости. Для этого проведем замену переменных $W = X + iY = (x - z + iy\sqrt{2})/(x + z + \sqrt{2})$. Это соответствует стереографической проекции с выбором за центр проецирования точки C . Аттрактор отображения Пуанкаре на плоскости показан на рис. 6, б. Анализ топологии расположения волокон аттрактора позволяет заключить, что это аттрактор типа Плькина–Ньюхауса.

Ту же замену можно сделать непосредственно в уравнениях (6), поскольку точка C не принадлежит аттрактору (находится в «дырке») на протяжении всего периода. Получается неавтономная система двух дифференциальных уравнений первого порядка относительно X и Y . (Из-за громоздкого вида они здесь опущены.) На рис. 7 показаны полученные при численном решении уравнений зависимости переменных от времени, демонстрирующие хаос, а также портрет аттрактора в трехмерном расширенном фазовом пространстве.

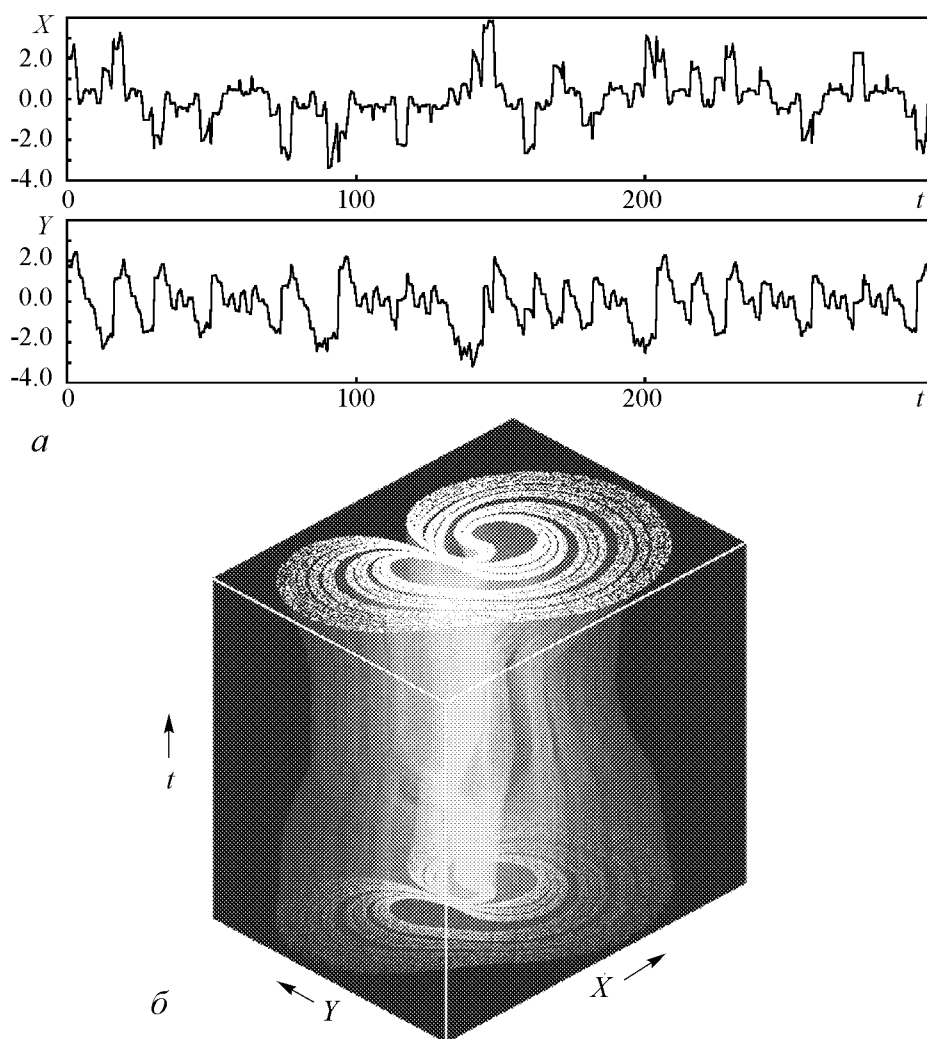


Рис. 7. Зависимости динамических переменных от времени в системе (6) при $\varepsilon = 0.77$ (а) и портрет аттрактора в трехмерном расширенном фазовом пространстве (б). В сечении можно видеть объект, показанный на рис. 6, б

Модель, реализующая надстройку аттрактора Смейла–Вильямса. Сконструируем неавтономную систему, в которой мгновенное состояние дается вектором (x, y, z) , а расширенное фазовое пространство четырехмерное. Рассмотрим четыре стадии, каждая протяженностью в единицу времени.

1) Дифференциальное вращение вокруг оси x

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = -\frac{\pi}{2}xz, \quad \dot{z} = \frac{\pi}{2}xy.$$

2) Неоднородное смещение со сжатием по оси y

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = -d_1(y - 2x^2 + 1), \quad \dot{z} = 0.$$

3) Поворот вокруг оси y на угол $\pi/2$

$$\dot{x} = -\frac{\pi}{2}z, \quad \dot{y} = 0, \quad \dot{z} = \frac{\pi}{2}x.$$

4) Сжатие к единичной окружности в плоскости $z = 0$

$$\dot{x} = \mu x(1 - x^2 - y^2), \quad \dot{y} = \mu y(1 - x^2 - y^2), \quad \dot{z} = -d_2 z.$$

Последовательность преобразований периодически повторяется, что представляется единой неавтономной системой уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\pi}{2}z f_3(t) + \mu x(1 - x^2 - y^2) f_4(t), \\ \dot{y} &= -\frac{\pi}{2}xz f_1(t) - d_1(y - 2x^2 + 1) f_2(t) + \mu y(1 - x^2 - y^2) f_4(t), \\ \dot{z} &= \frac{\pi}{2}xy f_1(t) + \frac{\pi}{2}x f_3(t) - d_2 z f_4(t), \end{aligned} \quad (8)$$

где $f_k(t) = 1$, если $k - 1 \leq t - 4[t/4] < k$, и $f_k(t) = 0$ в противном случае. Объединяя первую стадию со второй и третью с четвертой, можно получить отображение за период в виде

$$\begin{aligned} x_{n+\frac{1}{2}} &= x_n, \\ y_{n+\frac{1}{2}} &= e^{-d_1} \left(y_n \cos \frac{\pi}{2} x_n - z_n \sin \frac{\pi}{2} x_n \right) + (2x_n^2 - 1)(1 - e^{-d_1}), \\ z_{n+\frac{1}{2}} &= z_n, \\ x_{n+1} &= -\frac{e^\mu z_{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{1 + (z_{n+\frac{1}{2}}^2 + y_{n+\frac{1}{2}}^2)(e^{2\mu} - 1)}}, \\ y_{n+1} &= \frac{e^\mu y_{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{1 + (z_{n+\frac{1}{2}}^2 + y_{n+\frac{1}{2}}^2)(e^{2\mu} - 1)}}, \\ z_{n+1} &= e^{-d_2} x_{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (9)$$

На рис. 8, *a* показана область, заданная неравенством $(p\sqrt{x^2+y^2}-1)^2+qz^2 \leq 1$, $p = 12.5$, $q = 25$, и результат ее преобразования за один шаг отображения Пуанкаре (9) при $d_1 = d_2 = 2$, $\mu = 2$. Действие отображения качественно согласуется с конструкцией Смейла–Вильямса. Хотя локальное направление растяжения не везде совпадает с направлением волокон, и локальное направление сжатия образует с ним разный угол в зависимости от расположения в фазовом пространстве, имеющаяся степень соответствия геометрической конструкции достаточна, чтобы реализовался однородно гиперболический аттрактор. На рис. 8, *б* представлен портрет аттрактора. На вставке в увеличенном виде можно видеть поперечную канторову структуру. На рис. 8, *в* приводится итерационная диаграмма для угловой переменной, определяемой на n -м шаге итераций отображения по формуле $\varphi_n = \arg(x_n + iy_n)$. Ее вид соответствует растягивающему отображению окружности, в котором изменение аргумента на 2π влечет изменение функции на 4π .

Найденные значения показателей Ляпунова $\Lambda_1 = 0.661$, $\Lambda_2 = -2.601$, $\Lambda_3 = -2.650$, а размерность аттрактора по формуле Каплана–Йорке $D_L \approx 1 + \Lambda_1/|\Lambda_2| \approx 1.25$. Проведенные численные расчеты подтверждают выполнение критерия конусов в поглощающей области.

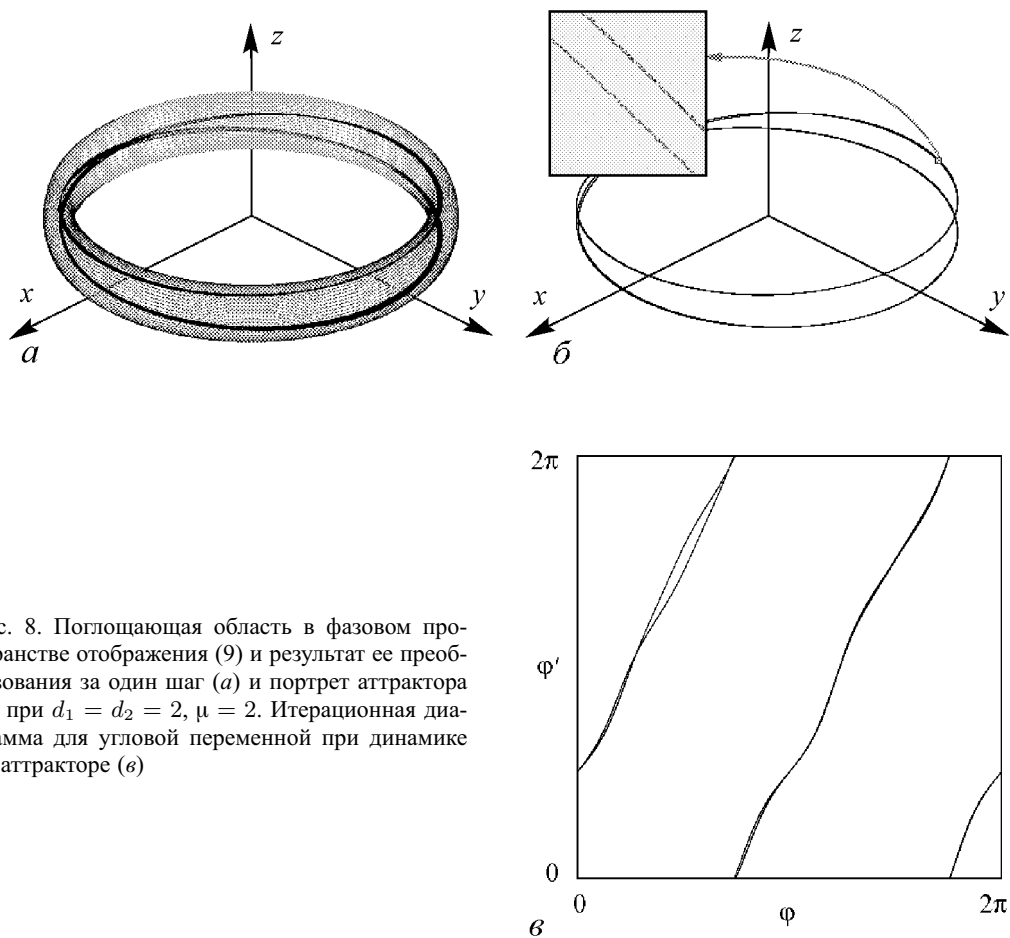


Рис. 8. Поглощающая область в фазовом пространстве отображения (9) и результат ее преобразования за один шаг (*a*) и портрет аттрактора (*б*) при $d_1 = d_2 = 2$, $\mu = 2$. Итерационная диаграмма для угловой переменной при динамике на аттракторе (*в*)

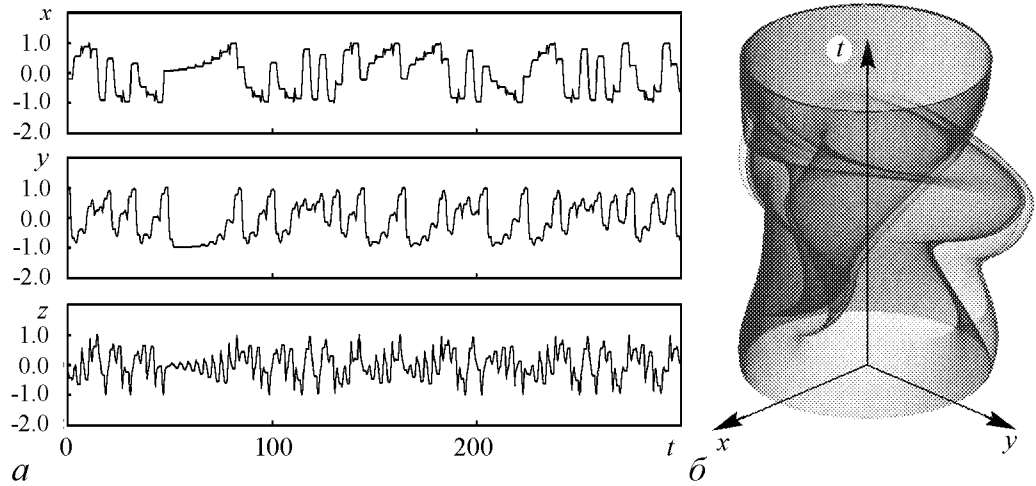


Рис. 9. Зависимости переменных x , y , z от времени, полученные при численном решении уравнений (8) для $d_1 = d_2 = 2$, $\mu = 2$ (а). Портрет аттрактора в 3-мерной проекции из 4-мерного расширенного фазового пространства, представленный тонами серого цвета, где насыщенность тона определяется относительной частотой пребывания изображающей точки в соответствующем пикселе (б)

На рис. 9 иллюстрируются аспекты динамики, отражающие специфику системы с непрерывным временем. Диаграмма (а) показывает зависимости переменных от времени, демонстрирующие хаотическое поведение. На панели (б) приводится портрет аттрактора в трехмерной проекции.

5. Гиперболические аттракторы в связанных осцилляторах с поочередным возбуждением

В работе [26] указан способ реализации гиперболического аттрактора в системе двух осцилляторов ван дер Поля, возбуждающихся попеременно благодаря модуляции параметра. Переход каждого осциллятора к активной стадии сопровождается передачей возбуждения к нему от партнера, так что за полный цикл обмена возбуждением фазовая переменная претерпевает удвоение. Идея манипуляции фазами при передаче возбуждения оказалась полезным общим принципом, позволившим сконструировать примеры систем, демонстрирующих целый ряд различных феноменов сложной динамики [27–30].

Система связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля. Для аттрактора Смейла–Вильямса принципиально наличие угловой переменной, которая при действии отображения Пуанкаре умножается на два, тогда как по остальным направлениям имеет место сжатие фазового объема. Пусть эта переменная – фаза некоторого колебательного процесса. Построим неавтономную систему так, чтобы за временной период изменения коэффициентов реализовалось отображение нужного типа для фазы. В модельных уравнениях

$$\begin{aligned} \ddot{x} - [A \cos(2\pi t/T) - x^2]\dot{x} + \omega_0^2 x &= \varepsilon y \cos \omega_0 t, \\ \ddot{y} - [-A \cos(2\pi t/T) - y^2]\dot{y} + 4\omega_0^2 y &= \varepsilon x^2 \end{aligned} \quad (10)$$

обобщенные координаты x и y относятся к двум осцилляторам типа ван дер По-

ля с рабочими частотами ω_0 и $2\omega_0$, соответственно. Они возбуждаются по очереди благодаря принудительному изменению с периодом T параметра, ответственного за бифуркацию Андронова–Хопфа, причем глубина модуляции задается константой A . Отношение $N = \omega_0 T / 2\pi$ предполагается целым, так что (10) – система уравнений с периодическими коэффициентами. Воздействие подсистем друг на друга характеризуется параметром ε .

Пусть первый осциллятор на стадии активности имеет фазу φ , так что $x \sim \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Его воздействие на второй осциллятор определяется членом, пропорциональным x_2 , который содержит вторую гармонику $\cos(2\omega_0 t + 2\varphi)$ с фазой 2φ . Она резонансным образом действует на второй осциллятор и способствует его возбуждению при переходе в активную стадию. Возникающие колебания получают (с точностью до постоянной добавки) ту же фазу 2φ . В свою очередь, при действии второго осциллятора на первый, благодаря смещению колебаний y со вспомогательным сигналом, возникает составляющая на частоте ω_0 с фазой 2φ , которая, будучи в резонансе с первым осциллятором, обеспечивает затравку для колебаний на очередной его активной стадии. Подсистемы по очереди передают возбуждение одна другой, и на последовательных стадиях активности фаза в рассматриваемом приближении изменяется согласно отображению Бернулли $\varphi_{n+1} = 2\varphi_n + \text{const} \pmod{2\pi}$.³

Описанный процесс действительно наблюдается при численном моделировании динамики системы, притом в широком диапазоне параметров. На рис. 10 показан образец временной зависимости обобщенных координат, полученной при численном решении уравнений (10), и диаграмма эмпирического отображения для фаз, определенных в середине стадий возбуждения первого осциллятора при динамике на аттракторе. Хаос выражается в смещении заполнения относительно огибающей на последовательных стадиях активности.

Предположим, что в момент $t_n = nT$ состояние системы задано вектором $\mathbf{x}_n = \{x, u, y, v\}$, где $u = \dot{x}/\omega_0$, $v = \dot{y}/\omega_0$. Из решения уравнений с начальными условиями x_n на интервале времени T получаем новый вектор \mathbf{x}_{n+1} и, тем самым, определяем функцию, отображающую четырехмерное пространство $\{x, u, y, v\}$ в себя: $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{T}(\mathbf{x}_n)$. В пространстве состояний при действии отображения имеет место

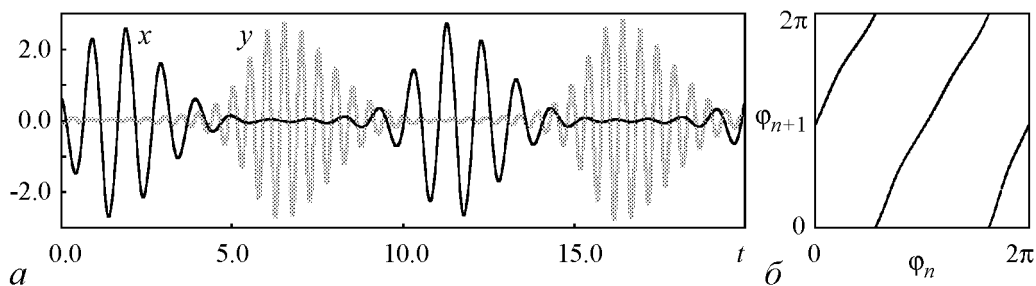


Рис. 10. Образец временной зависимости для переменных x и y , полученной при численном решении уравнений (10) для $\omega_0 = 2\pi$, $T = N = 10$, $A = 3$, $\varepsilon = 0.5$ (а) и диаграмма эмпирического отображения для фаз, определенных в середине стадий возбуждения первого осциллятора (б)

³Константу можно устранить сдвигом начала отсчета фазы φ .

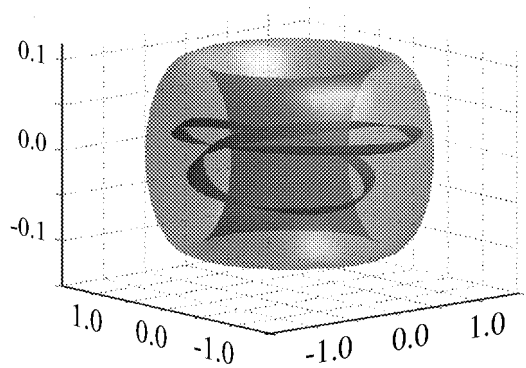


Рис. 11. Поглощающая область и ее образ под действием отображения Пуанкаре в виде проекции из четырехмерного пространства (x_0, x_1, x_2, x_3) , где $x_0 = x/0.812$, $x_1 = (u - 0.438x)/0.721$, $x_2 = y + 0.042x - 0.226u$, $x_3 = v + 0.218x - 0.029u + 0.118y$. В горизонтальной плоскости отложены x_0, x_1 , а по вертикальной оси x_2 . Четвертая переменная x_3 отвечает направлению проецирования. Значения параметров $\omega_0 = 2\pi$, $T = 6$, $A = 5$, $\varepsilon = 0.5$

растяжение в направлении, связанном с фазой φ , и сжатие по трем остальным направлениям. С учетом цикличности по φ , мы можем вообразить торонд U в 4-мерном пространстве (область, топологически представляющая собой прямое произведение окружности и трехмерного шара), такой что одна итерация отвечает продольному растяжению и поперечному сжатию этого объекта, вкладываемого затем в виде двойной петли внутрь исходной области. Это соответствует конструкции аттрактора Смейла–Вильямса, хотя размерность фазового пространства на единицу больше, чем минимально необходимая для существования такого аттрактора. На рис. 11 показана трехмерная проекция, дающая представление о взаимном расположении областей U и $T(U)$.

Область $T(U)$ выглядит как узкая лента из-за сильного поперечного сжатия фазового объема.

На рис. 12 приводятся изображения аттрактора системы (10). На панели (а) показана проекция аттрактора из пятимерного расширенного пространства состояний на фазовую плоскость первого осциллятора (x, u) . Черным отмечены точки, отвечающие сечению Пуанкаре, то есть моментам времени $t_n = nT$. Панель (б) изображает аттрактор в сечении Пуанкаре и соответствует фрагменту диаграммы (а) внутри пунктирного параллелограмма. Очевидно визуальное сходство с аттрактором Смейла–Вильямса. Поперечная канторова структура аттрактора иллюстрируется отдельно на панелях (в) и (г).

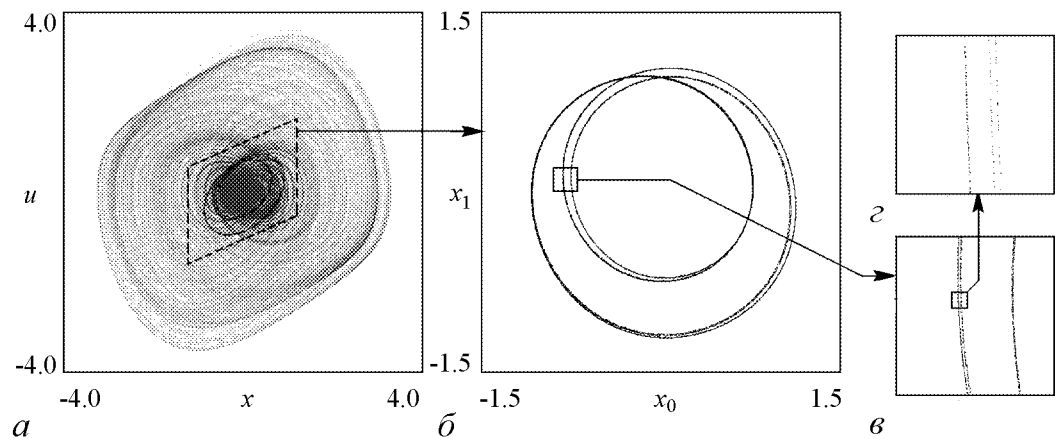


Рис. 12. Аттрактор системы связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля (10) при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 6$, $A = 5$, $\varepsilon = 0.5$ в проекции на фазовую плоскость первого осциллятора в исходных переменных (а), портрет аттрактора в сечении Пуанкаре на плоскости (x_0, x_1) (б) и детали поперечной структуры аттрактора (в), (г)

Согласно результатам расчетов, показатели Ляпунова для аттрактора отображения Пуанкаре при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 6$, $A = 5$, $\varepsilon = 0.5$ составили $\Lambda_1 = 0.6832$, $\Lambda_2 = -2.602$, $\Lambda_3 = -4.605$, $\Lambda_4 = -6.538$. Положительный показатель Λ_1 , наличие которого свидетельствует о присутствии хаоса, близок к величине $\ln 2 = 0.693$, что естественно в свете приближенного описания эволюции фазовой переменной одномерным отображением. Оценка размерности через показатели Ляпунова по формуле Каплана–Йорке дает $D \approx 1.263$. Корреляционная размерность аттрактора в сечении Пуанкаре была вычислена по алгоритму Грассбергера–Прокаччиа обработкой четырехкомпонентного временного ряда $x_n = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}_{t_n=nT}$ ($n = 1 \div M$, $M = 40000$) и составила $D \approx 1.252$.

Как отмечалось, система (10) устроена так, что члены, ответственные за связь, содержат составляющие, резонансные с осциллятором, которому передается возбуждение. Однако, как показано в работе [31], аттрактор типа Смейла–Вильямса в системе попеременно активных осцилляторов может иметь место и при нерезонансной передаче возбуждения. В самом деле, с учетом конечного характерного времени передачи возбуждения, спектр сигнала ограничен по полосе частот и имеет спадающие в обе стороны «хвосты». Если, скажем, центральная частота сигнала $2\omega_0$, а частота возбуждаемого осциллятора ω_0 , то при определенных обстоятельствах присутствие на хвосте спектрального распределения частотных составляющих вблизи ω_0 может обеспечить передачу возбуждения. При нерезонансной передаче возбуждения условия на параметры системы становятся более жесткими. По-видимому, применительно ко многим физическим приложениям (СВЧ-электроника, лазерная физика), где отношение частот ω_0 и $\Omega = 2\pi/T$ велико, нерезонансная передача возбуждения на достаточном уровне, превышающем уровень шумов, будет проблематичной или вообще невозможной.

Пример автономной системы с аттрактором Смейла–Вильямса предложен в работе [29]. Рассмотрим вначале модифицированную систему «хищник – жертва»:

$$\dot{r}_1 = 2(1 - r_2 + \frac{1}{2}r_1 - \frac{1}{50}r_1^2)r_1, \quad \dot{r}_2 = 2(r_1 - 1)r_2. \quad (11)$$

Неотрицательные переменные $r_{1,2}$ можно интерпретировать как квадраты амплитуд двух осцилляторов, и записать уравнения для комплексных амплитуд a_1 и a_2 так, чтобы величины $r_{1,2} = |a_{1,2}|^2$ удовлетворяли уравнениям (1). Частоты осцилляторов считаем одинаковыми и заданными параметром ω_0 . Дополнительно введем связь между осцилляторами, для чего добавим в уравнение для первой комплексной амплитуды член, содержащий квадрат комплексной амплитуды a_2 , а в уравнение для второй – член, включающий первую степень a_1 :

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= -i\omega_0 a_1 + (1 - |a_2|^2 + \frac{1}{2}|a_1|^2 - \frac{1}{50}|a_1|^4)a_1 + \frac{1}{2}\varepsilon \operatorname{Im} a_2^2, \\ \dot{a}_2 &= -i\omega_0 a_2 + (|a_1|^2 - 1)a_2 + \varepsilon \operatorname{Re} a_1. \end{aligned} \quad (12)$$

Мгновенное состояние системы определяется комплексными числами a_1 и a_2 , то есть фазовое пространство имеет размерность 4. Выделим гиперповерхность $S = |a_2|^2 - |a_1|^2 = 0$, и рассмотрим ее пересечение траекториями в направлении увеличения S . Точка в сечении задается трехмерным вектором, так что приходим к трехмерному отображению Пуанкаре.

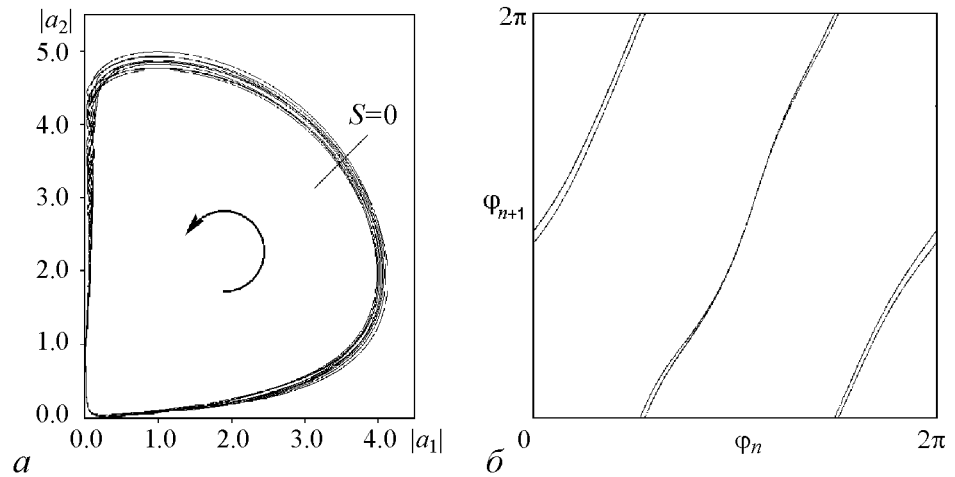


Рис. 13. Портрет аттрактора системы (12) в проекции на плоскость вещественных амплитуд $|a_1|$, $|a_2|$ (а) и отображение для фазы $\varphi = \arg a_2$, определенной в моменты последовательных пересечений секущей поверхности принадлежащей аттрактору траекторией (б)

На рис. 13 показан вид аттрактора в проекции на плоскость вещественных амплитуд обоих осцилляторов при $\omega_0 = 2\pi$, $\varepsilon = 0.3$.

В установившемся режиме траектория раз за разом посещает окрестность начала координат на плоскости переменных $|a_1|$, $|a_2|$. После каждого такого прохождения имеет место сначала возбуждение первого осциллятора, потом возбуждение второго осциллятора, далее затухание колебаний первого, и, наконец, более медленное затухание второго. Активизация второго осциллятора происходит в присутствии воздействия со стороны партнера, благодаря добавленному члену во втором уравнении, так что он наследует фазу колебаний первого осциллятора. Затем, на стадии затухания, второй осциллятор обеспечивает затравочный сигнал для первого при прохождении орбиты вблизи начала координат. Поскольку отвечающий за это член содержит квадрат комплексной амплитуды, передача возбуждения сопровождается удвоением фазы. (Здесь имеет место нерезонансный механизм.) Далее процесс повторяется, и при этом изменение фазы приближенно описывается отображением Бернулли.

На рис. 13, б показан график отображения для фазы по результатам численного решения уравнений (12). Фаза определяется в момент прохождения поверхности $S = 0$, как аргумент комплексной амплитуды a_2 . Из рисунка видно, что однократный обход окружности для прообраза отвечает двукратному обходу для образа. Поскольку по остальным направлениям отображение Пуанкаре обеспечивает сжатие, в его трехмерном фазовом пространстве должен присутствовать аттрактор Смейла–Вильямса. На рис. 14 показаны портреты аттрактора в виде трехмерной проекции из четырехмерного фазового пространства потоковой системы и в сечении Пуанкаре в проекции на фазовую плоскость второго осциллятора. Аттрактор имеет тонкую поперечную фрактальную структуру, фрагмент которой приводится на врезке.

Расчет показателей Ляпунова дает $\lambda_1 = 0.0918$, $\lambda_2 = 0.0000$, $\lambda_3 = -0.982$, $\lambda_4 = -1.330$. Учитывая автономную природу системы, естественно полагать, что показатель λ_2 равен нулю точно. Согласно вычислениям, средний период между прохождениями сечения Пуанкаре равен $T_{av} = 7.248$. В соответствии с приближением,

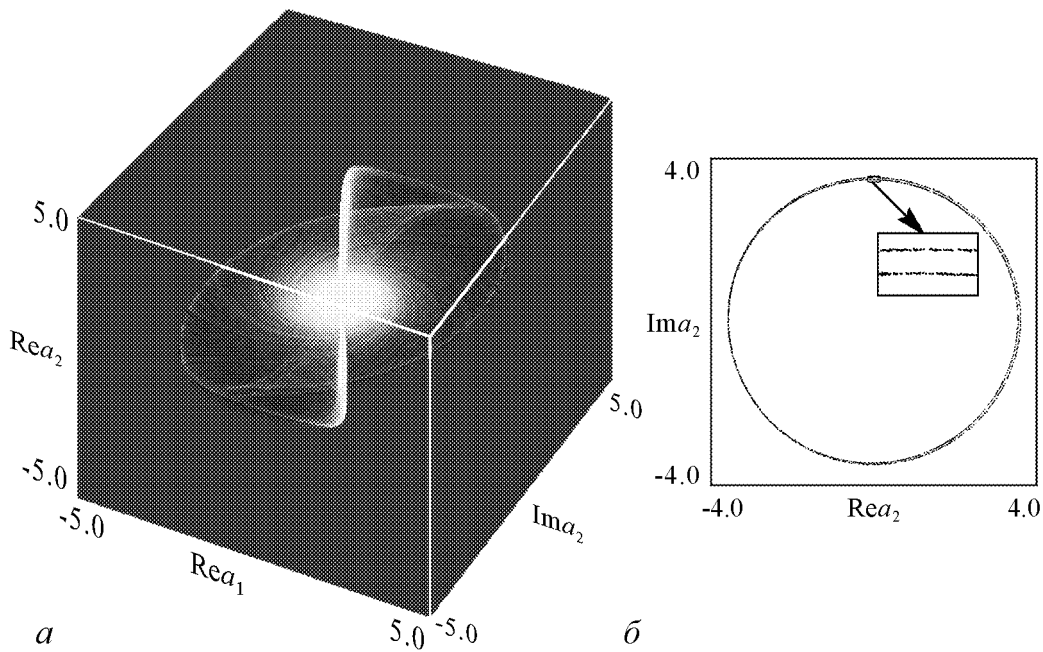


Рис. 14. Аттрактор системы (12) при $\omega_0 = 2\pi$, $\varepsilon = 0.3$ (а) в виде трехмерной проекции (а) и в сечении Пуанкаре в проекции на фазовую плоскость второго осциллятора (б)

основанным на отображении Бернулли, наибольший показатель Ляпунова должен равняться $\lambda = \Lambda/T_{av} = \ln 2/T_{av} \approx 0.096$, что разумно согласуется с величиной λ_1 , найденной в численных расчетах. Оценка размерности аттрактора по формуле Каплана–Йорке приводит к результату $D_{KY} = 2 + (\lambda_1 + \lambda_2)/\lambda_3 \approx 2.094$. Численные расчеты подтверждают выполнение критерия конусов в тороидальной области, содержащей аттрактор трехмерного отображения Пуанкаре [32].

Данная модель представляет собой первый указанный в явном виде пример автономной системы дифференциальных уравнений с аттрактором Смейла–Вильямса в сечении Пуанкаре, с минимальной размерностью фазового пространства.⁴

6. О возможности реализации аттрактора типа Смейла–Вильямса в системах с запаздыванием

Для реализации принципа манипуляции фазами при передаче возбуждения можно обратиться также к системам с запаздыванием. В этом случае достаточно иметь один осциллятор, который попеременно пребывает в стадиях активности или затухания, а передача возбуждения с трансформацией фазы осуществляется через цепь запаздывающей обратной связи от одной стадии активности к другой. С практической точки зрения, эти системы могут быть даже проще, чем попеременно воз-

⁴Вопрос о физической реализации автономной системы с аттрактором Смейла–Вильямса все же остается пока открытым. Дело в том, что уравнения типа (12) в теории колебаний получаются естественным образом в рамках метода медленных комплексных амплитуд при условии $\omega_0 T \gg 1$. С другой стороны, нерезонансный механизм передачи возбуждения эффективен лишь при небольших величинах $\omega_0 T$. Эти требования противоречивы, так что модель (12) приходится рассматривать пока как формальный пример, как и другие примеры в работе [9].

буждающиеся осцилляторы. Однако, с математической точки зрения, они сложнее, поскольку наличие запаздывания формально означает бесконечную размерность пространства состояний. Аккуратный математический анализ аттракторов в таких системах, в том числе строгое обоснование гипотезы гиперболичности, представляется трудной проблемой, требующей разработки новых подходов.

Рассмотрим модельную систему [33]

$$\ddot{x} - [A \cos(2\pi t/T) - x^2]\dot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon x(t - \tau)\dot{x}(t - \tau) \cos \omega_0 t. \quad (13)$$

Это осциллятор ван дер Поля с рабочей частотой ω_0 , в котором параметр, управляющий бифуркацией рождения предельного цикла, медленно изменяется во времени с периодом T и амплитудой A . В правой части добавлен член, отвечающий за дополнительную запаздывающую обратную связь, величина которой характеризуется параметром ε . Это произведение динамической переменной в запаздывающий момент времени, ее производной и вспомогательного сигнала на частоте ω_0 . Как и раньше, полагаем $N = \omega_0 T / (2\pi)$ целым числом.

При надлежащем выборе запаздывания, например $\tau = (3/4)T$, на каждой новой стадии возбуждения затравку для возникновения самоподдерживающихся колебаний будет обеспечивать сигнал, испущенный на предыдущей стадии активности. Пусть его фаза φ , то есть $x(t) \sim \sin(\omega_0 t + \varphi)$ и $\dot{x}(t) \sim \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Тогда член в правой части уравнения будет содержать составляющую на частоте ω_0 с удвоенной фазой. В самом деле, $x(t)\dot{x}(t) \sim \sin 2(\omega_0 t + \varphi)$, так что $x(t - \tau)\dot{x}(t - \tau) \cos \omega_0 t \sim \sin 2(\omega_0(t - \tau) + \varphi) \cos \omega_0 t = (1/2) \sin(\omega_0 t - 2\omega_0 \tau + 2\varphi) +$ нерезонансное слагаемое. В результате на последовательных стадиях активности получаем отображение Бернулли. При сжатии фазового объема по остальным направлениям такая динамика должна характеризоваться наличием аттрактора Смейла–Вильямса в отображении фазового пространства в себя за период внешнего воздействия.

На рис. 15, *a* показана реализация, соответствующая движению на аттракторе при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 6$, $\tau = (3/4)T$, $A = 4.7$, $\varepsilon = 0.3$. Хаос проявляется в смещении заполнения относительно огибающей для последовательных стадий активности. На рис. 15, *б* приводится диаграмма для фаз. Видно, что отображение относится к тому же топологическому типу, что и отображение Бернулли. На рис. 16 показан портрет аттрактора в проекции на фазовую плоскость осциллятора и портрет в сечении Пуанкаре. На втором изображении различима поперечная фрактальная структура, характерная для аттрактора типа Смейла–Вильямса.

Формально аттрактор имеет бесконечное число показателей Ляпунова в силу бесконечномерной природы системы с запаздыванием. С практической точки зрения, разумно ограничиться рассмотрением количества наибольших показателей, достаточного для вычисления размерности по формуле Каплана–Йорке. Расчеты на основании адаптированного для системы с запаздыванием алгоритма Бенеттина, дают для отображения за период T показатели Ляпунова $\Lambda_1 = 0.688$, $\Lambda_2 = -0.837$, $\Lambda_3 = -4.287$. Единственный положительный показатель близок к $\ln 2$, что согласуется с приближением отображения Бернулли. Оценка размерности по формуле Каплана–Йорке дает 1.822. Размерность аттрактора, рассматриваемого как объект в расширенном фазовом пространстве, на единицу больше.

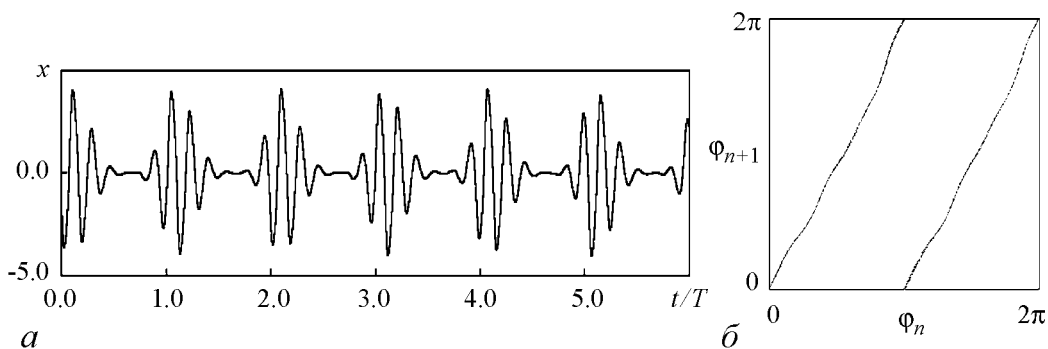


Рис. 15. Зависимость динамической переменной от времени согласно результатам численного решения уравнения (13) при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 6$, $\tau = (3/4)T$, $A = 4.7$, $\varepsilon = 0.3$ (а) и диаграмма, иллюстрирующая трансформацию фазы на последовательных стадиях активности осциллятора (б)

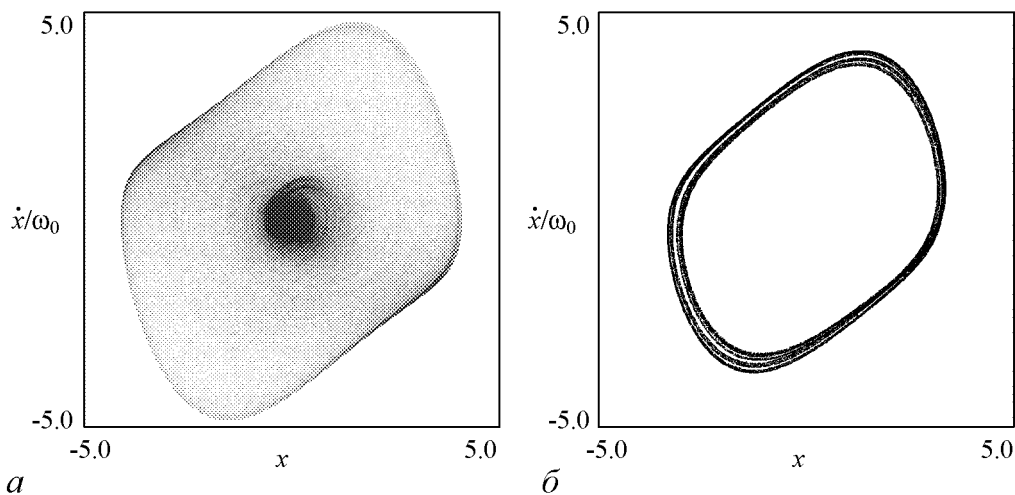


Рис. 16. Портрет аттрактора системы (13) в проекции из бесконечномерного пространства состояний на фазовую плоскость осциллятора (x, \dot{x}) (а) и портрет аттрактора в сечении Пуанкаре (б)

Принцип действия модели и численные результаты дают основания полагать, что наблюдаемый хаотический аттрактор гиперболический и представляет собой соленоид Смейла–Вильямса в бесконечномерном пространстве состояний системы с запаздыванием. Две другие модели неавтономных систем с запаздыванием, использующие идею манипуляции фазами, рассмотрены в работах [34, 35].

7. О реализации гиперболических аттракторов в радиотехнических устройствах

Как говорилось во введении, проработка проблемы гиперболических аттракторов на физическом уровне должна иметь в итоге создание функционирующих генераторов хаоса. Два примера радиотехнических устройств реализованы, как лабораторные макеты, в Саратовском филиале ИРЭ РАН [36, 33].

Связанные автогенераторы с поочередным возбуждением. Схема, описанная в работе [36], составлена из двух подсистем – осцилляторов ван дер Поля с частотами $f_1 = 1.09$ кГц и $f_2 = 2f_1 = 2.18$ кГц. Отрицательное сопротивление в каждом колебательном контуре вносится элементом на основе операционного усилителя. Нелинейная проводимость, обеспечивающая увеличение потерь энергии с ростом амплитуды колебаний, вводится элементом из полупроводниковых диодов в виде двух параллельных ветвей с противоположным направлением пропускания тока. Полевой транзистор в каждом контуре вносит положительную проводимость, величина которой управляется напряжением на затворе, изменяющимся во времени в противофазе для двух подсистем с периодом $T = N/f_1$, где N – целое число. Первый осциллятор действует на второй через квадратичный нелинейный элемент. Второй осциллятор действует на первый через нелинейный элемент, осуществляющий смешение поступающего сигнала и вспомогательного сигнала фиксированной частоты f_1 . Напряжения U_1 и U_2 с первого и второго контура, можно подавать на регистрирующую аппаратуру или вводить в компьютер в виде временного ряда с помощью аналого-цифрового преобразователя. Функции \dot{U}_1 и \dot{U}_2 получались с использованием дифференцирующей цепочки, содержащей емкость, резистор и операционный усилитель.

Принцип действия схемы соответствует идее, изложенной в разделе 5. При надлежащем выборе параметров можно наблюдать хаотические колебания, обусловленные поочередным пребыванием осцилляторов в активном состоянии и передачей возбуждения от одного осциллятора к другому с соответствующей трансформацией фазы. На рис. 17, *а* показана фотография портрета аттрактора с экрана осциллографа. На входы горизонтального и вертикального отклонения электронного луча подавались напряжение от первой подсистемы $U_1(t)$ и сигнал с выхода дифференцирующей цепочки $\dot{U}_1(t)$. На рис. 17, *б* приведен портрет аттрактора в стробоскопическом сечении в проекции на плоскость (U_1, \dot{U}_1) , построенный путем обработки

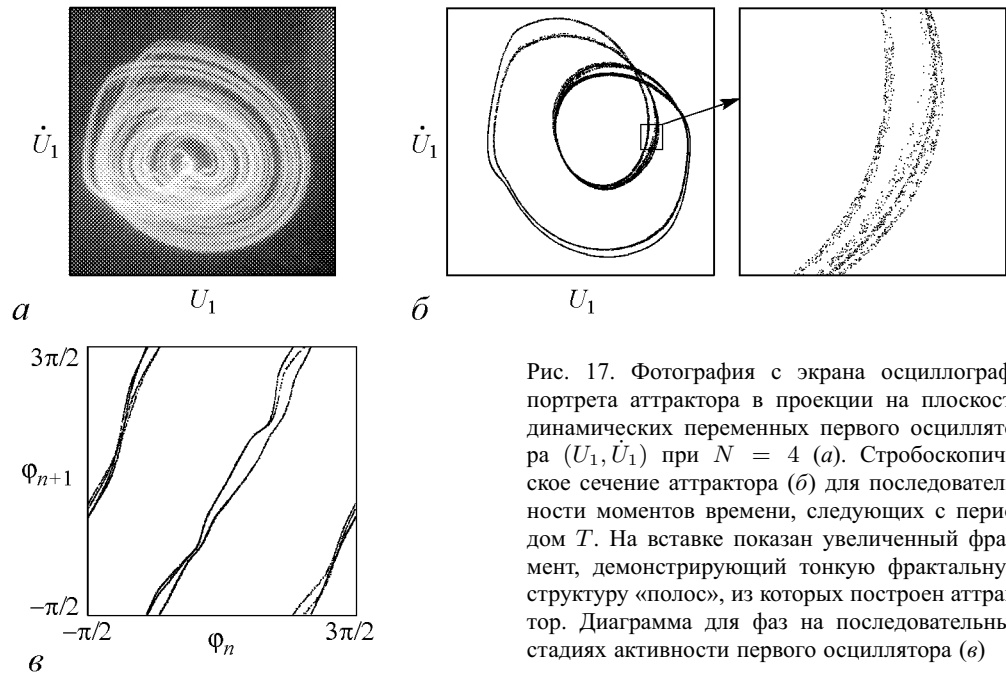


Рис. 17. Фотография с экрана осциллографа портрета аттрактора в проекции на плоскость динамических переменных первого осциллятора (U_1, \dot{U}_1) при $N = 4$ (а). Стробоскопическое сечение аттрактора (б) для последовательности моментов времени, следующих с периодом T . На вставке показан увеличенный фрагмент, демонстрирующий тонкую фрактальную структуру «полос», из которых построен аттрактор. Диаграмма для фаз на последовательных стадиях активности первого осциллятора (в)

двухкомпонентного временного ряда. Одна компонента отвечала выборке сигнала U_1 с периодом T , а в качестве второй фигурировала производная на выходе дифференцирующей цепочки в те же моменты времени. Визуально картина соответствует изображению соленоида Смейла–Вильямса. Отдельно на вставке показана в увеличенном виде тонкая поперечная фрактальная структура волокон аттрактора. На рис. 17, *в* приведена итерационная диаграмма для фаз, полученная обработкой двухкомпонентного временного ряда. То обстоятельство, что отображение для фазы топологически соответствует отображению Бернулли, подтверждает природу аттрактора как соленоида Смейла–Вильямса. Старший показатель Ляпунова, полученный из обработки временного ряда с выборкой периода T , составляет $\Lambda \approx 0.73$, что согласуется с оценкой на основе отображения Бернулли $\Lambda \cong \ln 2$.

Схема радиотехнического устройства с запаздывающей обратной связью приведена в работе [33]. Ее основой служит автогенератор, приближенно описываемый уравнением ван дер Поля. Он содержит LC -контур, элемент с отрицательным сопротивлением на операционном усилителе, и нелинейный диссипативный элемент, составленный из диодов. Основная частота колебаний $f = \omega_0/2\pi = 3$ кГц. Модуляция параметра, ответственного за возбуждение автоколебаний, обеспечивается схемой на полевом транзисторе, управляемым внешним сигналом $A \cos(2\pi t/T)$, где $T \approx 6/f$. При этом на одном полупериоде процесса осциллятор находится в режиме генерации колебаний, а на втором – под порогом генерации.

Возбуждение колебаний с определенной фазой при наступлении очередной стадии активности стимулируется сигналом, приходящим по цепи запаздывающей обратной связи. В этой цепи сигнал подвергается квадратичному преобразованию и дифференцированию посредством стандартной дифференцирующей схемы. Далее он проходит через цифровую линию задержки, содержащую аналого-цифровой преобразователь, компьютер и цифро-аналоговый преобразователь. Задержка $\tau = (3/4)T$ реализована программным образом в компьютере. Далее на нелинейном элементе производится смешение с вспомогательным сигналом на частоте f . В результате получается сигнал, содержащий составляющую с удвоенной фазой, который стимулирует возбуждение осциллятора на очередной стадии активности.

Сигнал, порождаемый системой, записывался в компьютер при помощи аналого-цифрового преобразователя, как временной ряд, и по нему строилось отображение для фазы сигнала за период T (рис. 18, *а*). Отображение принадлежит к тому же

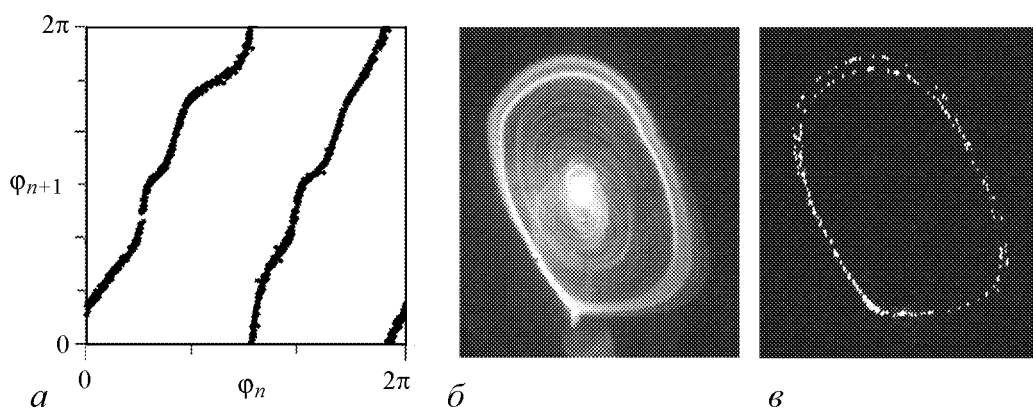


Рис. 18. Итерационная диаграмма для фаз последовательных цугов колебаний в режиме генерации хаоса (*а*), проекция фазового портрета аттрактора (*б*) и его стробоскопическое изображение (*в*)

топологическому классу, как и отображение Бернулли, что свидетельствует о присутствии аттрактора Смейла–Вильямса. На рис. 18, *б* показан сфотографированный с экрана осциллографа портрет аттрактора в проекции на фазовую плоскость осциллятора, а на рис. 18, *в* – стробоскопическое изображение аттрактора, визуально сходное с соленоидом Смейла–Вильямса.

8. Краткий обзор подходов к построению систем с гиперболическими аттракторами и заключительные замечания

Дополняя изложенный материал, приведем краткий обзор идей и подходов, имеющих отношение к проблеме реализации гиперболических аттракторов, но не доведенных по тем или иным причинам до конкретных уравнений и численных расчетов.

В начале 1970-х годов Рюэль и Такенс предложили концепцию, согласно которой переход к хаосу при изменении параметра в многомерных нелинейных системах наступает после возникновения небольшого числа колебательных составляющих и сопровождается появлением странного аттрактора [37]. Специально подчеркнем, что речь идет не просто о странном аттракторе в широком смысле, как этот термин теперь употребляется, а конкретно о гиперболическом аттракторе. Промежуточный результат сформулирован для диффеоморфизмов (*а*) на двумерном компактном многообразии, (*б*) на двумерном торе, (*в*) на компактном многообразии размерности $m \geq 3$ [38]. В случае (*а*) доказано, что имеющее гиперболический аттрактор отображение может быть сколь угодно близким к тождественному отображению в классе C^1 (в классе функций с первой производной). В случае (*б*) справедливо аналогичное утверждение, но в смысле близости в классе C^2 (функций с двумя производными), а в случае (*в*) – в классе бесконечно дифференцируемых функций. В своем анализе авторы используют, как известный факт, существование двумерного отображения с гиперболическим аттрактором; эти рассуждения, конечно, не могут помочь в его нахождении. Отметим абсолютно нефизический характер конструкций (*а*) и (*б*), где в определении отображения фигурируют функции, сложным образом устроенные на малых масштабах в фазовом пространстве.

В работах МакКэя и Ханга [39, 22] установлена гиперболическая природа динамики в механической системе, называемой *тройным соединением*. Около трех шарниров, закрепленных в вершинах равностороннего треугольника, могут свободно вращаться присоединенные к ним концами идентичные стержни. Каждый стержень на другом конце имеет подвижный шарнир, и к этим трем шарнирам прикреплены другие три одинаковых стержня, противоположные концы которых соединены вместе посредством еще одного подвижного шарнира. Благодаря механическим связям, из угловых переменных, задающих мгновенное пространственное положение, независимы только две, то есть движение происходит на двумерном многообразии в конфигурационном пространстве. В отсутствие трения и внешних сил это движение по инерции, с сохранением кинетической энергии. Кинетическая энергия выражается как квадратичная форма через обобщенные скорости – временные производные локальных координат на двумерном многообразии. Эта квадратичная форма, коэффициенты которой зависят от соотношения длин и масс элементов конструкции, задает метрику на двумерном многообразии, причем движение имеет место по геодезическим линиям, отвечающим этой метрике. Перебором вариантов найден набор параметров, при котором метрика характеризуется всюду отрицательной кривизной.

Известно, что в этой ситуации имеет место гиперболический хаос в его консервативной версии. Авторы утверждают, что, добавив диссипацию и механизм обратной связи, на основе «тройного соединения» можно получить систему с гиперболическим аттрактором. Идея представляется интересной и обещающей, но конкретные физические устройства или математические модели, где на этой основе был бы реализован гиперболический аттрактор, пока не рассмотрены.

В работе В. Белых, И. Белых и Э. Мозекильде [40] обосновывается возможность реализации гиперболического аттрактора в модели нейрона Хиндмарш–Розе. Авторы исходят из формальной обобщенной записи уравнений $\dot{x} = X(x, z)$, $\dot{z} = \mu[Z(x) - z - \delta]$, где x – двумерный вектор, а функции $X(x, z)$ и $Z(x)$ конкретизируются лишь в той мере, чтобы были оправданы проводимые качественные рассуждения. Согласно анализу, в области, где система претерпевает переход от генерации периодических спайков к берстовой активности, может иметь место ситуация, когда двумерное отображение Пуанкаре определено на диске с тремя вырезами («дырками»), и реализуется аттрактор типа Плыккина. Эти результаты интересны, поскольку получены для модели в каком-то смысле естественного происхождения и указывают на возможное значение гиперболической динамики для нейросистем. В то же время, конкретного исследования, с указанием явного вида уравнений и демонстрацией присутствия гиперболического аттрактора в численных расчетах, пока не представлено.

Шильниковым и Тураевым [41, 42] указана возможность реализации аттрактора типа Смейла–Вильямса в контексте так называемой «катастрофы голубого неба». В простейшем варианте катастрофа голубого неба встречается в трехмерной автономной системе. В момент бифуркации в фазовом пространстве имеется седло-узловой цикл, уход от которого происходит по траекториям, образующим «трубку», которая сужается и скручивается в спираль, приближающуюся к тому же седло-узловому циклу с противоположной стороны. При смещении по параметру в одну сторону вместо седло-узлового цикла образуется пара предельных циклов, один неустойчивый, а другой соответствующий устойчивому автоколебательному режиму. При смещении в другую сторону седло-узловой цикл исчезает, а на его месте остается сгущение, образованное витками спиралевидной траектории и составляющее часть возникшего на месте «трубки» притягивающего предельного цикла.

Имея вначале угловую координату φ , после обхода по «трубке» траектория возвращается к седло-узловому циклу с угловой координатой, выражение для которой содержит слагаемое $m\varphi$. Для трехмерных систем возможны варианты $m = 0$ и $m = 1$. Однако, начиная с размерности четыре, целое число m может быть любым. В частности, если $m = 2$, тороидальное трехмерное сечение около седло-узлового цикла с неустойчивой стороны при возвращении принимает вид сложенной вдвое петли. В такой ситуации бифуркация будет сопровождаться рождением аттрактора Смейла–Вильямса. Авторы подчеркивают, что в результате такой бифуркации система Морса–Смейла (имеющая лишь простые установившиеся режимы, ассоциирующиеся с неподвижными точками и замкнутыми орбитами), сразу превращается в систему со структурно устойчивым гиперболическим аттрактором.

Насколько известно автору, в литературе описаны примеры систем с «катастрофой голубого неба» только в трехмерном фазовом пространстве [43, 44]. Примеров с большей размерностью, где реализовался бы переход к аттрактору типа Смейла–Вильямса, пока не представлено. Для построения такого примера требуется обеспечить в фазовом пространстве эволюцию области в форме тора с поперечным сжатием

и формированием двойной петли. Это не проще, чем осуществить такую трансформацию в общей постановке. В то же время, с точки зрения выявления сценариев рождения гиперболических аттракторов, рассмотренный анализ следует признать важным и содержательным.

Одна из самых известных систем в контексте сложной динамики и хаоса – это модель Лоренца [45], к которой в течение многих лет привлечено внимание математиков. Существенным этапом в объяснении качественной стороны динамики было формулирование упрощенной модели, так называемого геометрического аттрактора Лоренца [8]. Своего рода итогом исследований стало компьютерное доказательство Такером [46] хаотической природы аттрактора Лоренца на уровне строго обоснованных вычислительных процедур.

Аттрактор Лоренца классифицируют как квазигиперболический или сингулярно гиперболический из-за того, что он включает особую траекторию (неустойчивое многообразие неподвижной точки). Интересен вопрос, можно ли модифицировать систему так, чтобы аттрактор в сечении Пуанкаре стал однородно гиперболическим. Положительный ответ дается в работе Моралеса [47], правда, лишь на уровне геометрической конструкции. Рассматривается модель, в которой неподвижная точка претерпевает бифуркацию, аналогичную седло-узловой (при наличии дополнительного неустойчивого направления в окрестности бифурцирующей пары точек), и которая подобна в остальных отношениях геометрической модели аттрактора Лоренца. При вариации параметра, с одной стороны от точки бифуркации имеет место аттрактор Лоренца. С другой стороны от нее, при исчезновении неподвижных точек, в зависимости от устройства векторного поля в удаленных областях, через которые проходят траектории, реализуется один из двух вариантов. Первый состоит в возникновении негиперболической динамики типа Эно, а второй – в появлении аттрактора типа Плыкина в отображении Пуанкаре. Возможность получить такой аттрактор весьма интересна. Поскольку модель Лоренца имеет отношение к ряду физических систем, можно думать, что версия с гиперболическим аттрактором будет применима к определенным модификациям этих систем.

Перечисленные подходы определяют возможные направления поиска конкретных систем с гиперболическими аттракторами в дополнение к примерам, приведенным в основном тексте статьи. С практической точки зрения, системы с гиперболическими аттракторами обещают быть интересными благодаря структурной устойчивости, которая будет выражаться в нечувствительности свойств генерируемого хаоса по отношению к вариациям параметров и характеристик элементов устройства, техническим флуктуациям и т.п.

Известны аргументы в пользу применения хаотических сигналов в информационно-коммуникационных системах: большая информационная емкость сигналов, возможность управления динамикой посредством малых возмущений, разнообразие методов ввода информации в сигнал, богатые возможности кодирования для защиты информации [48].

Можно предположить, что причина, почему ожидаемые потенциальные преимущества пока не достигнуты в полной мере, заключена в том, что при использовании сигналов, порожденных негиперболическими аттракторами, не удастся опереться на детальное теоретическое понимание соответствующей им динамики. С другой стороны, для гиперболических аттракторов существует в известном смысле полное математическое описание хаоса. Например, имеется возможность исчерпывающего перечисления всех принадлежащих аттрактору траекторий как последовательностей

символов конечного алфавита (символическая динамика). Поэтому вполне вероятно, что с привлечением гиперболического хаоса удастся в большей степени реализовать ожидаемые достоинства информационно-коммуникационных систем на основе хаотических сигналов. Специальный интерес для применения в схемах скрытой коммуникации могут представлять системы, использующие принцип манипуляции фазами [25–36]. Хаос проявляется в этом случае в нерегулярном изменении фаз заполнения генерируемой последовательности радиоимпульсов, так что на этой основе возможна реализация схем, в которых передача сигнала в канале связи будет гораздо менее чувствительной к помехам, потерям и искажениям, нежели в предложенных до сих пор вариантах. (В этой связи уместно вспомнить об известном в традиционной радиотехнике преимуществе частотной или фазовой модуляции в сравнении с амплитудной модуляцией.)

Автор благодарен коллегам – А.С. Пиковскому, В.И. Пономаренко, И.Р. Сатаеву, Е.П. Селезневу, результаты совместных исследований с которыми использованы в статье.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 09-02-00426, гранта РФФИ–ННИО № 08-02-91963, а также гранта Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках Программы развития научного потенциала высшей школы № 2.1.1/1738.

Библиографический список

1. *Smale S.* Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. (NS). 1967. Vol. 73. P. 747.
2. *Williams R.F.* Expanding attractors // Publications mathématiques de l’I.H.E.S. 1974. Vol. 43. P. 1693.
3. *Синай Я.Г.* Стохастичность динамических систем // В кн. Нелинейные волны / Ред. А.В. Гапонов–Грехов. М.: Наука, 1979. С. 192.
4. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления // Итоги науки и техники, т. 2 / Под ред. Р.В. Гамкрелидзе. М.: Изд. ВИНТИ АН СССР, 1985. 310 с.
5. *Eckmann J.-P., Ruelle D.* Ergodic theory of chaos and strange attractors // Rev. Mod. Phys. 1985. Vol. 57. P. 617.
6. *Shilnikov L.* Mathematical problems of nonlinear dynamics: a tutorial // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1997. Vol. 7, № 9. P. 1353.
7. *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем / Пер. с англ. М.: Изд. «Факториал», 1999. 768 с.
8. *Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 560 с.
9. *Afraimovich V., Hsu S.-B.* Lectures on chaotic dynamical systems, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, **28**, American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Somerville, MA, 2003, 353 pp.
10. *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений. М.: МЦНМО, 2005. 464 с.

11. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
12. *Barreira L., Pesin Y.* Lectures on Lyapunov exponents and smooth ergodic theory // In book: «Smooth Ergodic Theory and Its Applications», AMS, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 2001. С. 3.
13. *Bonatti C., Diaz L.J., Viana M.* Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity. A global geometric and probabilistic perspective // Encyclopedia of Mathematical Sciences. Vol. 102. Springer: Berlin, Heidelberg, New-York, 2005. 384 p.
14. *Benedicks M. and Carleson L.* The dynamics of the Hénon map // Ann. of Math. 1991. (2) 133. P. 73.
15. *Halbert J.T., Yorke J.A.* Modeling a chaotic machine's dynamics as a linear map on a «square sphere», <http://www.math.umd.edu/halbert/taffy-paper-1.pdf>.
16. *Sinai J.G., Vul E.B.* Hyperbolicity conditions for the Lorenz model // Physica D2. 1981. P. 3.
17. Кузнецов С.П., Сатаев И.Р. Проверка условий гиперболичности хаотического аттрактора в системе связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 5. С. 3.
18. *Kuznetsov S.P.* Plykin-type attractor in nonautonomous coupled oscillators // CHAOS. 2009. Vol. 19, № 1. P. 013114.
19. *Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Hyperbolic attractor in a system of coupled non-autonomous van der Pol oscillators: Numerical test for expanding and contracting cones // Physics Letters. 2007. Vol. A365, № 1-2. P. 97.
20. Кузнецов С.П. Пример неавтономной системы с непрерывным временем, имеющей аттрактор типа Плыкина в отображении Пуанкаре // Нелинейная динамика. 2009. Vol. 5, № 3.
21. *Newhouse S.E.* Lectures on dynamical systems // In Dynamical Systems C.I.M.E. Lectures Bressanone, Italy, June 1978, 1–114. Progress in Mathematics, № 8, Birkhäuser–Boston: Boston.
22. *Hunt T.J.* Low Dimensional Dynamics: Bifurcations of Cantori and Realisations of Uniform Hyperbolicity. PhD Thesis. University of Cambridge, 2000. 121 p.
23. *Ахиезер Н.И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.
24. *Айдарова Ю.С., Кузнецов С.П.* Хаотическая динамика модели Ханта – искусственно сконструированной потоковой системы с гиперболическим аттрактором // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 3. P. 176.
25. *Kuznetsov S.P.* A non-autonomous flow system with Plykin type attractor // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2009. Vol. 14. P. 3487.
26. *Kuznetsov S.P.* Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale–Williams type // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95. P. 144101.
27. Кузнецов С.П., Исаева О.Б., Осбалдестин А. Феномены комплексной аналитической динамики в системе связанных неавтономных осцилляторов с поочередным возбуждением // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33. Вып. 17. С. 69.
28. *Жалнин А.Ю., Кузнецов С.П.* О возможности реализации в физической системе странного нехаотического аттрактора Ханта и Отта // ЖТФ. 2007. Т. 77, № 4. С. 10.

29. *Kuznetsov S.P., Pikovsky A.* Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors // *Physica*. 2007. Vol. D232. P. 87.
30. *Кузнецов С.П.* О возможности реализации параметрического генератора гиперболического хаоса // *ЖЭТФ*. 2008. Vol. 133, № 2. P. 438.
31. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Пиковский А.С., Тюрюкина Л.В.* Хаотическая динамика в системах связанных неавтономных осцилляторов с резонансным и нерезонансным механизмом передачи возбуждения // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2007. Т. 15, № 6. С. 75.
32. *Kuznetsov S.P., Pikovsky A.S., Sataev I.R.* Hyperbolic Smale–Williams attractor in Poincaré map of a four-dimensional autonomous system // *Proc. of the III Int. Conf. «Frontiers of Nonlinear Physics»*. Nizhny Novgorod–Saratov–Nizhny Novgorod, July 3–9, 2007, 66–67.
33. *Кузнецов С.П., Пономаренко В.И.* О возможности реализации странного аттрактора типа Смейла–Вильямса в радиотехническом генераторе с запаздыванием // *Письма в ЖТФ*. 2008. Т. 34. Вып. 18. С. 1.
34. *Kuznetsov S.P., Pikovsky A.S.* Hyperbolic chaos in the phase dynamics of a Q-switched oscillator with delayed nonlinear feedbacks // *Europhysics Letters*. 2008. Vol. 84. P. 10013.
35. *Баранов С.В., Кузнецов С.П., Пономаренко В.И.* Хаос в фазовой динамике осциллятора ван дер Поля с модулированной добротностью и дополнительной запаздывающей обратной связью // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2009. Принята к печати.
36. *Кузнецов С.П., Селезнев Е.П.* Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла–Вильямса // *ЖЭТФ*. 2006. Т. 129, № 2. С. 400.
37. *Рюэль Д., Такенс Ф.* О природе турбулентности // В сб. *Странные аттракторы / Под ред. Я.Г. Синая и Л.П. Шильникова*. М.: Мир, 1981. С. 117.
38. *Newhouse S., Ruelle D., Takens F.* Occurrence of strange Axiom-A attractors near quasi periodic flows on T^m , $m \geq 3$ // *Comm. Math. Phys.* 1978. Vol. 64. P. 35.
39. *Hunt T.J., MacKay R.S.* Anosov parameter values for the triple linkage and a physical system with a uniformly chaotic attractor // *Nonlinearity*. 2003. Vol. 16. P. 1499.
40. *Belykh V., Belykh I., Mosekilde E.* The hyperbolic Plykin attractor can exist in neuron models // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 2005. Vol. 15, № 11. P. 3567.
41. *Шильников Л.П., Тураев Д.В.* О катастрофах голубого неба // *Доклады РАН*. 1995. Т. 342. С. 596.
42. *Shil'nikov L.P., Turaev D.V.* Simple bifurcations leading to hyperbolic attractors // *Computers Math. Appl.* 1997. Vol. 34, № 2–4. P. 173.
43. *Gavrilov N.K., Shilnikov A.L.* An example of blue sky catastrophe // In: *Methods of qualitative theory of differential equations and related topics*. Amer. Math. Soc. Transl., II Ser. Vol.200, AMS, Providence, RI, 1999, 165–188.
44. *Shilnikov A., Symbalyuk G.* Transition between tonic spiking and bursting in a neuron model via the blue-sky catastrophe // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 94. P. 048101.
45. *Лоренц Э.* Детерминированное непериодическое течение // В сб. *Странные аттракторы / Под ред. Я.Г. Синая и Л.П. Шильникова*. М.: Мир, 1981. С. 88.

46. *Tucker W.* A rigorous ODE solver and Smale's 14th problem // *Comp. Math.* 2002. Vol. 2. P. 53.
47. *Morales C.A.* Lorenz attractor through saddle-node bifurcations // *Ann. de l'Inst. Henri Poincaré.* 1996. Vol. 13. P. 589.
48. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002. 252 с.

Поступила в редакцию 29.06.2009

HYPERBOLIC STRANGE ATTRACTORS OF PHYSICALLY REALIZABLE SYSTEMS

S.P. Kuznetsov

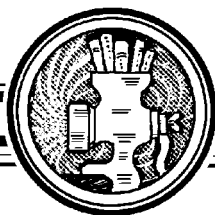
A review of studies aimed on revealing or constructing physical systems with hyperbolic strange attractors, like Plykin attractor and Smale–Williams solenoid, is presented. Examples of iterated maps, differential equations, and simple electronic devices with chaotic dynamics associated with such attractors are presented and discussed. A general principle is considered and illustrated basing on manipulation of phases in alternately excited oscillators and time-delay systems. Alternative approaches are reviewed outlined in literature, as well as the prospects of further researches.

Keywords: Attractor, dynamical system, Poincaré map, Smale–Williams solenoid, Plykin attractor, hyperbolic chaos, oscillator, chaos generator.



Кузнецов Сергей Петрович – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). С 1988 – сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, в настоящее время – заведующий лабораторией теоретической нелинейной динамики. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиофизика. Профессор кафедры динамических систем. Автор учебно-научной монографии «Динамический хаос» и учебника «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 180 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под руководством С.П. Кузнецова защищены семь кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994–1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН
им. В.А. Котельникова
E-mail: spkuz@rambler.ru



СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ПЕРРОНА–ФРОБЕНИУСА

В.М. Аникин

В статье отражена проблематика изучения спектральных свойств линейного несамосопряженного оператора Перрона–Фробениуса, вводимого при вероятностном описании дискретных динамических систем с хаотическим поведением. Изложен метод аналитического решения задачи на собственные функции и собственные числа оператора для кусочно-линейных отображений и продемонстрирована определяющая роль собственных чисел и собственных функций оператора в оценке релаксационных и корреляционных свойств хаотических отображений.

Ключевые слова: Линейный несамосопряженный оператор, собственные функции, собственные значения.

В основе наших современных знаний лежат прежде всего простые модели, именно они, благодаря своей простоте, позволяют понять сложности окружающего нас мира.

Ю.И. Неймарк

Введение

Простейшими моделями хаотических процессов, как известно, являются динамические системы с дискретным временем – одномерные отображения, описываемые разностными уравнениями вида

$$x_{n+1} = g(x_n, \lambda), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x_n \in (a, b), \quad (1)$$

где g – нелинейная или кусочно-линейная необратимая итеративная функция, сохраняющая меру в области определения отображения – интервале (a, b) ; λ – параметр, определяющий особенности динамики отображения. Простейшие модели динамического хаоса и сейчас не утратили своего и научного, и методологического значения для нелинейной науки. Собственно, первые серьезные шаги на пути ее изучения и начинаются со сценария М. Фейгенбаума перехода к хаосу, обнаруженного впервые именно для одномерных отображений и впоследствии нашедшего экспериментальное подтверждение при изучении ряда физических явлений. Второй важный концептуальный пример связан с развивавшейся коллективом авторов во главе с И.Р. Пригожиным фундаментальной концепцией относительно определяющей роли хаоса в

возникновении «стрелы времени» (необратимости физических процессов при наличии обратимого характера уравнений движения) с привлечением в качестве базового объекта теории простейшего диадического отображения – сдвига Бернулли [1]. Интересен, далее, тот факт, что парадигма детерминированного хаоса заняла свою нишу в общей теории относительности, когда была открыта хаотическая осцилляция компонент метрического тензора согласно одномерному отображению Гаусса в однородной анизотропной космологической модели типа IX по Бианки вблизи особенности («перемешанный мир» – *mixmaster universe*) [2].

Глубокое математическое исследование «классики» нелинейных явлений, одномерных отображений, позволяет выявить их новые свойства как собственно математических объектов (причем в рамках аналитического решения) и открывает перспективы для их использования в качестве инструмента для анализа нелинейных явлений более сложной природы.

В данной лекции представляются результаты аналитического исследования линейного оператора Перрона–Фробениуса, ассоциированного с перемешивающими одномерными кусочно-линейными отображениями, обладающими, в частности, инвариантной плотностью. Главными особенностями данного оператора (помимо упомянутой линейности), являются его положительность (в терминах функционального анализа) и несамосопряженность и неортогональность собственных функций, выявляемые при изучении спектральных свойств оператора (собственных функций и собственных значений) в нормированных линейных функциональных пространствах.

В статье будут последовательно рассмотрены такие вопросы, как постановка задачи на собственные функции и собственные значения оператора, аналитический метод решения этой задачи на базе построения производящей функции для собственных функций оператора, значимость решения спектральной задачи для определения вида автокорреляционной функции траекторий отображения (и наблюдаемых, связанных с этой траекторией).

1. Постановка задачи на собственные функции и собственные значения для оператора Перрона–Фробениуса

Оператор Перрона–Фробениуса (ОПФ)¹ определяет изменение плотностей вероятностной меры, происходящее при действии хаотического отображения². Вероятностное описание хаотических динамических систем связано с рассмотрением начального значения x_0 и рекуррентно вычисляемых согласно (1) точек траектории x_n как случайных величин, соответственно обозначаемых как X_0 и X_n . Подобная экспликация оправдана тем, что совокупность значений x_n (как ансамбля реализа-

¹**Перрон**, Оскар (нем. Perron, Oskar) (1880–1975) – немецкий математик, профессор университетов в Гейдельберге и Мюнхене. Автор широкого спектра публикаций по алгебре, геометрии, теории чисел, матриц, интегрирования и дифференциальных уравнений, капитального труда по непрерывным дробям.

Фробениус, Фердинанд Георг (нем. Frobenius, Ferdinand Georg) (1849–1917) – немецкий математик, член Прусской АН в Берлине (1893). Основные работы относятся к алгебре, теории алгебраических чисел, в частности, к теории матриц, теории конечных групп и их представлений матрицами.

²Существует несколько эквивалентных форм записи оператора Перрона–Фробениуса на основе интегральных и функциональных преобразований (см., например, [3–6]).

ций X_n) для хаотического отображения при *любом* начальном значении x_0 демонстрирует идентичные распределения по области определения («нечувствительность» к x_0). В то же время траектории системы чувствительны к незначительному изменению x_0 в том смысле, что расхождение траекторий при незначительном изменении x_0 в процессе итераций сравнимо с длиной интервала. Это и предопределяет необходимость прогноза хода траектории при случайном (то есть заранее неизвестном) изменении x_0 исключительно в вероятностном ключе.

Условие сохранения вероятностной меры приводит к представлению ОПФ в форме интеграла с сингулярным ядром

$$Pf(x) = \int f(t)\delta(x - g(t, \lambda))dt, \quad (2)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. В вероятностной трактовке соотношение (2) – это обычное правило преобразования вероятностных плотностей при нелинейном преобразовании случайной величины ($X_{n+1} = g(X_n, \lambda)$). Выражение может быть в силу фильтрующих свойств дельта-функции преобразовано от интегрального уравнения с сингулярным ядром к функциональному уравнению. Для кусочно-линейных отображений это уравнение имеет вид линейной комбинации значений функции $f(x)$ при различных значениях аргумента вида $ax + b$ (табл. 1). Для отображений, представленных в этой таблице, неподвижной «точкой» оператора является равномерное распределение, что проверяется непосредственной подстановкой в выражения для ОПФ.

Под пилообразным отображением в табл. 1 понимается отображение (рис. 1)

$$x_{n+1} = \sum_{k=0}^{N-1} \left((-1)^k N x_n + (-1)^{k+1} \left(k + \frac{1 - (-1)^k}{2} \right) \right) \Theta_k(x_n), \quad (3)$$

где $\Theta_k(x)$ – характеристическая функция отрезка $[\tilde{x}_{k-1}, \tilde{x}_k]$ задания k -й ветви отображения. Она равна единице, если значение ее аргумента принадлежит отрезку

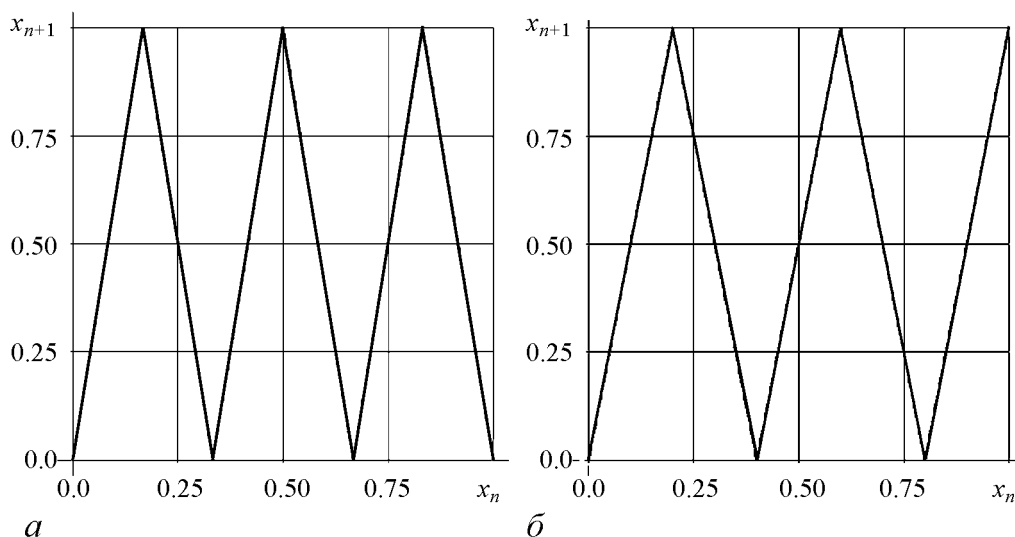


Рис. 1. Кусочно-линейное пилообразное отображение с четным (а) и нечетным (б) числом ветвей

Операторы Перрона–Фробениуса
одномерных кусочно-линейных отображений

Отображение	Оператор Перрона–Фробениуса
Двоичный сдвиг Бернулли $x_{n+1} = 2x_n \bmod 1$	$P_B \phi(x) = \frac{1}{2} \left(\phi\left(\frac{x}{2}\right) + \phi\left(\frac{1+x}{2}\right) \right)$
Инверсный двоичный сдвиг Бернулли $x_{n+1} = 1 - 2x_n \bmod 1$	$P_{\bar{B}} \phi(x) = \frac{1}{2} \left(\phi\left(\frac{1-x}{2}\right) + \phi\left(\frac{2-x}{2}\right) \right)$
Пирамидальное отображение $x_{n+1} = 1 - 2x_n - 1 $	$P_T \phi(x) = \frac{1}{2} \left(\phi\left(\frac{x}{2}\right) + \phi\left(\frac{2-x}{2}\right) \right)$
Инверсное пирамидальное отображение $x_{n+1} = 1 - 2x_n $	$P_V \phi(x) = \frac{1}{2} \left(\phi\left(\frac{1-x}{2}\right) + \phi\left(\frac{x+1}{2}\right) \right)$
N -образное отображение $x_{n+1} = \begin{cases} 3x_n, & 0 \leq x_n < 1/3, \\ 2 - 3x_n, & 1/3 \leq x_n < 2/3, \\ 3x_n - 2, & 2/3 \leq x_n \leq 1 \end{cases}$	$P_N \phi(x) = \frac{1}{3} \left(\phi\left(\frac{x}{3}\right) + \phi\left(\frac{2-x}{3}\right) + \phi\left(\frac{x+2}{3}\right) \right)$
Инверсное N -образное отображение $x_{n+1} = \begin{cases} 1 - 3x_n, & 0 \leq x_n < 1/3, \\ 3x_n - 1, & 1/3 \leq x_n < 2/3, \\ 3 - 3x_n, & 2/3 \leq x_n \leq 1 \end{cases}$	$P_{\bar{N}} \phi(x) = \frac{1}{3} \left(\phi\left(\frac{1-x}{3}\right) + \phi\left(\frac{x+1}{3}\right) + \phi\left(\frac{3-x}{3}\right) \right)$
Сдвиг Бернулли общего вида $x_{n+1} = Nx_n \bmod 1$	$P_B \phi(x) = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \phi\left(\frac{p+x}{N}\right)$
Инверсный сдвиг Бернулли общего вида $x_{n+1} = 1 - Nx_n \bmod 1$	$P_{\bar{B}} B(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} B\left(\frac{p+1-x}{N}, t\right) =$ $= \frac{t/N}{e^{t/N} - 1} e^{\frac{(1-x)t}{N}} \equiv B\left(1-x, \frac{t}{N}\right)$
Пилообразное отображение с N ветвями	$P_{(N)} \varphi(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N/2-1} \varphi\left(\frac{x+2k}{N}\right) +$ $+ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N/2-1} \varphi\left(\frac{2(k+1)-x}{N}\right)$

$[\tilde{x}_{k-1}, \tilde{x}_k]$; когда же значение аргумента лежит за пределами этого отрезка, индикаторная функция принимает нулевое значение.

Как и для любого линейного оператора спектральная задача для оператора (2) основывается на соотношении

$$P\psi_n(x) = \lambda_n \psi_n(x), \quad (4)$$

где $\psi_n(x)$ и λ_n – собственная функция оператора и отвечающее ей собственное число, соответственно. Собственная функция, соответствующая единичному собственному числу $\lambda_0 = 1$, является неподвижной точкой оператора и имеет смысл инвариантной плотности, наличие которой является доминантным признаком детерминированного хаоса.

Постановка задачи на собственные функции и собственные значения для ОПФ немедленно требует определения линейного функционального пространства, которому принадлежат собственные функции оператора. Говоря несколько иначе, оператор необходимо рассматривать на некотором нормированном функциональном пространстве (банаховом пространстве), где норма определена посредством скалярного произведения функций (гильбертово пространство). Это позволяет, в частности, строить и исследовать пределы для метрических выражений. С одной стороны, сами по себе вероятностные плотности не могут образовать линейное пространство (произвольная линейная комбинация плотностей не является плотностью), а с другой стороны, собственные функции оператора Перрона–Фробениуса высших порядков вообще не являются вероятностными плотностями! От них лишь требуется удовлетворение соотношению (4), при этом все они ортогональны константе [3, с. 53]

$$\int_0^1 \psi_n(x) dx = \delta_{n,0}, \quad n \geq 1. \quad (5)$$

Соотношение (5) имеет важное теоретическое и практическое значение, поскольку может рассматриваться как критерий правильности расчетов собственных функций ОПФ, проводимых и аналитическими, и численными методами. Для наглядной иллюстрации (5) на рис. 2 приведены несколько первых собственных функций [7] ОПФ для отображения Гаусса $x_{n+1} = 1/x_n \bmod 1$, описывающего преобразование иррационального подмножества единичного интервала в себя.

Впервые операторный подход при исследовании асимптотических процессов в хаотической динамической системе был применен К.Ф. Гауссом именно к отображению $x_{n+1} = 1/x_n \bmod 1$ (с ним связан процесс разложения случайного числа в непрерывную дробь) чуть более 200 лет назад [3, гл. 3; 8–11]. В трудах Э. Вирсинга, К.И. Бабенко, Д.

Майера и М. Иосифеску (а им предшествовали работы Р.О. Кузьмина, Поля Леви, А.Я. Хинчина и некоторых других математиков³) аналитически и численно показано, в частности, что спад корреляций в динамической системе Гаусса и скорость установления в системе инвариантного вероятностного закона определяет *модуль второго (отрицательного по знаку!) собственного числа* соответствующего оператора Перрона–Фробениуса. Число $-\lambda = 0.30366\dots$, возведенное Д. Кнудом в ранг «фундаментальной константы», на порядок отличается от показателя Ляпунова данного отображения $\Lambda = \pi^2/(6 \ln 2) = 2.37313\dots$

Отметим достаточно удивительное обстоятельство: первые аналитические решения спектральных задач для более простых по структуре и иным свойствам (в

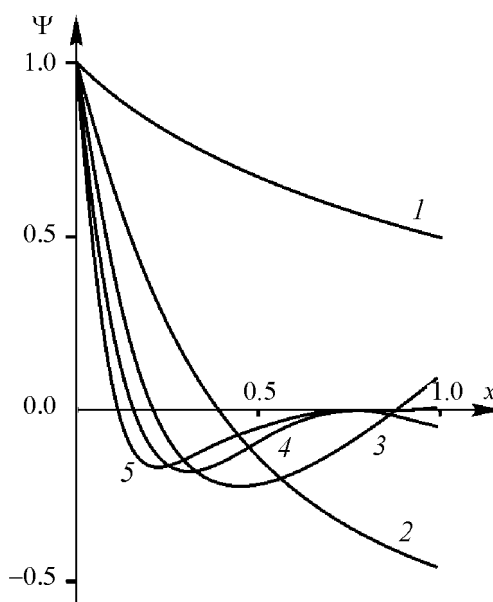


Рис. 2. Собственные функции отображения Гаусса: 1 – инвариантная плотность, 2–5 – собственные функции следующих порядков (ординаты показаны с масштабным коэффициентом $\ln 2$)

³См. библиографию в цит. выше книгах автора [3, 11].

сравнении с отображением Гаусса) хаотических отображений были получены гораздо позже – в первой половине 90-х годов прошлого столетия: усилиями членов научной школы Нобелевского лауреата И.Р. Пригожина [12–16]. Речь идет о таких отображениях, как сдвиг Бернулли $x_{n+1} = Nx_n \bmod 1$, где N – произвольное целое положительное число, и некоторых других простейших кусочно-линейных преобразованиях с итеративными функциями в виде двух-трех ветвей.

2. Решение спектральной задачи методом производящей функции для собственных функций оператора

Для кусочно-линейных отображений типа сдвигов Бернулли и отображений, полученных из них произвольным инвертированием ветвей, собственные функции ОПФ естественно искать в виде полиномиальных функций, ибо при действии оператора Перрона–Фробениуса этих отображений на полином степень последнего не меняется, и, таким образом, задача сводится лишь к нахождению соответствующих коэффициентов полиномов, играющих роль собственных функций. Иначе говоря, в этом случае ОПФ может быть определен в линейном пространстве целых функций. В работах членов научного коллектива И.Р. Пригожина показано, что в случае сдвигов Бернулли собственными функциями ОПФ являются полиномы Бернулли $B_n(x)$. Поскольку производящая функция для полиномов Бернулли суть

$$B(x, t) = \frac{te^{xt}}{e^t - 1} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < 2\pi \quad (6)$$

(t – параметр), решение спектральной задачи можно необыкновенно изящно получить посредством воздействия оператором Перрона–Фробениуса для сдвигов Бернулли (см. табл. 1) на выражение (6)

$$P_B B(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} B\left(\frac{p+x}{N}, t\right) = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \frac{te^{(p+x)t/N}}{e^t - 1} = \frac{t}{N} \frac{e^{xt/N}}{e^{t/N} - 1} = B\left(x, \frac{t}{N}\right). \quad (7)$$

Замечательное соотношение (7) показывает, что действие оператора Перрона–Фробениуса для сдвигов Бернулли приводит к той же самой (!) производящей функции, но с параметром t/N . А это, в свою очередь, дает

$$P_B B(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_B B_n(x) \frac{t^n}{n!} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{N^n} B_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad P_B B_n(x) = \frac{1}{N^n} B_n(x), \quad (8)$$

что и означает – полиномы Бернулли являются собственными функциями ОПФ ($\psi_n(x) = B_n(x)$) с собственными числами $\lambda_n = 1/N^n$.

Прием нахождения собственных функций ОПФ посредством предварительного построения их производящих функций может быть развит и для других кусочно-линейных отображений. Предполагая существование собственных функций в форме полиномов

$$\psi_n(x) = \phi_n(x) \Theta_{0,1}(x), \quad \phi_n(x) = a_{n,n}x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + \dots + a_{n,1}x + a_{n,0}, \quad (9)$$

по аналогии с (5) запишем производящую функцию в виде

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad (10)$$

где $\psi_n(x)$ – искомые собственные функции оператора. Дополнительно введем в рассмотрение четную

$$\Psi_e(x, t) = \frac{1}{2} (\Psi(x, t) + \Psi(x, -t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{2k}(x) \frac{t^{2k}}{(2k)!} \quad (11)$$

и нечетную

$$\Psi_o(x, t) = \frac{1}{2} (\Psi(x, t) - \Psi(x, -t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{2k+1}(x) \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (12)$$

части (10), определяемые стандартным образом. Согласно (5), производящие функции (10)–(12) должны удовлетворять условиям

$$\int_0^1 \Psi(x, t) dx = 1, \quad \int_0^1 \Psi_e(x, t) dx = 1, \quad \int_0^1 \Psi_o(x, t) dx = 0, \quad (13)$$

используемым для замыкания системы алгебраических уравнений при определении коэффициентов полиномиальных собственных функций.

В случае кусочно-линейных отображений с полными (переводящими интервал своего определения на весь интервал) ветвями и одинаковыми (по модулю) угловыми коэффициентами ветвей возможна факторизация производящей функции (10) и ее составляющих (11) и (12) в виде

$$\Psi(x, t) = e^{xt} H(t), \quad \Psi_{e,o}(x, t) = \frac{1}{2} (e^{xt} H_{1,2}(t) + e^{-xt} H_{1,2}(-t)), \quad (14)$$

где вспомогательные аналитические функции $H(t)$ и $H_{1,2}(t)$ представимы (в силу исходного предположения) степенными рядами вида $\sum_{n=0}^{\infty} h_n \frac{t^n}{n!}$. Тогда все (!) искомые полиномы выражаются через коэффициенты разложения вспомогательных функций: $\psi_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k h_k x^{n-k}$. Поэтому, в принципе, достаточно знать значения (правило вычисления) коэффициентов h_k , а не явный вид вспомогательных функций $H(t)$ и $H_{1,2}(t)$. Тем не менее, существует класс отображений, для которого возможно аналитическое решение функциональных уравнений относительно $H(t)$ и $H_{1,2}(t)$, получаемых подстановкой (14) в соотношение (4) для собственных функций и собственных чисел оператора.

Общая методика решения спектральных задач для ОПФ кусочно-линейных отображений с ветвями одного (по модулю) наклона представляется следующей совокупностью этапов:

1) уравнение (4) относительно собственных функций записывается для конкретного ОПФ;

2) подстановка полиномов (9) в (4) дает выражение для собственных чисел оператора Перрона–Фробениуса;

3) на основе (4) формулируется уравнение относительно производящей функции (четной или нечетной ее частей, если выражения для собственных чисел с четными и нечетными номерами различаются) с использованием найденного на предыдущем этапе вида собственных чисел;

4) в полученные уравнения для производящей функции (ее компонент) подставляются ее факторизованные представления с целью получения функциональных уравнений для вспомогательных функций;

5) функциональное уравнение для вспомогательной функции ($H(t)$ или $H_{1,2}(t)$) либо решается аналитически, либо используется для нахождения (методом степенных рядов) рекуррентных соотношений для коэффициентов разложения вспомогательных функций в степенные ряды (начальное значение для рекуррентной формулы дает условие нормировки).

Результаты расчетов собственных функций и чисел ОПФ простейших кусочно-линейных отображений сведены в табл. 2. Через $E_n(x)$ обозначены полиномы Эйлера, имеющие производящую функцию

$$E(x, t) = \frac{2e^{xt}}{e^t + 1} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < \pi.$$

Осуществление описанной последовательности действий позволяет получить решение спектральной задачи для разнообразных кусочно-линейных отображений как с произвольным числом линейных ветвей, так и с произвольным чередованием ветвей с равным по модулю угловым коэффициентом. Для всех кусочно-линейных отображений с полными ветвями собственная функция, которой отвечает собственное число, равное единице, есть $\psi_0(x) = 1 \cdot \Theta_{0,1}(x)$ – плотность равномерного распределения на интервале $(0,1)$ ($\Theta_{0,1}(x)$ – характеристическая функция единичного

Таблица 2

Собственные функции и собственные числа оператора Перрона–Фробениуса простейших кусочно-линейных отображений

Отображение	Собственные числа ОПФ	Собственные функции ОПФ
Сдвиг Бернулли общего вида	$\lambda_k = 1/N^k$	$\psi_k(x) = B_k(x)$
Инверсный сдвиг Бернулли общего вида	$\lambda_n = (-1)^n/N^n$	$\psi_k(x) = B_k(x)$
Пирамидальное отображение	$\lambda_{2n} = 1/2^{2n}$	$\psi_{2n}(x) = B_{2n}(x/2)$
Инверсное пирамидальное отображение	$\lambda_{2n} = 1/2^{2n}$	$\psi_{2n}(x) = B_{2n}((1-x)/2) = B_{2n}((1+x)/2)$;
N -образное отображение	$\lambda_{2n} = 1/3^n,$ $\lambda_{2n+1} = 1/3^{2n+2}$	$\psi_{2n}(x) = B_{2n}(x),$ $\psi_{2n+1}(x) = E_{2n+1}(x)$
Инверсное N -образное отображение	$\lambda_{2n} = 1/3^{2n},$ $\lambda_{2n+1} = -1/3^{2n+2}$	$\psi_{2n}(x) = B_{2n}(x),$ $\psi_{2n+1}(x) = E_{2n+1}(x)$

интервала). Что касается линейной собственной функции, то когда она существует, то равна $\psi_1(x) = (x - 1/2) \cdot \Theta_{0,1}(x)$; в ряде случаев линейная функция входит в ядро оператора.

Ход расчета собственных функций и собственных чисел ОПФ пилообразного отображения (3) с произвольным числом ветвей отражает табл. 3. При исследовании (3) целесообразно отдельно рассматривать случаи четного (см. рис. 1, а) и нечетного (см. рис. 1, б) числа ветвей: в «четном» случае возможно возникновение полиномиального нуль-пространства (ядра) для ОПФ (действие ОПФ на функцию ядра дает нуль, $P\psi_n(x) = 0$), а в «нечетном» случае – появление кратных собственных чисел (одному собственному значению соответствуют две собственные функции).

Случай кусочно-линейного отображения с произвольным чередованием ветвей с положительным и отрицательным угловым коэффициентом требует расчета коэффициентов полиномиальных вспомогательных функций. Это возможно на основе получаемых рекуррентных формул [17]. Собственные же числа имеют простое представление

$$\lambda_n = \frac{N_p + (-1)^n N_n}{N^{n+1}}, \quad N = N_p + N_n,$$

где N_p и N_n – соответственно число ветвей с положительным и отрицательным угловым коэффициентом.

Таблица 3

Решение спектральной задачи для пилообразного отображения (3)

Характеристика	$N = 2k$	$N = 2k + 1$
Собственные числа	$\lambda_n = \frac{1}{N^n}$	Кратные: $\lambda_n = 1/N^n, n = 2k,$ $\lambda_n = 1/N^{n+1}, n = 2k + 1$
Функциональные уравнения для вспомогательных функций	$H_1(t) = \frac{1}{N} (H_1(Nt) \frac{e^{gt} - 1}{e^{2t} - 1} + H_1(-Nt) e^{-2t} \frac{e^{-gt} - 1}{e^{-2t} - 1})$	$H_1(t) = \frac{1}{N(e^{2t} - 1)} \times (H_1(Nt)(e^{(N+1)t} - 1) - H_1(-Nt)(e^{-(N-1)t} - 1))$
Решение функциональных уравнений для вспомогательных функций	$H_1(t) = 2t/(e^{2t} - 1)$	$H_1(t) = t/(e^t - 1),$ $H_2(t) = 2/(e^t + 1)$
Производящая функция для собственных функций	$\Psi_e(x, t) = B_e(x, t) - \frac{t}{2} E_o(x, t)$	$B_e(x, t), E_o(x, t)$
Собственные функции ОПФ	$\psi_n(x) = B_n(x) - \frac{n}{2} E_{n-1}(x), n = 0, 2, 4 \dots$	$\psi_n(x) = aB_{2n}(x) + bE_{2n-1}(x), n = 0, 1, 2, \dots$ (a и b – любые константы)
Производящая функций для функций ядра ОПФ	$B_o(x, t), E_o(x, t)$	
Функции ядра ОПФ	$B_{2n+1}(x), E_{2n+1}(x)$	

Отметим, что решение спектральной задачи для ОПФ некоторых «базовых» отображений автоматически позволяет записать выражения для собственных функций и собственных чисел операторов *топологически сопряженных* отображений, связанных с «базовыми» обратимой нелинейной (или в простейшем случае линейной) заменой переменной. Собственные числа при таких преобразованиях являются инвариантами, а собственная функция ОПФ нового отображения образуется путем умножения инвариантной плотности сопряженного отображения на собственную функцию ОПФ базового отображения с аргументом в форме обратной функции от сопрягающего преобразования. К примеру, собственные функции логистического отображения $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$, $x_n \in (0, 1)$, связанного с пирамидальным отображением $\tilde{x}_{n+1} = 1 - |2\tilde{x}_n - 1|$ заменой переменных $x_n = h(\tilde{x}_n) = \sin^2(\pi\tilde{x}_n/2)$, имеют представление в виде

$$\psi_m^{(c)}(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} B_{2m}(h^{-1}(x)) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} B_{2m}\left(\frac{1}{\pi} \arcsin \sqrt{x}\right).$$

3. Что дает знание собственных функций и собственных чисел оператора Перрона–Фробениуса?

При изучении как стохастических («истинно» случайных), так и хаотических процессов принципиальную (иногда даже говорят, «критическую») роль в радиофизике, а также в статистической физике играет анализ корреляционных функций процесса, оценка скорости убывания или «расщепления» корреляций, оценка динамики релаксационных процессов, установления равновесного состояния. Автокорреляционная функция преобразованием Фурье связана, как известно, с энергетическим спектром (Винера–Хинчина), который является характеристикой, нашедшей широкое применение в прикладных задачах. Общий вид корреляционной функции для процессов U, V , ассоциированных с реализацией дискретного хаотического процесса X :

$$R(n) = \langle U(x)V(g^n(x, \lambda)) \rangle - \langle U(x) \rangle \langle V(g^n(x, \lambda)) \rangle, \quad (15)$$

где усреднение в стационарном (асимптотическом) случае ведется по инвариантной плотности. Поскольку траектории отображения определяются многократным итерированием, то есть $x_n = g^n(x_0, \lambda) = g^{n-1}(g(x_0, \lambda))$, соотношение (15) можно представить в виде

$$R(n) = \langle U(x)\tilde{P}^n V(\varphi(x)) \rangle - \langle U(x) \rangle \langle V(x) \rangle, \quad (16)$$

где $\tilde{P}f(x) = P(\tilde{\rho}(x)f(x))/\tilde{\rho}(x)$ – модифицированный оператор Перрона–Фробениуса, $\tilde{\rho}(x)$ – инвариантная плотность рассматриваемого отображения.

Собственные числа оператора Перрона–Фробениуса по мере Лебега (2) и модифицированного оператора Перрона–Фробениуса совпадают, а собственные функции отличаются множителем $\tilde{\rho}(x)$. Отсюда становится ясным, что ключевым моментом при расчете асимптотических и корреляционных свойств одномерных хаотических отображений является нахождение решения спектральной задачи для оператора

Перрона–Фробениуса исследуемого отображения. Особый интерес в этой связи вызывают те отображения и ассоциированные с ними линейные операторы, для которых данная задача может быть решена *аналитически*. Соответственно аналитически может быть решена и задача расчета скорости релаксационных процессов (установления инвариантного распределения) и спада корреляций. Именно такой класс операторов (и «порождающих» их отображений) представлен в настоящей статье.

Формула (16) упрощается при вычислении автокорреляционных функций орбит хаотических отображений. Так, для определенных на единичном интервале хаотических отображений с равномерным инвариантным распределением расчеты в (16) сводятся к определению многократного действия ОПФ на независимую переменную, которая для осуществления этих расчетов заменяется на линейную собственную функцию оператора $\psi_1(x)$ (в случае ее наличия)

$$R(n) = \int_0^1 x P^n x dx - \frac{1}{4} = \int_0^1 x P^n \left(\psi_1(x) + \frac{1}{2} \right) dx - \frac{1}{4}. \quad (17)$$

Характер изменения автокорреляционной функции с ростом аргумента n зависит от знака и абсолютного значения собственного числа, отвечающего линейной собственной функции $\psi_1(x)$. Так, для сдвигов Бернулли общего вида автокорреляционная функция демонстрирует экспоненциальный спад

$$R(n) = \frac{1}{12} \frac{1}{N^n} = \frac{\lambda_1^n}{12} = \frac{1}{12} e^{-n\Lambda}, \quad n \geq 0, \quad (18)$$

где $\lambda_1 = N^{-1}$ – первое собственное число оператора Перрона–Фробениуса для сдвигов Бернулли, $\Lambda = -\ln \lambda_1 = \ln N$ – показатель Ляпунова этого отображения.

В то же время для инверсных сдвигов Бернулли затухание автокорреляционной функции носит осциллирующий характер ($\lambda_1 = -N^{-1}$)

$$R(n) = \frac{(-1)^n |\lambda_1|^n}{12} = \frac{(-1)^n}{12} e^{-n\Lambda}, \quad \Lambda = -\ln |\lambda_1|, \quad n \geq 0. \quad (19)$$

Третий тип поведения автокорреляционной функции орбит хаотических отображений характерен для пилообразных отображений с *четным* числом ветвей. В этом случае $P_{(N=2k)} x = 1/2$, и отображения генерируют «дискретный белый шум» с автокорреляционной функцией

$$R(n) = \frac{1}{12} \delta(n) = \begin{cases} 1/12, & n = 0, \\ 0, & n \geq 1. \end{cases} \quad (20)$$

Хотя в показатель экспоненты в (18) и (19) мы ввели значение показателя Ляпунова, скорость убывания автокорреляционной функции в соответствующих случаях точнее сравнивать со скоростью убывания *показательной функции* с основанием $|\lambda_1| < 1$. В самом деле, для пилообразного отображения с *нечетным* числом ветвей для $R(n)$ получается выражение, аналогичное (18), но с иным значением λ_1

$$R(n) = \frac{1}{12} \frac{1}{N^{2n}} = \frac{\lambda_1^n}{12} = \frac{1}{12} e^{-2n\Lambda}, \quad \Lambda = \ln N, \quad \lambda_1 = \frac{1}{N^2}, \quad n \geq 0. \quad (21)$$

Для инверсного пилообразного отображения с нечетным числом, полученного инвертированием всех ветвей исходного отображения, автокорреляционная функция с ростом n демонстрирует «колебательное» затухающее поведение

$$R(n) = \frac{(-1)^n}{12} |\lambda_1|^n = \frac{(-1)^n}{12} e^{-2n\Lambda}, \quad \Lambda = \ln N, \quad \lambda_1 = -\frac{1}{N^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

Связь собственного числа λ_1 с показателем Ляпунова еще более «затушевывается» при рассмотрении отображения с произвольным чередованием ветвей с различными угловыми коэффициентами. Автокорреляционная функция орбит удовлетворяет универсальному виду, но со «своим» значением собственного числа λ_1

$$R(n) = \frac{1}{12} \lambda_1^n, \quad \lambda_1 = \frac{N_p - N_n}{N^2}, \quad n \geq 0. \quad (23)$$

Характер изменения (23) зависит от соотношения числа ветвей N_p с положительным угловым коэффициентом и числа ветвей N_n с отрицательным значением углового коэффициента.

Таким образом, для всех рассмотренных кусочно-линейных отображений автокорреляционная функция орбит изменяется по закону $R(n) = 1/12 \lambda_1^n$, где значение собственного числа λ_1 зависит от вида отображения.

Красивый результат для автокорреляционной функции орбит получается для отображений, сопряженных рассмотренным выше кусочно-линейным отображениям. Если между отображениями установлена связь, выражаемая обратимой зависимостью $x = h(\tilde{x})$, то автокорреляционная функция нового отображения может быть вычислена через оператор Перрона–Фробениуса «старого» (!) отображения

$$R(n) = \int_0^1 h(x) P^n h(x) dx - \left(\int_0^1 h(x) dx \right)^2, \quad (24)$$

что, например, для логистического отображения приводит к выражению

$$R(n) = \begin{cases} 1/8, & n = 0, \\ 0, & n \geq 1. \end{cases}$$

Отметим, что в случае отображения Реньи $x_{n+1} = \Phi x_n \bmod 1$, $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$, в расчетах автокорреляционной функции орбит отображения участвуют две (!) линейные собственные функции ОПФ [18]. В общем же случае точный расчет (24) основан на представлении функции $h(x)$ линейной комбинацией собственных функций ОПФ.

Заключение

При операторном описании одномерных отображений их *нелинейные* свойства изучаются посредством *линейного* оператора Перрона–Фробениуса. Основная задача исследования оператора – задача определения его собственных функций и собственных чисел – успешно решается методом, основанным на введении и факторизации

производящей функции для собственных функций ОПФ и методе степенных рядов, что в комплексе позволяет найти собственные функции либо в явном виде, либо через рекуррентные соотношения для коэффициентов полиномов, определяющих структуру собственных функций. С оператором Перрона–Фробениуса для отображений с регулярным чередованием ветвей соотносятся производящие функции в виде линейных комбинаций производящих функций для полиномов Бернулли и Эйлера.

Прогресс в аналитических расчетах корреляционных функций, характеризующих процессы эволюции в дискретных динамических системах, связан с заменой операнда ОПФ алгебраическим выражением, содержащим линейные комбинации собственных функций оператора. Характер убывания корреляционных функций (по показательному закону, осциллирующий, дельта-коррелированный) определяется видом отображения и значениями собственных чисел оператора, отвечающих собственным функциям, участвующим в представлении операнда для ОПФ.

Библиографический список

1. Пригожин И.Р., Стенгерс И. Время, хаос, квант. К решению парадокса времени. М.: Прогресс, 1994.
2. Лифшиц Е.М., Халатников И.М., Синай Я.Г. и др. О стохастических свойствах релятивистских космологических моделей вблизи особой точки // Письма в ЖЭТФ. 1983. Т. 38. С. 79.
3. Аникин В.М., Голубенцев А.Ф. Аналитические модели детерминированного хаоса. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
4. Iosifescu M., Kraaikamp C. Metrical theory of continued fractions. Boston: Kluwer, Inc., 2002.
5. Бланк Л.М. Устойчивость и локализация в хаотической динамике. М.: МЦНМО, 2001.
6. Lasota A., Mackey M.C. Probabilistic properties of deterministic systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
7. Бабенко К.И., Юрьев С.П. Об одной задаче Гаусса. Препринт Института прикладной математики АН СССР, № 63. Москва, 1977.
8. Кузьмин Р.О. Об одной задаче Гаусса // ДАН СССР. 1928. Серия А. С. 375.
9. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 2. Получисленные алгоритмы. М.: Мир, 1977. С. 391.
10. Кнут Д. Э. Искусство программирования. Т. 2. Получисленные алгоритмы. 3-е изд. М.: Вильямс, 2000. С. 407.
11. Аникин В.М. Отображение Гаусса: эволюционные и вероятностные свойства. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2007.
12. Dörfle M. Spectrum and eigenfunctions of the Frobenius-Perron operator of the tent map // J. Stat. Phys. 1985. Vol. 40, № 1/2. P. 93.
13. Gaspard P. r -adic One-dimensional maps and the Euler summation formula // J. Phys. A: Math. Gen. 1992. Vol. 25. L. 483.

14. *Antoniou I., Tasaki S.* Generalized spectral decomposition of mixing dynamical systems // *Int. J. Quantum Chemistry*. 1993. Vol. 46. P. 425.
15. *Driebe D.J., Ordóñez G.O.* Using symmetries of the Perron-Frobenius operator to determine spectral decompositions // *Phys. Let.* 1996. Vol. A 211. P. 204.
16. *Antoniou I., Dmitrieva L., Kuperin Yu., Melnikov Yu.* Resonances and extension of dynamics to rigged Hilbert space // *Computers Math. Applic.* 1997. Vol. 34, № 5/6. P. 399.
17. *Аникин В.М., Ремизов А.С., Аркадакский С.С.* Собственные функции и числа оператора Перрона–Фробениуса кусочно-линейных хаотических отображений // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2007. Т. 15, № 2. С. 62.
18. *Голубенцев А.Ф., Аникин В.М.* Инвариантные функциональные подпространства линейных эволюционных операторов хаотических отображений // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2005. Т. 13, № 1–2. С. 3.

Поступила в редакцию 07.07.2009

SPECTRAL PROBLEMS FOR THE PERRON–FROBENIUS OPERATOR

V.M. Anikin

A method of solving the spectral problem for the Perron–Frobenius operator of one-dimensional piece-wise linear chaotic maps is demonstrated. The method is based on introducing generating functions for the eigenfunctions of the operator. It is shown that the behavior of autocorrelation functions for chaotic maps depends on eigenvalues of the Perron–Frobenius operator.

Keywords: Linear non-selfadjoned operator, eigenfunctions, eigenvalues.

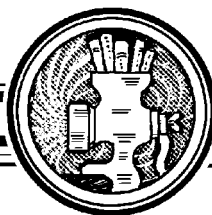


Аникин Валерий Михайлович – родился в Аткарске Саратовской области (1947). Окончил физический факультет СГУ (1970). Доктор физико-математических наук, профессор физического факультета и факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов – хаотическая динамика, математическое моделирование стохастических и хаотических процессов. Автор 180 печатных работ, в том числе монографии «Аналитические модели детерминированного хаоса», М: ФИЗМАТЛИТ, 2007 (в соавторстве с А.Ф. Голубенцевым). Ученый секретарь совета по защите кандидатских и докторских диссертаций при СГУ по специальностям радиофизика, физическая электроника, оптика, твердотельная электроника. Эксперт Министерства образования и науки РФ.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

E-mail: AnikinVM@info.sgu.ru; ivesc@sgu.ru



PATTERNS IN EXCITABLE DYNAMICS DRIVEN BY ADDITIVE DICHOTOMIC NOISE

X. Sailer, D. Hennig, and L. Schimansky-Geier

Pattern formation due the presence of additive dichotomous fluctuations is studied an extended system with diffusive coupling and a bistable FitzHugh–Nagumo kinetics. The fluctuations vary in space and/or time being noise or disorder, respectively. Without perturbations the dynamics does not support pattern formation. With proper dichotomous fluctuations, however, the homogeneous steady state is destabilized either via a Turing instability or the fluctuations create spatial nuclei of an inhomogeneous states. Finally, for purely static dichotomous disorder we find destabilization of homogeneous steady states for finite nonzero correlation length of the disorder resulting again in spatial patterns.

Keywords: FitzHugh–Nagumo, Turing pattern, dichotomic noise, additive noise.

Introduction

Several of the most prominent patterns observed in nature are due to a Turing instability [1, 2]. This phenomenon occurs when inhomogeneous perturbations of certain wavelength(s) cause destabilization of a homogeneous steady state. Recently a lot of interest was spent to the interaction of noise/disorder and nonlinearity [2–6]. Especially the possibility of inducing a pattern formation process by help of fluctuations has been studied, intensely [7–11]. As outcome of this research many various types of underlying deterministic dynamics support spatial structures and exhibit a Turing instability of their dynamic behavior if optimal noise is added. Especially excitability and bistability, where new time scales and new possible response is opened in the presence of noise are often studied objects for theoretical and experimental investigations [5].

The possibility of Turing-pattern formation induced by dichotomous fluctuations has been demonstrated recently in a series of papers [12–16]. The dichotomous fluctuations switch between two different dynamical systems each of which does not support Turing pattern formation, i.e. each undriven system possesses a pattern-free steady state. As result, it was just the switching between them that triggers the creation of spatial structures. Importantly to notice, that the authors have used dynamical models with either multiplicative dichotomous noise or switched between two distinct dynamics each having its own state dependency.

In the present study we investigate an extended array that locally possesses FitzHugh–Nagumo (FHN) dynamics. The FHN system is a prototypical model system exhibiting

both excitable and bistable behavior. Originally the FHN system was developed to describe nerve cell activity but achieves generality as one of the prototypical models for excitability and bistability [5, 17–21].

The dynamics is assumed to be subject to *additive* dichotomous driving varying either in space or in time or in both simultaneously [22]. More precisely, we illustrate that additive dichotomous driving in the excitable regime of the extended FHN system may act in a way that initially a single local inhomogeneity (single hump on the uniform rendered steady state background) is generated. This inhomogeneity acts as the core from which the pattern evolves throughout the whole space. The growth proceeds stepwise, i.e. with each switching new boundary layers are created adjacent to the core.

Also small Gaussian additive white noise is initially present to destabilize homogeneous states. Special emphasis is put on the influence of different correlation lengths and times of the dichotomic drive. Apart from obtaining regular pattern induced by additive driving we find a novel mechanism to generate them. Whereas previous works [12–16] operated with small correlation lengths or times we deal with forcing with intermediate correlation times [22].

1. The FitzHugh–Nagumo system driven by dichotomic noise

Let us study an 2d-array of units with FitzHugh–Nagumo (FHN) kinetics obeying the equations:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i - x_i^3 - y_i + D_x \Delta x_i, \quad (1)$$

$$\frac{dy_i}{dt} = \varepsilon (x_i - ay_i - I_i(t)) + D_y \Delta y_i. \quad (2)$$

Here Δ denotes the discrete Laplace operator which in our numerical simulations we treated with the help of the Crank–Nicholson scheme. They stand for diffusion with constants $D_x = 0.02$ and $D_y = 5.0$ which we use unless mentioned otherwise. $\varepsilon = 0.05$ is a small parameter ensuring a timescale separation of the activator x (fast) and the inhibitor y (slow). We put the value of a to 1.475.

The random telegraph process $I_i(t)$ takes one of the two values d and $-d$. Switching between the two states occur with rate γ and the correlation function of the process is given by

$$\langle I_i(t_1)I_j(t_2) \rangle = d^2 e^{-2\gamma|\tau|} K(i, j) \quad (3)$$

with $\tau = t_2 - t_1$ and $K(i, j)$ is the spatial correlation function between the different sites in the array.

The dynamics of a single FHN system results putting $D_x = D_y = 0$. Setting additionally $I(t)$ to one of the values, for example $I(t) = d$, the system becomes deterministic.

For large enough $|d|$ ($|d| > d_c = 2a\sqrt{\frac{1}{27}(1 - \frac{1}{a})} \approx 0.104$) this FHN system exhibits excitability. A (single) stable fixed point exists such that small perturbations around it decay. Perturbations exceeding a certain threshold lead to a large excursion of a unit in phase space before the excursion returns to the single fixed point again. With smaller $|d| < d_c$ the FHN system exhibits bistability, i.e. it possesses two stable and one unstable fixed point. Later on, the forcing is always overcritical, i.e. $|d| > d_c$.

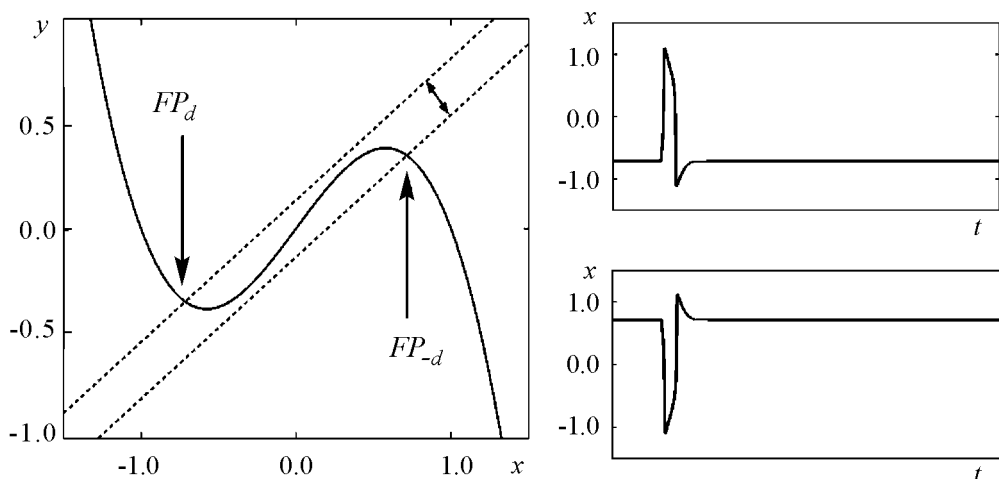


Fig. 1. Left graph: Nullclines of a single FHN-System: Activator nullcline (solid line) obtained by setting $\dot{x} = 0$, inhibitor nullclines (dashed lines) obtained by setting $\dot{y} = 0$ and shown for the two different realizations of the dichotomic driving $I(t) = \pm d$. The FP_i label the different fixed points. Right graphs: Dynamics of $x(t)$ for $d = 0.2$ (upper plot) and $d = -0.2$ (lower plot) with single spikes after a superthreshold perturbation

A single system is in another excitable regime with equivalent dynamics for $I(t) = -d$. Its easily seen and due to the symmetry of Eqs. (1),(2) under the transformations $x \rightarrow -x$ and $y \rightarrow -y$. Therefore, switching between the two states $\pm d$ of the random telegraph process $I(t)$ realizes transitions between two excitable dynamical regimes of the FHN system (1),(2) associated with either the fixed point located on the left or on the right branch of the cubic nullcline, respectively. A corresponding graphical interpretation is presented in Fig. 1.

2. Global alterations

First we assume a spatially uniform driving, i.e. $K(i, j) = 1$ and a global dichotomic switching is applied to the system ($I_i(t) = I(t)$). We denote the dynamics of the lattice system (1), (2) by

$$\dot{\mathbf{x}}_{\pm d} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y}_{\pm d} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Corresponding fixed points are called $\mathbf{x}_{0,+d}$ and $\mathbf{x}_{0,-d}$, respectively. The system was initialized in the dynamical regime $\dot{\mathbf{x}}_{+d}$ with the initial values of the units $(x_n(0), y_n(0))$ at the corresponding fixed point $\mathbf{x}_{0,+d}$. In space this corresponds to a homogeneous steady state. In our numerical simulations we add tiny but crucial Gaussian white noise of intensity 10^{-6} (for comparison: d is of order 10^{-1}) to the system by reason to provide an almost homogeneous distribution of the units around the resting position. Hereafter we will refer to this set of points with coordinates $(x(t), y(t))$ as the cloud. In space the coupled units in the cloud still shape as a virtually homogeneous steady pattern.

2.1. Low Switching Rates. First we study the dynamics of a $1 - d$ system for a very low switching rate γ . The mean time between two switchings is larger than the relaxation time to the two fixed points $\propto (\epsilon a)^{-1}$. In what happens there will be enough time left in between two consecutive switchings that units can travel from one branch of

the cubic nullcline to the other. In the ideal case the whole cloud stays at the fixed point $\mathbf{x}_{0,d}$ for a very long time keeping the lattice state close to the homogeneous steady state. Once a switching $d \rightarrow -d$ occurs the cloud leaves this fixed point for $\mathbf{x}_{0,-d}$ approaching its counterpart where then all the members of the cloud remain captured in the vicinity of this fixed point until the next switching $-d \rightarrow d$ occurs and the transition process starts all over again.

2.2. Intermediate Switching Rates. A different behavior was found for higher switching rates γ . After some passages of the cloud back and forth inhomogeneous structures are formed as illustrated in Figs 2 and 3.

The emerging patterns are the product of a switching of the telegraph signal taking place just at the moment when the cloud has begun to cross the excitation threshold. Some individual units of the cloud are already beyond the threshold moving to the left. They will get excited executing a swift transition to the left outer branch of the cubic nullcline. The remaining units that lag behind, return to the nearby fixed point on the right branch which appears as result of the second back switching. But, crucially, units arriving at the left outer branch of the cubic nullcline get trapped there due to the strong inhibitory coupling (vertical direction) that prevents their passage downwards the left cubic nullcline with subsequent return to the right part of the cubic nullcline. This trapping feature, being crucial for the pattern formation, has to be distinguished from the behavior without diffusive coupling, i.e. when $D_x = D_y = 0$. It realizes a Turing like instability.

In the corresponding time series a single spatial hump occurs (see Fig. 1). In contrast to the uncoupled case, with proper inhibitory coupling (a small ratio D_x/D_y is mandatory) the units become trapped on the left outer branch of the cubic nullcline. Such hump arrange in space that a large-amplitude spatial inhomogeneity is attained. It resembles the shape of a localized stationary pattern (also referred to as a *contrast structure*) being characteristic for excitable media [23–26]. The position on the lattice at which the the first hump appears is arbitrary. It depends on that part of the randomly distributed units in the cloud which is beyond the excitation threshold at the switching moment. As was demonstrated in [24,28] this stationary pattern is stable with respect to small perturbations but the spatial structure possesses a Goldstone mode and can freely diffuse in space.

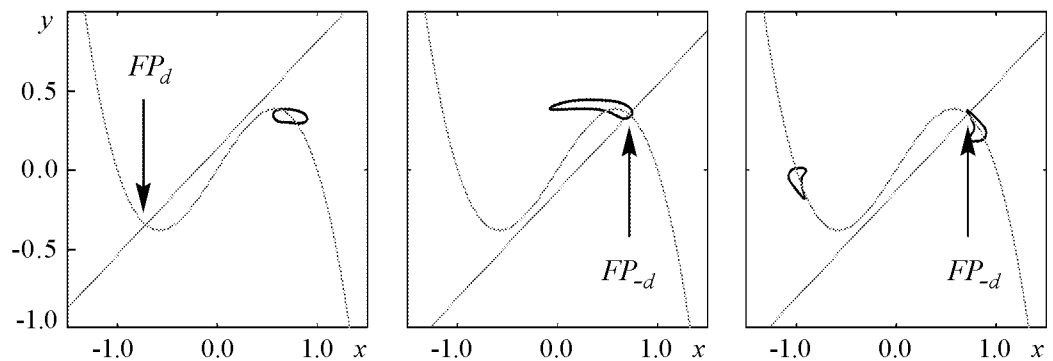


Fig. 2. Development of stationary inhomogeneous patterns in phase space x, y for medium switching rates. Initially distributed with small inhomogeneities (indicated as a cloud) is initially distributed around a fixed point. Once a switching occurs (left panel) the cloud starts to move to the second fixed point. If a second switching occurs just as the cloud is passing from the left to the right (middle panel) the cloud can be split into two. The second cloud then does not return to the fixed point of the deterministic system but moves to the other side fixed by inhibitor diffusion. A spatial structure is formed (cf. Fig. 3)

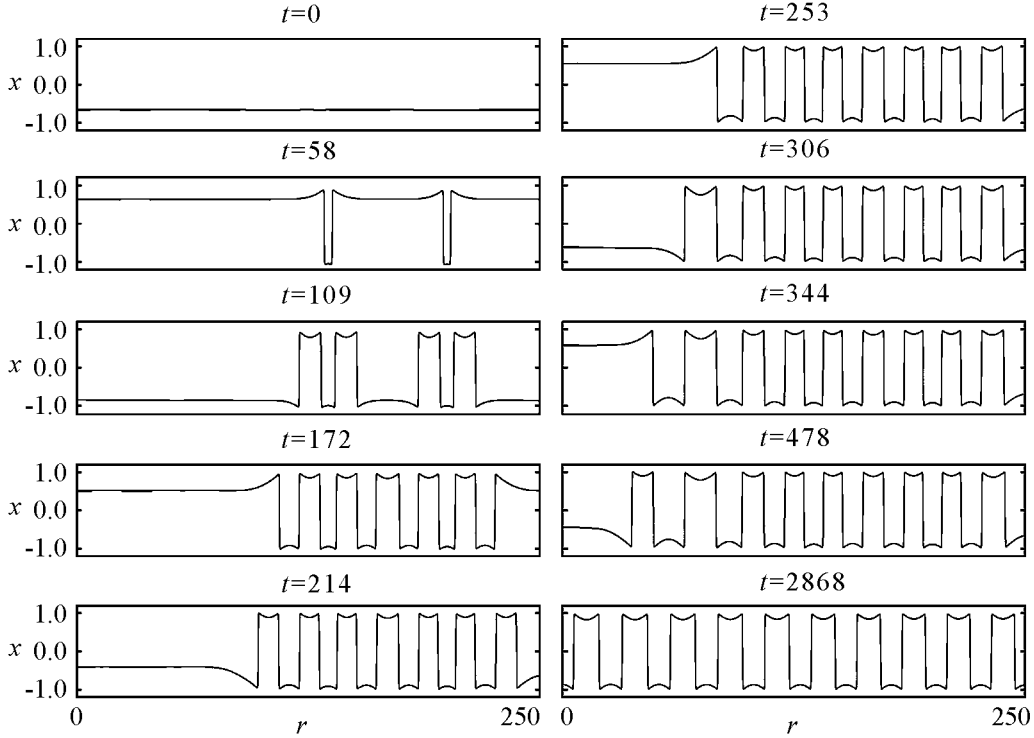


Fig.3. Development of stationary patterns for medium switching rates - real space. The activator distributions $x(r)$ as functions of space is presented for several times t . After the first nuclei was formed every switching of the homogeneous part of the cloud from one fixed point to the other adds a new layer at either side of this nucleus. After a long time a very regular structure is formed. The time is given above each picture. The y -variable (not shown) oscillates with equal period but small amplitude [23]. No-flux boundary conditions are used. The lattice constant is 0.05

Such large spatial inhomogeneity can be called a *nucleus*. At each further switching of the homogeneous regions, adjacent to the nucleus new local humps are built up as is illustrated in Fig. 3. With each switching the inhomogeneous region grows on the expense of the homogeneous region. The formation process goes on adding hump by hump until a periodic pattern covers the whole lattice. Eventually, the diffusive interaction between the neighboring sites leads to the formation of a perfectly periodic pattern and slight deviations in the width of the individual spatial inhomogeneities at early stages of the formation process will be dropped. However, it takes diffusion a much longer time to render the pattern regular than it took the pattern to be generated (right lower panel in Fig. 3).

It is also possible to add not only one half of a hump at each switching but also three, five, and more halves (The parameter range for adding simultaneously several layers is very small). This can for example be achieved by a change of the elongation d of the fluctuations. By varying d it is also possible to subtract half a hump with each switching (see Fig. 4, left). Moreover, a change in the diffusion constants can double the number of humps in the system (Fig. 4, right).

But this *multiplier* works only for small γ because immediately after the multiplication the distance between two consecutive humps might be very small. Therefore no new humps fit in between. Time until diffusion has restored the stable distance between them is large and during this time the multiplier does not work. Notice that in contrast to the case treated in Fig. 3 the pattern is not symmetric with respect to $x \rightarrow -x$. Let us call

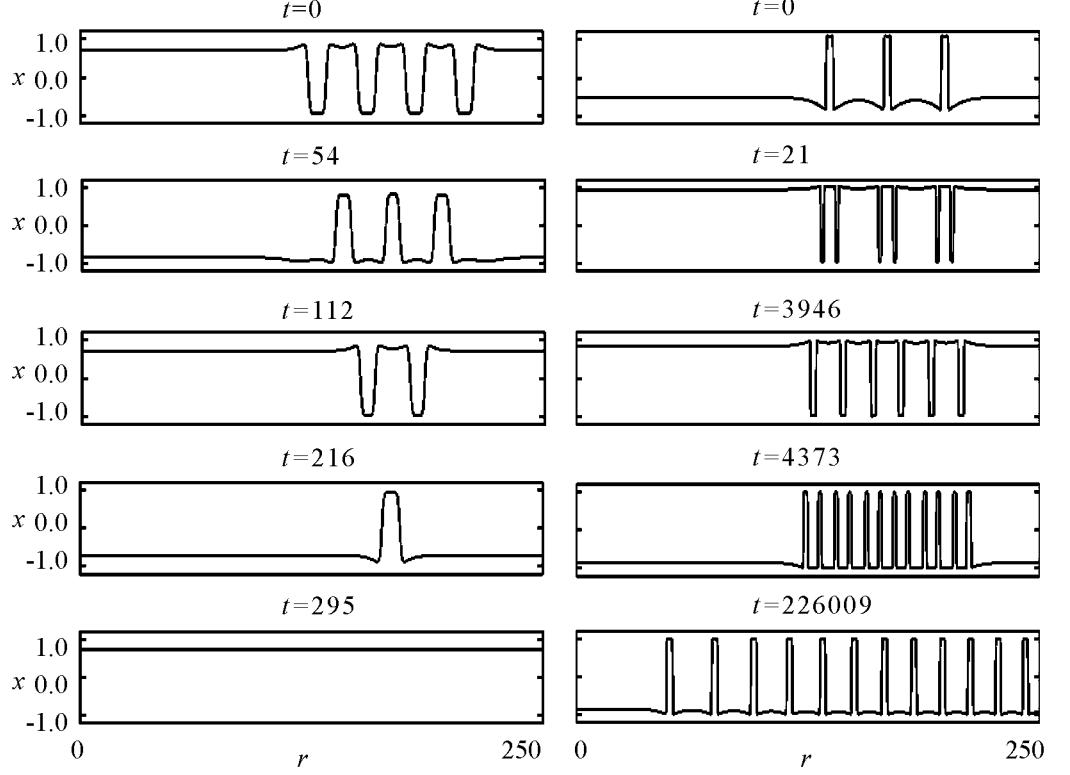


Fig. 4. Left plot: The number of humps can also be decreased ($D_x = 0.9$). Shown are snapshots shortly after each switching. Right plot: The number of humps can also be multiplied ($d = 0.5$). In this case the time between two consecutive switchings must be large enough to restore the stable distance between two neighboring humps. Switchings occur only between line one and two and between line three and four

the width of a hump l_h and the distance between two neighboring humps Δ_h . Δ_h must roughly increase to three times l_h before a new multiplication can be performed.

The final localized pattern can be studied by means of the outgoing stationary system (4) for $I = d$

$$\begin{aligned}
 0 &= x_i - x_i^3 - y_i + D_x \frac{x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}}{\Delta r^2}, \\
 0 &= \varepsilon(x_i - ay_i + d) + D_y \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{\Delta r^2}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Let us set here the lattice spacing Δr equal to one. By defining

$$x_n = s_n, \quad x_{n-1} = t_n, \quad y_n = u_n, \quad y_{n-1} = v_n \tag{6}$$

the set of equations is equivalent to the four dimensional map

$$\begin{aligned}
 s_{n+1} &= \frac{1}{D_x} (-s_n + s_n^3 + u_n) + 2s_n - t_n, \\
 t_{n+1} &= s_n, \\
 u_{n+1} &= \frac{\varepsilon}{D_y} (s_n - au_n + d) + 2u_n - v_n, \\
 v_{n+1} &= u_n.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Inspecting closely the periodic pattern (lower right panel in Fig. 3) we see that there exist small transition areas between large regions of almost constant amplitude. It allows to approximate the pattern as bivalued for the analytic approach.

The map (7) indeed yields bistability of a period-one (P_1) solution (homogeneous pattern) and a period-two solution (inhomogeneous pattern). The period-one solution is quickly found: We set $s_n = s_{n+1}$, $t_n = t_{n+1}$, $u_n = u_{n+1}$, and $v_n = v_{n+1}$ (this means on the lattice: $x_n = x_{n+1}$, and $y_n = y_{n+1}$) and notice that the solutions of the map are equivalent to the stationary solutions of the zero-dimensional FHN model (1), (2).

A procedure for the period-two (P_2) case by setting $s_n = s_{n+2}$, $t_n = t_{n+2}$, $u_n = u_{n+2}$, and $v_n = v_{n+2}$ was presented in [22]. An additional solutions exist with reversed sign in d as well as with exchanged values of s_n and s_{n+1} and exchanged values of u_n and u_{n+1} . The first solution (upper row) is of period one. It is the same solution as in the zero-dimensional FHN as discussed above. The second and the third solution are of period two. This fits well to the results from the reaction-diffusion simulation (Fig. 3).

In order to test the stability of the solutions we linearize Eqs (7) around the fixed points. The corresponding eigenvalue (There are two eigenvalues for each fixed point. For a stability analysis we need to study only the eigenvalue with larger real part.) is given by:

$$\begin{aligned} \lambda(k) = & \frac{1 - 3x_0^2 - \varepsilon a + 2(D_x + D_y)(\cos(k) - 1)}{2} + \\ & + \sqrt{\frac{(1 - 3x_0^2 - \varepsilon a + 2(D_x + D_y)(\cos(k) - 1))^2}{4} - \varepsilon}. \end{aligned} \quad (8)$$

One can conclude that the period-one solution is stable as well as the period-two solution with alternating sign. The second period-two solution is unstable. Interpreting finite series of humps as a segment of the stable period-two solution and assuming that such a segment is also stable we can understand the pattern formation in terms of the map orbits: Due to the combined action of the additive noise and the dichotomous switching a finite region of the lattice is brought close to the basin of attraction of such a stable segment. With each further switching the elements at the border of the finite inhomogeneous segment are drawn towards the inhomogeneous solution.

Conclusively, we have demonstrated that global alteration between two different monostable excitable dynamics yields pattern formation while each of the monostable dynamics does not. The situation can hence be viewed as some kind of Parrondo's Game: switching between two loosing strategies constitutes a winning strategy [27].

It is noteworthy that this phenomenon can also/cannot be observed in periodically driven systems. Also we underline that the probability per unit time for the occurrence of pattern formation approaches zero as the magnitude of the inhomogeneities (size of the cloud) imposed by the tiny additive Gaussian noise on the system diminishes. Therefore the presence of inhomogeneities is vital for the dichotomously-driven mechanism of pattern formation. A growth of an initial hump might also occur for very low switching rates γ . But it takes a much longer time for the phenomenon to occur and we did not observe it in our simulations.

2.3. High Switching rate. In this subsection we focus on a high switching rate γ , respectively, on fast switchings. Such system behaves as if instead of the signal its temporal average have been applied. Consequently we put $I_i(t) \rightarrow \langle I_i(t) \rangle = 0$ in (1) and (2). In the FHN for a single system in case of the selected parameters two stable and one unstable fixed points, or bistability is established (see Fig. 5, in order to show the complexity of the dynamics we changed slightly parameters in the left panel and complex

limit cycle behavior is found). The stable ones, denoted by $\pm \mathbf{x}_{0,det}$, are symmetrically placed around the origin of phase space. Obviously, the system with diffusive coupling possesses also fixed points at these locations. However, by choosing proper coupling constants (It is important that the diffusion constant of the inhibitor y is much larger than that of the activator x .) these homogeneous fixed points may lose their stability via a diffusion induced or Turing instability. More precisely, the stability of the fixed points $\pm \mathbf{x}_{0,det}$ depends on the wavelength of the perturbation enforced on the system. The largest eigenvalue $\lambda(k)$ of the extended system linearized around the stable fixed point $\mathbf{x}_{0,det} = (\tilde{x} \ \tilde{y})^t$ is given by:

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(1 - 3\tilde{x}^2 + \tilde{D}_x + \tilde{D}_y - a\varepsilon \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 - 3\tilde{x}^2 + \tilde{D}_x + \tilde{D}_y - a\varepsilon \right)^2 - 4(1 - 3\tilde{x}^2 + \tilde{D}_x)(\tilde{D}_y - a\varepsilon) - 4\varepsilon} \quad (9)$$

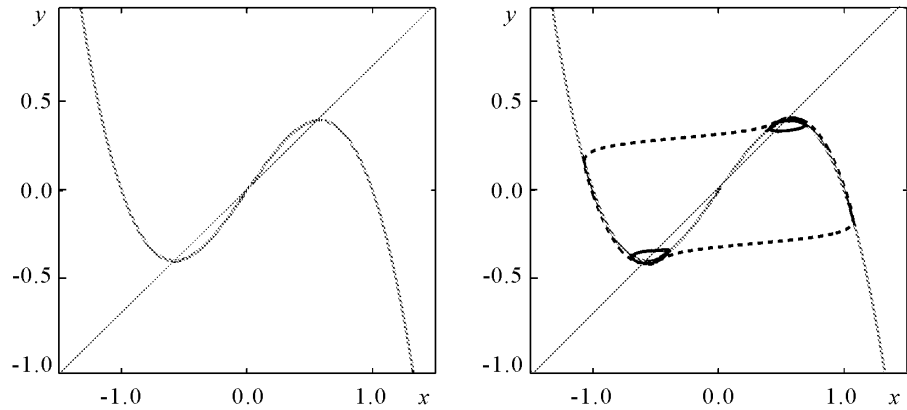


Fig.5. Left panel ($a = 1.475$): Three fixed points but no limit cycles exist. The fixed points are given by the intersections of the nullclines (solid gray). The outer points are stable, the inner is unstable. Right panel ($a = 1.46$): A slight change in the parameter leads to the development of three limit cycles. Each stable fixed point is embraced by an unstable limit cycle (solid black). All of the fixed points together with their embracing limit cycles are encircled by a large and stable limit cycle (dashed black)

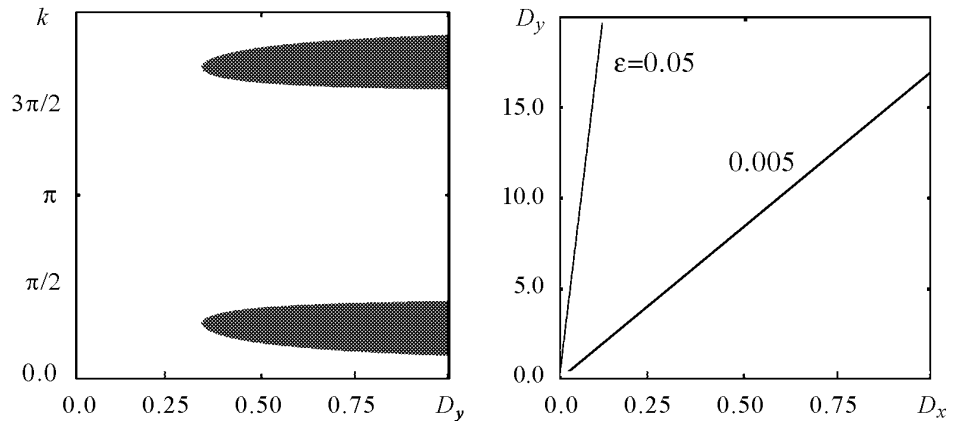


Fig. 6. Left: Regions of positive real part (black) of the eigenvalue of the linearized problem in the inhibitor coupling strength-wave vector plane. Other parameters the same as throughout the paper. Right: Region of Turing instability for different values of the timescale separation ε . The homogeneous state is unstable above the lines

with

$$\tilde{D}_{x,y} = 2D_{x,y}(\cos(k) - 1). \quad (10)$$

Fig. 6 presents regions of Turing instability in the k - D_y -plane. The unstable regions with positive real parts of λ are depicted as black regions. As can be seen perturbations of a finite wavelength larger than zero are favored to grow if the inhibitor diffusion coefficient D_y becomes large. We also depict the region where Turing instabilities occur in the D_x - D_y plane. Apparently, with enhanced timescale separation (smaller ε) the Turing space is enlarged.

We demonstrate the effect of different switching rates γ in Fig. 7 for a spatially two dimensional lattice. For low and intermediate rates we have started with inhomogeneous initial conditions and for high rates with homogeneous ones. Note that inhomogeneities grow due to the combined action of global switching and small additive noise as demonstrated in Fig. 2. In all situations we applied additive Gaussian noise of intensity 10^{-6} to each individual element.

The growth of the patterns is due to three different mechanisms: For $\gamma = 0$ the instable border grows slowly into the homogeneous region. In the case of intermediate

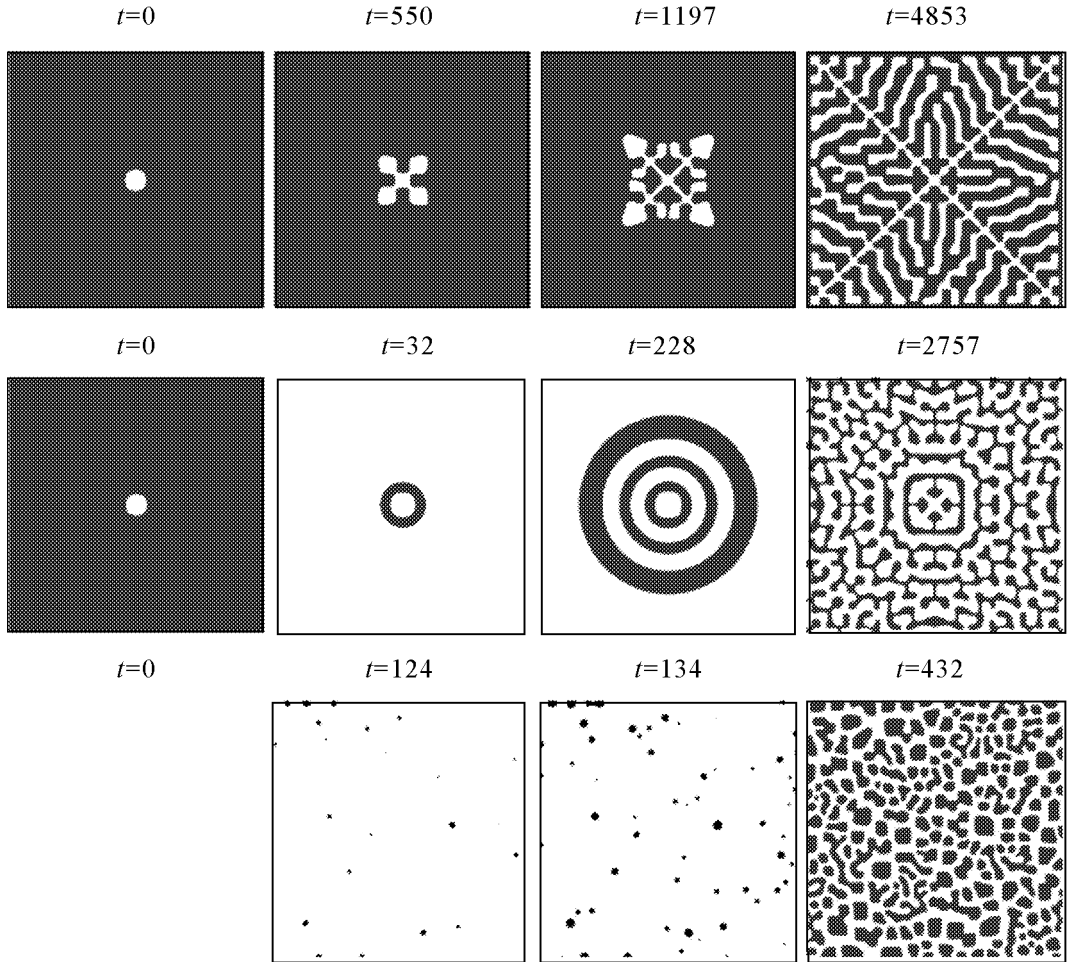


Fig.7. Time series with different switching rates. The time is given above each plot. Parameters: $\gamma = 0$ (upper row), 0.01 (middle row), 5.0 (lower row); $\varepsilon = 0.05$, $a = 1.475$, $D_x = 0.02$, $D_y = 5.0$, $d = 0.2$

γ switchings generate additional layers at the boundary. If we denote with L the period length of the final pattern in Fig. 3 we can estimate the speed of the growth of the patterns radius as follows: After the time T the process $I(t)$ has on average switched γT times. With each switching an additional layer (half a hump) is appended to the inhomogeneity. The average speed of the propagation of the boundary \hat{v} is then given by $\hat{v} = (1/2)\gamma L$. This constitutes an upper limit for the average speed because switching have no effect on the growth of the pattern if they occur too early, i.e. before the homogeneous part is in the vicinity of a fixed point. Simulations with different parameter values showed that it is also possible to add instead of one half a layer three, five, or more halves at each side of the inhomogeneity. Also, it is possible to decrease the size of the inhomogeneity. The average speed of propagation is therefore more generally given by:

$$\bar{v} = \left(\frac{1}{2} + Z \right) \gamma L, \quad (11)$$

where Z is an integer number that depends on the parameters of the system (L also depends on the parameters).

For high γ inhomogeneities grow all over the array. The speed with which the patterns grow is therefore different for the three cases: the faster the switching, the faster the growth.

3. Frozen noise

A quite interesting case is the limit of vanishing switching rates of the random telegraph signal. It corresponds to a static dichotomous disorder in the system. Besides the value of the amplitudes d the spatial correlation of the randomness signal is the new important parameter. We will control these in a simple way via the lattice spacing used in our simulation.

A certain realization of static dichotomous disorder in a two-dimensional lattice system is shown in the left panel of Fig. 8. The two dimensional plane is divided into 400×400 pixel and for every pixel a random generator selects the two possible values, $\pm d$. The right panel of Fig. 8 shows the results of a numerical simulation with that noise realization. As in the case of fast global switching we see a Turing pattern emerge. The pattern is not a mere reflection of the underlying disorder but has a structure of it's own. It's typical wavelength is much larger than that of the disorder. As initial conditions we chose $x_i = 0.56748$ and $y_i = 0.384732$ for all $i = 1, \dots, N$. This is the location of the stable fixed point of a single system without dichotomous driving ($I_i = 0$). The dynamical process of pattern formation is again driven by a Turing instability. Perturbations of a certain critical wavelength grow until they form the pattern shown in Fig 8.

The pattern formation takes place in 2-d as well in 1-d. Typically, Turing patterns in 2-d come in two different shapes ([1]): In labyrinth- and in hexagonal shape. With our study we found that the lattice system of Eqs (1), (2) supports only the labyrinth type.

We have investigated numerically different samples with the same lattice constant but with frozen dichotomous signals of different typical wavelength. Particularly illuminating are in parameter regions where the homogeneous deterministic system ($I_i(t) = 0$) does not support pattern formation. Such situation is realized by reducing the inhibitor coupling coefficient to $D_y = 0.5$ which stabilizes the fixed points.

Very fine dichotomic noise realization, i.e. one with a small typical length $l \propto \Delta r$ generates as expected not a new behavior. The system response remains equivalent to that of the deterministic system and a homogeneous distribution in the fixed point is established (upper row in Fig. 9). In contrast, with coarser dichotomic perturbation we observe the excitation of stationary patterns form (lower line in Fig. 9). We can thus by changing the correlation length of the disorder increase generate Turing patterns. It would allow to reduce significantly the ratio between activator and inhibitor diffusion constants.

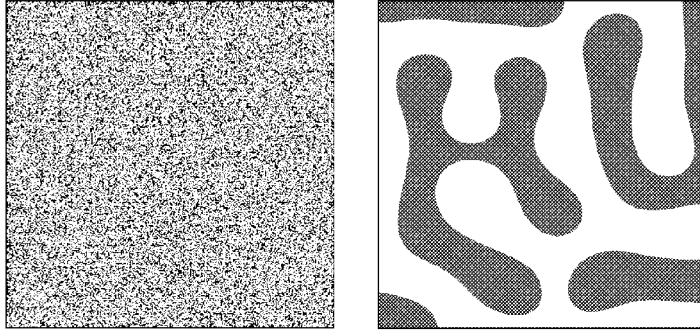


Fig. 8. Turing pattern (right) obtained by applying frozen dichotomic disorder (left) to a homogeneous system at the fixed point. $K(i, j) = \delta_{i,j}$; Size: 400×400 ; $\Delta r = 0.1$; $d = 0.2$. Left graph shows frozen disorder $I_{i,j}$ and right one shows response of the FHN

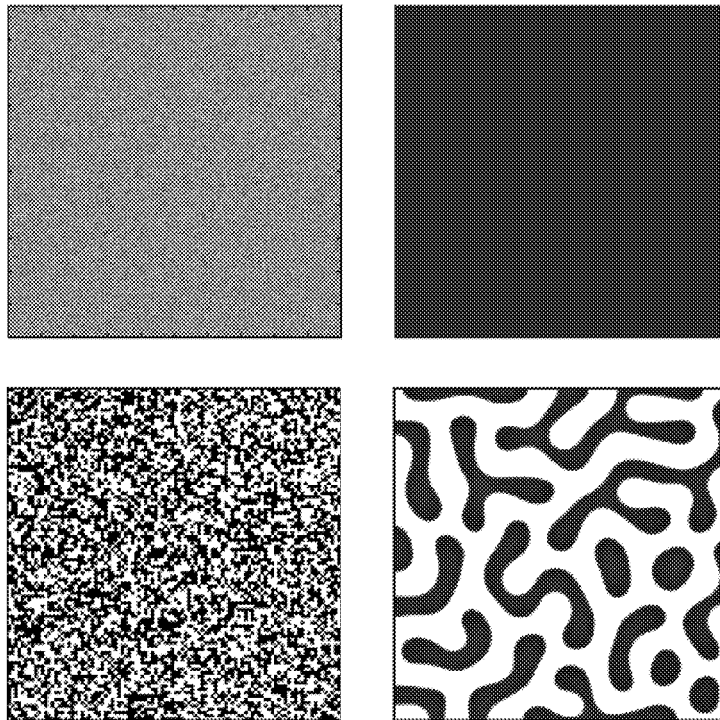


Fig. 9. Coarse fluctuations support pattern formation, fine ones do not. In this parameter regime the system with $I_{ij}(t) + \text{const}$ does not support Turing pattern formation. $D_y = 0.5$, $\Delta r = 0.02$, $l = 1$ (upper row) and $l = 20$ (lower row). 2000×2000 points are shown. Left graphs show frozen disorder $I_{i,j}$ and right ones show response of the FHN

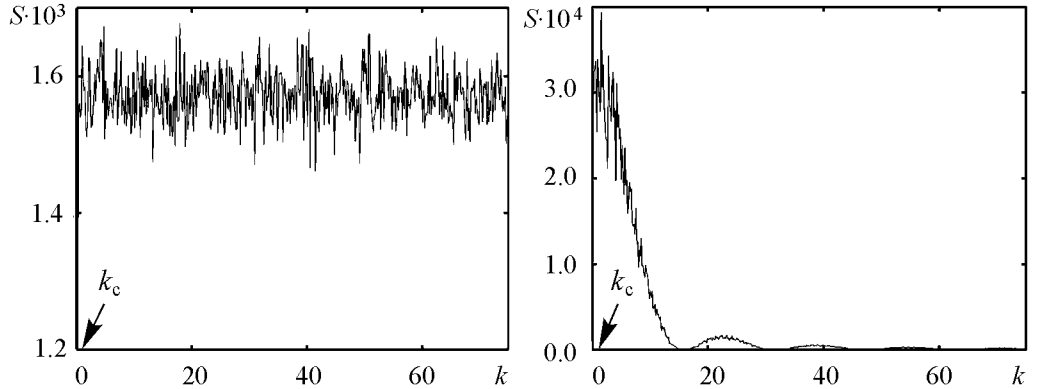


Fig.10. Structure factor $S(k)$ of the underlying noise for the patterns in Fig. 9. The left panel corresponds to the fine disorder in Fig. 9 (upper row), the right to the coarse disorder (lower row)

The role of large correlation length of the disorder can be inspected by looking at its structure factor $S(k)$ in 1-d. It is given by the Fourier transform of the spatial correlation function. In [22] we have derived for the spatial correlation function

$$\langle I_i I_j \rangle = K_{i,j} = d^2 \left(1 - \frac{|i-j|}{l} \right). \quad (12)$$

Afterwards the structure function reads

$$S(k) = \frac{2d^2}{lk^2} (1 - \cos(kl)). \quad (13)$$

We show plots of both in Fig. 10. We underline that modes with the critical wavenumber k_c gain much higher power in the case of the large correlation length compared for the small correlation length. This is a possible reason for the formation of the patterns. The high power at k_c may lead to a larger amplitude of the deviations from the steady state of wavelength k_c and destabilize the homogeneous state by driving the system into the nonlinear regime.

Conclusions

The influence of additive temporal and spatial dichotomous perturbations in a diffusively coupled array of the FitzHugh–Nagumo system was studied numerically. Perturbations were chosen such that locally with fixed dichotomous drive one of two excitable dynamics was realized. We emphasize that in both cases $I = \pm d$ there exists a stable homogeneous steady state. We have shown that due to appropriate switching between the two dynamical regimes either of the two steady states can be destabilized. This effect depends on the diffusion constants of the activator x and the inhibitor y and of the amplitude of the driving.

In case of global alterations and intermediate switching rate we have found a new mechanism to create spatial structures. It proceeds via creating a stable nucleus from which the periodic pattern grows layer by layer at every switch. Change of the parameters might reverse the process and the structure shrinks back to the overall homogeneous state.

Applying frozen dichotomous disorder of finite nonzero correlation length causes destabilization of homogeneous steady states leading again to Turing patterns. This holds even for parameter values for which the dynamics obtained by spatiotemporal averaging of I as performed in [16] does not sustain Turing instability.

References

1. Koch A.J., and Meinhardt H. Biological pattern formation: from basic mechanisms to complex structures // Rev. of Mod. Phys. 1994. Vol. 66. P. 1481.
2. Mikhailov A.S. Foundations of Synergetics I. 2nd Ed. Springer, Berlin-Heidelberg, New York, 1994.
3. Garcia-Ojalvo J., and Sancho J.M. Noise in Spatially Extended Systems. Springer-Verlag, New York, 1999.
4. Anishchenko V., Neiman A., Astakhov A., Vadivasova T. and Schimansky-Geier L. Chaotic and Stochastic Processes in Dynamic Systems. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 2002.
5. Lindner B., Garcia-Ojalvo J., Neiman A., and Schimansky-Geier L. // Phys. Rep. 2004. Vol. 392. 321.
6. Sagues F., Sancho J.M., and Garcia-Ojalvo J. // Rev. Mod. Phys. 2008.
7. Mikhailov A.S. // Z. Phys. B. 1981. Vol. 41. 277.
8. Garcia-Ojalvo J., and Sancho J.M., and Ramirez-Piscina L. // Phys. Lett. A. 1992. Vol. 168. 35.
9. Parrondo J.M.R., C. van den Broeck, Buceta J., and F.J. de la Rubia. // Physica A. 1996. Vol. 224. 153.
10. Zaikin A.A. and Schimansky-Geier L. // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58. P. 4355.
11. Kawai R., Sailer X., Schimansky-Geier L., and Van den Broeck C. Macroscopic limit cycle via pure noise-induced phase transitions // Phys. Rev. E. 2004. Vol. 69. 051104.
12. Buceta J., Ibanes M., Sancho J.M., and Lindenberg K. // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 67. 021113.
13. Buceta J., Lindenberg K., and Parrondo J.M.R. Stationary and oscillatory spatial patterns induced by global periodic switching // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 88. 024103.
14. Buceta J., Lindenberg K., and Parrondo J.M.R. // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 66. 036216.
15. Buceta J., and Lindenberg K. // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 66. 046202.
16. Buceta J. and Lindenberg K. Spatial patterns induced purely by dichotomous disorder // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 68. 011103.
17. FitzHugh R. // Biophys. J. 1961. Vol. 1. 445.
18. Nagumo J. and Arimoto S. and Yoshizawa S. // Proc. IRE. 1962. Vol. 50. 2061.
19. Vasilev V.A., Romanovski Yu.M., and Yakhno V.G. // Uspekhi Fiz. Nauk. 1979. Vol. 128. 626.
20. Elphick C., Hagberg A., and Meron E. Dynamic front transitions and spiral-vortex nucleation // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 51. 3052.
21. Martinez K., Lin A.L., Kharrazian R., Sailer X., and Swinney H.L. Resonance in periodically inhibited reaction-diffusion systems // Physica D. 2002. Vol. 168. 1.
22. Sailer X.R., Hennig D., Engel H., and Schimansky-Geier L. // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 73. 056209.

23. *Koga S. and Kuramoto Y.* Localized patterns in reaction-diffusion systems // *Prog. of Theor. Phys.* 1980. Vol. 63. 106.
24. *Rinzel J. and Keller J.B.* Traveling wave solutions of nerve conduction equation // *Biophys. J.* 1973. Vol. 13. 1313.
25. *Ohta T., Mimura M., and Kobayashi R.* Higher-dimensional localized patterns in excitable media // *Physica D.* 1989. Vol. 34. 1115.
26. *Ohta T., Ito A., and Tetsuka A.* Self-organization in an excitable reaction-diffusion system: Synchronization of oscillatory domains in one dimension // *Phys. Rev. A.* 1990. Vol. 42. 3225.
27. *Harmer G.P. and Abott D.* Losing strategies can win by Parrondo's paradox // *Nature (London).* 1999. Vol. 199. 402.
28. *Schimansky-Geier L., Hempel H., Bartussek R. and Zülicke C.* // *Z. Physik B.* 1995. Vol. 96. 417.

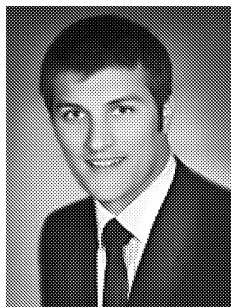
Поступила в редакцию 8.07.2009

СТРУКТУРЫ ВОЗБУДИМОЙ ДИНАМИКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ АДДИТИВНОГО ДИХОТОМИЧЕСКОГО ШУМА

X. Sailer, D. Hennig, and L. Schimansky-Geier

Формирование структур в присутствии аддитивных дихотомических флуктуаций исследуется в распределенной системе с диффузионной связью и с бистабильной кинетикой ФитцХью–Нагумо. Флуктуации изменяются в пространстве и/или во времени, являясь, беспорядком или шумом, соответственно. В отсутствие возмущений динамика не приводит к формированию структур. Однако с введением соответствующих дихотомических флуктуаций однородное стационарное состояние теряет устойчивость либо путем неустойчивости Тьюринга, либо флуктуации создают пространственные ядра неустойчивых состояний. Для чисто статического дихотомического беспорядка можно наблюдать потерю устойчивости однородных состояний для конечной ненулевой величины корреляции беспорядка, которая вновь приводит к возникновению пространственных структур.

Ключевые слова: ФитцХью–Нагумо, Turing pattern, дихотомический шум, аддитивный шум.



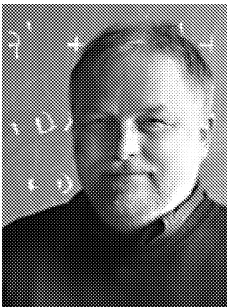
Dr. Franz Xaver Sailer 2006–2009 Investment Banking Nomura International Plc; 2001–2006 PhD Studies Humboldt Universität zu Berlin; 2000–2001 Physics Graduate Studies Master Degree University of Texas at Austin; 1997–2000 Physics Undergraduate Studies Bayerische Julius-Maximilian-Universität Würzburg; 1995–1997 Reserveoffiziersausbildung; 1995 Abitur Modellschule Obersberg, Bad Hersfeld.

Newtonstrasse 15, D-12489 Berlin, Germany
Institut für Physik



Dr. Dirk Hennig was born on 1962. 1989 – Diploma of Physics, University of Leipzig. 1992 – PhD Humboldt-University at Berlin. 1997 – Habilitation in Theoretical Physics, Free University Berlin. 1997–2002 Heisenberg Stipendiat. Award of the Teaching Authority in Theoretical Physics (Privatdozent), Free University Berlin (2001) and Humboldt University at Berlin (2008). Since 2009 – Senior Lecturer, Department of Mathematics, University of Portsmouth, UK. His main research interests are in Nonlinear Dynamics. His scientific interests include nonlinear and stochastic dynamics with application to biophysical problems and neurobiology; analytical and numerical methods for the treatment of networks of coupled nonlinear oscillators and Langevin systems. He has about seventy original publications and one review article on waves in nonlinear lattices.

Lion Gate Building, Lion Terrace, Portsmouth, PO1 3HF, UK
Department of Mathematics, University of Portsmouth

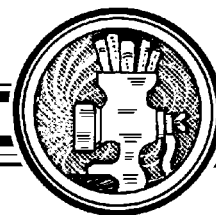


Prof. Dr. Lutz Schimansky-Geier was born on 1950. 1974 – Diploma in Physics at State University Yerevan. 1981 – PhD, 1986 – DSc Humboldt-University at Berlin. Since 1994 – Professor for Theoretical Physics.

He has about 180 original publications on: stochastic resonance, synchronization and ratchets, applications to computational neuroscience, modelization of biological motions and cellular transport, 8 book editions and 2 monographs.

Speaker of the DFG-Sfb 555 «Nonlinear Complex Processes»; Chairman of ESF Programme: «Stochastic Dynamics: Fundamentals and Applications»; Associated member of Center of Neurodynamics at UMSL, St. Louis (MO); Editor: «Fluctuation and Noise Letters» (Executive 2000–2003), «New Journal of Physics» (2008–2009), European Journ. of Physics B (since 2008).

Newtonstrasse 15, D-12489 Berlin, Germany
Institut für Physik
E-mail: alsg@physik.hu-berlin.de



СВЕРХШИРОКОПОЛОСНЫЕ БЕСПРОВОДНЫЕ СЕНСОРНЫЕ СЕТИ НА ОСНОВЕ ХАОТИЧЕСКИХ РАДИОИМПУЛЬСОВ

А.С. Дмитриев, Л.В. Кузьмин, В.Ю. Юркин

Рассматривается и обсуждается быстро развивающееся направление в информационно-коммуникационных системах – беспроводные сенсорные сети. Особое внимание обращается на сверхширокополосные беспроводные сенсорные сети, использующие в качестве носителей информации для связи между сенсорными узлами хаотические радиоимпульсы. Создание таких систем стало возможным после многолетних исследований по генерации и управлению хаосом в электронных системах.

Ключевые слова: Динамический хаос, сверхширокополосные сигналы, беспроводные сверхширокополосные системы, сенсорные сети.

Введение

Тема статьи находится на стыке нескольких научных дисциплин, каждая из которых представляет большой интерес как с фундаментальной, так и с прикладной точек зрения.

Этими дисциплинами являются.

- Нелинейная динамика – дисциплина, исследующая сложные процессы, включая динамический (детерминированный) хаос. Хаотические колебания являются носителем информации при передаче данных между сенсорными узлами в рассматриваемых сетях. Кроме того, методы нелинейной динамики широко используются при исследовании сетей, разработке методов их построения, анализе динамики и принципов адаптации к внешним условиям.

- Радиофизика – дисциплина, занимающаяся генерацией колебаний для коммуникационных систем, методами модуляции и демодуляции, излучением и приемом электромагнитных сигналов, спектрами этих сигналов, распространением электромагнитных волн. Все эти вопросы требуют переосмысления при переходе от традиционных узкополосных сигналов к сверхширокополосным (СШП) электромагнитным сигналам – новой парадигме в беспроводных коммуникациях.

- При создании и исследовании беспроводных сенсорных систем (БСС) развиваются и используются новые идеи из computer science, касающиеся, прежде всего, распределенных средств цифровой обработки информации, узлы которых снабжены вычислительными устройствами с очень ограниченными, по современным представлениям, вычислительными ресурсами и памятью. Научная сторона вопроса состоит

в том, что нужно не только организовать первичную обработку информации этими устройствами, но и создать новые типы программных средств, обеспечивающих функционирование таких многоэлементных систем, в том числе и в режимах самоорганизации. Кроме того, создаваемые программные средства должны решать ряд вспомогательных задач, обеспечивающих надежное и безопасное функционирование среды из сенсорных узлов.

- Следующая дисциплина, которую можно условно назвать сенсорикой, занимается исследованиями и разработками по сбору данных из окружающей среды (собственно сенсоры) и точечными воздействиями на окружающую среду (актуаторы). Сейчас в сенсорных системах задействованы в основном достаточно очевидные, имеющиеся «под рукой» или «на полке» типы датчиков. Вопросы построения из них сенсорных блоков, способных реагировать не только на прямые изменения регистрируемых параметров, но и определять наличие каких-то процессов по косвенным признакам представляет нетривиальную задачу сенсорики. Вместе с тем ценность результатов, получаемая при решении этой задачи, может резко возрасти при переходе к исследованию нетрадиционных процессов и оценке их характеристик. Такие ситуации могут, например, возникать при построении сенсорных сетей, предназначенных для анализа и контроля биологических объектов.

В первом разделе статьи кратко описываются идеи сенсорных сетей и начальный этап их становления как направления в информационно-коммуникационных системах. Затем во втором разделе обсуждаются основные типы СШП сигналов и идеи, связанные с применением СШП сигналов в системах беспроводной связи. В третьем разделе рассматриваются структура, принципы функционирования и примеры реализации СШП сенсорных сетей на основе хаотических радиоимпульсов. Наконец, в последнем, четвертом разделе, описывается учебно-научно-исследовательский комплекс (УНИК) «Сверхширокополосные беспроводные сенсорные сети», предназначенный для обучения студентов и аспирантов основам БСС, а также проведения собственных исследований в этом направлении.

1. Беспроводные сенсорные сети

Сенсорная сеть, в широком смысле этого слова, представляет собой совокупность взаимодействующих узлов, связанных с внешней средой датчиками (сенсорами). В каждом узле имеется вычислительное устройство (процессор) и приемопередатчик. Вычислительное устройство осуществляет управление узлом, включая приемопередатчик, а также первичную обработку поступающих от датчиков данных. После первичной обработки информация передается узлом по (беспроводной) коммуникационной сети в центральный пункт, где поступающая от всех узлов информация анализируется и обрабатывается в совокупности.

Современные исследования в создании беспроводных сенсорных сетей начались в первой половине 1990-х годов. Активную роль в инициализации этих работ в США сыграли такие организации-«мозговые центры», как RAND и DARPA [1]. Так, профессор Kris Pister, участник исследований в RAND, предложил в 1994 году DARPA исследовать «беспроводной интегрированный микросенсор малой мощности», в основном, как устройство, соответствующее его собственным научным интересам в технологии MEMS.

В результате этих и последующих исследований в Калифорнийском университете (Беркли) был разработан впечатляющий вариант концепции БСС, получивший

название «умная пыль» [2]. «Умная пыль» представляет собой совокупность крошечных, беспроводных сенсоров или «пылинок». Концепция предполагает, что в процессе функционирования пылинки будут находить друг друга и без вмешательства оператора организовывать коммуникационную сеть, обеспечивающую передачу поступающей от сенсоров информации в пункт управления.

Рассмотрим, как устроена пылинка, и как она работает в составе сети (рис. 1). Сенсорный блок пылинки состоит из нескольких датчиков (света, температуры, магнитного поля, давления, влажности, ускорения, др.). Наличие нескольких сенсоров позволяет надежно фиксировать изменения в среде, окружающей пылинку, как по первичным, так и по вторичным признакам. Например, в сенсорном блоке может отсутствовать датчик дыма, но начало пожара будет зафиксировано по фиксации повышения температуры и освещенности. «Мозг» пылинки реализуется с помощью микроконтроллера и/или программируемой логической интегральной схемы (ПЛИСа). Кроме того, пылинка снабжена приемопередатчиком и источником энергии. К приемопередатчику предъявляются требования низкого потребления мощности и достаточной пропускной способности для обеспечения всех необходимых обменов данными в сети. Источник питания должен при минимальных размерах обеспечивать долговременное автономное существование пылинки и ее эффективную работу

Хотя идея «умной пыли» подразумевает, что узлы должны иметь крошечные размеры, агентство DARPA, финансировавшее исследования, предложило инициаторам проекта создать прототипы пылинок на основе уже имеющейся элементной базы. Эта часть задачи была решена путем создания сенсорного узла МІСА-2 и его вариантов [3]. Характерные размеры узлов составляют несколько сантиметров, что конечно великовато для пылинок, но вполне подходит для исследовательских целей, а также для решения ряда прикладных задач.

Для достижения конечной цели – создания крошечных устройств, способных объединяться в сеть, предстоит решить ряд серьезных технических проблем. Среди них выбор и разработка каналов связи для передачи информации, приемопередатчик, а также источник питания.

В первых пылинках для этих целей использовался нелицензируемый радиоканал на частотах 433 МГц. Однако при этом размеры устройств в целом (сенсорный блок с приемопередатчиком и источником питания) определялись уже не размером сенсорного блока, а довольно значительным размером антенны, что в какой-то степени дискредитировало идею крошечных размеров. Кроме того, используемые стандартные решения не отличались низким потреблением мощности. Среди их достоинств – значительная дальность передачи.



Рис. 1. Структура «пылинки»

Осознание проблемы передачи данных привело к рассмотрению возможности применения ряда альтернативных каналов связи, включая оптические и акустические. Но все же радиоканалы являются по-прежнему предпочтительными.

Исследования в области беспроводных сенсорных сетей стали основой для разработки первого адаптированного для БСС стандарта беспроводной связи IEEE 802.15.4. и его промышленной версии ZigBee. Эти узкополосные беспроводные средства используют частотные области 868, 915 и 2400 МГц.

С целью расширения возможностей применения персональной беспроводной связи, в том числе для сенсорных сетей, в 2007 году был принят стандарт IEEE 802.15.4a, предусматривающий использование в качестве носителей информации СШП электромагнитных сигналов

2. Сверхширокополосные сигналы и беспроводные сенсорные сети

Гармонические колебания долгое время были единственным и продолжают оставаться основным типом носителя при передаче информации. Однако в последние годы эта монополия начинает подвергаться давлению со стороны сигналов других типов. Наиболее ярко как причины такого давления, так и сигналы-конкуренты гармонических колебаний проявляют себя в случае, когда речь идет о сверхширокополосной связи.

К СШП сигналам относят сигналы со средней частотой F_C и полосой ΔF , имеющие относительную полосу

$$D = \frac{\Delta F}{F_C} > 0.2 - 0.25. \quad (1)$$

В решении Федеральной комиссии США по связи 2002 года [4], заложившим основу для нелицензируемого использования СШП в средствах беспроводной связи, к сверхширокополосным сигналам отнесены также сигналы с полосой $\Delta F > 500$ МГц (в диапазоне частот 3.1 ÷ 10.6 ГГц).

Первоначально в качестве основного типа СШП сигналов рассматривались сверхкороткие импульсы, разработка технологии связи на которых послужила толчком для развития СШП технологий в целом. Затем появились и другие СШП технологии, часть из которых к настоящему времени уже вошли в стандарты связи.

Список сверхширокополосных беспроводных технологий сегодня выглядит примерно так:

1. Ультракороткие импульсы [5, 6]. Длительность импульсов зависит от используемого диапазона частот, но обычно составляет от 100 до 2000 псек. Свойством этих сигналов является жесткая связь длительности импульса с шириной спектра мощности и характерная форма спектра мощности, простирающаяся от 0 до частоты примерно $f = 1/T$, где T – длина ультракороткого импульса. База сигнала $B \sim 1$.

2. Короткие радиоимпульсы – цуги колебаний [7]. В рамках данного подхода сигнал формируется в заданной полосе частот. Однако, как и в случае ультракоротких импульсов, имеет место жесткая связь между длиной импульса и спектром мощности сигнала. В интересах получения более равномерной спектральной плотности в полосе частот форма огибающей импульса выбирается колоколообразной. База сигнала $B \sim 1$.

3. Хаотические радиоимпульсы [8, 9]. Огибающая спектра мощности у этих сигналов определяется исходным спектром непрерывного хаотического сигнала и

при выполнении определенных условий практически не зависит от длины импульсов. База сигнала может меняться в широких пределах.

4. Пачки коротких импульсов [6]. Как и в случае единичного короткого импульса, форма одинаковых импульсов согласуется с заданной полосой частот. База сигнала пропорциональна числу импульсов в пачке.

5. Сигналы с прямым расширением спектра. Это решение предполагает «нарезку» синусоидального сигнала на очень короткие фрагменты – «чипы» [10]. Для передачи одного бита используется серия «чипов». В пределе, при использовании одного «чипа» для передачи одного бита информации, технология смыкается с технологией коротких радиоимпульсов. База сигнала равна числу «чипов», используемых для передачи одного бита информации.

6. Сигналы с ортогональной частотной модуляцией – OFDM (orthogonal frequency division multiplexing) [11]. Этот тип сигналов давно и успешно применяется в радиосвязи. Особенностью его использования в СШП системах является большая ширина спектра (примерно, 500 МГц) по сравнению с OFDM сигналами, применявшимися ранее.

7. Сверхширокополосные сигналы на основе частотной модуляции – FM UWB (frequency modulation ultrawide band) [2, 12]. Эти сигналы формируются за счет сканирования частоты в генераторах управляемых напряжением. При однократном проходе частоты в пределах импульса база сигнала пропорциональна длине импульса. Скорость перестройки определяет минимальную длину импульса, на которой происходит полная перестройка частоты. В этом случае база сигнала будет равна

$$B = \Delta T \cdot \Delta F, \quad (2)$$

где ΔT – длина импульса, ΔF – полоса частот перестройки.

Этот список можно продолжить.

Следует отметить, что основная идея массового гражданского применения СШП связи была тесно связана с импульсной сверхширокополосной технологией и заключалась в том, чтобы создать беспроводные средства связи чрезвычайно простые и дешевые. Действительно, в схемах связи с ультракороткими импульсами все выглядит очень просто: «1» передаются импульсами, «0» – отсутствием импульсов на заданных временных позициях. Любое усложнение этой схемы ведет к увеличению стоимости приемопередатчиков и снижению экономической привлекательности. Но даже в такой, на первый взгляд, простой схеме передачи информации есть проблемы, решение которых требует немалой изобретательности. Такой проблемой, в частности, является синхронизация передатчика и приемника. Например, для того, чтобы эффективно осуществить когерентный прием, необходимо обеспечить синхронизацию с точностью не хуже 10 пикосекунд при 150 пикосекундной длине импульса. Это непростая задача и ее имеющиеся решения требуют значительного потребления энергии и достаточно сложной схемотехники.

В целом, использование сверхширокополосных сигналов для межузловых коммуникаций в беспроводных сенсорных сетях выглядит очень привлекательным:

- оно позволяет создать устройства малых размеров, а также обеспечивает высокие коммуникационные характеристики в реальных каналах в условиях многолучевых искажений;

- в СШП БСС узлы могут контактировать только с близлежащими соседями и, благодаря низкой мощности, избегать межузловой интерференции, которая существует в узкополосных системах.

Однако, несмотря на все достоинства, которые СШП технология предоставляет при разработке БСС, она порождает и уникальную совокупность проблем. Так, использование в качестве СШП сигналов маломощных ультракоротких или коротких импульсов с базой сигнала $B \sim 1$ порождает проблему масштабирования в БСС.

Дело в том, что при увеличении расстояния между узлами или при увеличении числа узлов, слабые СШП импульсы не могут надлежащим образом передавать информацию между узлами. Кроме того, как отмечалось выше, малая длительность СШП импульсов вызывает большие проблемы в синхронизации для сенсорных узлов в беспроводной сети. Еще одна проблема с использованием СШП технологии заключается в интерференции со стороны мощных узкополосных сигналов, которые разделяют спектральную область с маломощными СШП импульсами [13]. К тому же детектирование обычно предполагает использование классической техники согласованной фильтрации, где получаемый сигнал коррелируется с копией СШП импульса, генерируемого в приемнике. Поэтому эффекты воздействия канала (такие как многолучевое распространение) на принимаемый сигнал могут приводить к существенной деградации процесса детектирования из-за низкой корреляции между заранее определенной копией сигнала и искаженным принимаемым сигналом.

Покажем, что большинство этих проблем успешно решаются при использовании в качестве носителей информации СШП хаотических радиоимпульсов.

3. Сверхширокополосная связь на основе хаотических радиоимпульсов

Прямохаотической схемой связи называется [14–17] схема связи в которой:

- а) источник хаоса генерирует хаотические колебания непосредственно в заданной микроволнового диапазона частот;
- б) ввод информационного сигнала в хаотический осуществляется путем формирования соответствующего потока хаотических радиоимпульсов;
- в) извлечение информации из СВЧ-сигнала производится без промежуточного преобразования частоты.

В прямохаотических системах связи могут использоваться различные виды модуляции: наличие или отсутствие хаотического импульса на информационной позиции (chaotic on-off keying, COOK), относительная хаотическая манипуляция (differential chaotic shift keying, DCSK), модуляция позиций импульсов (pulse position modulation, PPM) и т.д. Существенно, что для передачи информации здесь используется не непрерывный сигнал, а поток импульсов. Поэтому наряду с методом модуляции важными характеристиками являются длина импульса и скважность. Вариация этих характеристик определяет скоростные свойства системы связи и ее устойчивость для различных типов каналов связи.

Теоретический анализ, подтвержденный результатами конкретных разработок, показывает, что прямохаотическая передача информации имеет привлекательные характеристики для низкоскоростных (до 1 Мбит/с) и среднескоростных (до 50 Мбит/с) систем СШП связи.

К настоящему времени разработано несколько типов СШП прямохаотических приемопередатчиков.

Так приёмопередатчик ППС-40 предназначен для экспериментов с сенсорами и построения лабораторных сенсорных сетей. Он имеет радиус действия до 15-20 м и используется в качестве средства связи между сенсорами, а также между сенсорами и компьютером. Устройство обладает интерфейсами RS232 и UART, позволяющими подключать различные внешние устройства (сенсоры, аудио- или видеоисточ-

ники сигнала) и организовывать экспериментальные сенсорные сети. Внешний вид приёмопередатчика показан на рис. 2. Сверхвысокочастотная часть передатчика реализована в виде транзисторного генератора хаоса. Для формирования хаотических радиоимпульсов используется внутренняя модуляция сигнала генератора, которая осуществляется на основе идеи, предложенной и исследованной в работах [18–22].

Для приемопередатчика была разработана высокоэффективная всенаправленная микрополосковая антенна, выполненная на единой плате с остальной частью устройства.

Приёмник огибающей сигнала создан на основе логарифмического детектора. Оригинальность приемника заключается в том, что в нем отсутствует отдельная система автоматической регулировки усиления принимаемого сигнала. Регулирование усиления входного сигнала осуществляется самим логарифмическим детектором, имеющим динамический диапазон 50 дБ. Минимальная длительность импульса, который приёмник способен детектировать, составляет 20 нс.

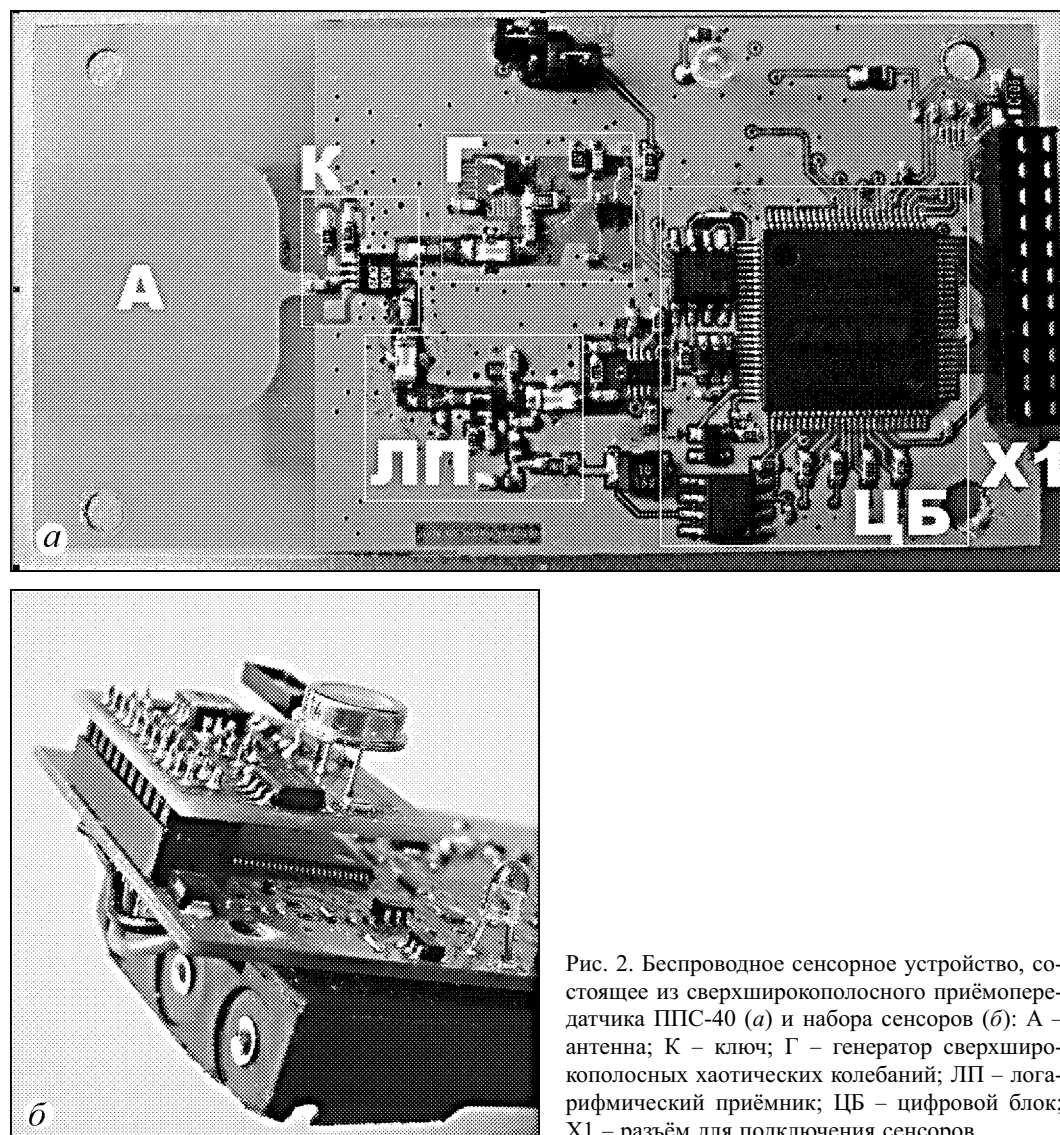


Рис. 2. Беспроводное сенсорное устройство, состоящее из сверхширокополосного приёмопередатчика ППС-40 (а) и набора сенсоров (б): А – антенна; К – ключ; Г – генератор сверхширокополосных хаотических колебаний; ЛП – логарифмический приёмник; ЦБ – цифровой блок; X1 – разъём для подключения сенсоров

Другой тип приемопередатчика, ППС-50, предназначен для использования в беспроводных сенсорных сетях, размещаемых на достаточно больших территориях. Пара таких приемопередатчиков, один из которых связан с сенсором по UART интерфейсу, а второй используется либо в качестве терминального устройства, либо в качестве ретранслятора, образует радиомост. Устройство способно работать на расстояниях до 40–50 м, что примерно в три раза больше, чем дальность действия приемопередатчика ППС-40. Это достигается за счет применения источника динамического хаоса с повышенной мощностью, использования приемника с большей чувствительностью и слабонаправленной антенной системы с двумя полудиполями (рис. 3).

Специфика работы сенсорной сети требует возможности длительного функционирования СШП приемопередатчика без замены источников питания. Поэтому при разработке приемопередатчика ППС-50 большое внимание было уделено энергосбережению и, в частности, спящим режимам.

Для обеспечения максимального энергосбережения разработанный приемопередатчик в зависимости от стадии решаемой задачи может функционировать в следующих режимах:

- глубокий спящий режим;
- спящий режим;
- режим приема информации от сенсора и излучения сигнала в окружающее пространство;
- режим ретрансляции.

В глубоком спящем режиме приемопередатчик периодически (1 раз в 100 с) прослушивает эфир и ждет поступления команды для перехода в другой режим работы. Периодичность прослушивания резко снижает долю времени активной работы устройства, позволяет экономить энергию батарей и обеспечивает автономную работу приемопередатчика до трех лет.

В спящем режиме периодичность прослушивания составляет один раз в секунду, что дает возможность оперативно управлять режимом работы приемопередатчика во время его активного использования.

В режиме приема информации от сенсора приемопередатчик преобразует полученную информацию в последовательность хаотических радиоимпульсов и транслирует их в окружающее пространство.

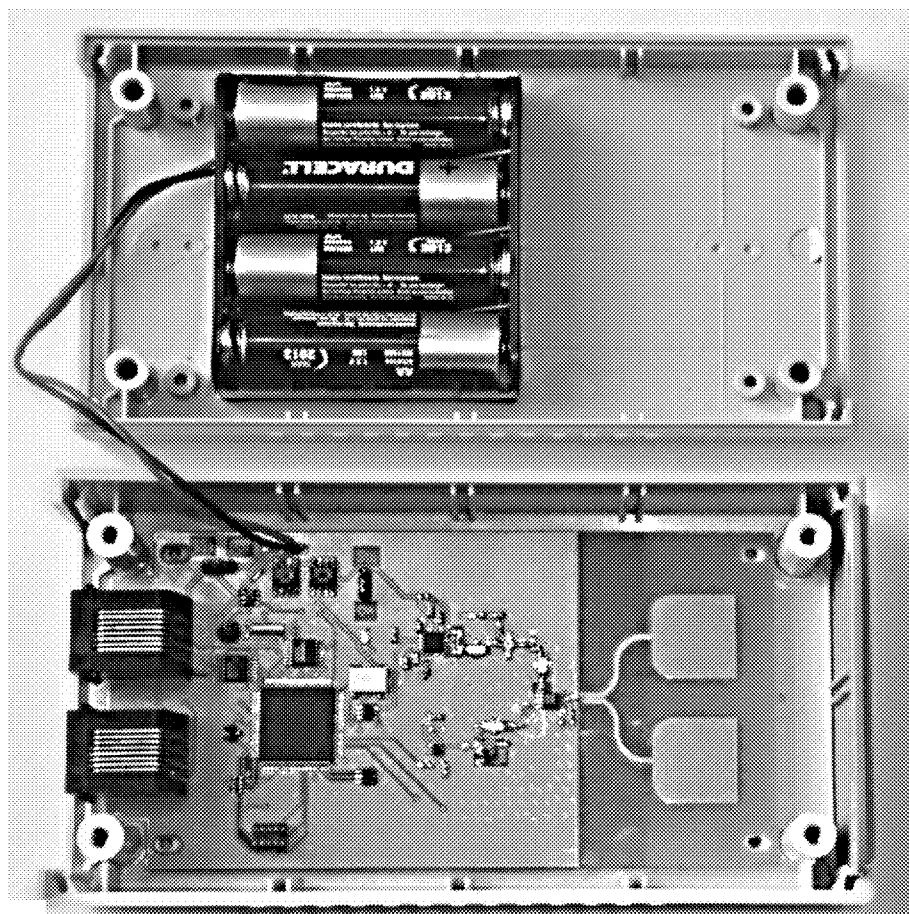
В режиме ретрансляции приемопередатчик непрерывно прослушивает эфир в ожидании поступления данных или управляющих команд. Принятые данные обрабатываются и переизлучаются в пространство.

Рассмотрим применение описанных выше СШП приемопередатчиков ППС-50 в сенсорной сети на примере беспроводной связи для системы мониторинга технического состояния Крытого конькобежного центра в Крылатском (рис. 4).

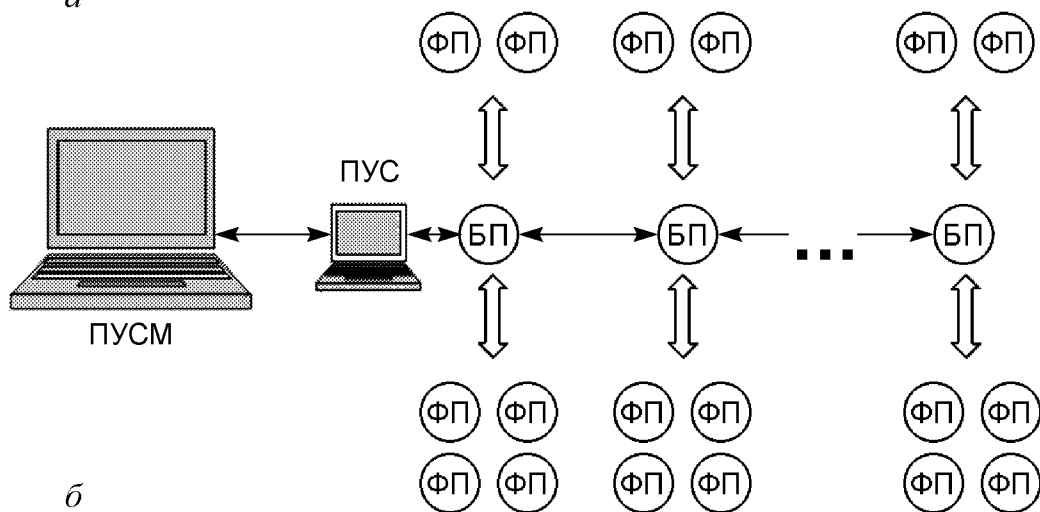
Беспроводная система мониторинга должна определять состояние конструкций сооружения, в том числе полукольцевой железобетонной балки и несущих ферм, поддерживающих крышу, на основе данных поступающих от сенсоров вибраций.

Сверхширокополосная беспроводная система связи включает в себя 57 приемопередатчиков, расположенных на фермах сооружения вместе со станциями мониторинга (сенсоров), и 20 приемопередатчиков, расположенных на полукольцевой балке.

Приемопередатчики на фермах используются для получения команд со стороны центрального пункта управления на включение/выключение активного режима самих приемопередатчиков, для включения станций мониторинга, получения от них



a



б

Рис. 3. *a* – Внешний вид беспроводного сверхширокополосного приёмопередатчика ППС-50; *б* – структура сенсорной сети в Крытом конькобежном центре в Крылатском (Москва): ФП – фермовый приёмопередатчик, БП – балочный приёмопередатчик, ПУС – пульт управления сетью, ПУСМ – пульт управления системой мониторинга



Рис. 4. Монтаж беспроводной сенсорной сети в Крылатском

данных, передачи этих данных на центральный пункт управления и выключения станций мониторинга.

Устройства на полукольцевой балке используются как ретрансляторы при передаче команд от центрального пункта управления к станциям мониторинга, расположенным на фермах, и передаче потоков данных от станций мониторинга к центральному пункту управления. Приемопередатчики на балке соединены кабелем с компьютером управления беспроводной сетью, который, в свою очередь, связан с компьютером управления системой мониторинга в целом (рис. 3, б).

Каждый из приемопередатчиков на балке является ретранслятором (репитером) для определенной группы приемопередатчиков на фермах. Все приемопередатчики системы имеют встроенные источники питания, обеспечивающие их длительную автономную работу.

Основную часть времени система находится в спящем состоянии (глубоко спящий режим) и потребляет минимальную мощность. Перед очередным сеансом мониторинга производится «побудка» системы, путем передачи специальных служебных пакетов к ретрансляторам, и затем ко всем устройствам, размещенным на фермах. В результате через несколько десятков секунд система оказывается готовой к работе. Опрос сенсорных узлов на фермах производится последовательно. Цикл измерений каждого сенсора длится около минуты. Поступающая информация передается в компьютер и обрабатывается специальной программой. По результатам обработки принимается решение о состоянии элемента конструкции и его изменении по сравнению с предыдущими мониторингами.

4. Учебно-научно-исследовательский комплекс

Для работы с новой техникой, к которой относятся беспроводные сенсорные сети необходимо производить обучение ее будущих разработчиков и потребителей на этапе обучения в вузах. Для решения этой задачи в рамках аналитической целевой программы «Развитие потенциала высшей школы» на 2006–2007 годы в МФТИ совместно с ИРЭ РАН и ООО «Нанохаос» был разработан УНИК «Сверхширокополосные беспроводные сенсорные сети» (рис. 5), включающий в себя сверхширокополосные прямохаотические передатчики, сенсорные блоки с датчиками температуры, влажности, освещенности и ускорения, программное обеспечение, методические материалы и описание комплекса лабораторных работ.

Кроме чисто учебных вопросов с помощью комплекса могут решаться исследовательские задачи по построению и применению сенсорных сетей, включая разра-

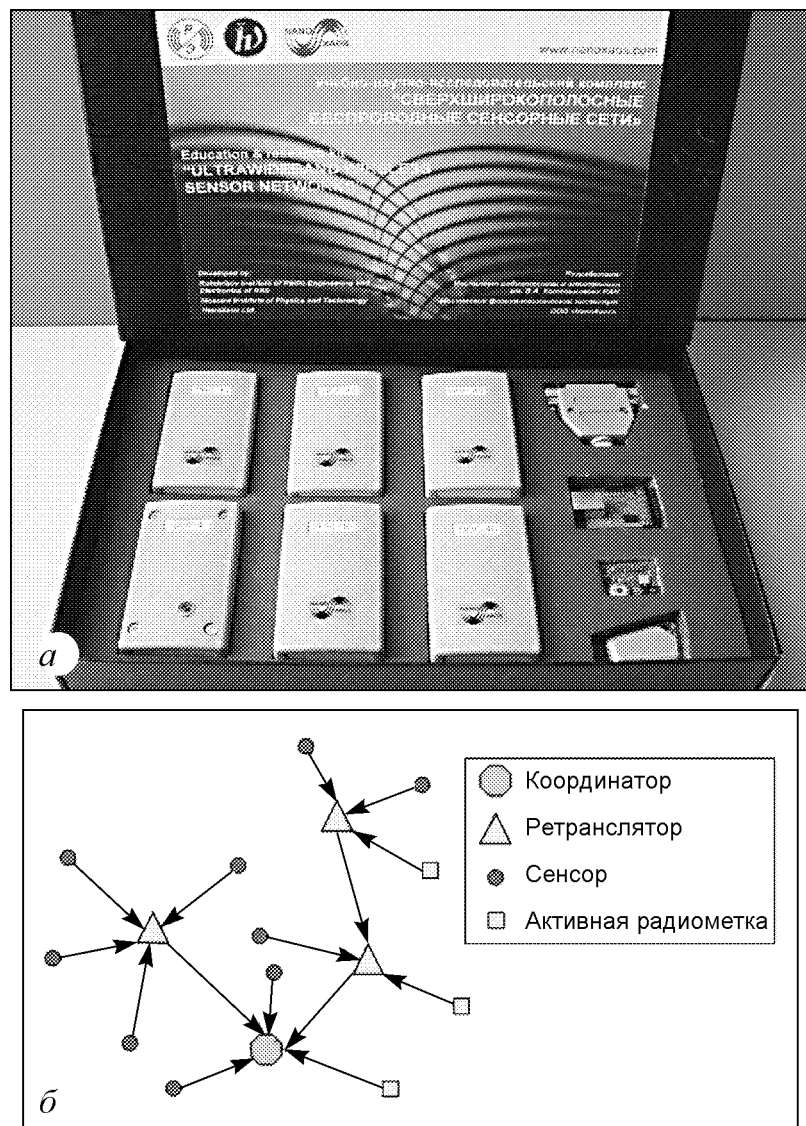


Рис. 5. *a* – Учебно-научно-исследовательский комплекс (УНИК) «Сверхширокополосные беспроводные сенсорные сети»; *б* – структура сети, которая может быть развёрнута на основе этого комплекса

ботку и подключение новых сенсорных блоков, разработку новых алгоритмов функционирования сетей и др. В настоящее время начата поставка этих комплексов в вузы Российской Федерации и ряда зарубежных стран.

5. «Умная пыль» как концентратор нанотехнологий

Сверхширокополосные сенсорные сети используют приемопередатчики с малым радиусом действия. При этом, если мощность излучения сотовых телефонов составляет $100 \div 300$ мВт, систем типа Wi-Fi – 100 мВт, а систем типа Bluetooth – $1 \div 10$ мВт, то мощность излучения сверхширокополосных устройств связи менее 100 мкВт. Это означает, что для передачи одного бита информации сотовый телефон излучает $10^{-7} \div 3 \cdot 10^{-7}$ Дж, передатчик Wi-Fi – 10^{-8} Дж, передатчик Bluetooth – $10^{-9} \div 10^{-8}$ Дж, а сверхширокополосный передатчик $10^{-12} \div 10^{-10}$ Дж. Таким образом, энергия, излучаемая сверхширокополосным передатчиком на передаваемый бит, меньше 1.0 нДж, в то время как в других современных системах связи она больше 1.0 нДж.

Радиотехнологии, в которых используются сверхнизкие уровни излучаемой энергии на бит передаваемой информации, уместно называть субнано радиотехнологиями или просто нанорадиотехнологиями. Разработка нанорадиотехнологий требует постановки и решения ряда новых радиофизических проблем, связанных с генерацией сигналов очень малой мощности, излучением их с помощью компактных антенн, распространением этих сигналов в специфических средах на малые расстояния и эффективным приемом с малыми энергетическими затратами.

На наш взгляд, сенсорным сетям предстоит сыграть роль консолидирующего начала – «концентратора» для нанотехнологий, связанных с обработкой и передачей информации. Действительно, сами по себе электронные элементы наноразмеров работать не будут. Для эффективного использования они должны быть интегрированы в функциональные блоки, а те, в свою очередь, в законченные устройства и системы.

Беспроводные сенсорные сети типа «умной пыли» являются как раз системами, состоящими из сверхминиатюрных однотипных интеллектуальных узлов (систем), которые могут быть реализованы только с применением нанотехнологий, и будут тиражироваться миллиардами и десятками миллиардов штук. Вот почему вполне оправданно рассматривать такие системы как «концентраторы» нанотехнологических решений.

Заключение

Беспроводная сенсорная сеть представляет собой совокупность вычислительных устройств (микроконтроллеров), каждое из которых связано с внешней средой датчиком, от которого поступает информация (и возможно исполнительным устройством – актуатором). Каждое вычислительное устройство производит первичную обработку поступающей информации и передает ее по коммуникационной сети в центральный пункт, где поступающая от всех сенсоров информация анализируется и обрабатывается в совокупности.

Таким образом, сенсорная сеть представляет собой распределенную интеллектуальную систему, элементы которой осуществляют взаимодействие с внешней

средой. Это качественно новый тип информационно-вычислительной системы по отношению к обычным компьютерам. Он способен стать основой для чрезвычайно перспективного технологического направления, способного оказать революционное воздействие на все сферы жизни, подобно тому, как в предыдущие десятилетия это сделала компьютерная техника. Для развития сенсорных технологий, так же как в свое время для развития компьютерной техники, решающее значение наряду с «железом» будет иметь программное обеспечение в традиционном варианте, или в тех вариантах, которые придут ему на смену: адаптивное, дистанционное, самопрограммирующееся и т.д. Те структуры и организации, которые создадут и «навяжут» эти продукты миру будут иметь громадные финансовые средства и огромное технологическое преимущество.

Рассмотренные в статье сверхширокополосные средства и сети, вместе с программными средствами для них, находятся в начале своего развития, большие компании и организации в этой ситуации, как показывает опыт, не имеют значительных преимуществ перед компактными инновационными структурами, и игра для молодых и дерзающих стоит свеч.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ № 09-02-00983-а и № 09-07-92651-ИНДа.

Библиографический список

1. Wireless sensor networks – a mission to the USA. Report of DTI global watch mission. November 2005.
2. *Doherty L., Warneke B.A., Bozer B.E., Pister K.S.J.* Energy and performance consideration for smart dust // Int. Journal of Parallel and Distributed Systems and Networks. 2001. Vol. 4, № 3. P. 121.
3. Crossbow Technology Inc. MTS/MDA Sensor Board Users Manual. San Jose: 2007. http://www.xbow.com/support/Support_pdf_files/MTS-MDA_Series_Users_Manual.pdf
4. New public safety applications and broadband Internet access among uses envisioned by FCC authorization of ultra-wideband technology. / FCC Release News. Feb. 14, 2002.
5. *Win M.Z., Scholtz R.A.* Impulse radio: How it works // IEEE Commun. Lett. 1998. Vol. 2. P. 10.
6. *McCorkley J.* A Tutorial on ultra wideband technology // IEEE 802.15 Working Group, submission. N.Y.: IEEE, 2000. http://grouper.ieee.org/groups/802/15/pub/2000/Mar00/00082rP802-15_WG-UWB-Tutorial-1-XrteamSpectrum.pdf
7. *Kelly J.* Time Domain's Proposal for UWB Multi-band Alternate PHY Layer for 802.15.3a. N.Y.: IEEE, 2003. <http://grouper.ieee.org/groups/802/15/pub/2003/Mar03/03143r2P802-15TG3a-TimeDomain-CFP-Presentation.ppt>
8. *Дмитриев А.С., Панас А.И., Старков С.О., Кяргинский Б.Е.* Прямохаотические схемы передачи информации в сверхвысокочастотном диапазоне // РЭ. 2001. Т. 46, № 2. С. 224.

9. *Дмитриев А.С., Кяргинский Б.Е., Панас А.И., Пузиков Д.Ю., Старков С.О.* Эксперименты по сверхширокополосной прямохаотической передаче информации в сверхвысокочастотном диапазоне // РЭ. 2002. Т. 47, № 10. С. 1219.
10. TG4a Proposal for Low Rate DS-UWB (DS-UWB-LR). N.Y.: IEEE, 2005.
<http://grouper.ieee.org/groups/802/15/pub/2005/15-05-0021-00-004a-low-rate-ds-uwb-tg4a.ppt>
11. Multi-band OFDM Physical Layer Proposal. IEEE 802.15.3a Working Group submission, Jul. 2003. N.Y.: IEEE, 2003.
http://www.ieee802.org/15/pub/2003/Jul03/03268r2P802-15_TG3a-Multi-band-CFP-Document.pdf.
12. *Lampe J.* Introduction to Chirp Spread Spectrum (CSS) Technology. N.Y.: IEEE, 2004. <http://grouper.ieee.org/groups/802/15/pub/2004/15-04-0353-00-004a-chirp-spread-spectrum-technology.ppt>
13. *Gerrits J.F.M., Kouwenhoven M. H. L., Van der Meer P. R., Farserotu J.R., Long J.R.* Principles and Limitations of Ultra-Wideband FM Communications Systems // EURASIP Journal on Applied Signal Processing. 2005. № 3. P. 382.
14. *Dmitriev A.S., Kyarginsky B.Ye., Panas A.I., Starkov S.O.* Experiments on ultra wideband direct chaotic information transmission in microwave band // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2003. Vol. 13, №6. P. 1495.
15. *Дмитриев А.С., Клецов А.В., Лактюшкин А.М. Панас А.И., Старков С.О., Хилинский А.Д.* Сверхширокополосная беспроводная связь на основе динамического хаоса // РЭ. 2006. Т. 51, № 10.
16. *Дмитриев А.С., Клецов А.В., Лактюшкин А.М. и др.* Сверхширокополосные коммуникационные системы на основе динамического хаоса. // Успехи современной радиоэлектроники. 2008. №1. С. 4.
17. *Дмитриев А.С., Клецов А.В., Лактюшкин А.М. и др.* Технологическая платформа для создания приемопередатчиков на основе хаотических сигналов. // Успехи современной радиоэлектроники. 2008. № 1. С. 77.
18. *Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Кузьмин Л.В.* Генерация последовательности хаотических импульсов при воздействии периодического сигнала на динамическую систему // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31, № 22. С. 29.
19. *Дмитриев, А.С., Ефремова, Е.В., Кузьмин, Л.В., Атанов, Н.В.* Генерация потока хаотических импульсов в динамической системе с внешним (периодическим) воздействием // РЭ. 2006. Т.51, вып. 5. С. 593.
20. *Атанов Н.В., Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Максимов Н.А.* Формирование хаотических радиоимпульсов в генераторе с внешним периодическим воздействием // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32, №15. С. 1.
21. *Ефремова Е.В., Атанов Н.В., Дмитриев Ю.А.* Генератор хаотических колебаний радиодиапазона на основе автоколебательной системы с 2,5 степенями свободы // Известия вузов. ПНД. 2007. Т. 15, № 1. С. 23.
22. *Dmitriev A., Efremova E., Kuzmin L., Atanov N.* Forming pulses in non-autonomous chaotic oscillator // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2007. Vol. 17, № 10. P. 1.

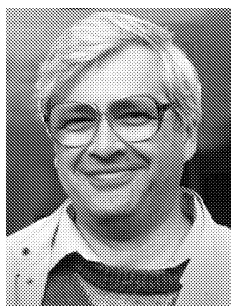
Поступила в редакцию 6.07.2009

ULTRAWIDEBAND WIRELESS SENSOR NETWORKS BASED ON CHAOTIC RADIOPULSES

A.S. Dmitriev, L.V. Kuzmin, V.Yu. Yurkin

Wireless sensor networks that is a fast emerging branch of modern telecommunications are considered in this paper. Particular attention is paid on ultrawideband sensor networks where chaotic radiopulses are used as an information carrier between sensor nodes. Development of such wireless sensor networks became possible after long-term investigations of chaotic oscillations and chaos control.

Keywords: Dynamical chaos, ultrawideband signals, wireless ultrawideband systems, sensor networks.



Дмитриев Александр Сергеевич – окончил факультет общей и прикладной физики Московского физико-технического института (1971). Ведущий научный сотрудник, зав. отделом ИРЭ РАН. Кандидат физико-математических наук (1974), доктор физ.-мат. наук (1988), профессор (с 1995). Дважды лауреат Премии Совета Министров СССР (1984, 1989). Автор более 140 научных трудов.

125009 Москва, ул. Моховая 11, корп. 7
Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН
E-mail: chaos@cplire.ru



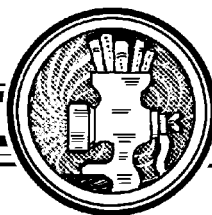
Кузьмин Лев Викторович – окончил МФТИ. Научный сотрудник ИРЭ РАН. Кандидат физико-математических наук (2000). Имеет более 40 научных трудов.

125009 Москва, ул. Моховая 11, корп. 7
Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН
E-mail: chaos@cplire.ru



Юркин Виталий Юрьевич – родился в 1985 году в Волгограде, окончил Московский физико-технический институт (2008). Аспирант МФТИ. Работает в ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН

125009 Москва, ул. Моховая 11, корп. 7
Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: vitalik2002@gmail.com



FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION FOR AGING AND EQUILIBRATED RANDOM WALKS

V.Yu. Zaburdaev, I.M. Sokolov

We consider continuous time random walks and discuss situations pertinent to aging. These correspond to the case when the initial state of the system is known not at preparation (at $t = 0$) but at the later instant of time $t_1 > 0$ (intermediate-time initial condition). We derive the generalized aging diffusion equation for this case and express it through a single memory kernel. The results obtained are applied to the practically relevant case of the equilibrated random walks. We moreover discuss some subtleties in the setup of the aging subdiffusion problem and show that the behavior of the system depends on what was taken as the intermediate-time initial condition: whether it was coordinate of one particle given by measurement or the whole probability distribution. The two setups lead to different predictions for the evolution of a system. This fact stresses the necessity of a precise definition of aging statistical ensembles.

Keywords: Continuous time random walks, generalized diffusion equation, aging, statistical ensemble.

Introduction

Fractional diffusion equations (FDE) nowadays can be considered as an established and common mathematical tool with applications widely distributed in natural and social sciences, biology, and finance. Usually, one successfully uses them to explain anomalous scaling behavior of some quantities of interest. However, when finer details of anomalous transport processes come to a question, such as aging for example, an investigator, equipped with FDE but with the logic of classical diffusion, often fails to describe it correctly. An intrinsically asymptotic character of FDE is more crucial than in classical diffusion, since it involves nonlocal time/space operators. Therefore, some particular tasks require the knowledge of the dynamics underlying the FDE and not only their final form. In many cases, such dynamics can be modeled by continuous time random walks (CTRW) [1–4]. It allows to follow all derivation steps in detail and obtain useful analytical results. In the present work, we will also use CTRW as a basis model.

The problem of aging is one of the fundamental questions relevant in different fields of physics. The word «aging» applies to all situations when the result of a measurement depends explicitly on the time when this measurement was performed (i.e. what is the time elapsed between the instant when the system was prepared in its original state and the instant when the measurement started). Aging is an intrinsic feature of glasses

[5–7], colloidal systems [8, 9], granular materials [10, 11], diffusion processes in random environment [12, 13], etc. Measurement setups and physical reasons for such a time-inhomogeneous behavior can be quite different, e.g. the physical system can age due to some slow internal processes or due to external impacts.

One of the mechanisms of aging is described by CTRW with power-law waiting time distribution, where its nature is connected with the overall nonstationarity of the process. Different aspects of aging in continuous time random walks were addressed e.g. in [14–18]. The extensive discussion of properties of aging in trap models and their representation within the CTRW picture is given by Montus and Bouchaud [19]. We state however that the applications of CTRW are not exhausted by a mean-field description of diffusion in systems with traps. The approach can be applied in many other cases like diffusion on a spine of a comb and in some other loopless structures [20], as well as the one generated by chaotic maps (see Ref. [16] and references therein), where the diffusion anomalies are not caused by energetic disorder.

The problem discussed in the present article is related to the one of Ref. [16], where the author considered the aging in the subdiffusion process generated by a deterministic dynamical system. We generalize the results of the Ref. [16] and explicitly express the generalized diffusion equation describing aging CTRW by using a single memory kernel. Further, we consider the situation of random walks with truncated power-law waiting time distributions, which leads to equilibration. We show that the final form of the corresponding diffusion equation depends on whether this waiting time distribution possesses the second moment or not. In the latter case, the convergence of the probability density function (PDF) for the density of particles to a Gaussian is very slow.

We moreover stress that the results obtained in the Ref. [16] and generalized in the present work are pertinent to a very *specific* variant of the aging problem. To demonstrate this, we discuss a seemingly similar (but in reality very different) approach to aging. Although both approaches are intimately related, they lead to different predictions for the evolution of the system. We show that these approaches also correspond to different experimental situations and discuss their applicability and limitations.

The structure of the paper is as follows. In the Section 1 we formulate the aging problem corresponding to the setup of Ref. [16], introduce the generalized master equation (GME) approach, and derive the corresponding fractional diffusion equation for aging walks. We analyze the asymptotic form of the aging diffusion equation and express it through a single memory kernel. In the Section 2, we apply these results to the equilibrated random walks. We derive the corresponding transport equations with distributed order fractional time derivative and discuss particularly interesting behavior of the moments of the density distribution. In the Section 3, we discuss another approach to aging, the relevant experimental situation, and the corresponding results. The last section is reserved for conclusions.

1. Master equation for aging random walks

1.1. General considerations. Consider a system of particles created at $t_0 = 0$. After the system was created, we let it evolve according to its internal dynamical laws during an interval of time $t_1 > 0$. The initial distribution of particles at preparation, $n(x, 0)$ is unknown. At the time t_1 we labeled some particles and thus created a known

density $n(x, t_1)$ of such marked particles (performed a measurement). For example, we could irradiate our system with light and create excited states of atoms or molecules of the interest inside the region of the order of the light beam radius or its penetration depth. Equivalently, we may consider a single particle that has started at time $t = 0$ from an unknown location and at the time t_1 , was detected at the point x_1 and labeled. The quantity of interest is $n(x, t_2)$, the density at a given instant of time $t_2 > t_1$, which we assume to be experimentally accessible. Then the following question can be put: If we only know the duration of the previous evolution, t_1 (called *aging time*), and the position of the particle at $t = t_1$, what can we say about the future evolution of the particle's position? How precise can we predict the position of this particle at the time $t_2 > t_1$, and how does this prediction depend on t_1 and t_2 ? In the case of many labeled particles, the same questions apply to the profile at t_2 which can be obtained as a convolution of the concentration profile at t_1 and the PDF of the single-particle displacements. We note that the density of points in a configuration space of some system can correspond not only to coordinates of some real particles but to whatever other coordinates characterizing e.g. temperature or magnetic field. In our explanation we, however, confine ourselves to the picture of particles.

The problem of aging in this setup can be considered as the «intermediate-time initial condition» problem: The system was created at $t = 0$ but the initial condition to the corresponding transport equation is posed at a later instant of time $t = t_1$. For normal, Markovian diffusion this does not change the overall form of the transport equation. In non-Markovian cases, especially in the ones with long enough memory, it does, as we proceed to show. This aging problem is schematically illustrated in the Fig. 1. Assume that the density of labeled particles at $t = t_1$ at point $x = x_1$ is known. Starting from this point the particles diffuse, and at $t_2 = t_1 + t$ acquire some distribution (not shown). By $n(x, t_1, t)$ we denote our theoretical prediction for this distribution. In the case when the whole profile $n(x, t = t_1)$ is known, the concentration profile $n_A(x, t = t_2)$ at t_2 is given by a convolution of the former one and $n(x, t_1, t)$.

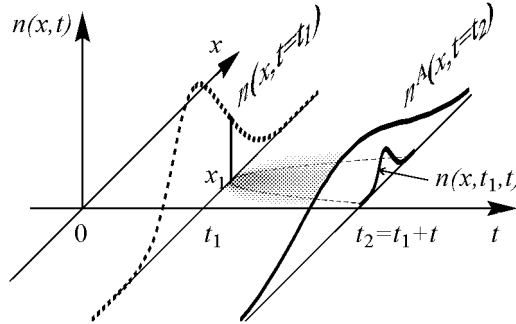


Fig. 1. The first aging problem setup. The evolution starts at $t = 0$ from an unknown initial distribution. At $t = t_1$ the particles with a profile $n(x, t = t_1)$ are labeled. At $t_2 = t_1 + t$ for the diffusion from a single point we obtain the probability density $n(x, t_1, t)$ and for the full profile the density $n^A(x, t = t_2)$. The dashed line and the grayscale shadow in the (x, t) plane are used to guide the eye for the diffusion from a single point

For simplicity we start with the CTRW model on a one-dimensional lattice; generalizations to the continuous case and to higher dimensions are quite evident. Consider a discrete set of sites marked by an index i . By n_i we denote the occupation probability of each site (density of particles). After a certain waiting time at the site i , a particle can jump to the two neighboring sites $i - 1, i + 1$ with equal probability $1/2$. The waiting time distribution at a site is governed by the probability density $\psi(\tau)$. The properties of this function determine the regime of diffusion. If the mean waiting time, $\langle \tau \rangle = \int_0^\infty \tau \psi(\tau) d\tau$, is finite, the resulting transport process will be a normal diffusion. However, even in this case some aging effects can still emerge, with the only exception of the exponential

waiting time distribution [21]. If the mean waiting time is infinite, we are in the situation of anomalous subdiffusive behavior, where the aging effects are the strongest. It is known that in the subdiffusive regime asymptotic transport equations have a form of the fractional diffusion equation, where fractional differentiation appears in the temporal part. It is easy to see that in the case of the fractional time derivative, the solutions of the corresponding equation do not possess the semi-group property. This is a strong indication that the choice of the starting point or an intermediate initial condition may noticeably affect the following dynamics.

To consider this point in detail, we need to derive the transport equation which adequately describes aging. Our approach is based on the generalized master equation and is similar to the phenomenological derivation of the diffusion or Fokker–Planck equations using a combination of a continuity equation and the equation for currents [22]. The continuity assumption contains essentially two balance conditions guaranteeing the probability conservation: a local one (giving the balance between the probability gain and loss at one site) and the one for transitions between the two sites (representing particle conservation during the jumps). A balance equation at each site reads

$$\dot{n}_i(t) = j_i^+(t) - j_i^-(t), \quad (1)$$

where $j_i^-(t)$ is the loss current, i.e. the probability for a particle to leave the site per unit time at time t , and $j_i^+(t)$ is the gain current at a site.

A particle arriving to the site i at time t comes either from the left or from the right. Probability conservation for transitions between sites then reads

$$j_i^+(t) = \frac{1}{2}j_{i-1}^-(t) + \frac{1}{2}j_{i+1}^-(t). \quad (2)$$

By combining (1) and (2) we get a continuity equation

$$\dot{n}_i(t) = \frac{1}{2}j_{i-1}^-(t) + \frac{1}{2}j_{i+1}^-(t) - j_i^-(t). \quad (3)$$

According to the waiting time distribution, the loss current at time t is connected to the gain current at the site at all previous times: the particles which leave the site i at the time t (making a step from i to one of its neighbors) either were at the same site i from the very beginning, or came there at some later time $0 < \tau < t$. A probability density to make a step at time t when arriving at τ is given by the waiting time distribution $\psi(t - \tau)$. Then for the loss current $j_i^-(t)$ we can write:

$$j_i^-(t) = \psi^{(1)}(t, t_1)\tilde{n}_{i,0} + \int_0^t \psi(t - \tau)j_i^+(\tau)d\tau. \quad (4)$$

However, for the aging initial conditions the probability to make the first step after the measurement at t_1 is different from $\psi(\tau)$. Here we postulated it to be independent of the spatial position i and denoted by $\psi^{(1)}(\tau, t_1)$. We also assumed that the system was created at the time $t = 0$, and a measurement was performed at $t = t_1$. From here on we denote by t the time elapsed from t_1 and denote by $\tilde{n}_{i,0} \equiv \tilde{n}_i(t_1)$ the initial condition for the system's further evolution. By using Eqs. (2)–(3) we can rewrite (4) as:

$$j_i^-(t) = \psi^{(1)}(t, t_1)\tilde{n}_{i,0} + \int_0^t \psi(t - \tau) [\dot{n}_i(\tau) + j_i^-(\tau)] d\tau. \quad (5)$$

Now we have to find the expression for the forward waiting time distribution of the first step $\psi^{(1)}(\tau, t_1)$ [23]. The forward waiting time τ is counted starting from the observation point. Let us assume that the jump preceding t_1 (numbered $j - 1$), took place at time $t_{j-1} = z$. The forward waiting time distribution $\psi^{(1)}(\tau, t_1)$ is

$$\psi^{(1)}(\tau, t_1) = \int_0^{t_1} f(z)\psi(t_1 - z + \tau)dz,$$

where $f(z)dz$ is the probability to make a jump within the time interval between z and $z + dz$, so that $f(z)$ is the time-dependent density of steps. This can be presented in the following form:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z). \quad (6)$$

Here $f_n(t)$ is the probability density that it is exactly n -th jump that takes place at time t . This one is given by an n -fold convolution of the waiting time probability density $\psi(t)$ with itself. Under Laplace transform with respect to z Eq. (6) reads:

$$f_s = 1 + \psi_s + \psi_s^2 + \dots = \frac{1}{1 - \psi_s}. \quad (7)$$

By indexes p, s we will denote the Laplace components corresponding to t and t_1 , and by k the Fourier component, respectively. The Laplace transform of $\psi^{(1)}(\tau, t_1)$ with respect to t_1 is then:

$$\psi_s^{(1)}(\tau) = \frac{e^{s\tau} \left[\psi_s - \int_0^\tau e^{-s\tau'} \psi(\tau') d\tau' \right]}{1 - \psi_s}.$$

The double Laplace transform of this function with respect to both times τ and t_1 has the following form [16,23]:

$$\psi_{s,p}^{(1)} = \frac{\psi_s - \psi_p}{(p - s)(1 - \psi_s)}. \quad (8)$$

With this information at hand, we take the Laplace transform of (5) with respect to t to obtain:

$$j_{i,p}^- = \psi_p^{(1)}(t_1) \tilde{n}_{i,0} + \psi_p \left[p n_{i,p} - \tilde{n}_{i,0} + j_{i,p}^- \right].$$

From the above equation we find the connection between loss current and the occupation probability:

$$j_{i,p}^- = \frac{p \psi_p}{1 - \psi_p} n_{i,p} + \frac{\psi_p^{(1)}(t_1) - \psi_p}{1 - \psi_p} \tilde{n}_{i,0}. \quad (9)$$

Now we insert (9) into the Laplace transform of (3) and convert it back to the time domain:

$$\begin{aligned} \dot{n}_i(t) &= \int_0^t \Phi(t - \tau) \left[\frac{1}{2} n_{i-1}(\tau) + \frac{1}{2} n_{i+1}(\tau) - n_i(\tau) \right] d\tau + \\ &+ \Phi^{(1)}(t, t_1) \left[\frac{1}{2} \tilde{n}_{i-1,0} + \frac{1}{2} \tilde{n}_{i+1,0} - \tilde{n}_{i,0} \right], \end{aligned} \quad (10)$$

where $\Phi(t)$ and $\Phi^{(1)}(t, t_1)$ are defined through their Laplace transforms:

$$\Phi_p = \frac{p \psi_p}{1 - \psi_p}, \quad \Phi_p^{(1)}(t_1) = \frac{\psi_p^{(1)}(t_1) - \psi_p}{1 - \psi_p}. \quad (11)$$

1.2. The second memory term. We note now that Eq. (10) can be rewritten in the form

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}n_i(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^t M(t-\tau) \times \\ &\times \left[\frac{1}{2}n_{i-1}(\tau) + \frac{1}{2}n_{i+1}(\tau) - n_i(\tau) \right] d\tau + \\ &+ \Phi^{(1)}(t, t_1) \left[\frac{1}{2}n_{i-1}(t_1) + \frac{1}{2}n_{i+1}(t_1) - n_i(t_1) \right], \end{aligned} \quad (12)$$

where the memory kernel $M(t)$ is the inverse Laplace transform of the function $M_p = \psi_p/(1 - \psi_p)$, which is connected with the density of steps $f(t)$ (having the Laplace representation $f_p = 1/(1 - \psi_p)$) via $M(t) = f(t) - \delta(t)$. Thus, $M(t)$ is the density of all steps excluding the first one. Evidently, the asymptotic properties of the functions M and f are the same.

Now we concentrate on the temporal asymptotic behavior of the source term. By using Eqs. (8) and (11), for the double Laplace transform of $\Phi^{(1)}(t, t_1)$ we can write:

$$\begin{aligned} \Phi_{p,s}^{(1)} &= \frac{1}{p-s} \left[\frac{1}{1-\psi_s} - \frac{1}{1-\psi_p} \right] - \frac{\psi_p}{s(1-\psi_p)} = \\ &= \frac{1}{p-s} \left[\frac{1}{1-\psi_s} - \frac{1}{1-\psi_p} \right] - \frac{1}{s(1-\psi_p)} + \frac{1}{s}. \end{aligned} \quad (13)$$

In order to understand the structure of the above expression we use one remarkable property of the Laplace transform. For any function h , such that its Laplace transform exists, the following property for double Laplace transform holds [21]:

$$[h(t+t_1)]_{p,s} = \frac{h_p - h_s}{s-p}, \quad (14)$$

where s and p are Laplace space variables corresponding to t and t_1 respectively. By using this fact we can rewrite the expression for $\Phi^{(1)}(t, t_1)$ (13) in time domain:

$$\Phi^{(1)}(t, t_1) = f(t+t_1) - f(t) + \delta(t), \quad (15)$$

where $f(t)$ is the density of steps given by the inverse Laplace transform of $1/(1 - \psi_p)$. This one, as we have already seen, is connected with the first memory kernel $M(t)$ via $M(t) = f(t) - \delta(t)$, so that it can be rewritten in the form $\Phi^{(1)}(t, t_1) = M(t+t_1) + \delta(t+t_1) - M(t)$. However, for whatever aged system ($t_1 > 0$) the delta function vanishes, so that the final result

$$\Phi^{(1)}(t, t_1) = M(t+t_1) - M(t) \quad (16)$$

follows. This is a new expression which connects the source term with the memory kernel of the generalized master equation for aging continuous time random walks (12), which thus gets the form

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}n_i(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^t M(t-\tau) \left[\frac{1}{2}n_{i-1}(\tau) + \frac{1}{2}n_{i+1}(\tau) - n_i(\tau) \right] d\tau + \\ &+ [M(t+t_1) - M(t)] \left[\frac{1}{2}n_{i-1}(t_1) + \frac{1}{2}n_{i+1}(t_1) - n_i(t_1) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

In the more general continuous case, when the jumps' lengths are no more discrete but rather distributed according to some probability density $g(x)$, Eq. (17) turns to an integral equation of the form:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}n(x, t) &= \frac{d}{dt} \int_0^t M(t - \tau) \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) [n(x - y, \tau) - n(x, \tau)] dy d\tau + \\ &+ [M(t + t_1) - M(t)] \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) [n(x - y, t_1) - n(x, t_1)] dy. \end{aligned} \quad (18)$$

The discrete case, Eq. (17), corresponds to the choice $g(x) = [\delta(x - a) + \delta(x + a)]/2$ with a being the lattice spacing. The generalized master equations, Eq. (17) and Eq. (18), contain the standard random walk part represented by the first term and an additional term representing the memory on the initial conditions. This memory term is expressed through the same CTRW memory kernel as encountered in the first term on the right hand side and vanishes when either $t_1 = 0$, or $\psi(\tau)$ is an exponential. Before considering the asymptotic form of the above Eqs. (17), (18) we give their solution in Fourier–Laplace space:

$$n_{k,p} = \frac{\left\{ [M(t + t_1) - M(t)]_p (g_k - 1) + 1 \right\} n(t_1)_k}{p (1 - (g_k - 1)M_p)}. \quad (19)$$

Indexes k and p denote the Fourier and Laplace transforms of the corresponding functions.

1.3. Asymptotic form of the aging equation. Now we would like to obtain the asymptotic form of the above transport equation corresponding to large values of x and t (small k and p respectively). Assuming $n_i(t)$ to change slowly enough as the function of the site number i one can change to the continuous description introducing the density $n(x, t)$ with $x = ia$. The difference operators in Eq. (17) can then be considered as a discrete approximation to a Laplacian, so that the corresponding master equations takes the form of generalized diffusion equation with the additional memory term

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}n(x, t) &= \frac{a^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t M(t - \tau) \Delta n(x, \tau) d\tau + \\ &+ [M(t + t_1) - M(t)] \frac{a^2}{2} \Delta n(x, t_1). \end{aligned} \quad (20)$$

The same form follows from the more general continuous form, Eq. (18), provided the jump length distribution $g(x)$ has a finite second moment ($\langle x^2 \rangle < \infty$). The corresponding proof follows either the standard Kramers–Moyal procedure or can easily be obtained as the small- k expansion in the Fourier space. Note that the continuous limit is obtained not by tending the lattice spacing a to zero, but using the smallness of the ratio between typical observation scales and the microscopic scale given by a : $x/a \gg 1$. One usually takes the first leading term in the expansion with respect to this small parameter, finds the solution, and then estimates the remaining correction terms. A more detailed discussion of the transition to the continuous limit in the anomalous diffusion problems can be found in Ref. [24].

For exponential waiting time distribution $\psi(t) = t_0^{-1} \exp(-t/t_0)$ the memory kernel $M(t) = 1/t_0$ and the equation takes form of the ordinary diffusion equation

$$\frac{\partial}{\partial t}n(x, t) = \frac{a^2}{2t_0} \Delta n(x, t) \quad (21)$$

lacking the second memory term. The combination $K = a^2/2t_0$ is the usual diffusion coefficient of the process. Another common choice of the waiting time distribution (determined by both, real practical situations and mathematical convenience) is a power law function, e.g. $\psi(t) = \gamma/t_0(1 + t/t_0)^{1+\gamma}$, with $0 < \gamma < 1$, where t_0 again gives us the characteristic temporal scale of waiting times. The expansion of its Laplace transform for a small p is: $\psi_p = 1 - \Gamma(1 - \gamma)t_0^\gamma p^\gamma + O(p)$, and the corresponding memory kernel $M(t)$ is given by

$$M(t) \simeq \frac{1}{\Gamma(\gamma)t_0^\gamma} \frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(1-\gamma)}, \quad (22)$$

in which we recognize an expression proportional to the integral kernel of the fractional derivative. After substituting this expansion into (20) and some algebra we obtain:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} n(x, t) &= K_\gamma {}_0 D_t^{1-\gamma} \Delta n(x, t) + \\ &+ K_\gamma \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \left[\frac{1}{(t+t_1)^{1-\gamma}} - \frac{1}{t^{1-\gamma}} \right] \Delta n(x, t_1), \end{aligned} \quad (23)$$

where the generalized diffusion coefficient K_γ stands for $K_\gamma = a^2/[2\Gamma(\gamma)t_0^\gamma]$. The Eq. (23) generalizes the aging subdiffusion equation derived in Ref. [16] (cf. Eq. (18) there). It is now applicable to any initial density of particles $n(x, t_1)$ whereas the setup of Ref. [16] assumes a localized initial condition as a delta peak at zero.

Let us briefly discuss the properties of the above equation. It is easy to check that the total number of particles is conserved by setting $k = 0$ in Eq. (19) since $n_{k=0}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(x, t) dx$. Just from the normalization condition it follows that $(g_k - 1)|_{k=0} = 0$ and we immediately obtain:

$$n_{p,k=0} = \frac{n(t_1)_{k=0}}{p},$$

which after the inverse Laplace transform demonstrates the conservation of the total number of particles. The behavior of the mean square displacement, $M_2(t) = \langle x^2(t, t_1) \rangle$, can also be computed with a help of the answer in Fourier–Laplace space (19) by the following formula: $M_2(t) = - (d^2/dk^2) n_k(t)|_{k=0}$. By taking the initial condition as a delta function at zero $n(x, t_1) = \delta(x)$ and for large t we obtain (cf. [16, 18]):

$$\langle x^2(t, t_1) \rangle = \frac{a^2}{t_0^\gamma \Gamma(1+\gamma) \Gamma(1-\gamma)} [(t+t_1)^\gamma - t_1^\gamma]. \quad (24)$$

By setting $t_1 = 0$ we recover the standard answer for the subdiffusion. For $t_1 > 0$ we can see that the diffusion gets slower for larger values of t_1 . This is an intrinsic feature of the nonstationary subdiffusion process since the frequency of jumps decays with time. After a longer preceding evolution t_1 it takes longer time to make the first jump after the observation started. Only at times $t \gg t_1$ the mean square displacement approaches the standard behavior t^γ . For the whole class of processes described by Eq. (20) the nonnegativity of the probability density for the power-law kernels considered is guaranteed due to the fact that the process discussed is subordinated to the Brownian motion. In the case of the localized initial condition can be expressed in the integral form through the Levy stable distribution [16].

2. Equilibrated random walks

Let us now consider the system which relaxes to a true equilibrium. Such a system would correspond to CTRW with the waiting time distribution possessing the first moment, $\langle \tau \rangle = \int_0^\infty \tau \psi(\tau) d\tau$, which is however so large that the intermediate power-law asymptotics of the function is still seen. The examples are a theta-truncated power-law $\psi(\tau) = A/(1 + \tau)^{1+\alpha} \theta(T - \tau)$ or an exponentially truncated one $\psi(\tau) = A/(1 + \tau)^{1+\alpha} \exp(-\tau/T)$ (A is the normalization constant), or an exponentially truncated one-sided Levy-distribution with the Laplace transform $\psi_p = \exp[-A(p + 1/\lambda)^\alpha + A/\lambda^\alpha]$. Here A is the parameter with the dimension $[\text{T}]^\alpha$ and of the absolute value of unity (the typical step time is set to one), and $\lambda = (A\alpha/\tau)^{1/(1-\alpha)}$, where $\langle \tau \rangle$ is the mean waiting time. The equilibrated case is interesting because it is experimentally relevant: systems are typically created much earlier than measurements are performed and have enough time to equilibrate. The time lag between the labeling particles at $t = t_1$ and final measurement at t_2 is however small enough to probe nonequilibrium dynamics. The general result for the aging problems can be easily applied to this concrete example. The equilibrated case corresponds to the limit $t_1 \rightarrow \infty$ of aging CTRW. Analogously to the aging problem, we illustrate the equilibrated problem setup in the Fig. 2.

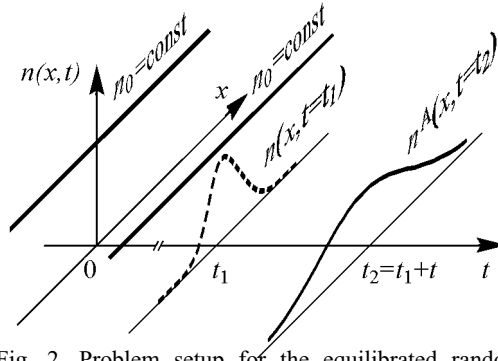


Fig. 2. Problem setup for the equilibrated random walks. At $t = t_1$ we label some of the particles from their uniform distribution and create the profile $n(x, t = t_1)$. Later we follow only the diffusion of those marked particles and obtain at $t_2 = t_1 + t$ the density profile $n^A(x, t = t_2)$

The system prepared at $t = 0$ evolves during the time t_1 , with $t_1 \rightarrow \infty$ (in practice it means that the system was created a long time before the measurement took place and develops a uniform distribution of particles). At the time $t = t_1$ we select some profile of the particles $n(x, t = t_1)$ and follow only these particles until the time $t_2 = t_1 + t$.

We start from the transport equation (20) by taking its Fourier–Laplace transform:

$$pn_{k,p} - \tilde{n}_k(t_1) = -\frac{p\psi_p}{1-\psi_p} \frac{a^2}{2} k^2 n_{k,p} - \frac{a^2}{2} k^2 \Phi_p^{(1)}(t_1), \quad (25)$$

where we returned to our earlier notation for the second memory kernel Φ_1 . In the above equation, the waiting time distribution has a finite first moment, $\langle \tau \rangle$, and therefore $\psi_p = 1 - \langle \tau \rangle p + o(p)$. In addition, the limit $t_1 \rightarrow \infty$ should be applied. In this case the expression for the second memory kernel $\Phi^{(1)}(t)$ is simpler than before. Its Laplace transform is given by (see Eqs. (8) and (11)):

$$\Phi_p^{(1)} = \left[\frac{1}{p\langle \tau \rangle} - \frac{1}{1-\psi_p} + 1 \right]. \quad (26)$$

We note that in the time domain we now have $\Phi^{(1)}(t) = 1/\langle \tau \rangle - f(t) + \delta(t)$ and that $f(t)$ still has a physical meaning of the (time-dependent) density of steps. For a pure power-law

CTRW this function monotonously decays to zero with time, while for equilibrated walks it decays to $1/\langle\tau\rangle$. The transition between the both regimes takes place at at time $t_c \simeq \langle\tau\rangle$. However, this does not mean that the second memory function vanishes at times which exceed t_c : the difference $1/\langle\tau\rangle - M(t)$ still can behave as a pure power-law in some cases. It is important that the second memory function is governed by the subleading term in the expansion of $1/(1 - \psi_p)$, whose behavior depends on whether the function $\psi(\tau)$ possesses the second moment (we shall call this situation «a sharp cut-off») or does not.

In the case of a sharp cut-off and for a small p , $\psi_p = 1 - \langle\tau\rangle p + M_2 p^2 + o(p^2)$, where M_2 is the second moment of waiting times. Now we have:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \psi_p} &= \frac{1}{\langle\tau\rangle p + M_2 p^2 + o(p^2)} = \\ &= \frac{1}{\langle\tau\rangle p} [1 + (M_2/\langle\tau\rangle)p + o(p)] = \\ &= \frac{1}{\langle\tau\rangle p} + \frac{M_2}{\langle\tau\rangle^2} + o(1). \end{aligned} \quad (27)$$

This means that for small p

$$\Phi_p^{(1)} = 1 - \frac{M_2}{\langle\tau\rangle^2} + o(1), \quad (28)$$

so that the function $\Phi^{(1)}(t)$ is integrable, with the integral being equal to $1 - M_2/\langle\tau\rangle^2$. This in turn means that $\Phi_1(t)$ decays faster than t^{-1} and its exact decay form depends on how many moments does $\psi(\tau)$ actually possess. We note that the existence of the second moment is necessary for such a behavior. The overall fractional diffusion equation for such a process in the long-time limit tends to a normal diffusion equation of the type

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = K \Delta n(x, t) + C \delta(t) \Delta \tilde{n}_0, \quad (29)$$

where K stands for the diffusion coefficient $K = a^2/\langle\tau\rangle$ and the nonnegative constant C is given by $C = (1 - M_2/\langle\tau\rangle^2)a^2$, i.e. to the ordinary diffusion equation with some correction to the initial condition. This correction vanishes only for the Markovian random walk process with exponential waiting time distribution for which $M_2 = \langle\tau\rangle^2$.

In the case when the second moment does not exist, the situation can be vastly different. In order to present this type of behavior let us consider a special example of the waiting time distribution for which we can convert Eq. (25) in the Fourier-Laplace domain into a distributed-order fractional diffusion equation with a source in space and time. Let us take ψ_p in a form

$$\psi_p = \exp \left[-\frac{p \langle\tau\rangle}{1 + \Lambda(p \langle\tau\rangle)^{1-\alpha}} \right]. \quad (30)$$

This function is completely monotonic, which, according to the Bernstein's theorem, means that it is a Laplace transform of a probability density function. To prove this it is enough to note that ψ_p has a form e^{-h_p} with the function $h_p > 0$, $h_p|_{p=0} = 0$ and possesses a monotonous derivative (see [25]). For $p \rightarrow 0$, ψ_p behaves as $\psi_p \simeq 1 - p \langle\tau\rangle$, i.e. the corresponding PDF $\psi(\tau)$ has the mean value of $\langle\tau\rangle$. The parameter Λ is a free parameter of the order of unity which governs the precise form of the crossover.

Provided that p is small enough, we can take $\psi_p \approx 1 - p \langle \tau \rangle / [1 + \Lambda(p \langle \tau \rangle)^{1-\alpha}]$ which corresponds to $1/(1 - \psi_p) = 1/(p \langle \tau \rangle) + \Lambda(p \langle \tau \rangle)^{-\alpha}$. By substituting this expression into (25) we obtain:

$$\begin{aligned} pn_{k,p} - \tilde{n}_{0,k} &= -K [1 + \Lambda(p \langle \tau \rangle)^{1-\alpha}] k^2 n_{k,p} + \\ &+ K \langle \tau \rangle \Lambda(p \langle \tau \rangle)^{-\alpha} k^2 \tilde{n}_{0,k}. \end{aligned} \quad (31)$$

In normal space-time domain this equation corresponds to

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(x,t)}{\partial t} &= K [1 + \Lambda \langle \tau \rangle^{1-\alpha} {}_0D_t^{1-\alpha}] \Delta n(x,t) - \\ &- K \frac{\Lambda \langle \tau \rangle^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} t^{-1+\alpha} \Delta \tilde{n}_0. \end{aligned} \quad (32)$$

Note the distributed order derivative $(1 + \Lambda \tau^{1-\alpha} {}_0D_t^{1-\alpha})$ on the r.h.s. [25], which is typical for systems showing crossover behavior, and the extremely slowly dissolving of the initial condition!

The difference between the cases of the equilibrated random walks corresponding to the waiting time distributions with or without second moment (mirrored in the difference of the form of the corresponding generalized Fokker–Planck equation) is intimately connected with the question whether the mean forward waiting time (the mean waiting time of the first step after the beginning of observations) exists. Indeed, looking at the limit of the Laplace transform in the first argument of the forward waiting time distribution for the equilibrated case ($t_1 \rightarrow \infty$) we see that $\psi_p^{(1)} \rightarrow (1 - \psi_p) / \langle \tau \rangle p$. Therefore, the first moment of $\psi^{(1)}(t)$, $\langle t_1 \rangle = \int_0^\infty \psi^{(1)}(t, \infty) t dt = -\frac{d}{dp} \psi_p^{(1)} \Big|_{p=0}$ is equal to $M_2/2 \langle \tau \rangle^2$ provided M_2 , the second moment of the waiting time distribution, exists, and diverges otherwise.

One of the interesting peculiarities of the equilibrated random walks is found in the behavior of its moments. It is known that the second moment of equilibrated CTRW behaves diffusively at all times [26, 27]. However, the higher moments of the density profile are much more exotic when the second moment of $\psi(\tau)$ does not exist. From Eq. (25) we obtain:

$$\begin{aligned} n_{k,p} &= \frac{1}{p} - \frac{1 - \psi_p}{p^2 \langle \tau \rangle} \frac{a^2 k^2}{1 - \psi_p + \psi_p a^2 k^2 / 2} \approx \\ &\approx \frac{1}{p} - \frac{1 - \psi_p}{p^2 \langle \tau \rangle} \frac{a^2 k^2 / 2}{1 - \psi_p + a^2 k^2} = \\ &= \frac{1}{p} \left[1 - \frac{1}{p \langle \tau \rangle} \frac{a^2 k^2}{2} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{2n} \frac{1}{p \langle \tau \rangle} \frac{a^{2n} k^{2n}}{(1 - \psi_p)^{n-1}} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Now we easily find the even moments of the density by the following formula:
 $M_{2n} = (-1)^n (d^{2n}/dk^{2n})n_k|_{k=0}$. We thus have:

$$\begin{aligned}
M_{0,p} &= 1/p & M_0(t) &= 1 \\
M_{2,p} &= 2Kp^{-2} & M_2(t) &= 2Kt \\
M_{4,p} &= \frac{24K^2\langle\tau\rangle}{p^2(1-\psi_p)} & M_4(t) &= 24K^2\langle\tau\rangle f_4(t) \\
&\dots & &\dots \\
M_{2n,p} &= \frac{(2n)!K^n\langle\tau\rangle^{n-1}}{p^2(1-\psi_p)^{n-1}} & M_{2n}(t) &= (2n)!K^n\langle\tau\rangle^{n-1} f_{2n}(t).
\end{aligned} \tag{34}$$

All odd moments are zero due to the the symmetry of the case considered here. The functions $f_{2n}(t)$ are the inverse Laplace transforms of $f_{2n,p} = 1/p^2(1-\psi_p)^{n-1}$. For the waiting time distribution with infinite second moment considered above, its asymptotic Laplace transform is as follows:

$$f_{2n,p} = \frac{1 + \Lambda(p\langle\tau\rangle)^{1-\alpha}}{p^{n+1}\langle\tau\rangle^{n-1}}. \tag{35}$$

In the time domain it corresponds to the following behavior:

$$f_{2n}(t) \simeq \begin{cases} \frac{\Lambda^{n-1}\langle\tau\rangle^{-\alpha(n-1)}}{\Gamma[(n-1)\alpha+2]} t^{(n-1)\alpha+1} & \text{for } t < \langle\tau\rangle, \\ \frac{1}{n!\tau^{n-1}} t^n & \text{for } t \gg \langle\tau\rangle. \end{cases} \tag{36}$$

This means, for example, that the distribution of the particles' positions at an intermediate time is considerably platykurtotic, and only slowly tends to a Gaussian in course of time with a typical transition time $\langle\tau\rangle$. We note here that such a slow convergence to a Gaussian is typical also for other random walks models with truncated power-laws, as exemplified by truncated Lévy flights [28,29].

3. Green's function approach and the problem of aging ensembles

In the previous sections, we considered the results for a specific setup of an aging problem corresponding especially to a displacement of a single particle labeled at $t = t_1$ in course of its further temporal evolution or of the ensemble of such labeled particles. Let us consider another setup for aging problem. Assume that the *full profile* of the density of particles (or the full probability density for a single particle) at $t = t_1$ is known (for example, we started with a thermodynamically large ensemble of particles and were able to measure their density at $t = t_1$ with high enough precision) or is known *in principle* as it is assumed when calculating, say, the correlation functions [30]. Does it give us additional information which might improve the prediction of the particles' positions? What would be the following evolution of this profile and how will it depend on the aging time?

The GME approach used in Sec. 1. relies on a special definition of the aging ensemble. The system was created at $t = 0$ and evolves according to the CTRW dynamics

up to the time t_1 , where the first measurement of the particle's position (or the the particles' positions) takes place. No explicit notion about the initial distribution of the particles' positions at $t = 0$ is assumed or used. In any case, we follow up only the particles tagged at $t = t_1$. The situation considered in the present section corresponds to a *different ensemble*.

Imagine now that we have two experiments (probably with different initial conditions), which are such that the exact measured density in one of them is the same as the density of labeled particles in the another one. Will the further development of the densities be the same? If not, what is the difference? As we proceed to show, the two situations lead to *different results* for the higher moments of the distribution. It is worth mentioning that the distribution of the first exit times after the measuring event is the only quantity affected by aging and it determines the future evolution of the system for both definitions [16]. It depends on the initial conditions through the correlation between the particle's position and the forward waiting time, as discussed in Ref. [31].

The difference between the two setups, the one of Fig. 1 and the one of Fig. 3, on the qualitative level, can be understood already now. In the given point x_1 at the time $t = t_1$, there are particles which have arrived different times ago and, therefore, will make their next steps also at different times [32, 33]. In the first aging setup, we virtually ignore the dependence of these exit times on x_1 (the relative position in the full density profile, if the latter is known). Therefore, we assume that in all points the distribution of exit times depends only on t_1 . In the second aging problem, we take into consideration the relative position of the point x_1 . It is clear that particles which occur to be found at the wing of the density profile typically have made much more steps than those found close to the center of the profile. Moreover, the particles which had to make a lot of jumps probably have arrived at their actual position very recently, i.e. start their last waiting period not long ago before t_1 . This implies that the distribution of exit times depends on x_1 which affects the diffusion of particles out of this point. Therefore corresponding profiles in the Fig. 1 and 3, $n(x, t_1, t)$ and $n(x, x_1, t_1, t)$ are different. By repeating the same argumentation for each point in the profile $n(x, t = t_1)$ we may conclude that n^A and n^G will be different as well. We will come back to this question later in the text.

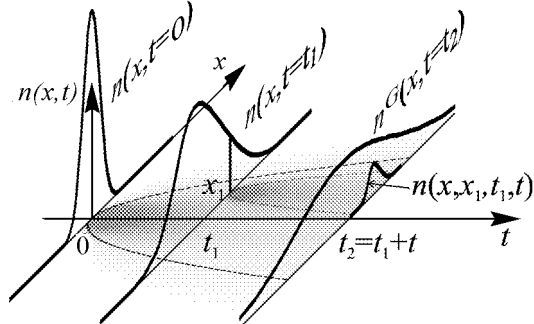


Fig. 3. The second aging problem setup. At $t = t_1$ the full density profile, $n(x, t = t_1)$ is measured. By using the Green's function it is possible to propagate it back and reproduce the initial distribution at $t = 0$, $n(x, t = 0)$. Then it is forwarded until the time $t_2 = t_1 + t$ to obtain the prediction for the future evolution $n^G(x, t = t_2)$. In contrast to the first aging problem, diffusion from a single point x_1 will depend on both, the starting point x_1 and the aging time t_1 : $n(x, x_1, t_1, t)$. The grayscale shadows and dashed line in the (x, t) plane show the diffusion from the initial distribution and a single point.

Let us now return to the case when the PDF of particles' positions at $t = t_1$ is known exactly and note that the temporal evolution of the PDF from true initial conditions to the state at time t is described by the linear evolution operator $\hat{S}(t)$. If the time evolution operator has an inverse defined at least on a set of relevant PDFs $n(x, t)$, one can propagate this PDF back in time to $t = 0$, thus getting $n(x, 0) = n_0(x)$ and then forward in time up

to $t_2 > t_1$ to obtain $n(x, t_2)^*$:

$$n(x, t_2) = \hat{S}(t_2)\hat{S}^{-1}(t_1)n(x, t_1). \quad (37)$$

This defines the linear time evolution operator $\hat{S}(t_2; t_1) = \hat{S}(t_2)\hat{S}^{-1}(t_1)$ which gives us the PDF at the time t_2 provided the PDF at the time t_1 is known.

Let us first find the explicit form of the $\hat{S}(t_2; t_1)$ operator and then discuss the difference between this aging problem, and the first one, considered above. The time evolution operator, $\hat{S}(t_2; t_1)$, follows from the explicit form of the solution of the transport equation via the Green's functions method: it is the integral operator containing the Green's functions of the standard CTRW equation, $G(x, x', t)$. Let us recall the form of the transport equation for CTRW without aging, i.e. all particles were introduced at $t = 0$ without history (the first part of Eq. (10) or Eq. (18)):

$$\dot{n}(x, t) = \int_0^t \Phi(t - \tau) \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) [n(x - y, \tau) - n(x, \tau)] dy d\tau. \quad (38)$$

The Green's function is defined as the solution of the above equation with $n(x, t = 0) = \delta(x - x')$. Then, for arbitrary initial distribution $n_0(x)$ we can write:

$$n(x, t) = \hat{S}(t)n(x, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, x', t)n_0(x')dx'. \quad (39)$$

For the homogeneous situation considered here, the Green's function depends only on the difference of its spatial variables: $G(x, x', t) = G(x - x', t)$. Therefore, the solution can be found as a convolution of the initial condition with the Green's function. By denoting the convolution operation with $*$, we can write $\hat{S}(t) = G(x, t)*$, i.e.

$$n(x, t) = \hat{S}(t)n_0(x) \equiv G(x, t) * n_0(x). \quad (40)$$

The PDFs of the particles' distributions at time t_1 and $t_2 = t_1 + t$ are thus given by

$$\begin{aligned} n(x, t_1 + t) &= G(x, t_1 + t) * n_0(x), \\ n(x, t_1) &= G(x, t_1) * n_0(x). \end{aligned} \quad (41)$$

Under the Fourier transforms, convolutions are changed into simple products of Fourier components:

$$\begin{aligned} n_k(t_1 + t) &= G_k(t_1 + t_2)n_{0,k}, \\ n_k(t_1) &= G_k(t_1)n_{0,k}. \end{aligned} \quad (42)$$

*This is essentially the idea used in Ref. [29]. However, the technical implementation of this idea is faulty. This can be seen when considering Eq. (18) of Ref. [29]. We note that taking $t_2 = t_1 = t$ in this equation has to give $W(X_2, t; X_1, t) = \delta(x_2 - x_1)$: the particle cannot be at two different points at the same time. On the other hand we note that due to the completeness of the system of eigenfunctions of the corresponding Hermitian operators we have $\sum_n \psi_n(X_1)\psi_n(X_2) = \delta(x_2 - x_1)$. Due to the uniqueness of the eigenfunction expansion this expression and Eq. (18) with $t_2 = t_1 = t$ are compatible only in the case when $E_\alpha(z)E_\alpha(-z) = 1$, which can be proven wrong for whatever $\alpha \neq 1$. A trivial example is given by $E_{1/2}(z) = e^{z^2}[1 + \text{erf}(z)]$. Thus the assumption that backward propagator is the solution of the fractional backwards Kolmogorov equation seems to be not a quite transparent choice in all cases except for the trivial Markovian one where $E_1(z) = \exp(z)$.

From these two we formally find:

$$n_k(t_1 + t) = \frac{G_k(t_1 + t)}{G_k(t_1)} \cdot n_k(t_1), \quad (43)$$

and now write the time evolution operator $\hat{S}(t_2, t_1) = \hat{S}(t_2)\hat{S}^{-1}(t_1)$ as an integral convolution operator $T(x, t_2, t_1)^*$ with the integral kernel being the inverse Fourier transform of $G_k(t_1 + t)/G_k(t_1)$.

For the CTRW model its Green's function can be easily found analytically [3], so that also the corresponding operator $\hat{S}(t_2, t_1)$ can be immediately calculated. The Green's function for a CTRW equation (the solution of (38)) in the Fourier-Laplace space is

$$G_{k,p} = \frac{1 - \psi_p}{p(1 - \psi_p g_k)}. \quad (44)$$

We can now compare the resulting density distributions obtained in the two aging problems, namely Eq. (18) and (43). To do this we analyze the difference of the two densities $\delta n(x, t) = n^G - n^A$, with n^G being the PDF predicted by the Green's function approach (43), and n^A being the one given by the probabilistic approach (18) of Section 1.2. In particular we concentrate on the behavior of moments of the density difference defined as $\langle x^n \rangle_{\delta n} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \delta n dx$.

As an example we consider the following situation. Imagine that the system evolved starting from a sharp (delta-function) initial condition $n(x, t = 0) = \delta(x)$. In this case the particles' distribution at $t = t_1$ is given by the inverse Fourier transform of $n_k(t_1) = G_k(t_1)$. This distribution is now used as the intermediate-time initial condition at $t = t_1$ in both approaches, in the one of Sec. 1 and in the one of the present Section. Then the results of these two approaches are compared. Eq. (43) reduces in this case to a simple formula $n_k^G(t + t_1) = G_k(t + t_1)$.

Omitting the details of rather tedious calculations, we can show that the second moment of the density difference, $\langle x^2 \rangle_{\delta n}$, is equal to zero. However, already the next even moment, $\langle x^4 \rangle_{\delta n}$, deviates from zero. The final expression for the fourth moment of the density difference reads:

$$\begin{aligned} \langle x^4 \rangle_{\delta n} &= 24 \frac{\sin \pi \gamma}{\pi \gamma \Gamma(\gamma)^2} \int_0^t \frac{d\tau}{(t - \tau)^{1-\gamma}} \times \\ &\times \int_0^{t_1} \left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)^{1-\gamma} \frac{1}{\tau_1 + \tau} [t_1^\gamma - (t_1 - \tau_1)^\gamma] d\tau_1. \end{aligned} \quad (45)$$

In Fig. 4 we plot $\langle x^4 \rangle_{\delta n}$ given by (45) as a function of time for three different aging times, for the case $\gamma = 1/2$ (γ is the exponent in the power law tail of the waiting

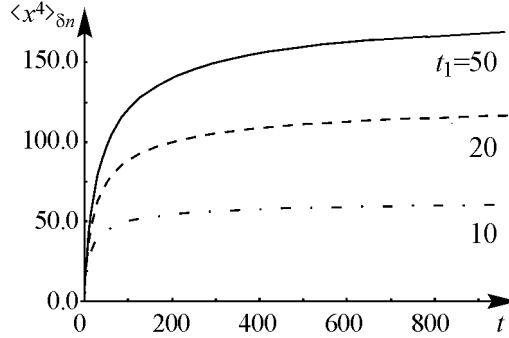


Fig. 4. The fourth moment of $\delta n(x, t) = n^G - n^A$, as a function of time, t , for different aging times t_1 and $\gamma = 1/2$. Its deviation from zero shows the difference between the prediction given by Eq. (18) as compared to the Green's function result (43).

time distribution). These findings show that the approach based on the backward-forward propagation delivers a result which is different from the one given by the approach of Sec. 1. It is also necessary to stress, that the aged propagator $n(x, t, t_1)$ given by (18) is *not* the Green's function of aged anomalous diffusion, since it does not reproduce the PDF of the particles exactly. The Gaussian situation showing no aging is the only one when the both approaches are equivalent (and give the same result): in this case $G_k(t) \propto \exp(-Dk^2t)$ so that $G_k(t_1 + t)/G_k(t_1) = G_k(t)$.

Let us discuss some implications of the two approaches. The Green's function approach utilizes more information about the intermediate stage of the system (the full knowledge of the whole distribution) and corresponds to a different nonequilibrium statistical ensemble than the one of Sec. 1. On the other hand, the approach of Sec. 1 assumes no knowledge about the initial condition, i.e. essentially starts from the assumption that at $t = 0$ the distribution of particles in space was uniform (which is the most reasonable assumption about the state of the statistical system provided no additional information is given and corresponds exactly to the Jaynes' information approach to statistical mechanics [34]). It is clear that the homogeneous distribution does not evolve in course of the time and stays uniform up to the time $t = t_1$. At $t = t_1$ we choose some profile $n(x, t = t_1)$ from this distribution (see the Fig. 2) and follow its evolution.

As we have mentioned above, the physical reason for being able to predict exactly the dynamics of particles after a measurement, is the precise knowledge of their exit times. The Green's function approach uses this information only indirectly, just propagating the profile back and then forward and automatically provides the corresponding distributions. This approach is not literally applicable in a whatever case when the intermediate time density distribution is not a full profile resulting from the previous evolution of some initial density. There exist, however methods which work with microscopic distributions directly and can be applied to such cases as well. The first one is based on the generalized transport equation with microscopic details taken into account [21], another one considers two-point probability distributions [31, 35]. Both of these more general approaches (not restricted to the aging problems) give answers corresponding to the Green's function approach when starting from a concentrated initial condition (and therefore for a whatever exactly known one). Moreover, these approaches allow for the full solution of the aging problem in the setup of the Sec. 1, where the exit times after the measurement tend to be independent of coordinate. The results for the equilibrated walks provided by methods of Refs. [21, 31] and by that of the Sec. 1 coincide since the information about the initial state of the system is forgotten.

It is important to state that the two ensembles corresponding to the two approaches discussed in this work are not the only two alternatives, but two of a quite broad spectrum of possibilities. They provide however the two limiting situations: the full knowledge and no knowledge about this distribution. There are various situations possible, when the distribution of the particles' positions at the intermediate time is known to some extent or with some uncertainty, in which case the results for aging will depend on what exactly was measured at $t = t_1$ and what the precision of this measurement was.

Conclusions

Summarizing our findings, we have derived a general equation for the PDF of the particle's position in aging CTRW, corresponding to the «intermediate-time initial condition» setup, in which the coordinate of the particle is measured at some time t_1 after

the preparation of the system considered to take place at $t = 0$. We were able to express the second memory function, describing the dissolving of the initial condition, through the memory kernel of the CTRW equation. We discussed the ensuing forms of the transport equation for the case of CTRW with power-law waiting time distributions lacking the first moment, as well for the equilibrating situations, where the first moment exists. We have shown that the exact form of the corresponding equation for equilibrating walks depends on whether the second moment of the waiting time distribution exists or not. In the first case, the normal diffusion equation appears, in the second case, the evolution is described by the diffusion equation with distributed-order temporal derivative and with a very slowly dissolving second memory function following the power law. The asymptotic behavior of the higher moments of the density profile for this case was also calculated and indicated a slow convergence to the Gaussian behavior.

Moreover, as we tried to show, the problem of aging is a very delicate task even in the framework of exactly solvable model of CTRW. To illustrate this we have considered and solved another possible aging setup corresponding to the full knowledge of the PDF of the particles' positions at time t_1 after the preparation of the system at $t = 0$. The two setups give different predictions for the evolution of the particles density and correspond to different experimental realizations. This shows that there is still a room for further developments in the area. One of those is the question of the prediction of the evolution based on an incomplete intermediate-time initial condition. This work is currently in progress.

We would like to thank Profs. J. Klafter and E. Barkai for useful discussions. IMS thankfully acknowledges the financial support by DFG within the SFB555 research project.

References

1. *Montroll E.W. and Shlesinger M.F.* Nonequilibrium Phenomena II: From Stochastic to Hydrodynamics. In «Studies in Statistical Mechanics». / Eds. J. Leibowitz and E.W. Montroll. North-Holland, Amsterdam, 1984. Vol. 11. 1.
2. *Haus J.W. and Kehr K.W.* Phys. Rep. 1987. Vol. 150, № 5-6. 263.
3. *Metzler R. and Klafter J.* Phys. Rep. 2000. Vol. 339, № 1. 1.
4. *Bouchaud J.P. and Georges A.* Phys. Rep. 1990. Vol. 195, № 4-5. 127.
5. *Struick L.C.E.* Physical Aging in Amorphous Polymers and Other Materials. Elsevier, Houston, 1978.
6. *Bouchaud J.P., Cugliandolo L.F., Mézard M., and Kurchan J.* In «Spin Glasses and Random Fields». Edited by A.P. Young. Singapore: World Scientific, 1997.
7. *Dupuis V., Bert F., Bouchaud J.P., Hammann J., Ladieu F., Parker D., and Vincent E.* PRAMANA-J. Phys. 2006. Vol. 64, № 6. 1109.
8. *Bellour M., Knaebel A., Harden J.L., Lequeux F. and Munch J.P.* Phys. Rev. E. 2003. Vol. 67, № 3. 031405.
9. *Abou B., Bonn D., and Meunier J.* Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64, № 2. 021510.
10. *Ovarlez G., Clement E.* Phys. Rev. E. 2003. Vol. 68, № 3. 031302.
11. *Josserand C., Tkachenko A.V., Mueth D.M., and Jaeger H.M.* Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 85, № 17. P. 3632.
12. *Havlin S., Kiefer J.E., and Weiss G.H.* Phys.Rev. A. 1987. Vol. 36, № 3. 1403.

13. *P. Le Doussal, Monthus C. and Fisher D.S.* Phys. Rev. E. 1999. Vol. 59, № 5. 4795.
14. *Aquino G., Bologna M., Grigolini P., and West B.J.* Phys. Rev. E. 2004. Vol. 70, № 3. 036105.
15. *Allegrini P., Aquino G., Grigolini P., Palatella L., and Rosa A.* Phys. Rev. E. 2003. Vol. 68, № 5. 056123.
16. *Barkai E.* Phys. Rev. Lett. 2003. Vol. 90, № 10. 104101.
17. *Barkai E. and Cheng Y.C.,* J. Chem Phys. 2003. Vol. 118, № 14. 6167.
18. *Sokolov I.M., Blumen A. and Klafter J.* Europhys. Lett. 2001. Vol. 56. 175; *Sokolov I.M., Blumen A. and Klafter J.* Physica A. 2001. Vol. 302. 268.
19. *Monthus C. and Bouchaud J.P.* J. Phys. A: Math. and Gen. 1996. Vol. 29, № 14. 3847.
20. *Havlin S. and Ben-Avraham D.* Adv. Phys. 2002. Vol. 51, № 1. 187.
21. *Zaburdaev V.Yu. and Chukbar K.V.* JETP Lett. 2003. Vol. 77. 551.
22. *Chechkin A.V., Gorenflo R. and Sokolov I.M.* J. Phys. A: Math. and Gen. 2005. Vol. 38. L679-L684.
23. *Gordeche C. and Luck J.M.* J. Stat. Phys. 2001. Vol. 104. 489.
24. *Scalas E., Gorenflo R., and Mainardi F.* Phys. Rev. E. 2004. Vol. 69. 011107.
25. *Sokolov I.M., Chechkin A.V., and Klafter J.* Acta Physica Polonica B. 2004. Vol. 35. 1323.
26. *Tunaley J.K.E.* Phys. Rev. Lett. 1974. Vol. 33. 1037.
27. *Tunaley J.K.E.* J. Stat. Phys. 1976. Vol. 14. 461.
28. *Mantegna R.N. and Stanley H.E.* Phys. Rev. Lett. 1994. Vol. 73. 2946.
29. *Sokolov I.M., Chechkin A.V. and Klafter J.* Physica A. 2004. Vol. 336. 245.
30. *Barsegov V. and Mukamel S.* J. Phys. Chem. A. 2004. Vol. 108. 15.
31. *Barkai E. and Sokolov I.M.* J. Stat. Mech. 2007. P08001.
32. *Chukbar K.V.* JETP. 1995. Vol. 81. 1025.
33. *Zaburdaev V.Yu. and Chukbar K.V.* JETP. 2002. Vol. 94. 252.
34. *Jaynes E.T.* Phys. Rev. 1957. Vol. 106. 620.
35. *Baule A. and Friedrich R.* Europhys. Lett. 2007. Vol. 77. 10002.

Поступила в редакцию 13.07.2009

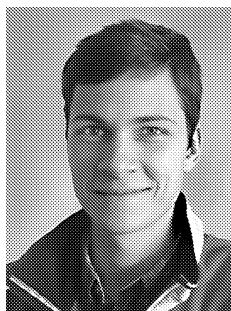
ДРОБНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ ДЛЯ СТАРЕЮЩИХ И РАВНОВЕСНЫХ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДЕНИЙ

В.Ю. Забурдаев, И.М. Соколов

В настоящей работе рассматриваются случайные блуждания с непрерывным временем в ситуациях, описывающих старение процесса. Такие ситуации встречаются в том случае, если начальные условия известны не в момент приготовления системы ($t = 0$), а в более поздний промежуточный момент времени при $t > 0$. Для этого случая нами выведено обобщенное уравнение диффузии, содержащее одно ядро памяти. Полученное уравнение использовано для описания важного специального

случая блужданий в состоянии равновесия. Кроме того, обсуждены особенности различных постановок задач для проблем субдиффузии со старением и показано, что поведение системы зависит от того, как именно ставятся начальные условия в промежуточный момент времени: задана ли координата одной частицы (определенная измерением) или полная форма распределения вероятностей положений частиц. Такие две постановки задач ведут к различным предсказаниям о дальнейшей эволюции системы. Полученный результат подчеркивает важность правильного определения статистического ансамбля для стареющих систем.

Ключевые слова: Случайные блуждания с непрерывным временем, обобщенное уравнение диффузии, старение, статистический ансамбль.



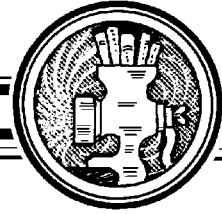
Забурдаев Василий Юрьевич – родился (1979) в Москве, в 2002 году окончил Институт естественных наук и экологии (в настоящее время – факультет нано-, био-, информационных и когнитивных технологий МФТИ). По окончании института работал в Российском научном центре «Курчатовский Институт». В 2003 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в области теории аномальных процессов переноса в плазме. После защиты диссертации 3 года работал в институте Макса Планка в Гёттингене (Германия). Занимался исследованием динамики мокрых гранулярных сред. С 2007 года работает в институте теоретической физики Технического университета Берлина. Является автором 20 научных статей по проблемам транспортных процессов в плазме, нелинейной физики, аномальной диффузии и стохастического транспорта. Стипендиат Президента РФ и Фонда Сороса. Лауреат премии имени И.В. Курчатова.

Hardenbergstrasse 36 D-10623 Berlin Germany
Institut für Theoretische Physik, Technische Universität Berlin
E-mail: vasily.zaburdaev@tu-berlin.de



Соколов Игорь Михайлович – родился (1958) в Москве, окончил физический ф-т МГУ (1981). Работал в отделе теоретической физики ФИАН, в настоящее время является профессором Гумбольдтского университета в Берлине (Германия). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1984, МГУ), получил докторскую степень во Фрайбургском университете (1995). Научные интересы в области теории неупорядоченных систем, нелинейной динамики, физики полимеров, кинетики. Автор более 200 научных статей, монографии «Статистическая термодинамика и стохастическая теория неравновесных систем» (в соавторстве с В. Эбелингом), редактор монографии «Аномальный транспорт» (совместно с Р. Клагесом и Г. Радонсом) Член редакционной коллегии «Среднеевропейского физического журнала».

Newtonstrasse 15 D-12161 Berlin Germany
Institut für Physik Humboldt-Universität zu Berlin
E-mail: igor.sokolov@physik.hu-berlin.de



ЭНТРОПИЯ И ПРОГНОЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ В ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.Ю. Лоскутов, А.А. Козлов, Ю.М. Хаханов

В работе дается современный взгляд на такие понятия, как размерность и энтропия динамических систем. Описание данных характеристик включает в рассмотрение другие представления и свойства, относящиеся к сложному поведению нелинейных систем – размерность вложения, горизонт предсказуемости и др., которые также используются в работе. Изучается вопрос о возможности применения этих концепций к реальным наблюдаемым экономического происхождения – ценам акций компаний Schlumberger, Deutsche Bank, Honda, Toyota, Starbucks, BP. С помощью метода сингулярного спектрального анализа дается прогноз цен акций в различных фазах экономического цикла – предкризисный и кризисный периоды. Определены основные ограничения использования этого метода.

Ключевые слова: Энтропия, временные ряды, хаос, размерность.

Введение

В современной науке все больше внимания уделяется теории динамических систем. Однако, если ранее многие концепции и базовые математические модели приходили в эту область из физики, химии, гидродинамики, то теперь их основными поставщиками становятся экономика, биология, психология и другие дисциплины, связанные с анализом сложных систем и порождаемых ими временных рядов. При этом необходимо заметить, что концепция развития современной науки предполагает междисциплинарный подход и непрерывный поиск новой парадигмы, в том числе и на основе нелинейной динамики. Здесь уместно привести пример развития современных экономических учений.

В экономической теории многие финансовые показатели ввиду сложности описания рыночных систем часто рассматриваются как случайные величины. Поэтому финансовые временные ряды традиционно анализируются с помощью статистических методов и моделей. Среди них наиболее известны авторегрессия и скользящее среднее. Такой подход очень распространен, но он не дает ключ к пониманию природы изменчивости рынков капитала и вопроса о предсказании колебания цен. Для этой задачи более успешно, по-видимому, может быть использована теория динамических систем [1], также именуемая теорией хаоса [2–4] или нелинейной

динамикой [5]. Эти исследования насчитывают историю значительно более короткую, нежели статистический анализ, особенно в применении к экономической теории [6,7]. Однако сейчас можно надеяться, что методы нелинейной динамики в сочетании с уже выполненными экономическими исследованиями приведут к созданию новых моделей рынков капитала.

Необходимо также отметить, что в настоящее время активно развивается такой раздел математической физики, как анализ временных рядов [8,9], вобравший в себя методы теории динамических систем и фрактального анализа [10]. Подобный анализ все чаще применяется в экономике для обработки информации в виде временных рядов котировок акций компаний. Это связано с тем, что рынок ценных бумаг нестабилен, так что предсказать динамику котировок чрезвычайно сложно. Однако для хаотических динамических систем это типичная ситуация. Экспоненциальное разбегание близких траекторий для класса хаотических аттракторов определяется старшим ляпуновским показателем, а скорость «расползания» элемента фазового объема – энтропией. Вычислив любую из этих величин, можно получить значение горизонта прогноза для данного временного ряда и/или поведения системы в целом. Кроме того, методы теории динамических систем, применяемые к финансовым временным рядам, позволяют найти размерность вложения, то есть минимальное число динамических переменных, однозначно описывающих наблюдаемый процесс. Если размерность вложения конечна, это указывает на конечномерность рассматриваемого процесса и дает возможность определить число главных факторов на исследуемом сегменте рынка.

Нельзя отрицать, что в условиях быстро меняющегося рынка любой способ получения дополнительной информации может принести пользу ее обладателю, так как цена принимаемых решений здесь очень велика. Таким образом, методы анализа временных рядов, пришедшие из нелинейной динамики, могут оказать неоценимую помощь на рынке ценных бумаг. Тем более что при правильном нахождении размерности вложения и горизонта предсказания построение корректного прогноза не представляет особого труда. В данной работе для этого используется довольно известный глобальный метод прогноза – сингулярный спектральный анализ (ССА).

1. Нелинейная динамика и теория временных рядов

Скалярным временным рядом называется массив из N чисел, представляющих собой значения некоторой измеренной (наблюдаемой) динамической переменной $x(t)$ с некоторым постоянным шагом Δt по времени, то есть взятые в моменты $t_i = t_0 + (i - 1)\Delta t : x_i = x(t_i), i = 1, \dots, N$. В теории временных рядов возможны два различных случая, связанных с наличием информации о порождающей их системе. Если математические модели, описывающие систему, известны (например, в астрономии), то обработка временных рядов представляет собой нахождение параметров, входящих в известные нам уравнения. Во втором случае возникают принципиальные трудности, так как математический объект, который следует поставить в соответствие полученным данным (например, финансовым временным рядам), неизвестен. Таким образом, выделяются две основные задачи анализа временных рядов: задача идентификации и задача прогноза.

Задача идентификации предполагает ответ на вопрос, каковы параметры системы, породившей данный временной ряд – размерность вложения, корреляционная размерность, энтропия и др. Рассмотрим смысл каждой искомой величины.

Размерность вложения – это минимальное число динамических переменных, однозначно описывающих наблюдаемый процесс. Эта величина очень важна для построения прогноза и ее нахождению посвящен весь следующий раздел. *Корреляционная размерность* является оценкой фрактальной размерности аттрактора системы и частным случаем обобщенной вероятностной размерности, которая в дальнейшем также будет обсуждаться.

Понятие энтропии связано с *предсказуемостью* значений ряда и всей системы. Заметим, что предсказуемость можно понимать в двух смыслах: 1) объемном, то есть как нарастает фазовый объем первоначальной погрешности и 2) линейном, то есть как нарастает разница между истинной и возмущенной траекторией. *Энтропия* K связана с первой трактовкой предсказуемости и определяет *время предсказуемости* для динамической системы

$$T_p \sim \frac{1}{K} \log \frac{1}{\varepsilon},$$

где ε – относительная погрешность данных о ее состоянии. Вторая трактовка связана с понятием показателей Ляпунова λ_i . В этом случае также можно ввести время предсказуемости

$$T_\lambda \sim \frac{1}{\lambda_{\max}} \log \frac{1}{\varepsilon}.$$

По порядку величины обе эти оценки совпадают. На практике, однако, значение времени предсказуемости считают по несколько упрощенным формулам: $T_p \sim K^{-1}$ и $T_\lambda \sim \lambda_{\max}^{-1}$. В данной работе мы будем использовать первую из них.

Задача прогноза имеет целью по данным наблюдений предсказать будущие значения измеряемых характеристик изучаемого объекта, то есть составить прогноз на некоторый отрезок времени вперед. Сейчас разработано и обосновано несколько различных *методов прогноза*. Однако все они подразделяются на два основных класса, которые включают только локальные и глобальные методы. Такое деление проводится по области определения параметров аппроксимирующей функции, рекуррентно устанавливающей следующее значение временного ряда по нескольким предыдущим [5].

Исторически первыми были разработаны глобальные методы, когда были предложены первые подходы к решению задач прогноза, связанные с использованием статистического анализа: авторегрессия, скользящее среднее и др. Позже на основе нелинейной динамики были обоснованы новые практические методики:

- сингулярный спектральный анализ – глобальный метод [11];
- локальная аппроксимация – локальный метод [12];
- локальная аппроксимация с использованием сингулярного спектрального анализа – глобально-локальный подход [13].

Исследование временных рядов базируется на идее реконструкции аттрактора динамической системы, породившей данный временной ряд. Дело в том, что удовлетворительную геометрическую картину странного аттрактора можно получить, если вместо переменных x_i , входящих в уравнения динамической системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, использовать m -мерные векторы следующего вида (то есть *векторы задержек*) [14]:

$$\mathbf{z}_i = \{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1}\}.$$

Такой подход к анализу временных рядов впервые был математически обоснован в работах Ф. Такенса [15]. Чтобы более наглядно представить содержание этой теории, дадим вначале некоторые пояснения.

Пусть динамическая система задана как $\varphi^t(\mathbf{x})$ с фазовым пространством \mathbf{P} . Величины, образующие временной ряд, являются значениями некоторой скалярной функции состояния динамической системы $\mathbf{x}(t)$ на многообразии M^d из \mathbf{P} : $x_i = h(\mathbf{x}(t_i)) = h(\varphi^{t_i}(\mathbf{x}_0))$. Рассмотрим построение векторов задержки \mathbf{z} , если временной шаг равен τ . Очевидно, для векторов состояния $\mathbf{x}(t_i) = \mathbf{x}_i$ верны равенства

$$\mathbf{x}_{i+1} = \varphi^\tau(\mathbf{x}_i), \quad \mathbf{x}_{i+2} = \varphi^{2\tau}(\mathbf{x}_i), \quad \dots, \quad \mathbf{x}_{i+m-1} = \varphi^{(m-1)\tau}(\mathbf{x}_i).$$

Поэтому для компонент \mathbf{z} -векторов задержки получим

$$\begin{aligned} x_i &= h(\mathbf{x}_i) \equiv \Phi_0(\mathbf{x}_i), \\ x_{i+1} &= h(\mathbf{x}_{i+1}) = h(\varphi^\tau(\mathbf{x}_i)) \equiv \Phi_1(\mathbf{x}_i), \\ x_{i+2} &= h(\mathbf{x}_{i+2}) = h(\varphi^{2\tau}(\mathbf{x}_i)) \equiv \Phi_2(\mathbf{x}_i), \\ &\dots, \\ x_{i+m-1} &= h(\mathbf{x}_{i+m-1}) = h(\varphi^{(m-1)\tau}(\mathbf{x}_i)) \equiv \Phi_{m-1}(\mathbf{x}_i). \end{aligned}$$

Таким образом, поскольку все компоненты вектора $\mathbf{z}_i = \{x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i+m-1}\}$ можно связать с одним и тем же состоянием динамической системы \mathbf{x}_i , то существует векторная функция Λ , отображающая векторы $\mathbf{x}_i \in M^d$ в векторы m -мерного евклидова пространства \mathbb{R}^m

$$\mathbf{z}_i = \Lambda(\mathbf{x}_i), \quad \mathbf{x}_i \in M^d, \quad \mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^m.$$

Приведенные рассуждения и составляют основное содержание теоремы Такенса [15], утверждающей, что при $m \geq 2d + 1$ типичным свойством отображения Λ является *вложение* M^d в \mathbb{R}^m . Другими словами, образ M^d в \mathbb{R}^m ($S^d = \Lambda(M^d)$) не имеет самопересечений. При этом функция Λ дифференцируема и имеет обратную дифференцируемую функцию Λ^{-1} , определенную на S^d : $M^d = \Lambda^{-1}(S^d)$. Тогда на S^d можно определить динамическую систему, так как $\mathbf{x}_i = \Lambda^{-1}(\mathbf{z}_i)$, а $\mathbf{x}_{i+1} = \varphi^\tau(\mathbf{x}_i)$,

$$\mathbf{z}_{i+1} = \Lambda(\mathbf{x}_{i+1}) = \Lambda(\varphi^\tau(\Lambda^{-1}(\mathbf{z}_i))) \equiv \Psi(\mathbf{z}_i), \quad \mathbf{z}_i \in S^d,$$

где функция Ψ отображает S^d в S^d . Легко видеть, что, если в этом соотношении оставить последнюю компоненту, то получим другой вариант – покомпонентный – записи временного ряда: $x_i = F(x_{i-1}, \dots, x_{i-m})$. Данное соотношение можно использовать для решения задачи прогнозирования, так как для этого требуется знать только величину m – размерность вложения.

Таким образом, мы имеем два отображения: $\mathbf{x}_{i+1} = \varphi^\tau(\mathbf{x}_i) \equiv \Phi(\mathbf{x}_i)$, $\mathbf{x} \in M^d$, и $\mathbf{z}_{i+1} = \Psi(\mathbf{z}_i)$, $\mathbf{z} \in S^d$. Так как $\mathbf{z} = \Lambda(\mathbf{x})$, то это всего лишь различные представления одного и того же отображения. Поэтому характеристики, инвариантные относительно невырожденной замены, у обеих систем должны совпадать. Отсюда следует, что фрактальную размерность аттрактора, энтропию динамической системы и некоторые другие инвариантные характеристики можно определить по измеряемым величинам, то есть по соответствующим временным рядам.

2. Размерность вложения и метод корреляционного интеграла

Первыми работами, где была рассмотрена задача идентификации для диссипативных динамических систем, явились статьи П. Грассбергера и И. Прокачиа [16,17]. Используя понятие корреляционного интеграла, они разработали метод оценки размерности вложения и фрактальной размерности аттрактора динамической системы по временному ряду некоторой наблюдаемой.

Будем регистрировать некоторую скалярную величину x через равные промежутки времени τ . Тогда получим соответствующую последовательность длины N : $x_i = x(t + (i-1)\tau)$, $i = 1, \dots, N$. Выделим из этой последовательности все подпоследовательности длины m и построим набор из $n = N - (m-1)$ векторов задержек $\mathbf{z}_i = \{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+(m-1)}\}$. Теперь определим расстояние $\rho_m(i, j)$ для любой пары $\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j$ таких векторов

$$\rho_m(i, j) = \|\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j\| = \left[\sum_{l=0}^{m-1} (x_{i+l} - x_{j+l})^2 \right]^{1/2}.$$

Далее выберем некоторое значение r и рассчитаем *корреляционный интеграл*

$$C^{(m)}(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2} \sum_{i,j=1}^n \Theta[r - \rho_m(i, j)].$$

где $\Theta(x)$ – ступенчатая функция Хевисайда. Важное свойство корреляционного интеграла, отмеченное в работах [16, 17] – его скейлинговое поведение при малых r : $C(r) \sim r^\nu$, где ν – *корреляционная размерность*. Эта величина тесно связана с фрактальной размерностью аттрактора d , которая может быть введена следующим образом.

Предположим, что нам нужно покрыть аттрактор (гипер)кубами с длиной стороны l . Так как в типичном случае аттрактор является фракталом, то число всех кубов, содержащих точки аттрактора, будет порядка $M(l) \sim l^{-d}$. Пусть μ_i ($i = 1, 2, \dots, M(l)$) – число точек из набора \mathbf{z}_j ($j = 1, 2, \dots, n$), которые лежат в i -м кубе. Тогда можно записать

$$C(l) \sim \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{M(l)} \mu_i^2 = \frac{M(l)}{n^2} \langle \mu^2 \rangle.$$

Используя неравенство Шварца $\langle \mu^2 \rangle \geq \langle \mu \rangle^2$, получаем

$$C(l) \geq \frac{M(l)}{n^2} \langle \mu \rangle^2 = \frac{1}{n^2 \cdot M(l)} \left[\sum_{i=1}^{M(l)} \mu_i \right]^2 = \frac{1}{M(l)} \sim l^d.$$

Отсюда, поскольку $C(l) \sim l^\nu$ и $l \ll 1$, получим: $\nu \leq d$. Таким образом, корреляционная размерность всегда не превышает значение фрактальной размерности аттрактора. Однако на практике было замечено, что значения ν и d часто очень близки, особенно когда точки \mathbf{z}_i распределены по аттрактору практически равномерно. В этом случае метод корреляционного интеграла дает хорошую оценку для фрактальной

размерности аттрактора. Кроме того, варьируя размерность векторов задержки m , можно получить неплохую оценку размерности вложения.

Вернемся к описанию метода. Согласно определению, корреляционный интеграл $C^{(m)}(r)$ учитывает только те пары векторов \mathbf{z}_i и \mathbf{z}_j , расстояние между которыми меньше или равно r . Поэтому при малых r имеется тенденция $C^{(m)}(r) \rightarrow 0$ по закону $C^{(m)}(r) \sim r^{\nu_m}$. Таким образом, величины ν_m можно найти, построив графики зависимостей $\ln C^{(m)}(r)$ от $\ln r$ для каждого m , начиная с $m = 1$. Тогда с ростом m величина ν_m , начиная с некоторого номера, перестает возрастать. Это значение m дает *размерность вложения* d_e , а предельный тангенс угла наклона ν_m – *корреляционную размерность* d_c аттрактора исследуемой динамической системы.

3. Общие подходы к определению энтропии и размерностей динамических систем

Энтропия – это, в известном смысле, мера упорядоченности системы. В настоящее время для описания этого свойства в том или ином контексте используется большое количество различных характеристик, также называющихся энтропией. Так, в теории информации энтропия H вводится для систем, которые могут находиться в некоторых состояниях \mathbf{x}_i с некоторыми вероятностями $p_i = p(\mathbf{x}_i)$, с помощью формулы Шеннона:

$$H = - \sum_i p_i \log p_i . \quad (1)$$

Похожим образом можно дать определение *метрической энтропии* динамической системы или *энтропии Колмогорова–Синая*. Благодаря этому понятию удалось строго сформулировать абсолютный критерий хаотической динамики системы как неустойчивого по Ляпунову движения с положительной метрической энтропией.

Пусть динамическая система представлена отображением $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ на компактном множестве \mathbf{A} . Пусть также задано разбиение \mathbf{A} на конечное число измеримых множеств A_i . Будем обозначать множество точек, отображаемых в A_i преобразованием \mathbf{f}^k , как $\mathbf{f}^{-k}(A_i)$. Не выписывая все разбиения, порождаемые таким обратным отображением, опишем общий случай: на m -м шаге разбиение на $A_{i_1 i_2 \dots i_m}^{(m)} = A_{i_1} \cap \mathbf{f}^{-1}(A_{i_2}) \cap \mathbf{f}^{-2}(A_{i_3}) \cap \dots \cap \mathbf{f}^{-(m-1)}(A_{i_m})$ – это те точки из множества A_{i_1} , которые на следующих $(m - 1)$ шагах попадут последовательно в $A_{i_2}, A_{i_3}, \dots, A_{i_m}$.

Вычислим энтропию каждого разбиения по аналогии с формулой Шеннона

$$H^{(m)} = - \sum_{i_1 i_2 \dots i_m} p(A_{i_1 i_2 \dots i_m}) \log p(A_{i_1 i_2 \dots i_m}).$$

Если обозначить $\varepsilon = \max_i \text{diam} A_i$, то энтропия динамической системы определится как

$$K = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} (H^{(m+1)} - H^{(m)}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} H^{(m)} . \quad (2)$$

Иными словами, энтропия задается как асимптотический прирост неопределенности для разбиения бесконечно малого диаметра. Заметим, что на практике приведенное определение энтропии никогда не используется для расчета. Вместо этого энтропия обычно оценивается при помощи ляпуновских показателей, либо рассчитывается

аппроксимирующая ее величина K_2 через корреляционный интеграл. Эту величину можно ввести следующим образом.

Рассмотрим так называемую *обобщенную энтропию* (или *энтропию Реньи*) H_q :

$$H_q = \frac{1}{1-q} \log \left(\sum_i p_i^q \right). \quad (3)$$

Энтропия Шеннона (1) является ее частным случаем при $q \rightarrow 1$. Используя эту величину, можно также ввести *обобщенную размерность* D_q и величину K_q , которая называется *обобщенной энтропией динамической системы*, наиболее общим образом характеризующей меру неупорядоченности системы. Именно, если подставить в определение энтропии K (2) величину H_q вместо H , то

$$K_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(H_q^{(m+1)} - H_q^{(m)} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} H_q^{(m)}.$$

Одно из важнейших свойств этого инварианта можно записать, как

$$K = K_1 \leq K_2 \leq \dots \leq K_{q-1} \leq K_q \leq \dots, \quad (4)$$

где K – энтропия Колмогорова–Синяя. Таким образом, энтропию Колмогорова–Синяя можно оценить сверху, если найти K_i , $i = 2, 3, \dots$

Обобщенная размерность D_q определяется следующим образом:

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{H_q(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \right).$$

Поясним смысл обобщенной размерности D_q для различных q . Если $q = 0$, то $p_i^q = 1$ и, следовательно, получим определение фрактальной размерности $D_0 = d_F$. Если $q = 1$, то числитель и знаменатель в соотношении (3) обращаются в нуль, поскольку $\sum p_i = 1$. Однако нетрудно показать, что в этом случае

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum p_i \ln p_i}{\ln \varepsilon}.$$

Поскольку соотношение $\sum p_i \ln p_i$ определяет энтропию, то величина D_1 показывает, как при $\varepsilon \rightarrow 0$ возрастает количество информации о рассматриваемом множестве. Поэтому D_1 называется *информационной размерностью*. Если $q = 2$, то

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sum p_i^2}{\ln \varepsilon}.$$

Выражение p_i^2 – это вероятность того, что по крайней мере две точки находятся в i -й ячейке. Следовательно, значение D_2 определяется через бинарные корреляции в распределении вероятностей. Поэтому величину D_2 называют *корреляционной размерностью*.

Для расчетов обобщенных величин вводится понятие *обобщенного корреляционного интеграла*

$$C_q(\varepsilon) = \left(\sum p_i^q \right)^{1/(q-1)}.$$

Так как $-\ln C_q^{(m)}(\varepsilon) = H_q^{(m)}(\varepsilon)$, то C_q – это всего лишь переобозначение H_q , и связи с другими обобщенными величинами сохраняются. При этом обобщенный корреляционный интеграл удобен тем, что для случая $q = 2$ его вид существенно упрощается

$$C_2(\varepsilon) \equiv C(\varepsilon) = \frac{1}{N^2} \sum k_i(\varepsilon);$$

C_2 называется корреляционным интегралом, введенным выше.

Вернемся к методу определения обобщенной размерности D_q и энтропии K_q . Отмеченная связь $-\ln C_q^{(m)}(\varepsilon) = H_q^{(m)}(\varepsilon)$ позволяет выразить обобщенные величины через обобщенный корреляционный интеграл:

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{H_q(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln C_q^{(m)}(\varepsilon)}{\ln \varepsilon},$$

$$K_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} m^{-1} H_q^{(m)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(-\frac{\ln C_q^{(m)}(\varepsilon)}{m} \right).$$

Исходя из полученных соотношений можно ожидать, что при малых ε и достаточно больших m выполняется $\ln C_q^{(m)}(\varepsilon) \cong D_q \ln \varepsilon - K_q m + \text{const}$. Отсюда, кроме оценки D_q , фиксируя масштаб ε и исследуя зависимость от окна реконструкции m , можно получить оценку *обобщенной энтропии динамической системы* K_q .

В работах [17, 18] была предложена иная схема расчета K_2 -энтропии, с использованием представления K_q в виде предела разности $H_q^{(m+1)} - H_q^{(m)}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $m \rightarrow \infty$:

$$K_2 \sim \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} K_2^{(m)}(\varepsilon), \quad K_2^{(m)} = \frac{1}{k\tau} \ln \frac{C^{(m)}(\varepsilon)}{C^{(m+k)}(\varepsilon)}.$$

Здесь $C^{(m)}(\varepsilon)$ – это корреляционный интеграл $C_2^{(m)}(\varepsilon)$. Зависимость $K_2^{(m)}$ от размерности вложения m можно аппроксимировать по методу наименьших квадратов следующей функцией:

$$K_2^{(m)}(\varepsilon) = K_2(\varepsilon) + \frac{b}{m^c},$$

где b и c – некоторые положительные параметры, m – текущая размерность вложения.

Итак, в случае малого фиксированного ε энтропия K_2 определяется как предел $K_2^{(m)}$ при стремлении размерности вложения к бесконечности ($m \rightarrow \infty$).

4. Метод прогноза сингулярный спектральный анализ–«Гусеница»

Суть метода сингулярного спектрального анализа (ССА) состоит в снижении размерности исходного пространства факторов посредством перехода к более информативным переменным – так называемым *главным компонентам*. Таким образом, исходный временной ряд представляется в виде набора составляющих, анализ

которых позволяет судить об его особенностях и продолжить его на прогнозируемый отрезок времени. Метод ССА–«Гусеница» [11] относится к глобальным методам прогноза и используется для выделения периодических и квазипериодических составляющих из временного ряда. Кроме того, метод ССА можно применять для улучшения соотношения сигнал/шум.

Преобразуем исходный временной ряд $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ во множество M -мерных векторов задержек $\mathbf{z}_i = \{x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+M-1}\}$, которые запишем в виде *матрицы задержек*

$$\mathbf{X}_{M \times (N-M+1)} = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_{N-M+1}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{N-M+1} \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{N-M+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_M & x_{M+1} & \dots & x_N \end{pmatrix}.$$

Существует несколько способов предварительной обработки полученной матрицы задержек. В работе [11] приведены способы *центрирования* и *нормирования* матрицы задержек. Поскольку все значения временных рядов, как правило, выражены в равных единицах и имеют примерно равные отклонения от средних значений в каждом векторе задержек, то нормирование проводить не надо. Однако центрирование по строкам (по сути, вычет скользящего среднего) является необходимым.

Этап нахождения главных компонент сводится к поиску собственных векторов и собственных значений матрицы $\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^T$. Для этого находятся матрица собственных векторов $\mathbf{V}_{M \times M}$, в столбцах которой стоят координаты собственных векторов, и матрица собственных значений $\Sigma_{M \times M} = \text{diag } \sigma_i$. При этом предполагаем, что собственные векторы упорядочены по убыванию соответствующих собственных значений, то есть $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_M$.

Перейдем теперь к реконструкции временного ряда на основе выбранных главных компонент. Основная идея состоит в фильтрации при использовании не всех M главных компонент, а лишь r наиболее значимых (определяются по величинам соответствующих собственных значений).

Сделаем несколько замечаний по выбору двух основных параметров M и r . Величина M важна при построении матрицы задержек \mathbf{X} и берется превосходящей ожидаемый период, а при отсутствии такой информации – максимально большой. Число главных компонент r используется при реконструкции ряда и его прогнозировании. Оно определяется по количеству значащих собственных значений. Кроме того, можно использовать априорную информацию о размерности вложения для данного временного ряда.

Аппроксимацию матрицы \mathbf{X} по главным компонентам можно провести как

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{V}_{M \times r} \cdot \mathbf{V}_{M \times r}^T \cdot \mathbf{X},$$

где $\mathbf{V}_{M \times r}$ – часть матрицы собственных векторов (первые r столбцов), соответствующая r главным компонентам. Так как реконструированная матрица задержек $\hat{\mathbf{X}}$ теряет свою «диагональность» по побочным диагоналям, то необходимо провести усреднение по этим диагоналям, на которых изначально (в матрице \mathbf{X}) стояли одинаковые значения. Поскольку метод главных компонент применялся к центрированной матрице задержек, то до усреднения необходимо добавить ко всем столбцам матрицы $\hat{\mathbf{X}}$ вектор средних значений.

При построении прогноза используется так называемый метод «Гусеница», который основан на том, что предсказание ряда на один шаг вперед эквивалентно построению нового вектора в пространстве задержек с единственной неизвестной координатой. Эту одномерную оптимизационную задачу можно решить аналитически.

Выпишем искомый вектор-столбец $\hat{\mathbf{x}}_{N+1} = \{x_{N-M+2}; \dots; x_N; \hat{x}_{N+1}\}$. Условие минимума квадратичного отклонения искомого вектора от своей проекции на выбранную гиперплоскость главных компонент имеет вид

$$\left(\hat{\mathbf{x}}_{N+1} - \mathbf{V}_{M \times r} \cdot \mathbf{V}_{M \times r}^T \cdot \hat{\mathbf{x}}_{N+1}\right)^2 \rightarrow \min_{\hat{x}_{N+1}}.$$

Оптимизация проводится по первой координате этого вектора \hat{x}_{N+1} . Таким образом можно построить прогноз следующего неизвестного значения ряда. Для дальнейшего прогнозирования достаточно добавить координаты найденного вектора $\hat{\mathbf{x}}_{N+1}$ в матрицу \mathbf{X} и снова рассчитать прогноз на следующий шаг. Кроме этого можно повторять весь алгоритм ССА заново, однако для больших рядов это нецелесообразно.

5. Результаты анализа реальных данных

С помощью описанных методов был проведен анализ котировок акций следующих компаний: Toyota Motor Corp. (TM), Deutsche Bank, Honda Motor Co., Ltd., Schlumberger Limited, Starbucks, British Petroleum plc. Выбор этих компаний обусловлен тем, что их акции торгуются на фондовых биржах в течение длительного периода времени (не менее 10 лет), что предоставляет достаточное количество данных для их обработки. Ниже представлен подробный анализ только компании Toyota Motor Corp. Данные для остальных компаний сведены в таблице.

В данной работе исследовались ряды в целом, с использованием только глобальных методов прогноза, для которых необходимо иметь верхнюю оценку размерности вложения и нижнюю оценку времени предсказуемости. Прогнозирование осуществлялось для двух периодов времени:

- 2007 год – так называемый предкризисный период;
- 2008 год – кризисный период.

Это соответствует информации о том, что очередной пик экономической активности в США был достигнут в декабре 2007 года [19].

Анализ достоверности уже построенного прогноза очень важен для оценки эффективности предложенного метода (ССА–«Гусеница»). Поэтому он проводился как по отклонениям предсказанных значений от реальных, так и по разнице соответствующих величин доходностей. Первая оценка предусматривает нахождение максимума модуля отклонения предсказанного значения от реального на горизонте прогноза. Вторая оценка, которая называется еще и логарифмической прибылью, вводится следующим образом [6, 20]. Если $x(t_i)$ – цена акции в момент t_i , $x(t_{i-1})$ – цена акции в предыдущий момент t_{i-1} , то доходность акции суть

$$S_i = \ln \frac{x(t_i)}{x(t_{i-1})}. \quad (5)$$

Легко видеть, что для небольших изменений курса $x(t_i) - x(t_{i-1}) = \Delta x(t_i)$ доходность S_i – это просто относительное изменение $\Delta x(t_i)/x(t_{i-1})$. Кроме того, знак S_i , так же как и знак относительного изменения, показывает динамику котировок. Сравнив знаки предсказанной и реальной доходностей, можно анализировать прогноз по динамике: чем больше совпадений доходностей по знаку, тем лучше прогноз.

Рассмотрим подробно результаты анализа временного ряда котировок акций компании Toyota Motor Corporation за период с 13.04.1993 по 31.12.2008 (3956 значений, см. рис. 1). Для выбранного временного ряда были проделаны все этапы метода корреляционного интеграла. При каждом расчете корреляционный интеграл считался для нескольких значений r при заранее введенном значении предполагаемой размерности вложения m ($m = 1, 2, \dots$). При этом для каждой кривой зависимости $\ln C^{(m)}(\ln r)$ необходимо было выделить линейный участок, на котором предстояло затем построить линейную аппроксимацию и найти корреляционную размерность ν_m . Окончательные результаты получались только после построения графика зависимости $\nu_m(m)$. Значение m , на котором достигалось насыщение, давало искомую размерность вложения d_e , а само значение насыщения ν_m – корреляционную размерность d_c .

Полученные по методу Грассбергера–Прокачиа результаты представлены на рис. 2. Из этих данных нетрудно определить размерность вложения и корреляционную размерность, соответственно: $d_e = 6$ и $d_c \approx 2.64$.

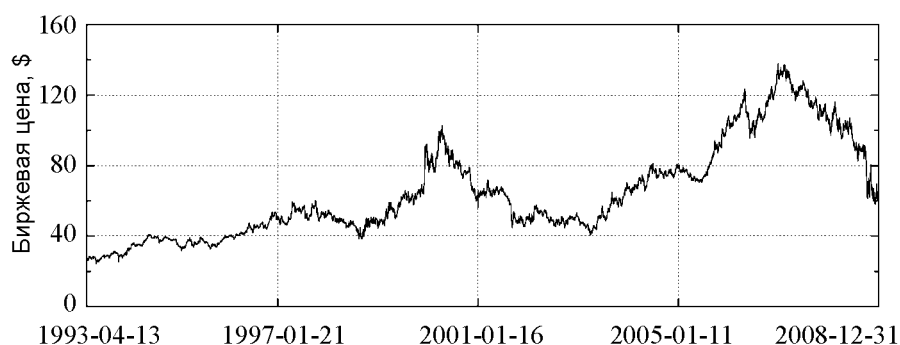


Рис. 1. Динамика цен акций Toyota Motor Corp.

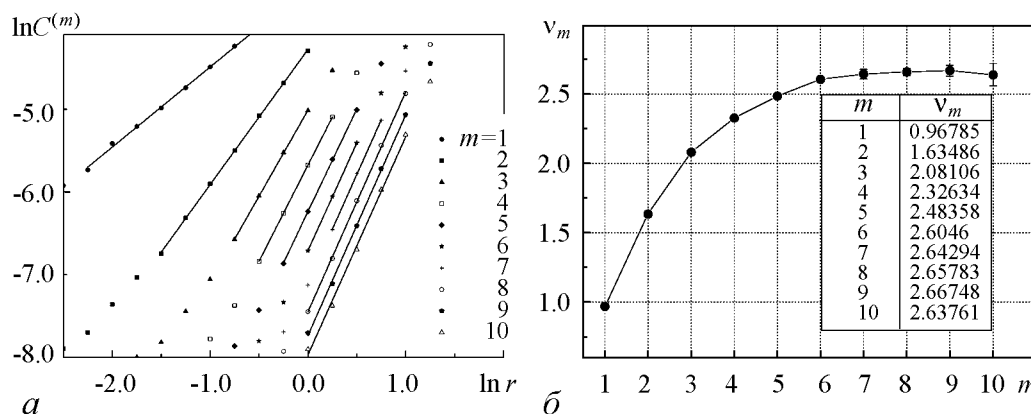


Рис. 2. Графики зависимостей $\ln C^{(m)}(r)$ от $\ln r$ при различных m (а) и ν_m от m (б) для временного ряда котировок ТМ

Опишем теперь метод расчета энтропии K_2 . Для этого применяем методику Грассбергера–Прокаччия, связанную с фиксированием величины r и рассмотрением зависимости $K_2^{(m)}$ от m . При увеличении m значения $K_2^{(m)}$ уменьшаются до некоторой постоянной величины, равной энтропии K_2 . Анализ полученных результатов показан на рис. 3.

Отсюда следует, что энтропия $K_2 \approx 0.1153$. Следовательно, время предсказуемости котировок временного ряда, образованного ценами акций ТМ, составляет $T_p \sim K_2^{-1} \approx 8.67$. Таким образом, рассматриваемый временной ряд теоретически можно прогнозировать на 8 точек (значений). Результаты такого прогноза представлены ниже.

Для прогноза мы использовали метод ССА с количеством главных компонент, равным размерности вложения $d_e = 6$. При этом общее количество компонент положим равным 20, то есть в 4 раза превосходящим ожидаемый период значимых колебаний на рынке (рабочая неделя – 5 дней).

Прогнозы на предкризисный 2007 год. Ниже показаны результаты двух прогнозов в течение предкризисного периода. Начало и конец прогнозируемого участка обозначены пунктирной и штрихпунктирной вертикальными линиями, соответственно. На горизонтальной оси обозначены порядковые номера значений временного ряда, считая от начала торгов этими акциями на бирже по дням. На вертикальной оси отмечены цены акций в долларах США при ежедневном закрытии торгов. При этом реальные значения временного ряда обозначены точками, а аппроксимируемые и прогнозируемые значения соединены сплошной линией.

В качестве примеров прогнозов в течение 2007 года были выбраны следующие отрезки временного ряда (после 24.04.2007 и после 12.09.2007), так как на них проявляются различные тенденции поведения котировок акций, что позволяет продемонстрировать возможности метода прогноза ССА-«Гусеница».

На рис. 4, а представлен прогноз, отличительной чертой которого является идентификация продолжения нисходящего тренда после небольшой коррекции вверх. При этом он имеет максимальное отклонение от реального ряда 0.85, а совпадение знаков доходностей происходит в 6 случаях из 8.

Второй прогноз в течение 2007 года представлен на рис. 4, б. На нем довольно четко прослеживается тенденция продолжающихся колебаний примерно на одном уровне после первоначального падения. При этом предсказанные значения максимально отклоняются от реальных на 1.92, а доходности совпадают по знаку в 6 из 8 случаев.

Прогнозы на кризисный 2008 год. В течение 2008 года для прогноза использовались значения временного ряда после 19.03.2008 и после 27.06.2008, так как на этих участках котировок акций проявляются возможности метода прогноза ССА-«Гусеница» по определению локальных экстремумов.

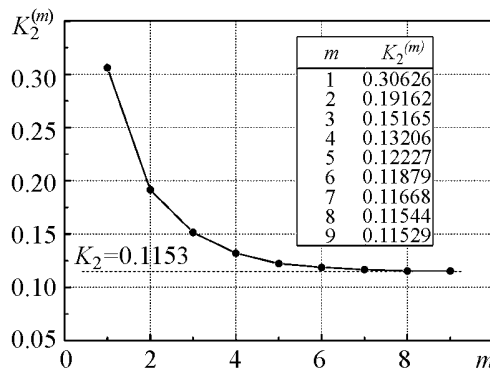


Рис. 3. График зависимости $K_2^{(m)}$ от m для ТМ

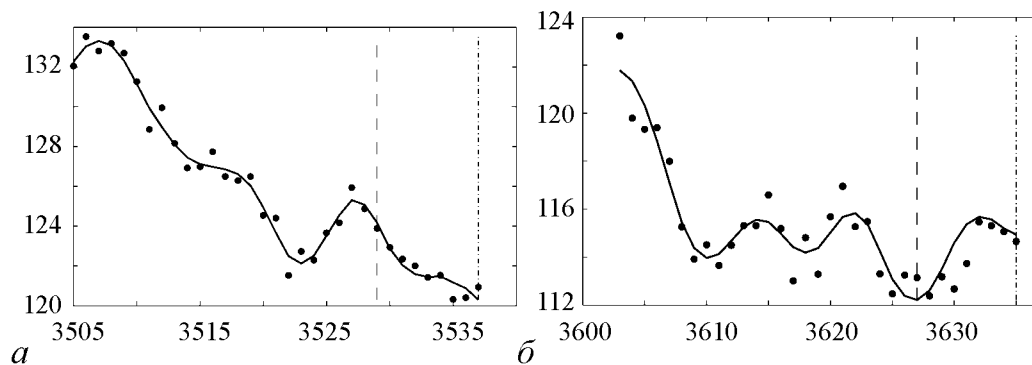


Рис. 4. Реальные данные и прогноз временного ряда котировок ТМ после 24.04.2007 (а) и после 12.09.2007 (б)

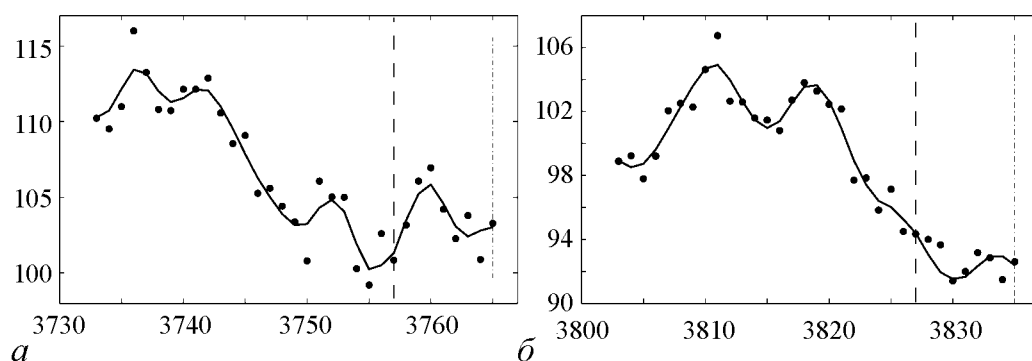


Рис. 5. Прогноз для временного ряда ТМ после 19.03.2008 (а) и после 27.06.2008 (б)

На рис. 5, а представлен прогноз, на котором точно определен момент достижения локального максимума значений временного ряда на горизонте прогноза. При этом наблюдаются серьезные отклонения реальных значений от прогноза, достигающие 1.91. Совпадение знаков доходностей наблюдается в 6 из 8 случаев. Второй прогноз на кризисный период представлен на рис. 5, б. На нем был зафиксирован конец длительного падения котировок и обозначен локальный минимум на горизонте прогноза. При этом спрогнозированные значения максимально отклоняются от реальных на 1.72, а совпадение знаков доходностей происходит в 5 случаях из 8.

Получившиеся прогнозы показывают, что хаотический временной ряд может быть продолжен на ограниченное количество шагов без знания самой системы. Но для этого необходим предварительный анализ *всех* упомянутых методик.

Окончательные результаты расчетов для всех рассмотренных компаний представлены в следующей таблице.

Таблица

Компания	d_e	d_c	K_2	T_p
<i>Schlumberger Limited</i>	7	3.12	0.1656	6.04
<i>Deutsche Bank</i>	6	3.26	0.1208	8.28
<i>Honda Motor Co. Ltd.</i>	7	2.80	0.1495	6.69
<i>Toyota Motor Corp.</i>	6	2.64	0.1153	8.67
<i>Starbucks</i>	7	2.34	0.1389	7.20
<i>BP plc.</i>	6	2.45	0.1403	7.13

Заключительные замечания

В данной работе представлен современный подход к описанию и расчетам таких характеристик, как размерность и энтропия. В качестве приложений были исследованы временные ряды котировок акций нескольких компаний, представляющих разные отрасли производства и оказания услуг. Полученные результаты говорят о возможности довольно точного определения неявных характеристик финансовых временных рядов описанными методами. Таким образом, методы нелинейной динамики действительно позволяют извлечь полезную информацию из общедоступных данных.

Кроме того, полученные результаты интересны как с фундаментальной, так и с практической точки зрения. Во-первых, они показывают, что рассмотренные системы (в данном случае – биржевые цены акций конкретных компаний) являются детерминированными (то есть не стохастическими). Это противоречит широко распространенному мнению о стохастичности финансовых временных рядов. Однако это дает возможность использовать теорию динамических систем и по-иному подойти к анализу биржевых спекуляций, используя теорию размерности и теорию динамических систем.

Во-вторых, конкретные значения найденных инвариантных характеристик могут помочь на практике решить задачу прогноза. Размерность вложения показывает, сколькими предыдущими значениями временного ряда определяется его следующее значение. Энтропия и старший ляпуновский показатель позволяют оценить время предсказуемости системы.

В заключение необходимо сказать о результатах прогнозирования исследуемых финансовых временных рядов. Используемый метод ССА-«Гусеница» проявил себя с лучшей стороны при работе с волатильными финансовыми временными рядами, так как он сочетает в себе ССА-фильтрацию и построение продолжения ряда методом «Гусеница». Для построенных прогнозов видно, что полученные значения котировок и доходности оказываются довольно точными. При этом используемый метод позволяет определить краткосрочные тренды на прогнозируемое время, что еще более важно для инвестора, работающего на временах порядка недели. Таким образом, данный метод прогноза может стать неплохим инструментом для коррекции стратегии поведения инвестора на прогнозируемый период.

А.Ю. Лоскутов признателен профессору В.С. Анищенко за предложение написать данную работу и полезные дискуссии в течение недавно проходившей в СГУ международной конференции StatInfo–2009.

Библиографический список

1. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Основы теории сложных систем. РХД, 2007.
2. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000.
3. Кузнецов С.П. Динамический хаос, 2001.
4. Шустер Г.Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
5. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Современные проблемы нелинейной динамики. М.: УРСС, 2002.

6. *Петерс Э.* Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка. М.: Мир, 2000.
7. *Пу Т.* Нелинейная экономическая динамика. УРСС, 2002.
8. *Kantz H., Schreiber T.* Nonlinear time series analysis. Cambridge University Press, 1997. 304 p.
9. *Abarbanel H.D.I., Brown R., Sidorowich J.J., Tsimring L.S.* The analysis of observed chaotic data in physical systems // *Rev. Mod. Phys.* 1993. № 65. P. 1331.
10. *Mandelbrot B.* The Fractal Geometry of Nature. W.H. Freeman and Company. New York, 1983.
11. Главные компоненты временных рядов: метод «Гусеница». Сб. статей / Ред. Д.Л. Данилов, А.А. Жиглявский. СПб: СПб университет, 1997. 308 с.
12. *Лоскутов А.Ю., Журавлев Д.И., Котляров О.Л.* Применение метода локальной аппроксимации для прогноза экономических показателей // *Вопросы анализа и управления риском.* 2003. Т. 1, № 1.
13. *Истомин И.А., Котляров О.Л., Лоскутов А.Ю.* К проблеме обработки временных рядов: расширение возможностей метода локальной аппроксимации посредством сингулярного спектрального анализа // *Теоретическая и математическая физика.* 2005. Т. 142, № 1.
14. *Packard N.H., Crutchfield J.P., Farmer J.D., Shaw R.S.* Geometry from a time series // *Phys. Rev. Lett.* 1980. Vol. 45. P. 712.
15. *Takens F.* Dynamical systems and turbulence // *Lect. Notes in Math,* Berlin, Springer. 1981. № 898. P. 336.
16. *Grassberger P., Procaccia I.* Characterization of strange attractors // *Phys. Rev. Lett.* 1983. Vol. 50. P. 346.
17. *Grassberger P., Procaccia I.* Measuring the strangeness of strange attractors // *Physica D.* 1983. Vol. 9. P. 189.
18. *Grassberger P., Procaccia I.* Estimation of the Kolmogorov Entropy from a chaotic signal // *Phys. Rev. A.* 1983. Vol. 28, 4. P. 2591.
19. *Илларионов А.* Досрочная рецессия. *Smart Money.* 2008, № 46 (136).
20. *Романовский М.Ю., Романовский Ю.М.* Введение в экономфизику. Статистические и динамические модели. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007.

Поступила в редакцию 8.07.2009

ENTROPY AND FORECASTING OF TIME SERIES IN THE THEORY OF DYNAMICAL SYSTEMS

A.Yu. Loskutov, A.A. Kozlov and Yu.M. Khakhanov

A contemporary consideration of such concepts as dimension and entropy of dynamical systems is given. Description of these characteristics includes into the analysis the other notions and properties related to complicated behavior of nonlinear systems as

embedding dimension, prediction horizon etc., which are used in the paper. A question concerning the application of these ideas to real observables of the economical origin, i.e. market prices of the companies Schlumberger, Deutsche Bank, Honda, Toyota, Starbucks, BP is studied. By means of the method of singular spectrum analysis the forecasting of the market prices of these companies in different phases of the economical cycle – just before crisis and during the crisis – is given. Main advantages and demerits of the method used are found.

Keywords: Entropy, time series, chaos, dimension.



Лоскутов Александр Юрьевич – доктор физико-математических наук, профессор физического факультета МГУ. Область профессиональных интересов – теория динамических систем и ее приложения. Имеет более 130 публикаций в научных журналах, 2 учебника, 4 монографии (2 из которых с соавторами). Лауреат премии им. И.И. Шувалова по математике и физике (1998). Член редакций журналов «Проблемы анализа риска», «Вестник МГУ, серия физика-астрономия», «Nonlinear Biomedical Physics». Приглашенный профессор многих ведущих университетов мира.

119992 Москва, Воробьевы горы
Московский государственный университет, физический факультет
E-mail: loskutov@polly.phys.msu.ru



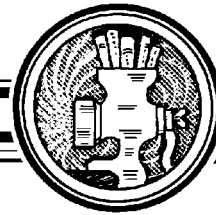
Козлов Александр Александрович – родился в 1986 году в г. Нововоронеж Воронежской области. В 2009 году окончил физический факультет Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, получив диплом магистра физики с отличием.

119992 Москва, Воробьевы горы
Московский государственный университет, физический факультет
E-mail: kozlov@polly.phys.msu.ru



Хаханов Юрий Михайлович – родился в 1986 году в Москве. В 2009 году окончил физический факультет Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, получив диплом магистра физики с отличием.

119992 Москва, Воробьевы горы
Московский государственный университет, физический факультет
E-mail: khakhanov@polly.phys.msu.ru



АВТОКОЛЕБАНИЯ В КВАЗИГАРМОНИЧЕСКОМ И ХАОТИЧЕСКОМ ГЕНЕРАТОРАХ В УСЛОВИЯХ ВОЗДЕЙСТВИЯ ФЛУКТУАЦИЙ

В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова, Г.И. Стрелкова

Представлены результаты классической теории флуктуаций в генераторе квазигармонических колебаний на примере генератора ван дер Поля. Формулируются стохастические уравнения для амплитуды и фазы автоколебаний, анализируются их решения. Рассматриваются автокорреляционная функция и спектр мощности зашумленных автоколебаний. Затем методами численного эксперимента анализируются спектрально-корреляционные характеристики хаотических автоколебательных процессов применительно к генераторам спирального хаоса. Решается задача о статистических характеристиках спирального хаоса как в отсутствие, так и с учетом воздействия шума и проводится сопоставление результатов с классической теорией флуктуаций в генераторе ван дер Поля.

Ключевые слова: Спиральный аттрактор, зашумленные автоколебания, гармонический шум, время корреляции, ширина спектральной линии.

1. Флуктуации в квазигармоническом генераторе

Стохастические уравнения квазигармонического автогенератора. Теория флуктуаций в автоколебательной системе с источником шума была развита в классических работах по статистической радиофизике на примере низкочастотного радиоприемного генератора [1–3]. Основные теоретические результаты касаются квазигармонического режима и получены в условиях ряда упрощающих предположений. Рассматривается аддитивный гауссов δ -коррелированный (белый) шум. Флуктуации фазы и амплитуды во времени предполагаются «медленными» по сравнению с периодом автоколебаний. В рамках спектрально-корреляционного анализа делается предположение о слабом шуме и развитой генерации. В этом случае можно пренебречь флуктуациями амплитуды по сравнению с ее невозмущенным значением.

Эквивалентная схема низкочастотного радиогенератора приведена на рис. 1. Она может быть описана следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2U}{dt_1^2} + \omega_0^2 U = \left(\frac{G_0 - G}{C} - \frac{3bU^2}{C} \right) \frac{dU}{dt_1} - \frac{1}{C} \frac{dI_{ш}(t_1)}{dt_1}, \quad (1)$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ – частота квазигармонических автоколебаний. Переходя к безразмерной переменной $X = U/U_0$ ($U_0 = 1/\sqrt{3bL\omega_0}$) и безразмерному времени

$t = \omega_0 t_1$, получаем следующее стохастическое дифференциальное уравнение СДУ автогенератора:

$$\dot{X} + X = (\varepsilon - X^2)\dot{X} + \sqrt{2D}n(t), \quad (2)$$

где точками обозначены производные по безразмерному времени t . Безразмерный параметр возбуждения $\varepsilon = (G_0 - G)/(C\omega_0)$ управляет режимом генерации. Реальная случайная сила $(-\omega_0 L)/U_0 \cdot dI_{ш}(t)/dt$ заменяется на эквивалентный гауссов белый шум: $\xi(t) = \sqrt{2D}n(t)$, где $\langle n(t) \rangle \equiv 0$, $\langle n(t)n(t + \tau) \rangle = \delta(\tau)$, где $\delta(\tau)$ – функция Дирака; D – константа, задающая интенсивность шума. Скобки $\langle \dots \rangle$ означают статистическое усреднение.

Будем полагать колебания автогенератора близкими к гармоническим, что справедливо при $\varepsilon \leq 0.1$ и $D \ll \varepsilon$ и искать решение (2) в виде

$$\begin{aligned} X(t) &= \rho(t) \cos(t + \varphi(t)), \\ \dot{X}(t) &= -\rho(t) \sin(t + \varphi(t)), \end{aligned} \quad (3)$$

где мгновенная амплитуда $\rho(t)$ и случайная компонента фазы $\varphi(t)$ предполагаются медленно меняющимися функциями по сравнению с периодом колебаний $T_0 = 2\pi$. Подставляя выражения (3) в (2) и производя усреднение за период $T_0 = 2\pi$ получаем систему стохастических уравнений для амплитуды и фазы колебаний

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\rho^2}{8} \right) \rho - \sqrt{2D} \frac{1}{2\pi} \int_t^{t+2\pi} n(\theta) \sin(\theta + \varphi) d\theta, \\ \dot{\varphi} &= -\frac{\sqrt{2D}}{\rho} \frac{1}{2\pi} \int_t^{t+2\pi} n(\theta) \cos(\theta + \varphi) d\theta. \end{aligned} \quad (4)$$

Производя усреднение слагаемых, содержащих источник шума $n(t)$, приходим к классической стохастической модели квазигармонического автогенератора

$$\dot{\rho} = \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\rho^2}{8} \right) \rho + \frac{D}{2\rho} + \sqrt{D}n_1(t), \quad \dot{\varphi} = \frac{\sqrt{D}}{\rho}n_2(t), \quad (5)$$

где $n_1(t)$ и $n_2(t)$ – независимые источники гауссова белого шума, для которых $\langle n_i(t) \rangle = 0$, $\langle n_{ik}(t)n_{ik}(t + \tau) \rangle = \delta_{ik}\delta(\tau)$, $i, k = 1, 2$, δ_{ik} – символ Кронекера.

Флуктуации амплитуды автоколебаний. Первое уравнение системы (5) не содержит фазы колебаний и его можно рассматривать независимо от фазового уравнения. Его решение есть одномерный диффузионный процесс $\rho(t)$ с плотностью вероятности $p_\rho(\rho, t)$, удовлетворяющей следующему уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова:

$$\frac{\partial p_\rho(\rho, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left[\left(\left(\frac{1}{2}\varepsilon - \frac{\rho^2}{8} \right) \rho + \frac{D}{2\rho} \right) p_\rho(\rho, t) \right] + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 p_\rho(\rho, t)}{\partial \rho^2}. \quad (6)$$

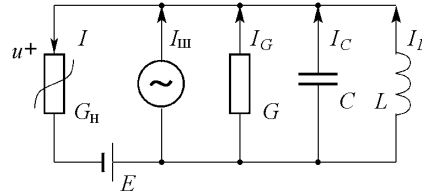


Рис. 1. Эквивалентная схема низкочастотного радиофизического генератора с источниками шума: $G_n(U)$ – нелинейная проводимость с вольт-амперной характеристикой $I = -G_0U + bU^3$; G, C, L – постоянные проводимость, емкость и индуктивность, соответственно; $I_{ш}$ – эквивалентный шумовой ток, учитывающий все источники внутренних шумов системы; E – постоянное питание

Стационарное решение уравнения (6) имеет вид

$$p_{\rho}^{\text{ст}}(\rho) = C\rho \exp \left[-\frac{1}{16D}(\rho^2 - \rho_0^2)^2 \right], \quad (7)$$

где $\rho_0 = 2\sqrt{\varepsilon}$ – невозмущенное (в отсутствие шума) значение амплитуды колебаний; C – нормировочная константа, определяемая из условия

$$\int_0^{\infty} p_{\rho}^{\text{ст}}(\rho) d\rho = 1. \quad (8)$$

На рис. 2 приведены распределения амплитуды, полученные для различных значений интенсивности шума D . При слабом шуме плотность вероятности $p_{\rho}^{\text{ст}}$ существенно отлична от нуля только в окрестности невозмущенного значения амплитуды ρ_0 . Наивероятное значение амплитуды ρ_m , соответствующее максимуму плотности вероятности, практически совпадает с невозмущенным значением ρ_0 и только

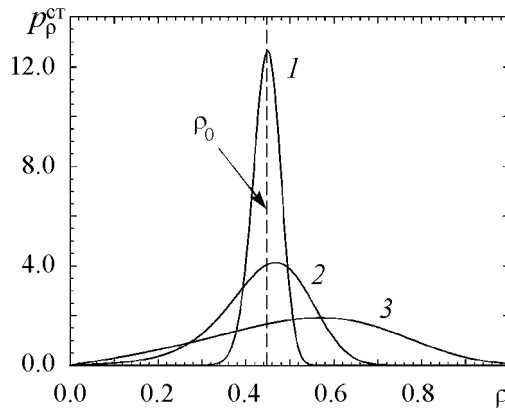


Рис. 2. Стационарные распределения амплитуды, рассчитанные по формуле (7) при различных значениях константы D : 1 – 0.0001; 2 – 0.001; 3 – 0.01. Пунктирной линией отмечено невозмущенное значение амплитуды

при больших интенсивностях шума начинает смещаться вправо от ρ_0 . Кроме того, для слабого шума (кривая 1) график плотности вероятности $p_{\rho}^{\text{ст}}(\rho)$ почти симметричен относительно ρ_0 . Это означает, что среднее значение амплитуды также близко к невозмущенному значению: $\bar{\rho} = \langle \rho(t) \rangle \approx \rho_0$.

При условии слабого шума и достаточно развитой генерации ($D \ll \varepsilon$) флуктуации амплитуды $\tilde{\rho}(t) = \rho(t) - \rho_0$ малы и могут быть описаны следующим линейным СДУ:

$$\dot{\tilde{\rho}} + \varepsilon \tilde{\rho} = \sqrt{D} n_1(t). \quad (9)$$

Оно задает так называемый одномерный процесс Орнштейна–Уленбека. Это –

гауссов диффузионный процесс. Так как в сделанных предположениях $\bar{\rho} \approx \rho_0$, то можно положить $\langle \tilde{\rho}(t) \rangle \equiv 0$. В пределе $t \rightarrow \infty$ процесс, задаваемый СДУ (9), является стационарным процессом с дисперсией

$$\sigma_{\tilde{\rho}}^2 = \langle \tilde{\rho}^2(t) \rangle = \frac{D}{2\varepsilon} \quad (10)$$

и экспоненциально спадающей автокорреляционной функцией

$$\psi_{\rho}(\tau) = \langle \tilde{\rho}(t) \tilde{\rho}(t + \tau) \rangle = \sigma_{\tilde{\rho}}^2 \exp(-\varepsilon|\tau|), \quad \tau = t_2 - t_1. \quad (11)$$

Случайная фаза автоколебаний. Случайная компонента фазы автоколебаний φ задается вторым уравнением системы (5), правая часть которого зависит от мгновенной амплитуды $\rho(t)$. В случае слабого шума ($D \ll \varepsilon$) и развитой генерации ($0 < \varepsilon < 1$) мы можем пренебречь амплитудными флуктуациями по сравнению с

невозмущенным значением ρ_0 и заменить переменную величину $\rho(t)$ на константу ρ_0 . В таком приближении приходим к модели винеровского процесса для флуктуаций фазы $\varphi(t)$

$$\dot{\varphi} = \sqrt{2B_\varphi} n_2(t), \quad (12)$$

где $B_\varphi = \text{const}$ – коэффициент диффузии фазы, определяемый выражением

$$B_\varphi = \frac{1}{2} \frac{D}{\rho_0^2} = \frac{D}{8\varepsilon}, \quad \rho_0 = 2\sqrt{\varepsilon}. \quad (13)$$

Таким образом, $\varphi(t)$ – это нестационарный гауссов процесс со средним значением, определяемым начальным состоянием $\langle \varphi(t) \rangle = \varphi(t_0)$ и линейно растущей во времени дисперсией

$$\sigma_\varphi^2(t) = \frac{1}{2} B_\varphi \cdot (t - t_0). \quad (14)$$

Очевидно дисперсия полной фазы автоколебаний $\Phi(t) = t + \varphi(t)$ совпадает с $\sigma_\varphi^2(t)$. Из замены (3) следует, что фаза $\Phi(t)$ автогенератора (2) в любой момент времени может быть вычислена как

$$\Phi(t) = \text{arctg} \left(\frac{-\dot{X}(t)}{X(t)} \right) \pm \pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

Выбор целого k определяется условием непрерывности функции $\Phi(t)$. Результат численного расчета дисперсии мгновенной фазы $\Phi(t)$ автогенератора (2) представлен на рис. 3. Угловой коэффициент численно полученной линейной зависимости полностью совпадает с теоретическим значением $2B_\varphi = D/4\varepsilon = 0.0005$.

Кроме переменной $\varphi(t) \in (-\infty; \infty)$ часто рассматривают случайную фазу, принимающую значения в ограниченном интервале $[-\pi; \pi]$ или $[0; 2\pi]$,

$$\phi(t) = \varphi(t) + 2\pi\nu, \quad (16)$$

где ν – некоторая целочисленная случайная функция. Представляя колебания в виде $X(t) = \rho(t) \cos(t + \varphi(t))$ можно заменить переменную $\varphi(t)$ на переменную $\phi(t)$. В силу 2π -периодичности косинуса процесс $X(t)$ от этого не изменится, однако использовать ограниченную переменную $\phi(t)$ в некоторых случаях оказывается удобнее, поскольку она имеет в пределе $t \rightarrow \infty$ стационарное равномерное распределение.

Автокорреляционная функция и спектр автоколебаний в присутствии шума. В рамках квазигармонического приближения можно получить известное выражение для автокорреляционной функции (АКФ) колебаний в зашумленном автогенераторе, задаваемом укороченными СДУ (5)

$$\psi_X(\tau) = \frac{1}{2} (\psi_\rho(\tau) + \rho_0^2) e^{-B_\varphi |\tau|} \cos \tau, \quad \tau = t_2 - t_1, \quad (17)$$

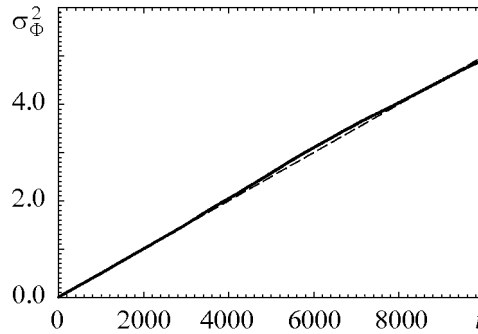


Рис. 3. Зависимость дисперсии мгновенной фазы Φ от времени, полученная численно для системы (2) при $\varepsilon = 0.05$, $D = 0.0001$ (сплошная линия) и по формуле (14) (штриховая линия)

где $\psi_\rho(\tau)$ определяется выражением (11). При выводе выражений (17), флуктуации амплитуды относительно невозмущенного значения ρ_0 предполагаются малыми, так что в фазовом уравнении можно положить $\rho(t) = \rho_0$. Тем самым мы пренебрегаем статистической зависимостью мгновенной фазы от мгновенной амплитуды и приходим к модели винерова процесса для фазы φ . При малой интенсивности шума $D \ll \varepsilon$ такое приближение является вполне приемлемым. На рис. 4 представлена нормированная АКФ колебаний генератора (2) $\Psi_X(\tau) = \psi_X(\tau)/\psi_X(0)$, полученная численно непосредственно из определения АКФ процесса $X(t)$

$$\psi_X(\tau) = \langle X(t)X(t+\tau) \rangle - \langle X(t) \rangle \langle X(t+\tau) \rangle, \quad (18)$$

где в предположении эргодичности процесса $X(t)$ статистическое усреднение $\langle \dots \rangle$ заменялось усреднением по времени. Для сравнения на том же графике пунктиром

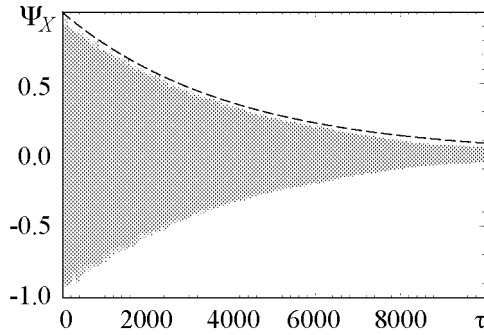


Рис. 4. Нормированная АКФ колебаний $X(t)$ в системе (2) при $\varepsilon = 0.05$, $D = 0.0001$, рассчитанная по формуле (18) (серый цвет), и нормированная огибающая, соответствующая теоретическому выражению (17) (штриховая линия)

нанесена нормированная огибающая теоретической автокорреляционной функции, рассчитанная при тех же значениях параметров ε и D по формуле (17). Можно видеть, что приближенная теория и численный результат находятся в полном соответствии. С ростом интенсивности шума флуктуации амплитуды будут возрастать и их влияние на поведение мгновенной фазы станет существенным. В этом случае результаты вычислений по формуле (17) и данные численного моделирования могут заметно отличаться.

Спектральная плотность стационарного случайного процесса $X(t)$ связана с АКФ следующим соотношением:

$$G_X(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_X(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau + 4\pi \bar{X}^2 \delta(\omega), \quad j = \sqrt{-1}, \quad \omega \geq 0. \quad (19)$$

Учитывая, что среднее значение \bar{X} равно нулю, получаем спектр в виде суммы двух лоренцианов, со спектральными максимумами на частоте невозмущенных автоколебаний, приведенной к единице:

$$\begin{aligned} G_X(\omega) &= G_I(\omega) + G_{II}(\omega), \\ G_I(\omega) &= \frac{\rho_0^2 B_\varphi}{B_\varphi^2 + (\omega - 1)^2}, \\ G_{II}(\omega) &= \frac{\sigma_\rho^2 (B_\varphi + \varepsilon)}{(B_\varphi + \varepsilon)^2 + (\omega - 1)^2} \approx \frac{\sigma_\rho^2 \varepsilon}{\varepsilon^2 + (\omega - 1)^2} \quad (B_\varphi \ll \varepsilon). \end{aligned} \quad (20)$$

Слагаемое G_I связано с флуктуациям фазы. Ширина этой компоненты на уровне половинной мощности равна $2B_\varphi$, а значение в максимуме есть ρ_0^2/B_φ . Поскольку при слабом шуме величина B_φ очень мала, то лоренциан G_I является очень узким и высоким. Напротив, слагаемое G_{II} определяется, главным образом, флуктуациями амплитуды. Ширина этой компоненты на уровне половинной мощность есть примерно 2ε , то есть относительно велика, а значение в максимуме, приблизительно

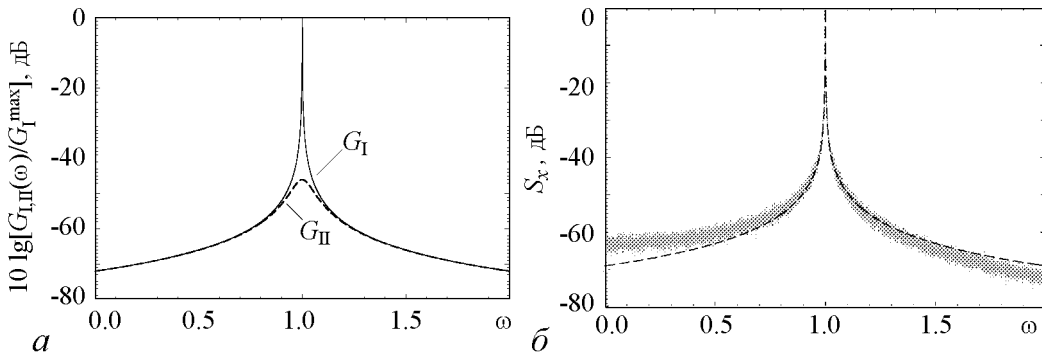


Рис. 5. Спектральные характеристики автогенератора при $\epsilon = 0.05$, $D = 0.0001$: a – нормированные функции $G_I(\omega)$ и $G_{II}(\omega)$, рассчитанные по формулам (20) в децибелах; b – нормированный спектр колебаний $X(t)$, полученный численно для системы (2) (серая сплошная линия) и теоретически по формулам (20) (штриховая линия)

равное σ_p^2/ϵ , мало. Таким образом, при условии слабого шума и развитой квазигармонической генерации спектр автоколебаний состоит из узкой спектральной линии на частоте автогенерации, ширина которой определяется коэффициентом диффузии фазы и широкополосного низкого пьедестала, в основном связанного с амплитудными флуктуациями.

Рассчитанные по формулам (20) слагаемые G_I и G_{II} , отнормированные на величину $G_I^{\max} = G_I(1)$, представлены на рис. 5, a . На рис. 5, b приведен нормированный спектр колебаний генератора (2)

$$S_X(\omega) = 10 \lg \left[\frac{G_X(\omega)}{G_X^{\max}} \right], \quad (21)$$

полученный численно. Здесь $G_X^{\max} = G_X(1)$. Штриховой линией показан теоретический спектр. При выбранных параметрах данные приближенной теории достаточно хорошо соответствуют численному эксперименту.

2. Спектрально-корреляционный анализ автоколебаний в генераторах спирального хаоса (численные исследования)

Спиральный хаотический аттрактор детально изучен и представляет собой очень распространенный пример негиперболического хаотического аттрактора, типичный для широкого класса динамических систем. Для спирального хаотического аттрактора характерно почти регулярное вращение фазовой траектории вокруг состояния равновесия и наличие четко выраженного спектрального максимума на частоте, соответствующей средней частоте вращения. По указанным причинам к спиральному аттрактору можно применить амплитудно-фазовое описание [2, 3].

Классический пример автогенератора хаоса – осциллятор Рёсслера. Уравнения осциллятора имеют вид

$$\dot{x} = -y - z, \quad \dot{y} = x + \alpha y, \quad \dot{z} = \beta + z(x - \mu). \quad (22)$$

В (22) будем полагать, что $\alpha = \beta = 0.2$, а μ рассматривать в качестве управляющего параметра. В зависимости от выбора значения μ система может находиться в режиме периодических автоколебаний, спирального или винтового хаотического аттрактора.

Другим примером служит модифицированный генератор с инерционной нелинейностью (ГИН)

$$\dot{x} = mx + y - z + bx^3, \quad \dot{y} = -y, \quad \dot{z} = -gz + gf(x). \quad (23)$$

В качестве нелинейной характеристики $f(x)$ в (23) может быть выбрана любая положительно определенная при $x > 0$ функция, не являющаяся четной. Будем полагать

$$f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|). \quad (24)$$

Параметры m и g управляют режимом автогенератора, который, как и в осцилляторе Рёсслера, может быть периодическим или хаотическим.

Мгновенную фазу $\Phi(t)$ автогенераторов (22) и (23) введем аналогично фазе в генераторе ван дер Поля (15) как угол вращения изображающей точки на плоскости динамических переменных x, y

$$\Phi(t) = \left| \arctg \left(\frac{y(t)}{x(t)} \right) \pm \pi k \right|, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (25)$$

Величина $\pm \pi k$ выбирается таким образом, чтобы фаза была непрерывной функцией времени. Мгновенная амплитуда колебаний есть длина радиус-вектора, исходящего из начала координат,

$$\rho(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}. \quad (26)$$

Рассмотрим режим спирального аттрактора в модели (22) при $\mu = 6.5$. Вид (x, y) -проекции (рис. 6, *a*) соответствует режиму спирального аттрактора. Распределение амплитуды $\rho(t)$ хаотических колебаний (рис. 6, *б*) сильно отличается от аналогичного распределения в зашумленном квазигармоническом генераторе (см. рис. 2) и в окрестности среднего значения амплитуды $\rho_0 = \langle \rho(t) \rangle$ является далеким от гауссова. Разумеется, автоколебания осциллятора Рёсслера сильно отличаются от квазигармонических автоколебаний зашумленного осциллятора ван дер Поля. В то же время, с точки зрения поведения мгновенной фазы и связанных с ней характеристик наблюдается много общего. Распределение флуктуаций мгновенной фазы $\varphi(t) = \Phi(t) - \langle \Phi(t) \rangle$, рассчитанное на ансамбле фазовых траекторий одинаковой длины, достаточно хорошо аппроксимируется гауссовым законом (рис. 6, *в*). Дисперсия мгновенной фазы хаотических автоколебаний растет почти линейно (рис. 6, *г*) подобно тому, как она росла в квазигармоническом осцилляторе с шумом (см. рис. 3).

Можно оценить по методу наименьших квадратов угловой коэффициент линейного роста дисперсии. Половину этого коэффициента называют эффективным коэффициентом диффузии мгновенной фазы хаотических автоколебаний B_{φ} . Для рассматриваемого режима в модели (22) было получено значение $B_{\varphi} = 0.00018 \pm 10^{-5}$. Напомним, что в данном случае диффузия фазы связана не с шумом, а только с детерминированной динамикой системы (22), в которой шум отсутствует.

Остановимся более подробно на спектрально-корреляционных характеристиках спирального хаоса. Как показывают расчеты, АКФ колебаний $x(t)$ в системе (22) в режиме спирального аттрактора очень хорошо аппроксимируется выражением (17), где вместо B_{φ} следует взять B_{φ} . На рис. 7, *a* приведен результат расчета АКФ колебаний $x(t)$ в системе (22) по формуле (18) с учетом нормировки. Там же изображена

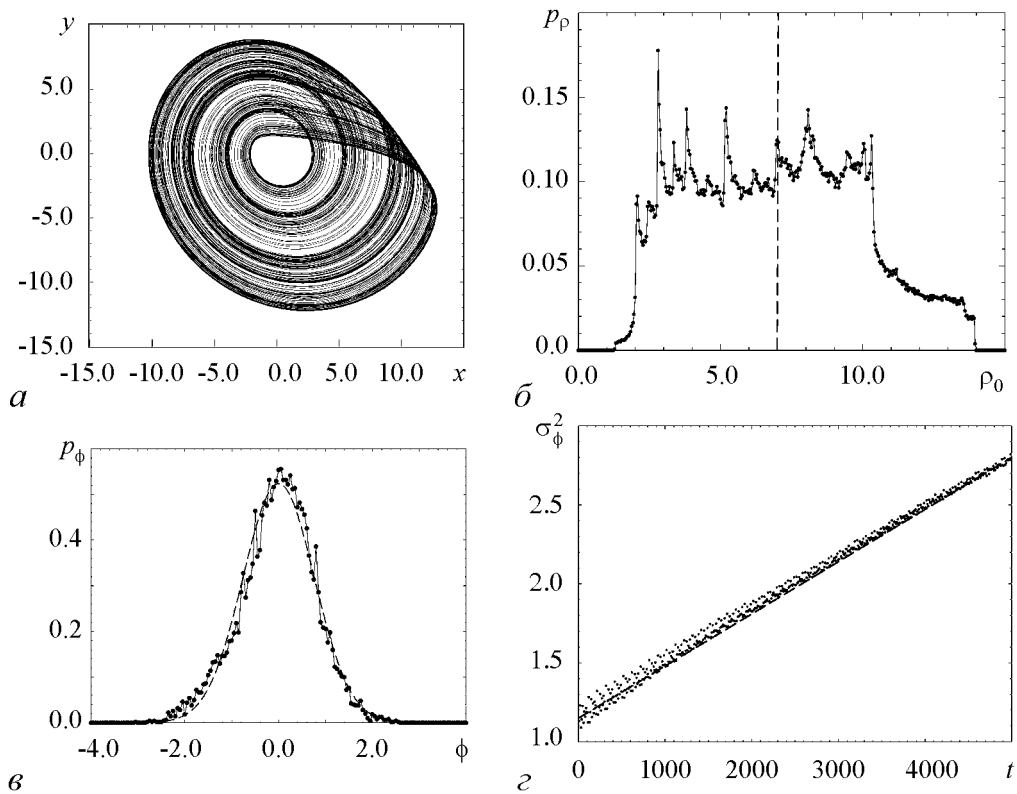


Рис. 6. Характеристики спирального аттрактора в модели (22) при $\mu = 6.5$: *a* – (x, y) -проекция аттрактора; *б* – распределение амплитуды хаотических колебаний; *в* – распределение флуктуаций мгновенной фазы в момент $t = 1000$ при начальном распределении в пределах интервала $[-\pi/30; \pi/30]$ и его гауссова аппроксимация (штриховая линия); *г* – зависимость дисперсии мгновенной фазы от времени (точки) и ее линейная аппроксимация (штриховая линия)

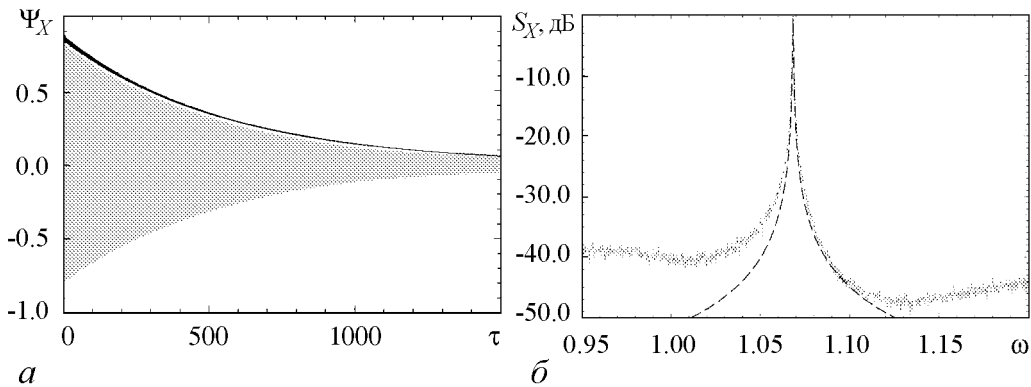


Рис. 7. Результаты спектрально-корреляционного исследования хаотических автоколебаний в системе Рёсслера (22) при $\mu = 6.5$: *a* – нормированная АКФ колебаний $x(t)$ в системе (22), рассчитанная по формуле (18) (серые точки), и нормированная огибающая, соответствующая выражению (17) при $B_\phi = B_{\phi_0}$ (черные точки); *б* – фрагмент нормированного спектра колебаний $x(t)$ (сплошная серая кривая) и аппроксимация основной спектральной линии по формуле (27) (штриховая линия). При аппроксимации использовались численно полученные значения коэффициента эффективной диффузии фазы B_{ϕ_0} и частоты максимума ω_0 : $B_{\phi_0} = 0.00018 \pm 10^{-5}$; $\omega_0 = 1.0683 \pm 10^{-4}$

нормированная огибающая, соответствующая выражению (17) при $B_\varphi = B_{\text{эф}}$ и численно полученных значениях $\psi_\rho(\tau)$. Таким образом, учитывалось поведение не только фазы, но и амплитуды колебаний, так как в рассматриваемом хаотическом режиме флуктуации амплитуды являются существенными. На рис. 8 приведены результаты расчета ненормированной автокорреляционной функции амплитудных флуктуаций $\psi_\rho(\tau)$. Как видно из графика, $\psi_\rho(\tau)$ при $\tau = 0$ имеет значительную величину и резко

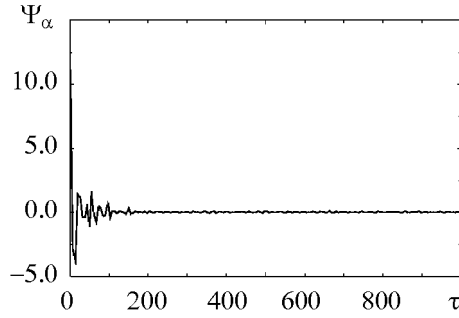


Рис. 8. Результаты расчета ненормированной автокорреляционной функции амплитудных флуктуаций $\psi_\rho(\tau)$ для системы Рёсслера (22) при $\mu = 6.5$

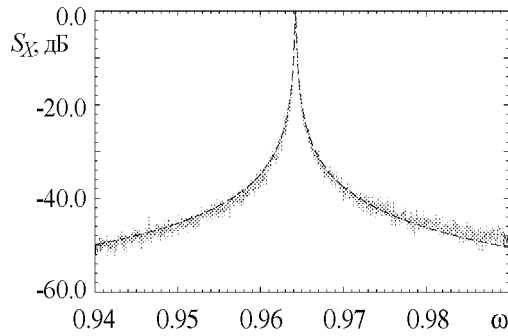


Рис. 9. Фрагмент нормированного спектра колебаний $x(t)$ в (23) при $m = 1.35$, $g = 0.21$, $b = 0.0001$ (сплошная серая линия) и аппроксимация основной спектральной линии по формуле (27) с коэффициентом эффективной диффузии фазы $B_{\text{эф}} = 0.00008 \pm 10^{-5}$ и частотой максимума $\omega_0 = 0.9642 \pm 10^{-4}$ (штриховая линия)

без учета амплитудных флуктуаций. Последние проявляются в спектре в форме широкополосного пьедестала на уровне менее -40 дБ. Ширина основной спектральной линии на уровне половинной мощности определяется коэффициентом эффективной диффузии фазы и, в пределах погрешности численных расчетов, равна $2B_{\text{эф}}$.

Аналогичные результаты были получены для генератора с инерционной нелинейностью (23) (рис. 9) и для других моделей хаотических автогенераторов в режиме спирального аттрактора, что позволяет говорить об их универсальном характере.

Влияние белого шума на хаотические автоколебания в режиме спирального аттрактора. Исследуем, как повлияет аддитивный белый шум на поведение мгновенной фазы хаотических автоколебаний в режиме спирального аттрактора. Рассмотрим модель (22), добавив в нее белый гауссов шум $n(t)$ ($\langle n(t)n(t+\tau) \rangle = \delta(\tau)$),

$$\dot{X} = -Y - Z + \sqrt{2D}n(t), \quad \dot{Y} = X + \alpha Y, \quad \dot{Z} = \beta + Z(X - \mu), \quad (29)$$

Именно с амплитудными флуктуациями связан спад на начальном участке АКФ, который заметен на графике рис. 7, а. Фрагмент нормированного спектра колебаний $x(t)$ в том же режиме представлен на рис. 7, б. Пунктирной линией изображена аппроксимация спектральной линии по формуле

$$S_x(\omega) = 10 \lg \left[\frac{G_x(\omega)}{G_x^{\max}} \right] = 10 \lg \left[\frac{B_{\text{эф}}^2}{B_{\text{эф}}^2 + (\omega - \omega_0)^2} \right], \quad (27)$$

где $\omega_0 = 1.0683 \pm 10^{-4}$ — численно полученная частота главного спектрального максимума, совпадающая в пределах погрешности вычислений со средней частотой хаотических колебаний $\omega_{\text{ср}}$, определяемой выражением

$$\omega_{\text{ср}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Phi(t_0 + T) - \Phi(t_0)}{T}. \quad (28)$$

Таким образом, основная спектральная линия в режиме спирального аттрактора хорошо аппроксимируется лоренцианом в соответствии с (20), причем даже

где D – параметр, управляющий интенсивностью шумового воздействия. Численное исследование модели (29) и других моделей спирального хаоса показывает, что воздействие слабого белого шума не приводит к качественным изменениям поведения системы, в частности, характера поведения мгновенной фазы, однако, может существенно увеличить скорость перемешивания за счет увеличения коэффициента эффективной диффузии фазы. Исследуем зависимость коэффициента эффективной диффузии фазы $B_{эф}$ от интенсивности белого шума в системе (29). Как следует из теории квазигармонического автогенератора, диффузия фазы прямо-пропорциональна интенсивности шума D . Можно предположить линейный характер зависимости $B_{эф}(D)$ и в случае хаотического генератора, но при этом необходимо учесть, что хаотические автоколебания в отсутствие шума обладают собственным коэффициентом эффективной диффузии фазы $B_{эф}(0)$. Тогда получим

$$B_{эф} = c_1 D + c_2, \quad (30)$$

где c_1 – некоторый коэффициент пропорциональности, определяемый характеристиками хаотических колебаний, а $c_2 = B_{эф}(0)$ – коэффициент эффективной диффузии фазы хаотических автоколебаний при $D = 0$. На рис. 10 в логарифмическом масштабе представлена зависимость $B_{эф}$ от интенсивности шума D , полученная численно для модели (29). Штриховой линией изображена ее линейная аппроксимация (30). Коэффициенты c_1 и c_2 находились по методу наименьших квадратов. В целом данные численного эксперимента разбросаны в окрестности линейной зависимости, причем полученное в результате линейной аппроксимации значение $c_2 = 0.00020$ близко к численно найденному значению коэффициента диффузии: $B_{эф}(0) = 0.00018$. Соответственно с ростом $B_{эф}$ возрастает скорость экспоненциального затухания АКФ хаотических колебаний и ширина основной спектральной линии.

Исследование динамики мгновенной фазы и спектральных характеристик автогенератора со спиральным аттрактором в физическом эксперименте. Статистические характеристики источников шума, неизбежно присутствующих в реальных устройствах, не всегда удается правильно определить. Поэтому, установленные для математической модели закономерности в реальности могут нарушаться. Чтобы подтвердить наблюдаемость установленных закономерностей, в реальных системах были проведены соответствующие физические эксперименты. Была создана измерительная установка, включающая исследуемую систему, компьютер, АЦП, и генератор гауссова широкополосного шума с полосой частот от 0 до 100 кГц (рис. 11).

В качестве исследуемой системы был выбран модифицированный ГИН, представляющий собой реальный радиотехнический автогенератор с мостом Вина и цепочкой инерционной нелинейности, контролирующей коэффициент усиления усилительного каскада. В безразмерных переменных математическая модель ГИН задается системой уравнений (23). Значения параметров m и g выбирались соответствующими режиму спирального хаоса. При заданной настройке моста Вина основная частота хаотических колебаний f_0 составляла 18.5 кГц. Частота дискретизации АЦП

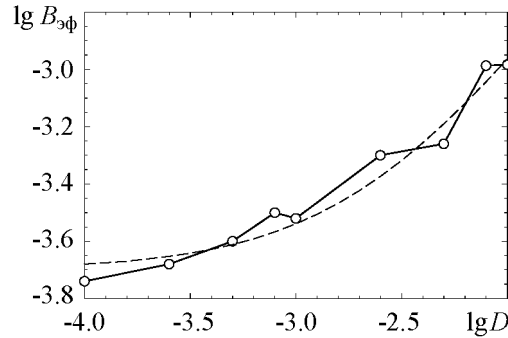


Рис. 10. Зависимость коэффициента эффективной диффузии фазы $B_{эф}$ от интенсивности шума D (сплошная кривая) и ее линейная аппроксимация по методу наименьших квадратов (штриховая линия)

выбиралась равной 694.44 кГц. Кроме внутренних источников шума на экспериментальный генератор воздействовал широкополосный шум от внешнего генератора, интенсивность которого можно было регулировать.

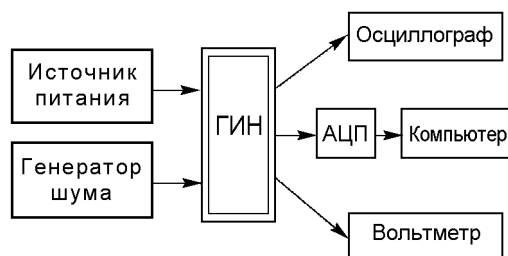


Рис. 11. Схема экспериментальной установки

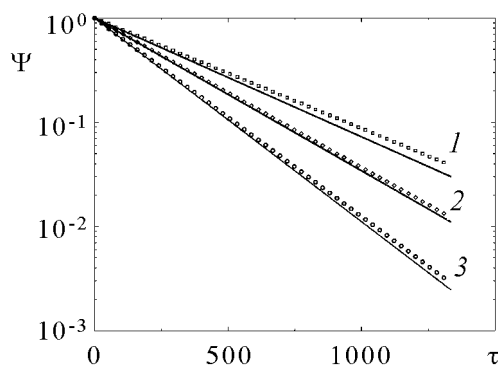


Рис. 12. Огибающие автокорреляционных функций (сплошные линии), полученные в эксперименте при различных значениях дисперсии внешнего шума D : 1 – 0, 2 – 0.0005 мВ, 3 – 0.001 мВ, и их экспоненциальные аппроксимации («кружочки») с декрементами затухания $B_{эф}$: 0.00024, 0.00033, 0.000439, соответственно

эффективной диффузии мгновенной фазы, найденный по экспериментальным данным (флуктуации амплитуды в ГИН относительно малы, так что при аппроксимации АКФ их можно не учитывать).

Аналогичные результаты физических экспериментов, находящиеся в полном соответствии с результатами численных исследований, были получены также для аналоговой модели осциллятора Рёсслера. Таким образом, физические эксперименты показали, что спектрально-корреляционные свойства хаотических автоколебаний в режиме спирального аттрактора и их связь с коэффициентом эффективной диффузии фазы являются достаточно грубыми по отношению к характеристикам источников шума и четко наблюдаются в экспериментах.

Заключение

Результаты анализа статистических характеристик колебаний зашумленного квазигармонического генератора на примере классической модели ван дер Поля показали следующее. Воздействие слабого δ -коррелированного шума приводит к установлению в генераторе случайных колебаний, математической моделью которых служит так называемый «гармонический шум»

$$X(t) = \rho(t) \cos [\omega_0 t + \varphi(t)]. \quad (31)$$

Здесь $\rho(t) = \rho_0 + \tilde{\rho}(t)$ – случайная амплитуда, $\varphi(t)$ – случайная фаза процесса $X(t)$. Причем, в силу фильтрующих свойств резонансного контура генератора, флуктуации амплитуды $\tilde{\rho}(t)$ и фазы $\varphi(t)$ являются медленно меняющимися функциями в сравнении с периодом $T = 2\pi/\omega_0$ колебаний генератора.

Автокорреляционная функция случайного процесса $X(t)$ выражается следующим образом:

$$\psi_X(\tau) = \frac{1}{2}(\psi_\rho(\tau) + \rho_0^2) \exp(-B_\varphi|\tau|) \cos \omega\tau, \quad (32)$$

где $\psi_\rho(\tau)$ – АКФ амплитудных флуктуаций. Для квазигармонического зашумленного генератора амплитудные флуктуации малы и огибающая АКФ $\psi(\tau)$ спадает с ростом τ экспоненциально. Скорость спада определяется коэффициентом диффузии случайной фазы B_φ , которая представляет собой нестационарный винеровский процесс.

Выражения (31) и (32) могут быть применены к описанию статистических процессов в генераторах спирального (или фазокогерентного) хаоса. В этом случае вместо коэффициента диффузии фазы B_φ нужно использовать эффективный коэффициент диффузии фазы $B_{\varphi\text{эф}}$. При этом отметим, что в режиме спирального хаоса даже в отсутствие флуктуаций $B_{\varphi\text{эф}} > 0$. Этот факт еще раз убедительно свидетельствует о том, что режим детерминированного хаоса проявляет свойства случайного процесса, несмотря на то, что обусловлен детерминированными динамическими закономерностями.

Работа выполнена в рамках АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы на 2009–2010 годы» Министерства образования и науки РФ (грант № 2.2.2.2/229) и при поддержке Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF).

Библиографический список

1. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.
2. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Окрокверцхов Г.А., Стрелкова Г.И.* Статистические свойства динамического хаоса // УФН. 2005. Т. 175, № 2. С. 163.
3. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е.* Регулярные и хаотические автоколебания. Синхронизация и влияние флуктуаций. М.: Интеллект, 2009.

Поступила в редакцию 23.06.2009

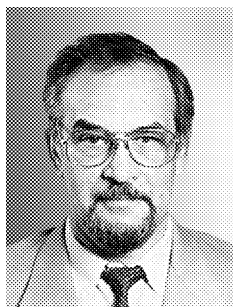
SELF-SUSTAINED OSCILLATIONS IN QUASIHARMONIC AND CHAOTIC OSCILLATORS IN THE PRESENCE OF FLUCTUATIONS

V.S. Anishchenko, T.E. Vadivasova, G.I. Strelkova

The paper presents the results of the classical theory of fluctuations in the quasi-harmonic van der Pol oscillator. Stochastic equations for amplitude and phase of self-sustained oscillations are formulated and then their solutions are analyzed. The auto-correlation function and power spectrum of noisy self-sustained oscillations are studied.

Then the spectral and correlations characteristics of chaotic self-sustained oscillations are numerically analyzed in spiral chaos oscillators. Statistical characteristics of spiral chaos are explored both without and in the presence of fluctuations, and the obtained results are compared with the classical theory of fluctuations in the van der Pol oscillator.

Keywords: Spiral attractor, noisy self-sustained oscillations, harmonic noise, correlation time, spectral line width.



Анищенко Вадим Семенович – родился в 1943 году. Окончил физический факультет СГУ (1966). Защитил диссертацию на звание кандидата физико-математических наук (1970) и доктора физико-математических наук (1986). С 1988 года – заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. С 1979 и по настоящее время работает в области исследования нелинейной динамики и стохастических процессов в нелинейных системах. Является автором более 350 научных работ, среди которых 14 монографий на русском и английском языках и 6 учебников. Неоднократно читал лекции в ведущих вузах Германии в качестве приглашенного профессора. Член-корреспондент РАН, заслуженный деятель науки РФ (1995), Саратовский профессор, лауреат премии Фонда Александра Гумбольдта (1999).

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: wadim@info.sgu.ru



Вадивасова Татьяна Евгеньевна – родилась в 1958 году. Окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981), доктор физико-математических наук. В настоящее время – профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических осцилляторов, явление фазовой мультистабильности взаимодействующих хаотических систем, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, статистические характеристики динамического хаоса, роль флуктуаций в нелинейных системах и др. Автор более 60 публикаций в отечественной и зарубежной печати, включая 3 монографии.

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: vadivasovate@yandex.ru



Стрелкова Галина Ивановна – окончила Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского (1993), защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1998). С 1994 года работает на кафедре радиофизики и нелинейной динамики ведущим инженером, с 2008 года – доцентом. Область научных интересов – теория колебаний, нелинейная динамика, синхронизация. Опубликовала в соавторстве научную монографию «Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах», 35 научных статей и 3 учебных пособия.

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: strelkovagi@info.sgu.ru



СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА
И ИНФОРМАЦИОННЫЕ
ТЕХНОЛОГИИ
«Statinfo–2009»

Международная школа-семинар

*К 100-летию Саратовского
государственного университета*

Саратов, III корпус СГУ, 2–5 июня 2009

Организаторы

- Международный НИИ нелинейной динамики Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (СГУ)
- Кафедра радиофизики и нелинейной динамики СГУ
- Научно-образовательный центр «Нелинейная динамика и биофизика» при СГУ
- При поддержке Саратовского государственного университета
- При поддержке Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF)

Программный комитет

Анищенко В.С., д.ф.-м.н., профессор СГУ; *Шиманский-Гайер Л.*, профессор Гумбольдтского университета, Берлин, Германия; *Астахов В.В.*, д.ф.-м.н., профессор СГУ; *Вадивасова Т.Е.*, д.ф.-м.н., профессор СГУ; *Лоскутов А.Ю.*, профессор МГУ, Москва; *Четвериков А.П.*, д.ф.-м.н., профессор СГУ

Оргкомитет

Анищенко В.С., председатель, профессор; *Четвериков А.П.*, заместитель председателя, профессор; *Малова С.Ю.*, ведущий инженер; *Стрелкова Г.И.*, ведущий инженер; *Маляев В.С.*, заведующий учебной лабораторией; *Астахов С.В.*, аспирант; *Коблянский С.А.*, аспирант

ПРОГРАММА ШКОЛЫ-СЕМИНАРА

2 июня 2009

Открытие школы-семинара StatInfo-2009

Лекционная сессия, председатель профессор *А.П. Четвериков*

С.П. Кузнецов (Саратов, филиал ИРЭ РАН) Гиперболические аттракторы систем, допускающих физическую реализацию

С.А. Смолянский (Саратов, СГУ) Вакуумное рождение частиц в сильных полях: статистические аспекты

В.П. Рябухо (Саратов, СГУ) Продольная когерентность оптического поля

В.М. Аникин (Саратов, СГУ) Спектральные задачи для оператора Перрона-Фробениуса

Сессия стендовых докладов, председатель доцент *А.Н. Павлов*

3 июня 2009

Лекционная сессия, председатель профессор *В.С. Анищенко*

Л. Шиманский-Гайер (Берлин, ун-т им. А. Гумбольдта) Coherence and synchronization of stochastic oscillations

А.С. Дмитриев (Москва, ИРЭ РАН) Ultra wideband wireless sensor networks based on chaotic pulses

И. Соколов (Берлин, ун-т им. А. Гумбольдта) Nonstationarity and ergodicity breaking in continuous-time random walks and related models

А.С. Лоскутов (Москва, МГУ) Энтропия и прогноз в теории динамических систем: Мифы и реальность

Сессия стендовых докладов, председатель сессии профессор *А.П. Четвериков*

4 июня 2009

Лекционная сессия, председатель сессии профессор *В.В. Астахов*

В.С. Анищенко (Саратов, СГУ) Флуктуации в генераторах квазигармонических и хаотических колебаний

Т.Е. Вадивасова (Саратов, СГУ) Бифуркации в системах с шумом

А.А. Короновский (Саратов, СГУ) Характеристики перемежающегося поведения

А.В. Шабунин (Саратов, СГУ) Количественный анализ хаотической синхронизации

Сессия стендовых докладов, председатель сессии зав. лабораторией *В.С. Маляев*

5 июня 2009

Лекционная сессия, председатель сессии доцент *А.В. Шабунин*

Б.П. Безручко (Саратовский филиал ИРЭ РАН) Моделирование процессов в приложениях к задачам биомедицины и климатологии

Н.Г. Макаренко (С.-Петербург, Главная (Пулковская) Астрономическая Обсерватория) Мультифрактальный анализ цифровых изображений

А.Н. Павлов (Саратов, СГУ) Вейвлет-анализ динамики биологических систем

Закрытие школы-семинара



К ОТКРЫТИЮ РАЗДЕЛА «МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ»

В этом номере журнала открывается новый раздел «Моделирование глобальных процессов». Это связано, прежде всего, с развитием глобалистики как нового междисциплинарного научного направления, с расширением внимания научного сообщества к глобальным процессам в природе и обществе, стремлением понять, осмыслить, научиться прогнозировать глобальные процессы и кризисные события. Глобалистика проникает во все сферы человеческой деятельности (сегодня изучаются политические, экономические, экологические и иные глобальные процессы). Математические модели глобальных процессов являются нелинейными, что позволяет использовать при их анализе аппарат синергетики и нелинейной динамики.

В Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова с 2005 года работает во многом уникальная научно-образовательная структура – факультет глобальных процессов, основной задачей которого является широкое исследование глобальных процессов и подготовка специалистов с широким кругозором выпускника классического университета, способных к глобальному мышлению. Не случайно именно факультет глобальных процессов МГУ выступил с инициативой организации и проведения Международного научного Конгресса «Глобалистика-2009», который прошел в МГУ 21–23 мая 2009 года и включал отдельную секцию «Моделирование, прогнозирование и предвидение глобальных процессов». В рамках Конгресса состоялась также деловая встреча Саратовской делегации (ее представляли сотрудники факультета нелинейных процессов и кафедры геоэкологии СГУ) с руководством факультета глобальных процессов МГУ, на которой была достигнута договоренность о сотрудничестве. Открытие нового раздела в журнале «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика» – первый реальный шаг в этом направлении.

Надеемся, что сотрудничество факультета глобальных процессов МГУ и факультета нелинейных процессов СГУ будет развиваться и систематически отражаться на страницах журнала. Новый раздел «Моделирование глобальных процессов» открывает обзор наиболее интересных проблем, раскрытых в докладах Конгресса, подведены итоги Конгресса и намечены пути дальнейшего сотрудничества.

Абылгазиев И.И., профессор, научный руководитель факультета глобальных процессов МГУ; *Трубецков Д.И.*, чл.-корр. РАН, научный руководитель факультета нелинейных процессов СГУ; *Ильин И.В.*, профессор, декан факультета глобальных процессов МГУ; *Левин Ю.И.*, профессор, декан факультета нелинейных процессов СГУ



**О ВОЗМОЖНОСТЯХ МОДЕЛИРОВАНИЯ
И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ГЛОБАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ:
По материалам Международного научного Конгресса
«Глобалистика-2009»**

И.И. Абылгазиев, И.В. Ильин, Д.И. Трубецков, А.В. Иванов

20–23 мая 2009 года в Москве впервые состоялся Международный научный Конгресс «Глобалистика-2009: пути выхода из глобального кризиса и модели нового мироустройства». Основным организатором Конгресса являлся Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова при участии Российской академии естественных наук, Российской экологической академии, Российского философского общества и содействии Научно-производственной корпорации «Интеллектуальные системы». Конгресс проводился по инициативе факультета глобальных процессов МГУ. Председатель организационного комитета Конгресса – ректор МГУ имени М.В. Ломоносова, вице-президент РАН, академик РАН В.А. Садовничий; сопредседатель – научный руководитель факультета глобальных процессов МГУ, профессор, доктор исторических наук, Главный федеральный инспектор по г. Москва Аппарата Полномочного представителя Президента Российской Федерации в Центральном федеральном округе И.И. Абылгазиев.

В организации и работе Конгресса приняли участие более 500 представителей крупнейших научно-образовательных центров, общественных организаций и делового мира России, Азербайджана, Великобритании, Германии, Казахстана, Латвии, Литвы, Монголии, Нидерландов, Польши, Соединенных Штатов Америки, Таджикистана, Туниса, Турции, Узбекистана, Украины, Чехии, Швеции.

Торжественное открытие и пленарное заседание Конгресса состоялось 21 мая в конференц-зале 1-го учебного корпуса гуманитарных факультетов МГУ.

Участникам и гостям Конгресса были розданы сборники тезисов, программа мероприятий, а также издаваемый факультетом глобальных процессов сборник работ его преподавателей и научных сотрудников «Глобалистика как область научных исследований и сфера преподавания» (М.: Изд-во МГУ, 2008, вып. 2), а также специально изданные к началу Конгресса книги И.В. Ильина и А.В. Иванова «Введение в глобальную экологию» (М.: Изд-во МГУ, 2009), В.И. Купцова «Образование, наука, мировоззрение и глобальные вызовы XXI века» и другие. От Российского философского общества и НПК «Интеллектуальные системы» всем участникам Конгресса были подарены энциклопедии «Глобалистика» (М.: Радуга, 2002).

Торжественное открытие Конгресса вел сопредседатель организационного комитета Конгресса проф. И.И. Абылгазиев. Во вступительном слове он особо отметил широту географии и дисциплинарного охвата Конгресса: только его российские участники представляли вузы и научные центры 33 субъектов федерации, различные науки: математику, геологию, биологию, географию, медицину, философию, экономику, историю, психологию, педагогику, юриспруденцию, политологию, социологию, филологию, культурологию, технические науки. Среди участников Конгресса – 15 академиков и членов-корреспондентов государственных академий наук, более 100 докторов наук. Приветствия организаторам и участникам Конгресса направили Полномочный представитель Президента Российской Федерации в Центральном федеральном округе Г.С. Полтавченко и мэр Москвы Ю.М. Лужков. С развернутым докладом об антикризисных действиях Правительства Москвы – единственного в России мегаполиса и одного из мировых финансово-экономических центров – выступил Первый заместитель мэра Москвы Ю.В. Росляк. В выступлении другого почетного гостя Конгресса, известного полярного исследователя, члена-корреспондента РАН А.Н. Чилингарова, посвященном геополитическому значению Арктики, отмечалась важность укрепления международных договоренностей и международно-правовых норм в условиях глобализации.

Большой интерес участников и гостей Конгресса вызвал доклад президента Российской экологической академии, директора Института глобального климата и экологии Федеральной службы по гидрометеорологии и мониторингу окружающей среды РАН, заместителя председателя Межправительственной группы экспертов по изменению климата при ООН, удостоенной Нобелевской премии в 2007 году, академик РАН Ю.А. Израэля «Глобализация и климат – новая проблема современности». В докладе были не только представлены последние данные о причинах и перспективах развития и преодоления глобального потепления, вызванного повышенной продукцией парниковых газов, но и показаны возможности для другого направления изменения климата Земли, в частности, локального или глобального похолодания, вызванного изменением солености участков мирового океана, извержением крупных вулканов и другими, в том числе, антропогенными процессами. В Институте, возглавляемом акад. Ю.А. Израэлем, уже несколько лет ведутся работы по созданию специальных аэрозолей, содержащих безвредные для природы соединения. Будучи распыленными на большой высоте, эти аэрозоли отражают солнечный свет и тем самым вызывают уменьшение температуры на поверхности Земли. Первые эксперименты с этими аэрозолями были удачными и показали перспективность данного направления исследований.

Доклад президента Российской академии естественных наук, ректора Университета «Дубна» О.Л. Кузнецова был посвящен современному состоянию и реализации концепта «устойчивого развития» и его важности в условиях глобального кризиса. По его словам, разразившийся кризис является шансом для политического и экономического руководства стран мира пересмотреть взгляды на устойчивое развитие, признать его принципы единственно правильными и неизбежными.

В докладе декана факультета глобальных процессов МГУ доцента И.В. Ильина были затронуты современные проблемы глобалистики как мультидисциплинарной сферы научного знания, отмечена важность развития научного подхода к основным понятиям и определениям глобалистики, классификации методов решения

стоящих перед ней задач, развития практического приложения ее достижений. Перед руководством и преподавательским составом факультета глобальных процессов стоит опережающая задача оптимизации учебной программы подготовки соответствующих специалистов, что обуславливает необходимость интенсивной научной и общественной деятельности факультета, приглашения для преподавания специалистов и ученых разных областей знания и практической деятельности.

Одним из наиболее интересных и значимых докладов Конгресса стало выступление иностранного члена Российской академии наук, главного научного сотрудника Института математических исследований сложных систем имени И.Р. Пригожина МГУ А.А. Акаева, подготовленное им совместно с директором Института, академиком В.А. Садовничим. Тема доклада «О новой методологии долгосрочного циклического прогнозирования динамики развития мировой и российской экономики» как нельзя более точно соответствовала основной теме Конгресса. В настоящее время, по словам Аскара Акаевича, грядет (и уже реализуется наиболее передовыми в технологическом отношении странами) активная смена технологического уклада. Для России, уже потерявшей в начале 80-х годов прошлого века возможность для лидерства при переходе к так называемому пятому укладу, сейчас вновь предоставляется шанс для будущего экономического успеха. Работы, ведущиеся под руководством акад. В.А. Садовнича, математически развивают экономическую теорию длинных волн Н.Д. Кондратьева, концепцию о взаимодействии развития кластеров базисных инноваций и определенных фаз этих волн. Данные работы во многом превосходят достижения американских математиков, сделавших несколько лет назад прогноз для развития мировой экономики до 2050 года.

Научный руководитель факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета член-корреспондент РАН Д.И. Трубецков рассказал об истории и перспективах становления математического моделирования и его применения для изучения глобальных процессов. В качестве примеров были рассмотрены такие глобальные процессы и модели, как рост народонаселения Земли (начиная с простых моделей, предложенных Р. Перлом, базирующихся на логистическом уравнении, и заканчивая моделью С.П. Капицы, демонстрирующей автомодельное решение), «Мировая динамика» Форрестора и различные варианты модели и др.

Богатый иллюстрациями доклад директора Института антропологии имени Д.Н. Анучина (МГУ), доктора исторических наук, члена-корреспондента РАН А.П. Бужилова «Глобальные тенденции и их локальные проявления в биологии человека» также привлек большое внимание собравшихся, поскольку давал обзор изменений физических параметров и физиологического состояния человека, произошедших за последние столетия. Обращает на себя внимание тот факт, что изменение длины тела в последние годы вовсе не однозначно направлено в сторону увеличения; так, ожирение, распространенное среди подростков в некоторых развитых странах, сопровождается даже некоторым уменьшением их средней длины тела. Кроме того, А.П. Бужилова рассмотрела и некоторые гипотезы о будущем изменении антропологических параметров.

В эмоциональном и ярком выступлении академик Российской академии образования В.И. Купцов рассказал о своем видении современных проблем образования в условиях глобализации. По его словам, являющиеся глобальными тенденциями деинтеллектуализация (снижение качества преподавания точных и естественных наук)

и дегуманизация (потеря глубины преподавания гуманитарных дисциплин) в школьном и высшем образовании недопустимы.

В большом выступлении профессор Анджей Кисе (Будапештский университет, Венгрия) представил «десять тезисов о глобализации»: о ее влиянии на международные отношения, на роль государства в современном мире, на современные ценности, о роли либерализма в процессе глобализации, о размывании определения и самого представления об акторах в процессе глобализации и ряд других интересных гипотез.

В работе Конгресса приняла участие представительная делегация американских научно-образовательных центров – Мичиганского университета и Университета Южной Флориды. Конгресс приветствовали проректор, руководитель центра исследований Восточной Европы и России Мичиганского университета профессор Норман Грэхэм.

Вечером 21 мая в рамках культурной программы Конгресса состоялся Праздничный вечер, посвященный Всемирному дню многообразия культур во имя диалога и развития, очередной годовщине создания факультета глобальных процессов и Году молодежи в России и СНГ.

22 мая работа Конгресса продолжилась в рамках семи секций: «Философские аспекты глобалистики» (председатель – проф. А.Н. Чумаков, сопредседатели – проф. Э.В. Гирусов, проф. В.А. Лось); «Глобализация и образование» (председатель – академик В.И. Купцов, сопредседатели – проф. Н.М. Мамедов, доц. И.В. Ильин); «Политическая глобалистика и международные отношения» (председатель – проф. П.А. Цыганков, сопредседатели – проф. О.Г. Леонова, к.и.н К.В. Миньяр-Белоручев); «Человек в глобализирующемся мире» (председатель – чл.-корр. РАН Б.Г. Юдин, сопредседатели – чл.-корр. РАН А.П. Бужилова, доц. А.И. Андреев); «Геоэкология и глобалистика» (председатель – чл.-корр. РАН В.И. Данилов-Данильян, сопредседатели – чл.-корр. РАН Д.И. Трубецков, доц. А.В. Иванов); «Моделирование и прогнозирование глобальных процессов» (председатель – акад. А.А. Акаев, сопредседатели – проф. Г.Г. Малинецкий, проф. А.В. Коротаев); «Экономическое измерение глобализации» (председатель – д.э.н И.В. Ивахнюк, сопредседатели – доц. Ю.Н. Максимов, доц. И.А. Алешковский). Было заслушано и обсуждено около 200 докладов. Кроме того, ученые рассмотрели, обсудили и приняли за основу проекты резолюций отдельных секций.

Специальные исследования в области нелинейной динамики глобальных систем и процессов, а также синергетические идеи в целом были сосредоточены в формате **специальной секции «Моделирование и прогнозирование глобальных процессов»**. Доклады, сделанные на этой секции, представляют особый интерес для читателей журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».

Работа секции показала, что глобальные процессы могут быть исследованы с помощью математических методов, более того, такие работы активно ведутся. Как результат можно выделить два устоявшихся направления в исследованиях – моделирование и прогнозирование. Первое характеризуется выработкой математических моделей, описывающих взаимосвязь ключевых параметров (параметров порядка) системы. Второе предполагает построение конечного набора сценариев развития системы.

Следует особо отметить выступления признанных специалистов в этой области. Г.Г. Малинецкий поставил ряд вопросов-провокаций: Возможна ли в ближайшем будущем мировая война? Кто может быть ее участниками? Каковы сценарии, определяющие роль России в этих вопросах? Автор доклада показал современные тенденции и обрисовал перспективы развития. Интерес вызвали выступления Д.С. Чернавского и С.Ю. Майкова с серией докладов.

В рамках геополитических исследований была проиллюстрирована модель «борьбы условных информационных», на базе которой были рассмотрены следующие вопросы: стратегии «Восток» и «Запад», структура и иерархия, цикличность. При анализе эколого-экономических глобальных процессов рассмотрено: истощение ресурсов и утилизация отходов, схема «устойчивого развития», эколого-экономическое критическое состояние как «скрытое» банкротство. В качестве антикризисных рекомендаций для России предложены результаты анализа динамической модели нестационарных процессов с неоднородной социально-экономической структурой общества.

А.В. Коротаев и А.С. Малков предложили вниманию слушателей модель взаимодействия центра и периферии Мир-Системы. Прослежена взаимосвязь таких параметров, как численность населения, грамотность и доля ВВП на душу населения. Проиллюстрирована динамика поведения двух частей системы. Отдельное внимание авторы уделили длинным волнам Кондратьева: анализ инвестиционной активности; динамика появления крупных корпораций.

В.И. Пантин, признанный эксперт в области длинных волн, сделал обзорный доклад о перспективах развития в первой половине XXI века. Были поставлены вопросы: Какую роль играют циклы Кондратьева? Сохранятся ли эти тенденции в перспективе?

Выступление А.В. Акимова было посвящено вопросам ресурсных ограничений: К чему, с экономической точки зрения, ведет глобальная нехватка питьевой воды и продовольствия? Насколько могут быть значимыми для России инновации в отрасли сельского хозяйства? Каковы преимущества России в контексте ресурсных ограничений? На основе собственных исследований автор дал конкретные, четкие ответы на поставленные вопросы.

Научная группа под руководством Ю.Н. Павловского продемонстрировала результат, полученный с помощью (разработанной авторским коллективом) эколого-демографо-экономической модели (ЭДЭМ).

В целом, секция прошла успешно. Авторы докладов представили свои разработки в области исследования глобальных процессов. Рассмотрен широкий круг аспектов, связанных с данной тематикой. Были намечены пути развития и возможности взаимного сотрудничества.

Участниками секции была принята резолюция, основные положения которой выглядят следующим образом.

1) Участники секции констатируют принципиальное значение работ по моделированию, прогнозированию глобальных процессов для определения коридора возможностей человечества и российской цивилизации в XXI веке для формирования национальной социально-экономической, научно-технической и военной стратегий и выработки на этой основе последовательной научно обоснованной государственной политики.

2) Участники секции обращают внимание на высокий научный уровень работ, представленных на Конгрессе и выполненных в России. Особое внимание участниками обращено на прогнозы нынешнего кризиса, сделанные 5 лет назад, и в полной мере оправдавшиеся.

3) Участники подчеркнули принципиальное значение подпрограммы «Математическое моделирование и системный анализ мировой динамики» (руководитель – акад. В.А. Садовничий, ответственные исполнители – иностранный член РАН А.А. Акаев, проф. Г.Г. Малинецкий, проф. А.В. Кортаев, ведущая организация – Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН) программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Экономика и социология знаний» для всего комплекса работ по проектированию будущего в России.

4) Участники обратили внимание на недостаточность ресурсной поддержки принципиально важных направлений исследований, обсуждавшихся на секции, со стороны государственных органов Российской академии наук, а также Российского фонда фундаментальных исследований и Российского гуманитарного научного фонда. Участники считают целесообразным проведение в рамках указанных фондов целевых конкурсов исследовательских проектов, посвященных проектированию будущего на серьезной научной, междисциплинарной основе.

5) Участники секции считают целесообразным обратиться с руководством РАН и других заинтересованных организаций с просьбой поддержать создание ежеквартального международного научного журнала, посвященного математическому моделированию мировой динамики.

6) Участники обратили внимание на необходимость расширения фронта научных исследований, посвященных проектированию будущего, развитию междисциплинарных подходов в этой области, использованию в задачах прогноза концепций, методов и моделей нелинейной динамики. В выступлениях указывалось на большой размах подобных работ в США и других ведущих странах, на организацию ежегодно десятков международных конференций по этой проблематике. В плане финансирования, числа привлеченных исследователей, знакомства научной общественности с полученными результатами наша страна сильно отстает от зарубежного уровня.

7) Отмечена недостаточность влияния работ по моделированию, прогнозированию и предвидению мировой, региональной и национальной динамики, выполняемых в России, на работу государственных органов, на экспертизу принимаемых государственных решений, на лиц, принимающих решения в важнейших сферах жизнедеятельности. Решено рекомендовать участникам и организаторам Конгресса «Глобалистика-2009» обратить внимание государственных органов на отсутствие эффективной обратной связи между принятием законодательных актов и решений исполнительной власти и научным сообществом, занимающимся прогнозом, моделированием и проектированием будущего.

8) Предложено обратить внимание на скорейшую подготовку и публикацию монографий, посвященных математическому моделированию глобальных процессов, и, в частности, монографии «Системный анализ и математическое моделирование мировой динамики», посвященной важнейшим результатам, полученным участниками секции, формулировке открытых проблем и обсуждению наиболее важных направлений дальнейшего исследования.

9) Следует обратить внимание на имеющийся в высшей школе России опыт междисциплинарного образования (факультет глобальных процессов Московского государственного университета, факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета, кафедра прикладной математики факультета управления и прикладной математики Московского физико-технического института и др.) и желательность распространения в высшей школе и академических институтах большого опыта, накопленного в этой важной области.

Вечером 22 мая состоялся Круглый стол «Мировой антиэкономический кризис и антикризисные гуманитарные стратегии» (ведущий – член Общественной палаты РФ А.В. Чадаев). Итоги Круглого стола отражены в интернет-издании liberty.ru. 23 мая состоялись Круглые столы «Устойчивое развитие: перезагрузка. Мир будущего: Земля, Техника, Человек» (соведущие: акад. А.А. Акаев, член-корр РАН Д.И. Трубецков и проф. А.Н. Чумаков) и «Многообразие культур перед вызовами глобализации» (ведущий – заместитель директора Института Европы, проф. д.и.н. А.А. Громыко). Одновременно для молодых ученых, аспирантов и студентов, участников Конгресса, Центром инновационных образовательных технологий ФГП МГУ была проведена дидактическая ролевая игра «Макроэкономическая модель "Капитал"».

На заключительном пленарном заседании Конгресса с сообщениями об итогах работы секций и других мероприятий Конгресса выступили их председатели и наиболее активные участники: акад. А.А. Акаев, проф. А.Н. Чумаков, проф. Н.М. Мамедов, проф. П.А. Цыганков, проф. А.В. Маслихин (Марийский государственный университет, секция «Человек в глобализирующемся мире»), доц. Ю.Н. Максимов, доц. А.В. Иванов, руководитель Центра инновационных образовательных технологий ФГП Д.И. Земцов. В проектах резолюций секций и Круглых столов изложены не только основные причины финансово-экономического кризиса, предложены пути выхода из него и модели нового мироустройства, но и приводится перспектива взаимодействия ученых в деле развития научно-организационной, образовательной и просветительской деятельности в сфере глобалистики. Одним из таких направлений взаимодействия станет представленная профессором А.Н. Чумаковым социально-информационная сеть globalistics.org, созданная в рамках проекта «Кто есть кто и Что есть что в глобалистике». Проект начат в этом году и ведется совместно факультетом глобальных процессов МГУ, Российским философским обществом и Научно-производственной корпорацией «Интеллектуальные системы». Другой перспективной инициативой оргкомитета стало предложение декана факультета глобальных процессов МГУ И.В. Ильина о создании Международной ассоциации исследователей глобальных процессов.

Участники Конгресса единодушно отметили успех его проведения. Резолюции и рекомендации секций и Круглых столов Конгресса в ближайшее время будут доработаны и найдут отражение в ведущих научных изданиях. По итогам Конгресса готовится итоговый сборник на русском и английском языках. Следующий Конгресс «Глобалистика» Московский университет примет через два года. Он будет посвящен 300-летию со дня рождения М.В. Ломоносова.

9 июля 2009

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина*
Оформление художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, О.Н. Строгановой
в пакете $L^A T_E X$

Подписка на 2010 год осуществляется
по каталогу Агентства Роспечать
«Газеты. Журналы», индекс 73498,
и по договору между Подписчиком
(юридическим или физическим лицом)
и Издателем (Саратовским государственным университетом)

Стоимость подписки на 2010 год 600 руб. (6 номеров)
Заявки на заключение договора принимаются
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64
E-mail: and@nonlin.sgu.ru

Распространение журнала осуществляется
редакцией журнала по адресной системе

Сдано в набор 1.09.09. Подписано к печати 12.10.09
Формат 70x108/16. Бумага «Балет». Печать трафаретная
Усл. печ. л. 11,9(8,5). Уч.-изд. л. 11,0. Тираж 200. Заказ 415

Отпечатано на ризографе GR 3750 редакции журнала

© Редакция журнала
«Известия вузов. ПНД», 2009
© Оформление художника
Д.В. Соколова, 2009